FG89/01

Um Problema de Autovalores Simplificado na Solução em Ordenadas Discretas do Modelo BGK Linearizado

P. Rodrigues[a,b] e L. B. Barichello[a]

[a] CPGMAp, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Av. Bento Gonçalves, 9500 - 90501900, Porto Alegre, RS
[b] URI, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
-Caixa Postal 184 - 98400000, Frederico Westphalen, RS

Neste trabalho são propostas e desenvolvidas duas soluções em ordenadas discretas para o problema do Fluxo de Poiseuille em um canal plano, abordado segundo o modelo BGK linearizado [1], modelado pela equação

$$\mu\frac{\partial}{\partial\tau}Y(\tau,\mu)+Y(\tau,\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)Y(\tau,u)du, \tag{1}$$

para $\tau\in(-a,a)$, $\mu\in(-\infty,\infty)$, $\psi(\mu)=\pi^{-1/2}e^{-\mu^2}$ e condições de contorno reflexivas. Nas duas versões são utilizados os chamados "half-range" esquemas de quadratura para aproximação do termo integral da equação (1), no entanto os dois casos diferem basicamente na avaliação , analítica ou numérica, das soluções elementares do sistema de equações em ordenadas discretas

$$Y(\tau,\pm\mu_i)=\phi(\tau,\pm\mu_i)e^{-\tau/\nu},\ i=1,2,...,N. \tag{2}$$

É importante ressaltar que um problema de autovalores simplificado, baseado em matrizes que são perturbações diagonais de matrizes de posto um, resulta nas duas abordagens e diferentemente de trabalhos anteriores [2], é tratado a partir de uma subrotina específica, denominada DZPACK [3]. Tal problema de autovalores é descrito pela equação

$$(\mathrm{D}-2\mathrm{z}\mathrm{z}^T)\mathrm{X}=\xi\mathrm{X} \tag{3}$$

onde

$$\mathrm{D}=\mathrm{diag}\{\mu_1^{-2},\mu_2^{-2},...,\mu_N^{-2}\} \tag{4}$$

e

$$\mathrm{z}=\left[\frac{\sqrt{w_1\psi(\mu_1)}}{\mu_1},\frac{\sqrt{w_2\psi(\mu_2)}}{\mu_2},...,\frac{\sqrt{w_N\psi(\mu_N)}}{\mu_N}\right]^T, \tag{5}$$

sendo que os μ_i´s e w_i´s (para $i=1,2,...,N$) denotam respectivamente os pontos e os pesos da quadratura e $\xi=1/\nu^2$.

Resultados numéricos plenamente satisfatórios para esse problema e também para problemas em meio semi-infinito ("Creep" Térmico e Deslizamento Viscoso), foram obtidos para uma ampla variação do domínio do número de Knudsen, confirmando a boa precisão das soluções em ordenadas discretas aplicadas à problemas da dinâmica de gases.

Referências

[1] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P. and Krook, M., *Phys. Rev.*, **94**, 511 (1954).
[2] Barichello, L. B. and Siewert, C. E., "A Discrete-Ordinates Solution For Poiseuille Flow In A Plane Channel", *ZAMP*, em impressão.
[3] Siewert, C. E. and Wright, S. J., "Efficient Eigenvalue Calculations In Radiative Transfer", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, em impressão.

ANÁLISE DIMENSIONAL DO MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL PARA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Zacarias M. Chamberlain Pravia, Prof. FEAR-UPF, Universidade de Passo Fundo
zacarias@upf.tche.br

ABSTRACT: *This work presents a dimensional analysis of the Modal Superposition Method for Linear Dynamics systems, wich proof that modal vectors or eigenvectors are dimensionless. In addition a brief hitorical review and the physical interpretation for modal analysis are presented.*

INTRODUÇÃO

A dinâmica, tal como hoje é conhecida, teve seu início nos trabalhos experimentais feitos por Galileo(1564-1642), na queda de corpos, de onde derivou-se o trabalho denominado "De Motu Gravium", publicado em 1590. Este trabalho marca a separação entre a mecânica Aristótelica e a atual dinâmica.

Incialmente as vibrações foram estudadas principalmente em cordas de instrumentos de som. Trabalhos experimentais foram feitos desde o tempo de Phytagoras, e alguns resultados foram obtidos por Galileo e Marinos Mersenne(1588-1648). Os modos de vibração foram reconhecidos como tais por Joseph Souveur(1653-1716), que também identificou a freqüência natural fundamental e os tons harmônicos. Daniel Bernoulli estendeu os resultados de Souveur e introduziu a idéia de representar qualquer pequena oscilação como a soma de seus harmônicos, cada um com sua própria amplitude e freqüência.

A solução do problema matemático de vibração de cordas apresentado originalmente por Lagrange em 1759, considerando massas discretas ao longo da corda. Já Euler em 1751 apresenta equações diferenciais para vibrações laterais de vigas com suportes livres, engastados ou simplesmente apoiados.

[TIMOSHENKO,1953] afirma que a análise modal, tal como é concebida atualmente, deve-se a Lord Rayleigh (John William Strutt), atráves do livro Theory of Sound de 1894. Nesse livro Rayleigh apresenta os problemas de vibração de cordas, barras, placas e cascas, mostrando as vantagens do uso de forças generalizadas (análise modal) na resolução de problemas de dinâmica. Finalmente a idéia da análise modal dinâmica foi expandida por Walter Ritz, ehoje em dia o método de coordenadas generalizadas ou análise modal é amplamente conhecido como método de Rayleigh-Ritz.

ANALISE MODAL DE SISTEMAS DISCRETOS

Um sistema de N graus de liberdade pode ser pode ser representado através de elementos unidos pelos nós nos extremos. De acordo com Lord Rayleigh, para resolver de maneira mais simples um sistema dinâmico discreto, podem-se expressar os deslocamentos em termos dos modos de vibração. Tais modos constituem N formas de deslocamentos independentes, sendo que suas amplitudes representam o conjunto de deslocamentos do sistema discreto. Os modos de vibração exercem função semelhante às funções trigonométricas nas séries de Fourier e são utilizados pelas mesmas razões: (1) possuem propriedades de ortogonalidade, (2) são eficientes, no sentido que podem representar N deslocamentos com a precisão requerida, usando apenas alguns modos. Usando os modos de vibração transforma-se o problema acoplado entre os graus de liberdade do modelo num conjunto de equações independentes desacopladas, é como realizar uma transformação de base, da base geométrica para a base modal. Tal transformação é executada por uma matriz de autovetores $[\Phi]$ de dimensão equivalente ao número total de graus de liberdade do sistema, obtida pela solução do problema de autovalor representado pela equação:

$$([K]-[\Lambda][M])[\Phi]=[0] \tag{1}$$

Sendo que: $[K]$ é a matriz de rigidez do modelo, $[M]$ a matriz de massas), $[\Lambda]$ uma matriz diagonal que representa as N freqüências naturais do sistema, e $[\Phi]$ a matriz que representa os modos de vibração associados. Afirma-se que os modos de vibração são adimensionais, a validade dessa afirmação é objeto deste trabalho.

ANÁLISE DIMENSIONAL DO MÉTODO MODAL

Para verificar a hipótese que os autovetores são adimensionais, foram empregadas as matrizes de elementos lineares do tipo barra(treliça plana, pórtico plano,...). As matrizes de rigidez foram representadas dimensionalmente na base LMT, sendo resolvido o problema de autovalor através da Eq. (1), com a ajuda de álgebra computacional, obteve-se como resultado que os autovalores são adimensionais, e o valor da freqüência natural sendo proporcional a dimensão T^{-1}.

CONCLUSÕES

A análise por superposição modal é uma transformação de base que permite desacoplar o sistema de equações de equilíbrio dinâmico. Embora os coeficientes da matriz de rigidez sejam dimensionalmente diferentes, obtém-se uma solução ao problema de autovalor, tal que, os autovalores são adimensionais e a freqüência com dimensões T^{-1}. Usando-se os números de Buckingham para as freqüências longitudinal e transversal de um elemento de pórtico, demonstra-se que o resultado obtido no problema de autovalor é associado ao modo de vibração longitudinal. Fica demonstrado, de maneira rigorosa, que os autovetores (eigenvectors) obtidos do problema de autovalor são adimensionais.

BIBLIOGRAFIA

CARNEIRO, F.L., *Análise Dimensional e Teoria da Semelhança e dos Modelos Físicos*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

TIMOSHENKO, S.P., *History of Stengh of Materials*. New York: McGraw-hill, 1953.

DIMAGORONAS, A., *Vibration for Engineers*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

CLOUGH,R., PENZIEN,J., Dynamic of Structures. New York: McGraw-Hill,1993.