

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

DANIEL MENDES SECHINSKE

MECÂNICA QUÂNTICA ATRAVÉS DOS PROPAGADORES DE
FEYNMAN

Porto Alegre
2018

Daniel Mendes Sechinske

**MECÂNICA QUÂNTICA ATRAVÉS DOS PROPAGADORES DE
FEYNMAN**

Revisão bibliográfica desenvolvida durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso e apresentada à banca avaliadora do Curso de Física - Bacharelado da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como pré-requisito para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientadora: Sandra Regina Prado, Dr^a.

Porto Alegre
2018

CIP - Catalogação na Publicação

Mendes Sechinske, Daniel
Mecânica Quântica através dos propagadores de
Feynman / Daniel Mendes Sechinske. -- 2018.
41 f.
Orientadora: Sandra Denise Prado.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto
de Física, Curso de Física: Pesquisa Básica, Porto
Alegre, BR-RS, 2018.

1. Mecânica Quântica. 2. Teoria de Perturbação. 3.
Propagadores de Feynman. I. Prado, Sandra Denise,
orient. II. Título.

DANIEL MENDES SECHINSKE

MECÂNICA QUÂNTICA ATRAVÉS DOS PROPAGADORES DE
FEYNMAN

Revisão bibliográfica desenvolvida durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso e apresentada à banca avaliadora do Curso de Física - Bacharelado da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como pré-requisito para obtenção do título de Bacharel em Física.

Nota obtida: _____ (_____)

Aprovado em:

Área de concentração: Mecânica Quântica

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Sandra Regina Prado, Dr^a.

Avaliador: Carlos Felipe Lardizabal, Dr.

Avaliador: Emerson Luna, Dr.

Porto Alegre

2018

Dedicatória

À minha mãe, por ter me criado sozinho e encontrado tempo para incentivar a ciência e a curiosidade, tanto em mim quanto em seus alunos.

RESUMO

Equações diferenciais não homogêneas, como as encontradas na mecânica quântica, muitas vezes não apresentam solução analítica, principalmente quando tais funções dependem explicitamente do tempo. A teoria de perturbação dependente do tempo surge como solução aproximativa para contornar este problema. No trabalho que segue utilizaremos das funções de Green para solucionar a equação de Schrödinger e a equação de Dirac, a última com e sem interação eletromagnética, e tais objetos serão denominados propagadores de Feynman. Iremos introduzir a teoria de perturbação através da expansão em série destes propagadores, onde a solução perturbativa, como no caso com interação eletromagnética, será dada em ordens da solução homogênea, a equação de Dirac para partícula livre. A amplitude de probabilidade de transição entre estados será dada através da matriz de espalhamento S_{fi} , e os diagramas de Feynman surgirão como um meio de representar esta amplitude.

Palavras chave: Mecânica quântica, teoria de perturbação dependente do tempo, interação eletromagnética, propagadores de Feynman, matriz de espalhamento, diagramas de Feynman.

ABSTRACT

Non homogeneous differential equations, like the ones we can find in quantum mechanics, usually do not have analytic solutions, especially when we deal with time dependent non homogenous functions. This is, where perturbation theory comes to hand, as an approximate solution to this kind of problem. In this work we will use Green's functions as a method do solve Schrödinger's equation and Dirac's equations, the last one with and without electromagnetic interaction, and these functions will then be called Feynman's Propagators. The perturbation theory will be introduced by the expansion in series of these objects, where the perturbative solution, like the one with eletromagnetic interaction, will be given in orders of the non perturbative solution, the Dirac's equation as it is. At last, the transition probability amplitude between two states will be given by the scattering matrix S_{fi} , where the Feynman's diagrams are going to be a representation of the terms of this object.

Keywords: Quantum mechanics, time dependent perturbation theory, electromagnetic interation, Feynman's propagators, scattering matrix, Feynman's diagrams.

Lista de Figuras

1	Espalhamento de um elétron em primeira aproximação.	38
2	Espalhamento de um pósitron em primeira aproximação.	38
3	Aniquilação de par elétron-pósitron em primeira aproximação.	39
4	Criação de par elétron-pósitron em primeira aproximação.	39

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 REFERENCIAL TEÓRICO	11
1.1 Equação de Schrödinger	11
1.1.1 <i>Picture</i> de interação	12
1.1.2 Série de Dyson para o operador $\hat{U}(t, t_0)$	14
1.1.3 Matriz S de espalhamento	15
1.2 Equação de Dirac	16
1.2.1 Equação da continuidade para a equação de Dirac	20
1.2.2 Equação de Dirac para o espinor adjunto	21
1.2.3 Soluções para partícula livre	22
1.2.4 Interpretação de Feynman-Stueckelberg	24
1.3 Equação de Dirac com interação eletromagnética	25
2 PROPAGADORES DE FEYNMAN	27
2.1 Motivação (Hamiltoniano independente do tempo)	27
2.2 Relação entre o propagador de Feynman e as funções de Green	28
2.3 Hamiltoniano dependente do tempo (primeira ordem)	29
2.4 Método de Schwinger e solução perturbativa	30
2.5 Propagador de Feynman Relativístico	31
2.6 Solução não perturbada para o propagador de Feynman	32
2.7 Matriz S_{fi} relativística	35
2.8 Interpretação através dos diagramas de Feynman	37
CONCLUSÃO	40
REFERÊNCIAS	41

INTRODUÇÃO

Com o advento da mecânica quântica no início do século XX muitos fenômenos já conhecidos experimentalmente passaram, também, a ter uma fundamentação teórica, como os níveis de energia quantizados para o átomo de hidrogênio e o *spin*. Duas das principais equações que regem os efeitos quânticos são a equação de Schrödinger e a equação de Dirac, a primeira para fenômenos não relativísticos, e a segunda contendo tal implementação. Entretanto, existem poucas soluções analíticas para tais equações, e, em geral, são para potenciais não dependentes do tempo, onde soluções aproximativas e cálculo numérico surgem como possíveis soluções para este problema.

Neste trabalho apresentaremos a teoria de perturbação para tratamento de potenciais dependentes do tempo, através da série de Dyson para o operador de evolução temporal e da solução de equações diferenciais através das funções de Green. Destes resultados surgirão os propagadores de Feynman e sua expansão em série de potências, a conhecida série de Neumann-Liouville. Por fim, introduziremos a matriz de espalhamento S_{fi} como a amplitude de probabilidade de transição entre dois estados quânticos, onde os diagramas de Feynman serão utilizados como representações da mesma.

Esta monografia é uma revisão bibliográfica e está organizada em duas seções:

- **Capítulo 1:** Contém uma revisão teórica da equação de Schrödinger, teoria de perturbação dependente do tempo, espalhamento através da matriz S_{fi} e equação de Dirac, assim como solução relativística para partícula livre.
- **Capítulo 2:** Soluções da equação de Schrödinger e equação de Dirac através do método da função de Green, aqui denominados propagadores de Feynman, matriz S_{fi} relativística e interpretação através dos diagramas de Feynman.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 Equação de Schrödinger

Podemos dar início ao desenvolvimento da mecânica quântica através de seus postulados, entretanto, não convém a este trabalho enunciá-los, mas partiremos de um postulado em específico, que diz que a evolução temporal de um sistema preserva a normalização de um estado $|\psi\rangle$, ou seja, é dada por uma transformação unitária (JAFFE, 1996).

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (1)$$

onde a equação (1) é válida para certo operador unitário $\hat{U}(t, t_0)$. Este postulado implica que $|\psi(t)\rangle$ deve satisfazer uma equação diferencial da forma abaixo (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011).

$$\hat{H} |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle, \quad (2)$$

para H hermitiano. O operador na equação (2) é conhecido como operador Hamiltoniano, e aqui convém introduzir a formulação ondulatória da mecânica quântica, para tanto, escrevemos:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{R}, t) \quad (3)$$

A seguir, a fim de conectar o momentum \vec{p} com a posição \vec{r} utilizamos do postulado de ondas planas, de onde é possível obter a relação de comutação $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} e^{i\vec{r}\cdot\vec{p}/\hbar} \quad (4)$$

Da relação 4 é possível demonstrar que o operador momento no espaço de posição é representado por:

$$\hat{P} = -i\hbar \nabla \quad (5)$$

A partir deste resultado, escrevemos a equação (2) na representação de posição, conhecida como equação de Schrödinger, publicada pelo mesmo em 1926.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) \quad (6)$$

onde,

$$\begin{aligned} \langle\vec{r}|\psi(t)\rangle &= \psi(\vec{r},t) \\ \langle\vec{r}|\hat{H}|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2m}\langle\vec{r}|\hat{P}^2|\psi(t)\rangle + \langle\vec{r}|\hat{V}(\hat{R},t)|\psi(t)\rangle \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t). \end{aligned}$$

1.1.1 *Picture* de interação

Não é trivial encontrar uma solução analítica para a equação (6), portanto, utilizaremos de métodos aproximativos, mais especificamente da teoria de perturbação dependente do tempo. Para abordar este tema utilizaremos do *picture* de interação, que consiste em escrever o hamiltoniano em duas partes: a primeira não perturbada, independente do tempo, e a segunda contendo a dependência temporal.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t) \quad (7)$$

Aqui, introduzimos o operador de evolução temporal $\hat{U}(t, t_0)$, responsável pela transformação unitária de um estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ para o estado final $|\psi(t)\rangle$, conforme equação (1).

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} \quad (8)$$

Utilizando (7), reescrevemos a equação acima.

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}e^{-i\hat{H}_1(t-t_0)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}_0(t, t_0)\hat{U}_1(t, t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

Deste resultado, define-se a relação entre um estado no *picture* de Schrödinger $|\psi_s\rangle$ e um estado no *picture* de interação $|\psi_I\rangle$.

$$|\psi\rangle_s \stackrel{\text{def}}{=} U_0(t, t_0) |\psi\rangle_I \quad (10)$$

Substituindo a definição acima na equação de Schrödinger e utilizando unidades naturais ($\hbar = 1$) obtemos:

$$\begin{aligned} (\hat{H}_0 + \hat{H}_1)U_0 |\psi\rangle_I &= i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{U}_0 |\psi\rangle_I) \\ \hat{H}_0 \hat{U}_0 |\psi\rangle_I + \hat{H}_1 \hat{U}_0 |\psi\rangle_I &= i \hat{U}_0 \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I + i \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_0 \right) |\psi\rangle_I \\ \hat{H}_0 \hat{U}_0 |\psi\rangle_I + \hat{H}_1 \hat{U}_0 |\psi\rangle_I &= i \hat{U}_0 \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I + i \hat{H}_0 \hat{U}_0 |\psi\rangle_I \\ \hat{H}_1 \hat{U}_0 |\psi\rangle_I &= i \hat{U}_0 \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I \end{aligned} \quad (11)$$

Aplicando o operador \hat{U}_0^{-1} à esquerda da equação (11) e definindo $\hat{H}_I \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}_0^{-1} \hat{H}_1 \hat{U}_0$ encontra-se uma equação semelhante à equação de Schrödinger para o estado no *picture* de interação.

$$\hat{H}_I |\psi\rangle_I = i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I \quad (12)$$

Considera-se agora a evolução temporal do estado no *picture* de interação, dado pela equação (1).

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \quad (13)$$

Substituindo a expressão (13) na equação (12) se obtém:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I = \hat{H}_I \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \quad (14)$$

Portanto:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}_I \hat{U}(t, t_0) \quad (15)$$

1.1.2 Série de Dyson para o operador $\hat{U}(t, t_0)$

Se a interação imposta por \hat{H}_I for suficientemente pequena, quando comparada com o Hamiltoniano \hat{H}_0 , a teoria de perturbação apresentará resultados condizentes com os experimentos. Começamos supondo uma expansão em série para o operador $\hat{U}(t, t_0)$ (BASSALO, 2006).

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}^{(n)}(t, t_0) \quad (16)$$

Onde $\hat{U}^{(n)}(t, t_0)$ é o termo de n-ésima ordem. Substituindo este resultado em (15) obtemos:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}^{(n)}(t, t_0) \right) = \hat{H}_I \left(\hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}^{(n)}(t, t_0) \right) \quad (17)$$

Igualando a equação termo a termo encontramos uma relação de recorrência.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^{(1)}(t, t_0) &= \hat{H}_I \\ i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^{(2)}(t, t_0) &= \hat{H}_I \hat{U}^{(1)}(t, t_0) \\ &\dots \\ i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^{(n+1)}(t, t_0) &= \hat{H}_I \hat{U}^{(n)}(t, t_0) \end{aligned} \quad (18)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(1)}(t, t_0) &= -i \int_{t_0}^t \hat{H}_I(t_1) dt_1 \\ \hat{U}^{(2)}(t, t_0) &= (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{H}_I(t_2) \hat{H}_I(t_1) dt_1 \\ &\dots \\ \hat{U}^{(n)}(t, t_0) &= (-i)^n \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} \hat{H}_I(t_n) \hat{H}_I(t_{n-1}) \dots \hat{H}_I(t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Neste momento, é interessante implementar o operador de ordenação temporal \hat{T} , este é definido como:

$$\begin{aligned}\hat{T}[\hat{A}_1(t_1)\hat{A}_2(t_2)\dots\hat{A}_n(t_n)] &= \hat{A}_1(t_1)\hat{A}_2(t_2)\dots\hat{A}_n(t_n) \text{ se } t_1 > t_2 > \dots > t_n \\ \hat{T}[\hat{A}_1(t_1)\hat{A}_2(t_2)\dots\hat{A}_n(t_n)] &= \hat{A}_2(t_2)\hat{A}_1(t_1)\dots\hat{A}_n(t_n) \text{ se } t_2 > t_1 > \dots > t_n \\ \hat{T}[\hat{A}_1(t_1)\hat{A}_2(t_2)\dots\hat{A}_n(t_n)] &= \hat{A}_n(t_n)\hat{A}_1(t_1)\dots\hat{A}_2(t_2) \text{ se } t_n > t_1 > \dots > t_2 \\ &\dots\end{aligned}$$

Desta definição escrevemos,

$$\hat{U}^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{T}[\hat{H}_I(t_n)\hat{H}_I(t_{n-1})\dots\hat{H}_I(t_1)] \quad (20)$$

de onde, reescrevemos a equação (16) como:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{T}[\hat{H}_I(t_n)\hat{H}_I(t_{n-1})\dots\hat{H}_I(t_1)] \quad (21)$$

A expressão acima é conhecida como série de Dyson para o operador evolução temporal. Ainda, ao identifica-la como a série de potências para a função exponencial é possível escrever o operador $\hat{U}(t, t_0)$ formalmente como:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \left[-ie^{\int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1} \right] \quad (22)$$

1.1.3 Matriz S de espalhamento

Neste capítulo introduziremos a noção de espalhamento através de um conjunto de partículas isoladas, isto é, não interagentes em $t = -\infty$, elas então se deslocam até $t = 0$ onde a interação ocorre e são detectadas no futuro distante, em $t = +\infty$. Para tanto seja o estado inicial $|i(t)\rangle$ e o estado final $|f(t')\rangle$, definimos a matriz S_{fi} como a amplitude de probabilidade de $|f\rangle$ ocorrer dado $|i\rangle$.

$$S_{fi} \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(t') | \hat{S} | i(t) \rangle \quad (23)$$

Pela expressão (1) escrevemos a evolução temporal do estado inicial como:

$$|\psi(t')\rangle = \hat{U}(t', t) |i(t)\rangle \quad (24)$$

Desta forma, a matriz S_{fi} é identificada como a projeção do estado $|f(t')\rangle$ sobre o conjunto de estados possíveis $|\psi(t')\rangle$:

$$S_{fi} = \langle f(t') | \psi(t') \rangle \quad (25)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty}} \langle f(t') | \hat{U}(t', t) | i(t) \rangle \quad (26)$$

Ou, na forma de operadores,

$$\hat{S} |i\rangle = \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty}} \hat{U}(t', t) |i\rangle \quad (27)$$

onde, através de (22), identificamos \hat{S} como:

$$\hat{S} = \hat{T} \left[-ie^{\int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t_1) dt_1} \right] \quad (28)$$

$$= \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}[\hat{H}_I(t_n) \hat{H}_I(t_{n-1}) \dots \hat{H}_I(t_1)] dt_1 \quad (29)$$

$$= \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{t_2} \hat{H}_I(t_n) \hat{H}_I(t_{n-1}) \dots \hat{H}_I(t_1) dt_1 \quad (30)$$

Por fim, a probabilidade de $|f\rangle$ ocorrer dado $|i\rangle$ será dada pela norma quadrática de S_{fi} , isto é:

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | \hat{S} | i \rangle|^2 \quad (31)$$

1.2 Equação de Dirac

A equação de Schrödinger apesar de apresentar vários resultados práticos, como os níveis de energia para o átomo de hidrogênio, não apresenta em sua formulação base o *spin*. Também, esta teoria é baseada em um Hamiltoniano não relativístico, portanto,

falha ao tentar explicar tais fenômenos. No capítulo que segue iremos apresentar a equação de Dirac como solução para estes problemas.

Começamos da forma já conhecida para a energia relativística,

$$E = \gamma mc^2 \quad (32)$$

onde,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (33)$$

com,

$$\alpha^2 = \frac{v^2}{c^2}. \quad (34)$$

Desta expressão podemos reescrever a forma da energia relativística através de:

$$\begin{aligned} E(1 - \alpha^2) &= \frac{mc^2}{\gamma} \\ E &= E\alpha^2 + mc^2\sqrt{1 - \alpha^2} \end{aligned} \quad (35)$$

Ainda, note que podemos escrever o termo $E\alpha^2$ através de,

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{v} &= \frac{E}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= E \frac{v^2}{c^2} \\ &= E\alpha^2 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{v}}{c} \quad (37)$$

$$E\alpha^2 = c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \quad (38)$$

portanto, reescrevemos a equação (35), mas antes definimos $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - \alpha^2}$, desta forma,

$$E = c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \beta(mc^2) \quad (39)$$

tomando o quadrado desta expressão obtemos,

$$\begin{aligned} E^2 &= c^2 \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \beta^2 (mc^2)^2 \\ &+ c(mc^2) \left[\left(\sum_i \alpha_i p_i \beta \right) + \left(\sum_i \beta \alpha_i p_i \right) \right] \\ &= c^2 \sum_{ij} \left(\frac{\{\alpha_i, \alpha_j\}}{2} p_i p_j \right) + \beta^2 (mc^2)^2 \\ &+ 2c(mc^2) \sum_i \left(\frac{\{\alpha_i, \beta\}}{2} p_i \right) \end{aligned} \quad (40)$$

onde $\{A, B\}$ é o anticomutador, definido como $\{A, B\} = AB + BA$.

Mas, o resultado para E^2 já é conhecido da teoria da relatividade especial,

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2 \quad (41)$$

assim, para que haja equivalência entre as equações (40) e (41) as seguintes relações devem ser satisfeitas simultaneamente:

$$\beta^2 = 1 \quad (42)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad (43)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (44)$$

Tais relações são claramente não satisfeitas para escalares. Portanto uma abordagem matricial é necessária, pela forma quadrática de E^2 estas matrizes deverão ser de ordem par. Em um estudo mais atento é possível verificar que não é possível encontrar uma base em $M^2(\mathbb{C})$ que satisfaça tais relações, a lógica seguinte são matrizes $\in M^4(\mathbb{C})$, onde se mostra possível encontrar tais objetos.

Utilizaremos como base em $M^4(\mathbb{C})$ a representação de Pauli-Dirac para α e β , também, utilizaremos da notação em blocos para matrizes, onde uma matriz $\in M^4(\mathbb{C})$ será representada por quatro blocos de matrizes $\in M^2(\mathbb{C})$,

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli, que respeitam a seguinte álgebra:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \hat{1} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \text{ para } i, j, k = 1, 2, 3 \quad (47)$$

Tendo em vista as definições anteriores e voltando a equação em 39, define-se o Hamiltoniano de Dirac como:

$$\hat{H}_D \stackrel{\text{def}}{=} c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \hat{\beta}(mc^2) \quad (48)$$

Assumindo unidades naturais, isto é, $\hbar = c = 1$ e partindo dos resultados em (2) e em (5), será possível encontrar a equação de Dirac.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= -i(\hbar c) \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi + \hat{\beta}(mc^2) \Psi \\ i\hat{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= -i\beta \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi + \hat{\beta}^2 m \Psi \\ -i\hat{\beta} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \nabla \right] \Psi + m\hat{1} \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Definindo a derivada contravariante ∂_μ , que se transforma como um tensor contravariante, e também definindo as matrizes de Dirac γ^μ ,

$$\partial_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (50)$$

$$\gamma^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad (51)$$

$$\vec{\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\beta} \vec{\alpha} = \hat{\beta} \left(\sum_i^3 \alpha_i \hat{e}_i \right)$$

$$\gamma^0 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\beta}$$

$$\gamma^i \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\beta} \alpha_i$$

encontramos a equação de Dirac em sua forma covariante, o que garantirá sua invariância frente a uma transformação de Lorentz,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m\hat{1})\Psi = 0 \quad (52)$$

onde $\Psi \in \mathbb{C}^4$ é o espinor de Dirac, isto é, um vetor de quatro componentes. Ainda, é conveniente introduzir a notação *slash* de Feynman: $\gamma^\mu a_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \not{a}$,

$$(i\not{a} - m\hat{1})\Psi = 0. \quad (53)$$

1.2.1 Equação da continuidade para a equação de Dirac

Começamos buscando uma equação de Dirac para o espinor conjugado Ψ^\dagger . De (2) e (39) temos:

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^\dagger &= (\hat{H}_D \Psi)^\dagger \\ i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^\dagger &= -\Psi^\dagger \hat{H}_D^\dagger \end{aligned} \quad (54)$$

Somando o resultado da multiplicação de Ψ^\dagger à direita em (49) com a multiplicação de Ψ à esquerda em (54), obtemos,

$$\begin{aligned}
i\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \Psi + i \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi^\dagger \right) \Psi &= \Psi^\dagger \hat{H}_D \Psi - \Psi^\dagger \hat{H}_D^\dagger \Psi \\
&= \Psi^\dagger (\hat{H}_D - \hat{H}_D^\dagger) \Psi \\
i \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \Psi) &= -i \nabla \cdot (\Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \Psi) + \nabla \cdot (\Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi) &= 0
\end{aligned} \tag{55}$$

onde definindo $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^\dagger \Psi$ e $\vec{j} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi$ obtemos a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{56}$$

Ainda, definindo a quadricorrente $j^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\rho, \vec{j})$ encontramos a equação da continuidade em sua forma covariante:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{57}$$

Note que $\rho = \Psi^\dagger \Psi = |\Psi|^2 \geq 0$, ou seja, é positiva definida, podendo ser interpretada como densidade de probabilidade.

1.2.2 Equação de Dirac para o espinor adjunto

A invariância de Lorentz é dada sobre $\bar{\Psi} \Psi$, onde $\bar{\Psi}$ é o espinor adjunto de Dirac, definido como $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, desta forma é interessante demonstrar a equação de Dirac para este objeto. Tomando o conjugado hermitiano da equação (52) se obtém:

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^\dagger \gamma^0 - i \frac{\partial}{\partial x^k} \Psi^\dagger (\gamma^k)^\dagger - m \hat{1} \Psi^\dagger = 0 \tag{58}$$

Multiplicando a equação acima por γ^0 se obtém:

$$-i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} (\gamma^0 \gamma^0) + i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^k} \gamma^k \gamma^0 - m \hat{1} \Psi^\dagger \gamma^0 = 0 \tag{59}$$

Mas, $\gamma^k \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^k$, logo,

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \gamma^0 + i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^k} \gamma^k + m \hat{1} \bar{\Psi} &= 0 \\ i(\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu + m \hat{1} \bar{\Psi} &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

onde (60) é a equação de Dirac para o espinor adjunto.

1.2.3 Soluções para partícula livre

Note que se não impormos a relação $\hat{P} = -i\hbar \nabla$ em (48) e multiplicarmos à direita por γ^0 obtemos a equação de Dirac na representação de momento:

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} m) \Psi &= E \Psi \\ \gamma^0 E \Psi - \gamma^0 \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \Psi - \gamma^0 \hat{\beta} m \Psi &= 0 \\ \gamma^\mu (E, -\vec{p}) \Psi - m \hat{1} \Psi &= 0 \\ (\gamma^\mu p_\mu - m \hat{1}) \Psi &= 0 \\ (\not{p} - m \hat{1}) \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Ainda, utilizando da notação reduzida em $M^4(\mathbb{C})$ escrevemos \not{p} na representação de Pauli-Dirac.

$$\not{p} = \begin{pmatrix} E \hat{1} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E \hat{1} \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \quad (63)$$

Também, iremos supor solução de onda plana para o espinor Ψ tal que:

$$\Psi = u(p_\mu) e^{-ix^\mu p_\mu} \quad (64)$$

substituindo em (61) obtemos uma equação para $u(p_\mu)$,

$$(\not{p} - m\hat{1})u(p_\mu) = 0 \quad (65)$$

com $u(p_\mu)$ espinor em $M^4(\mathbb{C})$, representando arbitrariamente através de,

$$u(p_\mu) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Através de (65), encontramos um sistema de duas equações para os vetores u_A e u_B ,

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}u_A - (E + m)\hat{1}u_B = 0 \quad (67)$$

$$(E - m)\hat{1}u_A - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}u_B = 0 \quad (68)$$

isolando u_B na primeira expressão e substituindo o resultado na segunda obtemos,

$$u_B = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}u_A \quad (69)$$

$$u_A = \frac{p^2}{E^2 - m^2}u_A \quad (70)$$

onde, desconsiderando a normalização, obtemos quatro vetores ortonormais em $M^4(\mathbb{C})$.

$$u_0 = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} E + m \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$u_1 = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} 0 \\ E + m \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$(73)$$

$$u_2 = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ E - m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$u_3 = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ E - m \end{pmatrix} \quad (75)$$

Note que a expressão para a energia relativística é dada por $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$, ou seja, admite valores negativos, ainda, assumindo $\lim_{p \rightarrow 0}$ é necessário que $u_{0,1}$ correspondam a $E > 0$ e $u_{2,3}$ correspondam a $E < 0$, a fim de que o denominador nas expressões sejam não nulos. No próximo capítulo, as soluções de energia negativa serão melhor discutidas.

1.2.4 Interpretação de Feynman-Stueckelberg

A existência de antipartículas foi prevista em 1928 por Paul A. Dirac, em 1930 o mesmo propôs uma interpretação, a denominada **Teoria dos Buracos de Dirac** ou **Mar de Dirac** onde partículas negativas corresponderiam a buracos no mar de Dirac. A primeira antipartícula fora detectada experimentalmente em 1932 por Carl D. Anderson, esta era o pósitron, antipartícula do elétron. Utilizaremos neste trabalho a **interpretação de Feynman-Stueckelberg**, proposta em 1941, onde antipartículas correspondem a partículas de energia negativa se movendo no sentido reverso do tempo.

Desta conclusão iremos reescrever os estados $u_{2,3}$ como:

$$u_{2,3}(-E, -\vec{p}) = v_{1,0}(E, \vec{p}) \quad (76)$$

$$v_0 = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ E + m \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$v_1 = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ E + m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Ainda, escrevemos a equação de Dirac no espaço de momento para os espinores

de antipartícula através da mesma substituição, isto é, $-E \rightarrow E$ e $-\vec{p} \rightarrow \vec{p}$.

$$(\not{p} + m)v(p_\mu) = 0 \quad (79)$$

$$v(p_\mu) = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix}$$

1.3 Equação de Dirac com interação eletromagnética

Com o intuito de encontrar uma equação covariante para um sistema quântico sob a interação de um campo eletromagnético utilizaremos da **substituição mínima** na equação de Dirac, dada pela seguinte transformação:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \quad (80)$$

$$E \rightarrow \pi^0 = E - e\phi \quad (81)$$

Onde ϕ é potencial elétrico e \vec{A} é o vetor potencial magnético. Iremos então obter o hamiltoniano de interação, lembrando que estamos utilizando unidades naturais,

$$\hat{H}_D^{int} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + m\hat{\beta} + e\hat{\phi} \quad (82)$$

de onde a equação de Dirac é obtida através da relação em (2),

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + m\hat{\beta} + e\hat{\phi})\Psi &= i\frac{\partial}{\partial t}\Psi \\ \gamma^0(\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + m\hat{\beta} + e\hat{\phi} - i\frac{\partial}{\partial t})\Psi &= 0 \\ (-1) \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^0 \vec{\alpha} \cdot \nabla + e\gamma^0 \hat{\phi} + e\gamma^0 \vec{\alpha} \cdot \vec{A} - m\gamma^0 \hat{\beta} \right) \Psi &= 0 \\ i\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \Psi - e\gamma^\mu (\hat{\phi}, -\vec{A}) \Psi - m\hat{1}\Psi &= 0 \\ (\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m\hat{1})\Psi &= 0 \\ (i\not{\partial} - e\not{A} - m\hat{1})\Psi &= 0 \end{aligned} \quad (83)$$

e na representação do quadrimomento de interação π_μ :

$$\begin{aligned}\pi_\mu &= (\pi^0, -\vec{\pi}) \\ (\gamma^\mu \pi_\mu - m\hat{1})\Psi &= 0 \\ (\not{\pi} - m\hat{1})\Psi &= 0\end{aligned}\tag{84}$$

2 PROPAGADORES DE FEYNMAN

2.1 Motivação (Hamiltoniano independente do tempo)

Começamos supondo que as coordenadas espaciais e temporal em $\psi(\vec{r}, t)$ podem ser desacopladas, e então escrevemos a solução do sistema da forma (BASSALO, 2006),

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n u_n(\vec{r}) e^{-iE_n t} \quad (85)$$

onde $u_n(\vec{r})$ é autovetor, solução para a equação de autovalores,

$$\hat{H}(\vec{r}) u_n(\vec{r}) = E_n u_n(\vec{r}) \quad (86)$$

e portanto é base para um sistema ortonormal e completo:

$$\int u_n^*(\vec{r}) u_m(\vec{r}) d^3 r = \delta_{nm} \quad (87)$$

$$\sum_n u_n^*(\vec{r}') u_n(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (88)$$

Ainda, para determinar os coeficientes c_n multiplicamos a equação (85) à esquerda por $u_m^*(\vec{r})$, e a integramos em todo espaço,

$$\begin{aligned} \int u_m^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) d^3 r &= \sum_n c_n e^{-iE_n t} \int u_m^*(\vec{r}) u_n(\vec{r}) d^3 r \\ &= \sum_n c_n e^{-iE_n t} \delta_{nm} \\ &= c_m e^{-iE_m t} \\ c_m &= e^{iE_m t} \int u_m^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) d^3 r \end{aligned} \quad (89)$$

com este resultado escrevemos $\psi(\vec{r}, t)$ explicitamente, mas note que este objeto não necessariamente possui a mesma ordenação espaço-temporal de c_m , portanto,

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}_2, t_2) &= \sum_n c_n u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n t_2} \\
&= \sum_n \left(e^{iE_n t_1} \int u_n^*(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_1, t_1) d^3 r_1 \right) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n t_2} \\
&= \int \left(\sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \right) \psi(\vec{r}_1, t_1) d^3 r_1 \\
&= \int K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \psi(\vec{r}_1, t_1) d^3 r_1
\end{aligned} \tag{90}$$

onde definimos $K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1)$, o propagador de Feynman. Note que tomando $t_2 = t_1 = t$ a seguinte propriedade será satisfeita,

$$K_F(\vec{r}_2, t; \vec{r}_1, t) = \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \tag{91}$$

2.2 Relação entre o propagador de Feynman e as funções de Green

Note que o propagador de Feynman é responsável por levar um sistema nas coordenadas (\vec{r}_1, t_1) para outro nas coordenadas (\vec{r}_2, t_2) , ainda, na mecânica quântica não relativística o tempo possui somente uma direção de propagação, portanto, é necessário impor que,

$$K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \text{ se } t_2 > t_1 \tag{92}$$

$$K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = 0 \text{ se } t_2 < t_1 \tag{93}$$

que pode ser escrita de forma compacta através da função Heaviside $\theta(t_2 - t_1)$:

$$K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \theta(t_2 - t_1) \tag{94}$$

Iremos agora aplicar a equação (2) sobre o propagador de Feynman a fim de encontrar um importante resultado para a continuação deste trabalho.

$$\begin{aligned}
\left(i\frac{\partial}{\partial t_2} - \hat{H}(\vec{r}_2)\right) K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) &= \left(i\frac{\partial}{\partial t_2} - \hat{H}(\vec{r}_2)\right) \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \theta(t_2 - t_1) \\
&= i \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) (-iE_n) e^{iE_n(t_2-t_1)} \theta(t_2 - t_1) \\
&\quad + i \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \frac{\partial}{\partial t_2} \theta(t_2 - t_1) \\
&\quad - \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) (E_n) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \theta(t_2 - t_1) \\
&= i \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \frac{\partial}{\partial t_2} \theta(t_2 - t_1) \\
&= i \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \delta(t_2 - t_1) \\
&= i \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \delta(t_2 - t_1) \\
&= i \delta(t_2 - t_1) \sum_n u_n^*(\vec{r}_1) u_n(\vec{r}_2) \\
&= i \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)
\end{aligned} \tag{95}$$

Ou seja, o propagador de Feynman é a função de Green, ou função inversa, do operador de Schrödinger $\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(\vec{r})\right)$.

2.3 Hamiltoniano dependente do tempo (primeira ordem)

Buscamos agora uma expressão para $K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1)$ onde o hamiltoniano dependa explicitamente do tempo, isto é, $\hat{H} = \hat{H}(\vec{r}, t)$. Como anteriormente realizado neste trabalho, iremos supor que o hamiltoniano perturbado pode ser escrito como $\hat{H}(\vec{r}, t) = \hat{H}_0(\vec{r}) + \hat{H}_1(t)$ e,

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_2} - \hat{H}_0(\vec{r}_2)\right) K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = i\delta(t_2 - t_1)\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{96}$$

onde $K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1)$ é o propagador de Feynman para o sistema não perturbado, demonstrado na seção anterior. Supomos agora que em primeira aproximação $K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) &= K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \\
&\quad + (-i) \int K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_3, t_3) \hat{H}_1(t_3) K_F(\vec{r}_3, t_3; \vec{r}_1, t_1) d^3r_3 dt_3
\end{aligned} \tag{97}$$

aplicamos agora a equação (2) para o hamiltoniano não perturbado à esquerda da equação acima, obtendo,

$$\begin{aligned}
& \left(i \frac{\partial}{\partial t_2} + \hat{H}_0(\vec{r}_2) \right) K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = \left(i \frac{\partial}{\partial t_2} + \hat{H}_0(\vec{r}_2) \right) K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \\
& + (-i) \left(i \frac{\partial}{\partial t_2} + \hat{H}_0(\vec{r}_2) \right) \int K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_3, t_3) \hat{H}_1(t_3) K_F(\vec{r}_3, t_3; \vec{r}_1, t_1) d^3 r_3 dt_3 \\
& = i\delta(t_2 - t_1)\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + (-i) \int i\delta(t_2 - t_3)\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \hat{H}_1(t_3) K_F(\vec{r}_3, t_3; \vec{r}_1, t_1) d^3 r_3 dt_3 \\
& = i\delta(t_2 - t_1)\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + (-i^2) \hat{H}_1(t_2) K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \\
& \left(i \frac{\partial}{\partial t_2} + \hat{H}_0(\vec{r}_2) - \hat{H}_1(t_2) \right) K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = i\delta(t_2 - t_1)\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
& \left(i \frac{\partial}{\partial t_2} + \hat{H}(\vec{r}_2, t_2) \right) K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = i\delta(t_2 - t_1)\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{98}
\end{aligned}$$

ou seja, um tratamento perturbativo é viável e será solução para o Hamiltoniano completo. No próximo capítulo utilizaremos um tratamento um pouco mais formal para encontrar o termo de n-ésima ordem de $K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1)$.

2.4 Método de Schwinger e solução perturbativa

Para encontrar a solução para a n-ésima perturbação utilizaremos do método de Schwinger (ARAGAO; BOSCHI-FILHO, 2007), para tanto, note que podemos escrever o propagador de Feynman através de,

$$\begin{aligned}
K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) &= \langle \vec{r}_2 | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)/\hbar} | \vec{r}_1 \rangle \\
&= \langle \vec{r}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{r}_1 \rangle \tag{99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_0(\vec{r}_n, t_n; \vec{r}_m, t_m) &= \langle \vec{r}_n | e^{-i\hat{H}_0(t_n-t_m)/\hbar} | \vec{r}_m \rangle \\
&= \langle \vec{r}_n | \hat{U}_0(t_n, t_m) | \vec{r}_m \rangle \tag{100}
\end{aligned}$$

onde demonstramos,

$$\begin{aligned}
K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) &= \langle \vec{r}_2 | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)/\hbar} | \vec{r}_1 \rangle \\
K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \langle \vec{r}_1 | &= \langle \vec{r}_2 | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)/\hbar} | \vec{r}_1 \rangle \langle \vec{r}_1 | \\
\int K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \langle \vec{r}_1 | d^3 r_1 &= \int \langle \vec{r}_2 | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)/\hbar} | \vec{r}_1 \rangle \langle \vec{r}_1 | d^3 r_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \langle \vec{r}_1 | d^3 r_1 &= \langle \vec{r}_2 | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{1} \\
\int K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \langle \vec{r}_1 | \psi(t_1) \rangle d^3 r_1 &= \langle \vec{r}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \psi(t_1) \rangle \\
\int K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \psi(\vec{r}_1, t_1) d^3 r_1 &= \langle \vec{r}_2 | \psi(t_2) \rangle \\
\int K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \psi(\vec{r}_1, t_1) d^3 r_1 &= \psi(\vec{r}_2, t_2)
\end{aligned} \tag{101}$$

Visto isto, substitui-se na expressão (99) o operador de evolução temporal pela sua respectiva série de Dyson, sabendo que $\hat{H}_I = \hat{U}_0^{-1} \hat{H}_1 \hat{U}_0$ e também que,

$$\hat{1} = \int |\vec{r}_n\rangle \langle \vec{r}_n| d^3 r_n \tag{102}$$

se obtém,

$$\begin{aligned}
K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) &= K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \\
&+ (-i) \int K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_3, t_3) \hat{H}_1(t_3) K_0(\vec{r}_3, t_3; \vec{r}_1, t_1) d^3 r_3 dt_3 \\
&+ (-i)^2 \int d^3 r_3 dt_3 \int K_0(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_3, t_3) \hat{H}_1(t_3) K_0(\vec{r}_3, t_3; \vec{r}_4, t_4) \hat{H}_1(t_4) K_0(\vec{r}_4, t_4; \vec{r}_1, t_1) d^3 r_4 dt_4 \\
&+ \mathcal{O}((-i)^3)
\end{aligned} \tag{103}$$

conhecida como série de Neumann-Liouville para o propagador de Feynman e que satisfaz a equação (98).

2.5 Propagador de Feynman Relativístico

A partir deste ponto do trabalho passaremos a utilizar da notação contravariante e covariante, onde temos que $x^{\mu,n} = (t_n, \vec{r}_n)$ e $x_{\mu,n} = (t_n, -\vec{r}_n)$. Ainda, motivados pelo desenvolvimento anterior definimos o propagador de Feynman relativístico através de,

$$(i\hat{\not{D}} - m\hat{1})K_F(x^\mu; x^\nu) = i\delta(x^\mu - x^\nu) \tag{104}$$

e considere a perturbação $-e\gamma^\mu A_\mu = -e\hat{A}$. O propagador de Feynman K_F^A neste caso será dado pela série de Neumann-Liouville,

$$\begin{aligned}
K_F^A(x^{\mu,2}; x^{\mu,1}) &= K_F(x^{\mu,2}; x^{\mu,1}) + (-ie) \int K_F(x^{\mu,2}; x^\alpha) \mathcal{A}(x^\alpha) K_F(x^\alpha; x^{\mu,1}) dx^\alpha \\
&+ (-ie)^2 \int dx^\alpha \int K_F(x^{\mu,2}; x^\alpha) \mathcal{A}(x^\alpha) K_F(x^\alpha; x^\beta) \mathcal{A}(x^\beta) K_F(x^\beta; x^{\mu,1}) dx^\beta \\
&+ \mathcal{O}((-ie)^3)
\end{aligned} \tag{105}$$

onde $dx^n = (dt_n, d^3r_n)$. Ainda, a expressão acima irá satisfazer:

$$(i\hat{\not{D}} - e\hat{\mathcal{A}} - m\hat{1})K_F^A(x^{\mu,2}; x^{\mu,1}) = i\delta(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) \tag{106}$$

2.6 Solução não perturbada para o propagador de Feynman

Para encontrar a solução do problema basta determinar $K_F^A(x^{\mu,2}; x^{\mu,1})$, e para determinar a solução perturbada basta conhecer $K_F(x^{\mu,2}; x^{\mu,1})$ e o potencial de interação $-e\mathcal{A}$. Note que $K_F(x^{\mu,2}; x^{\mu,1})$ é a inversa da equação de Dirac, e portanto, não depende de $-e\mathcal{A}$, logo, é único para todo problema. Nesta seção iremos mostrar que $K_F(x^{\mu,2}; x^{\mu,1})$ pode ser decomposto em uma propagação *forward* e outra *backward* no tempo, partindo da equação de Dirac no espaço de momento,

$$(\not{p} - m\hat{1})\Psi = 0 \tag{107}$$

portanto buscamos a função de Green que irá satisfazer,

$$(\not{p} - m\hat{1})K_F(x^{\mu,2}; x^{\mu,1}) = i\delta(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) \tag{108}$$

escrevendo no espaço de Fourier,

$$K_F(x^{\mu,2}; x^{\mu,1}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int K_F(p^\mu) e^{-ip_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} dp^\mu \tag{109}$$

$$\delta(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} dp^\mu \tag{110}$$

obtendo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int (\not{p} - m\hat{1}) K_F(p^\mu) e^{-ip_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} dp^\mu &= i \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} dp^\mu \\ \frac{1}{(2\pi)^4} \int [K_F(p^\mu)(\not{p} - m\hat{1}) - i\hat{1}] e^{-ip_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} dp^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (111)$$

de onde vemos que,

$$K_F(p^\mu) = i(\not{p} - m\hat{1})^{-1} \quad (112)$$

multiplicando pela identidade $\hat{1} = (\not{p} + m\hat{1})^{-1}(\not{p} + m\hat{1})$,

$$\begin{aligned} (\not{p} - m\hat{1}) &= (\not{p} - m\hat{1})^{-1}(\not{p} + m)^{-1}(\not{p} + m) \\ &= [(\not{p} + m\hat{1})(\not{p} - m\hat{1})]^{-1}(\not{p} + m) \\ &= (\gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu - m\hat{1} + m\hat{1}\not{p} - m^2\hat{1})^{-1}(\not{p} + m\hat{1}) \\ &= \frac{1}{p^\mu p_\mu - m^2} (\hat{1})^{-1}(\not{p} + m\hat{1}) \\ &= \frac{\not{p} + m\hat{1}}{p^\mu p_\mu - m^2} \\ K_F(p^\mu) &= i \frac{\not{p} + m\hat{1}}{p^\mu p_\mu - m^2} \end{aligned} \quad (113)$$

portanto,

$$K_F(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) = i \int \frac{\not{p} + m\hat{1}}{p^\mu p_\mu - m^2} e^{-ip_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} \frac{dp^\mu}{(2\pi)^4} \quad (114)$$

definimos,

$$\Delta_F(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int \frac{1}{p^\mu p_\mu - m^2} e^{-ip_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} \frac{dp^\mu}{(2\pi)^4} \quad (115)$$

e então reescrevemos o propagador de Feynman como:

$$K_F(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) = i(i\gamma^{\mu,2}\partial_{\mu,2} - m\hat{1})\Delta_F(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) \quad (116)$$

Para calcular $\Delta_F(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})$ note que,

$$\Delta_F(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) = - \int e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{p_0^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} - m^2} e^{-ip_0(x^{0,2} - x^{0,1})} \frac{dp^0}{2\pi} \quad (117)$$

A integral em dp^0 possui dois polos, e para evidencia-los escrevemos,

$$\begin{aligned} I_{dp^0} &= \int \frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2} e^{-ip_0(x^{0,2} - x^{0,1})} \frac{dp^0}{2\pi} \\ &= \int \frac{1}{(p_0)^2 - E_p^2} e^{-ip_0(x^{0,2} - x^{0,1})} \frac{dp^0}{2\pi} \end{aligned} \quad (118)$$

$$= \int \frac{1}{(p_0 + E_p)(p_0 - E_p)} e^{-ip_0(x^{0,2} - x^{0,1})} \frac{dp^0}{2\pi} \quad (119)$$

onde sabemos que em unidades naturais $E_p = \vec{p}^2 + m^2$. Para resolver a integral acima utilizaremos do teorema dos resíduos para polos simples (GREINER; REINHARDT, 2009),

$$Resf(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (120)$$

portanto,

$$\begin{aligned} I_{dp^0} &= \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum Resf(z) \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{(p_0 + E_p)(p_0 - E_p)} e^{-ip_0(x^{0,2} - x^{0,1})} \frac{dp^0}{2\pi} \\ &\quad + \oint_{C_2} \frac{1}{(p_0 + E_p)(p_0 - E_p)} e^{-ip_0(x^{0,2} - x^{0,1})} \frac{dp^0}{2\pi} \end{aligned} \quad (121)$$

onde C_1 é o semicírculo inferior percorrido no sentido horário (negativo) e contendo o polo $p_0 = +E_p$, e C_2 é o semicírculo superior contendo o polo $p_0 = -E_p$, percorrido no sentido anti-horário (positivo). Com $x^{0,2} = t_2$ e $x^{0,1} = t_1$ temos,

$$\begin{aligned}
I_{\text{dp}^0} &= -2\pi i \lim_{p_0 \rightarrow +E_p} (p_0 - (+E_p)) \frac{1}{(p_0 + E_p)(p_0 - E_p)} \frac{e^{-ip_0(x^{0,2} - x^{0,1})}}{2\pi} \theta(t_2 - t_1) \\
&+ 2\pi i \lim_{p_0 \rightarrow -E_p} (p_0 - (-E_p)) \frac{1}{(p_0 + E_p)(p_0 - E_p)} \frac{e^{-ip_0(x^{0,2} - x^{0,1})}}{2\pi} \theta(t_1 - t_2) \\
&= -i \frac{e^{-iE_p(t_2 - t_1)}}{2E_p} \theta(t_2 - t_1) + i \frac{e^{iE_p(t_2 - t_1)}}{-2E_p} \theta(t_1 - t_2) \\
&= -i \frac{e^{-iE_p(t_2 - t_1)}}{2E_p} \theta(t_2 - t_1) - i \frac{e^{iE_p(t_2 - t_1)}}{2E_p} \theta(t_1 - t_2)
\end{aligned} \tag{122}$$

de onde,

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) &= i \int \left\{ e^{-E_p(t_2 - t_1)} \theta(t_2 - t_1) + e^{E_p(t_2 - t_1)} \theta(t_1 - t_2) \right\} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \\
&= i \int \left\{ e^{-p_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} \theta(t_2 - t_1) + e^{p_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} \theta(t_1 - t_2) \right\} \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3}
\end{aligned} \tag{123}$$

definindo,

$$\Delta_F(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_F^+(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) + \Delta_F^-(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) \tag{124}$$

com,

$$\Delta_F^+(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) \stackrel{\text{def}}{=} i \theta(t_2 - t_1) \int e^{-p_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \tag{125}$$

$$\Delta_F^-(x^{\mu,2} - x^{\mu,1}) \stackrel{\text{def}}{=} i \theta(t_1 - t_2) \int e^{p_\mu(x^{\mu,2} - x^{\mu,1})} \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \tag{126}$$

onde Δ_F^+ representa um elétron com energia positiva se propagando para frente no tempo, enquanto Δ_F^- representa um elétron com energia negativa se propagando para trás no tempo (pósitron).

2.7 Matriz S_{fi} relativística

Definimos anteriormente a matriz de espalhamento através de

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \lim_{\substack{t_p \rightarrow -\infty \\ t_q \rightarrow +\infty}} \langle f | \hat{U}(t_q, t_p) | i \rangle \\
&= \langle f | \hat{S} | i \rangle
\end{aligned} \tag{127}$$

inserindo as identidades para $|\vec{r}_p\rangle$ e $|\vec{r}_q\rangle$ temos,

$$S_{fi} = \int d^3r_q \int \langle f | \vec{r}_q \rangle \langle \vec{r}_q | \hat{U}(t_q, t_p) | \vec{r}_p \rangle \langle \vec{r}_p | i \rangle d^3r_p \tag{128}$$

onde reconhecemos o propagador de Feynman, pela definição de Schwinger, com $\Psi_i(\vec{r}_p, t_p) = \langle \vec{r}_p | i \rangle$ e $\bar{\Psi}_f(\vec{r}_q, t_q) = \langle f | \vec{r}_q \rangle$ e substituindo o propagador obtemos,

$$S_{fi} = \int d^3r_q dt_q \int \bar{\Psi}_f(\vec{r}_q, t_q) K_F^A(\vec{r}_q, t_q; \vec{r}_p, t_p) \Psi_i(\vec{r}_p, t_p) d^3r_p dt_p \tag{129}$$

usando a notação $dx^{\mu,n} = (dt_n, d^3r_n)$ e $x^{\mu,n} = (t_n, \vec{r}_n)$ e substituindo o propagador pela série em (105) obtemos,

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \int dx^{\mu,q} \int \bar{\Psi}_f(x^{\mu,q}) K_F(x^{\mu,q}; x^{\mu,p}) \Psi_i(x^{\mu,p}) dx^{\mu,p} \\
&+ (-ie) \int dx^{\mu,q} \int dx^{\mu,r} \int \bar{\Psi}_f(x^{\mu,q}) K_F(x^{\mu,q}; x^{\mu,r}) \mathcal{A}(x^{\mu,r}) K_F(x^{\mu,r}; x^{\mu,p}) \Psi_i(x^{\mu,p}) dx^{\mu,p} \\
&+ \mathcal{O}((-ie)^2)
\end{aligned} \tag{130}$$

definindo o resultado das seguintes integrações,

$$\Psi_i(x^{\mu,r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int K_F(x^{\mu,r}; x^{\mu,p}) \Psi_i(x^{\mu,p}) dx^{\mu,p} \tag{131}$$

$$\bar{\Psi}_f(x^{\mu,r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int \bar{\Psi}_f(x^{\mu,q}) K_F(x^{\mu,q}; x^{\mu,r}) dx^{\mu,q} \tag{132}$$

destas definições,

$$\begin{aligned}
\int dx^{\mu,q} \int \bar{\Psi}_f(x^{\mu,q}) K_F(x^{\mu,q}; x^{\mu,p}) \Psi_i(x^{\mu,p}) dx^{\mu,p} &= \int \bar{\Psi}_f(x^{\mu,q}) \Psi_i(x^{\mu,q}) dx^{\mu,q} \\
&= \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle \\
&= \delta_{fi}
\end{aligned} \tag{133}$$

onde δ_{fi} representa o elétron que não sofreu interação com o potencial $-e\mathcal{A}$. A partir dos resultados acima, encontramos,

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \delta_{fi} \\
&+ (-ie) \int \bar{\Psi}_f(x^\mu) \mathcal{A}(x^\mu) \Psi_i(x^\mu) dx^\mu \\
&+ (-ie)^2 \int dx^{\mu,2} \int \bar{\Psi}_f(x^{\mu,2}) \mathcal{A}(x^{\mu,2}) K_F(x^{\mu,2}; x^{\mu,1}) \mathcal{A}(x^{\mu,1}) \Psi_i(x^{\mu,1}) dx^{\mu,1} \\
&+ \mathcal{O}((-ie)^3)
\end{aligned} \tag{134}$$

onde o n-ésimo termo desta série é dado por,

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(n)} &= (-ie)^n \int dx^{\mu,n} \int dx^{\mu,n-1} \dots \int \bar{\Psi}_f(x^{\mu,n}) \mathcal{A}(x^{\mu,n}) \\
&\times K_F(x^{\mu,n}; x^{\mu,n-1}) \mathcal{A}(x^{\mu,n-1}) \dots K_F(x^{\mu,2}; x^{\mu,1}) \mathcal{A}(x^{\mu,1}) \Psi_i(x^{\mu,1}) dx^{\mu,1}
\end{aligned} \tag{135}$$

2.8 Interpretação através dos diagramas de Feynman

A expressão (130) pode ser interpretada no espaço de posições através de grafos, os denominados diagramas de Feynman. Um grafo é um objeto $G(V, A)$ onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas, em um diagrama de Feynman cada vértice ou aresta será associado com um termo matemático. Considere a figura 1, este representa uma partícula em um estado inicial (vértice $\Psi_i(1)$) se propagando livremente (aresta $K_F(1 \rightarrow 2)$) até um ponto onde interage com um potencial (vértice $-ie\gamma^\mu A_\mu$), onde a interação é representada por uma linha tracejada, e então se propaga livremente (aresta $K_F(2 \rightarrow 3)$) até o estado final (vértice $\Psi_f(3)$), unindo estes objetos obtemos o termo em primeira aproximação para S_{fi} , equação (130).

Note que o propagador de Feynman K_F dependerá da ordem temporal dos vértices, por exemplo, no caso em que o tempo do primeiro vértice $t(1)$ é menor do que para o segundo vértice $t(2)$, temos $K_F = -i(i\gamma^\mu \partial_\mu + m\hat{1})\Delta_F^+$, caso contrário, escrevemos $K_F = -i(i\gamma^\mu \partial_\mu + m\hat{1})\Delta_F^-$. Como vimos anteriormente, o primeiro caso é referente a uma partícula se propagando, enquanto que o segundo se refere a propagação de uma

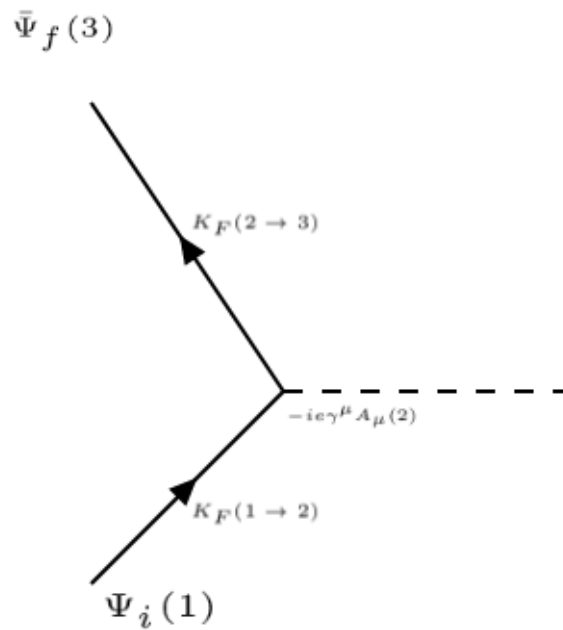


Figura 1 – Espalhamento de um elétron em primeira aproximação.

antipartícula. Considerando uma ordem temporal reversa à figura 1, isto é, $t(3) < t(2) < t(1)$, obtemos o diagrama para o espalhamento de um pósitron,

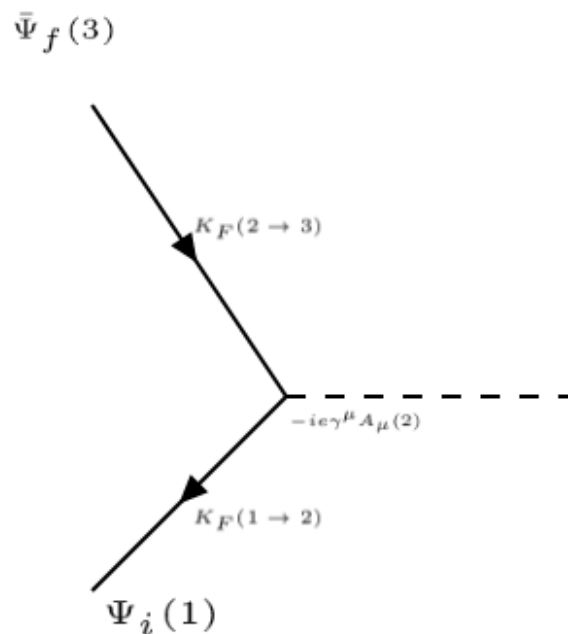


Figura 2 – Espalhamento de um pósitron em primeira aproximação.

onde a figura 2 é interpretada como um pósitron se propagando do estado inicial $\Psi_i(1)$ até um estado final $\bar{\Psi}_f(3)$. Note que a aniquilação de pares é prevista já em primeira aproximação, no caso em que $t(2) > t(1)$ e $t(2) > t(3)$ temos,

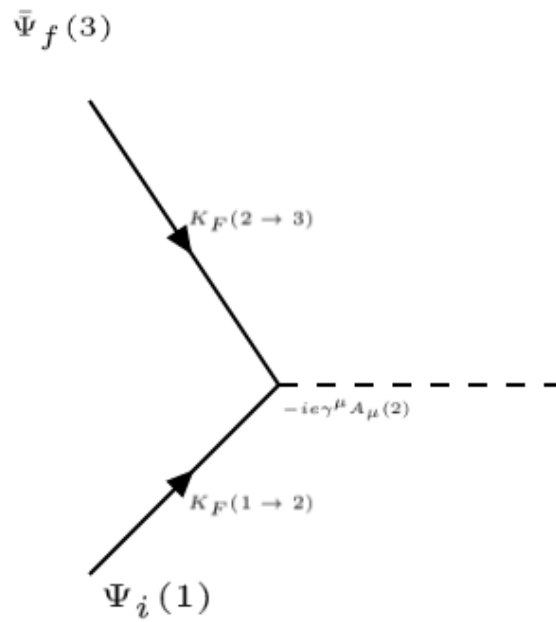


Figura 3 – Aniquilação de par elétron-pósitron em primeira aproximação.

onde a figura 3 é interpretada como um elétron com energia positiva em um passado $t(1)$ se propagando até um futuro $t(2)$, e após interagir com potencial espalhador se propaga com energia negativa para o passado $t(3)$. Já a criação de pares ocorre no cenário em que $t(2) < t(3)$ e $t(2) < t(1)$, vide figura 4.

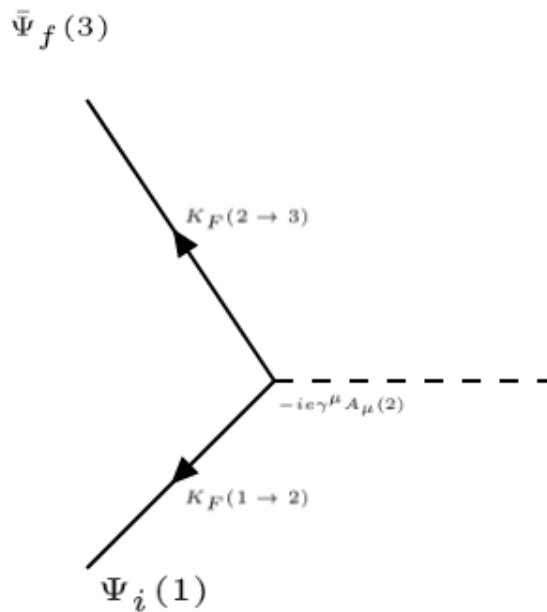


Figura 4 – Criação de par elétron-pósitron em primeira aproximação.

CONCLUSÃO

Os propagadores de Feynman $K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1)$ são as funções inversas para a equação de Dirac e equação de Schrödinger, e vimos que é possível escreve-los em função do operador de evolução temporal $\hat{U}(t, t_0)$, responsável pela transição entre dois estados em tempos distintos. Introduzindo o tratamento perturbativo denotamos $\hat{U}(t, t_0)$ em função do potencial perturbativo, isto é, dependente do tempo, onde encontramos sua respectiva série de potências, a série de Dyson. Deste tratamento introduzimos a série de Neumann-Liouville para $K_F(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1)$, escrita em termos do propagador não perturbado, isto é, proveniente das equações livres da dependência temporal explícita. Também, escrevemos a amplitude de probabilidade de transição entre dois estados através da matriz de espalhamento S_{fi} , que por ser função do operador de evolução temporal fora escrita em termos do potencial perturbativo e dos propagadores de Feynman para potencial nulo. Por fim, utilizamos os diagramas de Feynman para interpretar as ordens de aproximação para S_{fi} , onde cada termo de ordem n deste objeto irá corresponder a n interações com o potencial perturbativo e $n + 1$ processos de propagação livre.

REFERÊNCIAS

- ARAGAO, A.; BOSCHI-FILHO, H. Non-relativistic propagators via schwinger's method. *Brazilian Journal of Physics*, v. 37, n. 4, Dezembro 2007.
- BASSALO, J. M. F. *Eletrodinâmica Quântica*. 2. ed. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2006.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. *Quantum Electrodynamics*. 4. ed. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- JAFFE, R. L. *Supplementary Notes on Dirac Notation, Quantum States, etc.* 1996. Disponível em: <http://web.mit.edu/8.05/handouts/jaffe1.pdf>.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2. ed. Massachussets: Addison-Wesley, 2011.