ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC 2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Solução Espectral para Equação Integral Vetorial da Dinâmica de Gases Rarefeitos

Patricia Rodrigues, **Carmo H. Kamphorst**,
URI/FW, Depto de Ciências Exatas e da Terra,
98400-000, Frederico Westphalen, RS
E-mail: patricia@fw.uri.br, carmo@fw.uri.br,

Liliane B. Barichello *
UFRGS - Instituto de Matemática
91509-900, Porto Alegre, RS
E-mail: lbaric@mat.ufrgs.br

Resumo: *Neste trabalho uma solução de caráter analítico é proposta para dois problemas relativos ao fluxo de um gás rarefeito em dutos cilíndricos com superfícies que permitem reflexão difusa. Um método espectral clássico, baseado em uma expansão truncada em termos de polinômios de Legendre, é utilizado na solução do modelo cinético S, derivado da equação de Boltzmann, formulado na presente modelagem em termos de uma equação integral singular vetorial.*

Palavras-chave: *Equação integral, método espectral, dinâmica de gases rarefeitos, geometria cilíndrica.*

1 Introdução

Pesquisas recentes na área da dinâmica de gases rarefeitos (DGR) têm sido impulsionadas pelas inúmeras aplicações envolvendo micro e nano-dispositivos que combinam componentes elétricos e mecânicos, conhecidos como sistemas microeletromecânicos (MEMS) e nanoeletromecânicos (NEMS) [5, 7]. Contudo, o funcionamento destes dispositivos depende da operação conjunta de um grande número de componentes, sendo que em muitos casos, o bom desempenho dos micro e nano-dispositivos está associado à análise e descrição do comportamento do escoamento de um gás em micro ou nanocanais.

A formulação matemática usada para descrever o escoamento de gases rarefeitos em micro ou nanocanais, em geral, baseia-se na utilização da forma íntegro diferencial da equação de Boltzmann [3, 4] ou de modelos cinéticos [10] dela derivados. Devido à complexidade dos modelos matemáticos associados, particularmente no que diz respeito à geometrias mais complexas e da obtenção de soluções de caráter analítico, uma possibilidade alternativa consiste em se utilizar a forma integral de uma equação modelo, uma vez que neste caso a aplicação de técnicas semi-analíticas pode se tornar mais viável.

Neste contexto, soluções para a forma integral do modelo cinético BGK [2] foram apresentadas por Rodrigues, Kamphorst e Barichello [8], mediante a aplicação de método espectral baseado na utilização de uma expansão truncada em termos de Polinômios de Legendre, bem como na utilização de splines cúbicas de Hermite [6].

Numa tentativa de viabilizar a utilização desta mesma técnica para uma classe mais ampla de problemas da DGR, neste trabalho busca-se obter soluções para problemas de escoamento de um gás rarafeito devido à efeitos de gradientes de pressão e temperatura, modelados a partir da forma integral do modelo cinético S, cujo núcleo inclui expansão de ordem superior, como aproximação do núcleo exato, em comparação com o caso tratado anteriormente [8, 6]. Em particular, o presente caso resulta em uma equação integral vetorial.

* Este trabalho é parcialmente financiado pelo CNPq

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL
DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

A equação integral para o modelo S, segundo Siewert e Valougeorgis [9], que descreve o fluxo de um gás rarefeito em um duto cilíndrico reto de raio R, corresponde à equação vetorial

$$\mathbf{Z}(r) = \mathbf{B}(r) + \mathbf{\Gamma} + \int_0^R t\mathbf{K}(t \to r)\mathbf{Z}(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

com $r \in [0, R]$.

Admitindo não existir reflexão especular nas paredes do duto, o termo **B(r)**, da Eq. (1), é nulo [2, 9], situação esta considerada no presente trabalho.

Na Eq. (1) o termo não homogêneo é escrito na forma [9]

$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{\pi^{1/2}}{2}\begin{bmatrix} (15/2)^{1/2}k_2 \\ k_1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

onde k_1 e k_2 são constantes definidas de modo que $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$ para o chamado problema de Poiseuille e, $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$ para o problema *creep* térmico.

Ainda, de acordo com a Ref. [9], na Eq. (1) o núcleo da equação integral é definido de modo que

$$\mathbf{K}(t \to r) = \frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty e^{-\tau^2}F_0(t/\tau, r/\tau)\mathbf{\Delta}(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}, \tag{3}$$

onde

$$F_0(t/\tau, r/\tau) = \begin{cases} I_0(t/\tau)K_0(r/\tau), & t < r \\ K_0(t/\tau)I_0(r/\tau), & t > r \end{cases}, \tag{4}$$

sendo $I_0(x)$ e $K_0(x)$ as funções de Bessel modificadas de ordem zero, de primeira e segunda classe [1], respectivamente. Na Eq. (3) tem-se ainda

$$\mathbf{\Delta}(\tau) = \mathbf{\Delta}_0 + \mathbf{\Delta}_2\tau^2 + \mathbf{\Delta}_4\tau^4, \tag{5}$$

sendo que

$$\mathbf{\Delta}_0 = \begin{bmatrix} 3/10 & -(1/30)^{1/2} \\ -(1/30)^{1/2} & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathbf{\Delta}_2 = \begin{bmatrix} -2/15 & (2/15)^{1/2} \\ (2/15)^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

e

$$\mathbf{\Delta}_4 = \begin{bmatrix} 2/15 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Define-se [9],

$$\mathbf{G}(r) = \mathbf{Z}(r) - \mathbf{\Gamma}, \tag{9}$$

onde $\mathbf{Z}(r)$ é a função que satisfaz a Eq. (1), e assim torna-se possível avaliar quantidades de interesse físico, tais como o perfil de velocidade

$$u(r) = \pi^{-1/2}[0 \;\; 1]\mathbf{G}(r) \tag{10}$$

e o perfil do fluxo de calor

$$q(r) = [15/(2\pi)]^{1/2}[1 \;\; 0]\mathbf{G}(r). \tag{11}$$

Em consequência, escreve-se a taxa de fluxo do gás como (do inglês *particle-flow rate*)

$$U = \frac{4}{R^3}\int_0^R u(r)r\mathrm{d}r \tag{12}$$

e a taxa de fluxo de calor

$$Q = \frac{4}{R^3}\int_0^R q(r)r\mathrm{d}r. \tag{13}$$

As Eqs. (10) a (13) são usadas tanto para o problema de Poiseuille quanto para o problema *creep* térmico, dependendo de valores especificados para as constantes k_1 e k_2 que definem a expressão usada para o termo fonte indicado na Eq. (2).

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL
DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

2 Desenvolvimento

Inicialmente, por razões computacionais, as funções modificadas de Bessel são reescritas na forma

$$\hat{I}_0(x) = I_0(x)\mathrm{e}^{-x}, \tag{14}$$

e

$$\hat{K}_0(x) = K_0(x)\mathrm{e}^{x}, \tag{15}$$

de modo que o termo $F_0(t/u, r/u)$, presente na Eq. (3) e definido na Eq. (4), é reescrito como

$$F_0(t/\tau, r/\tau) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(t-r)/u}\hat{I}_0(t/u)\hat{K}_0(r/u), & t \in [0, r] \\ \mathrm{e}^{(r-t)/u}\hat{K}_0(t/u)\hat{I}_0(r/u), & t \in [r, R] \end{cases}. \tag{16}$$

A seguir, visando obter soluções de caráter analítico, propõe-se escrever a solução da Eq. (1) na forma de uma expansão truncada em termos de Polinômios de Legendre

$$\mathbf{Z}(r) = \sum_{\alpha=0}^{L} \mathbf{v}_\alpha P_\alpha\left(\frac{2r}{R} - 1\right), \tag{17}$$

onde $\mathbf{v}_\alpha$ são os vetores

$$\mathbf{v}_\alpha = [a_\alpha \;\; b_\alpha]^T \tag{18}$$

de constantes a_α e b_α a serem determinadas. Substituindo a expansão $\mathbf{Z}(r)$ na Eq. (1) e considerando-se que a reflexão das partículas do gás na superfície da parede do duto seja perfeitamente difusa (situação na qual o termo **B(r)** torna-se nulo), tem-se

$$\sum_{\alpha=0}^{L} \left\{ \mathbf{v}_\alpha P_\alpha\left(\frac{2r}{R} - 1\right) - \int_0^R t\mathbf{K}(t \to r)\mathbf{v}_\alpha P_\alpha\left(\frac{2r}{R} - 1\right) \mathrm{d}t \right\} = \mathbf{\Gamma}. \tag{19}$$

Efetuando a multiplicação da Eq. (19) por

$$\phi_\beta(r) = rP_\beta\left(\frac{2r}{R} - 1\right) \tag{20}$$

para $\beta = 0, 1, ..., L$, levando em conta a definição do núcleo $\mathbf{K}(t \to r)$ e, além disso, integrando a equação resultante para $r \in [0, R]$, obtém-se o sistema linear

$$\sum_{\alpha=0}^{L} \{\mathbf{A}_{\beta,\alpha} - [\mathbf{B}_{\beta,\alpha} + \mathbf{C}_{\beta,\alpha}]\} = \mathbf{D}_\beta, \tag{21}$$

onde

$$\mathbf{A}_{\beta,\alpha} = \int_0^R \mathbf{v}_\alpha \phi_\beta(r)\phi_\alpha(r)\, \mathrm{d}r/r, \tag{22}$$

$$\mathbf{B}_{\beta,\alpha} = \int_0^R \int_0^r \mathbf{K}(t \to r)\mathbf{v}_\alpha \phi_\beta(r)\phi_\alpha(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}r, \tag{23}$$

$$\mathbf{C}_{\beta,\alpha} = \int_0^R \int_r^R \mathbf{K}(t \to r)\mathbf{v}_\alpha \phi_\beta(r)\phi_\alpha(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}r \tag{24}$$

e

$$\mathbf{D}_\beta = \mathbf{\Gamma} \int_0^R \phi_\beta(r)\mathrm{d}r. \tag{25}$$

A solução do sistema linear dado pela Eq. (21) corresponde aos valores dos coeficientes a_α e b_α necessários na avaliação da expansão indicada na Eq. (17). Nota-se, ainda, que a Eq. (20) é proposta de forma que o sistema linear obtido é simétrico.

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL
DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

3 Aspectos Computacionais

Apesar das Eqs. (22) e (25) poderem ser avaliadas facilmente, o tratamento das integrais presentes nas Eqs. (23) e (24), impõe dificuldades devido ao comportamento do núcleo da equação integral, $\mathbf{K}(t \to r)$, particularmente quando $\tau \to 0$. Neste sentido, inicialmente, propõe-se neste trabalho reescrever a Eq. (3) na forma

$$\mathbf{K}(t \to r) = \mathcal{K}_0(t \to r)\boldsymbol{\Delta}_0 + \mathcal{K}_2(t \to r)\boldsymbol{\Delta}_2 + \mathcal{K}_4(t \to r)\boldsymbol{\Delta}_4, \tag{26}$$

onde

$$\mathcal{K}_0(t \to r) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau^2} \hat{F}_0(t/\tau, r/\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}, \tag{27}$$

$$\mathcal{K}_2(t \to r) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau^2} \hat{F}_0(t/\tau, r/\tau)\mathrm{d}\tau \tag{28}$$

e

$$\mathcal{K}_4(t \to r) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau^2} \hat{F}_0(t/\tau, r/\tau)\tau^2\mathrm{d}\tau, \tag{29}$$

e as matrizes $\boldsymbol{\Delta}_0$, $\boldsymbol{\Delta}_2$ e $\boldsymbol{\Delta}_4$ estão definidas nas Eqs. (6) a (8).

Propondo-se ainda a utilização de esquema de quadratura de Gauss-Legendre, avalia-se

$$\mathcal{K}_2(t \to r) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \sum_{n=1}^{N_\tau} \omega_n h_n(t, r) \tag{30}$$

e

$$\mathcal{K}_4(t \to r) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \sum_{n=1}^{N_\tau} \omega_n h_n(t, r)\sigma_n^2, \tag{31}$$

onde N_τ corresponde ao número de pontos de quadratura $\mu_n \in [-1, 1]$ e de seus respectivos pesos ω_n, enquanto que

$$h_n(t, r) = \frac{\mathrm{e}^{-\sigma_n^2} \hat{F}_0(t/\sigma_n, r/\sigma_n)}{\mu_n + 1} \tag{32}$$

e

$$\sigma_n = -\ln\left(\frac{\mu_n + 1}{2}\right). \tag{33}$$

No caso do termo $\mathcal{K}_0$, dado pela Eq. (27), há que se empregar um tratamento diferenciado. De fato, este termo corresponde à mesma expressão usada para definir o núcleo da equação integral do modelo BGK já avaliada anteriormente por Rodrigues, Kamphorst e Barichello [8]. Assim, tal como na Ref. [8] para a avaliação da integral da Eq. (27) são considerados dois procedimentos, respectivamente, quando $|t - r| \geq 0.05$ e quando $|t - r| < 0.05$.

No primeiro caso o esquema de quadratura pode ser aplicado diretamente. Ou seja, tem-se

$$\mathcal{K}_0(t \to r) = \frac{2}{\pi^{-1/2}} \sum_{n=1}^{N_\tau} \omega_n \frac{h_n(t, r)}{\sigma_n^2}, \tag{34}$$

sendo $h_n(t, r)$ e σ_N definidos nas Eqs. (32) e (33), respectivamente. Para este caso, em que $|t - r| \geq 0.05$, a Eq. (34) permite avaliar o termo $\mathcal{K}_0(t \to r)$ com precisão de até sete dígitos, se comparadas com o software Maple, usando cerca de 50 pontos de quadratura.

Porém, a medida que os argumentos t e r assumem valores mais próximos (como por exemplo quando $|t - r| < 0.05$), torna-se cada vez mais difícil obter resultados precisos utilizando-se a mesma expressão, tornando-se ineficaz. Desta forma, para o caso em que $|t - r| < 0.05$, realiza-se primeiramente a subtração e a soma da expressão

$$S_1(r, t) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \hat{F}_0(t/\tau, r/\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} \tag{35}$$

ao termo $\mathcal{K}_0(t \to r)$ da Eq. (27) e, posteriormente, propõe-se ainda a troca de variáveis

$$s = \frac{1}{1 + \tau}, \tag{36}$$

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

bem como, a soma e a subtração do termo

$$S_2 = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-s} \hat{K}_0(s)\,\mathrm{d}s \tag{37}$$

na expressão resultante. Desse modo, passa-se a escrever

$$\mathcal{K}_0(r \to t) = S(t,r) + S_1(r,t) - S_2, \tag{38}$$

onde

$$S(t,r) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^1 \left[p(r,t,s) + \mathrm{e}^{-s} \hat{K}_0(s) \right] \mathrm{d}s, \tag{39}$$

sendo

$$p(t,r,s) = \frac{s^2 \left(\mathrm{e}^{-q^2(s)} - 1 \right)}{q^2(s)} \hat{F}_0 \left(t/q(s), r/q(s) \right) \tag{40}$$

e

$$q(s) = \frac{1-s}{s}. \tag{41}$$

Aqui, a avaliação numérica do termo S_2, obtida através do software Maple, resulta em

$$S_2 = 1.402022228098. \tag{42}$$

O termo $S_1(t,r)$ indicado na Eq. (36), por sua vez, pode ser avaliado na forma

$$S_1(t,r) = \begin{cases} 2\pi^{-1/2} \hat{E}\left(t/r\right)/r, & t < r \\ 2\pi^{-1/2} \hat{E}\left(r/t\right)/t, & t > r \end{cases}, \tag{43}$$

onde $\hat{E}(x)$ corresponde à integral elíptica completa de primeira ordem, que aqui é avaliada numericamente mediante aplicação do algoritmo sugerido na Ref. [1]. Enquanto que, o termo $S(t,r)$, Eq. (39), pode agora ser avaliado, sem maiores dificuldades, mediante a aplicação do esquema de quadratura de Gauss-Legendre, através da expressão

$$S(t,r) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \sum_{n=1}^{N_\tau} \omega_n \left[p(t,r,\mu_n) + \mathrm{e}^{-\mu_n} \hat{K}_0(\mu_n) \right]. \tag{44}$$

Assim sendo, o termo $\mathcal{K}_0(t \to r)$ é avaliado pela Eq. (34) nos casos em que $|t-r| \geq 0.05$, ou pela Eq. (38), com a utilização das Eqs. (42) a (44), nos casos em que $|t-r| < 0.05$.

Reescreve-se ainda o núcleo da equação integral na forma matricial

$$\mathbf{K}(t \to r) = \begin{bmatrix} k_{11}(t;r) & k_{12}(t;r) \\ k_{21}(t;r) & k_{22}(t;r) \end{bmatrix}, \tag{45}$$

obtida mediante a substituição dos termos $\mathbf{\Delta}_0$, $\mathbf{\Delta}_2$ e $\mathbf{\Delta}_4$, definidos nas Eqs. (6) a (8), de modo que se tenha

$$k_{11}(t;r) = \frac{3}{10}\mathcal{K}_0(t \to r) - \frac{2}{5}\mathcal{K}_2(t \to r) + \frac{2}{15}\mathcal{K}_4(t \to r), \tag{46}$$

$$k_{12}(t;r) = -\left(\frac{1}{30}\right)^{1/2} \mathcal{K}_0(t \to r) + \left(\frac{2}{15}\right)^{1/2} \mathcal{K}_2(t \to r), \tag{47}$$

$$k_{21}(t;r) = k_{12}(t;r) \quad \text{e} \quad k_{22}(t;r) = \mathcal{K}_0(t \to r). \tag{48}$$

Desse modo, usando-se o núcleo da equação escrito tal como indicado na Eq. (45), torna-se possível reescrever o sistema linear indicado na Eq. (21) na forma

$$\sum_{\alpha=0}^{L} \left\{ a_\alpha \left[X^{\beta,\alpha} - Y_{1,1}^{\beta,\alpha} - Z_{1,1}^{\beta,\alpha} \right] - b_\alpha \left[Y_{1,2}^{\beta,\alpha} + Z_{1,2}^{\beta,\alpha} \right] \right\} = C_1 \tag{49}$$

e

$$\sum_{\alpha=0}^{L} \left\{ -a_\alpha \left[Y_{2,1}^{\beta,\alpha} + Z_{2,1}^{\beta,\alpha} \right] + b_\alpha \left[X_{\beta,\alpha} - Y_{2,2}^{\beta,\alpha} - Z_{2,2}^{\beta,\alpha} \right] \right\} = C_2, \tag{50}$$

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL
DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

para $\beta = 0, 1, ..., L$, com

$$X_{\beta,\alpha} = \frac{R}{2}\sum_{m=1}^{N_t} \omega_m f_m P_\beta(\mu_m) P_\alpha(\mu_m) \tag{51}$$

$$Y_{i,j}^{\beta,\alpha} = \frac{R}{4}\sum_{m=1}^{N_t} \omega_m f_m^2 P_\beta(\mu_m) \sum_{p=1}^{N_t} \omega_p g_{m,p} k_{i,j}(g_{m,p}; f_m) P_\alpha(\gamma_{m,p}) \tag{52}$$

e

$$Z_{i,j}^{\beta,\alpha} = \frac{R}{4}\sum_{m=1}^{N_t} \omega_m (R - f_m) f_m P_\beta(\mu_m) \sum_{p=1}^{N_t} \omega_p h_{m,p} k_{i,j}(h_{m,p}; f_m) P_\alpha(\eta_{m,p}) \tag{53}$$

para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, bem como

$$C_1 = -k_2 \left(\frac{15\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{R}{2}\sum_{m=1}^{N_t} \omega_m f_m P_\beta(\mu_m), \tag{54}$$

$$C_2 = -k_1 \left(\frac{\pi^{1/2}}{2}\right) \frac{R}{2}\sum_{m=1}^{N_t} \omega_m f_m P_\beta(\mu_m), \tag{55}$$

sendo

$$f_m = \frac{\mu_m + 1}{2}R, \quad g_{m,p} = \frac{\mu_p + 1}{2}f_m, \quad h_{m,p} = \frac{(R - f_m)\mu_p + f_m + R}{2}, \tag{56a,b,c}$$

$$\gamma_{m,p} = \frac{(\mu_p + 1) f_m - R}{R} \quad \text{e} \quad \eta_{m,p} = \frac{(R - f_m)\mu_p + f_m}{R}. \tag{57a,b}$$

As Eqs. (49) e (50), constituem um sistema algébrico linear de ordem $2L + 1$, cuja solução são as constantes a_α e b_α do vetor $\mathbf{v}_\alpha$ usado na expansão indicada na Eq. (17).

Salienta-se ainda, que, para avaliação das integrais presentes na formulação apresentada neste trabalho, baseadas no esquema de quadratura de Gauss-Legendre usual com pontos $y \in [-1, 1]$, foram necessárias algumas transformações de variáveis, como

$$y = \frac{2x - a - b}{b - a} \tag{58}$$

para os casos de intervalos de integração $x \in [a, b]$ e,

$$y = 2e^{-x} - 1 \tag{59}$$

quando $x \in [0, \infty)$.

4 Resultados e Comentários Finais

Com o intuito de obter resultados numéricos para as quantidades de interesse físico dos problemas de Poiseuille e creep térmico, mediante a utilização da formulação apresentada anteriormente, realizou-se uma implementação em Fortran. Uma vez estabelecido o sistema linear definido pelas Eqs. (49) e (50), utiliza-se subroutinas numéricas disponíveis para solucioná-lo. Mediante a obtenção da solução $\mathbf{v}_\alpha = [a_\alpha \quad b_\alpha]^T$, é possível então, determinar as quantidades de interesse físico, tais como o perfil de velocidade e o perfil do fluxo de calor, Eqs. (10) e (11), respectivamente, sendo que

$$\mathbf{G}(r) = \frac{\pi^{1/2}}{2}\begin{bmatrix} (15/2)^{1/2} k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} + \sum_{\alpha=0}^{L} \mathbf{v}_\alpha P_\alpha\left(\frac{2r}{R} - 1\right). \tag{60}$$

A partir daí obtém-se, respectivamente, as taxas de fluxo e de fluxo de calor do gás,

$$U = \frac{2}{R^2}\sum_{m=1}^{N_t} \omega_m u(f_m) f_m \tag{61}$$

e

$$Q = \frac{2}{R^2}\sum_{m=1}^{N_t} \omega_m q(f_m) f_m, \tag{62}$$

com f_{m} dado pela Eq. (56a).

Usando-se como parâmetros de entrada $L = 60$, $N_{\tau} = 50$, $N_{r} = 180$ e $N_{t} = 160$, é possível obter-se resultados para as grandezas de interesse físico, como os listados na Tabela 1, aqui apresentados para comparação com outros disponíveis na literatura [9]. Observa-se uma concordância em cerca de quatro dígitos com aqueles mostrados na Ref. [9]. Várias foram as simulações realizadas, que juntamente com resultados prévios associados à outra classe de equações integrais [8, 6], indicam a viabilidade de uso da abordagem aqui proposta para o tratamento de problemas cujas condições de contorno incluam reflexão especular (termo **B(r)** dependente de **Z(r)** na Eq. (1)), caso onde outras abordagens de caráter analítico, como a usada na Ref. [9], não se aplicam.

Tabela 1: Duto de raio $R = 0,5$

	Este trabalho	Ref. [9]
$-u_{\mathsf{P}}(R)$	2.1791(-1)	2.179308(-1)
$u_{\mathsf{T}}(R)$	6.7291(-2)	6.729058(-2)
$-U_{\mathsf{P}}$	1.4007	1.400539
U_{T}	4.7844(-1)	4.784350(-1)
$q_{\mathsf{P}}(R)$	6.3450(-2)	6.345393(-2)
$-q_{\mathsf{T}}(R)$	3.4208(-1)	3.420581(-1)
Q_{P}	4.7844(-1)	4.784350(-1)
$-Q_{\mathsf{T}}$	2.1361	2.136032

Os subscritos P e T referem-se a Poiseuille e *creep* térmico, respectivamente.

Referências

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of mathematical function", Dover Pub., New York, 1965.

[2] L. B. Barichello, M. Camargo, P. Rodrigues, C. E. Siewert, An integral equation basic to the BGK model for flow in a cylindrical tube, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik Physik*, 53 (2002) 769-781.

[3] L. B. Barichello, C. E. Siewert, Some Comments on Modeling the Linearized Boltzmann Equation, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 77 (2003) 43-59.

[4] C. Cercignani, "The Boltzmann equation and its applications", Springer-Verlag, New York, 1988.

[5] M. Gad-el-Hak, "The MEMS Handbook", Mechanical Engineering Handbook Series, New York, 2005.

[6] C. H. Kamphorst, P. Rodrigues, L. B. Barichello, A Spectral Approach to Compute Rarefied Gas Flows in Cylindrical Geometry, *International Nuclear Atlantic Conference*, 27/09 a 02/10, Rio de Janeiro, RJ, Brasil (CD-Rom).

[7] D. Li, "Micro and Nanoscale Gas Dynamics", Springer, New York, 2008.

[8] P. Rodrigues, C. H. Kamphorst, L. B. Barichello, A Spectral Method for Rarefied Gas Dynamics Problems in Cylindrical Geometry, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 51 (2009) 181-187.

[9] C. E. Siewert, D. Valougeorgis, An Analytic Discrete-Ordinates Solution of the S model in Rarefied Gas Dynamics: Poiseuille and Thermal-Creep Flow in a Cylindrical Tube, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 72 (2002) 531-550.

[10] M. M. R. Williams, A Review of the Rarefied Gas Dynamics Theory Associated with Some Classical Problems in Flow and Heat Transfer, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik Physik*, 52 (2001) 500-516.