Comportamento Assintótico de Convoluções e Aplicações em EDP

José A. Barrionuevo **Paulo Sérgio Costa Lino**[*]

Depto de Matemática e Estatística, UFRGS,

91509-900, Porto Alegre, RS

E-mail: josea@mat.ufrgs.br, linnux2001@yahoo.com,

Seja $u(x,t)$ a solução da equação da difusão, $(\partial_t - \partial_x)\, u = 0$ em uma dimensão espacial com condição inicial $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Um resultado clássico afirma que se $u_0(x)$ satisfaz a condição $\lim_{N\to\infty}(2N)^{-1}\int_{-N}^{N} u_0(y)\ dy = A$ então para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\longrightarrow\infty} u(x,t) = A$.

Neste trabalho extendemos o resultado acima para funções $u(x,t)$ em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ definidas por convoluções

$$u(x,t) = k_{\alpha(t)} * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_{\alpha(t)}(x-y) u_0(y)\, dy$$

onde k pertence a uma classe $\mathfrak{U}$ de $L^1(\mathbb{R}^d)$ a ser definida abaixo. Para $\delta > 0$, $k_\delta(x) = \delta^{-d} k(\delta^{-1}x)$ é a dilatação L^1-invariante de k e $\alpha(t) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é crescente com $\alpha(\infty) = \infty$. Uma conseqüência direta do Teorema 2 abaixo é o comportamento assintótico das soluções $u(x,t)$ de certos problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u &= Lu;\ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

onde L é um operador diferencial parcial linear, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Além disso estimativas para as soluções da equação do calor podem ser usadas na equação não linear de Burgers via a transformação de Hopf-Cole como por ex. em [1], [5]. Esses trabalhos contém estimativas optimais do decaimento de $\Phi(t) = ||u(x,t)||_{L^p(\mathbb{R})}$ para $1 \le p \le \infty$ obtidas sob a hipótese de $u_0(x)$ ser contínua de suporte compacto e $L^1(\mathbb{R})$ respectivamente. Tal decaimento não é necessariamente verdadeiro para $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, pois $u(x,t) \equiv 1$ é solução da equação do calor. Outro aspecto inerente a problemas de difusão em regiões não compactas com dados iniciais em L^∞ é a impossibilidade de simulação numérica.

[*]bolsista Capes

No que segue utilizaremos a seguinte notação:
$|E|$ - medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$;
χ_E - função característica de E;
$r\,E = \{rx : x \in E\}$;
$\sigma(E)$ - medida de Hausdorff de dimensão $d-1$;
$\{k > s\} = \{x \in \mathbb{R}^d : |k(x)| > s\}$; e
$k_t(x) = t^{-d}k(t^{-1}x)$, para $t > 0$.

Limites da forma $\lim_{t\to 0^+} u(x,t)$, para $u(x,t) = k_t * u_0(x)$ são bem conhecidos para uma ampla classe de núcleos k e ampla classe de funções por suas conexões com teoria de diferenciação bem como problemas de existencia de soluções para problemas tipo (1). Não é difícil mostrar que $||u(x,t) - u_0(x)||_{L^p} \to 0$, para $u_0 \in L^p$, $1 \le p < \infty$ e é uma conseqüência do teorema maximal de Hardy-Littlewood que se $k \in L^1$ e u_0 é apenas $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, então $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = u_0(x)$ para quase todo x, isto é, $k_t \to \delta$-Dirac, ver [3] ou [2]. Para $t \to \infty$ a situação é completamente diferente: $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ quando existe depende de k, u_0, x. A primeira restrição a ser feita é sobre a classe de núcleos $k(x)$ considerados.

Definição 1 *Uma função $k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ em $L^1(\mathbb{R}^d)$ não negativa pertence a classe $\mathfrak{U}$ se $||k||_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$ e existe λ_0 tal que para todo $\lambda > 0$, $\{k > \lambda\} = \beta(\lambda)B$ onde $B = \{k > \lambda_0 > 0\}$ é viz. de 0 simétrica e tem fronteira suave com $0 < \sigma(\partial B) < \infty$.*

Apesar de $\mathfrak{U}$ ser bem menor que $L^1(\mathbb{R}^d)$ ela contém as funções da forma $k(x) = \psi(|x|)$, onde ψ é decrescente, $||k||_{L^1} = 1$ e $|\cdot|$ é uma norma em $\mathbb{R}^d$. Em particular as funções radiais estão em $\mathfrak{U}$.

Como $||k_t||_1 = 1$, temos, pela desigualdade integral de Minkowski, que para u_0 em $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, $u(x,t) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e

$||u(x,t)||_p \le ||u_0||_p$. Além disso, $p < \infty$ implica que $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$, q.s., logo, $\lim_{t\to\infty} ||u(x,t)||_p = 0$. Portanto, vamos considerar apenas o caso $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nosso resultado principal é o seguinte

Teorema 2 *Seja $k \in \mathfrak{U}$. Para $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, seja $u(x,t) = k_{\alpha(t)} * u_0(x)$ onde $x \in \mathbb{R}^d$ e $t > 0$ e $\alpha(t)$ é crescente com $\alpha(\infty) = \infty$. Seja $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|rB|} \int_{rB} u_0(y)\, dy \qquad (2)$$

sempre que o limite da direita em (2) existir.

prova: Para manter o argumento simples, vamos considerar o caso de $k(x)$ ser uma função radial $k(x) = \psi(|x|)$, onde ψ é decrescente. Esse caso já contém os aspectos essenciais do resultado mas e evita tecnicalidades desnecessárias. O ponto de partida é a representação de $k(x)$ "em camadas", "layer cake representation"em [2], isto é

$$k(x) = \int_0^\infty \chi_{\{k>s\}}(x)\, ds \qquad (3)$$

que é consqüência do Teorema de Fubini, da mesma forma que

$$\int_{\mathbb{R}^d} k(x)\, dx = \int_0^\infty |\{k > s\}|\, ds \qquad (4)$$

As integrais em (3) e (4) são integrais impróprias de Riemann mas podem ser discretizadas por um simples argumento de densidade. Assim, dado $\epsilon > 0$, existem c_i, s_i; $i = 1, \ldots, N$ positivos tais que

$$0 \le S_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i\, \chi_{\{k>s_i\}}(x) \le k(x)$$

satisfaz

$$||k - S_N||_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \epsilon \qquad (5)$$

logo, para todo $t > 0$,

$$||(k_t - (S_N)_t) * u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \epsilon ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \qquad (6)$$

Por hipótese os conjuntos $\{k > s_i\}$ são bolas abertas, $r_i B$, centradas em 0. Assim

$$S_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i |r_i B|\, \frac{\chi_{r_i B}}{|r_i B|}(x)$$

onde, por (4) e (5),

$$1 - \epsilon < \sum_{i=1}^N c_i\, |r_i B| \le 1 \qquad (7)$$

Seja $u_0 \in L^\infty$ tal que exista o limite a direita de (2) e seja A este limite. Como

$$\begin{aligned} \left(\frac{\chi_{r_i B}}{|r_i B|}\right)_t (x) &= \frac{\chi_{t r_i B}}{|t r_i B|}(x), \\ \left(\frac{\chi_{r_i B}}{|r_i B|}\right)_t * u_0(0) &= \frac{1}{|t r_i B|} \int_{t r_i B} u_0(y)\, dy \end{aligned}$$

Assim, para $i = 1, \ldots, N$,

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{\chi_{r_i B}}{|r_i B|}\right)_t * u_0(0) = A$$

logo, por (6) e (7),

$$\begin{aligned} |u(0,t) - A| &< |(S_N)_t * u_0(0) - A| + \epsilon ||u_0||_{L^\infty} \\ &< \epsilon(A + ||u_0||_{L^\infty}) \end{aligned}$$

para $t > t_0(\epsilon)$. Como ϵ é arbitrário, temos (2) para $x = 0$. Se $x \ne 0$,

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{\chi_{r_i B}}{|r_i B|}\right)_t * u_0(x) - \left(\frac{\chi_{r_i B}}{|r_i B|}\right)_t * u_0(0) \right| \\ &\le \frac{1}{|t r_i B|} \int_{(t r_i B + x) \triangle (t r_i B)} |u_0(y)|\, dy \\ &\le \frac{|(t r_i B + x) \triangle (t r_i B)|}{|t r_i B|}\, ||u_0||_{L^\infty} \end{aligned}$$

Como B é uma bola aberta em $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |t r_i B| &= C\, (t r_i)^d, \qquad (8) \\ |(t r_i B + x) \triangle (t r_i B)| &\le C'\, |x|\, (t r_i)^{d-1} \qquad (9) \end{aligned}$$

onde as constantes C, C' dependem apenas da geometria de B. Substituindo (8) e (9) acima

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{\chi_{r_i B}}{|r_i B|}\right)_t * u_0(x) - \left(\frac{\chi_{r_i B}}{|r_i B|}\right)_t * u_0(0) \right| \\ &\le C''\, (t r_i)^{-1}\, |x|\, ||u_0||_{L^\infty} \end{aligned}$$

somando e usando (7),

$$\begin{aligned} &|\,(S_N)_t * u_0(x) - (S_N)_t * u_0(0)\,| \\ &\le M t^{-1}\, |x|\, ||u_0||_{L^\infty} \end{aligned} \qquad (10)$$

onde M é uma constante que depende apenas de $k(x)$. Agora, (6) e (10) fornecem (2) para todo x.$\square$

No argumento para $k \in \mathfrak{U}$ arbitrário precisamos adaptar apenas (8) e (9). Sob as nossas hipóteses pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} |tr_i B| &= C_B\, (tr_i)^d, \\ |(tr_i B + x) \triangle (tr_i B)| &\leq C'_B\, |x|\, \sigma(\partial tr_i B) \end{aligned}$$

o que é suficiente para provar (2).
Dois exemplos clássicos de núcleos radiais, que implicam B ser uma bola centrada na origem: o primeiro é o núcleo de Gauss

$$G(x) = (4\pi)^{-d/2} e^{-|x/2|^2};\ u(x,t) = G_{\sqrt{t}} * u_0(x)$$

Então $u(x,t)$ é solução de

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta_x u, \text{ em } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases}$$

Como $G(x) \in \mathfrak{U}$, obtemos o reasultado clássico para equação da difusão em dimensão qualquer.
O segundo exemplo é o núcleo de Poisson

$$P(x) = \frac{c_d}{(1+|x|^2)^{(d+1)/2}},\ u(x,t) = P_t * u_0(x)$$

com $c_d = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}}$. Neste caso $u(x,t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_{x,t} u &= 0, \text{ em } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases}$$

isto é, u é harmônica em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, com valor $u_0(x)$ na fronteira. Novamente $u(x,t)$ satisfaz (2).

Se o limite a direita em (2) não existe, então $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ pode não existir para nenhum valor de x. Para produzir um exemplo, basta considerar o caso com uma dimensão espacial e $k = k(|x|)$ simétrico decrescente, por exemplo, $k(x) = G(x)$ ou $P(x)$ acima. Para $l = 1, 2, \ldots$, seja $W_l = [a_l, a_l + b_l)$, onde $a_{l+1} \geq a_l + b_l$. Seja $I_l = -W_l \cup W_l$. Sejam a_l, b_l, definidas recursivamente de maneira que

$$\lim_{l\to\infty} b_l\, a_l^{-1} = \lim_{l\to\infty} (a_l + b_l)^{-1}\, a_{l+1} = \infty \quad (11)$$

Definindo

$$u_0(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \chi_{I_l}(x);\quad u(x,t) = k_t * u_0(x)$$

temos que $u_0 \in L^\infty$. (11) implica que se

$$A_L = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} u_0(y)\, dy \quad (12)$$

então $\liminf A_L = 0$ e $\limsup A_L = 1$. Segue que para todo N,

$$\liminf S_N * u_0(0) = 0, \text{ e } \limsup S_N * u_0(0) = 1$$

de forma que (6) implica

$$\liminf u(0,t) < \epsilon, \text{ e } \limsup u(0,t) > 1 - \epsilon.$$

Como $u(x,t) = u(0,t) + (u(x,t) - u(0,t))$, (10) implica que para t suficientemente grande $|u(x,t) - u(x,0)| < \epsilon$, portanto, por (6),

$$\liminf u(x,t) < 2\epsilon, \text{ e } \limsup u(x,t) > 1 - 2\epsilon.$$

Logo, para *todo* $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ não existe.

É interessante observar que mesmo quando $u(x,t)$ não converge para nenhum valor de x, como no exemplo acima, existe uma tendencia a certo sincronismo, expressa no seguinte

Teorema 3 *Seja $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ arbitrária. Para todos x, y em $\mathbb{R}^d$*

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t) - u(y,t)| = 0$$

prova: a seguinte desigualdade é provada da mesma forma que (10)

$$\begin{aligned} &|\,(S_N)_t * u_0(x) - (S_N)_t * u_0(y)\,| \\ &\leq M t^{-1}\, |x-y|\ \ ||u_0||_{L^\infty} \end{aligned} \quad (13)$$

O resultado segue da desigualdade acima juntamente com (6).□
Por outro lado pode-se mostrar que com uma escolha apropriada de a_l, b_l na definição de $u_0(x)$ acima temos que existe $\lim_{L\to\infty} A_L = A$ onde A_L é dado por (12). Porém temos que dados $t > 0$, e $\epsilon > 0$, podemos achar $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 \leq u(x_1,t) \leq \epsilon;\ \ 1 - \epsilon \leq u(x_2,t) \leq 1$$

o que implica que a convergência no Teorema 2 não precisa ser uniforme. Por outro lado, (6) e (13) mostram que a convergência é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$.
Se u_0 também estiver em L^p, $p < \infty$, a desigualdade de Hölder implica que o limite a direita em (2) é 0. Logo, para todo x, $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$. Pelo Teorema Convergência dominada, $\lim_{t\to\infty} ||u(x,t)||_p = 0$. Seria interessante obter resultados sobre a velocidade dessa convergência, como em [1] e [5] para o núcleo Gaussiano, válidos para uma classe de núcleos k.

Referências

[1] Kim, Y.J., Ni, Wei-Ming, On the rate of convergence and asymptotic profile of solutions to the viscous Burgers equation. *Indiana Univ. Math. J.*, 51 (2002), no.3, 727–752.

[2] Lieb, E., Loss, M., "Analysis", Amer. Math. Soc., 1997.

[3] Stein, E., Weiss, G., "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton Univ. Press, 1970.

[4] P. Zíngano, Asymptotic behaviour of the L^1 norm of solutions to nonlinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Anal., 3, pp 151-159, 2004.

[5] P. Zíngano, Some asymptotic properties of solutions for Burgers equation in $L^p(\mathbb{R})$, preprint.