

Transporte e ressuspensão de sedimentos finos por ondas sobre um leito viscoelástico

Juliana S. Ziebell,

Instituto de Matemática, Estatística e Física, IMEF, FURG,
96201-900, Rio Grande, RS
E-mail: julianaziebell@furg.br, jusziebell@gmail.com,

Leandro Farina

UFRGS - Instituto de Matemática Pura e Aplicada
91509-900, Porto Alegre, RS
E-mail: farina@mat.ufrgs.br.

Resumo:

Soluções numéricas da equação do transporte unidimensional que descrevem a evolução da concentração de sedimentos suspensos sobre um leito viscoelástico foram obtidas para alguns casos particulares.

Usando o modelo viscoelástico generalizado de [5] para definir a camada de lama viscoelástica, obtivemos uma nova equação do transporte unidimensional para esse mesmo problema.

Palavras-chave: Ondas em fluidos, Lama viscoelástica, Equação do transporte

1 Introdução

O movimento dos sedimentos no fundo de um meio aquático, causado pelo fluido, tem sido considerado um importante problema a ser estudado na engenharia costeira e na geologia [4].

O artigo [4] apresentou uma teoria analítica para ondas harmônicas simples sobre um fundo plano, a fim de examinar como ondas transportam sedimentos finos sozinhas, sem o efeito do vento, pela convecção e difusão, depois de ressuspê-los do fundo. Para obter essa equação o método de múltiplas escalas foi empregado.

Já se uma camada de água está sobre uma camada de lama fluida, seu movimento oscilatório pode ser alterado. Desse modo, o transporte de partículas suspensas na camada limite que fica sobre a interface entre as duas camadas também pode ser modificado, tornando-se um interessante objeto de estudo.

De acordo com [1], o modelo mais adequado para representar as propriedades reológicas da lama fluida é o modelo viscoelástico. Há duas maneiras de definir esse modelo: o *corpo de Voight* [2] e o *modelo viscoelástico generalizado* [5].

Neste trabalho, avaliamos o modelo proposto em [8], apresentando resultados numéricos da equação do transporte para a concentração de sedimentos no fundo da água sob um leito viscoelástico definido como um corpo de Voight. Ainda, considerando o modelo viscoelástico generalizado, obtivemos uma nova equação do transporte para a concentração desses sedimentos.

2 O problema

Consideramos um sistema de duas camadas. A camada superior é formada por água de profundidade h e está sobre uma fina camada de lama fluida, a qual estamos supondo viscoelástica, de profundidade d . Assumimos também que a profundidade da lama fluida é constante. De acordo

com [5], em águas costeiras a profundidade típica d da lama é geralmente de ordem $0.5 m$ e é muito menor do que a profundidade h da camada superior de água, logo, $h \gg d$.

Suponhamos que uma onda progressiva de pequena amplitude se propague na direção horizontal x sob a superfície da água, cujo deslocamento é dado por

$$\eta = \text{Re}[ae^{i(kx-\sigma t)}], \tag{1}$$

onde a é a amplitude da onda, i é a unidade do número complexo, k é o número de onda, σ é a frequência angular da onda e t é o tempo. Estamos considerando $a, \sigma \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{C}$.

Ainda, consideramos o eixo vertical z apontando verticalmente para cima. Assim, definiremos o deslocamento da interface por

$$z = \xi(x, t) = be^{i(kx-\sigma t)}. \tag{2}$$

Por fim, denotamos as densidades da água e da lama fluida por ρ_w e ρ_m , respectivamente.

Consideramos ondas de comprimento e amplitude pequenos de modo que $kh = \mathcal{O}(1)$ e $ka \ll 1$. Vamos estudar o caso quando a espessura da camada de lama fluida é comparável à espessura da camada limite de Stokes.

Além disso, assumimos que a profundidade da lama fluida d e a espessura da camada limite que surge sob a lama fluida $\delta_m = (2\nu_m/\sigma)^{1/2}$ são ambas comparáveis com a amplitude da onda sobre a superfície da água a , do mesmo modo que foi proposto em [3]. Ainda, a camada limite de Stokes tem espessura dada por $\delta_w = (2\nu_w/\sigma)^{1/2}$ e é desenvolvida na interface entre a água e a lama fluida, onde ν_w é a viscosidade da água como em [3].

Definimos a declividade da onda por $\epsilon = ka \ll 1$, que é escolhido como um parâmetro pequeno.

3 Modelo 1: Corpo de Voight

Para obtermos a solução, expandimos as coordenadas da velocidade

$$(u_f, v_f) = (u_{f_0}, v_{f_0}) + \epsilon(u_{f_1}, v_{f_1}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3}$$

e assumimos que as componentes da velocidade de primeira ordem e a onda da interface são definidas pelo mesmo harmônico que a superfície da onda, ou seja,

$$(u_{f_0}, v_{f_0}, \xi) = \text{Re}[(\tilde{u}_f, \tilde{v}_f, b)e^{i(kx-\sigma t)}] \tag{4}$$

onde a condição cinemática na interface é

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_{w0} \Big|_{z=-h}. \tag{5}$$

As soluções gerais das equações acima foram obtidas em [7] e são dadas por, respectivamente,

$$\tilde{u}_w = (1 + De^{-\lambda_w z})\tilde{U}_I, \quad \text{em } z > 0, \tag{6}$$

$$\tilde{u}_m = [\gamma - \gamma \cosh(\lambda_m(z+d)) + H \sinh(\lambda_m(z+d))]\tilde{U}_I, \quad \text{em } 0 > z > -d, \tag{7}$$

$$\tilde{v}_w = -ik\lambda_w^{-1}(\lambda_w z + B - De^{-\lambda_w z})\tilde{U}_I \quad \text{em } z > -h \tag{8}$$

e

$$\tilde{v}_m = -ik\lambda_w^{-1}[\gamma(\lambda_w(z+d) - \sinh(\lambda_w(z+d))) + H(\cosh(\lambda_w(z+d)) - 1)]\tilde{U}_I, \quad \text{em } -h > z > -d, \tag{9}$$

onde

$$B = \zeta[\gamma(\lambda_m d - \sinh(\lambda_m d)) + H(\cosh(\lambda_m d) - 1)] + D, \tag{10}$$

$$D = \frac{-\gamma\zeta - (1 - \gamma)\zeta \cosh(\lambda_m d)}{\zeta \cosh(\lambda_m d) + \gamma \sinh(\lambda_m d)} \tag{11}$$

e

$$H = \frac{\gamma(1 - \gamma) + \gamma^2 \cosh(\lambda_m d) + \gamma\zeta \sinh(\lambda_m d)}{\zeta \cosh(\lambda_m d) + \gamma \sinh(\lambda_m d)} \tag{12}$$

sendo

$$\zeta = (\nu_m^+ / \nu_w)^{1/2} \tag{13}$$

um parâmetro complexo relacionado com a variação da viscosidade, onde

$$\nu_m^+ = \nu_m + iG_m / \rho_m \sigma \tag{14}$$

é o parâmetro complexo viscoelástico. Observamos que nesse ponto o modelo viscoelástico [8] se diferencia do modelo viscoso [6], pois nesse último $G_m = 0$.

A amplitude do deslocamento da interface é dada por

$$b = i\sigma^{-1} \tilde{v}_w \Big|_{z=-h} = k\sigma^{-1} \lambda_w^{-1} (B - D) \tilde{U}_I. \tag{15}$$

Após determinarmos a velocidade da água, podemos avaliar como se desenvolve o transporte de sedimentos gerado pelas ondas.

4 Modelo 2: Modelo viscoelástico generalizado [5]

Para a camada de água, usamos a seguinte normalização

$$(x', z', h) = \frac{g}{\sigma^2} (x, z, H), \quad t' = \sigma^{-1} t, \quad k' = \frac{\omega^2}{g} k, \tag{16}$$

$$\Phi' = \frac{a_0 g}{\sigma} \Phi, \quad \eta' = a_0 \eta, \quad (P'^{(w)}, p'^{(w)}) = \rho^{(w)} g a_0 (P^{(w)}, p^{(w)}), \tag{17}$$

onde g é a gravidade, $\rho^{(w)}$ é a densidade da água, σ é a frequência e t é o tempo.

Para a camada de lama fluida, definimos uma nova coordenada vertical medida a partir do fundo dessa camada $Z' = z' + h + d$ e usamos a seguinte normalização

$$x' = \frac{g}{\sigma^2} x, \quad Z' = dZ, \quad t' = \sigma^{-1} t, \quad \xi' = \epsilon a_0 \xi, \tag{18}$$

$$u' = a_0 \sigma u, \quad v' = \left(\epsilon a_0 \sigma \frac{d}{a_0} \right) v, \quad (p', P) = (\gamma \rho^{(m)} g a_0) (p^{(m)}, P^{(m)}). \tag{19}$$

4.1 Solução do problema

Como em [5], expandimos em série de potências as variáveis u_f, v_f, Φ, \dots , e escrevemos cada incógnita \mathcal{F} como

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \epsilon \mathcal{F}_1 + \epsilon^2 \mathcal{F}_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{20}$$

onde (η_n, ξ_n) dependem de $(x, x_1; t, t_1)$, $\Phi_n = \Phi_n(x, x_1; z; t, t_1)$ na água e (u_n, v_n) de $(x, x_1; Z; t, t_1)$ na lama fluida.

Ainda, definimos que

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{00} + (\mathcal{F}_{01} e^{i\psi} + \text{c.c.}), \tag{21}$$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{10} + (\mathcal{F}_{11} e^{i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{21} e^{2i\psi} + \text{c.c.}), \tag{22}$$

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{20} + (\mathcal{F}_{21} e^{i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{22} e^{2i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{32} e^{3i\psi} + \text{c.c.}) \tag{23}$$

e assim sucessivamente, onde $\mathcal{F}_{nm} = \mathcal{F}_{nm}(z, x_1, t_1) \forall n, m \in \mathbb{N}$. Observemos que assim temos $\mathcal{F}_{nm,x}(z, x_1, t_1) = \mathcal{F}_{nm,t}(z, x_1, t_1) = 0 \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Com essas hipóteses, [5] mostrou que as coordenadas da velocidade de $\mathcal{O}(1)$ e $\mathcal{O}(\epsilon)$ são dadas por

$$u_{w_{01}} = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{01}e^{i\psi}) = ik_0\Phi_{01}a_0\sigma = \frac{k_0A \cosh Q}{2 \cosh q}, \quad (24)$$

$$v_{w_{01}} = -\frac{iAk_0 \sinh Q}{2 \cosh q}, \quad (25)$$

$$u_{w_{10}} = \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial x_1}, \quad (26)$$

$$u_{w_{11}} = \left[\frac{-i}{2} \frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{\cosh Q}{\cosh q} + ik_0 \left(ik_1 C_g A \sinh q \sinh Q - \frac{Q \sinh Q}{2k_0 \cosh q} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) \right], \quad (27)$$

$$u_{w_{12}} = ik_0 \frac{3i}{8} \frac{A^2}{\sinh^4 q} \cosh(2Q), \quad (28)$$

$$v_{w_{10}} = 0, \quad (29)$$

$$v_{w_{11}} = \left[ik_1 k_0 C_g A \sinh q \cosh Q - k_0 \frac{\sinh Q + Q \cosh Q}{2k_0 \cosh q} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right] \quad (30)$$

e

$$v_{w_{12}} = \frac{3ik_0}{8} \frac{A^2}{\sinh^4 q} \sinh(2Q). \quad (31)$$

5 Método

Por [8] e [4], a equação do transporte de massa pode ser escrita como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \epsilon u_w \frac{\partial C}{\partial x} + (\epsilon v_w - v_f) \frac{\partial C}{\partial z} = \epsilon^2 E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (32)$$

A equação (32) está sujeita às condições de contorno

$$v_f C + E \frac{\partial C}{\partial z} = \epsilon^2 \mathcal{E} |\tau_b|, \text{ em } z = \epsilon \xi. \quad (33)$$

$$C = 0 \text{ in } z \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Como Ng e Wu [8], expandimos a concentração e as derivadas temporais como

$$C \rightarrow C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon C_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (35)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T}, \quad (36)$$

onde $T = \epsilon^2 t$ é o tempo lento para descrever os processos de transportes longitudinais.

Esperamos que o termo de ordem zero $C_0 = C_0(x, z, T)$ represente a concentração principal no tempo e portanto não depende do tempo rápido t , enquanto que os termos de ordem mais alta $C_n = C_n(x, z, t, T)$, para $n = 1, 2, \dots$ são funções de ambos os tempos.

A solução da equação da concentração de sedimentos é obtida através das equações de ordem $\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(\epsilon)$ e $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Essa solução depende das coordenadas da velocidade da água, que por sua vez, dependem de como a camada de lama fluida é definida.

5.1 Concentração de sedimentos no fundo - modelo 1

A equação do transporte para a concentração de partículas no fundo foi obtida em [8] e é dada por

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + U \frac{\partial C_b}{\partial x} = [E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \tag{37}$$

onde

$$U = \frac{\langle \tilde{u}_{w2} F \rangle}{\langle F \rangle} + \frac{\text{Re}[\langle \tilde{u}_w^* M \rangle - b \tilde{u}_w^* |_{z=-h}]}{2 \langle F \rangle} \text{ e } D_T = \frac{\text{Re} \langle \tilde{u}_w^* N \rangle}{2 \langle F \rangle}. \tag{38}$$

As funções M e N dependem de z e são dadas por

$$N(z) = \sigma^{-1} \tilde{U}_I (A_1 e^{-\beta z/\alpha} - i e^{-z/\alpha} + A_2 e^{-(A_0+1)z/\alpha}) \tag{39}$$

e

$$M(z) = k \sigma^{-1} \tilde{U}_I [A_3 e^{-\beta z/\alpha} + A_4 e^{-z/\alpha} + A_5 e^{-(A_0+1)z/\alpha} + (z/\alpha) e^{-z/\alpha}] \tag{40}$$

onde A_i são constantes para $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5.1.1 Resultados numéricos

Consideramos os seguintes valores para os parâmetros normalizados:

- i) $\gamma = 0.8$, $\hat{\delta}_m = 5$ a 8 , $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15$ e 0.1
- ii) $\hat{\lambda}_m = \mathcal{O}(0.1)$, $\hat{d} = \mathcal{O}(10)$, $Pe = Sc = 1$.

As soluções numéricas que apresentaremos nesse trabalho foram obtidas usando a rotina desenvolvida em *Fenics project* [9]. Para uma concentração inicial $C_b(x, 0) = 100$ obtivemos o gráfico apresentado na figura 1.

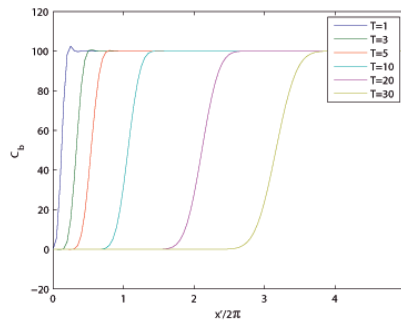


Figura 1: C_b como função de $x/2\pi$ para $C_b(x, 0) = 100$ e $T = 1, 3, 5, 10, 20$, e 30 .

A seguir consideramos que há erosão em uma faixa para $x'/2\pi \in [0, 1]$ como em [4]. Usando a mesma normalização, a equação que formula o problema será dada por

$$\frac{\partial C'}{\partial T'} + \hat{U} \frac{\partial C'}{\partial x'} = [\hat{E} - \hat{D}_T] \frac{\partial^2 C'}{\partial x'^2} + \mathcal{E}_{\mathcal{R}}'(x'), \tag{41}$$

onde

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}'(x') = \begin{cases} 1, & 0 < x' < L' = kL \\ 0, & x' < 0, x' > L. \end{cases} \tag{42}$$

Consideramos a concentração inicial nula. Adotamos a mesma normalização usada em [8] e em [4].

A solução da equação do transporte uni-dimensional em um sistema sem a camada de lama fluida e com erosão foi encontrada analiticamente em [4]. Comparamos a solução numérica

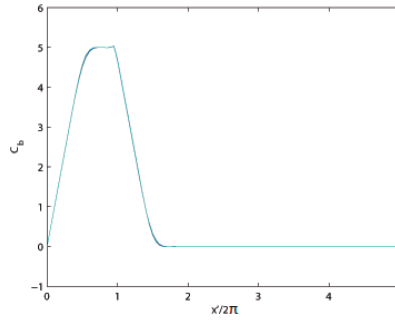


Figura 2: C_b como função de $x/2\pi$ para $\hat{\delta}_m = 5$, $\hat{\lambda}_m = 0.1$ e $d = 0.0, 0.25, 0.5$ e 1.0 .

obtida por nós e a solução analítica obtida por Mei e vimos que o erro é da ordem de $\mathcal{O}(10^{-3})$. A seguir resolvemos a equação para $\hat{d} = \{0.25, 0.5, 1.0\}$ com $T = 5$. O gráfico está na figura 2. Observemos que não houve mudança para \hat{d} pequeno, já que as curvas estão sobrepostas.

O resultado para $\delta = 5$, $\lambda = 0.1$ e $\hat{d} = 7, 8, 9, 10, 11$ e 12 são dados na figura 3. Observamos que os picos não sofrem alterações consideráveis ao variar a espessura na camada de lama fluida. Porém, conforme essa camada aumenta, o pico da concentração se desloca para x' menor.

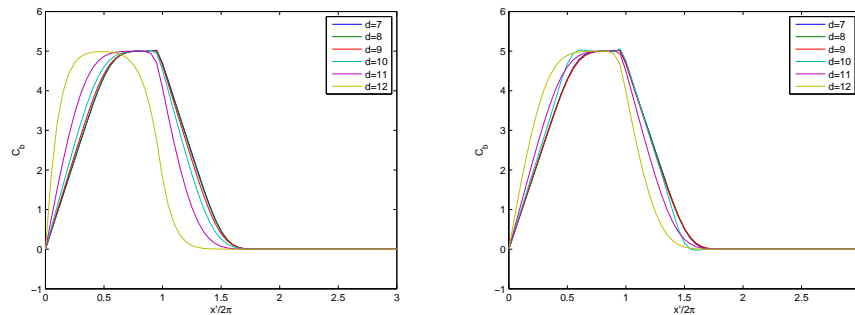


Figura 3: C_b como função de $x/2\pi$ para $\hat{\delta}_m = 5$ e $\hat{\delta}_m = 8$, $\hat{\lambda}_m = 0.1$ e $d = 7, 8, 9, 10, 11$ e 12 e $T = 5$.

5.2 Concentração de sedimentos no fundo - modelo 2

Obtivemos que a equação adimensional para a concentração no fundo é dada por

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + U \frac{\partial C_b}{\partial x} = [E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \tag{43}$$

onde

$$U = \frac{a_0 \sigma^2}{g} \left[\frac{\langle \overline{u_{w1} F} \rangle}{2 \langle F \rangle} + \frac{\text{Re} \langle \overline{u_{w0}^* M} \rangle}{2 \langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(\xi_{01} u_{01}^*)_{z=0}}{\langle F \rangle} \right] \text{ e } D_T = -\frac{a_0 \sigma^2}{g} \frac{\text{Re} \langle \overline{u_{w0}^* N} \rangle}{2 \langle F \rangle}, \tag{44}$$

Com esse modelo, as funções M e N são dadas por

$$M(z) = B_1 e^{-\theta z/\alpha} + (B_2 \cosh(\sigma z) + B_3 \sinh(\sigma z)) e^{-z/\alpha} \tag{45}$$

e

$$N(z) = A_1 e^{-\beta z/\alpha} + [A_2 \cosh(k_0 z) + A_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha}, \tag{46}$$

onde A_i e B_i são constantes para $i = \{1, 2, 3\}$.

Observemos que os coeficientes de dispersão e convecção D_T e U , respectivamente, têm as mesmas características dos coeficientes obtidos por [8], descritos em (38). O que torna a equação diferente são as coordenadas da velocidade da água de $\mathcal{O}(1)$ e $\mathcal{O}(\epsilon)$ e a onda da interface de $\mathcal{O}(1)$, que foram obtidas com o modelo viscoelástico generalizado. A importância desse resultado se deve ao fato desse modelo ter sido obtido através de um modelo mais realístico visto que ele leva em consideração a dependência dos coeficientes da tensão e deformação da frequência.

6 Conclusão

O problema de propagação de ondas de água sobre uma camada de lama fluida viscoelástica foi investigado e a equação que descreve a evolução da concentração de sedimentos, obtida por [8], foi resolvida numericamente para fundos erodíveis e não erodíveis. Comparamos estes resultados com aqueles onde o fundo é rígido [4], unidimensional e com erosão restrita a uma faixa do fundo.

Usando um modelo viscoelástico generalizado para um sistema de duas camadas, obtivemos uma nova equação para a descrição da concentração de sedimentos (43).

Como trabalhos futuros, iremos investigar numericamente a solução dessa nova equação.

7 Agradecimentos

Trabalho parcialmente financiado pelo CNPq e CAPES,

J. S. Z. agradece ao BCAM (Basque Center for Applied Mathematics) pela hospitalidade e pelo suporte financeiro parcial. Agradece também ao Dr. Johan Jansson pelo auxílio no trabalho computacional.

Referências

- [1] P. J. De Wit, Liquefaction of cohesive sediments caused by waves, master thesis, Delft University of Technology, vol. 174, Netherlands, 1995.
- [2] J. P. Y. Maa and A. J. Mehta, Soft mud properties: voight model, *J. Waterway*, vol. 114, 765-770, 1988.
- [3] C.C. Mei and C. Chian, Dispersion of small suspended particles in a wave boundary layer, *American Meteorological Society*, 2479-2495, 1994.
- [4] C. C. Mei, She-jun Fan and Kang-ren Jin, Resuspension and transport of fine sediments by waves, *J. Geophysical Research*, vol. 102, 15.807-15.821, 1997.
- [5] C. C. Mei, M. Krotov, and Z. Huang, A. Huhe, Short and long waves over a muddy seabed, *J. Fluid. Mech.*, vol. 643, 33-58, 2010.
- [6] C. O Ng., Water waves over a muddy bed: a two layer Stokes boundary layer model, *Coastal Engineering*, vol. 40, 221-242, 2000.
- [7] C. O. Ng and X. Zhang, Mass transport in water waves over a thin layer of soft viscoelastic mud, *J. Fluid. Mech.*, vol. 573, 105-130, 2007.
- [8] C. O. Ng and C. H. Wu, Dispersion of suspended particles in a wave boundary layer over a viscoelastic bed, *International Journal of Engineering Science*, vol. 46, 50-65, 2008.
- [9] M. Schläger and Fenics Team, Fenics Project, <http://fenicsproject.org/>, 2013. cited: June, 05, 2013.