ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL
DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

Solução em forma fechada para a equação íntegro diferencial de transporte de fótons

Janice Teresinha Reichert,
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
85504-300, Pato Branco, PR,
E-mail: janice@utfpr.edu.br,

Liliane Basso Barichello
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91509-900, Porto Alegre, RS,
E-mail: lbaric@mat.ufrgs.br

Resumo: *Neste trabalho, uma solução em forma fechada é proposta para a equação íntegro diferencial de transporte de fótons unidimensional. A dependência energética no problema é abordada de forma discretizada. O problema resultante, com dependência angular e espacial, é resolvido pelo método analítico de ordenadas discretas (ADO), resultando em uma solução analítica em termos da variável espacial. Simulações numéricas avaliam o chamado fator de buildup, usado como fator de correção em procedimentos práticos associados ao cálculo de doses em tratamentos de radioterapia.*

Palavras-chave: *Equação de transporte, núcleo de Klein-Nishina; radioterapia; método analítico de ordenadas discretas.*

1 Introdução

Uma das quantidades de interesse em tratamentos por radioterapia é a energia depositada, ou dose de radiação. Para compreender como ocorre a interação da radiação com a matéria, e analisar a energia depositada, faz-se necessário um bom entendimento da distribuição do fluxo (intensidade) de radiação num determinado meio [5], que pode ser obtido através da solução da equação íntegro diferencial de transporte de partículas, particularmente de fótons [6]. Para o caso de baixas energias, a característica do chamado espalhamento Compton, predominante no processo [6, 9] , introduz uma dificuldade maior no tratamento do termo integral da equação. Resultados clássicos são conhecidos [9] para problemas unidimensionais em meio infinito, utilizando método conhecido como o método dos momentos, que se resume na solução de uma equação integral de Volterra por aproximação numérica. A solução do problema em meio finito, onde esta abordagem citada anteriormente não se aplica, é sempre um desafio e, em geometrias complexas é em geral tratato por abordagens probabilísticas [4]. Uma dificuldade adicional do problema, além da conhecida complexidade dos modelos que envolvem a equação de Boltzmann linear, se encontra na dependência dos limites de integração da equação à variável comprimento de onda.

Neste trabalho, na seção 2, introduzimos a equação de transporte para fótons com núcleo de espalhamento de Klein-Nishina, que define o problema básico a ser considerado. A seguir, na seção 3, propomos um tratamento discretizado para a variável energia e apresentamos o método ADO [1] para tratamento da dependência angular da equação, resultando em uma solução em forma fechada para o problema, analítica em termos da variável espacial. Finalmente, nas seções 4 e 5, apresentamos resultados numéricos e considerações finais.

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

2 Equação de Transporte para Fótons

Consideremos a equação de transporte para fótons escrita na forma [6],

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}I(x,\lambda,\mu)+\sigma(\lambda)I(x,\lambda,\mu)=\alpha\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}P_l(\mu)\times$$
$$\int_{max\{\lambda_0,\lambda-2\}}^{\lambda}\int_{-1}^{1}K(\lambda',\lambda)P_l(1+\lambda'-\lambda)P_l(\mu')I(x,\lambda',\mu')d\mu'd\lambda',\quad (1)$$

onde $I(x,\lambda,\mu)$ é a intensidade de radiação, $x\in(0,x_0)$ representa a variável espacial, $\mu\in[-1,1]$ é o cosseno do angulo polar, $\lambda\in[\lambda_0,\infty)$ é o comprimento de onda e λ_0 o comprimento de onda associado à energia do feixe incidente de radiação, no domínio. Além disto, $\sigma(\lambda)$ representa o coeficiente de atenuação linear. Considera-se, o núcleo de Klein-Nishina para espalhamento Compton [2, 6, 7, 9], $K(\lambda',\lambda)$, presente na equação (1), definido como sendo nulo, exceto se $\lambda'\leq\lambda\leq\lambda'+2$, sendo, neste caso, dado por

$$K(\lambda',\lambda)=\ \tfrac{3}{8}(\tfrac{\lambda'}{\lambda})[\tfrac{\lambda}{\lambda'}+\tfrac{\lambda'}{\lambda}-2(\lambda-\lambda')+(\lambda-\lambda')^2]\ .\quad (2)$$

Ainda,

$$\alpha=\frac{N_A Z\sigma_T\rho}{A}=0.40061\frac{Z\rho}{A}[cm^{-1}],\quad (3)$$

onde A é a massa atômica, Z é o número atômico, N_A é o número de Avogadro, σ_T é a seção de choque de Thomson, e ρ é a densidade do meio.

Devido à característica do espalhamento Compton, e conforme definição do núcleo de Klein-Nishina, o termo integral na equação (1), de fato, tem limite inferior igual a λ_0 ou $\lambda-2$, o que for maior, conforme já foi observado por [2]. Neste trabalho, propõe-se uma solução de caráter analítico, para a aproximação em ordenadas discretas da equação (1), considerando que a intensidade de radiação $I(x,\lambda,\mu)$, seja conhecida nas fronteiras do domínio: placa plana de espessura x_0.

3 Desenvolvimento

Considerando que o termo integral na equação (1) tem limites dependentes da variável comprimento de onda λ, o que dificulta a proposição de um esquema de quadratura, propomos neste trabalho, um esquema que assegure que o valor $max\{\lambda_0,\lambda-2\}$ seja um dos nós da quadratura, caso contrário o problema discretizado levaria a um sistema com número maior de incógnitas do que de equações. Assim, primeiramente, fixa-se um valor máximo, denotado por λ_F, como aproximação numérica do limite superior (infinito) do intervalo de definição da variável de interesse, $\lambda\in[\lambda_0,\infty)$. Posteriormente, o espaçamento uniforme entre os pontos, $h=(\lambda_F-\lambda_0)/n$ é definido baseado na escolha de um número de intervalos n apropriado para que a propriedade acima mencionada se cumpra. Ainda, $\lambda_0=0.511/E_0$ é um valor conhecido. Assim, $M=n+1$ será o número de intervalos (grupos) de energia.

Fazendo $\lambda_1=\lambda_0$ o primeiro valor discretizado, os demais valores para a discretização da variável energia são calculados como, $\lambda_i=\lambda_{i-1}+h$, $i=2,3,...,M$, garantindo que $max\{\lambda_1,\lambda_i-2\}$, $i=1,2,...,M$ esteja sempre entre os valores discretizados de λ. Para cada λ_i, $i=1,...,M$, resolve-se então a equação de transporte,

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}I(x,\lambda_i,\mu)+\sigma(\lambda_i)I(x,\lambda_i,\mu)=\alpha\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}P_l(\mu)$$
$$\times\int_{max\{\lambda_1,\lambda_i-2\}}^{\lambda_i}\int_{-1}^{1}K(\lambda',\lambda_i)P_l(1+\lambda'-\lambda_i)P_l(\mu')I(x,\lambda',\mu')d\mu'd\lambda'.\quad (4)$$

A integral em λ' será resolvida pela regra dos trapézios. Chamando,

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

$$max\{\lambda_1, \lambda_i - 2\} = \lambda_r \in \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_M\}, \tag{5}$$

tem-se,

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}I(x,\lambda_i,\mu) + \sigma(\lambda_i)I(x,\lambda_i,\mu) = \alpha\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}P_l(\mu) \times \int_{\lambda_r}^{\lambda_i}\int_{-1}^{1}K(\lambda',\lambda_i)P_l(1+\lambda'-\lambda_i)P_l(\mu')I(x,\lambda',\mu')d\mu'd\lambda', \tag{6}$$

e usando a regra dos trapézios,

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}I(x,\lambda_i,\mu) + \sigma(\lambda_i)I(x,\lambda_i,\mu) = \alpha\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}P_l(\mu)(\frac{\lambda_i-\lambda_r}{2})[K(\lambda_r,\lambda_i)P_l(1+\lambda_r-\lambda_i)\times \int_{-1}^{1}P_l(\mu')I(x,\lambda_r,\mu')d\mu' + K(\lambda_i,\lambda_i)P_l(1+\lambda_i-\lambda_i)\int_{-1}^{1}P_l(\mu')I(x,\lambda_i,\mu')d\mu'], \tag{7}$$

onde λ_r é um valor fixo (para cada i).

Chamando

$$K(\lambda_r,\lambda_i) \equiv K_{ri}, \tag{8}$$

$$I(x,\lambda_i,\mu) = I_i(x,\mu), \tag{9}$$

e denotando por $\mathbf{C}_l$, a matriz de ordem $M \times M$ com coeficientes não nulos definidos por,

$$(C_l)_{i,r} = \frac{(\lambda_i-\lambda_r)}{2}K_{ri}P_l(1+\lambda_r-\lambda_i), \tag{10}$$

pode-se escrever a equação (7), utilizando a notação matricial,

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{I}(x,\mu) + \mathbf{\Sigma}\,\mathbf{I}(x,\mu) = \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(2l+1)P_l(\mu)\mathbf{C}_l\int_{-1}^{1}P_l(\mu')\mathbf{I}(x,\mu')d\mu', \tag{11}$$

para $x \in (0,x_0)$ e $\mu \in [-1,1]$, onde $\mathbf{\Sigma}$ é a matriz diagonal com elementos $\sigma_i = \sigma(\lambda_i)$, $i = 1,2,..,M$, e,

$$\mathbf{I}(x,\mu) = (I_1(x,\mu), I_2(x,\mu), ..., I_M(x,\mu))^T, \tag{12}$$

define o vetor $M \times 1$ com componentes $I(x,\lambda_i,\mu)$.

No problema resultante o tratamento da variável angular é feito pelo método analítico de ordenadas discretas (ADO) [1].

3.1 Tratamento da variável angular pelo método de ordenadas discretas

A equação (11) em pode ser escrita em termos de ordenadas discretas,

$$\mu_i\frac{d}{dx}\mathbf{I}(x,\mu_i) + \mathbf{\Sigma}\,\mathbf{I}(x,\mu_i) = \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(2l+1)P_l(\mu_i)\mathbf{C}_l\sum_{s=1}^{N}w_s\mathbf{I}_{l,s}(x), \tag{13}$$

e

$$-\mu_i\frac{d}{dx}\mathbf{I}(x,-\mu_i) + \mathbf{\Sigma}\,\mathbf{I}(x,-\mu_i) = \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(-1)^l(2l+1)P_l(\mu_i)\mathbf{C}_l\sum_{s=1}^{N}w_s\mathbf{I}_{l,s}(x), \tag{14}$$

ISSN 1984-820X

Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC

CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL
DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

para $i = 1, \cdots, N$, e onde

$$\mathbf{I}_{l,s}(x) = P_l(\mu_s)[\mathbf{I}(x, \mu_s) + (-1)^l \mathbf{I}(x, -\mu_s)]. \tag{15}$$

Aqui, denotamos por $\{\mu_s\}$ os pontos de quadratura e $\{w_s\}$ os pesos da quadratura definidos no intervalo $[0, 1]$. Buscando soluções da forma exponencial para as equações (13) e (14), escrevemos

$$\mathbf{I}(x, \pm\mu_i) = \mathbf{\Phi}(\nu, \pm\mu_i) e^{-x/\nu}, \tag{16}$$

substituindo esta expressão nas Eqs. (13) and (14) e após algumas manipulações algébricas [8], podemos escrever, para $i = 1, \cdots, M$, o sistema

$$(\mathbf{\Sigma} - \frac{\mu_i}{\nu}\hat{\mathbf{I}})\mathbf{\Phi}(\nu, \mu_i) = \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(2l+1)P_l(\mu_i)\mathbf{C}_l\sum_{s=1}^{N} w_s \mathbf{\Phi}_{l,s}(\nu), \tag{17}$$

$$(\mathbf{\Sigma} + \frac{\mu_i}{\nu}\hat{\mathbf{I}})\mathbf{\Phi}(\nu, -\mu_i) = \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(-1)^l(2l+1)P_l(\mu_i)\mathbf{C}_l\sum_{s=1}^{N} w_s \mathbf{\Phi}_{l,s}(\nu), \tag{18}$$

onde

$$\mathbf{\Phi}_{l,s} = P_l(\mu_s)[\mathbf{\Phi}(\nu, \mu_s) + (-1)^l \mathbf{\Phi}(\nu, -\mu_s)], \tag{19}$$

e $\hat{\mathbf{I}}$ é a matriz identidade $M \times M$.

Introduzindo os vetores de ordem MN,

$$\mathbf{\Phi}_+(\nu) = [\mathbf{\Phi}^T(\nu, \mu_1), \mathbf{\Phi}^T(\nu, \mu_2), ..., \mathbf{\Phi}^T(\nu, \mu_N)]^T, \tag{20}$$

e

$$\mathbf{\Phi}_-(\nu) = [\mathbf{\Phi}^T(\nu, -\mu_1), \mathbf{\Phi}^T(\nu, -\mu_2), ..., \mathbf{\Phi}^T(\nu, -\mu_N)]^T, \tag{21}$$

onde T denota a operação transposta, as matrizes quadradas $(MN \times MN)$,

$$\mathbf{W} = diag\{..., w_i\hat{\mathbf{I}}, ...\}, \tag{22}$$

$$\mathbf{M} = diag\{..., \mu_i\hat{\mathbf{I}}, ...\}, \tag{23}$$

$$\mathbf{D} = diag\{..., \mathbf{\Sigma}, ...\}, \tag{24}$$

e as matrizes de ordem $(MN \times M)$

$$\mathbf{\Pi}_l = [P_l(\mu_1)\hat{\mathbf{I}}, P_l(\mu_2)\hat{\mathbf{I}}, ..., P_l(\mu_N)\hat{\mathbf{I}}]^T, \tag{25}$$

as Eqs. (17) e (18) podem ser escritas como,

$$(\mathbf{D} - \frac{1}{\nu}\mathbf{M})\mathbf{\Phi}_+(\nu) = \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(2l+1)\mathbf{\Pi}_l\mathbf{C}_l\mathbf{G}_l(\nu), \tag{26}$$

e

$$(\mathbf{D} + \frac{1}{\nu}\mathbf{M})\mathbf{\Phi}_+(\nu) = \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(-1)^l(2l+1)\mathbf{\Pi}_l\mathbf{C}_l\mathbf{G}_l(\nu), \tag{27}$$

com

$$\mathbf{G}_l(\nu) = \mathbf{\Pi}_l^T\mathbf{W}[\mathbf{\Phi}_+(\nu) + (-1)^l\mathbf{\Phi}_-(\nu)]. \tag{28}$$

Agora, chamando

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{\Phi}_-(\nu), \tag{29}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Phi}_+(\nu) - \mathbf{\Phi}_-(\nu) \tag{30}$$

fazendo a soma e a diferença das Eqs. (26) e (27) obtemos

$$\mathsf{E}\mathsf{X} = \frac{1}{\nu}\mathsf{Y} \quad e \quad \mathsf{H}\mathsf{Y} = \frac{1}{\nu}\mathsf{X}\,, \tag{31}$$

onde

$$\mathsf{E} = (\mathsf{D} - \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(2l+1)\Pi_l \mathsf{C}_l[1+(-1)^l]\Pi_l^T \mathsf{W})\mathsf{M}^{-1}, \tag{32}$$

$$\mathsf{H} = (\mathsf{D} - \frac{\alpha}{2}\sum_{l=0}^{L}(2l+1)\Pi_l \mathsf{C}_l[1-(-1)^l]\Pi_l^T \mathsf{W})\mathsf{M}^{-1}, \tag{33}$$

$$\mathsf{X} = \mathsf{M}\mathsf{U}\,, \quad \mathsf{Y} = \mathsf{M}\mathsf{V}\,. \tag{34}$$

Utilizando as equações (31) obtém-se dois problemas de autovalores,

$$(\mathsf{H}\mathsf{E})\mathsf{X} = \lambda \mathsf{X} \tag{35}$$

$$(\mathsf{E}\mathsf{H})\mathsf{Y} = \lambda \mathsf{Y} \tag{36}$$

onde $\lambda = 1/\nu^2$.

Os autovalores λ_j e autovetores correspondentes $\mathsf{X}(\lambda_j)$, $j = 1, 2, ..., MN$ são utilizados para escrever

$$\Phi_+(\nu_j) = \frac{1}{2}\mathsf{M}^{-1}(\hat{\mathsf{I}} + \nu_j \mathsf{E})\mathsf{X}(\lambda_j) \tag{37}$$

$$\Phi_-(\nu_j) = \frac{1}{2}\mathsf{M}^{-1}(\hat{\mathsf{I}} - \nu_j \mathsf{E})\mathsf{X}(\lambda_j), \tag{38}$$

para $j = 1, 2, ..., (M+1)N$. A expressão $\hat{\mathsf{I}}$ é a matriz identidade de ordem $MN \times MN$.

Agora definindo

$$\mathsf{I}_+(x) = [\mathsf{I}^T(x,\mu_1), \mathsf{I}^T(x,\mu_2), ..., \mathsf{I}^T(x,\mu_N)]^T, \tag{39}$$

$$\mathsf{I}_-(x) = [\mathsf{I}^T(x,-\mu_1), \mathsf{I}^T(x,-\mu_2), ..., \mathsf{I}^T(x,-\mu_N)]^T, \tag{40}$$

podemos escrever, em forma fechada, a solução em ordenadas discretas, para o problema homogêneo dado pelas Eqs. (13) e (14) como

$$\mathsf{I}_+(x) = \sum_{j=1}^{MN}[A_j \Phi_+(\nu_j)e^{-x/\nu_j} + B_j \Phi_-(\nu_j)e^{-(x_0-x)/\nu_j}], \tag{41}$$

e

$$\mathsf{I}_-(x) = \sum_{j=1}^{MN}[A_j \Phi_-(\nu_j)e^{-x/\nu_j} + B_j \Phi_+(\nu_j)e^{-(x_0-x)/\nu_j}] \tag{42}$$

onde as constantes A_j e B_j são determinadas impondo-se as condições de contorno.

4 Resultados numéricos e aspectos computacionais

O cálculo da dose de radiação, uma das quantidades de interesse que podem ser avaliadas a partir da solução desenvolvida nas seções anteriores, pode ser feita, segundo [2, 7], como

$$D_T(\mu_0 x) = m_e c^2 \int_{\lambda_0}^{\infty} \mu_a(\lambda)\hat{\Phi}(\mu_0 x, \lambda)\frac{1}{\lambda^2}d\lambda, \tag{43}$$

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

onde o fluxo $\hat{\Phi}(\mu_0 x, \lambda)$ é definido por,

$$\hat{\Phi}(\mu_0 x, \lambda) = \int_{1}^{1} I(\mu_0 x, \lambda, \mu) d\mu, \tag{44}$$

$m_e c^2 = 0.511/E_0$, sendo E_0 igual a energia incidente, μ_0 o coeficiente de atenuação do meio, para a energia incidente E_0 e $\mu_a(\lambda)$ o coeficiente de absorção, utilizado aqui como sendo o do ar. Para avaliação numérica da equação (43), o mesmo esquema de discretização e quadratura descrito na seção (3) é utilizado.

O fator de buildup, que é normalmente usado como um parâmetro de correção (para evitar a solução da equação que envolve o termo integral de espalhamento) entre o fluxo que inclui o espalhamento e o fluxo devido aos fótons não espalhados [3], é calculado como

$$B(\mu_0 x) = \frac{D_T(\mu_0 x)}{D_0(\mu_0 x)}, \tag{45}$$

onde a expressão no denominador é a dose devido à radiação primária, ou seja, ao fluxo de radiação não colidido $\hat{\Phi}(\mu_0 x, \lambda_0)$.

Para o problema teste aqui abordado definimos, como condições de contorno,

$$I(0, \lambda_0, \mu) = 1, \quad \text{para } \mu > 0, \tag{46}$$

$$I(0, \lambda_i, \mu) = 0, \quad \text{para } \mu > 0, \ \ i = 1, 2, ..., M, \tag{47}$$

$$I(x_0, \lambda_i, \mu) = 0 \quad \text{para } \mu < 0, \ \ i = 1, 2, ..., M, \tag{48}$$

e consideramos uma placa plana homogênea de água (espessura definida em termos de $\mu_0 x$), com energia incidente de $1Mev$, sendo, neste caso, $\mu_0 = 0.0706$ o valor do coeficiente de atenuação. Usamos nove grupos de energia para a discretização da variável comprimento de onda e $N = 20$ para o método ADO. Determinamos o fator de buildup, e comparamos com resultados obtidos com outra abordagem, que considera a dependência espectral como contínua, apresentada em [8],

Tabela 1: Comparação do fator de buildup.

$\mu_0 x$	Este trabalho	Ref. [8]
1	2.5281	2.1111
2	2.8933	2.8704
3	3.2588	3.5124
4	3.6569	4.0692
5	4.1116	4.5481
6	4.6399	4.9513

Observamos uma concordância minimamente satisfatória entre as duas abordagens utilizadas. Algumas diferenças, do caso aqui apresentado e na abordagem contínua, podem ser atribuídas a resolução totalmente analítica utilizada no caso contínuo (baseada em uma expansão espectral na variável comprimento de onda) comparada com a abordagem aqui utilizada através da regra dos trapézios para a resolução das integrais. No entanto, a proposta aqui descrita pode ser considerada mais simples e possivelmente mais facilmente inserida no tratamento de problemas mais complexos. De acordo com o nosso conhecimento não existem na literatura outros resultados numéricos para este problema aplicado a placas planas.

Na tabela seguinte apresentamos uma descrição de valores para diferentes ordens de aproximação, para esta abordagem, considerando o meio como água, com energia incidente de $1Mev$ e nove grupos de energia, em função do número de pontos de quadratura considerados para o método ADO,

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3 PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Tabela 2: Convergência numérica do método ADO.

N	$\mu_0 x = 1$
6	2.5291
10	2.5283
14	2.5282
20	2.5281
24	2.5281
28	2.5281

Como observa-se na tabela 2, com $N = 20$ obtém-se a concordância de quatro dígitos significativos, o que indica uma rápida convergência numérica do método.

Os resultados numéricos são obtidos com baixo esfôrço computacional e gerados utilizando a linguagem FORTRAN e executadas em um notebook Centrino 2 Duo 2GHz, em menos de 5 segundos. O bom desempenho computacional, deve-se principalmente à utilização do método analítico de ordenadas discretas (ADO) que reduz o problema original ao cálculo de um esquema de quadratura no semi-intervalo, que implica num ganho de precisão na discretização em relação à esquemas clássicos de quadratura utilizados em problemas de transporte.

5 Comentários Finais

Apresentou-se uma solução em forma fechada, analítica em termos da variável espacial, para a equação de transporte de fótons com espalhamento Compton. Foi usada uma abordagem discreta da dependência espectral, para obtenção de resultados numéricos, para o problema da placa plana submetida a condições de contorno de radiação incidente conhecidas nas extremidades. A abordagem de quadratura proposta permitiu um tratamento satisfatório ao problema de dependência dos limites de integração em relação à variável comprimento de onda.

Referências

[1] L.B. Barichello, C. E. Siewert, A Discrete-Ordinates Solution for a Non-Grey Model With Complete Frequency Redistribution, *Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*,62 (1999), 665-675.

[2] U. Fano, L. V. Spencer, M.J. Berger, "Encyclopedia of Physics" - Volume XXXVIII/2, Neutrons and Related Gamma Ray Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1959.

[3] H. Goldstein, "Fundamental Aspects of Reactor Shielding", Addison-Wesley Publishing Company, INC.,1959.

[4] H. Hirayama, K. Shin, Application of the EGS4 Monte Carlo Code to a Study of Multilayer Gamma-Ray Exposure Buildup Factor of up to 40 mfp, *Journal of Nuclear Science and Technology*, 35 (1998), 816-829.

[5] H.E. Johns, J.R. Cunninghan, "The Physics of Radiology", Thomas Springfield Press, 1983.

[6] J. K. Shultis, R. E. Faw, "Radiation Shielding", American Nuclear Society, Inc., 2000, La Grange Park, Illinois, USA.

[7] J. J. Duderstadt, W. R. Martin, "Transport Theory", John Wiley & Sons, Inc., 1979.

[8] J.T. Reichert, "Abordagens Analíticas para Problemas de Transporte de Radiação com Dependência Espectral", Tese de Doutorado, PROMEC-UFRGS, 2009.

[9] J. Wood, "Computational Methods in Reactor Shielding", Oxford, Pergamon Press,1982.