

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Resultados exatos e de estabilidade em colorações de hipergrafos

por

Lucas de Oliveira Contiero

Trabalho submetido como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Orientador

Porto Alegre, julho de 2018.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

de Oliveira Contiero, Lucas

Resultados exatos e de estabilidade em colorações de hipergrafos / Lucas de Oliveira Contiero.—Porto Alegre: PPG-MAp da UFRGS, 2018.

122 p.: il.

Tese (Doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2018.

Orientador: Hoppen, Carlos

Tese: Matemática Aplicada,
Teoria Extremal de Grafos, Hipergrafos, Colorações

Resultados exatos e de estabilidade em colorações de hipergrafos

por

Lucas de Oliveira Contiero

Trabalho submetido ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a
obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Matemática Discreta

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Hoppen, por ter se dedicado a me orientar durante toda a minha pós-graduação e por ter sempre me incentivado a evoluir no meio científico.

Agradeço ao Prof. Dr. Hanno Lefmann pelos seus ensinamentos, que foram além da matemática, bem como pelo acolhimento durante minha estada na Alemanha.

Agradeço ao meu grande amigo Knut Odermann, por toda amizade e apoio, tanto nos resultados desse trabalho, quanto nas divergências culturais.

Agradeço aos componentes da banca examinadora, professores doutores Fabricio Siqueira Benevides, Guilherme Oliveira Mota e Vilmar Trevisan, pelo empenho em terem estudado e criticado este trabalho.

Agradeço ao Instituto de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo ensino de excelência.

Agradeço ao órgão CAPES tanto pelo apoio financeiro de minha bolsa de estudos, quanto pelo custeio do meu período de Doutorado Sanduíche em Chemnitz, na Alemanha.

Agradeço à minha família por todo amor e preocupação que sempre tiveram por mim. Em especial, agradeço aos meus pais Sérgio e Nilda, cujo incentivo ao longo de toda a minha vida possibilitou a conclusão de mais essa etapa da minha formação profissional, bem como à minha irmã Daniela, pelos bons conselhos, e ao meu (grande) irmão Bruno, pela parceria e lealdade.

Agradeço em especial à minha namorada Ariane, que foi a pessoa que me encorajou a cursar matemática e que até hoje me incentiva a seguir em frente, sempre com muito amor, companheirismo, lealdade e paciência. Também sou grato à sua família, que sempre me acolheu e me aconselhou de forma carinhosa.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Teoria Extremal de Grafos	2
1.2 Estabilidade no Problema de Turán para grafos	4
1.3 O problema de coloração em grafos	5
1.4 Estabilidade para colorações em grafos	8
1.5 O Problema de Turán para hipergrafos	9
1.6 Estabilidade no Problema de Turán para hipergrafos	13
1.7 Resultado de estabilidade Füredi para hipergrafos	14
1.8 Resultados exatos para colorações arco-íris em hipergrafos	15
2 RESULTADOS DE ESTABILIDADE PARA HIPERGRAFOS	21
2.1 Preliminares	21
2.2 Demonstração da estabilidade Füredi para hipergrafos	24
2.3 Investigações futuras	32
2.4 Demonstração dos resultados auxiliares	35
3 ESTABILIDADE GENÉRICA PARA COLORAÇÕES ARCO-ÍRIS	41
3.1 Resultados auxiliares	41

3.2	Demonstração da estabilidade genérica para colorações . . .	44
3.3	Investigações futuras	53
3.4	Demonstração dos resultados auxiliares	59
4	HIPERGRAFO EXTREMAL PARA FANO ARCO-ÍRIS . . .	61
4.1	Resultados Preliminares	61
4.2	Demonstração do resultado extremal para Fano arco-íris . .	62
4.3	Demonstração do Lema 4.1.1	79
5	HIPERGRAFO EXTREMAL PARA $K_{\ell+1}^{(K)}$ ARCO-ÍRIS	80
5.1	Demonstração do resultado exato para $K_{\ell+1}^{(k)}$ arco-íris	80
5.2	Demonstração da estabilidade para colorações para $K_{\ell+1}^{(k)}$ arco-íris	106
5.3	Investigações futuras	112
6	CONCLUSÕES	114
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

Lista de Figuras

Figura 1.1	Hipergrafo $K_4^{(3)}$	11
Figura 1.2	Plano de Fano.	12
Figura 4.1	Plano de Fano particionado.	72
Figura 4.2	Gerando Fano a partir do K_4 , onde $e = \{3, 4, 5\}$	77
Figura 5.1	De $K_\ell^{(k)}$ para $K_{\ell+1}^{(k)}$	88
Figura 5.2	De $K_{\ell-1}^{(k)}$ para $K_{\ell+1}^{(k)}$	100

LISTA DE SÍMBOLOS

$[n] = \{1, \dots, n\}$.

$\binom{X}{k} = \{A \subseteq X : |A| = k\}$.

$B_{I,\mathcal{V}}(H)$: conjunto de hiperarestas ruins de H com relação a I e \mathcal{V}
(Definição 1.6.1).

$H_{I,\mathcal{V}}(n)$: hipergrafo completo com respeito ao vetor de intersecção I
(Definição 1.5.1).

$T_\ell^{(k)}(n)$: hipergrafo de Turán ℓ -partido k -uniforme com n vértices.

B_n : hipergrafo 3-uniforme bipartido completo com n vértices.

P_A : padrão arco-íris (todas as hiperarestas assumem cores distintas).

P_M : padrão monocromático (todas as hiperarestas possuem a mesma cor).

$c_{r,F,P}(H)$: número de colorações livres de (F, P) do hipergrafo H .

$c_{r,F,P}(n)$: valor máximo de $c_{r,F,P}(H)$, onde H é k -uniforme com n vértices.

$\mathcal{I}_{\ell,k}$: conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1 + \dots + x_\ell = k$.

$\mathcal{I}_{\ell,k}^*$: conjunto dos vetores $I \in \mathcal{I}_{\ell,k}$ para os quais $0 \notin I$, ou $x_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \in [\ell]$.

RESUMO

A presente tese de doutorado trata de problemas de coloração de hipergrafos. Mais precisamente, nós trabalhamos com o chamado Problema de Erdős e Rothschild no caso de colorações arco-íris de hipergrafos. Nossas contribuições envolvem os hipergrafos plano de Fano (hipergrafo 3-uniforme com 7 vértices e 7 hiperarestas onde todo par de vértices é coberto) e $K_{\ell+1}^{(k)}$ (hipergrafo obtido do grafo $K_{\ell+1}$ onde cada aresta recebe $k - 2$ novos vértices). Para $F \in \{\text{Fano}, K_{\ell+1}^{(k)}\}$, encontramos o hipergrafo k -uniforme com o maior número de r -colorações de hiperarestas que não contêm cópia de F com a propriedade de que todas as suas hiperarestas têm cores distintas. Como ferramentas para tais demonstrações, obtivemos resultados mais precisos de estabilidade para $K_{\ell+1}^{(k)}$ e outros hipergrafos ou famílias de hipergrafos, bem como um resultados de estabilidade para colorações para uma classe de hipergrafos lineares, que contém Fano e $K_{\ell+1}^{(k)}$. Para os resultados de estabilidade para colorações utilizamos o Lema de Regularidade, introduzido por Szemerédi no contexto de grafos, e o Lema de Imersão, ambos considerados mais tarde para hipergrafos lineares por Kohayakawa, Nagle, Rödl e Schacht.

ABSTRACT

In this thesis we consider problems about colorings of hypergraphs. More precisely, we deal with the so-called Erdős and Rothschild Problem in the case of rainbow colorings of hypergraphs. Our contributions involve the hypergraphs Fano plane (the 3-uniform hypergraph on 7 vertices and 7 hyperedges where every pair of vertices is covered) and $K_{\ell+1}^{(k)}$ (the hypergraph obtained from $K_{\ell+1}$ where each edge is enlarged by $k - 2$ new vertices). For $F \in \{\text{Fano}, K_{\ell+1}^{(k)}\}$, we obtained the k -uniform hypergraph with the largest number of r -colorings of hyperedges not containing a copy of F with the property that all hyperedges are colored differently. As a tool for such proofs, we obtained a sharper stability result for $K_{\ell+1}^{(k)}$ and other hypergraphs and families of hypergraphs. We also obtained a color stability result for a class of linear hypergraphs, which contains Fano and $K_{\ell+1}^{(k)}$. For these color stability result we used the Regularity Lemma, originally stated by Szemerédi for graphs, and the Embedding Lemma, both considered later for linear hypergraphs by Kohayakawa, Nagle, Rödl and Schacht.

1 INTRODUÇÃO

Na Combinatória, é comum o estudo de problemas de otimização envolvendo estruturas discretas, tais como grafos, hipergrafos, espaços vetoriais finitos, etc. Tipicamente, busca-se caracterizar as estruturas que otimizam a função objetivo. Nosso foco está em um tipo particular de problema de otimização que é bastante estudado em uma área conhecida como Teoria Extremal de Grafos. Mais especificamente, trabalhamos com um problema de coloração de hiperarestas de hipergrafos que originou-se de uma questão proposta para grafos por Erdős e Rothschild.

Nesse trabalho, caracterizamos os hipergrafos que maximizam o número de colorações em duas instâncias do problema e obtivemos resultados aproximados para uma classe de instâncias. Como ferramenta, demonstramos uma versão mais precisa de um resultado de estabilidade (no contexto do Problema de Turán) para uma família de hipergrafos.

Para que possamos contextualizar nossos resultados e enunciá-los de maneira precisa, as primeiras seções da introdução são dedicadas a tratar de resultados importantes dessa área de pesquisa. Antes de iniciarmos tais seções, precisamos definir algumas notações.

Para um inteiro positivo n , denotamos por $[n] = \{1, \dots, n\}$. Para um conjunto V e um inteiro positivo k , 2^V é o conjunto $\{A: A \subseteq V\}$ e $\binom{V}{k} = \{A \subseteq V: |A| = k\}$.

1.1 Teoria Extremal de Grafos

Um grafo G é um par ordenado $G = (V, E)$ onde $V = V(G)$ é um conjunto finito chamado *conjunto de vértices do grafo* e $E = E(G) \subseteq \binom{V}{2}$ é chamado *conjunto de arestas do grafo*. Se $E = \binom{V}{2}$, então o grafo G é dito *completo*, e denotamos por K_m o *grafo completo com m vértices*. Um grafo F é dito subgrafo de um grafo G se $V(F) \subseteq V(G)$ e $E(F) \subseteq E(G)$. Dado $U \subseteq V(G)$, denotamos por $G[U] = (U, \binom{U}{2} \cap E(G))$ o *subgrafo de G induzido por U* . Um grafo $G = (V, E)$ é dito ℓ -partido se existe uma partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_\ell$ de seu conjunto de vértices para a qual $E(G[V_i]) = \emptyset$ para todo $i \in [\ell]$. Um grafo é dito *ℓ -partido completo* se é ℓ -partido e possui o maior número de arestas dentre os grafos ℓ -partidos com a mesma partição. Dado um conjunto de vértices V e uma partição \mathcal{V} deste conjunto em ℓ classes $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_\ell\}$, dizemos que \mathcal{V} é uma partição *balanceada* se $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para quaisquer $i, j \in [\ell]$. Ainda, um grafo ℓ -partido é dito *balanceado* se sua partição for balanceada.

Dado um grafo F , dizemos que um grafo G é *livre de F* se não existe cópia de F como subgrafo de G .

Um problema muito famoso na Teoria Extremal dos Grafos é o de encontrar, para cada inteiro positivo n e grafo F , um grafo G com n vértices livre de F que possui o maior número de arestas possível. O grafo obtido é chamado de *grafo extremal para F* . Denotamos por $\text{ex}(n, F)$ o número máximo de arestas que um grafo livre de F possui com n vértices.

Esse problema foi resolvido por Mantel [38] em 1907 para $F = K_3$, onde foi constatado que o grafo extremal para K_3 é, a menos de isomorfismos, o grafo bipartido completo balanceado com n vértices, denotado por $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Em 1941, Turán [48] provou que para quaisquer inteiros positivos $n \geq \ell$, o grafo extre-

mal para $K_{\ell+1}$ é, a menos de isomorfismos, o grafo ℓ -partido completo balanceado com n vértices, denotado também por $T_\ell(n)$. Em função disso, Turán é considerado por muitos pesquisadores como o precursor da Teoria Extremal de Grafos. Além disso, o problema descrito acima é conhecido como Problema de Turán.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Turán). *Dados inteiros $n, \ell \geq 1$, temos que todo grafo extremal para $K_{\ell+1}$ é isomorfo a $T_\ell(n)$.*

Mais tarde, Erdős e Stone [16] provaram um resultado que vale para grafos F arbitrários. Dado um grafo F , seja $\chi(F)$ o menor número inteiro positivo ℓ tal que F é ℓ -partido. Eles mostraram o seguinte teorema.

Teorema 1.1.2. *Para todo grafo F vale a seguinte propriedade. Para todo ϵ existe $n_0 = n_0(\epsilon, F)$ tal que para todo $n \geq n_0$, vale que*

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} - \epsilon\right) \frac{n^2}{2} \leq \text{ex}(n, F) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} + \epsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

A cota inferior pode ser facilmente verificada se percebermos que $T_{\chi(F)-1}(n)$ não pode conter cópia de F , já a cota superior exige uma estratégia mais cuidadosa. O teorema acima implica que, para $\chi(F) \geq 3$, o número de arestas do grafo extremal para F deve ser muito próximo do número de arestas de $T_{\chi(F)-1}(n)$. Nesse sentido, o problema de Turán foi “essencialmente” resolvido por essa desigualdade dada por Erdős e Stone. Note que quando F é bipartido e possui arestas, isto é, $\chi(F) = 2$, a desigualdade afirma apenas que $\text{ex}(n, F) = o(n^2)$, isto é, o grafo extremal para F é esparso. Diversos pesquisadores ainda estudam o caso em que F é bipartido [21].

1.2 Estabilidade no Problema de Turán para grafos

Um conceito importante que foi abordado no contexto do Problema de Turán é comumente chamado de estabilidade. Tal conceito foi originalmente apresentado por Erdős e Simonovits [46, 18, 15, 19]. A ideia da estabilidade consiste em determinar se, fixado F , um grafo que é livre de F e possui uma quantidade de arestas “próxima” a $\text{ex}(n, F)$ deve possuir estrutura “similar” à do grafo extremal para F . Antes de enunciarmos alguns resultados de estabilidade, considere a seguinte notação. Dado um grafo $G = (V, E)$ e uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de seu conjunto de vértices, denotamos por $E(U_i) = \{\{u, v\} \in E : u, v \in U_i\}$ o conjunto de arestas contidas na classe U_i , para todo $i \in [\ell]$.

O resultado de estabilidade obtido por Erdős e Simonovits pode ser enunciado da seguinte forma.

Teorema 1.2.1. *Para todo $\delta > 0$ existem $\epsilon > 0$ e n_0 tais que todo grafo G livre de $K_{\ell+1}$ com pelo menos $n \geq n_0$ vértices e pelo menos $|E(T_\ell(n))| - \epsilon n^2$ arestas admite partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ satisfazendo*

$$|E(U_1)| + \dots + |E(U_\ell)| \leq \delta n^2.$$

Note que o teorema acima nos diz que um grafo $G = (V, E)$ livre de $K_{\ell+1}$ que possui quantidade de arestas “próxima” a $\text{ex}(n, K_{\ell+1}) = |E(T_\ell(n))|$, deve possuir estrutura “similar” a de $T_\ell(n)$, já que deve admitir uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ onde no máximo δn^2 arestas não são como as de $T_\ell(n)$. Um simples argumento de contagem mostra que essa partição deve ser “quase” balanceada.

Ainda para $F = K_{\ell+1}$, o seguinte resultado mais preciso de estabilidade foi mostrado por Füredi [20] em 2015.

Teorema 1.2.2. *Sejam um inteiro $\ell \geq 1$, $p \geq 0$ e $G = ([n], E)$ um grafo livre de $K_{\ell+1}$ que satisfaz $|E| \geq |E(T_\ell(n))| - p$. Então G admite partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ tal que*

$$|E(U_1)| + \dots + |E(U_\ell)| \leq p.$$

Note que no enunciado acima, diferentemente da estabilidade enunciada no Teorema 1.2.1, temos uma relação explícita entre o número máximo de arestas incidentes a vértices em uma mesma classe no grafo e o número total de arestas do grafo. Por exemplo, se G é um grafo livre de $K_{\ell+1}$ com exatamente $|E(T_\ell(n))| - 1$ arestas, então sabemos que G possui no máximo uma aresta incidente a vértices em uma mesma classe, enquanto que no Teorema 1.2.1, sabemos apenas que o número de arestas incidentes a vértices em uma mesma classe é no máximo δn^2 . Vale ressaltar que, apesar da precisão na estabilidade de Füredi, resultados mais precisos foram obtidos no caso do exemplo mencionado acima [23], ver também [49]. Além disso, no Teorema 1.2.2 não há qualquer exigência quanto ao número n de vértices.

Consideramos para este trabalho dois tipos de estabilidade, que chamamos de *estabilidade Erdős-Simonovits*, quando se tratar da estabilidade como no Teorema 1.2.1, e *estabilidade Füredi*, quando se tratar da estabilidade como no Teorema 1.2.2.

1.3 O problema de coloração em grafos

Nas décadas seguintes ao problema de Turán, motivados por uma questão de Erdős e Rothschild [17], diversos pesquisadores interessaram-se por um problema relacionado, que envolve colorações das arestas de um grafo [2, 3, 4, 7, 24, 28, 29, 43, 44, 51]. Mais precisamente, dados um grafo F e um inteiro positivo

r , uma r -coloração de arestas de um grafo G é uma função que associa cada aresta de G a uma cor em $[r]$. Um *padrão* P de cores em um grafo é uma partição do conjunto de arestas do grafo em até r classes. Note que um padrão de cores não é o mesmo que uma r -coloração, por exemplo, em um grafo F com conjunto de arestas $E(F) = \{f_1, f_2, f_3\}$, o padrão $E(F) = E_1 \cup E_2$, onde $E_1 = \{f_1, f_2\}$ e $E_2 = \{f_3\}$ é igual ao padrão $E(F) = E_1 \cup E_2$, onde $E_1 = \{f_3\}$ e $E_2 = \{f_1, f_2\}$, já uma 2-coloração Δ onde $\Delta(f_1) = 1 = \Delta(f_2)$ e $\Delta(f_3) = 2$ é diferente da 2-coloração Δ' , onde $\Delta'(f_1) = 2 = \Delta'(f_2)$ e $\Delta'(f_3) = 1$. Uma r -coloração de um grafo G é dita *livre de* (F, P) se não possuir uma cópia de F na qual a partição de $E(F)$ induzida pela coloração é isomorfa a P .

Para cada grafo G , estamos interessados no número $c_{r,F,P}(G)$ de r -colorações de G livres de (F, P) , e estudamos a função $c_{r,F,P}(n)$ que maximiza $c_{r,F,P}(G)$ dentre os grafos G com n vértices. Um grafo que atinge esse número é dito *grafo extremal para* (F, P) . A questão abordada por Erdős e Rothschild foi a de estudar $c_{r,F,P}(n)$ no caso em que $F = K_{\ell+1}$ e P é composto por apenas uma classe não vazia, onde tal padrão é chamado de *monocromático* e denotado aqui por P_M . No caso em que $P = P_M$, a função $c_{r,F,P_M}(n)$ já foi estudada para grafos por diversos autores [2, 5, 24, 43, 44, 51].

Como a definição sugere, a função $c_{r,F,P_M}(n)$ está relacionada com o número $\text{ex}(n, F)$. De fato, para todo inteiro positivo n , valem as desigualdades

$$r^{\text{ex}(n,F)} \leq c_{r,F,P_M}(n) \leq r^{r \cdot \text{ex}(n,F)}. \quad (1.1)$$

Para obter a cota inferior, escolhemos um grafo G que seja extremal para F . Já que qualquer r -coloração das arestas de G é trivialmente livre de (F, P) para qualquer padrão P , existem pelo menos $r^{\text{ex}(n,F)}$ colorações com essa propriedade. Para obter a cota superior, observamos que, para qualquer r -coloração das arestas de um grafo com n vértices e $r \cdot \text{ex}(n, F) + 1$ arestas, há pelo menos $\text{ex}(n, F) + 1$

arestas de uma mesma cor, o que leva a uma cópia monocromática de F . Assim, o valor $c_{r,F,P_M}(n)$ é atingido por um grafo com no máximo $r \text{ ex}(n, F)$ arestas, de forma que o número de colorações é limitado por $c_{r,F,P_M}(n) \leq r^{r \cdot \text{ex}(n, F)}$.

No caso em que $F = K_{\ell+1}$, resultados foram obtidos por Yuster [51] e por Alon, Balogh, Keevash e Sudakov [2]. Uma propriedade importante desses resultados é a seguinte. Quando o número r de cores satisfaz $r \in \{2, 3\}$, o grafo extremal para F também é máximo com respeito às colorações. Por outro lado, se $r \geq 4$, o número de r -colorações livres de $(K_{\ell+1}, P_M)$ do grafo extremal para F está exponencialmente distante do número máximo de colorações. Para $r \geq 4$, Pikhurko e Yilma [44] encontraram o valor de $c_{r,F,P_M}(n)$ e os respectivos grafos extremais nos casos em que $r = 4$ e $F \in \{K_3, K_4\}$. Por outro lado, o valor exato de $c_{r,F,P_M}(n)$ nos demais casos em que $r \geq 4$ não é conhecido. Recentemente Pikhurko, Staden e Yilma [43] obtiveram resultados sobre a estrutura dos grafos extremais, porém sem determiná-los explicitamente.

Balogh [3] foi o primeiro a considerar o Problema de Erdős e Rothschild para um padrão P (não monocromático) de cores. Desde então, outros pesquisadores se interessaram em estudar a função $c_{r,F,P}(n)$ para grafos no caso em que P é formado por $|E(F)|$ classes não vazias [28, 29]. Nesse caso, chamamos o padrão P de *arco-íris* e o denotamos por P_A . Como um exemplo, Hoppen, Lefmann e Odermann [28] estudaram uma versão do problema de Erdős e Rothschild para o padrão arco-íris. Eles provaram que, para $r \geq \binom{\ell+1}{2}^{8\ell+4}$ e n suficientemente grande, o valor $c_{r,K_{\ell+1},P_A}(n)$ é atingido pelo grafo $T_\ell(n)$.

Ainda, Hoppen, Lefmann, Odermann e Sanches [29] estudaram o valor de c_{r,F,P_A} no caso em que F é a $(\ell+1)$ -estrela, isto é, o grafo com $\ell+1$ vértices onde um deles é conectado a todos os demais. Vale ressaltar também que Benevides,

Hoppen e Sampaio [4] obtiveram resultados para o Problema de Erdős e Rothschild no caso em que $F = K_{\ell+1}$ para uma classe de padrões P .

1.4 Estabilidade para colorações em grafos

O conceito de estabilidade também pode ser visto no contexto de colorações, onde investigamos se um grafo que possui número de colorações livres de (F, P) “próximo” a $c_{r,F,P}(n)$ deve possuir estrutura similar à do grafo extremal para (F, P) .

Um exemplo de resultado de estabilidade para colorações foi obtido também por Alon, Balogh, Keevash e Sudakov [2].

Teorema 1.4.1. *Sejam $r \in \{2, 3\}$ e $\ell \geq 1$ um inteiro. Para todo $\delta > 0$ existe $n_0 = n_0(\delta)$ tal que, se G é um grafo com $n \geq n_0$ vértices que satisfaz $c_{r,K_{\ell+1},P_M}(G) \geq r^{|T_\ell(n)|}$, então G admite partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$ tal que*

$$|E(W_1)| + \dots + |E(W_\ell)| \leq \delta n^2.$$

Em [28], um exemplo de resultado de estabilidade para colorações no caso em que P é o padrão arco-íris e $F = K_{\ell+1}$ foi obtido por Hoppen, Lefmann e Odermann.

Diferentemente do que aconteceu na trajetória de resultados no contexto do Problema de Turán, nos problemas de coloração, a estabilidade para colorações foi utilizada como ferramenta para a obtenção do resultado exato para colorações, como é o caso em [2] e [28]. Vale ressaltar que os autores de [2] foram os primeiros a utilizar da estabilidade para colorações para demonstrar o resultado exato para colorações.

Enquanto que, para o padrão monocromático, o grafo extremal para F é extremal para (F, P_M) quando $r \in \{2, 3\}$, para o padrão arco-íris temos que o grafo extremal para F é extremal para (F, P_A) quando o número r de cores é suficientemente grande. O quão grande é esse número de cores nos resultados obtidos depende do resultado de estabilidade para colorações que é utilizado. Se na prova da estabilidade para colorações foi utilizada a estabilidade Erdős-Simonovits para F , então o número mínimo de cores dependerá da constante δ associada a essa estabilidade. Se na prova da estabilidade para colorações foi utilizada a estabilidade Füredi para F , então o número mínimo de cores dependerá apenas do grafo F .

Ao longo dos anos, o Problema de Turán e o Problema de Erdős e Rothschild no caso em que P é o padrão monocromático foram estudados ainda para outras estruturas discretas, como hipergrafos, famílias de hipergrafos e espaços vetoriais [6, 14, 7, 26, 27, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 39, 40, 42]. Neste trabalho, estudamos o Problema de Erdős e Rothschild para hipergrafos no caso em que o padrão P de cores é o arco-íris.

1.5 O Problema de Turán para hipergrafos

Um *hipergrafo* $H = (V, E)$ é um par onde V é um conjunto finito chamado *conjunto de vértices do hipergrafo* e $E \subseteq 2^V$ é chamado *conjunto de hiperarestas do hipergrafo*. Se para algum inteiro positivo k , temos $E \subseteq \binom{V}{k}$, então o hipergrafo é dito *k -uniforme*. Se $E = \binom{V}{k}$, então o hipergrafo é dito *k -uniforme completo*. Um hipergrafo $F = (V^*, E^*)$ é um sub-hipergrafo de um hipergrafo $H = (V, E)$ se $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. Dado um hipergrafo k -uniforme $H = (V, E)$, um vértice $v \in V$, uma hiperaresta $e \in E$ e um conjunto $f \in \binom{V}{k}$, considere as

notações $H + \{f\} = (V, E \cup \{f\})$, $H - \{e\} = (V, E \setminus \{e\})$, e $H - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e \in E : v \in e\})$.

O Problema de Turán para hipergrafos é definido de maneira similar ao que foi feito em grafos, porém, diferentemente do que aconteceu para grafos, existem poucos resultados nesse contexto.

Dado um hipergrafo F , dizemos que o hipergrafo H é *livre de F* se H não possui cópia de F como sub-hipergrafo. O Problema de Turán para hipergrafos é o de encontrar, para um dado hipergrafo F , o hipergrafo H livre de F com o maior número possível de hiperarestas. Tal problema é muito estudado no caso em que F e H são k -uniformes, o que é o nosso caso também.

Dado um hipergrafo k -uniforme F e um inteiro positivo n , denotamos por $\text{ex}(n, F)$ o número máximo de hiperarestas que um hipergrafo k -uniforme livre de F pode conter. Se H é um hipergrafo k -uniforme com n vértices tal que $|E(H)| = \text{ex}(n, F)$, então H é dito o *hipergrafo extremal para F* .

Um hipergrafo que será bastante utilizado nesse trabalho é $K_\ell^{(k)}$, o hipergrafo obtido a partir do grafo K_ℓ expandindo cada uma de suas arestas com $k - 2$ novos vértices. O hipergrafo $K_\ell^{(k)}$ é chamado de *grafo completo expandido*. A figura abaixo ilustra o hipergrafo $K_4^{(5)}$.

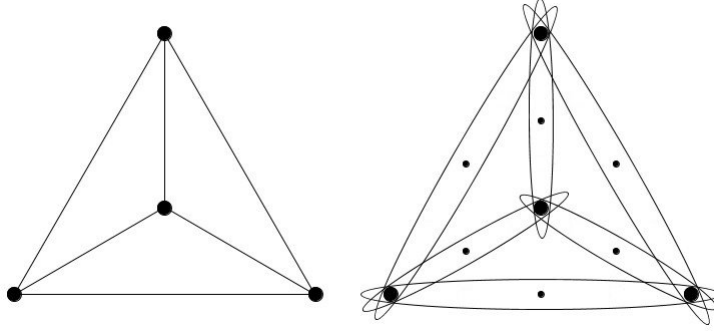


Figura 1.1: Hipergrafo $K_4^{(3)}$.

Note que o hipergrafo $K_\ell^{(k)}$ possui $\ell + (k - 2)\binom{\ell}{2}$ vértices e $\binom{\ell}{2}$ hiperarestas. Note ainda que o hipergrafo $K_\ell^{(k)}$ é uma generalização do grafo K_ℓ , isto é, $K_\ell = K_\ell^{(2)}$. O Problema de Turán para $K_\ell^{(k)}$ foi resolvido por Mubayi [39], onde seu hipergrafo extremal é também uma generalização do grafo de Turán. Antes de descrevermos o hipergrafo de Turán, introduziremos definições que permitirão apresentar nossos resultados de maneira uniforme.

Para inteiros positivos ℓ e k , denote por $\mathcal{I}_{\ell,k}$ o conjunto de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + \dots + x_\ell = k$. Dado um vetor $I \in \mathcal{I}_{\ell,k}$ utilizamos a notação $(z_1^{(y_1)}, \dots, z_\ell^{(y_\ell)})$, $t \leq \ell$ para representar que z_i é um componente y_i vezes em I . Por exemplo, $(1^{(3)}, 0^{(2)}) = (1, 1, 1, 0, 0)$.

Definição 1.5.1 (Hipergrafo completo com respeito ao vetor de intersecção I). *Dados inteiros positivos n, ℓ, k , uma partição \mathcal{V} de $[n]$ em ℓ classes e um vetor $I \in \mathcal{I}_{\ell,k}$, o hipergrafo completo com respeito ao vetor de intersecção I , denotado por $H_{I,\mathcal{V}}(n)$, possui conjunto de vértices $[n]$ particionado conforme a partição \mathcal{V} e conjunto de hiperarestas formado por todos os conjuntos e em $\binom{[n]}{k}$ para os quais existe uma permutação π de $[\ell]$ satisfazendo $(e \cap V_{\pi(1)}, \dots, e \cap V_{\pi(\ell)}) = I$.*

O *Hipergrafo de Turán*, denotado por $T_\ell^{(k)}(n)$, é definido por $T_\ell^{(k)}(n) = H_{I,\mathcal{U}}(n)$, onde \mathcal{U} é uma partição balanceada de $[n]$ em ℓ classes, $\ell \geq k$ e $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$. Note que o Hipergrafo de Turán é uma generalização do Grafo de Turán. Por simplicidade, utilizamos a notação $t_\ell^{(k)}(n) = |E(T_\ell^{(k)}(n))|$.

O seguinte resultado foi obtido por Mubayi em [39].

Teorema 1.5.2. *Dados inteiros $n \geq \ell \geq k$, todo hipergrafo extremal para $K_{\ell+1}^{(k)}$ é isomorfo a $T_\ell^{(k)}(n)$.*

Outro exemplo de hipergrafo conhecido e muito utilizado nesse trabalho é o chamado *plano de Fano*, que é o único hipergrafo 3-uniforme com sete vértices e sete hiperarestas satisfazendo a propriedade de que todo par de vértices está contido em alguma hiperaresta. Denotamos este hipergrafo por Fano. A figura abaixo ilustra uma representação clássica do hipergrafo Fano, onde as seis linhas conectando três vértices são hiperarestas e o círculo também é uma hiperaresta.

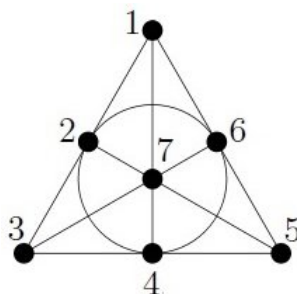


Figura 1.2: Plano de Fano.

Dado um inteiro positivo n , denote por B_n o hipergrafo $B_n = H_{I,\mathcal{V}}$, onde $I = (2, 1)$ e $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ é uma partição balanceada de $[n]$. Este hipergrafo é chamado *hipergrafo bipartido balanceado completo*.

O resultado a seguir foi obtido por Keevash e Sudakov [32], porém um resultado assintótico foi obtido anteriormente por de Caen e Füredi em [14].

Teorema 1.5.3. *Para n suficientemente grande, todo hipergrafo extremal para Fano é isomorfo a B_n .*

É fácil verificar que B_n não contém Fano se percebermos que qualquer tentativa de distribuímos os vértices de Fano em duas classes fará com que uma hiperaresta fique totalmente contida em uma classe.

1.6 Estabilidade no Problema de Turán para hipergrafos

De maneira análoga ao que é feito para grafos, em hipergrafos também temos o conceito de estabilidade. Além disso, os conceitos de estabilidade Füredi ou Erdős-Simonovits também se aplicam de maneira similar. Antes de enunciarmos alguns resultados de estabilidade, abordaremos algumas definições.

Definição 1.6.1. *Dados inteiros positivos ℓ e k , um hipergrafo k -uniforme $H = (V, E)$, uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_\ell\}$ de V e um vetor $I \in \mathcal{I}_{\ell, k}$, denote por $B_{I, \mathcal{V}}(H) = E(H) \setminus E(H_{I, \mathcal{V}}(n))$ o conjunto das hiperarestas ruins de H com respeito a I e \mathcal{V} .*

Abaixo, apresentamos um resultado de estabilidade Erdős-Simonovits obtido por Pikhurko em [42] para o hipergrafo $K_{\ell+1}^{(k)}$.

Teorema 1.6.2. *Sejam $\ell \geq k \geq 2$ inteiros. Para todo $\delta > 0$, existem $\epsilon > 0$ e $n_0 > 0$ tais que o seguinte vale para todo $n \geq n_0$. Se $H = (V, E)$ é um hipergrafo k -uniforme com n vértices, livre de $K_{\ell+1}^{(k)}$ e tal que $|E| \geq t_\ell^{(k)}(n) - \epsilon n^k$, então existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V para a qual*

$$|B_{I, \mathcal{U}}(H)| \leq \delta n^k,$$

onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

O seguinte resultado de estabilidade Erdős-Simonovits para o Fano foi obtido por Keevash e Sudakov [32].

Teorema 1.6.3. *Para todo $\delta > 0$ existem $\epsilon > 0$ e n_0 tais que todo hipergrafo 3-uniforme $H = (V, E)$ livre de Fano com pelo menos $n \geq n_0$ vértices e pelo menos $|E(B_n)| - \epsilon n^3$ hiperarestas admite partição $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ de V satisfazendo*

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H)| \leq \delta n^3$$

onde $I = (2, 1)$.

1.7 Resultado de estabilidade Füredi para hipergrafos

A partir de um trabalho em equipe com os pesquisadores Hoppen, Lefmann e Odermann, obtivemos o seguinte resultado de estabilidade para o hipergrafo $K_{\ell+1}^{(k)}$.

Teorema 1.7.1. *Seja $n \geq 1$, $p \geq 1$ e $\ell \geq k \geq 2$. Para $k > 2$, assumamos que*

$$p < \frac{n^k}{\ell^{4k}} - \ell^2 n^{k-1}.$$

Se H é um hipergrafo k -uniforme com n vértices livre de $K_{\ell+1}^{(k)}$ com $|E(H)| \geq t_\ell^{(k)}(n) - p$, então existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V satisfazendo

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H)| \leq \ell^{k-1}(p + \ell^2 n^{k-1}),$$

onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

Esse resultado é mais preciso do que a estabilidade Erdős-Simonovits, já que para $p < Cn^{k-1}$, vale que $|B_{I,\mathcal{U}}(H)| < Dn^{k-1}$, onde C e D são constantes. Para demonstrá-lo, provamos um resultado de estabilidade Füredi para uma família de hipergrafos proibidos (ver Teorema 2.1.2).

A demonstração do Teorema 1.7.1 encontra-se no Capítulo 2 desse trabalho. Tal resultado foi uma ferramenta importante para a obtenção de resultados de coloração para hipergrafos, foco deste trabalho.

1.8 Resultados exatos para colorações arco-íris em hipergrafos

Assim como no caso de grafos, dados um hipergrafo k -uniforme F e um inteiro positivo r , uma r -coloração das hiperarestas de um hipergrafo k -uniforme H é uma função que associa cada hiperaresta de H a uma cor em $[r]$. Um padrão P de cores em uma r -coloração de um hipergrafo é uma partição das hiperarestas do hipergrafo em r classes. Tal r -coloração é dita *livre de* (F, P) se não possuir uma cópia de F na qual a partição de $E(F)$ induzida pela coloração é isomorfa a P . Denotamos por $c_{r,F,P}(H)$ o número de r -colorações livres de (F, P) de H . Denotamos por $c_{r,F,P}(n)$ o número máximo de r -colorações livres de (F, P) que um hipergrafo k -uniforme com n vértices possui (no caso em que F é 2-uniforme fica claro que tal função se refere a grafos). Assim como para grafos, denotamos por P_M o padrão monocromático, composto por apenas uma classe não vazia, e por P_A o padrão arco-íris, composto por $|E(F)|$ classes não vazias. Dizemos que um hipergrafo H é o *hipergrafo extremal para* (F, P) se H é o hipergrafo que maximiza $c_{r,F,P}(H)$ sobre todos os hipergrafos k -uniformes com n vértices.

Existem diversos resultados obtidos sobre o valor de $c_{r,F,P_M}(n)$ no caso em que F é um hipergrafo k -uniforme [25, 26, 35, 36, 37].

Em [36], Lefmann, Person, Rödl e Schacht mostraram que para $r \in \{2, 3\}$ e n suficientemente grande, vale que $c_{r,\text{Fano},P_M}(B_n) = c_{r,\text{Fano},P_M}(n)$. Em [35],

Lefmann e Person mostraram que para $r \in \{2, 3\}$ e n suficientemente grande, $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_M}(T_\ell^{(k)}(n)) = c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_M}(n)$.

Como podemos ver nos resultados acima e assim como aconteceu em grafos, para $r \in \{2, 3\}$ e n suficientemente grande temos que o hipergrafo extremal para F é também extremal para (F, P_M) . Além disso, em ambos os artigos, resultados de estabilidade foram obtidos e utilizados para a demonstração dos resultados exatos (o resultado de estabilidade para $(K_{\ell+1}^{(k)}, P_M)$ é tratado em [37]).

Nesse trabalho, provamos os seguintes resultados exatos no caso do padrão de cores ser o arco-íris.

Teorema 1.8.1. *Existe um inteiro positivo r_0 tal que para todo $r \geq r_0$ vale a seguinte propriedade. Existe um inteiro positivo n_0 para o qual, se $n \geq n_0$, então todo hipergrafo 3-uniforme H com n vértices satisfaz*

$$c_{r, \text{Fano}, P_A}(H) \leq r^{|E(B_n)|}.$$

Além disso, somente hipergrafos isomorfos a B_n atingem igualdade.

A demonstração do Teorema 1.8.1 encontra-se no Capítulo 4.

Teorema 1.8.2. *Sejam $\ell \geq k \geq 2$. Existe um inteiro positivo r_0 tal que para todo $r \geq r_0$ vale a seguinte propriedade. Existe um inteiro positivo n_1 para o qual, se $n \geq n_1$, então todo hipergrafo k -uniforme H com n vértices satisfaz*

$$c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H) \leq r^{t_\ell^{(k)}(n)}.$$

Além disso, somente hipergrafos isomorfos a $T_\ell^{(k)}(n)$ atingem igualdade.

A demonstração do Teorema 1.8.2 encontra-se no Capítulo 5.

Para provarmos os resultados exatos enunciados acima, novamente utilizamos uma técnica em que inicialmente encontramos um resultado que chamamos de *estabilidade para colorações arco-íris*, a partir do qual obtemos o resultado exato. Uma das contribuições desse trabalho foi a obtenção desse resultado de estabilidade para colorações em um contexto mais geral, que envolve toda uma classe de hipergrafos, que inclui os hipergrafos Fano e $K_{\ell+1}^{(k)}$. Para enunciá-lo precisamos de algumas definições.

Uma propriedade importante que precisa ser satisfeita para o nosso resultado é a seguinte. Um hipergrafo F é dito *linear* se para quaisquer hiperarestas distintas $a, b \in E(F)$ temos que $|a \cap b| \leq 1$.

Definição 1.8.3 (Hipergrafo Turán-extremal). *Um hipergrafo k -uniforme F é dito Turán-extremal se existirem um inteiro positivo ℓ e um vetor $I = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathcal{I}_{\ell, k}$, tais que*

- (a) *Para todo inteiro positivo n e partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_\ell\}$ de $[n]$, o hipergrafo $H_{I, \mathcal{V}}(n)$ é livre de F .*
- (b) *Existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_\ell\}$ de $[n]$ para a qual $H_{I, \mathcal{V}}(n)$ é, a menos de isomorfismos, o hipergrafo extremal para F .*

Em outras palavras, a definição acima exige que o hipergrafo extremal para F tenha a forma de um hipergrafo completo com respeito a um vetor de intersecção.

Definição 1.8.4 (Hipergrafo Turán-estável). *Um hipergrafo k -uniforme Turán-extremal com vetor I e partição \mathcal{V} é dito Turán-estável se para todo δ existem n_0 e ϵ com a seguinte propriedade. Todo hipergrafo $H = (V, E)$ livre de F com*

$n \geq n_0$ vértices e pelo menos $|E(H_{I,\mathcal{V}}(n))| - \epsilon n^k$ hiperarestas admite uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V tal que

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H)| \leq \delta n^k.$$

Em outras palavras, a definição acima exige que valha a estabilidade Erdős-Simonovits para F .

Dados $\ell, k \geq 2$, considere o conjunto $\mathcal{I}_{\ell,k}^* \subseteq \mathcal{I}_{\ell,k}$ dos vetores de intersecção $I = (x_1, \dots, x_\ell)$ tais que $x_i \geq 1, \forall i \in [\ell]$, ou $x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in [\ell]$. Note que os vetores $(2, 4, 9)$, $(1, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, 0, 0)$ pertencem a $\mathcal{I}_{\ell,k}^*$ e os vetores $(2, 1, 0)$ e $(8, 6, 0, 0)$ não pertencem a $\mathcal{I}_{\ell,k}^*$.

Agora, estamos prontos para enunciar o resultado de estabilidade para colorações arco-íris mencionado anteriormente.

Teorema 1.8.5. *Para todo hipergrafo F que é linear, k -uniforme e Turán-estável com vetor $I \in \mathcal{I}_{\ell,k}^*$ e todo $\delta > 0$, existe r_0 com a seguinte propriedade. Para todo $r \geq r_0$ existe $n_0 = n_0(r)$ tal que, se $n \geq n_0$ e $H = (V, E)$ é um hipergrafo k -uniforme com n vértices satisfazendo $c_{r,F,P_A}(H) \geq r^{\text{ex}(n,F)}$, então existe uma partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$ de V para a qual*

$$|B_{I,\mathcal{W}}(H)| \leq \delta n^k.$$

Note que o teorema acima garante um resultado de estabilidade para colorações arco-íris para qualquer hipergrafo que é linear e Turán-estável, que é o caso de $K_{\ell+1}^{(k)}$ e Fano. Além disso, essa estabilidade é válida para outros hipergrafos da literatura. Por exemplo, os autores de [6] e [40] mostraram que todos os hipergrafos de uma certa classe são Turán-estáveis e, portanto, o Teorema 1.8.5 garante que vale a estabilidade para colorações arco-íris para todos os hipergrafos

lineares dessa classe. No Capítulo 2 (Seção 2.3), é feita uma discussão sobre essa classe de hipergrafos.

A demonstração do Teorema 1.8.5 está no Capítulo 3 deste trabalho. Note que, nesse teorema, o número mínimo de cores depende da escolha do δ . Isso deve-se ao fato de que, por hipótese, exigimos que o hipergrafo F seja Turán-estável, ou seja, que valha a estabilidade Erdős-Simonovits para F . Porém, especificamente para demonstrarmos o Teorema 1.8.2, foi necessário um resultado de estabilidade para colorações arco-íris onde o número mínimo de cores não depende da constante δ , enunciado abaixo.

Lema 1.8.6. *Sejam $\ell \geq k \geq 2$. Existe $r_0 = r_0(\ell, k)$ tal que para todo $r \geq r_0$ vale o seguinte. Dado $\delta > 0$, existe n_0 tal que, se $H = (V, E)$ é um hipergrafo k -uniforme com $n \geq n_0$ vértices, satisfazendo $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H) \geq r^{t_\ell^{(k)}(n)}$, então H possui uma partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$ de V para a qual*

$$B_{I, \mathcal{W}}(H) \leq \delta n^k,$$

onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

A demonstração do Lema 1.8.6 encontra-se no Capítulo 5 (Seção 5.2), onde fazemos uso do Teorema 1.7.1, que é a estabilidade mais precisa que obtivemos para $K_{\ell+1}^{(k)}$.

Em resumo, o Capítulo 2 é dedicado a demonstrar o Teorema 1.7.1 (estabilidade mais precisa para $K_{\ell+1}^{(k)}$, necessária para demonstrarmos o Lema 1.8.6). No Capítulo 3 demonstramos o Teorema 1.8.5 (estabilidade para colorações arco-íris para uma classe de hipergrafos). No Capítulo 4 demonstramos o Teorema 1.8.1 (resultado exato para colorações arco-íris para Fano), onde fazemos uso do Teorema 1.8.5. Por fim, no Capítulo 5, demonstramos o Teorema 1.8.2 (resultado exato

para colorações para $K_{\ell+1}^{(k)}$ e, como ferramenta para esse resultado, o Lema 1.8.6 (estabilidade para colorações arco-íris para $K_{\ell+1}^{(k)}$ onde o número mínimo de cores depende apenas de ℓ e k).

Com os resultados obtidos nesse trabalho, há diversas questões a serem investigadas para possíveis contribuições futuras. Tais questões serão discutidas em uma seção no seu capítulo respectivo.

2 RESULTADOS DE ESTABILIDADE PARA HIPERGRAFOS

O presente capítulo é dedicado a demonstrar o Teorema 1.7.1. Repetimos aqui o enunciado desse teorema.

Teorema 1.7.1. *Seja $n \geq 1$, $p \geq 1$ e $\ell \geq k \geq 2$. Para $k > 2$, assumamos que*

$$p < \frac{n^k}{\ell^{4k}} - \ell^2 n^{k-1}.$$

Se H é um hipergrafo k -uniforme com n vértices livre de $K_{\ell+1}^{(k)}$ com $|E(H)| \geq t_{\ell}^{(k)}(n) - p$, então existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{\ell}\}$ de V satisfazendo

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H)| \leq \ell^{k-1}(p + \ell^2 n^{k-1}),$$

onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

Para demonstrarmos tal teorema, demonstramos primeiramente um resultado que vale para uma família de hipergrafos que contém $K_{\ell+1}^{(k)}$ e então a demonstração do Teorema 1.7.1 será uma consequência desse pelo fato de que $K_{\ell+1}^{(k)}$ estar contido nessa família. Em ambos os teoremas combinamos as ideias utilizadas em [20, 39, 40]. Para enunciarmos tal teorema precisamos de algumas definições preliminares.

2.1 Preliminares

Denote por $\mathcal{K}_{\ell}^{(k)}$ a família dos hipergrafos k -uniformes, com no máximo $\binom{\ell}{2}$ hiperarestas, que contêm um conjunto S de tamanho ℓ , chamado núcleo, satisfazendo a propriedade de que para qualquer par de vértices em S , existe uma

hiperaresta contendo o par. Note que $K_\ell^{(k)} \in \mathcal{K}_\ell^{(k)}$, sendo esse o elemento de $\mathcal{K}_\ell^{(k)}$ com o maior número de vértices. Note ainda que Fano $\in \mathcal{K}_\ell^{(k)}$ para $\ell \in \{5, 6, 7\}$.

Dada uma família de hipergrafos \mathcal{F} , dizemos que o hipergrafo H é *livre de \mathcal{F}* se não existe um hipergrafo F' isomorfo a algum elemento de \mathcal{F} tal que F' é um sub-hipergrafo de H . Ainda, um hipergrafo H é dito *extremal para \mathcal{F}* se H possui o maior número possível de hiperarestas e é livre de \mathcal{F} .

O seguinte resultado foi obtido por Mubayi [39].

Teorema 2.1.1. *Dados inteiros $n, \ell, k \geq 2$, todo hipergrafo extremal para $\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$ é isomorfo a $T_\ell^{(k)}(n)$.*

Aqui, usamos os mesmos conceitos de estabilidade Erdős-Simonovits e estabilidade Füredi para famílias de hipergrafos. Vale ressaltar que Mubayi [39] provou ainda que vale a estabilidade Erdős-Simonovits para $\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$.

Enunciamos agora o resultado de estabilidade Füredi que obtivemos para $\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$.

Teorema 2.1.2. *Seja $n \geq 1$, $p \geq 1$ e $\ell \geq k \geq 2$. Para $k > 2$, assumamos que*

$$p < \frac{n^k}{\ell^{4k}}.$$

Se H é um hipergrafo k -uniforme com n vértices livre de $\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$ com $|E(H)| \geq t_\ell^{(k)}(n) - p$, então existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V satisfazendo

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H)| \leq p,$$

se $k = 2$, e

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H)| \leq \ell^{k-1}p,$$

se $k > 2$, onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

Para demonstrarmos o Teorema 2.1.2, primeiramente necessitamos de alguns resultados auxiliares cujas demonstração estarão ao final deste capítulo.

Lema 2.1.3. *Dados um inteiro positivo q e números reais positivos α , β e γ tais que $\gamma\alpha - q\beta > 0$, o máximo da função*

$$p(t) = (\alpha - t)^q(\beta + \gamma t) \quad (2.1)$$

em $[0, \alpha]$ é atingido em $t = 0$ ou $t = \frac{\gamma\alpha - q\beta}{\gamma(1 + q)}$.

Dado um vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\ell)$ e um conjunto $S \subseteq [\ell]$ utilizamos a notação $\mathbf{x}_S = \prod_{i \in S} x_i$. O lema a seguir é um caso particular da Desigualdade de Maclaurin para polinômios simétricos, Teorema 11.2 em [13].

Lema 2.1.4. *Sejam $\ell \geq k$ inteiros positivos e a um número real não-negativo. Se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\ell)$ é um vetor de números reais não-negativos tal que $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = a$, então*

$$\sum_{S \in \binom{[\ell]}{k}} \mathbf{x}_S \leq \binom{\ell}{k} \left(\frac{a}{\ell}\right)^k.$$

Lembramos que $t_\ell^{(k)}(n) = |T_\ell^{(k)}(n)|$. De acordo com Mubayi [39], vale a seguinte desigualdade.

$$\binom{\ell}{k} \cdot \left\lfloor \frac{n}{\ell} \right\rfloor^k \leq t_\ell^{(k)}(n) \leq \binom{\ell}{k} \cdot \left(\frac{n}{\ell}\right)^k. \quad (2.2)$$

Também, de acordo com Mubayi [39], temos que para todo $q \in [n]$, vale que

$$t_{\ell-1}^{(k)}(n - q) + q \cdot t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - q) \leq t_\ell^{(k)}(n), \quad (2.3)$$

e a igualdade é atingida somente quando $q = \lfloor n/\ell \rfloor$ ou $q = \lceil n/\ell \rceil$.

Lema 2.1.5. *Seja $H = (V, E)$ um hipergrafo k -uniforme ℓ -partido com n vértices e ℓ -partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V e com $|E| \geq t_\ell^{(k)}(n) - t$, onde $t \geq 1$. Então, para todo $i \in [\ell]$,*

$$\frac{n}{\ell} - \ell^2 \cdot t^{1/k} \leq |U_i| \leq \frac{n}{\ell} + \ell^2 \cdot t^{1/k}. \quad (2.4)$$

Para demonstrarmos o Teorema 2.1.2, mostraremos que

$$|B_{I,\mathcal{M}}(H)| \leq c_{\ell+1}^{(k)} \cdot p,$$

onde $c_{\ell+1}^{(k)}$ é dado pela seguinte relação de recorrência. Para cada valor de distância $j = \ell - k$ entre ℓ e k , estabelecemos uma relação de recorrência sobre k , dada por

$$c_{\ell+1}^{(k)} = c_{k+j+1}^{(k)} = (1 + c_{k+j}^{(k-1)}) \frac{(k+j)^2}{k+j-1}.$$

Todas essas relações de recorrência começam em $k = 2$, isto é, em

$$c_{\ell+1}^{(2)} = c_{2+j+1}^{(2)} = 1.$$

Então utilizaremos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.6. *Para todo $\ell \geq k \geq 2$ vale que*

$$c_{\ell+1}^{(k)} \leq \ell^{k-1}.$$

2.2 Demonstração da estabilidade Füredi para hipergrafos

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 2.1.2 e em seguida o Teorema 1.7.1.

Demonstração do Teorema 2.1.2. A demonstração é por indução em k , onde $k \geq 2$. Para os pares $(\ell, k) = (\ell, 2)$ com $\ell \geq 2$ qualquer, Füredi [20] provou que o resultado vale com $c_{\ell+1}^{(2)} = 1$ e nenhuma condição é necessária sobre n e p . Considere o par (ℓ, k) , onde $\ell \geq k \geq 3$, e suponha que o enunciado vale para todos os pares (s, t) tais que $t < k$.

Seja $H = (V, E)$ o hipergrafo k -uniforme com n vértices livre de $\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$ tal que $|E| = t_{\ell}^{(k)}(n) - p$, com n e p conforme o enunciado do teorema. Considere

$x \in V$ como sendo um vértice de grau máximo $\Delta = \Delta(H)$ em H . A vizinhança $N(x)$ de x é dada por $N(x) = \{v \in V \setminus \{x\} : \{v, x\} \subseteq e \text{ para algum } e \in E\}$. Denote $N = N(x)$ e $U_1 = V \setminus N$.

Seja $H[N]$ o sub-hipergrafo k -uniforme de H induzido por N . Considere o hipergrafo $(k-1)$ -uniforme $L(x) = (V', E')$, chamado de *link* de H , cujo conjunto de vértices é dado por $V' = N$ e cujo conjunto de hiperarestas é dado por $E' = \{e - x : x \in e \text{ e } e \in E\}$. Afirmamos que $H[N]$ é livre de $\mathcal{K}_\ell^{(k)}$ e $L(x)$ é livre de $\mathcal{K}_\ell^{(k-1)}$. De fato, se $H[N]$ contivesse uma cópia de $F' \in \mathcal{K}_\ell^{(k)}$ com núcleo S' , então H teria uma cópia de algum hipergrafo $F \in \mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$ com núcleo $S = S' \cup \{x\}$. Para ver isto, adicione x a $V(F')$. Para cada vértice $v \in S'$, adicione uma hiperaresta contendo o par $\{x, v\}$ a $E(F')$ (a menos que este par esteja contido em alguma hiperaresta adicionada anteriormente desta maneira). Note que $|E(F)| \leq |E(F')| + |S'| \leq \binom{\ell}{2} + \ell = \binom{\ell+1}{2}$. A demonstração para $L(x)$ é similar.

Com isto, temos que $|E(H[N])| \leq t_{\ell-1}^{(k)}(n - |U_1|)$ e $\Delta = |E(L(x))| \leq t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|)$. Considere

$$a_N = t_{\ell-1}^{(k)}(n - |U_1|) - |E(H[N])| \quad (2.5)$$

$$a_\Delta = t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|) - \Delta. \quad (2.6)$$

Particione $E(H) = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, onde $A_0 = \{e \in E : |e \cap U_1| = 0\}$, $A_1 = \{e \in E : |e \cap U_1| = 1\}$ e $A_2 = \{e \in E : |e \cap U_1| \geq 2\}$. Para cada $y \in U_1$, considere $A_1^y = \{e \in A_1 : e \cap U_1 = \{y\}\}$ e $\delta_1(y) = \Delta - \deg(y) \geq 0$, onde $\deg(y) = |\{e \in E(H) : y \in e\}|$. Note que

$$\begin{aligned} |E(H)| &\leq |E(H[N])| + \sum_{y \in U_1} \deg(y) - |A_2| \\ &= |E(H[N])| + \sum_{y \in U_1} (\Delta - \delta_1(y)) - |A_2|. \end{aligned}$$

Esse valor é igual a

$$\begin{aligned}
& |E(H[N])| + |U_1|\Delta - \sum_{y \in U_1} \delta_1(y) - |A_2| \\
\stackrel{(2.5),(2.6)}{=} & t_{\ell-1}^{(k)}(n - |U_1|) - a_N + |U_1| \cdot (t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|) - a_\Delta) \\
& - \sum_{y \in U_1} \delta_1(y) - |A_2|. \tag{2.7} \\
\stackrel{(2.3)}{\leq} & t_\ell^{(k)}(n) - a_N - |U_1|a_\Delta - \sum_{y \in U_1} \delta_1(y) - |A_2|.
\end{aligned}$$

Como $|E(H)| \geq t_\ell^{(k)}(n) - p$, temos que

$$|A_2| + a_N + |U_1|a_\Delta + \sum_{y \in U_1} \delta_1(y) \leq p, \tag{2.8}$$

e, em particular,

$$a_\Delta \leq \frac{p}{|U_1|}. \tag{2.9}$$

Além disso, a equação (2.7) implica

$$t_\ell^{(k)}(n) - p \leq |E(H)| \leq t_{\ell-1}^{(k)}(n - |U_1|) + |U_1| \cdot t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|). \tag{2.10}$$

A cota superior em (2.2) garante que

$$\begin{aligned}
& t_{\ell-1}^{(k)}(n - |U_1|) + |U_1| \cdot t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|) \\
\leq & \binom{\ell-1}{k} \cdot \left(\frac{n - |U_1|}{\ell-1}\right)^k + \binom{\ell-1}{k-1} \cdot |U_1| \cdot \left(\frac{n - |U_1|}{\ell-1}\right)^{k-1},
\end{aligned}$$

de forma que, por (2.10), vale que

$$t_\ell^{(k)}(n) - p \leq \binom{\ell-1}{k} \cdot \left(\frac{n - |U_1|}{\ell-1}\right)^k + \binom{\ell-1}{k-1} \cdot |U_1| \cdot \left(\frac{n - |U_1|}{\ell-1}\right)^{k-1}.$$

Pelo Lema 2.1.5 e pela hipótese $p < n^k/\ell^{4k}$, temos que

$$|U_1| \geq \frac{n}{\ell} - \ell^2 \cdot p^{1/k} > \frac{n}{\ell} - \frac{n}{\ell^2} = \frac{\ell-1}{\ell^2}n. \tag{2.11}$$

Pela hipótese de indução sobre o par $(\ell - 1, k - 1)$ e sobre $I' = (1^{(k-1)}, 0^{(\ell-k)})$, temos que existe uma partição $\mathcal{U}' = \{U_2, \dots, U_\ell\}$ de N para a qual vale que o número de hiperarestas ruins em $L(x)$ é limitado superiormente por

$$|B_{I', \mathcal{U}'}(L(x))| \leq c_\ell^{(k-1)} \cdot a_\Delta. \quad (2.12)$$

Considere a notação $\overline{B}_{I', \mathcal{U}'}(L(x)) = E(L(x)) \setminus B_{I', \mathcal{U}'}(L(x))$. Assim, com (2.6) e (2.12), temos que

$$\begin{aligned} |\overline{B}_{I', \mathcal{U}'}(L(x))| &= t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|) - a_\Delta - |B_{I', \mathcal{U}'}(L(x))| \\ &\geq t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|) - (1 + c_\ell^{(k-1)}) \cdot a_\Delta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Considere agora a partição $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_\ell\}$ de V . Queremos encontrar uma cota superior para $|B_{I, \mathcal{U}}(H)|$. Para isto, considere

$$B_{I, \mathcal{U}}(H) = \bigcup_{j=1}^{\ell} B_{I, \mathcal{U}}^j(H),$$

onde, para $j \in [\ell]$, $B_{I, \mathcal{U}}^j(H) = B_{I, \mathcal{U}}(H) \cap \{e \in H : |e \cap U_j| \geq 2\}$.

Particionamos o conjunto $B_{I, \mathcal{U}}(H)$ em três classes mutuamente disjuntas, como segue

$$\begin{aligned} B_{I, \mathcal{U}}(H) &= (B_{I, \mathcal{U}}(H) \cap A_0) \cup (B_{I, \mathcal{U}}(H) \cap A_1) \cup (B_{I, \mathcal{U}}(H) \cap A_2) \\ &= (B_{I, \mathcal{U}}(H) \cap A_0) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I, \mathcal{U}}^j(H) \cap A_1 \right) \cup A_2. \end{aligned}$$

Assim,

$$|B_{I, \mathcal{U}}(H)| = |B_{I, \mathcal{U}}(H) \cap A_0| + \left| \bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I, \mathcal{U}}^j(H) \cap A_1 \right| + |A_2|. \quad (2.14)$$

É claro que

$$\left| \bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I,\mathcal{U}}^j(H) \cap A_1 \right| = \sum_{y \in U_1} \left| \bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I,\mathcal{U}}^j(H) \cap A_1^y \right|.$$

Afirmamos que, para qualquer $y \in U_1$, vale que

$$\left| \bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I,\mathcal{U}}^j(H) \cap A_1^y \right| \leq (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta}. \quad (2.15)$$

Por contradição, fixe um vértice $y \in U_1$ para o qual isso não é o caso e considere

$$E^* = \left\{ e - y : e \in \bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I,\mathcal{U}}^j(H) \cap A_1^y \right\}.$$

Uma vez que as hiperarestas de $\overline{B}_{I,\mathcal{U}'}(L(x))$ não são ruins com respeito a \mathcal{U}' e as hiperarestas de E^* são ruins com respeito a \mathcal{U} , e pela nossa hipótese no tamanho de E^* , vale que

$$\begin{aligned} |\overline{B}_{I,\mathcal{U}'}(L(x)) \cup E^*| &= |\overline{B}_{I,\mathcal{U}'}(L(x))| + |E^*| \\ &\stackrel{(2.13)}{>} t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|) - (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta} + (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta} \\ &= t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|). \end{aligned}$$

Portanto, existe uma cópia F' de algum elemento de $\mathcal{K}_{\ell}^{(k-1)}$ no hipergrafo

$$(V \setminus U_1, \overline{B}_{I,\mathcal{U}'}(L(x)) \cup E^*).$$

Denote por S' o núcleo de F' . Seja $F \in \mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$ o hipergrafo obtido de F' após adicionar x e y ao seu conjunto de vértices, de modo que x é adicionado a toda hiperaresta em $\overline{B}_{I,\mathcal{U}'}(L(x))$ e y é adicionado a toda hiperaresta de E^* , possivelmente adicionando no máximo ℓ hiperarestas contendo os pares do tipo $\{u, x\}$, para cada $u \in S'$. Esta construção é possível, pois $S' \subseteq N$. Com isto temos que H contém uma cópia $F \in \mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$, com núcleo $S = S' \cup \{x\}$, o que é uma contradição, de onde obtemos (2.15).

Por causa de (2.15), temos que

$$\left| \bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I,\mathcal{U}}^j(H) \cap A_1 \right| = \sum_{y \in U_1} \left| \bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I,\mathcal{U}}^j(H) \cap A_1^y \right| \leq (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot |U_1| \cdot a_{\Delta}. \quad (2.16)$$

Afirmamos também que

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H) \cap A_0| \leq (n - |U_1|) \cdot (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta}. \quad (2.17)$$

Por contradição, suponha que $|B_{I,\mathcal{U}}(H) \cap A_0| > (n - |U_1|) \cdot (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta}$. Considerando uma função que associa cada hiperaresta $e \in B_{I,\mathcal{U}}(H) \cap A_0$ a um $(k-1)$ -subconjunto $\hat{e} \subset e$, com a propriedade de que $|\hat{e} \cap U_i| \geq 2$ para algum $i \geq 2$, vemos que cada \hat{e} poderia ser a imagem de no máximo $n - |U_1|$ elementos de $B_{I,\mathcal{U}}(H) \cap A_0$. Em particular, a função produz pelo menos

$$\frac{|B_{I,\mathcal{U}}(H) \cap A_0|}{n - |U_1|} > \frac{(n - |U_1|) \cdot (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta}}{n - |U_1|} = (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta}$$

conjuntos distintos \hat{e} . Seja \hat{E} a família de todos os conjuntos \hat{e} . Assim como no caso anterior, temos que $\overline{B_{I,\mathcal{U}}}(L(x)) \cap \hat{E} = \emptyset$, de forma que

$$|\overline{B_{I,\mathcal{U}}}(L(x)) \cup \hat{E}| > t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|) - (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta} + (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta} = t_{\ell-1}^{(k-1)}(n - |U_1|).$$

Portanto, existe uma cópia de algum elemento de $\mathcal{K}_{\ell}^{(k-1)}$ no hipergrafo

$$\left(N, \overline{B_{I,\mathcal{U}}}(L(x)) \cup \hat{E} \right),$$

o que implica que existe uma cópia de algum elemento de $\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$ em H , o que é uma contradição. Nesse caso, adicionamos x às hiperarestas em $\overline{B_{I,\mathcal{U}}}(L(x))$ e ao núcleo, e substituímos cada \hat{e} por alguma hiperaresta e cuja imagem é \hat{e} . Com isso

podemos concluir que

$$\begin{aligned}
|B_{I,\mathcal{U}}(H)| &\stackrel{(2.14)}{=} |B_{I,\mathcal{U}}(H) \cap A_0| + \left| \bigcup_{j=2}^{\ell} B_{I,\mathcal{U}}^j(H) \cap A_1 \right| + |A_2| \\
&\stackrel{(2.16),(2.17)}{\leq} |A_2| + (n - |U_1|) \cdot (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta} + (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot |U_1| \cdot a_{\Delta} \\
&\stackrel{(2.8)}{\leq} (n - |U_1|) \cdot (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot a_{\Delta} + (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot p \\
&\stackrel{(2.9)}{\leq} (n - |U_1|) \cdot (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot \frac{p}{|U_1|} + (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot p \\
&= (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \left(\frac{n - |U_1|}{|U_1|} + 1 \right) p \\
&= (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \frac{n}{|U_1|} p \\
&\stackrel{(2.11)}{\leq} (1 + c_{\ell}^{(k-1)}) \cdot \frac{\ell^2}{\ell - 1} \cdot p = c_{\ell+1}^{(k)} \cdot p,
\end{aligned}$$

com $c_{\ell+1}^{(k)} = (1 + c_{\ell}^{(k-1)})\ell^2/(\ell-1)$. O resultado então segue pela Proposição 2.1.6. \square

Demonstração do Teorema 1.7.1. Fixa $\ell \geq k \geq 2$. Para $k = 2$, o resultado está demonstrado devido ao Teorema 1.2.2. Para $\ell \geq k \geq 3$, sejam n, p e $H = (V, E)$ dados pelo enunciado do teorema. Considere o seguinte sub-hipergrafo H' de H . Seja $H_0 = H$ e assuma que H_i foi definido. Se existe um par $\{v, w\}$ de vértices contido em no máximo $\ell - k + 1 + \binom{\ell+1}{2} \cdot (k-2) \cdot \binom{n}{k-3}$ hiperarestas distintas de $E(H_i)$, então H_{i+1} é obtido de H_i após a remoção de todas essas hiperarestas, caso contrario $H' = H_i$. O hipergrafo H' satisfaz

$$|E(H')| \geq t_{\ell}^{(k)}(n) - p - \left(\ell - k + 1 + \binom{\ell+1}{2} \cdot (k-2) \right) \cdot \binom{n}{k-3} \cdot \binom{n}{2}.$$

Nós afirmamos que H' é livre de $\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$. De fato, se H' contém alguma cópia de $F' \in \mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$ com núcleo S' , então cada par de vértices $\{v, w\} \subset S'$ está contido em mais do que

$$\left(\ell - k + 1 + \binom{\ell+1}{2} \cdot (k-2) \right) \cdot \binom{n}{k-3}$$

hiperarestas de H . Com isso, obtemos a seguinte construção de $K_{\ell+1}^{(k)}$: ordene os pares contidos em S' e, para qualquer desses pares $\{v, w\}$, escolha uma hiperaresta $e \in E$ contendo $\{v, w\}$ que seja disjunta de $S' \setminus \{v, w\}$ e que compartilhe no máximo um vértice dentre v e w , com hiperarestas escolhidas anteriormente. Tal escolha é possível, pois antes da hiperaresta contendo o último par $\{v, w\}$ ser escolhida, o número de vértices (incluindo v e w) que foram usados em uma hiperaresta escolhida anteriormente é no máximo $\ell + 1 + \binom{\ell+1}{2} (k-2)$. O número de hiperarestas contendo $\{v, w\}$ e pelo menos mais um desses vértices é no máximo

$$\left(\ell - k + 1 + \binom{\ell+1}{2} \cdot (k-2) \right) \cdot \binom{n}{k-3},$$

o que garante a existência de uma hiperaresta adequada que interseccione S' somente em $\{v, w\}$. Isso contradiz o fato de que H é livre de $K_{\ell+1}^{(k)}$.

Para aplicarmos o Teorema 2.1.2, precisamos verificar que

$$p + \left(\ell - k + 1 + \binom{\ell+1}{2} \cdot (k-2) \right) \cdot \binom{n}{k-3} \cdot \binom{n}{2} < \frac{n^k}{\ell^{4k}}.$$

Isso segue das nossas hipóteses, pois

$$\begin{aligned} & \left(\ell - k + 1 + \binom{\ell+1}{2} \cdot (k-2) \right) \cdot \binom{n}{k-3} \cdot \binom{n}{2} \\ & \leq \left(\frac{\ell - k + 1}{2(k-3)!} + \frac{(\ell+1)\ell}{2} \frac{k-2}{2(k-3)!} \right) n^{k-1} \\ & \leq \left(\frac{\ell}{2} + \frac{(\ell+1)\ell}{2} \right) n^{k-1} \leq (\ell^2 - 1)n^{k-1}. \end{aligned}$$

Logo, existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V para a qual

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H')| \leq \ell^{k-1} \cdot (p + (\ell^2 - 1)n^{k-1}).$$

Uma vez que H possui no máximo $(\ell^2 - 1)n^{k-1}$ hiperarestas adicionais, vale que

$$|B_{I,\mathcal{U}}(H)| \leq \ell^{k-1} \cdot (p + (\ell^2 - 1)n^{k-1}) + (\ell^2 - 1)n^{k-1} \leq \ell^{k-1} (p + \ell^2 n^{k-1}),$$

como queríamos. □

2.3 Investigações futuras

A seguir definiremos alguns hipergrafos e famílias de hipergrafos que possuem a propriedade de cobrir pares. Dizemos um par de vértices é coberto em um hipergrafo se existe uma hiperaresta do hipergrafo contendo o par. Dizemos que um hipergrafo *cobre pares* se todo par de vértices é coberto nesse hipergrafo.

De maneira similar ao que foi feito em $\mathcal{K}_\ell^{(k)}$, denote por $\mathcal{F}_\ell^{(k)}$ a família dos hipergrafos k -uniformes, com no máximo $1 + \binom{\ell}{2} - \binom{k}{2}$ hiperarestas, que contêm um conjunto S de tamanho ℓ , chamado núcleo, e uma hiperaresta chamada hiperaresta núcleo satisfazendo a propriedade de que todo par de vértices em S , não totalmente contido na hiperaresta núcleo, é coberto. Considere $F_\ell^{(k)} \in \mathcal{F}_\ell^{(k)}$ o hipergrafo obtido a partir de um núcleo S de tamanho ℓ e uma hiperaresta núcleo e , de forma que para cada par de vértices em $S \setminus e$, o par recebe $k-2$ novos vértices se tornando uma hiperaresta em $F_\ell^{(k)}$. O hipergrafo $F_\ell^{(k)}$ é também chamado de hipergrafo Fan_k é o elemento de $\mathcal{F}_\ell^{(k)}$ com o maior número de vértices.

Note que o hipergrafo $F_\ell^{(k)}$ possui $\ell + (k-2) \left(\binom{\ell}{2} - \binom{k}{2} \right)$ vértices e $1 + \binom{\ell}{2} - \binom{k}{2}$ hiperarestas.

O seguinte teorema é uma coletânea de resultados obtidos por Mubayi e Pikhurko [39, 40, 42].

Teorema 2.3.1. *Dados $n, \ell, k \geq 2$ e $\mathcal{F} \in \{\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}, \{K_{\ell+1}^{(k)}\}, \mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}, \{F_{\ell+1}^{(k)}\}\}$, vale que todo hipergrafo extremal para \mathcal{F} é isomorfo a $T_\ell^{(k)}(n)$.*

O seguinte resultado de estabilidade Erdős-Simonovits é também uma coletânea de resultados obtidos por Mubayi e Pikhurko [39, 40, 42].

Teorema 2.3.2. *Sejam $\ell \geq k \geq 2$ inteiros e seja $\mathcal{F} \in \{\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}, \{K_{\ell+1}^{(k)}\}, \mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}, \{F_{\ell+1}^{(k)}\}\}$. Para todo $\delta > 0$, existem $\epsilon > 0$ e $n_0 > 0$ tais que o seguinte vale para todo $n \geq n_0$.*

Se $H = (V, E)$ é um hipergrafo k -uniforme com n vértices, livre de \mathcal{F} e tal que $|E| \geq t_\ell^{(k)}(n) - \epsilon n^k$, então existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V para a qual

$$|B_{I, \mathcal{U}}(H)| \leq \delta n^k,$$

onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

Note que o teorema acima garante que o hipergrafo $F_{\ell+1}^{(k)}$ é Turán-estável.

A partir de um trabalho em equipe com participação dos pesquisadores Hoppen, Lefmann e Odermann, os seguintes resultados de estabilidade foram obtidos para $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}, \{F_{\ell+1}^{(k)}\}\}$.

Teorema 2.3.3. *Seja $n \geq 1$, $p \geq 1$ e $\ell \geq k \geq 2$. Assuma que*

$$p < \frac{n^k}{\ell^{k(3\ell/2+5)}}.$$

Se H é um hipergrafo k -uniforme com n vértices livre de $\mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}$ com $|E(H)| \geq t_\ell^{(k)}(n) - p$, então existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V satisfazendo

$$|B_{I, \mathcal{U}}(H)| \leq \ell^{2k\ell} \cdot p,$$

onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

Teorema 2.3.4. *Seja $n \geq 1$, $p \geq 1$ e $\ell \geq k \geq 2$. Assuma que*

$$p < \frac{n^k}{\ell^{k(3\ell/2+5)}} - \ell^2 n^{k-1}.$$

Se H é um hipergrafo k -uniforme com n vértices livre de $F_{\ell+1}^{(k)}$ com $|E(H)| \geq t_\ell^{(k)}(n) - p$, então existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de V satisfazendo

$$|B_{I, \mathcal{U}}(H)| \leq \ell^{k\ell} (p + \ell^2 n^{k-1}),$$

onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

Assim como no caso de $K_{\ell+1}^{(k)}$, o resultado do Teorema 2.3.4 é mais preciso do que a estabilidade Erdős-Simonovits. Note que o Teorema 2.3.3 é a estabilidade Füredi para $\mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}$.

Brandt, Irwin e Jiang [6], estudaram o Problema de Turán para uma outra família de hipergrafos, que é uma generalização de $\mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}$ e de $\mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$, onde o seu elemento com maior número de vértices é uma generalização de $F_{\ell+1}^{(k)}$ e de $K_{\ell+1}^{(k)}$. Definimos tal família da seguinte forma. Para dados inteiros $\ell, k > 0$ e um hipergrafo k -uniforme J com $|V(J)| \leq \ell$, seja $\mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}(J)$ a família dos hipergrafos k -uniformes H que contêm um conjunto S de ℓ vértices chamado núcleo de H onde $H[S]$ contém uma cópia J e para quaisquer dois vértices de S existe uma hiperaresta contendo-os. Seja $F_{\ell+1}^{(k)}(J) \in \mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}(J)$ o hipergrafo definido da seguinte maneira. Inicie com o hipergrafo J , onde seus vértices são numerados $v_1, \dots, v_{|V(J)|}$, acrescente $\ell - |V(J)|$ vértices $v_{|V(J)|+1}, \dots, v_\ell$, e para cada par de vértices não coberto em S acrescente $k - 2$ novos vértices a $F_{\ell+1}^{(k)}(J)$ formando uma hiperaresta com o par. Note que no caso em que J é o hipergrafo com k vértices que possui apenas uma hiperaresta contendo esses k vértices, temos que $F_{\ell+1}^{(k)}(J) = F_{\ell+1}^{(k)}$ e $\mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}(J) = \mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}$, e quando J é o hipergrafo sem hiperarestas vale que $F_{\ell+1}^{(k)}(J) = K_{\ell+1}^{(k)}$ e $\mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}(J) = \mathcal{K}_{\ell+1}^{(k)}$. Note ainda que os hipergrafos $K_{\ell+1}^{(k)}, F_{\ell+1}^{(k)}, F_{\ell+1}^{(k)}(J)$ cobrem pares.

Os autores de [6] determinaram que o hipergrafo $T_\ell^{(k)}$ é o hipergrafo extremal para $F_{\ell+1}^{(k)}(J)$ e para $\mathcal{F}_{\ell+1}^{(k)}(J)$. Além disso, esse autores obtiveram um resultado de estabilidade Erdős-Simonovits para esses dois casos, o que significa que o hipergrafo $F_{\ell+1}^{(k)}(J)$, no caso em que J é um hipergrafo linear, é Turán-estável. Uma proposta de pesquisa futura seria a de tentar obter a estabilidade Füredi nesses dois casos.

2.4 Demonstração dos resultados auxiliares

Demonstração do Lema 2.1.3. O máximo de uma função em um intervalo é atingido, ou em um dos extremos do intervalo, ou em um ponto crítico da função que esteja dentro do intervalo. Certamente $P(\alpha) = 0$ não é o máximo de $p(t)$. Assim, considere $t \neq \alpha$, temos que

$$\begin{aligned} p'(t) = 0 &\Rightarrow (\alpha - t)^q \gamma - (\beta + \gamma t) q (\alpha - t)^{q-1} = 0 \\ \Rightarrow (\alpha - t)^q \gamma &= (\beta + \gamma t) q (\alpha - t)^{q-1} \\ \stackrel{t \neq \alpha}{\Rightarrow} (\alpha - t) \gamma &= (\beta + \gamma t) q \Rightarrow \gamma \alpha - \gamma t = q\beta + \gamma q t \Rightarrow t = \frac{\gamma \alpha - q\beta}{\gamma(1+q)}. \end{aligned}$$

Como $\gamma \alpha - q\beta > 0$ temos que

$$0 \leq \frac{\gamma \alpha - q\beta}{\gamma(1+q)}.$$

Como q, α, β e γ são positivos, temos que

$$0 \leq \alpha \gamma q + q\beta \Rightarrow \gamma \alpha - q\beta \leq \alpha \gamma + \alpha \gamma q \Rightarrow \frac{\gamma \alpha - q\beta}{\gamma(1+q)} \leq \alpha.$$

Portanto $\frac{\gamma \alpha - q\beta}{\gamma(1+q)} \in [0, \alpha]$, o que implica o resultado desejado. \square

Demonstração do Lema 2.1.4. A demonstração é por indução em k . Para $k = 1$ temos que

$$\sum_{S \in \binom{[\ell]}{k}} \mathbf{x}_S = \sum_{i \in S} x_i = a = \binom{\ell}{1} \left(\frac{a}{\ell}\right)^1 = \binom{\ell}{k} \left(\frac{a}{\ell}\right)^k.$$

Para $\ell = k$ temos que

$$\sum_{S \in \binom{[\ell]}{k}} \mathbf{x}_S = \sum_{S \in \binom{[k]}{k}} \mathbf{x}_S = \prod_{i \in [k]} x_i \leq \prod_{i \in [k]} \frac{a}{k} = \left(\frac{a}{k}\right)^k = \binom{\ell}{k} \left(\frac{a}{\ell}\right)^k.$$

Assuma que $\ell > k \geq 2$ e que o resultado vale para pares (ℓ', k') tais que $\ell' \geq k' \geq 1$ e $\ell' + k' < \ell + k$. Considere um vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\ell)$ de números reais não-negativos tais que $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = a$. Se $x_\ell = a$, como $k \geq 2$ temos que

$$\sum_{S \in \binom{[\ell]}{k}} \mathbf{x}_S = 0 \leq \binom{\ell}{k} \left(\frac{a}{\ell}\right)^k.$$

Considere portanto o caso $a - x_\ell > 0$. Claramente,

$$\sum_{S \in \binom{[\ell]}{k}} \mathbf{x}_S = x_\ell \cdot \sum_{S' \in \binom{[\ell-1]}{k-1}} \mathbf{x}_{S'} + \sum_{S \in \binom{[\ell-1]}{k}} \mathbf{x}_S.$$

Por indução, vale que

$$\sum_{S' \in \binom{[\ell-1]}{k-1}} \mathbf{x}_{S'} \leq \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{a-x_\ell}{\ell-1}\right)^{k-1} \text{ e } \sum_{S \in \binom{[\ell-1]}{k}} \mathbf{x}_S \leq \binom{\ell-1}{k} \left(\frac{a-x_\ell}{\ell-1}\right)^k,$$

de forma que

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \binom{[\ell]}{k}} \mathbf{x}_S &\leq \left(\frac{a-x_\ell}{\ell-1}\right)^{k-1} \left(\binom{\ell-1}{k-1} x_\ell + \binom{\ell-1}{k} \frac{a-x_\ell}{\ell-1} \right) \\ &= \left(\frac{a-x_\ell}{\ell-1}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{\ell-1} \binom{\ell-1}{k} a + \frac{k-1}{\ell-1} \binom{\ell}{k} x_\ell \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Considere $q = k - 1$, $\alpha = \frac{a}{\ell-1}$, $\beta = \binom{\ell-1}{k} \frac{a}{\ell-1}$, $\gamma = (k-1) \binom{\ell}{k}$ e $t = \frac{x_\ell}{\ell-1}$, de modo que o lado direito de (2.18) fica igual a $p(t)$ em (2.1). Uma vez que $\alpha\gamma - \beta q = \frac{a(k-1)}{\ell-1} \left(\binom{\ell}{k} - \binom{\ell-1}{k} \right) > 0$, o Lema 2.1.3 garante que o máximo de (2.18) é obtido para $t = \alpha$ ou $t = \frac{\alpha\gamma - \beta q}{\gamma(1+q)} = \frac{a}{(\ell-1)\ell}$. Portanto, se olharmos para a variável $x_\ell = (\ell-1)t$, o lado direito de (2.18) é máximo em $x_\ell = 0$ ou $x_\ell = \frac{a}{\ell}$.

Para ver que o máximo é de fato atingido em $x = \frac{a}{\ell}$, considere

$$f(x_\ell) = \left(\frac{a-x_\ell}{\ell-1}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{\ell-1} \binom{\ell-1}{k} a + \frac{k-1}{\ell-1} \binom{\ell}{k} x_\ell \right).$$

Fazemos uso da desigualdade de Bernoulli, que diz que

$$(1 - y)^j \geq 1 - yj$$

para quaisquer número real y satisfazendo $0 \leq y \leq 1$ e inteiro $j \geq 1$, sendo a desigualdade estrita para $y > 0$ e $j \geq 2$. Com isto temos que

$$\left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^k > 1 - \frac{k}{\ell} = \frac{\binom{\ell-1}{k}}{\binom{\ell}{k}},$$

o que implica em

$$f(0) = \binom{\ell - 1}{k} \left(\frac{a}{\ell - 1}\right)^k < f\left(\frac{a}{\ell}\right) = \binom{\ell}{k} \left(\frac{a}{\ell}\right)^k,$$

como desejado. □

Demonstração do Lema 2.1.5. Seja $H = (V, E)$ conforme enunciado do lema. Considere $z \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ tal que $n \equiv z \pmod{\ell}$.

Nós afirmamos que H possui um sub-hipergrafo $H' = (V', E')$ com $n' = n - z$ vértices para o qual $|E'| \geq t_\ell^{(k)}(n - z) - t$. Isto é trivial para $z = 0$. Considere $H_0 = H$. Seja v_1 um vértice de grau mínimo e considere $H_1 = H - v_1$. Uma vez que $T_\ell^{(k)}(n)$ é um hipergrafo k -uniforme ℓ -partido com n vértices e com o maior grau mínimo possível, vale que $d_H(v_1) \leq \delta(T_\ell^{(k)}(n)) = t_\ell^{(k)}(n) - t_\ell^{(k)}(n - 1)$. Isto implica que

$$|E(H_1)| \geq t_\ell^{(k)}(n) - t - \left(t_\ell^{(k)}(n) - t_\ell^{(k)}(n - 1)\right) = t_\ell^{(k)}(n - 1) - t.$$

Agora, temos que $n - 1 \equiv z - 1 \pmod{\ell}$, e portanto podemos repetir este argumento até obtermos um conjunto $\{v_1, \dots, v_z\}$.

Seja $\mathcal{U}' = \{U'_1, \dots, U'_\ell\}$ a partição de H' onde $U'_i = U_i \setminus \{v_1, \dots, v_z\}$. Sem perda de generalidade, assumamos que U'_ℓ é a menor classe desta partição. Fixe

$x \geq 0$ tal que $|U'_\ell| = n'/\ell - (\ell - 1) \cdot x \cdot n'/\ell$. O fato de que H' é ℓ -partido implica que

$$\begin{aligned} |E'| &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \ell} |U'_{i_1}| \cdots |U'_{i_k}| \\ &= |U'_\ell| \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq \ell-1} |U'_{i_1}| \cdots |U'_{i_{k-1}}| + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \ell-1} |U'_{i_1}| \cdots |U'_{i_k}|. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1.4 a cada um dos somatórios acima, obtemos que

$$\begin{aligned} |E'| &\leq \binom{\ell-1}{k-1} \cdot \left(\frac{n'}{\ell} - \frac{(\ell-1) \cdot x \cdot n'}{\ell} \right) \cdot \left(\frac{n'}{\ell} + \frac{x \cdot n'}{\ell} \right)^{k-1} + \\ &\quad \binom{\ell-1}{k} \cdot \left(\frac{n'}{\ell} + \frac{x \cdot n'}{\ell} \right)^k. \end{aligned}$$

Uma vez que esta cota superior é pelo menos tão grande quanto a cota inferior

$|E'| \geq t_\ell^{(k)}(n') - t$ e n' é divisível por ℓ , vale que

$$\begin{aligned} &\binom{\ell-1}{k-1} (1 - (\ell-1)x)(1+x)^{k-1} + \binom{\ell-1}{k} (1+x)^k \\ &\geq \binom{\ell}{k} - \ell^k \frac{t}{(n')^k}, \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} &\binom{\ell-1}{k-1} \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\binom{k-1}{i} - (\ell-1) \binom{k-1}{i-1} \right) x^i - (\ell-1)x^k \right) + \\ &\quad \binom{\ell-1}{k} \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} x^i + x^k \right) \\ &\geq \binom{\ell}{k} - \ell^k \frac{t}{(n')^k}, \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} &\binom{\ell-1}{k-1} + \binom{\ell-1}{k} - \left((\ell-1) \binom{\ell-1}{k-1} - \binom{\ell-1}{k} \right) x^k + \\ &\quad \sum_{i=1}^{k-1} \left(\binom{\ell-1}{k} \binom{k}{i} + \binom{\ell-1}{k-1} \binom{k-1}{i} - (\ell-1) \binom{\ell-1}{k-1} \binom{k-1}{i-1} \right) x^i \\ &\geq \binom{\ell}{k} - \ell^k \frac{t}{(n')^k}, \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-1} \binom{\ell-1}{k-1} \binom{k-1}{i-1} \left(\frac{\ell}{i} - \ell\right) x^i \\ & \geq \binom{\ell-1}{k-1} \left(\ell - \frac{\ell}{k}\right) x^k - \ell^k \frac{t}{(n')^k}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Note que

$$\binom{\ell-1}{k-1} \left(\ell - \frac{\ell}{k}\right) \geq 1,$$

e para $i \geq 1$

$$\binom{\ell-1}{k-1} \binom{k-1}{i-1} \left(\frac{\ell}{i} - \ell\right) \leq 0.$$

De (2.19), concluímos que $\ell^k \cdot t / (n')^k \geq x^k$, e portanto $x \leq \ell \cdot t^{1/k} / n'$. Isso significa que para todo $i = 1, \dots, \ell$, vale que

$$|U_i| \geq |U'_i| \geq n'/\ell - (\ell-1) \cdot t^{1/k} = n/\ell - z/\ell - (\ell-1) \cdot t^{1/k}.$$

Agora, assumamos que para algum $i \in \{1, \dots, \ell\}$ vale que $|U'_i| = n'/\ell + (\ell-1)^2 \cdot x \cdot n'/\ell$ para algum $x \geq 0$. Então, existe alguma classe U'_j , satisfazendo $j \in \{1, \dots, \ell\}$, e $|U'_j| \leq n'/\ell - (\ell-1) \cdot x \cdot n'/\ell$, portanto as considerações feitas acima se aplicam e concluímos que $x \leq \ell \cdot t^{1/k} / n'$. Em outras palavras, para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$ e $t \geq 1$, vale que

$$|U_i| \leq |U'_i| + z \leq n'/\ell + (\ell-1)^2 \cdot t^{1/k} + z \leq n/\ell + \ell^2 \cdot t^{1/k},$$

o que implica em (2.4). □

Demonstração da Proposição 2.1.6. Pelo Teorema 1.2.2 temos que $c_{\ell+1}^{(k)} = 1$ para todo $\ell \geq k = 2$. Para simplificar a notação, escrevemos

$$a_k = \frac{(k+j)^2}{k-1+j} (a_{k-1} + 1),$$

$$a_2 = 1.$$

Note que o índice do a_k é dado conforme o índice superior de $c_{\ell+1}^{(k)}$. Queremos encontrar uma cota superior para a_k . Por indução em k , mostraremos que

$$a_k = \frac{(k+j)^2}{k-1+j}(a_{k-1} + 1) \leq (k+j)^{k-1},$$

que é igual a ℓ^{k-1} . Para $k = 2$ temos que $a_2 = 1 \leq (2+j)^{2-1}$ para todo $j \geq 0$.

Para $k = 3$ vemos que

$$a_3 = \frac{(3+j)^2}{3-1+j}(a_2 + 1) = \frac{(3+j)^2}{2+j}(1 + 1) = \frac{(3+j)^2}{2+j}2 \leq (3+j)^2$$

para todo $j \geq 0$. Suponhamos portanto que a desigualdade seja verdadeira para todo $k-1 \geq 3$. Logo,

$$a_k = \frac{(k+j)^2}{k-1+j}(a_{k-1} + 1) \leq \frac{(k+j)^2}{k-1+j}((k-1+j)^{k-2} + 1) \leq (k+j)^{k-1},$$

onde a última desigualdade é equivalente a

$$(k-1+j)^{k-3} + \frac{1}{k-1+j} \leq (k+j)^{k-3},$$

que vale para todo $j \geq 0$, já que para $k \geq 4$ temos que $1/(k-1+j) < 1/2$. \square

3 ESTABILIDADE GENÉRICA PARA COLORAÇÕES ARCO-ÍRIS

O presente capítulo é dedicado a demonstrar o Teorema 1.8.5. Para isso, falaremos primeiramente de algumas ferramentas importantes que foram necessárias durante a demonstração.

3.1 Resultados auxiliares

Dados um hipergrafo k -uniforme $H = (V, E)$ e uma partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_k\}$ de V , considere a *densidade*

$$d_H(W_1, \dots, W_k) = \frac{|E(W_1, \dots, W_k)|}{|W_1| \cdots |W_k|},$$

de H com respeito a partição \mathcal{W} , onde $E(W_1, \dots, W_k)$ é o conjunto das hiperarestas de H que contêm exatamente um vértice de cada W_i , onde $i \in [k]$. Nós dizemos que uma k -upla (V_1, \dots, V_k) de subconjuntos mutuamente disjuntos de V é (ϵ, d) -regular, para constantes positivas ϵ e d , se

$$|d_H(W_1, \dots, W_k) - d| < \epsilon$$

para quaisquer k -uplas de subconjuntos $W_1 \subseteq V_1, \dots, W_k \subseteq V_k$ satisfazendo

$$|W_1| \cdots |W_k| \geq \epsilon |V_1| \cdots |V_k|.$$

Dizemos ainda que a k -upla (V_1, \dots, V_k) é ϵ -regular se esta for (ϵ, d) -regular para algum $d \geq 0$. Uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ de V é dita ϵ -regular se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para quaisquer $i, j \in [m]$.

- (ii) para no máximo $\epsilon \binom{m}{k}$ k -conjuntos $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [m]$, temos que a k -upla $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$ não é ϵ -regular.

O resultado a seguir é uma generalização do Lema de Regularidade obtido por Kohayakawa, Nagle, Rödl e Schacht em [33]. Aqui, apresentaremos uma versão desse resultado para colorações que pode ser obtida nos moldes do que foi feito por Komlós e Simonovits em [34] no caso de grafos.

Teorema 3.1.1 (Lema de Regularidade para Colorações). *Para quaisquer inteiros $r \geq 1$, $k \geq 2$ e $m_0 \geq 1$, e todo $\epsilon > 0$, existem $M = M(r, m_0, \epsilon)$ e $N_0 = N_0(r, m_0, \epsilon)$ tais que, para todo hipergrafo k -uniforme $H = (V, E)$ com $n \geq N_0$ vértices, cujas hiperarestas são r -coloridas $E(H) = E_1 \cup \dots \cup E_r$, existe uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ com $m_0 \leq m \leq M$ que é ϵ -regular simultaneamente com respeito a todos os sub-hipergrafos $H_i = (V, E_i)$ para $1 \leq i \leq r$.*

Definição 3.1.2 (Hipergrafo Reduzido). *Para um hipergrafo k -uniforme $H = (V, E)$, uma partição ϵ -regular $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ de V e um número $\eta > 0$, o hipergrafo reduzido $R_H(\eta) = (V^*, E^*)$ é o hipergrafo com conjunto de vértices $V^* = [m]$ e conjunto de hiperarestas E^* , onde, para $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, vale que $\{i_1, \dots, i_k\} \in E^*$ se, e somente se, a k -upla $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$ é ϵ -regular e sua densidade satisfaz $d_H(V_{i_1}, \dots, V_{i_k}) \geq \eta$.*

Lema 3.1.3 (Lema de Imersão). *Para todo inteiro $k \geq 2$ e constante $\eta > 0$, existem $\epsilon = \epsilon(m, k, \eta)$ e um inteiro positivo $m_0 = m_0(m, k, \eta)$ para os quais o seguinte vale para todo inteiro positivo m . Seja $H = (V, E)$ um hipergrafo com uma partição ϵ -regular $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ tal que $|V_i| \geq m_0$ para todo $i \in [m]$. Se o hipergrafo reduzido $R_H(\eta)$ contém uma cópia de algum hipergrafo k -uniforme linear F , então H também contém uma cópia de F .*

Note que o lema acima é enunciado apenas para hipergrafos F que são lineares. Tal lema é o motivo de enunciarmos o Teorema 1.8.5 apenas para hipergrafos lineares. A partir de um tipo diferente de lema de regularidade, o qual é chamado de Lema de Regularidade Forte para Hipergrafos, obtido por Rödl e Skokan [45], os autores Rödl e Schacht [41] obtiveram um lema de imersão para hipergrafos k -uniformes F em geral (ver também Lema de Fatias regulares [1]).

Definição 3.1.4 (Hipergrafo Reduzido Multicolorido). *Seja $H = (V, E)$ um hipergrafo r -colorido $E(H) = E_1 \cup \dots \cup E_r$, e considere uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ de V que é ϵ -regular simultaneamente com respeito a todos os sub-hipergrafos $H_i = (V, E_i)$, para $i \in [r]$. Dado $\eta > 0$, o hipergrafo reduzido multicolorido $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H(\eta)$ associado a η e \mathcal{V} possui conjunto de vértices $[m]$ e conjunto de hiperarestas $E_{\mathcal{R}}$ formado pelos conjuntos $\{i_1, \dots, i_k\} \in \bigcup_{i \in [r]} E(R_{H_i}(\eta))$ tais que para todo $i \in [r]$, a k -upla $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$ é ϵ -regular para $H_i = (V, E_i)$. Além disso, toda hiperaresta $e \in E_{\mathcal{R}}$ é associada a uma lista de cores L_e , onde para toda cor $\alpha \in [r]$, vale que $\alpha \in L_e$ se, e somente se, $e \in E(R_{H_\alpha}(\eta))$. Ainda, se $\alpha \in L_{\{i_1, \dots, i_k\}}$, a cor α é dita η -densa com respeito a $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$.*

Note que na Definição 3.1.4, se $\eta < 1/r$, então toda hiperaresta $e \in E_{\mathcal{R}}$ satisfaz $|L_e| \geq 1$. Para o lema a seguir utilizaremos a definição de hipergrafo Turán-estável, que é a Definição 1.8.4.

Lema 3.1.5. *Dado um hipergrafo k -uniformes Turán-estável F , com vetor de intersecção $I \in \mathcal{I}_{\ell, k}^*$, uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de $[n]$ como a da Definição 1.8.4 satisfaz*

$$|U_i| \geq Dn,$$

para todo $i \in [\ell]$, onde D é uma constante.

A demonstração do Lema 3.1.5 encontra-se na Seção 3.4.

Lema 3.1.6. *Seja $K = ([n], \binom{[n]}{k})$. Dado um hipergrafo k -uniforme Turán-extremal F , com vetor $I = (x_1, \dots, x_\ell)$, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$ e $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ é uma partição de $[n]$ satisfazendo $|U_i| \geq U$ para todo $i \in [\ell]$, então, para qualquer $f \in B_{I, \mathcal{U}}(K)$, o número $N_{f, F}$ de cópias de F em $H_{I, \mathcal{U}}(n) + \{f\}$ satisfaz*

$$N_{f, F} \geq \frac{(U - |V(F)|)^{|V(F)|-k}}{|V(F)|!^\ell}.$$

A demonstração do Lema 3.1.6 encontra-se na Seção 3.4.

Considere a função de entropia $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x)$ para $0 < x < 1$ e $h(0) = h(1) = 0$. Nós usaremos a seguinte desigualdade sobre essa função.

$$\binom{n}{\alpha n} \leq 2^{h(\alpha)n} \quad (3.1)$$

para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

3.2 Demonstração da estabilidade genérica para colorações

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 1.8.5. Repetimos seu enunciado.

Teorema 1.8.5. *Para todo hipergrafo F que é linear, k -uniforme e Turán-estável com vetor $I \in \mathcal{I}_{\ell, k}^*$ e todo $\delta > 0$, existe r_0 com a seguinte propriedade. Para todo $r \geq r_0$ existe N_0 tal que, se $n \geq N_0$ e $H = (V, E)$ é um hipergrafo k -uniforme com n vértices satisfazendo $c_{r, F, P_A}(H) \geq r^{\text{ex}(n, F)}$, então existe uma partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$ de V para a qual*

$$|B_{I, \mathcal{W}}(H)| \leq \delta n^k.$$

Para demonstrarmos o Teorema 1.8.5, combinamos as estratégias e ferramentas utilizadas em [2, 28, 36], com adaptações pelo fato de estarmos tratando de uma classe genérica de hipergrafos F .

Iniciamos com um hipergrafo $H = (V, E)$ que satisfaz as hipóteses do teorema e fixamos uma de suas r -colorações livres de (F, P_A) . O Lema de Regularidade garante que existe uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ de V . Então consideramos o hipergrafo \mathcal{R} reduzido multicolorido de H com relação a \mathcal{V} . Fixando um hipergrafo reduzido multicolorido \mathcal{R} e uma partição \mathcal{V} , determinamos quantas colorações de H possuem tal hipergrafo \mathcal{R} e partição \mathcal{V} e somamos esse resultado sobre todas as possíveis partições e hipergrafos reduzidos. Note que uma mesma coloração pode ser contada mais de uma vez. Ao fixar um hipergrafo \mathcal{R} , removemos suas hiperarestas com menos do que $|E(F)|$ cores, obtendo \mathcal{R}' . Observamos que \mathcal{R}' não pode conter uma cópia de F , pois, com o Lema de Imersão, isto implicaria que H contém uma cópia arco-íris de F . Assim, $|E(\mathcal{R}')| \leq \text{ex}(m, F)$ e consideramos dois casos. Se $|E(\mathcal{R}')|$ está longe de $\text{ex}(m, F)$, então provamos que H necessariamente possui poucas colorações livres de (F, P_A) , o que contradiz nossas hipóteses. Se $|E(\mathcal{R}')|$ está próximo a $\text{ex}(m, F)$, então o fato de F ser Turán-estável garante que existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de $[m]$ com poucas hiperarestas ruins. A seguir consideramos a partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$ de V , onde para todo $i \in [\ell]$, W_i é a união dos elementos de U_i (que são classes de \mathcal{V}). O número de hiperarestas ruins de H com respeito a \mathcal{W} é então dado por no máximo todas as hiperarestas de H não representadas em \mathcal{R} (existem poucas pelo Lema de Regularidade), mais o número de hiperarestas ruins de H que levam a uma hiperaresta ruim de \mathcal{R} com respeito a \mathcal{U} . Essa última quantidade não pode ser grande, pois cada hiperaresta ruim f de \mathcal{R} com respeito a \mathcal{U} faz com que em toda cópia de F em $H_{I, \mathcal{U}}(n)$ onde f é a única hiperaresta ruim de F , exista uma hiperaresta não

ruim de F que ou não pertence a \mathcal{R} , ou possui menos do que $|E(F)|$ cores em sua lista de cores, o que contradiz nossa situação de \mathcal{R}' .

Demonstração do Teorema 1.8.5. Seja $\delta > 0$. Do fato de F ser Turán-estável, sejam ℓ um inteiro positivo, $I \in \mathcal{I}_{\ell,k}^*$ um vetor de intersecção e n_0 vindos da Definição 1.8.4.

Considere D definido conforme o Lema 3.1.5 e seja

$$C = k!|V(F)|^\ell \left(\frac{2}{D}\right)^{|V(F)|-k}. \quad (3.2)$$

Da Definição 1.8.4, seja $\epsilon_s = \epsilon_s(\delta)$, satisfazendo

$$\epsilon_s < \frac{\delta}{2C}. \quad (3.3)$$

Seja $|E(F)| = s$, e considere $r_0 = (s-1)^{\frac{2}{k\epsilon_s}}$. Considere $r \geq r_0$ e seja

$$\eta < \frac{\delta}{2r} \quad (3.4)$$

pequeno o suficiente para garantir que

$$h(r\eta) + r\eta \leq \frac{\epsilon_s}{3}. \quad (3.5)$$

Para r, k , e η , sejam ϵ e m_0 dados pelo Lema 3.1.3. Por conveniência, consideramos $\epsilon < \min\{\eta k!/3, r\eta/3\}$ e $m_0 \geq \max\{1/\epsilon, n_0\}$ grande o suficiente para garantir que

$$\frac{|V(F)|}{m_0} \leq \frac{D}{2}. \quad (3.6)$$

Sejam $M = M(r, m_0, \epsilon)$ e $N_0 = N_0(r, m_0, \epsilon)$ do Teorema 3.1.1.

Seja $n \geq N_0$ grande o suficiente para satisfazer (3.14). Seja $H = (V, E)$ um hipergrafo com n vértices satisfazendo $c_{r,F,P_A}(H) \geq r^{\text{ex}(n,F)}$. Nós queremos encontrar uma partição $\{W_1, \dots, W_\ell\}$ conforme o enunciado do Teorema 1.8.5. Considere $E = E_1 \cup \dots \cup E_r$, uma das r -colorações livre de (F, P_A) . Pelo Teorema 3.1.1, existe uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ de V com $m_0 \leq m \leq M$, que é ϵ -regular simultaneamente com respeito a todos os sub-hipergrafos $H_i = (V, E_i)$. Considere $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H(\mathcal{V}, \eta)$ o hipergrafo reduzido multicolorido associado a essa partição e a esse valor de η . A seguir, obtemos uma cota superior para o número de r -colorações livres de (F, P_A) de H que levam à partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ e ao hipergrafo reduzido multicolorido \mathcal{R} .

Para no máximo $\epsilon \binom{m}{k}$ conjuntos $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [m]$, a k -upla $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$ não é ϵ -regular com respeito à partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ e com respeito a alguma cor, portanto no máximo

$$r \epsilon \binom{m}{k} \left(\frac{n}{m}\right)^k \leq r \epsilon \frac{n^k}{k!} \quad (3.7)$$

hiperarestas estão nessas k -uplas irregulares. Pela definição de partição ϵ -regular e pela nossa escolha de m , existem no máximo

$$m \left(\frac{n}{m}\right)^2 n^{k-2} \leq \epsilon n^k \quad (3.8)$$

hiperarestas com intersecção de tamanho pelo menos dois com alguma classe V_i . Além disso, se considerarmos todas as hiperarestas em k -uplas de classes V_{i_1}, \dots, V_{i_k} cuja cor possui densidade menor do que η , nós obtemos no máximo

$$r \binom{m}{k} \left(\frac{n}{m}\right)^k \eta \leq r \frac{m^k}{k!} \frac{n^k}{m^k} \eta = r \eta \frac{n^k}{k!} \quad (3.9)$$

hiperarestas. Combinando (3.7), (3.8) e (3.9) com $\epsilon < \min\{\frac{\eta k!}{3}, \frac{r\eta}{3}\}$, obtemos no máximo

$$r \epsilon \frac{n^k}{k!} + \epsilon n^k + r \eta \frac{n^k}{k!} \leq \left(\frac{r\eta}{3} + \frac{r\eta}{3} + \frac{r\eta}{3}\right) n^k \leq r \eta n^k$$

dessas hiperarestas, que podem ser coloridas de no máximo $r^{r\eta n^k}$ maneiras. Claramente, as hiperarestas restantes, que estão em k -uplas regulares e assumem cor η -densa com respeito a esta k -upla, podem ser coloridas em no máximo

$$\left(\prod_{e \in E(\mathcal{R})} |L_e| \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}$$

maneiras, onde L_e é a lista de cores associada à hiperaresta e (ver Definição 3.1.4). Assim, o número de r -colorações de H que levam à partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ e ao hipergrafo reduzido multicolorido \mathcal{R} é limitado superiormente por

$$\binom{n^k}{r\eta n^k} r^{r\eta n^k} \left(\prod_{e \in \mathcal{R}} |L_e| \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}. \quad (3.10)$$

Somando sobre todas as possíveis partições \mathcal{P} de $[n]$ e sobre todos os hipergrafos reduzidos multicoloridos \mathcal{R} , temos que $c_{r,F,P_A}(H)$ é limitado superiormente por

$$\begin{aligned} & \binom{n^k}{r\eta n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left(\prod_{e \in E(\mathcal{R})} |L_e| \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k} \\ & \stackrel{(3.1)}{\leq} 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left(\prod_{e \in E(\mathcal{R})} |L_e| \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}. \end{aligned}$$

Com $e_j(\mathcal{R}) = |\{e \in E(\mathcal{R}) : |L_e| = j\}|$ nós obtemos que

$$2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left(\prod_{e \in E(\mathcal{R})} |L_e| \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k} = 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left(\prod_{j=1}^r j^{e_j(\mathcal{R})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}.$$

Esse número é limitado por

$$\begin{aligned} & 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left(\prod_{j=1}^{s-1} j^{e_j(\mathcal{R})} \prod_{j=s}^r j^{e_j(\mathcal{R})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k} \\ & \leq 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left((s-1)^{\sum_{j=1}^{s-1} e_j(\mathcal{R})} r^{\sum_{j=s}^r e_j(\mathcal{R})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Se existe uma cópia de F em \mathcal{R} tal que toda hiperaresta z_i em F possui pelo menos $s = |E(F)|$ cores $\alpha_1^i, \dots, \alpha_s^i$ em sua lista de cores, então é possível escolher s cores $\alpha_1^*, \dots, \alpha_s^*$, duas a duas distintas, satisfazendo que $\alpha_i^* \in L_{z_i}$ para todo $i \in [s]$. Assim, considere H^* o sub-hipergrafo de H definido da seguinte forma. Para cada hiperaresta z_i de F , $i \in [s]$, toda hiperaresta de H que intercepta as mesmas classes que z_i e possuem cor α_i^* são hiperarestas de H^* . Seja $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_{H^*}(\mathcal{V}, \eta)$ o hipergrafo reduzido de H^* . Note que, como existe cópia de F em \mathcal{R} , então também existe cópia de F em \mathcal{R}^* . Portanto, pelo Lema 3.1.3, existe uma cópia de F em H^* , e devido a nossa escolha de hipergrafo H^* e \mathcal{R}^* , tal cópia de F em H^* é arco-íris. Como H^* é um sub-hipergrafo de H , temos que esta cópia arco-íris de F está contida em H também. Portanto, \mathcal{R} não pode conter uma cópia de F onde cada hiperaresta possui uma lista de pelo menos s cores, o que garante que

$$\sum_{j=s}^r e_j(\mathcal{R}) \leq \text{ex}(m, F).$$

Seja

$$\beta(\mathcal{R}) = \frac{\text{ex}(m, F) - \sum_{j=s}^r e_j(\mathcal{R})}{m^k}.$$

Considere os seguintes casos.

- (a) Para todo hipergrafo reduzido multicolorido \mathcal{R} vale que $\beta(\mathcal{R}) \geq \epsilon_s$.
- (b) Existe um hipergrafo reduzido multicolorido para o qual $\beta(\mathcal{R}) < \epsilon_s$.

No caso (a), temos que a expressão (3.11) vale no máximo

$$2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left((s-1)^{\binom{m}{k} - (\text{ex}(m, F) - \beta(\mathcal{R})m^k)} r^{\text{ex}(m, F) - \beta(\mathcal{R})m^k} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}. \quad (3.12)$$

O número de partições de $[n]$ em no máximo M classes é no máximo M^n . Para cada partição existem no máximo 2^{rM^k} hipergrafos reduzidos multicoloridos \mathcal{R} . Além disso, quando n é múltiplo de m , então $\text{ex}(m, F)n^k/m^k \leq \text{ex}(n, F)$.

No caso em que n não é múltiplo de m temos que $\overline{\text{ex}(m, F)n^k/m^k} \leq \text{ex}(n, F) + Jn^{k-1}$, onde J é uma constante que não afeta nosso resultado. Portanto, por simplicidade vamos supor que n é divisível por m . Então (3.12) vale no máximo

$$\begin{aligned} & M^n 2^{rM^k} 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} (s-1)^{\frac{n^k}{k!}} r^{\text{ex}(n, F) - \epsilon_s n^k} \\ = & M^n 2^{rM^k} 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \frac{(s-1)^{\frac{n^k}{k!}}}{r^{\epsilon_s n^k/2}} r^{\text{ex}(n, F) - \epsilon_s n^k/2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Usando $r > r_0 = (s-1)^{\frac{2}{k! \epsilon_s}}$, note que

$$\frac{(s-1)^{\frac{1}{k!}}}{r^{\epsilon_s/2}} < \frac{(s-1)^{\frac{1}{k!}}}{\left((s-1)^{\frac{2}{k! \epsilon_s}}\right)^{\epsilon_s/2}} = \frac{(s-1)^{\frac{1}{k!}}}{(s-1)^{\frac{1}{k!}}} = 1.$$

Com isso, (3.13) deve valer, para n suficientemente grande, no máximo

$$\begin{aligned} & M^n 2^{rM^k} 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} r^{\text{ex}(n, F) - \epsilon_s n^k/2} \\ & \stackrel{n \gg 0}{<} r^{(h(r\eta) + r\eta)n^k} r^{\text{ex}(n, F) - \epsilon_s n^k/2} \\ & \stackrel{(3.5)}{\leq} r^{\text{ex}(n, F) - \epsilon_s n^k/6} \\ & < r^{\text{ex}(n, F)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

o que é uma contradição.

No caso (b), consideramos que $\beta(\mathcal{R}) < \epsilon_s$ para algum hipergrafo reduzido multicolorido \mathcal{R} . Seja \mathcal{R}' o hipergrafo com conjunto de vértices $[m]$ obtido de \mathcal{R} após a remoção de todas hiperarestas e que satisfazem $|L_e| \leq s-1$. Note que não existe cópia de F em \mathcal{R}' . Além disso,

$$e(\mathcal{R}') = \sum_{j=s}^r e_j(\mathcal{R}) = \text{ex}(m, F) - \beta(\mathcal{R})m^k \geq \text{ex}(m, F) - \epsilon_s m^k.$$

Do fato de F ser Turán-estável, temos que existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de $V(\mathcal{R}')$ que satisfaz

$$|B_{I, \mathcal{U}}(\mathcal{R}')| \leq \frac{\delta}{2} m^k$$

e do Lema 3.1.5 vale que essa partição também satisfaz

$$|U_i| \geq Dm,$$

para todo $i \in [\ell]$.

Seja $\mathcal{R}'' = ([m], E(\mathcal{R}') \setminus B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R}'))$. Para toda hiperaresta $f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})$, considere o conjunto $P(f)$ de todas as cópias de F em $H_{I,\mathcal{U}}(m) + \{f\}$. Seja $f^* \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})$ uma hiperaresta (ruim) tal que

$$|P(f^*)| = \min\{|P(f)| : f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})\}.$$

Por um lado, vale que

$$|B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})| \cdot |P(f^*)| \leq \sum_{f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})} |P(f)|.$$

Por outro lado, seja $\overline{E} = E(H_{I,\mathcal{U}}(m)) \setminus E(\mathcal{R}'')$ (note que se \mathcal{U} não é balanceado, então $H_{I,\mathcal{U}}(m) \neq T_\ell^{(k)}(m)$). Afirmamos que para qualquer $f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})$ e $F(f) \in P(f)$, temos que $F(f)$ possui uma hiperaresta em \overline{E} . De fato, dado $f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})$ e $F(f) \in P(f)$, temos que, pela definição de $P(f)$, f é a única hiperaresta ruim de $F(f)$. Logo, as demais hiperarestas de $F(f)$ pertencem a $H_{I,\mathcal{U}}(m)$. Se todas essas hiperarestas não pertencem a \overline{E} , então elas pertencem a \mathcal{R}'' . Porém, uma cópia de F em \mathcal{R} onde uma hiperaresta f possui pelo menos uma cor em sua lista de cores e todas as demais possuem pelo menos s cores em sua lista de cores faz com que, pelo mesmo raciocínio utilizado anteriormente, exista uma cópia arco-íris de F em H , o que é uma contradição. Logo, para qualquer $f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})$ e $F(f) \in P(f)$, temos que $F(f)$ possui uma hiperaresta em \overline{E} .

Já que para qualquer $f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})$, toda hiperaresta em \overline{E} pode fazer parte de no máximo $k!m^{|V(F)|-k}$ cópias de $F(f)$ em $P(f)$, vale que

$$\sum_{f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})} |P(f)| = \sum_{f \in B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})} \sum_{F \in P(f)} 1 \leq |\overline{E}| \cdot k!m^{|V(F)|-k},$$

o que implica em

$$|B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})| \leq |\bar{E}| \cdot k! \frac{m^{|V(F)|-k}}{|P(f^*)|}.$$

Usando o Lema 3.1.6, com $U = Dm$, obtemos que

$$\begin{aligned} |B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})| &\leq |\bar{E}| \cdot k! |V(F)|!^\ell \left(\frac{m}{Dm - |V(F)|} \right)^{|V(F)|-k} \\ &= |\bar{E}| \cdot k! |V(F)|!^\ell \left(\frac{1}{D - |V(F)|/m} \right)^{|V(F)|-k} \\ &\stackrel{(3.6)}{\leq} |\bar{E}| \cdot k! |V(F)|!^\ell \left(\frac{2}{D} \right)^{|V(F)|-k} \stackrel{(3.2)}{=} |\bar{E}| C. \end{aligned}$$

Logo,

$$|B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})| \leq |\bar{E}| C \leq C\beta(\mathcal{R})m^k.$$

Considere a partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$, onde para todo $i \in [\ell]$, vale que

$$W_i = \bigcup_{j \in U_i} V_j.$$

Calcularemos uma cota superior para $|B_{I,\mathcal{W}}(H)|$ o número de hiperarestas ruins de H com respeito a I e \mathcal{W} . Temos que no máximo $r\eta n^k$ hiperarestas referentes a (3.7), (3.8) e (3.9) podem ser ruins em H e que toda hiperaresta ruim com respeito a I e \mathcal{U} em R equivale a no máximo n^k/m^k hiperarestas ruins em H . Assim,

$$\begin{aligned} |B_{I,\mathcal{W}}(H)| &\leq r\eta n^k + \left(\frac{n}{m} \right)^k |B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})| \\ &\leq r\eta n^k + \left(\frac{n}{m} \right)^k C\beta(\mathcal{R})m^k \\ &\leq (r\eta + C\epsilon_s) n^k \\ &\stackrel{(3.4)}{<} \left(\frac{\delta}{2} + C\epsilon_s \right) n^k \\ &\stackrel{(3.3)}{<} \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \right) n^k \\ &= \delta n^k, \end{aligned}$$

como queríamos. □

3.3 Investigações futuras

Acreditamos que o Teorema 1.8.5 valha para todo hipergrafo que é linear e Turán-estável. No enunciado desse teorema, exigimos que o vetor de intersecção I do hipergrafo F pertença ao conjunto $\mathcal{I}_{\ell,k}^*$. Tal exigência deve-se ao fato de que o Lema 3.1.5 (que se refere aos tamanhos das classes da partição que existe do fato de F ser Turán-estável) está demonstrado apenas para vetores $I \in \mathcal{I}_{\ell,k}^*$. A demonstração desse lema para todo vetor $I \in \mathcal{I}_{\ell,k}$ nos forneceria o resultado do Teorema 1.8.5 para qualquer hipergrafo F que é linear e Turán-estável. Portanto, começamos a investigar essa questão.

Note que dada uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ e um vetor $I = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathcal{I}_{\ell,k}$, temos que

$$|E(H_{I,\mathcal{U}}(n))| = \sum_{\pi \in \Pi(I)} \prod_{i=1}^{\ell} \binom{|U_{\pi(i)}|}{x_i}$$

onde $\Pi(I)$ denota o conjunto das permutações com repetição dos elementos de I . O fato de esse número não se alterar ao permutarmos os elementos de I nos levou a acreditar inicialmente que $|E(H_{I,\mathcal{U}}(n))|$ seria máximo quando \mathcal{U} fosse uma partição balanceada. Porém, isso não é verdade. Um exemplo onde podemos ver isso é se escolhermos uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ e o vetor $I = (1, 7)$. Nesse caso temos que

$$\begin{aligned} |E(H_{I,\mathcal{U}}(n))| &= \binom{|U_1|}{1} \binom{|U_2|}{7} + \binom{|U_2|}{1} \binom{|U_1|}{7} \\ &= |U_1| \binom{n - |U_1|}{7} + (n - |U_1|) \binom{|U_1|}{7}. \end{aligned}$$

Considerando $|U_1| = pn$, com $0 \leq p \leq 1$, vemos que

$$|E(H_{I,\mathcal{U}}(n))| = pn \binom{n(1-p)}{7} + n(1-p) \binom{pn}{7}.$$

Esse número é máximo para p tal que a função

$$f(p) = p(1-p)^7 + (1-p)p^7$$

é máxima, o que claramente não ocorre para $p = 1/2$, já que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^7} < \frac{3^7 + 3}{4^8} = f\left(\frac{1}{4}\right).$$

Aliás, note que $p = 1/2$ é um ponto de mínimo local da função $f(p)$. Em [50], é feita uma discussão sobre funções simétricas, que são funções $f(x_1, \dots, x_\ell)$ tais que $f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(\ell)}) = f(x_1, \dots, x_\ell)$ para qualquer permutação π dos elementos de (x_1, \dots, x_ℓ) , incluindo resultados sobre os pontos de máximo dessas funções.

Com isso, começamos a investigar se existem hipergrafos lineares e Turán-estáveis cujo vetor de intersecção não pertence a $\mathcal{I}_{\ell,k}^*$. O fato de não termos encontrado hipergrafos desse tipo nos levou a tentar provar a inexistência desses. Note que se provarmos que não existem hipergrafos desse tipo, então também o Teorema 1.8.5 estará automaticamente demonstrado para todo hipergrafo F que é linear e Turán-estável. Mostramos agora alguns avanços que tivemos nesse sentido. Abaixo descrevemos dois casos com relação ao vetor $I = (x_1, \dots, x_\ell)$ onde obtivemos progresso nesse problema.

Caso 1. $I = (0, 1, a)$, onde $a \geq 2$.

Caso 2. $I = (x_1, \dots, x_t, 0^{\ell-t})$, onde $\ell > t$ e $x_i \geq 1 + \sqrt{t}$.

Em ambos os casos de vetor I mostramos que $H_{I,\mathcal{U}}(n)$ não é o hipergrafo extremal para nenhum hipergrafo F não importa qual partição \mathcal{U} escolhemos. A estratégia que utilizamos foi mostrar que $H_{I,\mathcal{U}}(n)$, possui menos hiperarestas do que $H_{I',\mathcal{U}'}(n)$, onde I' é o vetor obtido de I após removermos um zero e \mathcal{U}' é a partição obtida de \mathcal{U} após substituímos duas de suas classes pela união dessas. Note que se $H_{I,\mathcal{U}}(n)$ é livre de F , então $H_{I',\mathcal{U}'}(n)$ também é livre de F .

Caso 1. Seja $I = (0, 1, a)$ com $a \geq 2$ o vetor de intersecção correspondente a esse caso. Seja $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ uma partição de $[n]$ onde $|V_1| = n_1 \leq |V_2| = n_2 \leq |V_3| = n_3$. Seja $I' = (1, a)$ e $\mathcal{V}' = \{V_1 \cup V_2, V_3\}$. Então,

$$|E(H_{I', \mathcal{V}'}(n))| = \binom{n_1 + n_2}{1} \binom{n_3}{a} + \binom{n_1 + n_2}{a} \binom{n_3}{1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |E(H_{I, \mathcal{V}}(n))| &= \binom{n_3}{a} \left[\binom{n_1}{0} \binom{n_2}{1} + \binom{n_1}{1} \binom{n_2}{0} \right] \\ &+ \binom{n_3}{1} \left[\binom{n_1}{0} \binom{n_2}{a} + \binom{n_1}{a} \binom{n_2}{0} \right] \\ &+ \binom{n_3}{0} \left[\binom{n_1}{1} \binom{n_2}{a} + \binom{n_1}{a} \binom{n_2}{1} \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\binom{n_1+n_2}{1} = \binom{n_1}{0} \binom{n_2}{1} + \binom{n_1}{1} \binom{n_2}{0}$, vale que

$$\begin{aligned} &|E(H_{I', \mathcal{V}'}(n))| - |E(H_{I, \mathcal{V}}(n))| \\ &= n_3 \left[\binom{n_1 + n_2}{a} - \binom{n_1}{0} \binom{n_2}{a} - \binom{n_1}{a} \binom{n_2}{0} \right] - n_1 \binom{n_2}{a} - n_2 \binom{n_1}{a} \\ &\stackrel{a \geq 2}{\equiv} n_3 \sum_{i=1}^{a-1} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{a-i} - n_1 \binom{n_2}{a} - n_2 \binom{n_1}{a}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mostraremos que (3.15) é positivo considerando os casos $a = 2$, $a = 3$ e $a \geq 4$.

No caso em que $a = 2$ temos que (3.15) é igual a

$$n_1 n_2 n_3 - n_1 \binom{n_2}{2} - n_2 \binom{n_1}{2} = n_1 n_2 \left(n_3 - \frac{n_2 - 1}{2} - \frac{n_1 - 1}{2} \right) \stackrel{n_1, n_2 \leq n_3}{>} 0.$$

Para os demais casos utilizaremos a seguinte propriedade válida para quaisquer inteiros $n \geq c \geq 1$

$$\binom{n}{c} = \binom{n}{c-1} \frac{n-c+1}{c}. \quad (3.16)$$

No caso em que $a = 3$ temos que (3.15) é igual a

$$\begin{aligned}
& n_3 n_1 \binom{n_2}{2} + n_3 n_2 \binom{n_1}{2} - n_1 \binom{n_2}{3} - n_2 \binom{n_1}{3} \\
\stackrel{(3.16)}{=} & n_3 n_1 \binom{n_2}{2} - n_1 \binom{n_2}{2} \frac{n_2 - 2}{3} + n_3 n_2 \binom{n_1}{2} - n_2 \binom{n_1}{2} \frac{n_1 - 2}{3} \\
= & n_1 \binom{n_2}{2} \left(n_3 - \frac{n_2 - 2}{3} \right) + n_2 \binom{n_1}{2} \left(n_3 - \frac{n_1 - 2}{3} \right) \stackrel{n_1, n_2 \leq n_3}{>} 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, no caso em que $a \geq 4$, temos que (3.15) é igual a

$$\begin{aligned}
& n_3 \sum_{i=2}^{a-2} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{a-i} + n_3 n_1 \binom{n_2}{a-1} + n_3 n_2 \binom{n_1}{a-1} - n_1 \binom{n_2}{a} - n_2 \binom{n_1}{a} \\
= & n_3 \sum_{i=2}^{a-2} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{a-i} + n_1 \binom{n_2}{a-1} \left(n_3 - \frac{n_2 - a + 1}{a} \right) + \\
& n_2 \binom{n_1}{a-1} \left(n_3 - \frac{n_1 - a + 1}{a} \right) \stackrel{n_1, n_2 \leq n_3}{>} 0.
\end{aligned}$$

Caso 2. Considere uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_\ell\}$ com $|V_i| = n_i$ e $n_1 \leq \dots \leq n_\ell$, e vetor de intersecção $I = (x_1, \dots, x_t, 0^{(\ell-t)})$ com ℓ coordenadas, onde $\ell \geq t+1$ e para todo $i \in [t]$, $x_i \geq 2$ e $x_i \geq 1 + \sqrt{t}$. Considere a partição $\mathcal{V}' = \{V_1 \cup V_2, V_3, \dots, V_\ell\}$ e vetor de intersecção $I' = (x_1, \dots, x_t, 0^{(\ell-t-1)})$ com $\ell - 1$ coordenadas, isto é, um zero foi removido. Sejam P e P' o número de permutações com repetição dos elementos de I e de I' respectivamente. Note que $P = \frac{\ell}{\ell-t} P'$. Nos somatórios abaixo que são sobre uplas, estamos considerando que os elementos das uplas são dois a dois distintos. Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{(\ell-1)!}{P'} |E(H_{I', \mathcal{V}'}(n))| \\
= & \sum_{i \in [t]} \binom{n_1 + n_2}{x_i} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-1}) \\ j_1, \dots, j_{t-1} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} + \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_t) \\ j_1, \dots, j_t \geq 3}} \prod_{p \in [t]} \binom{n_{j_p}}{x_p}
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\ell!}{P} |E(H_{I,\mathcal{V}}(n))| &= \sum_{i \in [t]} \binom{n_1}{x_i} \sum_{q \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_2}{x_q} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-2}) \\ j_1, \dots, j_{t-2} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} + \\ &+ \sum_{i \in [t]} \left[\binom{n_1}{x_i} + \binom{n_2}{x_i} \right] \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-1}) \\ j_1, \dots, j_{t-1} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} + \\ &+ \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_t) \\ j_1, \dots, j_t \geq 3}} \prod_{p \in [t]} \binom{n_{j_p}}{x_p}. \end{aligned}$$

Como,

$$\frac{\frac{\ell!}{P}}{\frac{(\ell-1)!}{P'}} = \frac{\ell!}{P} \frac{P'}{(\ell-1)!} = (\ell - t),$$

para mostrarmos que

$$|E(H_{I,\mathcal{V}}(n))| \leq |E(H_{I',\mathcal{V}'}(n))|$$

basta mostrarmos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [t]} \binom{n_1}{x_i} \sum_{q \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_2}{x_q} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-2}) \\ j_1, \dots, j_{t-2} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} \leq \\ \left[(\ell - t) \sum_{i \in [t]} \binom{n_1 + n_2}{x_i} - \sum_{i \in [t]} \left(\binom{n_1}{x_i} + \binom{n_2}{x_i} \right) \right] \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-1}) \\ j_1, \dots, j_{t-1} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_{j_p}}{x_p}, \end{aligned}$$

o qual vale se

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [t]} \binom{n_1}{x_i} \sum_{q \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_2}{x_q} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-2}) \\ j_1, \dots, j_{t-2} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} \\ \leq \sum_{i \in [t]} \left[(\ell - t) \sum_{q=1}^{x_i-1} \binom{n_1}{q} \binom{n_2}{x_i - q} \right] \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-1}) \\ j_1, \dots, j_{t-1} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_{j_p}}{x_p}. \end{aligned}$$

Ainda, vale que $\binom{n_1}{q} \binom{n_2}{x_i - q} \geq x_i \cdot \binom{n_1}{x_i}$, pois $n_1 \leq n_2$ implica em $[n_1]_q \cdot [n_2]_{x_i - q} \geq [n_1]_{x_i}$, e $q! \cdot (x_i - q)! \leq (x_i - 1)!$ vale, pois para $1 \leq q \leq x_i - 1$, o termo $q! \cdot (x_i - q)!$

é máximo para $q = 1$ ou $q = x_i - 1$. Com isso temos que

$$x_i(x_i - 1) \binom{n_1}{x_i} \leq \sum_{q=1}^{x_i-1} \binom{n_1}{q} \binom{n_2}{x_i - q}.$$

Assim, basta mostrarmos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in [t]} \binom{n_1}{x_i} \sum_{q \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_2}{x_q} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-2}) \\ j_1, \dots, j_{t-2} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} \\ & \leq (\ell - t) \sum_{i \in [t]} x_i(x_i - 1) \binom{n_1}{x_i} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{t-1}) \\ j_1, \dots, j_{t-1} \geq 3}} \prod_{p \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_{j_p}}{x_p}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para cada parcela $\binom{n_1}{x_i} \binom{n_2}{x_q} \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p}$ no lado esquerdo de (3.17) nós queremos encontrar, de maneira injetiva, uma parcela $\binom{n_1}{x_i} \prod_{p \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_{j_p}}{x_p}$ no lado direito de (3.17) que seja pelo menos tão grande quanto a encontrada no lado esquerdo. Para tal nós utilizamos o Teorema de Hall [22]. Então, considere o grafo bipartido que possui conjunto de vértices A e B . Os vértices em A são termos do tipo $\binom{n_1}{x_i} \cdot \binom{n_2}{x_q} \cdot \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p}$, $j_1, \dots, j_{t-2} \geq 3$. Os vértices em B , com multiplicidade $(\ell - t)x_i(x_i - 1)$, são termos do tipo $\binom{n_1}{x_i} \prod_{p \in [t] \setminus \{i\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} = \binom{n_1}{x_i} \binom{n_x}{x_q} \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p}$, onde $n_x \neq n_{j_p}$ para qualquer $p \in [t] \setminus \{i, q\}$, e $j_1, \dots, j_{t-2} \geq 3$ (aqui, n_x faz um papel de reescrever os vértices de B). Cada vértice do tipo $\binom{n_1}{x_i} \binom{n_2}{x_q} \cdot \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p}$ em A é conectado por uma aresta a todos os vértices do tipo $\binom{n_1}{x_i} \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} \cdot \binom{n_x}{x_q}$, onde $n_x \neq n_{j_p}$ para todo $p \in [t] \setminus \{i, q\}$, em B . Note que

$$\binom{n_1}{x_i} \binom{n_2}{x_q} \cdot \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} \leq \binom{n_1}{x_i} \prod_{p \in [t] \setminus \{i, q\}} \binom{n_{j_p}}{x_p} \cdot \binom{n_x}{x_q},$$

pois $n_2 \leq \dots \leq n_\ell$.

Assim, obtemos um grafo bipartido onde vértices de uma mesma classe têm o mesmo grau. Todo vértice em A possui grau $x_i(x_i - 1)(\ell - t)(\ell - t)$, pois B

contém toda parcela $x_i(x_i - 1)(\ell - t)(\ell - t)$ vezes, e todo vértice em B possui grau no máximo $(t - 1)$ (o grau de um vértice em B pode ser maior do que 1 se $x_p = x_q$ para algum $p \in [t] \setminus \{i, q\}$ e se para todo $p \in [t] \setminus \{i, q\}$ valer que $x_p = x_q$, então cada vértice em B possuirá grau $(t - 1)$). Para satisfazer as hipóteses do Teorema de Hall, é preciso que para qualquer conjunto Z de z vértices em A , a vizinhança $N(Z)$ de Z em B contenha pelo menos z vértices. Assim, temos que as hipóteses do Teorema de Hall são satisfeitas se $|N(Z)| \geq |Z|$, ou seja, se

$$\frac{zx_i(x_i - 1)(\ell - t)(\ell - t)}{t - 1} \geq z,$$

o que é equivalente a

$$\frac{x_i(x_i - 1)(\ell - t)(\ell - t)}{t - 1} \geq 1,$$

que vale para todo $\ell \geq t + 1$ se todo x_i satisfizer $x_i \geq 1 + \sqrt{t}$.

Enfim, uma proposta de investigação futura seria a de tentar provar que não existem hipergrafos lineares e Turán-estáveis cujo vetor de intersecção I não pertence a $\mathcal{I}_{\ell, k}^*$.

3.4 Demonstração dos resultados auxiliares

Demonstração do Lema 3.1.5. Uma vez que $I \in \mathcal{I}_{\ell, k}^*$, dividimos a demonstração em dois casos, conforme a definição de $\mathcal{I}_{\ell, k}^*$.

Se, para todo $i \in [\ell]$, vale que $x_i \geq 1$, então seja $\mathcal{U}^* = \{U_1^*, \dots, U_\ell^*\}$ uma partição balanceada de $[n]$. Por simplicidade, consideraremos que $|U_i^*| = n/\ell$ para todo $i \in [\ell]$. Mostraremos que para todo $M > 1$, existe $N = N(M)$ tal que se para algum $j \in [\ell]$, $|U_j| < n/N$, então

$$|E(H_{I, \mathcal{U}}(n))| \leq \frac{1}{M} |E(H_{I, \mathcal{U}^*}(n))|.$$

Seja $\Pi(I)$ o conjunto das permutações com repetição dos elementos de I . Por um lado,

$$|E(H_{I,\mathcal{U}^*}(n))| = |\Pi(I)| \prod_{i=1}^{\ell} \binom{n/\ell}{x_i} \geq |\Pi(I)| \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{n}{\ell}\right)^{x_i} \frac{1}{(x_i)^{x_i}} = \frac{|\Pi(I)|}{\prod_{i=1}^{\ell} (x_i)^{x_i}} \cdot \frac{n^k}{\ell^k}.$$

Por outro lado, considerando $N = M \prod_{i=1}^{\ell} (x_i)^{x_i} \ell^k$, temos que

$$|E(H_{I,\mathcal{U}}(n))| \leq |\Pi(I)| \cdot |U_j| \cdot n^{k-1} < \frac{|\Pi(I)|}{N} n^k \leq \frac{1}{M} \frac{|\Pi(I)|}{\prod_{i=1}^{\ell} (x_i)^{x_i}} \cdot \frac{n^k}{\ell^k}.$$

Logo, escolhendo $M = 2$, temos que para todo $j \in [\ell]$,

$$|U_j| \geq \frac{n}{N} = \frac{n}{M \prod_{i=1}^{\ell} (x_i)^{x_i} \ell^k} \geq \frac{n}{\ell^{\ell^3}}.$$

Assim, $D = 1/(\ell^{\ell^3})$ é a constante desejada.

Se para todo $i \in [\ell]$ vale que $x_i \in \{0, 1\}$, então o resultado segue diretamente do Lema 2.1.5. \square

Demonstração do Lema 3.1.6. Seja n_0 dado pela Definição 1.8.3(b) e considere $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{\ell}\}$ a partição de $[n]$ conforme o enunciado do lema. Considere f a hiperaresta ruim com respeito a I e \mathcal{U} , e seja $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_{\ell}\}$ uma partição de $[n]$ tal que $f \cap U_i \subseteq V_i$ e $H_{I,\mathcal{V}}(n)$ é extremal (como $|f \cap U_i| \leq k$, a existência de \mathcal{V} é garantida pelo Lema 3.1.5 já que $Dn > k$). Por construção, f é uma hiperaresta ruim com respeito a I e \mathcal{V} e, portanto $H_{I,\mathcal{V}}(n) + \{f\}$ contém um sub-hipergrafo \hat{F} isomorfo a F . Seja ρ_i o número de vértices em $V(\hat{F}) \cap (V_i \setminus f)$. Pela definição de $H_{I,\mathcal{U}}(n)$, qualquer escolha S de $n - k$ vértices em $V \setminus f$ tal que $|S \cap U_i| = \rho_i$ induz uma cópia de F em $H_{I,\mathcal{U}}(n) + \{f\}$. Portanto, existem pelo menos

$$\prod_{i=1}^{\ell} \binom{|U_i \setminus f|}{\rho_i} \geq \prod_{i=1}^{\ell} \binom{U - k}{\rho_i} \geq \prod_{i=1}^{\ell} \frac{(U - k - \rho_i)^{\rho_i}}{\rho_i!} \geq \frac{(U - |V(F)|)^{|V(F)| - k}}{|V(F)|!^{\ell}}$$

cópias de F em $H_{I,\mathcal{U}}(n) + \{f\}$. \square

4 HIPERGRAFO EXTREMAL PARA FANO ARCO-ÍRIS

O presente capítulo é dedicado a demonstrar o Teorema 1.8.1. Porém, primeiramente consideramos dois resultados preliminares.

4.1 Resultados Preliminares

O lema a seguir essencialmente afirma que em um hipergrafo 3-uniforme bipartido H , quanto mais próximo seu número de hiperarestas está de $|E(B_n)|$, mais próxima de balanceada deve ser sua partição.

Lema 4.1.1. *Considere o vetor $I = (2, 1)$. Dado $\delta > 0$, existe $n \geq 1/(4\delta)$, tal que se um hipergrafo 3-uniforme $H = (V, E)$ com n vértices admite uma partição $\mathcal{W} = \{W_1, W_2\}$ de V satisfazendo*

$$|E(H_{I, \mathcal{W}}(n)) \cap E(H)| \geq |E(B_n)| - \delta n^3,$$

então vale que

$$\frac{n}{2} - 2n\sqrt{\delta} \leq \min\{|W_1|, |W_2|\} \leq \max\{|W_1|, |W_2|\} \leq \frac{n}{2} + 2n\sqrt{\delta}.$$

A demonstração desse lema encontra-se ao final deste capítulo. O seguinte resultado é uma aplicação do Teorema 1.8.5.

Corolário 4.1.2. *Para todo $\delta > 0$ existe $r_0 = r_0(\delta)$ com a seguinte propriedade. Para todo $r \geq r_0$, existe $n_0 = n_0(r)$ tal que, se $n \geq n_0$ e $H = (V, E)$ é um hipergrafo 3-uniforme com satisfazendo $c_{r, \text{Fano}, P_A}(H) \geq r^{|E(B_n)|}$, então existe uma partição $\mathcal{W} = \{W_1, W_2\}$ tal que $|B_{I, \mathcal{W}}(H)| \leq \delta n^3$, onde $I = (1, 2)$.*

Demonstração. Devido a um resultado obtido por Keevash e Sudakov [32], temos que o hipergrafo Fano é Turán-extremal (Definição 1.8.3) com $\ell = 2$. Pelo Teorema 1.6.3 vale que Fano é Turán-estável. Como $(2, 1) \in \mathcal{I}_{2,3}^*$ e Fano é linear, o Teorema 1.8.5 nos fornece o resultado desejado. \square

A seguinte desigualdade é conhecida e pode ser facilmente verificada.

$$\frac{n^3}{8} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{8} + \frac{1}{4} \leq |E(B_n)| = \text{ex}(n, \text{Fano}) \leq \frac{n^3}{8} - \frac{n^4}{4}. \quad (4.1)$$

4.2 Demonstração do resultado extremal para Fano arco-íris

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 1.8.1. Repetimos seu enunciado.

Teorema 1.8.1. *Existe um inteiro positivo r_0 tal que para todo $r \geq r_0$ vale a seguinte propriedade. Existe um inteiro positivo n_0 para o qual, se $n \geq n_0$, então todo hipergrafo 3-uniforme H com n vértices satisfaz*

$$c_{r, \text{Fano}, P_A}(H) \leq r^{|E(B_n)|}.$$

Além disso, B_n é o único hipergrafo que atinge este máximo.

Para demonstrarmos esse teorema, combinamos as ideias utilizadas em [36], onde o valor de $c_{r, \text{Fano}, P_M}(n)$ foi obtido para $r \in \{2, 3\}$ e n suficientemente grande, e [28], onde o valor de $c_{r, K_{\ell+1}, P_A}(n)$ (grafos) foi obtido para r suficientemente grande em termos de ℓ , e n suficientemente grande em termos de r . No nosso caso, r é suficientemente grande e deve depender da constante δ que vem do Corolário 4.1.2. Isso fez com que diversas adaptações fossem necessárias.

A prova é por contradição, onde mostramos que um hipergrafo $H \neq B_n$ com pelo menos $r^{|B_n|+m}$ r -colorações livres de (Fano, P_A) , onde $m \geq 0$, possui um sub-hipergrafo com mais r -colorações do que seu número de hiperarestas comporta (consideramos que m pode valer zero para garantir a unicidade de B_n). Para chegarmos nesse sub-hipergrafo mostraremos que existe um vértice v (ou uma hiperaresta e) em H onde $H - v$ (ou $H - \{e\}$) possui $r^{|E(B_{n-1})|+m+1}$ (ou $r^{|B_{n-3}|+m+1}$) r -colorações livre de (Fano, P_A) . Assim, aplicando esse argumento sucessivamente, após a remoção de uma certa quantidade de vértices obteremos um hipergrafo com n_0 vértices e $r^{\binom{n_0}{3}+1}$ r -colorações livres de (Fano, P_A) . Primeiramente, se $\delta(H) < \delta(B_n)$, então o sub-hipergrafo desejado H' é obtido de H após a remoção de seu vértice de grau mínimo. Se $\delta(H) \geq \delta(B_n)$, então o Corolário 4.1.2 garante a existência de uma partição $\mathcal{W} = \{W_1, W_2\}$ que admite poucas hiperarestas ruins. Então dividimos em dois casos, dependendo da existência, ou não, de um vértice v com grau grande em sua classe. No primeiro caso, dividimos o conjunto de colorações livres de $(\text{Fano } P_A)$ em dois conjuntos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , onde \mathcal{C}_1 constitui daquelas colorações tais que existem muitos trios (f_1, f_2, f_3) de hiperarestas contendo v colorido no padrão arco-íris. Então, mostramos que \mathcal{C}_1 deve ser pequeno, pois o número de maneiras de colorir as hiperarestas que formam Fano com um desses trios fica restrito. Assim, o conjunto \mathcal{C}_2 deve ser grande. Porém, o número de colorações de \mathcal{C}_2 restritas às hiperarestas que contêm v é pequeno, o que faz com que v seja o vértice desejado. No segundo caso, todo vértice possui grau pequeno dentro de sua classe. Porém, como $H \neq B_n$, ainda existe uma hiperaresta e que é ruim com respeito à partição \mathcal{W} e o vetor $(1, 2)$. Então procuramos por hipergrafos Fano a partir da intersecção entre os links de cada vértice de e .

Demonstração do Teorema 1.8.1. Sejam γ , $\xi = \xi(\gamma)$, $\delta = \delta(\xi)$, $r_0 = r_0(\delta)$ e $r \geq r_0$ números positivos satisfazendo

$$\gamma \leq \frac{1}{2520}, \quad (4.2)$$

$$\xi \leq \min \left\{ \frac{\gamma}{36}, \frac{\gamma^2}{8^2}, \frac{\gamma^3}{16} \right\}, \quad (4.3)$$

$$\delta < \min \left\{ \frac{1}{400^2}, \frac{\gamma}{2 \cdot 18}, \frac{\gamma^2}{4 \cdot 9^2}, \frac{\xi^3}{36} \right\}, \quad (4.4)$$

$$r > \max\{r_0, 21^2\}, \quad (4.5)$$

onde $r_0 = r_0(\delta)$ é dado pelo Corolário 4.1.2. Essas constantes são escolhidas convenientemente para os argumentos a seguir. No início da prova estabelecemos desigualdades envolvendo essas constantes para uso posterior.

De (4.5), vale que

$$r > 20^2 \Rightarrow \log_r 20 - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{\xi^3}{18} \left(\log_r 20 - \frac{1}{2} \right) < 0. \quad (4.6)$$

Ainda, de (4.2) e (4.5), temos que

$$-5\gamma + \frac{1}{6} \left[\frac{2 - 240\gamma}{80} \right] (1 - \log_r 21) > 0, \quad (4.7)$$

pois $r > 21^2$ implica que $(1 - \log_r 21) > 1/2$ e $\gamma \leq 1/2520$ implica que

$$-5\gamma + \frac{1}{6} \left[\frac{2 - 240\gamma}{80} \right] \frac{1}{2} \geq 0.$$

Além disso, afirmamos que

$$(\log_r 2) \left(2h(4\sqrt{\xi}) - 8\sqrt{\xi} + \frac{3}{4} \right) + 8\sqrt{\xi} + \frac{1}{4} \leq \frac{35}{100}. \quad (4.8)$$

Isso ocorre pois a derivada da função

$$f(x) = (\log_r 2) \left(2h(x) - 2x + \frac{3}{4} \right) + 2x + \frac{1}{4}$$

satisfaz

$$f'(x) = \frac{1}{\ln r} \left(2 \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) + 2 \ln 2 \right) + 2,$$

que é positiva para $0 < x \leq 1/2$. Assim, $f(x)$ é crescente em $(0, 1/2]$. Como $\xi \leq \gamma^3/16 \leq 1/(2520^3 \cdot 16)$, podemos obter (4.8), fixando $x = (1/2520)^{3/2} \geq 4\sqrt{\xi}$, isto é,

$$\begin{aligned} f((1/2520)^{3/2}) &\leq (\log_r 2)(2 \cdot 0.001 - 2(1/2520)^{3/2} + 3/4) + 2(1/2520)^{3/2} + 1/4, \\ &\leq (\log_r 2)0.76 + 0.26, \end{aligned}$$

que é menor do que $35/100$ para $r \geq 21^2$.

Considere $n_0 = n_0(r)$ dado pelo Corolário 4.1.2 para o valor de r fixado em (4.5) e seja $n_r \geq n_0 + \binom{n_0}{3}$. Considere $n \geq n_r$ grande o suficiente para que (4.11), (4.12), (4.14), (4.15), (4.16), (4.18) e (4.19) sejam válidas (tais desigualdades estão sinalizadas com $n \gg 0$). Suponha que $H \neq B_n$ é um hipergrafo com $n \geq n_r$ vértices satisfazendo $c_{r, \text{Fano}, P_A}(H) \geq r^{|E(B_n)|+m}$ para algum $m \geq 0$. Provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação 4.2.2. *Se $H \neq B_n$ é um hipergrafo 3-uniforme satisfazendo*

$$c_{r, \text{Fano}, P_A}(H) \geq r^{|E(B_n)|+m},$$

para algum $m \geq 0$, então existe um sub-hipergrafo induzido H' de H com $n' \geq n-3$ vértices satisfazendo $c_{r, \text{Fano}, P_A}(H') \geq r^{|E(B_{n'})|+m+1}$.

A Afirmação 4.2.2 implica que indutivamente, podemos obter um sub-hipergrafo H_0 com n_0 vértices que satisfaz $c_{r, \text{Fano}, P_A}(H_0) \geq r^{\binom{n_0}{3}+1}$, e tal número é maior do que o número de colorações que poderia ser obtido podendo colorir livremente todas as hiperarestas do hipergrafo completo 3-uniforme com n_0 vértices, o que é uma contradição.

Para demonstrarmos a Afirmação 4.2.2, seja $H \neq B_n$ um hipergrafo 3-uniforme com n vértices e com pelo menos $r^{|E(B_n)|+m}$ r -colorações livres de

(Fano, P_A), onde $m \geq 0$. Como B_n pode ser colorido livremente, temos que $|E(H)| \geq |E(B_n)|$. Seja $\delta(H)$ o grau mínimo de H . Se $\delta(H) < \delta(B_n)$, seja v o vértice de grau mínimo em H e considere o sub-hipergrafo $H' = H - v$. Como

$$|E(B_{n-1})| = |E(B_n)| - \delta(B_n) \leq |E(B_n)| - \delta(H) - 1,$$

vale que o número de r -colorações livres de (Fano, P_A) de H' é pelo menos

$$\frac{r^{|E(B_n)|+m}}{r^{\delta(H)}} = r^{|E(B_n)|+m-\delta(H)} \geq r^{|E(B_{n-1})|+m+1},$$

tal como desejado. Portanto, vamos supor que $\delta(H) \geq \delta(B_n) \geq 3n^2/8 - n$. Considere, para o vetor $I = (1, 2)$, uma partição de $\mathcal{W} = \{W_1, W_2\}$ de $V(H)$ que minimiza $|B_{I,\mathcal{W}}(H)|$. Pelo Corolário 4.1.2, vale que $|B_{I,\mathcal{W}}(H)| \leq \delta n^3$, e portanto vale que

$$|E(H)| = |E(H) \setminus B_{I,\mathcal{W}}(H)| + |B_{I,\mathcal{W}}(H)| \leq |E(B_n)| + \delta n^3. \quad (4.9)$$

De $|E(H)| \geq |E(B_n)|$ obtemos que

$$|E(H) \setminus B_{I,\mathcal{W}}(H)| + |B_{I,\mathcal{W}}(H)| \geq |E(B_n)|,$$

o que implica que

$$|E(H) \setminus B_{I,\mathcal{W}}(H)| \geq |E(B_n)| - \delta n^3 \geq \frac{n^3}{8} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{8} + \frac{1}{4} - \delta n^3.$$

Pelo Lema 4.1.1 temos que

$$n/2 - 2\sqrt{\delta}n \leq \min\{|W_1|, |W_2|\} \leq \max\{|W_1|, |W_2|\} \leq n/2 + 2\sqrt{\delta}n. \quad (4.10)$$

Dado um vértice $v \in V(H)$, definimos seu *grafo link* $\mathcal{L}(v)$ com conjunto de vértices $V(H) \setminus \{v\}$ e conjunto de arestas $L(v) = \{\{u, w\}: \{v, u, w\} \in E(H)\}$. Consideramos dois casos.

Caso 1. Existe um vértice $v \in V(H)$, sem perda de generalidade $v \in W_2$, tal que $|L(v) \cap \binom{W_2}{2}| \geq \gamma n^2$.

A minimalidade de $|B_{I,\mathcal{W}}(H)|$ garante que $|L(v) \cap \binom{W_1}{2}| \geq \gamma n^2$, caso contrário diminuiríamos o valor $|B_{I,\mathcal{W}}(H)|$ movendo v para W_1 .

Para qualquer conjunto de vértices $W \subseteq V(H)$, dizemos que $e \in E(H)$ é uma hiperaresta de v a W se $v \in e$ e $e \setminus \{v\} \subseteq W$. Ainda, em uma coloração de H que é livre de (Fano, P_A) , uma cor α é definida como *abundante* com respeito a um vértice v e uma classe W_z , $z \in [2]$, quando o conjunto de hiperarestas de v a W_z que assumem cor α contém um emparelhamento de tamanho ξn , caso contrário a cor é dita *rara* com respeito a W_z .

Dados uma coloração livre de (Fano, P_A) de H e $z \in [2]$, seja A_z o conjunto de cores abundantes com respeito ao vértice v e à classe W_z , e seja J_z o conjunto de arestas g em $L(v) \cap \binom{W_z}{2}$ cuja cor de $g \cup \{v\}$ não pertence a $A_1 \cup A_2$.

Nós dividimos o conjunto \mathcal{C} de r -colorações livres de (Fano, P_A) em duas classes disjuntas \mathcal{C}_1 e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$. A ideia dessa divisão de \mathcal{C} em classes é a de considerar em \mathcal{C}_1 as colorações de \mathcal{C} tais que existem muitas maneiras de encontrarmos uma cópia F de Fano onde $v \in V(F)$ e as três hiperarestas de F que contêm v estão coloridas duas a duas com cores distintas. Assim, seja \mathcal{C}_1 o conjunto das colorações tais que

$$(a) |A_1 \cup A_2| \notin \{1, 2\}$$

ou

$$(b) |J_z| \geq 4\sqrt{\xi}n^2, \text{ para algum } z \in [2].$$

Seja $\mathcal{T}(v)$ o conjunto de todos os trios (f_1, f_2, f_3) para os quais $f_1 \in L(v) \cap \binom{W_1}{2}$, $f_2 \in L(v) \cap \binom{W_2}{2}$, $f_3 \in L(v) \cap \binom{W_z}{2}$, com $z \in [2]$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ é um emparelhamento. Toda coloração das hiperarestas que contêm v induz naturalmente uma coloração de $\mathcal{L}(v)$. Portanto, sempre que tivermos uma coloração das hiperarestas incidentes a v , trataremos dessa como sendo uma coloração de $\mathcal{L}(v)$.

Afirmção 4.2.3. *Em toda coloração de \mathcal{C}_1 , o número de trios 3-coloridos em $\mathcal{T}(v)$ é pelo menos $\xi^3 n^3 / 9$.*

Demonstração. Considere uma coloração de \mathcal{C}_1 . Dividimos a demonstração em três casos relacionados à cardinalidade de $|A_1 \cup A_2|$.

Caso 1. $|A_1 \cup A_2| \geq 3$. Sem perda de generalidade, suponha que $|A_1| \geq |A_2|$, o que implica em $|A_1| \geq 2$. Consideramos dois subcasos.

Primeiramente, suponha que $A_2 \neq \emptyset$, de forma que existem três cores distintas $\alpha_1, \alpha_2 \in A_1$ e $\alpha_3 \in A_2$, o que implica na existência de emparelhamentos M_1, M_2, M_3 , disjuntos por vértices, tais que toda aresta em M_i possui cor α_i , $i \in [3]$ e $|M_1| \geq \xi n / 3$, $|M_2| \geq \xi n / 3$, $|M_3| \geq \xi n$. Para obter M_1 e M_2 , note que cada uma das $\xi n / 3$ arestas de cor α_1 escolhidas para construir M_1 elimina a escolha de no máximo duas arestas de cor α_2 para a construção de M_2 (pois queremos $V(M_1) \cap V(M_2) = \emptyset$), restando assim pelo menos $\xi n - 2 \cdot \xi n / 3 = \xi n / 3$ arestas para construir M_2 . Portanto, tomando uma aresta de cada emparelhamento obtemos pelo menos

$$\left(\frac{\xi n}{3}\right)^2 \xi n = \frac{\xi^3 n^3}{9}$$

trios 3-coloridos (f_1, f_2, f_3) .

Se $A_2 = \emptyset$, então considere cores $\alpha_1, \alpha_2 \in A_1$ com emparelhamentos M_1, M_2 disjuntos por vértices de tamanhos $|M_1| \geq \xi n / 3$, $|M_2| \geq \xi n / 3$. Como $A_2 = \emptyset$, existem no máximo $2\xi n$ arestas de $L(v) \cap \binom{W_2}{2}$ assumindo cor α_1 ou

α_2 . Assim, o número de arestas em $L(v) \cap \binom{W_2}{2}$ de cor rara não pertencente a $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ é pelo menos

$$\left| L(v) \cap \binom{W_2}{2} \right| - 2\xi n \cdot 2|W_2| \geq \gamma n^2 - 4\xi n^2 \stackrel{(4.3)}{\geq} \frac{\gamma n^2}{2}.$$

Logo, existe um emparelhamento M_3 nesse conjunto de tamanho pelo menos

$$\frac{\gamma n^2/2}{2|W_2|} \stackrel{(4.10)}{\geq} \frac{\gamma n^2}{4 \left(\frac{n}{2} + 2n\sqrt{\delta} \right)} \stackrel{(4.4)}{\geq} \frac{\gamma n}{4}.$$

O motivo de dividirmos por $2|W_2|$ no lado esquerdo da desigualdade acima é para garantir que M_3 seja um emparelhamento. Cada aresta escolhida tem vértice em comum com no máximo $2|W_2|$ de $L(v) \cap \binom{W_2}{2}$. Escolhendo arestas de $M_1 \times M_2 \times M_3$, obtemos pelo menos

$$\left(\frac{\xi n}{3} \right)^2 \cdot \frac{\gamma n}{4} \stackrel{(4.3)}{\geq} \xi^3 n^3 \geq \frac{\xi^3 n^3}{9}$$

trios 3-coloridos (f_1, f_2, f_3) .

Caso 2. $|A_1 \cup A_2| = 0$. Nesse caso, para qualquer cor $i \in [r]$, o tamanho de um emparelhamento de cor i em W_1 ou W_2 é no máximo ξn . Com a construção gulosa do caso anterior, obtemos que ambos W_1 e W_2 contêm um emparelhamento de tamanho pelo menos

$$\frac{\min\{|L(v) \cap \binom{W_1}{2}|, |L(v) \cap \binom{W_2}{2}|\}}{2 \max\{|W_1|, |W_2|\}} \stackrel{(4.10)}{\geq} \frac{\gamma n^2}{2 \left(\frac{n}{2} + 2n\sqrt{\delta} \right)} \stackrel{(4.4)}{\geq} \frac{\gamma n}{2}.$$

Fixe emparelhamentos M_1 em W_1 e M_2 em W_2 tais que

$$\frac{\gamma n}{2} \leq \min\{|M_1|, |M_2|\} \leq \max\{|M_1|, |M_2|\} \leq \frac{n}{2}.$$

Para toda cor $i \in [r]$, seja c_i o número de arestas assumindo cor i em M_1 e d_i o número de arestas assumindo cor i em M_2 . Note que $c_i, d_i \leq \xi n$, e note também que $\sum_{i=1}^r c_i \leq n/2$ e $\sum_{i=1}^r d_i \leq n/2$.

O número de escolhas de trios (f_1, f_2, f_3) com no máximo duas cores, onde $f_1 \in M_1$, $f_2 \in M_2$ e $f_3 \in M_1 \cup M_2$, é no máximo

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^r c_i d_i (|M_1| + |M_2|) + \sum_{i=1}^r c_i^2 |M_2| + \sum_{i=1}^r d_i^2 |M_1| \\
& \leq \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\right) \sum_{i=1}^r c_i d_i + \frac{n}{2} \sum_{i=1}^r c_i^2 + \frac{n}{2} \sum_{i=1}^r d_i^2 \\
& \stackrel{c_i, d_i \leq \xi n}{\leq} \xi n^2 \sum_{i=1}^r c_i + \frac{\xi n^2}{2} \sum_{i=1}^r c_i + \frac{\xi n^2}{2} \sum_{i=1}^r d_i \\
& \leq \frac{\xi n^3}{2} + \frac{\xi n^3}{4} + \frac{\xi n^3}{4} = \xi n^3.
\end{aligned}$$

Consequentemente, o número de escolhas de trios 3-coloridos (f_1, f_2, f_3) é pelo menos

$$\left(\frac{\gamma n}{2}\right)^3 - \xi n^3 = \frac{\gamma^3 n^3}{8} - \xi n^3 \stackrel{(4.3)}{\geq} \frac{\gamma^3 n^3}{16} \stackrel{(4.3)}{\geq} \frac{\xi^3 n^3}{9}.$$

Note que tais trios são emparelhamentos, pois $(f_1, f_2, f_3) \in M_1 \times M_2 \times (M_1 \cup M_2)$.

Caso 3. $|A_1 \cup A_2| \in \{1, 2\}$, e para algum $z \in [2]$, $|J_z| \geq 4\sqrt{\xi}n^2$. Sem perda de generalidade, assuma que $z = 2$, de forma que $|J_2| \geq 4\sqrt{\xi}n^2 \geq 3\sqrt{\xi}n^2 + 3n/2$. Então, existe um emparelhamento M em J_2 de tamanho pelo menos

$$\frac{3\sqrt{\xi}n^2 + \frac{3n}{2}}{2|W_2|} \geq \frac{3\sqrt{\xi}n^2 + \frac{3n}{2}}{\frac{3n}{2}} = 2\sqrt{\xi}n + 1,$$

de forma que o número de pares mutuamente disjuntos em J_2 é pelo menos

$$\binom{2\sqrt{\xi}n + 1}{2} \geq \frac{(2\sqrt{\xi}n)^2}{2} = 2\xi n^2.$$

Para toda cor $i \in [r]$, seja d_i o número de arestas assumindo cor i nesse emparelhamento M . Uma vez que o número de pares em J_2 (portanto em M) com a mesma cor satisfaz

$$\sum_{i=1}^r d_i^2 \leq \xi n \sum_{i=1}^r d_i \leq \frac{\xi n^2}{2},$$

temos que o conjunto J de pares de arestas arco-íris em M possui tamanho pelo menos

$$2\xi n^2 - \frac{\xi n^2}{2} \geq \xi n^2.$$

Se existe uma cor $\alpha \in A_1$, então existe um emparelhamento M de tamanho $|M| \geq \xi n$ em W_1 para o qual toda aresta em M assume cor α . Tomando uma aresta de M e um par de arestas de J , obtemos que o número de trios 3-coloridos (f_1, f_2, f_3) é pelo menos

$$\xi n \cdot \xi n^2 = \xi^2 n^3 \geq \frac{\xi^3 n^3}{9}.$$

Se $A_1 = \emptyset$, então $|A_2| \geq 1$. Seja $\alpha \in A_2$, e seja M um emparelhamento de tamanho $|M| \geq \xi n$ em W_2 para o qual toda aresta em M assume cor α . Uma vez que $A_1 = \emptyset$, e $\xi \leq \min\{\gamma^2/(8^2), \gamma/4\}$, existem pelo menos

$$\left| L(v) \cap \binom{W_1}{2} \right| - \xi n \cdot 2|W_1| \geq \gamma n^2 - 2\xi n^2 \stackrel{(4.3)}{\geq} \frac{\gamma n^2}{2} \stackrel{(4.3)}{\geq} 4\sqrt{\xi} n^2.$$

arestas em W_1 assumindo cor rara com relação a W_1 e diferente de α . Assim, como no caso anterior, obtemos pelo menos ξn^2 pares de arestas mutuamente disjuntos por vértice em W_1 assumindo cores diferentes entre si e diferentes de α . Escolhendo um desses pares com uma aresta em M , obtemos pelo menos

$$\xi n^2 \cdot \xi n \geq \frac{\xi^3 n^3}{9}$$

trios 3-coloridos (f_1, f_2, f_3) . □

Agora, provaremos que $|\mathcal{C}_1| \leq r^{|E(B_n)|-1}$. Para qualquer trio (f_1, f_2, f_3) em $\mathcal{T}(v)$, sejam $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \binom{V}{3}$ quatro 3-conjuntos (que não necessariamente são hiperarestas de H) tais que $\{\{v\} \cup f_i : i = 1, 2, 3\} \cup \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ forma uma cópia de Fano. A figura abaixo ilustra tal procedimento, onde os vértices pretos pertencem a W_1 , os vértices brancos pertencem a W_2 e as arestas f_1, f_2, f_3 estão destacadas.

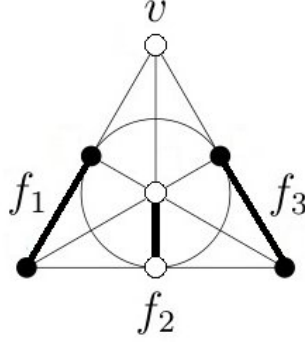


Figura 4.1: Plano de Fano particionado.

Note que cada 3-conjunto em $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ contém precisamente um vértice de f_1 , um de f_2 e um de f_3 , sendo que $f_3 \subseteq W_z$, $z \in [2]$ (na figura acima temos $z = 1$), $f_1 \subseteq W_1$ e $f_2 \subseteq W_2$. (De fato, existem duas uplas distintas de quatro 3-conjuntos t_1, t_2, t_3, t_4 com essa propriedade para quaisquer f_1, f_2, f_3 e nós fixamos apenas uma dessas uplas.) Além disso, note que para duas escolhas distintas f_1, f_2, f_3 e f'_1, f'_2, f'_3 , uma vez que $\{f_1, f_2, f_3\}$ e $\{f'_1, f'_2, f'_3\}$ são emparelhamentos, os conjuntos correspondentes $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ e $\{t'_1, t'_2, t'_3, t'_4\}$ são disjuntos. Fixe uma r -coloração das hiperarestas incidentes a v . Da Afirmação 4.2.3, obtemos que a coloração de $\mathcal{L}(v)$ induzida por essa coloração admite pelo menos $\xi^3 n^3 / 9$ trios 3-coloridos de $\mathcal{T}(v)$. Fixe um desses trios 3-coloridos (f_1, f_2, f_3) . Como $\{v\} \cup f_i$ estão coloridos com cores diferentes, para evitar cópia arco-íris de Fano em H , ou um dos 3-conjuntos t_i não é hiperaresta de H , ou existem no máximo $Q = 3 \cdot 4 \cdot r^3 + \binom{4}{2} r^3 = 18r^3$ maneiras de estender essa coloração a t_1, t_2, t_3, t_4 . Seja $T = T(v)$ a família de todas as 4-uplas (t_1, t_2, t_3, t_4) em H que formam Fano com algum trio (f_1, f_2, f_3) de $\mathcal{T}(v)$. Pelo fato de que existem no máximo

$$\delta n^3 \stackrel{(4.4)}{\leq} \xi^3 n^3 / 36$$

hiperarestas que interceptam ambas as classes W_1 e W_2 e não são hiperarestas de H , existem pelo menos

$$|T| \geq \frac{\xi^3 n^3}{9} - 2\delta n^3 \stackrel{(4.4)}{\geq} \frac{\xi^3 n^3}{9} - \frac{\xi^3 n^3}{18} = \frac{\xi^3 n^3}{18}$$

hipergrafos Fano dois a dois disjuntos de hiperarestas em H . Para obtermos uma cota superior para $|\mathcal{C}_1|$, perceba que existem no máximo $r^{|L(v)|}$ maneiras de colorir as hiperarestas incidentes a v e que existem no máximo $Q^{|T|}$ maneiras de colorir os hipergrafos Fano em H que contêm algum trio 3-colorido (f_1, f_2, f_3) de $\mathcal{T}(v)$. Por fim, existem no máximo $r^{|E(H)|-4|T|-|L(v)|}$ maneiras de colorir as hiperarestas restantes de H . Com isso,

$$|\mathcal{C}_1| \leq r^{|L(v)|} Q^{|T|} r^{|E(H)|-4|T|-|L(v)|} \leq (18r^3)^{|T|} r^{|E(H)|-4|T|}.$$

Note que o lado direito dessa desigualdade cresce à medida que $|T|$ decresce. Uma vez que $|T| \geq \xi^3 n^3 / 18$, vale que

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_1| &\leq (18r^3)^{\xi^3 n^3 / 18} r^{|E(H)|-4\xi^3 n^3 / 18} \\ &\stackrel{(4.9)}{\leq} 18^{\xi^3 n^3 / 18} r^{n^2} r^{|E(B_n)|+\delta n^3-\xi^3 n^3 / 18} \\ &\stackrel{n \gg 0}{\leq} 20^{\xi^3 n^3 / 18} r^{|E(B_n)|+\delta n^3-\xi^3 n^3 / 18} \\ &\stackrel{(4.4)}{\leq} 20^{\xi^3 n^3 / 18} \cdot r^{|E(B_n)|+\xi^3 n^3 / 36-\xi^3 n^3 / 18} \\ &= (r^{\log_r 20})^{\xi^3 n^3 / 18} r^{|E(B_n)|-\xi^3 n^3 / 36} \\ &= r^{|E(B_n)|+\frac{\xi^3}{18}(\log_r 20-\frac{1}{2})n^3} \\ &\stackrel{(4.6), n \gg 0}{\leq} r^{|E(B_n)|-1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora, lidaremos com a classe $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$ das colorações de \mathcal{C} que satisfazem $|A_1 \cup A_2| \in \{1, 2\}$ e $|J_z| < 4\sqrt{\xi}n^2$ para qualquer $z \in [2]$. Pela nossa cota para $|\mathcal{C}_1|$, temos que

$$|\mathcal{C}_2| = |\mathcal{C}| - |\mathcal{C}_1| \geq r^{|E(B_n)|+m} - r^{|E(B_n)|-1} \geq r^{|E(B_n)|+m-1}. \tag{4.13}$$

Calcularemos uma cota superior para o número de colorações das hiperarestas incidentes a v que podem ser estendidas a uma coloração de \mathcal{C}_2 .

Pela definição de \mathcal{C}_2 , em toda classe, existem no máximo $4\sqrt{\xi}n^2$ arestas assumindo cores que são raras com respeito a ambas as classes. Primeiramente, escolhemos, de no máximo r^2 maneiras, no máximo duas cores para serem abundantes com respeito a alguma classe. Em qualquer classe, existem no máximo $\binom{n^2}{4\sqrt{\xi}n^2}$ maneiras de escolher hiperarestas assumindo cores que são raras com respeito a ambas as classes. Existem no máximo $r^{2 \cdot 4\sqrt{\xi}n^2}$ maneiras de colorir essas hiperarestas. Temos no máximo $r^{|W_1||W_2|}$ maneiras de colorir hiperarestas contendo v e um vértice de cada classe. Por fim, qualquer outra hiperaresta contendo v deve assumir uma cor que é abundante com respeito a alguma classe, de forma que temos no máximo $2^{|L(v)|-2 \cdot 4\sqrt{\xi}n^2-|W_1||W_2|}$ maneiras de colorir as hiperarestas restantes de $L(v)$. Com isso, o número de colorações das hiperarestas incidentes a v que podem ser estendidas a uma coloração de \mathcal{C}_2 é, para n suficientemente grande, no máximo

$$\begin{aligned}
& r^2 \left(\frac{n^2}{4\sqrt{\xi}n^2} \right)^2 r^{2 \cdot 4\sqrt{\xi}n^2} r^{|W_1||W_2|} 2^{|L(v)|-2 \cdot 4\sqrt{\xi}n^2-|W_1||W_2|} \\
(3.1) \quad & \leq 2^{2h(4\sqrt{\xi})n^2+|L(v)|-8\sqrt{\xi}n^2-|W_1||W_2|} r^{8\sqrt{\xi}n^2+|W_1||W_2|+2} \\
& = r^{(\log_r 2)(2h(4\sqrt{\xi})n^2+|L(v)|-8\sqrt{\xi}n^2-|W_1||W_2|)+8\sqrt{\xi}n^2+|W_1||W_2|+2} \\
& \stackrel{|L(v)| \leq n^2}{\leq} r^{(\log_r 2)(2h(4\sqrt{\xi})n^2+n^2-8\sqrt{\xi}n^2-|W_1||W_2|)+8\sqrt{\xi}n^2+|W_1||W_2|+2} \\
& = r^{(\log_r 2)(2h(4\sqrt{\xi})n^2+n^2-8\sqrt{\xi}n^2)+8\sqrt{\xi}n^2+(1-\log_r 2)|W_1||W_2|+2} \\
& \stackrel{|W_1||W_2| \leq n^2/4}{\leq} r^{(\log_r 2)(2h(4\sqrt{\xi})n^2+n^2-8\sqrt{\xi}n^2)+8\sqrt{\xi}n^2+(1-\log_r 2)\frac{n^2}{4}+2} \\
& = r^{[(\log_r 2)(2h(4\sqrt{\xi})-8\sqrt{\xi}+\frac{3}{4})+8\sqrt{\xi}+\frac{1}{4}]n^2+2} \\
(4.8) \quad & \leq r^{\frac{35}{100}n^2+2} \\
& \stackrel{n \gg 0}{\leq} r^{\frac{36}{100}n^2}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Considerando $H' = H - v$, obtemos que o número de r -colorações de H' livres de (Fano, P_A) é pelo menos

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathcal{C}_2|}{r^{\frac{36}{100}n^2}} &\geq \frac{r^{|E(B_n)|+m-1}}{r^{\frac{36}{100}n^2}} = r^{|E(B_n)|+m-1-\frac{36}{100}n^2}. \\
\stackrel{n \gg 0}{\geq} &r^{|E(B_n)|+m-1-\frac{3n^2}{8}+n-\frac{5}{8}+2} \\
\stackrel{(4.1)}{\geq} &r^{|E(B_n)|+m-|E(B_n)|+|E(B_{n-1})|+1} \\
&= r^{|E(B_{n-1})|+m+1},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

o que conclui a demonstração da Afirmação 4.2.2 para hipergrafos H que satisfazem as hipóteses do Caso 1.

Caso 2. Para quaisquer $z \in [2]$ e $v \in W_z$, vale que $|L(v) \cap \binom{W_z}{2}| \leq \gamma n^2$.

Como $H \neq B_n$, existe uma hiperaresta $e = \{v_1, v_2, v_3\}$ com todos os vértices na mesma classe. Sem perda de generalidade, suponha que $e \subseteq W_2$. Seja \mathcal{L} o grafo com conjunto de vértices $V(\mathcal{L}) = V(H)$ e conjunto de arestas $L = \bigcap_{i=1}^3 L(v_i) \cap \binom{W_1}{2}$. Note que o número $|L|$ de arestas em \mathcal{L} é pelo menos $\binom{|W_1|}{2}$ menos o número de pares de vértices em W_1 que não formam uma hiperaresta com v_i , para $i \in [3]$. Como $|L(v_i) \cap \binom{W_2}{2}| \leq \gamma n^2$ e $\delta(H) \geq \delta(B_n) \geq 3n^2/8 - n$, temos que

$$\left| L(v_i) \cap \binom{W_1}{2} \right| \geq 3n^2/8 - n - \gamma n^2 - |W_1||W_2|.$$

Portanto no máximo

$$\binom{|W_1|}{2} - 3n^2/8 + \gamma n^2 + |W_1||W_2| + n$$

elementos de $\binom{W_1}{2}$ não formam hiperaresta com v_i , o que nos garante que

$$\begin{aligned}
|L| &\geq \binom{|W_1|}{2} - 3 \left(\binom{|W_1|}{2} - 3n^2/8 + \gamma n^2 + |W_1||W_2| + n \right) \\
&= \frac{9}{8}n^2 - 2 \binom{|W_1|}{2} - 3|W_1||W_2| - 3\gamma n^2 - 3n \\
&\geq \frac{9}{8}n^2 - |W_1|^2 - 3|W_1||W_2| - 3\gamma n^2 - 3n.
\end{aligned}$$

Afirmação 4.2.4. *Existem pelo menos*

$$\frac{1}{6} \left[\frac{2 - 240\gamma}{80} \right] n^2$$

cópias duas a duas disjuntas por aresta do grafo completo K_4 em \mathcal{L} .

Demonstração. Pelo Teorema de Turán, um grafo com $|W_1|$ vértices e mais do que

$$\binom{3}{2} \left(\frac{|W_1|}{3} \right)^2 = \frac{|W_1|^2}{3}$$

arestas contém uma cópia de K_4 . Por esse motivo, se $|L| > |W_1|^2/3$, então existe uma cópia de K_4 em \mathcal{L} . Removendo as seis arestas dessa cópia de K_4 , se $|L| - 6$ ainda é maior do que $|W_1|^2/3$, então existe uma outra cópia de K_4 em \mathcal{L} que é disjunta por arestas da primeira, e mantendo esse raciocínio nós encontramos pelo menos

$$\frac{1}{6} \left[|L| - \frac{|W_1|^2}{3} \right] \geq \frac{1}{6} \left[\frac{9}{8}n^2 - |W_1|^2 - 3|W_1||W_2| - 3\gamma n^2 - 3n - \frac{|W_1|^2}{3} \right]$$

grafos completos K_4 mutuamente disjuntos por arestas em \mathcal{L} .

Como $|W_1| + |W_2| = n$ e (4.10) vale, temos que $4|W_1|^2/3 + 3|W_1||W_2|$ é mínimo para $|W_1| = n/2 + 2\sqrt{\delta}n$ e $|W_2| = n/2 - 2\sqrt{\delta}n$, ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}|W_1|^2 + 3|W_1||W_2| + 3n \\ \stackrel{n \gg 0}{\leq} & \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{\delta} \right)^2 + 3 \left(\frac{1}{4} - 4\delta \right) \right] n^2 + 3n \stackrel{\delta < 1/400^2}{\leq} \frac{11}{10}n^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Assim, existem pelo menos

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left[|L| - \frac{|W_1|^2}{3} \right] & \geq \frac{1}{6} \left[\frac{9}{8} - \frac{11}{10} - 3\gamma \right] n^2 \\ & = \frac{1}{6} \left[\frac{2 - 240\gamma}{80} \right] n^2 \end{aligned}$$

cópias duas a duas disjuntas por aresta de grafos completos K_4 em \mathcal{L} . □

Sejam K^1, \dots, K^q as cópias duas a duas disjuntas por aresta dos grafos K_4 em \mathcal{L} da Afirmação 4.2.4 onde

$$q \geq \frac{1}{6} \left\lceil \frac{2 - 240\gamma}{80} \right\rceil n^2. \quad (4.17)$$

Já que $E(K^j) \subseteq L$ para todo $j \in [q]$, Cada K^j forma uma cópia de Fano com a hiperaresta e (ver figura abaixo).

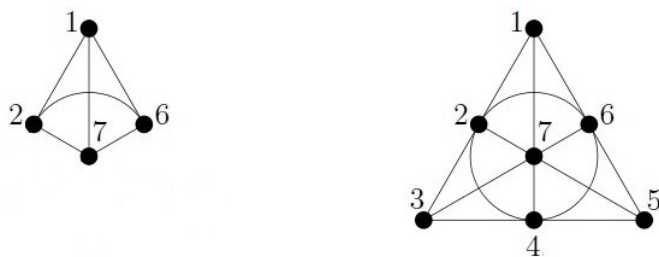


Figura 4.2: Gerando Fano a partir do K_4 , onde $e = \{3, 4, 5\}$.

Por simplicidade, considere que cada coloração das arestas do K_4 induz naturalmente uma coloração de Fano. Fixando uma cor para e , e evitando cópias arco-íris de Fano em H , podemos colorir as seis hiperarestas que correspondem às arestas de K^j de no máximo $6r^5 + \binom{6}{2}rr^4 = 21r^5$ maneiras.

Considere $H' = H - \{e\}$. Seja E_e o conjunto de hiperarestas de H que contêm pelo menos um vértice de $e = \{v_1, v_2, v_3\}$. Obviamente, $|E_e| \leq 3\gamma n^2 + 3\binom{|W_1|}{2} + 3|W_1||W_2|$. Pelas nossas hipóteses de que $|B_{I,W}(H)| \leq \delta n^3$ e $|E(H)| \geq |E(B_n)|$, vale, para n suficientemente grande, que

$$\begin{aligned} |E_e| &\leq 3\binom{|W_1|}{2} + 3|W_1||W_2| + 3\gamma n^2 \\ &\stackrel{(4.10)}{\leq} \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{\delta} \right)^2 n^2 + 3\gamma n^2. \end{aligned}$$

Porém, isso é igual a

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8}n^2 + (9\sqrt{\delta} + 18\delta)n^2 + 3\gamma n^2 \\
\stackrel{(4.4)}{\leq} & \frac{9}{8}n^2 + 4\gamma n^2 \\
\stackrel{n \gg 0}{\leq} & \left(\frac{3}{8}n^2 - n \right) + \left(\frac{3}{8}(n-1)^2 - (n-1) \right) \\
& + \left(\frac{3}{8}(n-2)^2 - (n-2) \right) + 5\gamma n^2 \tag{4.18} \\
\stackrel{\delta(B_n) \geq 3n^2/8-n}{\leq} & \delta(B_n) + \delta(B_{n-1}) + \delta(B_{n-2}) + 5\gamma n^2 \\
= & |E(B_n)| - |E(B_{n-3})| + 5\gamma n^2,
\end{aligned}$$

o que implica em

$$|E(B_n)| - |E_e| \geq |E(B_{n-3})| - 5\gamma n^2.$$

As hiperarestas de E_e podem ser coloridas de no máximo

$$r^{|E_e|} \left(\frac{21r^5}{r^6} \right)^q = 21^q r^{|E_e|-q}$$

maneiras.

Consequentemente, o número de r -colorações de H' livres de (Fano, P_A) , para n suficientemente grande, vale pelo menos

$$\begin{aligned}
\frac{r^{|E(B_n)|+m}}{21^q r^{|E_e|-q}} &= 21^{-q} r^{|E(B_n)|+m-|E_e|+q} \geq r^{|E(B_{n-3})|+m-5\gamma n^2+q(1-\log_r 21)} \\
&\stackrel{(4.17)}{\geq} r^{|E(B_{n-3})|+m-5\gamma n^2+\frac{1}{6}\lceil\frac{2-240\gamma}{80}\rceil n^2(1-\log_r 21)} \\
&\stackrel{(4.7), n \gg 0}{\geq} r^{|E(B_{n-3})|+m+1}, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do Caso 2, finalizando a prova da Afirmação 4.2.2 e consequentemente do Teorema 1.8.1. \square

4.3 Demonstração do Lema 4.1.1

Demonstração do Lema 4.1.1. Suponhamos que $|W_1| = a$ e $|W_2| = n - a$. Sem perda de generalidade, considere $1 \leq a \leq n - a$. Assim,

$$\begin{aligned} a \binom{n-a}{2} + (n-a) \binom{a}{2} &\geq \frac{n^3}{8} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{8} + \frac{1}{4} - \delta n^3 \\ \Leftrightarrow an^2 - 2an - a^2n + 2a^2 &\geq \frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{4} - 2\delta n^3. \end{aligned}$$

Como $2a \leq n$, isso implica que

$$\begin{aligned} an^2 - 2an - a^2n + an &\geq \frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{4} - 2\delta n^3 \\ \Leftrightarrow a^2 - an + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + a - 2\delta n^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $n \geq 1/(4\delta)$, vale que $2n^2\delta \geq n/2$, logo $2n^2\delta \geq n/2 + 1/4 - a$. Com isso,

$$\begin{aligned} a^2 - an + \frac{n^2}{4} - 4\delta n^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a - \frac{n}{2} + 2n\sqrt{\delta})(a - \frac{n}{2} - 2n\sqrt{\delta}) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{n}{2} - 2n\sqrt{\delta} \leq a \leq \frac{n}{2} + 2n\sqrt{\delta}, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{n}{2} - 2n\sqrt{\delta} \leq \min\{|W_1|, |W_2|\} \leq \max\{|W_1|, |W_2|\} \leq \frac{n}{2} + 2n\sqrt{\delta}.$$

□

5 HIPERGRAFO EXTREMAL PARA $K_{\ell+1}^{(k)}$ ARCO-ÍRIS

O presente capítulo é dedicado a demonstrar o Teorema 1.8.2. Nessa demonstração, combinamos as ideias utilizadas em [28] e [35]. Assim como aconteceu nesses dois artigos, utilizamos um resultado de estabilidade para colorações para $K_{\ell+1}^{(k)}$, que é o Lema 1.8.6. Tal como em [28], nessa estabilidade para colorações o número mínimo de cores depende apenas de ℓ e k . A demonstração do Lema 1.8.6 encontra-se na Seção 5.2.

5.1 Demonstração do resultado exato para $K_{\ell+1}^{(k)}$ arco-íris

Agora demonstraremos o Teorema 1.8.2. Repetimos seu enunciado.

Teorema 1.8.2. *Sejam $\ell \geq k \geq 2$. Existe r_0 tal que para todo $r \geq r_0$ vale o seguinte. Existe n_1 tal que todo hipergrafo k -uniforme H com $n \geq n_1$ vértices satisfaz $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H) \leq r^{t_{\ell}^{(k)}(n)}$. Além disso, somente hipergrafos isomorfos a $T_{\ell}^{(k)}(n)$ atingem igualdade.*

Demonstração. Iniciamos a prova determinando algumas constantes que serão utilizadas durante a demonstração. Apesar de algumas escolhas poderem facilmente ser substituídas por valores mais simples, mantivemos a forma como estão escritas para facilitar a verificação das desigualdades durante a prova.

Dados $\ell \geq k \geq 2$ e $i \in \{\ell - 1, \ell, \ell + 1\}$, considere $e_i = |E(K_i^{(k)})|$ e $v_i = |V(K_i^{(k)})|$. Seja $r_0 = r_0(\ell, k)$ do Lema 1.8.6 e seja r satisfazendo

$$r > \max \left\{ r_0, (2\ell + e_{\ell-1})^4, e_{\ell+1}^4, \ell^{\frac{32(\ell-1)\ell^{k-1}}{(k-1)\binom{\ell-1}{k-1}}}, (2\ell)^8 \right\}. \quad (5.1)$$

Além disso, considere $\gamma = \gamma(r) > 0$ satisfazendo

$$\gamma < \min \left\{ \frac{1}{24} \frac{k-1}{2(\ell-1)} \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{1}{\ell} \right)^{k-1}, \frac{1}{8r} \right\}. \quad (5.2)$$

Considere $\xi < \gamma$, pequeno o suficiente para satisfazer (5.32), para satisfazer

$$h(\sqrt{\xi}) < \frac{1}{2r}, \quad (5.3)$$

e satisfazendo

$$\xi < \left(\frac{\gamma}{4 \binom{\ell-1}{k-1} \binom{\ell-1}{k-2} r} \right)^2. \quad (5.4)$$

Considere agora as seguintes constantes que dependem apenas de ℓ e k .

$$c_1 = \frac{1}{3^{k+\ell-3} \ell^{\ell+3k-5} 4 \left[\binom{k+\ell-2}{k-1} + \binom{\ell}{k-1} \right]}, \quad (5.5)$$

$$c_2 = \frac{1}{2v_\ell! e_\ell^2 [4(\ell^3!)]^{v_\ell}}, \quad (5.6)$$

$$c_3 = \frac{1}{2v_{\ell-1}! e_{\ell-1}^2 [4(\ell^3!)]^{v_{\ell-1}}}. \quad (5.7)$$

Seja δ um número positivo que satisfaz

$$\delta < \min \left\{ \frac{c_1}{2} \gamma, \frac{c_2}{4} \xi^{v_\ell}, \frac{c_3}{4} \xi^{v_{\ell-1}}, \left[\left(1 - \frac{1}{\ell} \right) \frac{1}{\ell^2} \right]^k \right\}, \quad (5.8)$$

$$\delta < \left[\left(\left(\frac{\left(2 \binom{\ell-1}{k-1} - \frac{1}{4} \gamma \binom{\ell-2}{k-2} \right) \left(\frac{1}{\ell} \right)^{k-1}}{2 \binom{\ell-1}{k-1} - \frac{1}{2} \gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \right)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{1}{\ell} \right) \frac{1}{\ell^2} \right]^k, \quad (5.9)$$

e no caso particular em que $\ell > k$, a constante δ ainda satisfaz

$$\delta < \left[\left(\left(\frac{\left(\frac{2\ell-k-1}{2(\ell-1)} \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{1}{\ell} \right)^{k-1} \right)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{1}{\ell} \right) \frac{1}{\ell^2} \right) \right]^k. \quad (5.10)$$

Seja $n_0 = n_0(r, \delta)$ do Lema 1.8.6. Considere $n_1 > n_0$ suficientemente grande para satisfazer as desigualdades (5.15), (5.17), (5.18), (5.22), (5.23), (5.24),

(5.27), (5.28), (5.32) e (5.33) (tais desigualdades estão sinalizadas com $n \gg 0$). Finalmente, considere $n \geq n_1$. A demonstração é por contradição. Seja $H \neq T_\ell^{(k)}(n)$ um hipergrafo k -uniforme com n vértices que satisfaz $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H) \geq r^{t_\ell^{(k)}(n)+m}$, com $m \geq 0$.

Mostraremos que existe um sub-hipergrafo induzido H' de H , com $n' \geq n - k$ vértices para o qual $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H') \geq r^{t_\ell^{(k)}(n)+m+1}$. Se aplicarmos esse resultado de forma indutiva, chegaremos a um sub-hipergrafo H_0 , com N vértices, satisfazendo $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H_0) \geq r^{\binom{N}{k}+1}$, o que é impossível, pois o número de hiperarestas desse hipergrafo não comporta tamanha quantidade de colorações.

Uma vez que qualquer r -coloração de $T_\ell^{(k)}(n)$ é livre de $(K_{\ell+1}^{(k)}, P_A)$, temos que $|E(H)| \geq |E(T_\ell^{(k)}(n))|$.

Se o grau mínimo $\delta(H)$ de H satisfaz $\delta(H) < \delta(T_\ell^{(k)}(n))$, então seja v um vértice de H que possui esse grau mínimo. Considere o hipergrafo $H' = H - \{v\}$ que é um sub-hipergrafo de H . Assim,

$$\begin{aligned} c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H') &\geq \frac{c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H)}{r^{\delta(H)}} \geq \frac{r^{t_\ell^{(k)}(n)+m}}{r^{\delta(H)}} = r^{t_\ell^{(k)}(n)+m-\delta(H)} \\ &\geq r^{t_\ell^{(k)}(n)+m-\delta(T_\ell^{(k)}(n))+1} = r^{t_\ell^{(k)}(n-1)+m+1}, \end{aligned}$$

e H' é o sub-hipergrafo desejado. Portanto, para o restante da demonstração assumiremos que $\delta(H) \geq \delta(T_\ell^{(k)}(n))$.

Seja $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$ uma partição de $V(H)$ que minimiza $|B_{I, \mathcal{W}}(H)|$ para $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$. Pelo Lema 1.8.6 vale que

$$|B_{I, \mathcal{W}}(H)| \leq \delta n^k.$$

Antes de continuarmos com a demonstração, consideraremos algumas notações. Chamamos as hiperarestas de $E(H) \setminus B_{I, \mathcal{W}}(H)$ de *ótimas* com respeito

a I e \mathcal{W} . Dado um vértice $v \in W_j$, $j \in [\ell]$, separamos o conjunto $B_{I,\mathcal{W}}(H)$, das hiperarestas ruins com respeito a I e \mathcal{W} , em dois conjuntos disjuntos. A ideia é separar, das hiperarestas ruins, aquelas que são “ótimas no link de v ”. Seja $E_D(v) = \{e \in E(H) : v \in e; |e \cap W_j| = 2; \forall i \in [\ell] \setminus \{j\}, |e \cap W_i| \leq 1\}$ o conjunto das hiperarestas *defeituosas* de H com relação a v e \mathcal{W} e seja $E_P(v) = \{e \in E(H) : v \in e \text{ e } |e \cap W_j| \geq 3\} \cup \{e \in E(H) : v \in e \text{ e } \exists i \in [\ell] \setminus \{j\} : |e \cap W_i| \geq 2\}$ o conjunto das hiperarestas *péssimas* de H com respeito a v e \mathcal{W} . Ainda, considere $E_D(H) = \bigcup_{v \in V} E_D(v)$ e $E_P(H) = \bigcup_{v \in V} E_P(v)$ o conjunto das hiperarestas defeituosas e péssimas de H , respectivamente. Note que

$$E(H) = [E(H) \setminus B_{I,\mathcal{W}}(H)] \cup E_D(H) \cup E_P(H).$$

Ainda, dizemos que uma hiperaresta ótima que contém $v \in W_j$ é ótima com respeito a v e W_j .

Note que, no link de v , as hiperarestas defeituosas são “ótimas”, pois contêm no máximo um vértice de cada classe.

Nós consideramos três casos.

Caso 1. Existe um vértice v contido em pelo menos γn^{k-1} hiperarestas péssimas com respeito a v e \mathcal{W} .

Caso 2. Todo vértice z de H está contido em no máximo γn^{k-1} hiperarestas péssimas com respeito a z e \mathcal{W} e existe um vértice v contido em pelo menos γn^{k-1} hiperarestas defeituosas com respeito a v e \mathcal{W} .

Caso 3. Todo vértice z de H está contido em no máximo γn^{k-1} hiperarestas péssimas com respeito a z e \mathcal{W} e no máximo γn^{k-1} hiperarestas defeituosas com respeito a z e \mathcal{W} .

Caso 1. Sem perda de generalidade, assumimos $v \in W_1$. O seguinte lema pode ser visto em [35] (Lema 4).

Afirmção 5.1.2. *Sob as hipóteses do Caso 1, existem*

$$m \geq \frac{\gamma n}{\left[2 \left(\binom{k+\ell-2}{k-1} - \binom{\ell}{k-1}\right)\right]},$$

hiperarestas $e_1, \dots, e_m \in E(H)$, duas a duas distintas e contendo v , e uma família \mathcal{F} de sub-hipergrafos $K_{\ell+1}^{(k)}$ em H com as seguintes propriedades.

(a) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_m,$

(b) $|\mathcal{F}| \geq c_1 \gamma n^k$, onde $c_1 = c_1(k, \ell) > 0$ está definido em (5.5),

(c) para todo $F_1 \in \mathcal{F}_s$ e $F_2 \in \mathcal{F}_t$, com $t \neq s$, vale que $E(F_1) \cap E(F_2) = \emptyset$,
e

(d) para todo $s \in [m]$ e quaisquer $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_s$, vale que $E(F_1) \cap E(F_2) = \{e_s\}$.

Na afirmação acima, a hiperaresta e_s é chamada de *hiperaresta comum* de \mathcal{F}_s . Pela Afirmção 5.1.2(b), sabemos que

$$|\mathcal{F}| \geq c_1 \gamma n^k. \quad (5.11)$$

Encontraremos agora uma cota superior para $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H)$. Para algum $s \in [m]$, escolhemos a cor de e_s . Para evitar cópia arco-íris de $K_{\ell+1}^{(k)}$ em H , cada $K_{\ell+1}^{(k)} \in \mathcal{F}_s$ pode ser colorido de no máximo

$$\begin{aligned} Q &= (e_{\ell+1} - 1)r^{e_{\ell+1}-2} + r \binom{e_{\ell+1} - 1}{2} r^{e_{\ell+1}-3} \\ &\leq (e_{\ell+1} - 1 + (e_{\ell+1} - 1)^2) r^{e_{\ell+1}-2} \\ &\leq e_{\ell+1}^2 r^{e_{\ell+1}-2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

maneiras (escolhemos uma hiperaresta diferente de e_s para assumir a mesma cor de e_s e colorimos as hiperarestas restantes livremente, ou colorimos com alguma mesma cor duas hiperarestas diferentes de e_s e então colorimos as hiperarestas restantes livremente). Assim,

$$\begin{aligned}
C_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H) &\stackrel{\text{Lema 1.8.6}}{\leq} \gamma^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - (e_{\ell+1} - 1) \cdot |\mathcal{F}|} \cdot Q^{|\mathcal{F}|} \\
&\stackrel{(5.12)}{\leq} \gamma^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - (e_{\ell+1} - 1) \cdot |\mathcal{F}|} \cdot (e_{\ell+1}^2 r^{e_{\ell+1} - 2})^{|\mathcal{F}|} \\
&= e_{\ell+1}^{2|\mathcal{F}|} \cdot \gamma^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - |\mathcal{F}|} \\
&\stackrel{(5.1)}{\leq} \gamma^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - |\mathcal{F}|/2} \\
&\stackrel{|\mathcal{F}| \geq c_1 \gamma n^k}{\leq} \gamma^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - c_1 \gamma n^k / 2} \\
&\stackrel{(5.8)}{<} \gamma^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)})},
\end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Caso 2. Pela hipótese deste caso, seja v , sem perda de generalidade $v \in W_1$, o vértice tal que $|E_D(v)| \geq \gamma n^{k-1}$. Dada uma hiperaresta $e \in E(H)$, com $v \in e$, se para algum $j \in [\ell]$ vale que $(e \setminus \{v\}) \cap (W_j \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, então dizemos que o vértice v está conectado à classe W_j .

Para uma lista de vértices $x_1, \dots, x_t \in V(H)$, uma r -coloração de H livre de $(K_{\ell+1}^{(k)}, P_A)$, e uma cor $\alpha \in [r]$, seja $E_\alpha(x_1, \dots, x_t)$ o conjunto das hiperarestas ótimas ou defeituosas de H que contêm x_1, \dots, x_t e assumem cor α nessa coloração.

Para todo $i \in [\ell]$, dizemos que uma cor α é *abundante* com respeito a um vértice v e a uma classe W_i se existe um conjunto $A_i \subseteq W_i$ de tamanho $|A_i| \geq \sqrt{\xi} n$ tal que para todo vértice $w \in A_i$ vale que $|E_\alpha(w, v)| \geq \sqrt{\xi} n^{k-2}$, caso contrário a cor α é dita *rara* com respeito a v e W_i . Note que aqui os conceitos de cor abundante e rara não são os mesmos utilizados no Capítulo 4.

Seja \mathcal{C} o conjunto das r -colorações livres de $(K_{\ell+1}^{(k)}, P_A)$ de H . Para uma coloração $\Delta(H) \in \mathcal{C}$, seja $a(\Delta) = a \leq \ell$ o maior número inteiro satisfazendo que existem a índices q_1, \dots, q_a , dois a dois distintos, e um conjunto $C_a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_a\}$ de a cores duas a duas distintas, tais que para qualquer $i \in [a]$, α_i é abundante com respeito a classe W_{q_i} . Sem perda de generalidade, para uma coloração $\Delta \in \mathcal{C}$ assumiremos que $q_i = i$ para todo $i \in [a]$.

Agora, particionamos o conjunto \mathcal{C} em dois conjuntos disjuntos \mathcal{C}_1 e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$. Seja \mathcal{C}_1 o conjunto das colorações Δ de \mathcal{C} para as quais $a(\Delta) = \ell$.

Afirmção 5.1.3. *Seja $\Delta \in \mathcal{C}_1$ uma r -coloração tal que a cor $\alpha_i \in [r]$ é abundante com respeito a V_i , onde $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ são dois a dois distintos. Para todo $i \in [\ell]$, existem um conjunto $S_i \subseteq V_i \setminus \{v\}$ e vértices $w_1^i, \dots, w_{k-2}^i \in V \setminus \{v\}$, dois a dois distintos, com as seguintes propriedades.*

- (a) *Para todo $i \in [\ell]$, $|S_i| = \xi n/2$ (possivelmente ajustando o valor de ξ para garantir divisibilidade).*
- (b) *Os conjuntos $\{w_1^i, \dots, w_{k-2}^i\}$ são dois a dois disjuntos e são disjuntos de $\bigcup_{j \in [\ell]} S_j$.*
- (c) *Para todo $i \in [\ell]$ e $w \in S_i$, o conjunto $\{v, w, w_1^i, \dots, w_{k-2}^i\}$ é uma hiperaresta de H assumindo cor $\Delta(e) = \alpha_i$.*

Demonstração. Para uma coloração $\Delta \in \mathcal{C}_1$, considere A_1, \dots, A_ℓ os conjuntos da definição de $a(\Delta) = \ell$. Para todo $i \in [\ell]$, seja

$$U_i = \bigcup_{w \in A_i} E_{\alpha_i}(w, v).$$

Note que para todo $i \in [\ell]$ e quaisquer $w, w' \in A_i$, com $w \neq w'$, vale que $E_{\alpha_i}(w, v) \cap E_{\alpha_i}(w', v) = \emptyset$, pois apenas hiperarestas ótimas e defeituosas estão

sendo consideradas nessas definições. Ainda, note que pela definição de \mathcal{C}_1 , vale que $|U_i| \geq \xi n^{k-1}$ para todo $i \in [\ell]$. Considere o hipergrafo

$$H_v = \left(V, \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i \right).$$

Considere, para um $(k-2)$ -conjunto Y de vértices e $i \in [\ell]$, o conjunto $S_i^*(Y) = \{z \in A_i : Y \cup \{z, v\} \in U_i\}$. Seja $T_1 = \binom{V}{k-2}$. Então vale que

$$\xi n^{k-1} \leq |U_1| = \sum_{Y \in T_1} |S_1^*(Y)|. \quad (5.13)$$

Como $|T_1| \leq n^{k-2}$, então para pelo menos um conjunto $Y_1 = \{w_1^1, \dots, w_{k-2}^1\}$ temos que $|S_1^*(Y_1)| \geq \xi n$, caso contrário (5.13) seria falso. Agora, seja $S_1 \subseteq S_1^*(Y_1)$ obtido de $S_1^*(Y_1)$ pela remoção de vértices até que $|S_1| = \xi n/2$. Sejam $T_2 = \binom{V \setminus Y_1}{k-2}$ e $U_2(Y_1) = \{e \in U_2 : e \cap Y_1 = \emptyset\}$. Uma vez que o número de hiperarestas de U_2 que contêm algum vértice de Y_1 é no máximo $(k-2)\xi n^{k-2}$ temos que

$$\xi n^{k-1} - (k-2)\xi n^{k-2} \leq |U_2(Y_1)| \leq \sum_{Y \in T_2} |S_2^*(Y)|. \quad (5.14)$$

Como $|T_2| \leq n^{k-2}$, então para pelo menos um conjunto $Y_2 = \{w_1^2, \dots, w_{k-2}^2\}$ vale que $|S_2^*(Y_1 \cup Y_2)| \geq \xi n/2$, caso contrário teríamos

$$\sum_{Y \in T_2} |S_2^*(Y)| \leq \frac{\xi}{2} n^{k-1} \stackrel{n \gg 0}{\ll} \xi n^{k-1} - (k-2)\xi n^{k-2}, \quad (5.15)$$

que é uma contradição com (5.14). Então obtemos $S_2 \subseteq S_2^*(Y_1 \cup Y_2)$ apenas removendo vértices de $S_2^*(Y_1 \cup Y_2)$ até que $|S_2| = \xi n/2$. Sucessivamente, para $i \in [\ell]$, sejam $T_i = \binom{V \setminus (Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1})}{k-2}$ e $U_i(Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1}) = \{e \in U_i : e \cap (Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1}) = \emptyset\}$. Temos que

$$\xi n^{k-1} - (i-1)(k-2)\xi n^{k-2} \leq |U_i(Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1})| \leq \sum_{Y \in T_i} |S_i^*(Y)|. \quad (5.16)$$

Como $|T_i| \leq n^{k-2}$, então para pelo menos um conjunto $Y_i = \{w_1^i, \dots, w_{k-2}^i\}$ vale que $|S_i^*(Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1})| \geq \xi n/2$, caso contrário teríamos

$$\sum_{Y \in T_i} |S_i^*(Y)| \leq \frac{\xi}{2} n^{k-1} \stackrel{n \gg 0}{<} \xi n^{k-1} - (i-1)(k-2)\xi n^{k-2}, \quad (5.17)$$

que é uma contradição com (5.16). Consideramos então $S_i \subseteq S_i^*(Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1})$ obtido de $S_i^*(Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1})$ apenas removendo vértices até que $|S_i| = \xi n/2$.

Note que para qualquer $z \in S_i$, as hiperarestas $\{z, v, w_1^i, \dots, w_{k-2}^i\}$ têm cor α_i , $i \in [\ell]$. □

Para todo $i \in [\ell]$, considere os conjuntos S_i e os vértices w_1^i, \dots, w_{k-2}^i dados pela Afirmação 5.1.3. Seja $H[S_1, \dots, S_\ell]$ o hipergrafo obtido de $H[S_1 \cup \dots \cup S_\ell]$ após a remoção de todas as hiperarestas ruins com respeito a v e algum conjunto S_1, \dots, S_ℓ . Note que para qualquer cópia de $K_\ell^{(k)}$ em $H[S_1, \dots, S_\ell]$ com núcleo $\{w_1, \dots, w_\ell\}$, onde $w_i \in S_i$ para todo $i \in [\ell]$, encontramos uma cópia de $K_{\ell+1}^{(k)}$ em H com núcleo $\{v, w_1, \dots, w_\ell\}$ após adicionarmos as hiperarestas $f_i = \{v, w_i, w_1^i, \dots, w_{k-2}^i\}$, $i \in [\ell]$ ao hipergrafo $K_\ell^{(k)}$ (ver Figura 5.1).

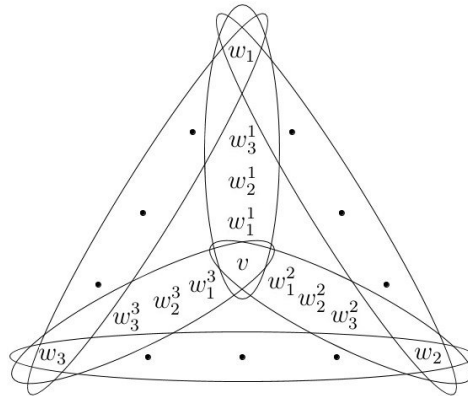


Figura 5.1: De $K_\ell^{(k)}$ para $K_{\ell+1}^{(k)}$.

Para enfatizar que cada elemento do núcleo $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ de uma cópia de $K_\ell^{(k)}$ de $H[S_1, \dots, S_\ell]$ vem de um conjunto S_i diferente, nós o escrevemos como uma upla $(w_1, \dots, w_\ell) \in S_1 \times \dots \times S_\ell$.

Afirmção 5.1.4. *Existem pelo menos $c_2 \xi^{v_\ell} n^k$ cópias duas a duas disjuntas por hiperarestas de $K_\ell^{(k)}$ em H .*

Demonstração. Seja $K_k(S_1, \dots, S_\ell)$ o hipergrafo k -uniforme ℓ -partido completo induzido por $S_1 \cup \dots \cup S_\ell$. Obteremos agora uma cota inferior para o número de cópias de $K_\ell^{(k)}$ em $H[S_1, \dots, S_\ell]$, e portanto também em H , duas a duas disjuntas por hiperarestas. Para tal, primeiramente obteremos uma cota inferior para o número total de cópias de $K_\ell^{(k)}$ em $K_k(S_1, \dots, S_\ell)$, e então subtrairemos desse uma cota superior para o número de cópias de $K_\ell^{(k)}$ que contêm alguma hiperaresta em $E(K_k(S_1, \dots, S_\ell)) \setminus E(H[S_1, \dots, S_\ell])$. Finalmente, para cada cópia F encontrada dessa maneira, removeremos todas as cópias de $K_\ell^{(k)}$ que possuem alguma hiperaresta em comum com F .

Para obtermos uma cota inferior no número total de cópias $K_\ell^{(k)}$ em $K_k(S_1, \dots, S_\ell)$, temos $|S_1| \dots |S_\ell| = (\xi n/2)^\ell$ maneiras de escolher um núcleo $S = \{w_1, \dots, w_\ell\}$. Para cada par $\{w_i, w_j\}$ de vértices em S , escolhemos $k-2$ conjuntos $S_{t_1}, \dots, S_{t_{k-2}}$, onde $i, j \notin \{t_1, \dots, t_{k-2}\}$ e pegamos $k-2$ vértices, um de cada conjunto $S_{t_1} \setminus \{w_{t_1}\}, \dots, S_{t_{k-2}} \setminus \{w_{t_{k-2}}\}$. Suponha que, ao final do processo, nós escolhemos, para cada $i \in [\ell]$, exatamente t_i vértices de $S_i \setminus \{w_i\}$, onde $t_1 + \dots + t_\ell =$

$\binom{\ell}{2}(k-2) = v_\ell - \ell$. Assim, existem pelo menos

$$\begin{aligned}
& \binom{|S_1| - 1}{t_1} \cdots \binom{|S_\ell| - 1}{t_\ell} \\
& \geq \left(\frac{\xi n}{2} - \binom{\ell}{2}(k-2) \right)^{\binom{\ell}{2}(k-2)} \left(\frac{1}{[\binom{\ell}{2}(k-2)]!} \right)^{\binom{\ell}{2}(k-2)} \\
& \geq \left(\frac{\xi n}{2(\ell^3!)} - \frac{1}{\ell^3!} \binom{\ell}{2}(k-2) \right)^{\binom{\ell}{2}(k-2)} \\
& \stackrel{n \gg 0}{\geq} \left(\frac{\xi n}{4(\ell^3!)} \right)^{v_\ell - \ell} \tag{5.18}
\end{aligned}$$

maneiras de escolher os $\binom{\ell}{2}(k-2)$ vértices restantes. Como para cada hiperaresta $e \in E(K_k(S_1, \dots, S_\ell)) \setminus E(H[S_1, \dots, S_\ell])$ existem no máximo $n^{v_\ell - k}$ cópias de $K_\ell^{(k)}$ em $K_k(S_1, \dots, S_\ell)$ contendo e , e uma vez que

$$|E(K_k(S_1, \dots, S_\ell)) \setminus E(H[S_1, \dots, S_\ell])| \leq \delta n^k,$$

o número total de cópias de $K_\ell^{(k)}$ em $H[S_1, \dots, S_\ell]$ é pelo menos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\xi n}{2} \right)^\ell \left(\frac{\xi n}{4(\ell^3!)} \right)^{v_\ell - \ell} - \delta n^{v_\ell} \tag{5.19} \\
& \geq \left(\frac{\xi^{v_\ell}}{[4(\ell^3!)]^{v_\ell}} - \delta \right) n^{v_\ell} \\
& \stackrel{(5.8)}{>} \left(\frac{\xi^{v_\ell}}{[4(\ell^3!)]^{v_\ell}} - \frac{1}{4} c_2 \xi^{v_\ell} \right) n^{v_\ell} \\
& \stackrel{(5.6)}{>} \left(\frac{\xi^{v_\ell}}{[4(\ell^3!)]^{v_\ell}} - \frac{1}{2} \frac{\xi^{v_\ell}}{[4(\ell^3!)]^{v_\ell}} \right) n^{v_\ell} \\
& = \left(\frac{1}{2} \frac{\xi^{v_\ell}}{[4(\ell^3!)]^{v_\ell}} \right) n^{v_\ell}. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Uma vez que (5.19) é positivo, sabemos que existe uma cópia de $K_\ell^{(k)}$ em $H[S_1, \dots, S_\ell]$. Removendo suas e_ℓ hiperarestas e as hiperarestas das (no máximo $v_\ell! e_\ell n^{v_\ell - k}$) cópias de $K_\ell^{(k)}$ que contêm alguma dessas hiperarestas, se o valor em (5.19) menos $v_\ell! e_\ell^2 n^{v_\ell - k}$ ainda é positivo, então existe uma outra cópia

de $K_\ell^{(k)}$ em $H[S_1, \dots, S_\ell]$ que é disjunta por hiperaresta da primeira cópia. Assim, o número de cópias duas a duas disjuntas por hiperaresta do hipergrafo $K_\ell^{(k)}$ em $H[S_1, \dots, S_\ell]$, e portanto em H , é pelo menos

$$\frac{1}{v_\ell! e_\ell^2 n^{v_\ell - k}} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi^{v_\ell}}{[4(\ell^3!)]^{v_\ell}} \right) n^{v_\ell} \stackrel{(5.6)}{=} c_2 \xi^{v_\ell} n^k,$$

como queríamos. □

Obteremos agora uma cota superior para $|\mathcal{C}_1|$. Seja $E(v)$ o conjunto das hiperarestas de H que contêm v . Para construir colorações de \mathcal{C}_1 , primeiro colorimos as hiperarestas de $E(v)$ e então restringimos o número de maneiras de colorir as hiperarestas restantes para evitar cópia arco-íris de $K_{\ell+1}^{(k)}$. Existem no máximo $r^{|E(v)|}$ maneiras de colorir as hiperarestas de $E(v)$. Como estamos contando colorações de \mathcal{C}_1 , sabemos que existem pelo menos $c_2 \xi^{v_\ell} n^k$ cópias duas a duas disjuntas de $K_\ell^{(k)}$ em H que, junto com (f_1, \dots, f_ℓ) , formam uma cópia de $K_{\ell+1}^{(k)}$ em H . Uma vez que em uma coloração de \mathcal{C}_1 , a upla (f_1, \dots, f_ℓ) está colorida no padrão arco-íris, para evitar cópia arco-íris de $K_{\ell+1}^{(k)}$ podemos encontrar uma cota superior para o número de maneiras de colorir as hiperarestas de cada cópia $K_\ell^{(k)}$. Seja $[r]_c = r!/(r-c)!$ para todo inteiro $c \geq 1$. O número de maneiras de colorir as hiperarestas restantes de uma tal cópia de $K_{\ell+1}^{(k)}$ é no máximo

$$(r^{e_\ell} - [r - \ell]_{e_\ell})^{c_2 \xi^{v_\ell} n^k}.$$

Utilizando a igualdade binomial

$$(a + b)^c = \sum_{i=0}^c \binom{c}{i} a^{c-i} b^i, \tag{5.21}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
r^{e_\ell} - [r - \ell]_{e_\ell} &\leq r^{e_\ell} - (r - (\ell + e_\ell))^{e_\ell} \\
&\stackrel{(5.21)}{=} r^{e_\ell} - \sum_{i=0}^{e_\ell} \binom{e_\ell}{i} (-1)^i r^{e_\ell-i} (\ell + e_\ell)^i \\
&= \sum_{i=1}^{e_\ell} \binom{e_\ell}{i} (-1)^{i+1} r^{e_\ell-i} (\ell + e_\ell)^i.
\end{aligned}$$

Como $r > e_\ell^4$, vale que para todo $i \in [e_\ell]$,

$$r \geq \frac{e_\ell - i}{i + 1} (\ell + e_\ell),$$

o que implica que

$$\binom{e_\ell}{i} r^{e_\ell-i} (\ell + e_\ell)^i \geq \binom{e_\ell}{i+1} r^{e_\ell-i-1} (\ell + e_\ell)^{i+1}.$$

Assim, o termo $\binom{e_\ell}{i} (-1)^{i+1} r^{e_\ell-i} (\ell + e_\ell)^i$ na soma acima é máximo em valor absoluto para $i = 1$. Além disso, se consideramos que a soma alterna em parcelas positivas e negativas, a soma da segunda com a terceira parcela é não-positiva, bem como a soma da quarta com a quinta parcela, e assim por diante. Logo, se e_ℓ é ímpar, então

$$\sum_{i=1}^{e_\ell} \binom{e_\ell}{i} (-1)^{i+1} r^{e_\ell-i} (\ell + e_\ell)^i \leq e_\ell r^{e_\ell-1} (\ell + e_\ell).$$

Se e_ℓ é par, então a última parcela é não-positiva, e devido a isso também é válido que

$$\sum_{i=1}^{e_\ell} \binom{e_\ell}{i} (-1)^{i+1} r^{e_\ell-i} (\ell + e_\ell)^i \leq e_\ell r^{e_\ell-1} (\ell + e_\ell).$$

Assim,

$$r^{e_\ell} - [r - \ell]_{e_\ell} \leq e_\ell \cdot (\ell + e_\ell) \cdot r^{e_\ell-1} \leq (\ell + e_\ell)^2 \cdot r^{e_\ell-1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(r^{e_\ell} - [r - \ell]_{e_\ell})^{c_2 \xi^{v_\ell} n^k} &\leq ((\ell + e_\ell)^2 r^{e_\ell-1})^{c_2 \xi^{v_\ell} n^k} \\
&= \left(r^{\log_r((\ell+e_\ell)^2) + e_\ell - 1} \right)^{c_2 \xi^{v_\ell} n^k} \\
&\stackrel{(5.1)}{<} \left(r^{e_\ell - \frac{1}{2}} \right)^{c_2 \xi^{v_\ell} n^k}.
\end{aligned}$$

As demais hiperarestas de H podem ser coloridas livremente, e existem no máximo

$$\begin{aligned} & |E(H)| - c_2 \xi^{v_\ell} n^k e_\ell - |E(v)| \\ & \leq \text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - c_2 \xi^{v_\ell} n^k e_\ell - |E(v)| \end{aligned}$$

hiperarestas restantes. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_1| & \leq r^{|E(v)|} \left(r^{c_2 \xi^{v_\ell} n^k (e_\ell - \frac{1}{2})} \right) r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - c_2 \xi^{v_\ell} n^k e_\ell - |E(v)|} \\ & = r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) - \frac{1}{2} c_2 \xi^{v_\ell} n^k + \delta n^k} \\ & \stackrel{(5.8)}{<} r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) - \frac{1}{4} c_2 \xi^{v_\ell} n^k} \\ & \stackrel{n \gg 0}{\leq} r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) - 1}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Como $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, vale que

$$|\mathcal{C}_2| = |\mathcal{C}| - |\mathcal{C}_1| \geq r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + m} - r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) - 1} \geq r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + m - 1}.$$

Agora, obteremos uma cota superior para o número de colorações de \mathcal{C}_2 restritas às hiperarestas de $E(v)$. Para tal, o seguinte resultado auxiliar será provado.

Afirmção 5.1.5. *Em toda coloração de \mathcal{C}_2 restrita a $E(v)$, existem dois índices $f, g \in [\ell]$ tais que no máximo ℓ cores são abundantes com respeito a v e W_f e no máximo ℓ cores são abundantes com respeito a v e W_g .*

Note que a existência de um desses índices mencionados na afirmação acima segue diretamente da definição de \mathcal{C}_2 . Para provarmos a Afirmação 5.1.5, seja

$$\gamma' = \frac{\gamma}{2 \binom{\ell-1}{k-1} \binom{\ell-1}{k-2}},$$

e considere o seguinte lema de [35] (Lema 6).

Lema 5.1.6. *Seja $\ell \geq 2$ um inteiro. Considere $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$ uma partição de $V(H)$ que minimiza $|B_{I, \mathcal{W}}(H)|$. Se existe um vértice v tal que $|E_D(v)| \geq \gamma n^{k-1}$, então para todo $i \in [\ell]$, existem pelo menos $\gamma' n^{k-1}$ hiperarestas ótimas ou defeituosas contendo v e interceptando a classe W_i .*

Demonstração da Afirmação 5.1.5. Considere uma coloração Δ de \mathcal{C}_2 . Seja $A = \{q_1, \dots, q_a\}$ uma escolha de índices e $C_a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_a\}$ um conjunto de cores abundantes da definição de $a(\Delta)$. Uma vez que essa coloração pertence a \mathcal{C}_2 , temos que $a \leq \ell - 1$, o que significa que existe um índice $g \in [\ell] \setminus A$ tal que toda cor que é abundante com respeito a v e W_g pertence a C_a . Assim, g é um dos índices desejados.

Mostraremos que deve existir pelo menos uma cor abundante com respeito a v e W_g . Se toda cor for rara com respeito a v e W_g , então o número de hiperarestas ótimas ou defeituosas que contêm v e intersectam W_g é no máximo

$$r \left(\sqrt{\xi} n \cdot n^{k-2} + (|W_g| - \sqrt{\xi} n) \sqrt{\xi} n^{k-2} \right),$$

pois para cada cor $i \in [r]$, vale que para no máximo $\sqrt{\xi} n$ vértices u de W_g existem mais do que $\sqrt{\xi} n^{k-2} < n^{k-2}$ hiperarestas contendo u e assumindo cor i , e para os demais $(|W_g| - \sqrt{\xi} n)$ vértices u de W_g , existem no máximo $\sqrt{\xi} n^{k-2}$ hiperarestas u vértice e assumindo cor i . Contudo,

$$\begin{aligned} & r \left(\sqrt{\xi} n \cdot n^{k-2} + (|W_g| - \sqrt{\xi} n) \sqrt{\xi} n^{k-2} \right) \\ & \leq r \left(\sqrt{\xi} n^{k-1} + |W_g| \sqrt{\xi} n^{k-2} \right) \\ & \stackrel{\text{Lema 2.1.5}}{\leq} r \left(\sqrt{\xi} n^{k-1} + \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right) \sqrt{\xi} n^{k-1} \right) \\ & = r \left(1 + \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right) \right) \sqrt{\xi} n^{k-1} \\ & \stackrel{(5.8)}{<} 2r \sqrt{\xi} n^{k-1} \\ & \stackrel{(5.4)}{<} \gamma' n^{k-1}, \end{aligned}$$

o que contradiz o Lema 5.1.6.

Assim, existe uma cor α que é abundante com respeito a v e W_g . Como essa cor α deve ser igual a alguma cor de C_a , seja $f \in [a]$ o índice de $[a] \setminus \{g\}$ para o qual $\alpha = \alpha_f$. Se mais do que ℓ cores são abundantes com respeito a v e W_f , então existe uma cor $\beta \notin C_a$ que é abundante com respeito a v e W_f . Logo, a não é máximo, pois consideramos $A' = A \cup \{g\}$ e $C'_a = C_a \cup \{\beta\}$, onde β é a cor abundante para W_f e $\alpha_f = \alpha$ é a cor abundante para W_g , o que é uma contradição. Logo, no máximo ℓ cores são abundantes com respeito a v e W_f , e portanto f é o nosso segundo índice desejado. \square

Agora, obteremos uma cota superior para o número de colorações de \mathcal{C}_2 restritas às hiperarestas ótimas ou defeituosas de $E(v)$. Sejam f, g os índices da Afirmação 5.1.5. Com os mesmos cálculos feitos na demonstração da Afirmação 5.1.5, obtemos que existem no máximo $\gamma' n^{k-1}$ hiperarestas contendo v , interceptando W_f e assumindo cor rara com respeito a v e W_f . O mesmo é obtido para W_g . Existem no máximo

$$\binom{n^{k-1}}{2\gamma' n^{k-1}} \leq 2^{h(2\gamma')n^{k-1}}$$

maneiras de escolher essas hiperarestas que assumem cor rara e interceptam W_f ou W_g . Uma cota superior para o número de colorações dessas hiperarestas é $r^{2\gamma' n^{k-1}}$.

Consideraremos agora os casos $1 \in \{f, g\}$ e $1 \notin \{f, g\}$ (lembre que estamos supondo $v \in W_1$).

Se $1 \in \{f, g\}$, então nesse caso não existem hiperarestas defeituosas que contêm v e não interceptam W_1 e existem no máximo

$$\binom{\ell - 2}{k - 1} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right)^{k-1} n^{k-1}$$

hiperarestas ótimas que contêm v e não interceptam W_f nem W_g .

Se $1 \notin \{f, g\}$ e $\ell = k$, não existem hiperarestas ótimas ou defeituosas que não interceptam W_f nem W_g . Para $\ell > k$, usando a Afirmação 2.1.5, temos que existem no máximo

$$\binom{\ell - 3}{k - 1} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right)^{k-1} n^{k-1}$$

hiperarestas ótimas que contêm v e não interceptam W_f nem W_g , e existem no máximo

$$\binom{\ell - 3}{k - 2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right)^{k-1} n^{k-1}$$

hiperarestas defeituosas que contêm v e não interceptam W_f nem W_g . Ao todo, existem no máximo

$$\begin{aligned} & \left(\binom{\ell - 3}{k - 1} + \binom{\ell - 3}{k - 2} \right) \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right)^{k-1} n^{k-1} \\ = & \binom{\ell - 2}{k - 1} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right)^{k-1} n^{k-1} \end{aligned}$$

hiperarestas ótimas ou defeituosas que contêm v e não interceptam W_f nem W_g para $\ell > k$ (aqui é possível perceber que esse número de fato é igual a zero no caso $\ell = k$).

Todas as demais hiperarestas ótimas ou defeituosas podem ser coloridas com no máximo r cores. Uma vez que não estamos no Caso 1, existem no máximo $r^{\gamma n^{k-1}}$ maneiras de colorir as hiperarestas péssimas. Existem no máximo ℓ^2 maneiras de escolher dois índices f e g e no máximo $r^{2\ell}$ maneiras de escolher $a < \ell$ cores para cada classe W_f, W_g para serem abundantes com respeito a essas classes. Ainda, existem no máximo $2n^{k-1}$ hiperarestas interceptando W_f ou W_g para assumirem cor abundante.

Portanto, o número de colorações de \mathcal{C}_2 restritas às hiperarestas de $E(v)$ é no máximo

$$\begin{aligned}
& r^{\gamma n^{k-1}} \ell^{2\gamma} r^{2\ell} \ell^{2n^{k-1}} 2^{h(2\gamma') n^{k-1}} r^{2\gamma' n^{k-1}} r^{\binom{\ell-2}{k-1}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} \\
\stackrel{n \gg 0}{<} & r^{\gamma n^{k-1}} \ell^{2n^{k-1}} \ell^{2h(2\gamma') n^{k-1}} r^{2\gamma' n^{k-1}} r^{\binom{\ell-2}{k-1}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1-2} \\
\stackrel{\gamma' \leq \gamma}{<} & \ell^{(2h(2\gamma)+2)n^{k-1}} r^{\left[3\gamma + \binom{\ell-2}{k-1}\right] \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1}} n^{k-1-2} \\
\stackrel{h(\gamma) \leq 1}{\leq} & \ell^{4n^{k-1}} r^{\left[3\gamma + \binom{\ell-2}{k-1}\right] \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1}} n^{k-1-2}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Escrevendo $\ell = r^{\log_r(\ell)}$, obtemos que o número acima é igual a

$$\begin{aligned}
& r^{\left[4 \log_r(\ell) + 3\gamma + \binom{\ell-2}{k-1}\right] \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1}} n^{k-1-2} \\
\stackrel{(5.10)}{<} & r^{\left[4 \log_r(\ell) + 3\gamma + \frac{2\ell-k-1}{2(\ell-1)} \binom{\ell-1}{k-1}\right] \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1}} n^{k-1-2} \\
\stackrel{(5.2)}{<} & r^{\left[4 \log_r(\ell) + \frac{1}{4} \frac{k-1}{2(\ell-1)} \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1} + \frac{2\ell-k-1}{2(\ell-1)} \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1}\right] \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1}} n^{k-1-2} \\
\stackrel{(5.1)}{<} & r^{\left[\frac{1}{4} \frac{k-1}{2(\ell-1)} \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1} + \frac{1}{4} \frac{k-1}{2(\ell-1)} \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1} + \frac{2\ell-k-1}{2(\ell-1)} \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1}\right] \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1}} n^{k-1-2} \\
= & r^{\frac{4\ell-k-3}{4\ell-4} \binom{\ell-1}{k-1} \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1}} n^{k-1-2} \\
\stackrel{n \gg 0}{<} & r^{\binom{\ell-1}{k-1} \left(\lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor\right)^{k-1} - 2} \\
\leq & r^{\delta(T_\ell^{(k)}(n)) - 2},
\end{aligned} \tag{5.24}$$

pois

$$\frac{4\ell - k - 3}{4\ell - 4} < 1.$$

Logo, concluímos que o número de r -colorações livres de $(K_{\ell+1}^{(k)}, P_A)$ de $H - v$ é pelo menos

$$\frac{r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + m - 1}}{r^{\delta(T_\ell^{(k)}(n)) - 2}} = r^{\text{ex}(n-1, K_{\ell+1}^{(k)}) + m + 1},$$

o que é a contradição desejada.

Caso 3. Nesse caso todo vértice z está contido em no máximo γn^{k-1} hiperarestas péssimas e em no máximo γn^{k-1} hiperarestas defeituosas com respeito a z

e \mathcal{W} . Uma vez que $|E(H)| \geq t_\ell^{(k)}(n)$, e $H \neq T_\ell^{(k)}(n)$, existe uma hiperaresta $e \in B_{I,\mathcal{W}}(H)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\{u, v\} \subseteq e \cap W_\ell$. Considere o hipergrafo

$$H' = (V(H), E(H) \setminus B_{I,\mathcal{W}}(H)).$$

Seguimos agora uma ideia similar ao que foi feito no Caso 2, porém como temos dois vértices para tratar, as definições serão feitas para o par de vértices (u, v) .

Seja \mathcal{C} o conjunto das r -colorações livres de $(K_{\ell+1}^{(k)}, P_A)$ de H . Para uma lista de vértices $x_1, \dots, x_t \in V(H')$, uma coloração \mathcal{C} e uma cor $\alpha \in [r]$, seja $E_\alpha(x_1, \dots, x_t)$ o conjunto das hiperarestas (ótimas) de H' que contêm x_1, \dots, x_t e assumem cor α nessa coloração.

Para todo $i \in [\ell-1]$, dizemos que um par (α_i^u, α_i^v) de cores é *abundante* com respeito à classe W_i se existe um conjunto $A_i \subseteq W_i$ de tamanho $|A_i| \geq \sqrt{\xi}n$, tal que para todo vértice $w \in A_i$, vale que $|E_{\alpha_i^u}(w, u)| \geq \sqrt{\xi}n^{k-2}$ e $|E_{\alpha_i^v}(w, v)| \geq \sqrt{\xi}n^{k-2}$, caso contrário dizemos que o par (α_i^u, α_i^v) é *raro* com respeito a W_i .

Para uma coloração $\Delta \in \mathcal{C}$, seja $a(\Delta) = a \leq \ell - 1$ o maior inteiro satisfazendo que existem a índices q_1, \dots, q_a , dois a dois distintos, um conjunto \mathcal{C}_a de a pares de cores $\mathcal{C}_a = \{(\alpha_{q_1}^u, \alpha_{q_1}^v), \dots, (\alpha_{q_a}^u, \alpha_{q_a}^v)\}$, tais que dois a dois não possuem cor em comum, todas essas cores são diferentes de $\Delta(e)$ e ainda para todo $i \in [a]$, o par $(\alpha_{q_i}^u, \alpha_{q_i}^v)$ é abundante com respeito à classe W_{q_i} . Sem perda de generalidade, para uma coloração $\Delta \in \mathcal{C}$, nós assumimos que $q_i = i$ para todo $i \in [a]$.

Particionamos o conjunto \mathcal{C} em dois conjuntos disjuntos \mathcal{C}_1 , e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$. Seja \mathcal{C}_1 o conjunto das colorações Δ de \mathcal{C} tais que $a(\Delta) = \ell - 1$. Fixe uma coloração $\Delta \in \mathcal{C}_1$. Para todo $i \in [\ell - 1]$ e vértice $z \in \{u, v\}$, seja $U_i^z =$

$\bigcup_{w \in A_i} E_{\alpha_i^z}(w, z)$. Seja

$$H_{u,v} = \left(V, \bigcup_{i=1}^{\ell-1} (U_i^u \cup U_i^v) \right).$$

De maneira análoga ao que foi feito no Caso 2, para todo $i \in [\ell - 1]$, fixamos $2(k - 2)$ vértices

$$w_1^{i,u}, \dots, w_{k-2}^{i,u}, w_1^{i,v}, \dots, w_{k-2}^{i,v} \in V(H_{u,v})$$

dois a dois distintos, todos diferentes de u e v , tais que para quaisquer dois pares $(i, z), (i', z')$ os conjuntos $\{w_1^{i,z}, \dots, w_{k-2}^{i,z}\}, \{w_1^{i',z'}, \dots, w_{k-2}^{i',z'}\}$ são disjuntos e com a propriedade de que o conjunto

$$S_i = \{z \in A_i \setminus J_i : \{z, u, w_1^{i,u}, \dots, w_{k-2}^{i,u}\} \in U_i^u, \{z, v, w_1^{i,v}, \dots, w_{k-2}^{i,v}\} \in U_i^v\},$$

onde $J_i = \{w_g^{i',z} : z \in \{u, v\}, g \in [k - 2], i' \leq i\}$ satisfaz, (possivelmente ajustando ξ para obtermos divisibilidade) que

$$|S_i| = \frac{\xi}{2}n.$$

Ainda como foi feito no Caso 2, procuraremos por cópias de hipergrafos $K_{\ell-1}^{(k)}$ em $H'[S_1, \dots, S_{\ell-1}]$ (isso pode ser feito para $\ell > k$). Para toda cópia de $K_{\ell-1}^{(k)}$, com núcleo $\{w_1, \dots, w_{\ell-1}\}$ encontrada dessa forma obtemos uma cópia de $K_{\ell+1}^{(k)}$ com núcleo $\{u, v, w_1, \dots, w_{\ell-1}\}$ em H após a adição da $2(\ell - 1)$ -upla de hiperarestas (que está colorida no padrão arco-íris)

$$(f_1^u, \dots, f_{\ell-1}^u, f_1^v, \dots, f_{\ell-1}^v),$$

onde para todo $i \in [\ell - 1]$, temos que $f_i^z = \{z, w_i, w_1^{i,z}, \dots, w_{k-2}^{i,z}\}$ (ver Figura 5.2).

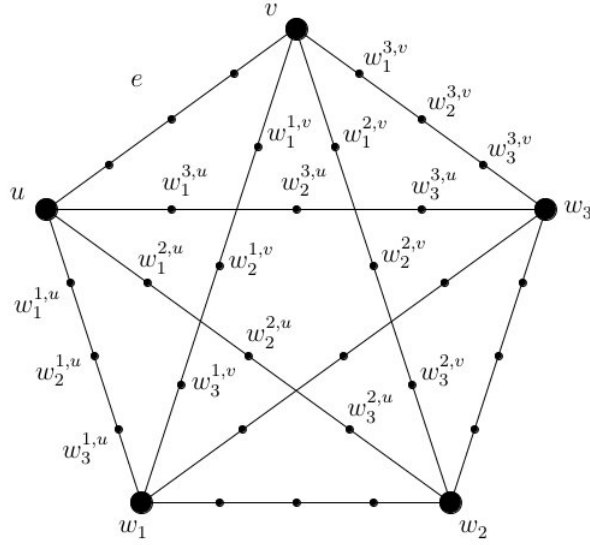


Figura 5.2: De $K_{\ell-1}^{(k)}$ para $K_{\ell+1}^{(k)}$.

Para encontrarmos uma cota inferior para o número de cópias duas a duas disjuntas por hiperarestas de $K_{\ell-1}^{(k)}$ em $H'[S_1, \dots, S_{\ell-1}]$, seja $K_k(S_1, \dots, S_{\ell-1})$ o hipergrafo k -uniforme ℓ -partido completo induzido por $S_1 \cup \dots \cup S_{\ell-1}$. Com um argumento totalmente análogo ao que foi feito no Caso 2, obtemos que o número total de cópias de $K_{\ell+1}^{(k)}$ em $H'[S_1, \dots, S_{\ell-1}]$ é pelo menos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\xi n}{2}\right)^{\ell-1} \left(\frac{\xi n}{4(\ell^3!)}\right)^{v_{\ell-1}-(\ell-1)} - \delta n^{v_{\ell-1}} \quad (5.25) \\
& \geq \left(\frac{\xi^{v_{\ell-1}}}{[4(\ell^3!)]^{v_{\ell-1}}} - \delta\right) n^{v_{\ell-1}} \\
& \stackrel{(5.7), (5.8)}{>} \left(\frac{\xi^{v_{\ell-1}}}{[4(\ell^3!)]^{v_{\ell-1}}} - \frac{1}{2} \frac{\xi^{v_{\ell-1}}}{[4(\ell^3!)]^{v_{\ell-1}}}\right) n^{v_{\ell-1}} \\
& = \left(\frac{1}{2} \frac{\xi^{v_{\ell-1}}}{[4(\ell^3!)]^{v_{\ell-1}}}\right) n^{v_{\ell-1}}. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Com o mesmo procedimento feito no Caso 2, temos que a quantidade dessas cópias que são duas a duas disjuntas por hiperaresta é pelo menos

$$\frac{1}{v_{\ell-1}! e_{\ell-1}^2 n^{v_{\ell-1}-k}} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi^{v_{\ell-1}}}{[4(\ell^3!)]^{v_{\ell-1}}}\right) n^{v_{\ell-1}} \stackrel{(5.7)}{=} c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k.$$

No caso em que $\ell = k$, o hipergrafo $H'[S_1, \dots, S_{\ell-1}]$ não possui hiperarestas. Nesse caso chegamos a uma conclusão similar utilizando o hipergrafo $H'[S_1, \dots, S_\ell]$, onde $S_\ell = V_\ell \setminus (\{u, v\} \cup \{w_i^z : i \in [\ell-1], z \in \{u, v\}\})$, e considerando cópias de $K_{\ell-1}^{(k)}$ com núcleo em $S_1 \times \dots \times S_{\ell-1}$. O argumento anterior também se aplica, pois $|S_\ell| \geq \xi n/2$.

Obteremos agora uma cota superior para $|\mathcal{C}_1|$. Existem no máximo $r^{|E(u) \cup E(v)|}$ maneiras de colorir as hiperarestas contendo u ou v . Para evitar cópia arco-íris de $K_{\ell+1}^{(k)}$, as hiperarestas das (pelo menos $c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k$) cópias de $K_{\ell-1}^{(k)}$ podem ser coloridas de no máximo

$$\left(r^{e_{\ell-1}} - [r - 2(\ell - 1) - 1]_{e_{\ell-1}}\right) c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k$$

maneiras. Com a mesma ideia utilizada no Caso 2, temos que esse número vale no máximo

$$\begin{aligned} & \left((2\ell + e_{\ell-1})^2 r^{e_{\ell-1}-1}\right) c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k \\ &= \left(r^{\log_r((2\ell + e_{\ell-1})^2) + e_{\ell-1} - 1}\right) c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k \\ &\stackrel{(5.1)}{<} \left(r^{e_{\ell-1} - \frac{1}{2}}\right) c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k. \end{aligned}$$

Existem no máximo r possibilidades de cor para colorir as hiperarestas restantes de H , e a quantidade dessas hiperarestas é no máximo

$$|E(H)| - c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k e_{\ell-1} - |E(u) \cup E(v)|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_1| &\leq r^{|E(u) \cup E(v)|} r^{c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k (e_{\ell-1} - \frac{1}{2})} \\ &\quad \cdot r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k e_{\ell-1} - |E(u) \cup E(v)|} \\ &= r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + \delta n^k - \frac{1}{2} c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k} \\ &\stackrel{(5.8)}{<} r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) - \frac{1}{4} c_3 \xi^{v_{\ell-1}} n^k} \\ &\stackrel{n \gg 0}{<} r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) - 1}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Com isso, obtemos que

$$|\mathcal{C}_2| = |\mathcal{C}| - |\mathcal{C}_1| \geq r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)})+m} - r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)})-1} \geq r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)})+m-1}.$$

Agora, obteremos uma cota superior para o número de colorações de \mathcal{C}_2 restritas às hiperarestas de $E(u) \cup E(v)$. Seja Δ uma dessas colorações, e seja D o conjunto das cores que pertencem a algum par em C_a . Como $a(\Delta) < \ell - 1$ é máximo, existe uma classe, digamos W_h , para a qual todo par de cores que é abundante com respeito a W_h contém uma cor em D . Pela hipótese desse caso, existem no máximo $r^{2\gamma n^{k-1}}$ maneiras de colorir hiperarestas ruins em $E(u) \cup E(v)$ (péssimas ou defeituosas). Existem no máximo $r^{2\ell} (2\ell)^{2\ell}$ maneiras de escolhermos as cores para os pares em C_a . Pela Afirmação 2.1.5, existem no máximo

$$2 \binom{\ell - 2}{k - 1} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right)^{k-1} n^{k-1}$$

hiperarestas ótimas em $E(u) \cup E(v)$ que não interceptam W_h (perceba que para $\ell = k$ não existem hiperarestas ótimas que não interceptam W_h), que podem ser coloridas com no máximo r cores.

Assim, falta contarmos o número de maneiras de colorirmos as hiperarestas ótimas em $E(u) \cup E(v)$ que interceptam W_h , ou seja, hiperarestas ótimas que contêm u ou v . Para isso, separamos a coloração Δ em dois casos. Dados uma cor $\alpha \in [r]$ e $z \in \{u, v\}$, seja $A_\alpha^z = \{y \in W_h : |E_\alpha(y, z)| \geq \sqrt{\xi} n^{k-2}\}$. Seja ainda $d = 4\gamma \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k} \right)$.

O número de colorações tais que, para toda cor $\alpha \in [r] \setminus D$, vale que $|A_\alpha^u| < dn$ e $|A_\alpha^v| < dn$, é no máximo

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{x=0}^{dn-1} \binom{|W_h|}{x} 2^{xn^{k-2}} \binom{|W_h|n^{k-2}}{|W_h|\sqrt{\xi}n^{k-2}} \right)^{2r} (2\ell)^{2n^{k-1}} \\
& \stackrel{(3.1)}{\leq} (dn)^{2r} n^{2rdn} 2^{2rdn^{k-1}} 2^{2rh(\sqrt{\xi})n^{k-1}} (2\ell)^{2n^{k-1}} \\
& \stackrel{(5.3)}{\leq} (dn)^{2r} n^{2rdn} 2^{2rdn^{k-1}} 2^{n^{k-1}} (2\ell)^{2n^{k-1}} \\
& \stackrel{n \gg 0}{<} 2^{2r4\gamma(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k})} n^{k-1} (2\ell)^{2n^{k-1}} \\
& \stackrel{(5.8), (5.2)}{<} (4\ell)^{2n^{k-1}}, \tag{5.28}
\end{aligned}$$

pois para cada cor α em $[r] \setminus D$ e para cada vértice $z \in \{u, v\}$, escolhemos menos do que dn vértices y de W_h . Então, escolhemos as hiperarestas ótimas contendo y e z para assumirem cor α . Para os demais vértices y de W_h , escolhemos menos do que $\sqrt{\xi}n^{k-2}$ hiperarestas ótimas contendo y e z para assumirem cor α . Após isso, existem no máximo $(2\ell)^{2n^{k-1}}$ maneiras de colorirmos as hiperarestas restantes com cores pertencentes a D .

O número de colorações tais que existe uma cor α para a qual $|A_\alpha^u| \geq dn$, onde u foi tomado sem perda de generalidade, vale no máximo

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{x=0}^{\sqrt{\xi}n-1} \binom{|A_\alpha^u|}{x} 2^{xn^{k-2}} \binom{|A_\alpha^u|n^{k-2}}{|A_\alpha^u|\sqrt{\xi}n^{k-2}} \right)^r (2\ell)^{|A_\alpha^u| \binom{\ell-2}{k-2} (\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k})^{k-2} n^{k-2}} \\
& \cdot r^{\binom{\ell-2}{k-2} (\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k})^{k-2} n^{k-2}} r^{\binom{\ell-2}{k-2} (\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k})^{k-1} n^{k-1}}, \tag{5.29}
\end{aligned}$$

pois para cada cor β em $[r] \setminus (D \cup \{\alpha\})$, podemos escolher menos do que $\sqrt{\xi}n$ vértices y de A_α^u para os quais mais do que $\sqrt{\xi}n^{k-2}$ hiperarestas ótimas contendo y e v possuem cor β (caso contrário o par (α, β) seria abundante com respeito a W_h). Assim, para os demais vértices y de A_α^u podemos escolher menos do que $\sqrt{\xi}n^{k-2}$ hiperarestas contendo v e y para assumir cor β . Após isso, temos no máximo 2ℓ cores disponíveis para colorirmos as hiperarestas restantes que interceptam A_α^u

e contêm v com cores em D . Para os vértices y de $W_h \setminus A_\alpha^u$ podemos colorir as hiperarestas ótimas contendo y e v livremente. Por fim, podemos colorir livremente as hiperarestas ótimas contendo u e interceptando W_h .

Utilizando (3.1), vemos que (5.29) vale no máximo

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{\xi} n |A_\alpha^u| \sqrt{\xi} n 2^{\sqrt{\xi} n^{k-1}} 2^{h(\sqrt{\xi}) |A_\alpha^u| n^{k-2}} \right)^r (2\ell)^{|A_\alpha^u| \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-2} n^{k-2}} \\
& \cdot r^{|W_h| \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-2} n^{k-2}} r^{-|A_\alpha^u| \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-2} n^{k-2}} r^{\binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1}} \\
\leq & \left(\sqrt{\xi} n \sqrt{\xi} n^{+1} 2^{\sqrt{\xi} n^{k-1}} 2^{h(\sqrt{\xi}) n^{k-1}} \right)^r \left(\frac{2\ell}{r} \right)^{|A_\alpha^u| \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-2} n^{k-2}} \\
& \cdot r^{2 \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1}}. \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Porém,

$$\left(\frac{2\ell}{r} \right)^{|A_\alpha^u| \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-2} n^{k-2}}$$

é máximo quando $|A_\alpha^u|$ for mínimo, o que implica que (5.30) vale no máximo

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{\xi} n \sqrt{\xi} n^{+1} 2^{\sqrt{\xi} n^{k-1}} 2^{h(\sqrt{\xi}) n^{k-1}} \right)^r \left(\frac{2\ell}{r} \right)^{4\gamma \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1}} \\
& \cdot r^{2 \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1}},
\end{aligned}$$

que é igual a

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{\xi} n \sqrt{\xi} n^{+1} 2^{\sqrt{\xi} n^{k-1}} 2^{h(\sqrt{\xi}) n^{k-1}} \right)^r r^{2 \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1}} \\
& \cdot r^{-4\gamma \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1}} (2\ell)^{4\gamma \binom{\ell-2}{k-2} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1}}. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Desses dois casos, claramente o segundo é o maior, portanto podemos limitar superiormente o número de maneiras de colorir as hiperarestas ótimas que contêm u ou v e interceptam W_h por duas vezes o valor em (5.31).

Logo, temos que o número total de colorações de \mathcal{C}_2 restritas a hiperarestas em $E(u) \cup E(v)$ vale no máximo

$$\begin{aligned}
& r^{2\gamma n^{k-1}} r^{2\ell} (2\ell)^{2\ell} r^{2\binom{\ell-2}{k-1}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} \\
& \cdot 2 \left(\sqrt{\xi} n^{\sqrt{\xi} n+1} 2^{\sqrt{\xi} n^{k-1}} 2^{h(\sqrt{\xi}) n^{k-1}} \right)^r r^{2\binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} \\
& \cdot r^{-4\gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} (2\ell)^{4\gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} \\
\stackrel{n \gg 0}{<} & r^{2\gamma n^{k-1}} r^{2\binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} r^{2\binom{\ell-2}{k-1}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} \\
& \cdot r^{-3\gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} (2\ell)^{4\gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} r^{-3}. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Escrevendo $2\ell = r^{\log_r(2\ell)}$, e utilizando o Triângulo de Pascal, temos que (5.32) é igual a

$$\begin{aligned}
& r^{2\gamma n^{k-1}} r^{2\binom{\ell-1}{k-1}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} \\
& \cdot r^{-3\gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} r^{4\gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} (\log_r(2\ell)) n^{k-1} r^{-3} \\
\leq & r^{2\binom{\ell-1}{k-1}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} \\
& \cdot r^{-\gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} r^{4\gamma \binom{\ell-2}{k-2}} \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} (\log_r(2\ell)) n^{k-1} r^{-3} \\
= & r^{[2\binom{\ell-1}{k-1} + 4\gamma \binom{\ell-2}{k-2} \log_r(2\ell) - \gamma \binom{\ell-2}{k-2}] \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} - 3} \\
\stackrel{(5.1)}{<} & r^{[2\binom{\ell-1}{k-1} - \frac{1}{2}\gamma \binom{\ell-2}{k-2}] \left(\frac{1}{\ell} + \ell^2 \delta^{1/k}\right)^{k-1} n^{k-1} - 3} \\
\stackrel{(5.9)}{<} & r^{[(2\binom{\ell-1}{k-1} - \frac{1}{4}\gamma \binom{\ell-2}{k-2}) \left(\frac{1}{\ell}\right)^{k-1}] n^{k-1} - 3} \\
\stackrel{n \gg 0}{<} & r^{2\binom{\ell-1}{k-1} \lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor^{k-1} - 3} \quad (5.33) \\
\leq & r^{\delta(T_\ell^{(k)}(n)) + \delta(T_\ell^{(k)}(n-1)) - 3}.
\end{aligned}$$

Logo, temos que o número de r -colorações livres de $(K_{\ell+1}^{(k)}, P_A)$ de $H - \{u, v\}$ é pelo menos

$$\frac{|\mathcal{C}_2|}{r^{\delta(T_\ell^{(k)}(n)) + \delta(T_\ell^{(k)}(n-1)) - 3}} \geq \frac{r^{\text{ex}(n, K_{\ell+1}^{(k)}) + m - 1}}{r^{\delta(T_\ell^{(k)}(n)) + \delta(T_\ell^{(k)}(n-1)) - 3}} = r^{\text{ex}(n-2, K_{\ell+1}^{(k)}) + m + 2},$$

o que conclui a demonstração do Teorema 1.8.2.

□

5.2 Demonstração da estabilidade para colorações para $K_{\ell+1}^{(k)}$ arco-íris

Agora, demonstraremos o Lema 1.8.6. Repetimos seu enunciado.

Lema 1.8.6. *Sejam $\ell \geq k \geq 2$. Existe $r_0 = r_0(\ell, k)$ tal que para todo $r \geq r_0$ vale o seguinte. Dado $\delta > 0$, existe n_0 tal que, se $H = (V, E)$ é um hipergrafo k -uniforme com $n \geq n_0$ vértices, satisfazendo $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H) \geq r^{t_\ell^{(k)}(n)}$, então H possui uma partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$ de V para a qual*

$$B_{I, \mathcal{W}}(H) \leq \delta n^k,$$

onde $I = (1^{(k)}, 0^{(\ell-k)})$.

Para obtermos essa demonstração, seguimos uma ideia muito similar à utilizada para demonstrar o Teorema 1.8.5, porém aqui queremos que o número mínimo de cores não dependa da constante que vem da estabilidade Erdős-Simonovits e, por isso, algumas alterações são necessárias. Após (3.11), a demonstração do Teorema 1.8.5 é dividida em dois casos que dependem da constante que vem da estabilidade Erdős-Simonovits. No primeiro caso, essa estabilidade não é utilizada e obtemos uma contradição no número de r -colorações livres de (F, P_A) do hipergrafo H . No segundo caso a estabilidade Erdős-Simonovits é utilizada para obtermos uma partição, que dá origem à partição desejada no enunciado do Teorema. Para a demonstração do Lema 1.8.6, a divisão dos casos não poderá depender da constante que vem da estabilidade Erdős-Simonovits. Além disso, no primeiro caso a contradição quanto ao número de r -colorações livres de $(K_{\ell+1}^{(k)}, P_A)$ de H também será obtida, porém de maneira diferente. O somatório em (3.11) será separado em duas partes dependendo do tipo de hipergrafo reduzido multicolorido \mathcal{R} sobre o qual o somatório ocorre. Para alguns tipos de hipergrafo \mathcal{R} ,

a contradição será obtida de forma direta, tal como foi feito na demonstração do Teorema 1.8.5. Para os demais hipergrafos \mathcal{R} , utilizaremos a estabilidade mais precisa do Teorema 1.7.1 para obter a contradição. No segundo caso também será utilizada a estabilidade do Teorema 1.7.1 para obtermos a partição desejada, tal como acontece na demonstração do Teorema 1.8.5.

Demonstração do Lema 1.8.6. Seja $\delta > 0$ fixo. Considere

$$r_0 = r_0(k, \ell) = \max \left\{ (e_{\ell+1} - 1)^{\frac{2}{k!}(2\ell^{4k})+2}, (e_{\ell+1} - 1)^{[(2\ell)^{v_{\ell+1-k}+1}]2\ell^k} \right\}. \quad (5.34)$$

Fixe um número positivo

$$\eta < \frac{\delta}{2r} \quad (5.35)$$

pequeno o suficiente para satisfazer

$$2^{v_{\ell+1-k}+1}\ell^{v_{\ell+1}}(4h(r\eta) + 4r\eta) < \frac{\delta}{2} \quad (5.36)$$

e para que a equação (5.43) seja satisfeita. Para esse η , sejam

$$\epsilon < \max \left\{ \frac{\eta}{4}, \frac{r\eta}{4} \right\} \quad (5.37)$$

e

$$m_0 \geq \frac{1}{\epsilon} \quad (5.38)$$

obtidos do Lema 3.1.3. Consideramos ainda que m_0 é grande o suficiente para algumas desigualdades, que estão sinalizadas com $m_0 \gg 0$.

O Teorema 3.1.1 nos fornece N_0 , M_0 e m , onde $m_0 \leq m \leq M_0$. Considere $n_0 = \max\{N_0, M_0\}$. Seja H o hipergrafo com $n \geq n_0$ vértices tal que $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, P_A}(H) \geq r^{t_\ell^{(k)}}$ e fixa uma dessas colorações. Pelo Teorema 3.1.1, existe uma partição $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ que é ϵ -regular simultaneamente com respeito a todas

as cores. Seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\eta)$ o hipergrafo reduzido multicolorido obtido a partir dessa partição ϵ -regular e η . Como na demonstração do Teorema 1.8.5, obtemos que o número de hiperarestas de H que estão em uplas que não são ϵ -regular, ou que estão em uplas que possuem densidade baixa para algum cor, ou que interceptam alguma classe em mais do que um vértice é no máximo $r\eta n^k$. Chamaremos essas hiperarestas de *não representadas por \mathcal{R}* . Como na demonstração do Teorema 1.8.5 (equação (3.11)), obtemos que $c_{r, K_{\ell+1}^{(k)}, \mathcal{P}_A}(H)$ é limitado superiormente por

$$2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left((e_{\ell+1} - 1)^{\sum_{j=1}^{\ell+1} e_j(\mathcal{R})} r^{\sum_{j=e_{\ell+1}}^r e_j(\mathcal{R})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}, \quad (5.39)$$

onde o somatório é sobre todas as possíveis partições \mathcal{P} de $[m]$ e sobre todos os possíveis hipergrafos reduzidos multicoloridos \mathcal{R} . Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 1.8.5, a existência de uma cópia de $K_{\ell+1}^{(k)}$ em \mathcal{R} onde todas as hiperarestas possuem lista de cores de tamanho pelo menos $e_{\ell+1}$ implicaria na existência de uma cópia arco-íris de $K_{\ell+1}^{(k)}$ em H . Com isso, vale que

$$\sum_{j=e_{\ell+1}}^r e_j(\mathcal{R}) < t_{\ell}^{(k)}(m).$$

Dado um hipergrafo reduzido multicolorido \mathcal{R} , seja

$$\beta(\mathcal{R}) = \frac{1}{m^k} \left(t_{\ell}^{(k)}(m) - \sum_{j=e_{\ell+1}}^r e_j(\mathcal{R}) \right).$$

Assim como na demonstração do Teorema 1.8.5, dividimos a prova em dois casos.

- (a) Para todo hipergrafo reduzido multicolorido \mathcal{R} vale que $\beta(\mathcal{R}) \geq 4h(r\eta) + 4r\eta$.
- (b) Existe um hipergrafo reduzido multicolorido para o qual $\beta(\mathcal{R}) < 4h(r\eta) + 4r\eta$.

No caso (a), separamos o somatório em (5.39) em dois casos. Para os hipergrafos \mathcal{R} tais que $\beta(\mathcal{R}) \geq (2\ell^{4k})^{-1}$, temos que (5.39) vale no máximo

$$\begin{aligned} & 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left((e_{\ell+1} - 1)^{\binom{m}{k} - (t_\ell^{(k)}(m) - \beta m^k)} r^{t_\ell^{(k)}(m) - \beta m^k} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k} \\ & \leq 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left(\frac{(e_{\ell+1} - 1)^{\frac{m^k}{k!} + \beta m^k}}{r^{\beta m^k/2}} r^{t_\ell^{(k)}(m) - \beta m^k/2} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Porém,

$$\begin{aligned} & \frac{(e_{\ell+1} - 1)^{\frac{m^k}{k!} + \beta m^k}}{r^{\beta m^k/2}} = \left(\frac{(e_{\ell+1} - 1)^{\frac{1}{k!} + \beta}}{r^{\beta/2}} \right)^{m^k} \\ & \stackrel{(5.34)}{\leq} \left(\frac{(e_{\ell+1} - 1)^{\frac{1}{k!} + \beta}}{\left((e_{\ell+1} - 1)^{\frac{2}{k!}(2\ell^{4k}) + 2} \right)^{\beta/2}} \right)^{m^k} \\ & = \left(\frac{(e_{\ell+1} - 1)^{\frac{1}{k!}}}{(e_{\ell+1} - 1)^{\frac{\beta}{k!}(2\ell^{4k})}} \frac{(e_{\ell+1} - 1)^\beta}{(e_{\ell+1} - 1)^\beta} \right)^{m^k} \stackrel{\beta \geq (2\ell^{4k})^{-1}}{\leq} 1. \end{aligned}$$

Logo, (5.40) vale no máximo

$$2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left(r^{t_\ell^{(k)}(m) - \beta m^k/2} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^k}.$$

Como na demonstração do Teorema 1.8.5, obtemos que esse número é no máximo

$$2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} r^{t_\ell^{(k)}(n) - \beta n^k/2} \quad (5.41)$$

$$\leq M_0^n 2^{rM_0^k} 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta n^k} r^{t_\ell^{(k)}(n) - \beta n^k/2} \quad (5.42)$$

$$\stackrel{\eta \ll 0, n \gg 0}{<} r^{t_\ell^{(k)}(n)}. \quad (5.43)$$

Para os hipergrafos \mathcal{R} tais que $4h(r\eta) + 4r\eta \geq \beta(\mathcal{R}) \leq (2\ell^{4k})^{-1}$, seja \mathcal{R}' o hipergrafo obtido por \mathcal{R} após a remoção de todas as hiperarestas cuja lista

de cores possui menos do que $e_{\ell+1}$ cores. Considere

$$p = \left(t_{\ell}^{(k)}(m) - \sum_{j=e_{\ell+1}}^r e_j(\mathcal{R}) \right) = \beta m^k.$$

Note que

$$|E(\mathcal{R}')| = \sum_{j=e_{\ell+1}}^r e_j(\mathcal{R}) = t_{\ell}^{(k)}(m) - p.$$

Como $\beta \leq (2\ell^{4k})^{-1}$, vale que

$$\beta m^k + \ell^2 m^{k-1} \leq \frac{m^k}{2\ell^{4k}} + \ell^2 m^{k-1} \stackrel{m_0 \gg 0}{<} \frac{m^k}{\ell^{4k}}. \quad (5.44)$$

Como não existe cópia de $K_{\ell+1}^{(k)}$ em \mathcal{R}' , o Teorema 1.7.1 garante que existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{\ell}\}$ de $[m]$ tal que

$$\begin{aligned} |B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R}')| &\leq \ell^{k-1}(p + \ell^2 m^{k-1}) \\ &= \ell^{k-1}(\beta m^k + \ell^2 m^{k-1}) \\ &\stackrel{m_0 \gg 0}{\leq} (\ell^k - 1)\beta m^k. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Como na demonstração do Teorema 1.8.5, obtemos que

$$|B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})| \leq (2\ell)^{v_{\ell+1}-k} \cdot \ell^k \beta m^k.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{e_{\ell+1}-1} e_j(\mathcal{R}) \leq (2\ell)^{v_{\ell+1}-k} \cdot \ell^k \beta m^k + \ell^k \beta m^k = [(2\ell)^{v_{\ell+1}-k} + 1] \ell^k \beta m^k.$$

Portanto, (5.39) vale no máximo

$$\begin{aligned}
& 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta m^k} \sum_{(\mathcal{P}, \mathcal{R})} \left((e_{\ell+1} - 1) [(2\ell)^{v_{\ell+1}-k} + 1] \ell^k \beta m^k r^{\sum_{j=e_{\ell+1}}^r e_j(\mathcal{R})} \right) \left(\frac{n}{m} \right)^k \\
& \leq M_0^n 2^r M_0^k 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta m^k} \cdot \left((e_{\ell+1} - 1) [(2\ell)^{v_{\ell+1}-k} + 1] \ell^k \beta m^k r^{t_\ell^{(k)}(m) - \beta m^k} \right) \left(\frac{n}{m} \right)^k \\
& \stackrel{r \geq r_0}{\leq} M_0^n 2^r M_0^k 2^{h(r\eta)n^k} r^{r\eta m^k} \cdot \left(r^{t_\ell^{(k)}(m) - \frac{\beta}{2} m^k} \right) \left(\frac{n}{m} \right)^k \\
& \stackrel{n \gg 0}{\leq} r^{h(r\eta)n^k + r\eta m^k} \cdot \left(r^{t_\ell^{(k)}(m) - \frac{\beta}{2} m^k} \right) \left(\frac{n}{m} \right)^k \\
& \leq r^{h(r\eta)n^k + r\eta m^k} r^{t_\ell^{(k)}(n) - \frac{\beta}{2} n^k}.
\end{aligned}$$

Para $\beta \geq 4h(r\eta) + 4r\eta$, temos que isso vale no máximo

$$\begin{aligned}
& r^{-(h(k!r\eta) + r\eta)n^k} r^{t_\ell^{(k)}(n)} \\
& < r^{t_\ell^{(k)}(n)}.
\end{aligned}$$

No caso (b), seja \mathcal{R} o hipergrafo reduzido multicolorido para o qual $\beta < 4h(r\eta) + 4r\eta$, e considere novamente \mathcal{R}' . Pelo Teorema 1.7.1 temos que existe uma partição $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ tal que

$$|B_{I, \mathcal{U}}(\mathcal{R}')| \leq \ell^k \beta m^k.$$

De maneira similar ao que foi feito na demonstração do Teorema 1.8.5, obtemos que

$$|B_{I, \mathcal{U}}(\mathcal{R})| < 2^{v_{\ell+1}-k+1} \ell^{v_{\ell+1}} \beta m^k. \quad (5.46)$$

Para o hipergrafo H , considere a partição $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_\ell\}$, onde para todo $i \in [\ell]$, $W_i = \bigcup_{j \in U_i} V_j$. Vamos determinar uma cota superior para $|B_{I, \mathcal{W}}(H)|$. No máximo todas as $r\eta m^k$ hiperarestas não representadas por \mathcal{R} pertencem a $B_{I, \mathcal{W}}(H)$ e para cada uma dessas hiperarestas existem no máximo $\left(\frac{n}{m}\right)^k$

hiperarestas ruins de H que não seriam representadas em \mathcal{R} . Portanto, de maneira similar ao que foi feito no caso genérico, temos que

$$\begin{aligned}
|B_{I,\mathcal{W}}(H)| &\leq r\eta n^k + \left(\frac{n}{m}\right)^k |B_{I,\mathcal{U}}(\mathcal{R})| \\
&\stackrel{(5.46)}{<} r\eta n^k + 2^{v_{\ell+1}-k+1} \ell^{v_{\ell+1}} \beta n^k \\
&= (r\eta + 2^{v_{\ell+1}-k+1} \ell^{v_{\ell+1}} \beta) n^k \\
&\leq (r\eta + 2^{v_{\ell+1}-k+1} \ell^{v_{\ell+1}} (4h(r\eta) + 4r\eta)) n^k \\
&\stackrel{(5.35)}{\leq} \left(\frac{\delta}{2} + 2^{v_{\ell+1}-k+1} \ell^{v_{\ell+1}} (4h(r\eta) + 4r\eta)\right) n^k \\
&\stackrel{(5.36)}{\leq} \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}\right) n^k \\
&= \delta n^k,
\end{aligned}$$

como desejado. □

5.3 Investigações futuras

Acreditamos que a demonstração do Teorema 1.8.2 e do Lema 1.8.6 abrem portas para a investigação de resultados relacionados aos hipergrafos e famílias de hipergrafos abordados no Capítulo 2 (Seção 2.3). Uma proposta de investigação seria a de tentar adaptar a demonstração do Lema 1.8.6 para obtermos o mesmo resultado para o hipergrafo $F_{\ell+1}^{(k)}$, bem como adaptar a demonstração do Teorema 1.8.2 para obtermos o mesmo resultado para o hipergrafo $F_{\ell+1}^{(k)}$. Vale ressaltar que os autores de [6] mostraram que o hipergrafo $F_{\ell+1}^{(k)}(J)$ é Turán-estável para qualquer hipergrafo J . Além disso, no caso em que J é um hipergrafo linear, o hipergrafo $F_{\ell+1}^{(k)}(J)$ é linear e, portanto, o Teorema 1.8.5 garante que, nesse caso, vale a estabilidade para colorações arco-íris para $F_{\ell+1}^{(k)}(J)$. Outra proposta de investigação futura seria a de tentar adaptar a demonstração do Lema 1.8.6 para obtermos o mesmo resultado para o hipergrafo $F_{\ell+1}^{(k)}(J)$ para qualquer hipergrafo

linear J , bem como adaptar a demonstração do Teorema 1.8.2 para obtermos o mesmo resultado para o hipergrafo $F_{\ell+1}^{(k)}(J)$ para algumas escolhas fixas de hipergrafo linear J .

6 CONCLUSÕES

O principal foco do trabalho foi a obtenção do hipergrafo H para o qual $c_{r,F,P_A}(H) = c_{r,F,P_A}(n)$ nos casos em que $F \in \{\text{Fano}, K_{\ell+1}^{(k)}\}$ e n é suficientemente grande, ou seja, para $F \in \{\text{Fano}, K_{\ell+1}^{(k)}\}$ e n suficientemente grande, encontramos o hipergrafo k -uniforme H que possui o maior número de r -colorações que não contêm cópia arco-íris de F , onde k é o tamanho das hiperarestas de F (Teorema 1.8.1 e Teorema 1.8.2). Como ferramenta, demonstramos que vale a estabilidade, dentro desse contexto de colorações arco-íris, para todos os hipergrafos k -uniformes F que são lineares, Turán-estáveis e cujo hipergrafo extremal de F é isomorfo a $H_{I,\mathcal{V}}(n)$, para alguma escolha de partição \mathcal{V} de $[n]$ e $I \in \mathcal{I}_{\ell,K}^*$, o que é o caso para Fano e $K_{\ell+1}^{(k)}$ (Teorema 1.8.5). Particularmente para o hipergrafo $K_{\ell+1}^{(k)}$, obtivemos um resultado de estabilidade para colorações arco-íris que vale para um número mínimo de cores r_0 que depende apenas de ℓ e k (Lema 1.8.6). Como ferramenta para tal estabilidade, demonstramos um resultado de estabilidade (dentro do contexto do Problema de Turán) que é mais preciso do que os já existentes na literatura (Teorema 1.7.1).

O Teorema 1.7.1 e o Teorema 2.1.2 geraram a publicação de um resumo expandido no *Electronic Notes in Discrete Mathematics* [8], tendo sido apresentado na *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications 2017*, em Viena. A versão completa desse trabalho foi submetida para publicação de um artigo [12]. Tal submissão ainda está em análise. Ainda, serão submetidos como artigo o Teorema 1.8.2 e o Lema 1.8.6 [9], o Teorema 1.8.1 [10], e o Teorema 1.8.5 [11].

Nossos resultados ainda abrem possibilidades para pesquisas futuras. Enunciamos diversas questões específicas em aberto nos capítulos que tratam de nossas contribuições.

Índice Remissivo

arco-íris, 7

estabilidade Erdős-Simonovits, 5

estabilidade Füredi, 5

extremal, 2

grafo completo expandido, 10

hiperarestas ótimas, 82

hiperarestas defeituosas, 83

hiperarestas péssimas, 83

hiperarestas ruins, 13

hipergrafo, 9

linear, 17

monocromático, 6

padrão, 6

partição balanceada, 2

plano de Fano, 12

Turán-estável, 17

Turán-extremal, 17

Referências Bibliográficas

- [1] P. Allen, J. Böttcher, O. Cooley, R. Mycroft, Tight cycles and regular slices in dense hypergraphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 149 (2017) 30-100.
- [2] N. Alon, J. Balogh, P. Keevash, B. Sudakov, The number of edge colorings with no monochromatic cliques, *Journal of the London Mathematical Society* 70(2) (2004) 273-288.
- [3] J. Balogh, A remark on the number of edge colorings of graphs, *European Journal of Combinatorics* 27 (2006) 565-573.
- [4] F. S. Benevides, C. Hoppen, R. M. Sampaio, Edge-colorings of graphs avoiding complete graphs with a prescribed coloring, *Discrete Mathematics* 340(9) (2017) 2143-2160.
- [5] F. S. Benevides, T. Łuczak, A. Scott, J. Skokan, M. White, Monochromatic cycles in two-coloured graphs, *Combinatorics, Probability & Computing* 21 (2012) 57-87.
- [6] A. Brandt, D. Irwin, T. Jiang, Stability and Turán numbers of a class of hypergraphs via Lagrangians, *Combinatorics, Probability and Computing* 26(3) (2017) 367-405.
- [7] D. Clemens, S. Das, T. Tran, Colourings without monochromatic disjoint pairs, *European Journal of Combinatorics*, 70 (2018) 99-124.
- [8] L. O. Contiero, C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, Stability of extremal Hypergraphs with applications to an edge-coloring problem, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 61 (2017) 263-269.

- [9] L. O. Contiero, C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, The Rainbow Erdős-Rothschild Problem for Hypergraphs (em preparação).
- [10] L. O. Contiero, C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, The Rainbow Erdős-Rothschild Problem for the Fano plane (em preparação).
- [11] L. O. Contiero, C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, Stability results for a class of linear hypergraphs in a rainbow Erdős-Rothschild problem (em preparação).
- [12] L. O. Contiero, C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, Stability results for two classes of hypergraphs, submetido à publicação.
- [13] Z. Cvetkovski, Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems, Springer Verlag (2012).
- [14] D. de Caen, Z. Füredi, The maximum size of 3-uniform hypergraphs not containing a Fano plane, Journal of Combinatorial Theory, Series B 78 (2000) 274-109.
- [15] P. Erdős, On some new inequalities concerning extremal properties of graphs, Theory of graphs Proc. Coll. Tihany (Hungary) (1966) 77-81.
- [16] P. Erdős, On the structure of linear graphs, Israel Journal of Mathematics 1(3) (1963) 156-160.
- [17] P. Erdős, Some new applications of probability methods to combinatorial analysis and graph theory, Congressus Numerantium No. X Utilitas Math. (1974) 39-51.
- [18] P. Erdős, Some recent results on extremal problems in graph theory, Theory of graphs International Symp. Rome. (1966) 118-123.

- [19] P. Erdős, M. Simonovits, A limit theorem in graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar* 1 (1966) 51-57.
- [20] Z. Füredi, A proof of the stability of extremal graphs, Simonovits's stability from Szemerédi's regularity, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 115 (2015) 66-71.
- [21] Z. Füredi, M. Simonovits, The History of Degenerate (Bipartite) Extremal Graph Problems, *Erdős Centennial* 169-264.
- [22] P. Hall, On Representatives of Subsets, *Journal of the London Mathematical Society*, 10(1) (1935) 26-30.
- [23] D. Hanson, B. Toft, k -saturated graphs of chromatic number at least k , *Ars Combinatoria* 31 (1991) 159-164.
- [24] C. Hoppen, Y. Kohayakawa, H. Lefmann, Edge colorings of graphs avoiding monochromatic matchings of a given size, *Combinatorics, Probability & Computing* 21(1-2) (2012) 203-218.
- [25] C. Hoppen, Y. Kohayakawa, H. Lefmann, Edge-colorings of uniform hypergraphs avoiding monochromatic matchings, *Discrete Mathematics* 338(2) (2015) 262-271.
- [26] C. Hoppen, Y. Kohayakawa, H. Lefmann, Hypergraphs with many Kneser colorings, *European Journal of Combinatorics* 33 (2012) 816-843.
- [27] C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, A coloring problem for intersecting vector spaces, *Discrete Mathematics* 339 (2016) 2941-2954.

- [28] C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, A rainbow Erdős-Rothschild problem, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 31(4) (2017) 2647-2674.
- [29] C. Hoppen, H. Lefmann, K. Odermann, J. Sanches, Edge-colorings avoiding rainbow stars, *Journal of Graph Theory* 87(4) (2017) 399-429.
- [30] G.O.K. Katona, Extremal problems for hypergraphs, *Combinatorics. NATO Advanced Study Institutes Series C* 16 (1975), 215-244.
- [31] P. Keevash, *Hypergraph Turán problems*, *Surveys in Combinatorics* 392 Cambridge University Press (2011) 83-140.
- [32] P. Keevash, B. Sudakov, The Turán Number Of The Fano Plane, *Combinatorica* 25(5) (2005) 561-574.
- [33] Y. Kohayakawa, B. Nagle, V. Rödl, M. Schacht, Weak hypergraph regularity and linear hypergraphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100 (2010) 151-160.
- [34] J. Komlós, M. Simonovits, Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory, *Combinatorics: Paul Erdős is eighty, Vol. 2* (Keszthely, 1993), János Bolyai Math. Soc., Budapest (1996) 295-352.
- [35] H. Lefmann, Y. Person, Exact Results on the Number of Restricted Edge Colorings for some Families of Linear Hypergraphs, *Journal of Graph Theory* 73(1) (2013) 1-31.

- [36] H. Lefmann, Y. Person, V. Rödl, M. Schacht, On colorings of hypergraphs without monochromatic Fano planes, *Combinatorics, Probability & Computing* 18 (2009) 803-818.
- [37] H. Lefmann, Y. Person, M. Schacht, A structural result for hypergraphs with many restricted edge colorings, *Journal of Combinatorics* 1 (2010) 441-475.
- [38] W. Mantel, Problem 28, solution by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh, and W.A. Wytho, *Wiskundige Opgaven* 10 (1907) 60-61.
- [39] D. Mubayi, A hypergraph extension of Turán's theorem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 96(1) (2006) 122-134.
- [40] D. Mubayi, O. Pikhurko, A new generalization of Mantel's theorem to k -graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 97(4) (2007) 669-678.
- [41] B. Nagle, V. Rödl, M. Schacht, The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs, *Random Structures and Algorithms* 28(2) (2006) 113-179.
- [42] O. Pikhurko, Exact computation of the hypergraph Turán function for expanded complete 2-graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 103(2) (2013) 220-225.
- [43] O. Pikhurko, K. Staden, Z. B. Yilma, The Erdős-Rothschild problem on edge-colourings with forbidden monochromatic cliques, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 163(2) (2017) 341-356.

- [44] O. Pikhurko, Z. B. Yilma, The maximum number of K_3 -free and K_4 -free edge 4-colorings, *Journal of the London Mathematical Society* 85(3) (2012) 593-615.
- [45] V. Rödl, J. Skokan, Regularity Lemma for k -uniform hypergraphs, *Random Structures & Algorithm*, 25(1) (2004) 1-42.
- [46] M. Simonovits, A Method for Solving Extremal Problems in Graph Theory, *Stability Problems, Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)* Academic Press New York (1968) 279-319.
- [47] E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)* (1978) 399-401.
- [48] P. Turán, On an extremal problem in graph theory (em húngaro), *Matematikai és Fizikai Lapok* 48 (1941) 436-452.
- [49] M. Tyomkyn, A. J. Uzzell, Strong Turán stability, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 22(3) (2015) 1-24.
- [50] W. C. Waterhouse, Do symmetric problems have symmetric solutions?, *The American Mathematical Monthly* 90(6) (1983) 378-387.
- [51] R. Yuster, The number of edge colorings with no monochromatic triangle, *Journal of Graph Theory* 21 (1996) 441-452.