

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

RAFAEL LUIS MORESCO

**UM MODELO COMPUTACIONAL PARA O ESTUDO DA
FADIGA**

Porto Alegre
2018

RAFAEL LUIS MORESCO

**UM MODELO COMPUTACIONAL PARA O ESTUDO DA
FADIGA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Porto Alegre

2018

CIP - Catalogação na Publicação

Moresco, Rafael Luis
Um modelo computacional para o estudo da fadiga /
Rafael Luis Moresco. -- 2018.
95 f.
Orientador: Eduardo Bittencourt.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-
RS, 2018.

1. crescimento de trincas. 2. modelo de zona
coesiva. 3. fadiga transiente. 4. plastificação. I.
Bittencourt, Eduardo, orient. II. Título.

Rafael Luis Moresco

**UM MODELO COMPUTACIONAL PARA O ESTUDO DA
FADIGA**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 29 de março de 2018

Prof. Eduardo Bittencourt

Dr. Pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Orientador

Prof. PhD Nilo Cesar Consoli

PhD pela Concordia University
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Samir Maghous (PPGEC/UFRGS)

Dr. pela Ecole Nationale Des Ponts Et Chaussées

Prof. Inácio Benvegnú Morsch (PPGEC/UFRGS)

Dr. Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof Ignacio Iturrioz (PROMEC/UFRGS)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por prezar pela qualidade do ensino.

Ao Prof. Dr. Eduardo Bittencourt, por sua orientação, sempre disposto a instigar a curiosidade e a busca por respostas, contribuindo com seu grande conhecimento em questionamentos fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho. Fico imensamente satisfeito por trabalharmos juntos.

À banca examinadora, professores Samir Maghous, Inácio Morsch e Ignácio Iturrioz por terem aceitado participar da avaliação do trabalho, com certeza contribuíram grandemente para a conclusão do mesmo.

À todos meus familiares, em especial ao meu pai Luiz, minha mãe Lai e as minhas irmãs Rafaela e Mariana, os melhores exemplos de vida que pude ter. Obrigado pelas preocupações, conselhos e apoio durante a pós-graduação.

À meus amigos, ex-professores e colegas de pós-graduação, em especial Leandro, Hugo, Douglas, Luiz, Micael e Guilherme pelo apoio na vida acadêmica e pessoal com conversas, discussões e risadas sempre pertinentes.

“Tudo aquilo que o homem ignora, não existe para ele. Por isso o universo de cada um, se resume no tamanho de seu saber.”

Albert Einstein

RESUMO

Por vezes o comportamento vinculado a fadiga é a principal fonte de dúvidas em projetos de engenharia. Aqui, o crescimento de trincas por fadiga é analisado numericamente utilizando uma plataforma de elementos finitos, onde o problema da fratura é modelado de forma discreta através do uso de elementos coesivos de interface. Os casos estudados abordam estruturas que apresentam uma trinca inicial de tamanho conhecido que propaga por um caminho condicionado. Os problemas são restritos ao estado plano de deformações e sujeitos em sua grande maioria a abertura normal entre as superfícies da trinca. O processo de separação das interfaces da trinca é descrito pelo uso de dois modelos de zona coesiva irreversível. Os modelos possuem relações de tensão-separação que não seguem um caminho pré-definido, sendo dependentes da evolução do dano ligado as propriedades da zona coesiva. Inicialmente são mostradas respostas básicas uniaxiais para os elementos coesivos, que provam a existência de curvas S-N e que o acúmulo de dano ocorre de forma não linear. Em seguida, analisa-se crescimento de trincas por fadiga em uma viga do tipo *double cantilever beam*, onde a estrutura observada é formada pela união de duas chapas metálicas através de um adesivo coesivo que direciona o crescimento da trinca. Casos com carga de amplitude única são computados, resultando na representatividade da propagação por uma lei de Paris. Além disso, uma análise de fadiga transiente é realizada através de respostas geradas pela aplicação de sequências de carregamentos em blocos, que mostram a dependência entre o formato do bloco e a maneira a qual ocorre a propagação da trinca. Na sequência, observa-se o efeito escala no crescimento de trincas por fadiga em uma placa submetida a tração com comportamento quase-frágil. Obtém-se uma conexão entre a altura da placa e o formato da ruptura. Por fim, o efeito da plastificação sobre a propagação de trincas, incluindo a captura do efeito *crack closure*, é comprovado em uma estrutura multicamada que emprega uma malha refinada na ponta da trinca. Os resultados mostram que o modelo computacional implementado reproduz comportamentos semelhantes atingidos nos trabalhos de referência para os problemas analisados.

Palavras chave: crescimento de trincas, modelo de zona coesiva, fadiga transiente, plastificação.

ABSTRACT

Sometimes fatigue-related behavior is the main source of doubt in engineering projects. Here, the fatigue crack growth is analyzed numerically using a finite element platform, where the fracture problem is discretely modeled through the use of cohesive interface elements. The cases studied deal with structures that present an initial crack of known size that propagates through a conditioned path. The problems are restricted to plane strain and are mostly subject to the normal opening between the surfaces of the crack. The process of separating the interfaces of the crack is described by the use of two models of irreversible cohesive zone. The models have stress-separation relationships that do not follow a predefined path, being dependent on the evolution of the damage linked to the properties of the cohesive zone. Initially basic uniaxial responses are shown for the cohesive elements, which prove the existence of S-N curves and that the accumulation of damage occurs non-linearly. Then, fatigue crack growth is analyzed in a double cantilever beam, where the observed structure is formed by the union of two metal plates through a cohesive adhesive that directs the growth of the crack. Cases with single amplitude loading are computed, resulting in the representativeness of propagation by a Paris law. In addition, a transient fatigue analysis is performed through responses generated by the application of block loading sequences, which show the dependence between the block shape and the manner in which crack propagation occurs. In the sequence, the scale effect on the growth of fatigue cracks in a plate subjected to traction with quasi-fragile behavior is observed. A connection is obtained between the height of the plate and the rupture format. Finally, the plastification effect on crack propagation, including crack closure capture, is demonstrated in a multilayer structure that employs a refined mesh at the crack tip. The results show that the computational model implemented reproduces similar behaviors reached in the reference works for the analyzed problems.

Key words: cracks growth, cohesive zone model, transient fatigue, plastification.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	OBJETIVOS	18
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	19
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	21
2.1	FADIGA	21
2.1.1	Previsões de FCG pela lei de Paris	23
2.1.2	Limitações da lei de Paris	25
2.1.2.1	Fechamento de trincas (<i>crack closure</i>).....	27
2.1.3	Métodos de abordagem da FCG.....	28
2.2	MODELOS DE ZONA COESIVA	30
2.2.1	Parâmetros coesivos	32
2.2.2	Implementação de CZM.....	32
2.2.3	CZM aplicado no crescimento de trincas.....	33
2.2.4	Caminho de carga/descarga.....	33
2.2.4.1	Modo de fratura puro	34
2.3	PROCESSO DE DANO	34
2.3.1	Princípios da mecânica do dano	35
2.3.2	Modelo de dano.....	36
2.4	CARACTERIZAÇÃO DOS CICLOS.....	38
3	METODOLOGIA.....	40
3.1	MODELO DE ZONA COESIVA DE NEEDLEMAN	40
3.2	MODELO DE DANO DE ROE E SIEGMUND.....	42
3.2.1	Leis de carga e descarga.....	43
3.3	ELEMENTOS DE INTERFACE COESIVA	46
3.3.1	Princípio dos trabalhos virtuais	46
3.3.2	Caracterização dos elementos coesivos	47
3.4	ALGORITMO DO METAFOR.....	48
4	APLICAÇÕES.....	50

4.1	APLICAÇÃO 01: ELEMENTO SEM DESLOCAMENTO RESIDUAL	50
4.2	APLICAÇÃO 02: ELEMENTO COM DESLOCAMENTO RESIDUAL	52
4.2.1	Carregamento de amplitude constante	53
4.2.2	Carregamentos de amplitude variada	58
4.3	APLICAÇÃO 03: CARREGAMENTO TRANSIENTE EM DCB	59
4.3.1	Carregamento sobre constante amplitude	61
4.3.2	Carregamento em blocos	64
4.3.2.1	Sobrecarga	65
4.3.2.2	Carga de amplitude variada	67
4.3.3	Efeitos dos parâmetros da zona coesiva	70
4.3.3.1	Variação do comprimento coesivo acumulado δ_{Σ}	70
4.3.3.2	Variação do limite de fadiga σ_f	72
4.4	APLICAÇÃO 04: EFEITO ESCALA EM PLACA QUASE-FRÁGIL	74
4.4.1	Início da propagação	76
4.4.2	Crescimento de trincas por fadiga	77
4.4.3	Distribuição do dano e da abertura	78
4.5	APLICAÇÃO 05: EFEITOS DA PLASTICIDADE	80
4.5.1	Influência da camada limitadora na propagação	82
5	CONCLUSÕES.....	87
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	88
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
	ANEXO A - LEI DE ACUMULO DE DANO LINEAR DE PALMGREN-MINER	94

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Boing 737 Aloha Airlines (1988) após perder parte de sua fuselagem	21
Figura 2.2 - Curvas de Wohler: para uma liga de metal ferroso (1045 <i>Steel</i>); para liga de metal não ferroso (2014-T6 <i>Al</i>)	22
Figura 2.3 - Taxa de propagação de trinca em relação ao fator de intensidade de tensões aplicado nas chapas metálicas encontrado por Paris (1961)	24
Figura 2.4 - Diagrama logarítmico da função $da/dN=f(\Delta K)$	25
Figura 2.5 – Mecanismo do <i>crack bridging</i>	26
Figura 2.6 - Definição da variação de intensidade de tensões efetiva considerando o fechamento de trincas.....	27
Figura 2.7 - Identificação da zona coesiva em relação a trinca em um modelo DCB.....	30
Figura 2.8 - Leis de tensão-separação: (a) Needleman (1987); (b) Needleman (1990); (c) Hillerborg <i>et al.</i> (1976); (d) Geubelle e Baylor (1990); (e) Yuan <i>et al.</i> (1996); (f) Tvergaard e Hutchinson (1992).....	31
Figura 2.9 - Seção transversal: nominal (a), degradada (b).....	35
Figura 2.10 - Caminhos de carga/descarga apresentados por Roe e Siegmund (2003): (a) normal, (b) corte	37
Figura 2.11 - Respostas típicas sobre condições de carregamento controladas para o modelo de Roe e Siegmund (2003): (a) normal, (b) corte.....	37
Figura 2.12 - Modos de carregamento para cargas cíclicas.....	38
Figura 2.13 - Parâmetros das solicitações de fadiga.....	39
Figura 3.1 - Tensão normal T_n em função de Δu_n	41
Figura 3.2 - Tensão tangencial T_t em função de Δu_t	42
Figura 3.3 - Lei de carga-descarga até a origem com diminuição e escalonamento da tensão coesiva	44
Figura 3.4 - Lei de carga e descarga com deslocamento residual e escalonamento da tensão coesiva	45
Figura 3.5 - Corpo em estudo	47
Figura 3.6 - Elemento coesivo de interface (a) em estado inicial; (b) após carregamento.....	48
Figura 4.1 - Representação do sistema analisado na aplicação 01	50
Figura 4.2 - Amplitudes dos deslocamentos prescritos aplicados sobre o elemento coesivo ..	51

Figura 4.3 - Tensão coesiva em relação a abertura do elemento para o deslocamento prescrito de (a) $0.8\delta_0$; (b) $0.6\delta_0$ e (c) $0.4\delta_0$	51
Figura 4.4 - Evolução de D_c em relação ao tempo para cada valor do deslocamento prescrito aplicado.....	52
Figura 4.5 - Representação do sistema analisado na aplicação 02	53
Figura 4.6 - Abertura normalizada do elemento coesivo sobre carregamento normal no tempo para o caso de $\sigma_{mean}=0$ e $\Delta\sigma=1.20\sigma_{max,0}$	53
Figura 4.7 - Dano acumulado pelo elemento coesivo sobre carregamento normal: (a) Em função do tempo; (b) Em função da abertura normalizada	54
Figura 4.8 - Tensão coesiva normal normalizada em relação ao fator de abertura no elemento coesivo	55
Figura 4.9 - Abertura normalizada do elemento coesivo sobre carregamento tangencial no tempo para o caso de $\tau_{mean}=0$ e $\Delta\tau=1.20\tau_{max,0}$	55
Figura 4.10 - Dano acumulado pelo elemento coesivo sobre carregamento tangencial: (a) Em função do tempo; (b) Em função da abertura normalizada	56
Figura 4.11 - Tensão coesiva tangencial normalizada em relação ao fator de abertura no elemento coesivo	56
Figura 4.12 - Número de ciclos para falha sobre constante amplitude de carregamento para valores de σ_{mean}	57
Figura 4.13 - Número de ciclos para falha sobre constante amplitude de carregamento para valores de τ_{mean}	57
Figura 4.14 - Número de ciclos para falha durante duas diferentes sequências de carregamento em comparação com a regra de Palmgren-Miner	58
Figura 4.15 - Modelo de viga de duplo balanço utilizado na aplicação 03	60
Figura 4.16 - Restrições no modelo de simetria	61
Figura 4.17 - Posicionamento da zona coesiva ativada l_{cz}	61
Figura 4.18 - Crescimento normalizado de Δa_{cz} em função de N para alguns valores de $\Delta G/\phi_{n,0}$	62
Figura 4.19 - Dependência da taxa de crescimento da trinca em relação a taxa de energia aplicada.....	63
Figura 4.20 - Primeira sequência de carregamento aplicada na estrutura	64
Figura 4.21 - Segunda sequência de carregamentos aplicada na estrutura.....	64
Figura 4.22 - Desenvolvimento normalizado de Δa_{tip} e Δa_{cz} para o caso de sobrecarga.....	65

Figura 4.23 - Tensão coesiva normalizada em função da abertura normalizada para o ponto $x=a_0+37.5\delta_0$	66
Figura 4.24 - Dano acumulado em função do número de ciclos aplicados para o ponto $x=a_0+37.5\delta_0$	67
Figura 4.25 – Desenvolvimento normalizado de Δa_{tip} e Δa_{cz} para o caso de carga de amplitude variada	68
Figura 4.26 - Tensão coesiva normalizada em função da abertura normalizada para o ponto $x=a_0+37.5\delta_0$	68
Figura 4.27 - Dano acumulado em função do número de ciclos aplicados para o ponto $x=a_0+37.44\delta_0$	69
Figura 4.28 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 3\delta_0$ e $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$	70
Figura 4.29 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$	71
Figura 4.30 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 5\delta_0$ e $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$	71
Figura 4.31 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e $\sigma_f = 0.15\sigma_{max,0}$	73
Figura 4.32 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e $\sigma_f = 0.4\sigma_{max,0}$	73
Figura 4.33 - Representação do modelo utilizado na aplicação 04	74
Figura 4.34 - Extensão da trinca normalizada prevista em função do número de ciclos para os modelos analisados	77
Figura 4.35 - Distribuição de dano na peça quando $N=15.5$ como função de h_s/δ_0	78
Figura 4.36 - Distribuição da abertura normal na peça quando $N=15.5$	79
Figura 4.37 - Representação do modelo utilizado na aplicação 05	80
Figura 4.38 - Representação da malha utilizada na aplicação 05 detalhando a zona na ponta da trinca	81
Figura 4.39 - Dependência da taxa de crescimento da trinca em relação a energia aplicada considerando o efeito limitador	83
Figura 4.40 - Fator de crescimento de trincas em função da altura da camada limitadora	84
Figura 4.41 - Distribuição de dano sobre total descarga no ciclo 29.....	85
Figura 4.42 - Abertura da zona coesiva sobre total descarga no ciclo 29	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Valores dos carregamentos aplicados na estrutura sobre amplitude constante	62
Tabela 4.2 - Valores dos deslocamentos prescritos aplicados na estrutura sobre amplitude constante	76
Tabela 4.3 - Valores dos períodos de incubação para os modelos analisados.....	76
Tabela 4.4 - Taxas de propagação da trinca em função da altura h_1 da camada limitadora	84

LISTA DE ABREVIATURAS E SIMBOLOS

DCB	Double Cantilever Beam
EPD	Estado Plano de Deformações
FCG	Fatigue Crack Growth
FEM	Finite Element Method
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
Δu_{acc}	Abertura acumulada do material
Δu_n	Abertura normal
$\Delta u_{n,max}$	Abertura normal máxima
$\Delta \bar{u}$	Abertura resultante
Δu_t	Abertura tangencial
$\Delta u_{t,max}$	Abertura tangencial máxima
σ_a	Amplitude da tensão
ν	Coefficiente de Poisson do material
δ_0	Comprimento coesivo
δ_Σ	Comprimento coesivo acumulado
l_{CZ}	Comprimento da zona coesiva ativada
C, m	Constantes da lei de Paris
D_c	Dano acumulado
$\phi_{t,0}$	Energia coesiva de superfície de corte
$\phi_{n,0}$	Energia coesiva de superfície normal
K	Fator de intensidade de tensões
K_c	Fator de intensidade de tensões crítico ou tenacidade
σ_f	Limite de fadiga da zona coesiva
E	Módulo de elasticidade longitudinal do material
N_i	Número de ciclos aplicados com carregamento de amplitude S_i
N	Número de ciclos de carga/descarga

N_{fi}	Número de ciclos de que levam a estrutura a falha
t_c	Período de um ciclo completo carga/descarga
Δa_{tip}	Posição da ponta da trinca
Δa_{cz}	Posição da ponta da zona coesiva ativada
R	Razão das tensões, fatores de intensidade e deslocamentos prescritos
q	Razão entre as energias coesivas normal e de corte
a_0	Tamanho inicial da trinca
$\Delta \dot{u}$	Taxa de abertura da trinca
\dot{D}_c	Taxa de dano
G	Taxa de liberação de energia
da/dN	Taxa de propagação da trinca
$\tau_{max,0}$	Tensão coesiva inicial de corte máxima sobre carregamento monotônico
$\sigma_{max,0}$	Tensão coesiva inicial normal máxima sobre carregamento monotônico
T_n	Tensão coesiva normal
σ_{max}	Tensão coesiva normal atualizada
$T_{n,max}$	Tensão coesiva normal máxima
τ_{max}	Tensão coesiva tangencial atualizada
T_t	Tensão coesiva tangencial
$T_{t,max}$	Tensão coesiva tangencial máxima
σ_{mean}	Tensão média
\bar{T}	Tensão resultante na zona coesiva
ΔK_{th}	Valor limite de ΔK abaixo do qual não existe propagação
ΔG	Variação da taxa de liberação de energia
$\Delta \sigma$	Variação das tensões
ΔP	Variação de carregamento
ΔK	Variação do fator intensidade de tensões

1 INTRODUÇÃO

As tecnologias empregadas dentro da engenharia tem proporcionado o uso de estruturas cada vez mais diferenciadas, sendo algumas delas abordadas nesse trabalho. Partindo de placas metálicas com diferentes tamanhos, unidas ou não por algum componente adesivo, ou mesmo formadas por camadas de materiais com diferentes comportamentos, essas inovações proporcionam desenvolvimentos muito importantes para a indústria. A exemplo disso, pode-se citar os adesivos estruturais utilizados na indústria aeroespacial em conjunto com chapas de ligas metálicas, desempenhando um papel fundamental na construção de aviões e foguetes de forma mais segura e aerodinâmica. Aplicações dessa espécie, acabam por gerar questionamentos sobre sua desconhecida forma de comportamento frente a solicitações.

Durante a vida útil de grande parte das estruturas, são grandes as probabilidades de que em algum momento certa exposição a carregamentos cíclicos venha a acontecer. Por vezes a estrutura irá apresentar defeitos ou terá de ser projetada segundo critérios de falha segura, e por essa razão, o crescimento de trincas por fadiga torna-se um problema a ser pesquisado.

Dentro da literatura relacionada a fratura, em grande parte dos estudos se investiga os mecanismos que movem o crescimento de trincas sobre carregamentos monotônicos quase-estáticos, sendo que o crescimento de trincas por fadiga ainda permanece vetor de muitas dúvidas. Os autores que apresentam algumas investigações dessa espécie de problema, normalmente fazem uso de soluções analíticas derivadas da equação de Paris (1961), que apesar de ter seu uso difundido apresenta algumas deficiências. Deve-se recordar que essa metodologia fornece um esquema de correlação de dados em vez de uma capacidade de previsão de resultados (BAILON e ANTOLOVICH, 1983).

Durante o crescimento de trincas em estruturas com concepções específicas, as questões levantadas pela lei de Paris adquirem maior importância em relação a estruturas comuns. Isso ocorre devido ao fato de serem realizadas simplificações a respeito dos processos mecânicos na ponta da trinca, onde a independência da geometria e do carregamento da estrutura devem ser consideradas. Dessa forma, as relações de Paris podem exibir vínculos com o formato do problema, que são ausentes na análise do crescimento de trincas em estruturas corriqueiras (ROE e SIEGMUND, 2003).

Os argumentos demonstram a necessidade do desenvolvimento de uma ferramenta que consiga prever a taxa de crescimento de trincas por fadiga para estruturas singulares, de forma a considerar todas as propriedades do problema analisado. Dessa maneira, resultados encontrados para certas combinações de materiais e geometria podem ser utilizados de base para demais problemas sem a necessidade de novas avaliações. Nesse contexto, a criação de programas computacionais baseados na mecânica do contínuo, como o Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM), permite a modelagem de problemas que simulem com qualidade essas propagações em específico.

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho enquadra-se na linha de pesquisa “Modelos para a simulação em mecânica da fratura e fadiga” desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O foco principal do trabalho é avaliar o mecanismo de propagação de fissuras por fadiga em modo I (abertura normal) de ruptura, sob governo do estado plano de deformações (EPD), em estruturas que apresentam interfaces de propagação. Visa-se identificar o comportamento evolutivo de fissuras já existentes através de uma análise dos problemas de forma determinística. Nas avaliações serão desconsiderados fenômenos aleatórios envolvendo as propriedades do material e dos carregamentos, sendo que as fissuras serão tratadas numericamente de forma discreta.

Procura-se implementar a lei coesiva irreversível de Needleman (1992), bem como o modelo de dano proposto por Roe e Siegmund (2003) incluindo dois formatos de descarga do material (com e sem deformação residual), na plataforma de elementos finitos Metafor (PONTHOT, 1995). Para isso, utiliza-se como base o algoritmo criado por Machado (2007), na qual o método das interfaces coesivas já se encontra inserido. Visando o desenvolvimento de trabalhos futuros, o algoritmo criado permitirá a análise de problemas que envolvam também o modo II de propagação e por consequência, o modo misto.

São analisadas cinco aplicações do algoritmo desenvolvido. A aplicação 01, utiliza um mono-elemento que não apresenta deformação residual no processo de descarregamento e busca observar o funcionamento e estabilidade da rotina desenvolvida. Na aplicação 02 também

faz-se uso do mono-elemento, dessa vez com deformação residual, onde objetiva-se reproduzir critérios desenvolvidos no trabalho de Siegmund (2004), o que inclui a avaliação do elemento submetido a variados carregamentos de amplitude única, e também uma comparação com a regra de Palmgren-Miner.

Na aplicação 03 espera-se analisar a propagação de trincas em uma estrutura composta por dois substratos elásticos ligados por uma interface, que é sujeita a carregamentos transientes de diferentes formatos. Essa etapa segue a mesma referência da aplicação 02. Busca-se também observar os efeitos das variações nos parâmetros que definem a equação de dano de Roe e Siegmund (2003).

Na sequência, a aplicação 04 tem por meta replicar alguns resultados apresentados em Wang e Siegmund (2006), considerando o efeito escala no crescimento de trincas por fadiga e uma estrutura com comportamento quase-frágil. O problema utiliza uma placa de formato retangular com altura variada submetida a tração através de deslocamentos prescritos.

Por último, a aplicação 05 visa estudar o efeito da plastificação na propagação de trincas. Seguindo o trabalho de Wang e Siegmund (2005), avalia-se uma estrutura multicamada formada por dois substratos elásticos unidos por uma camada dúctil central onde esta presente uma trinca inicial. Espera-se observar a influência da variação da espessura da camada na propagação considerando diferentes cargas aplicadas sobre a estrutura.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho desenvolvido é formado por 4 capítulos e conclusão descritos na sequência:

Capítulo 1 - Introdução: Tem a função de introduzir e justificar o tema proposto, bem como os objetivos para o desenvolvimento do trabalho, além da sua organização.

Capítulo 2 - Fundamentação Teórica: Expõe a teoria e os conceitos que são utilizados para o desenvolvimento da metodologia e das aplicações do trabalho.

Capítulo 3 - Metodologia: Exibe os procedimentos que serão empregados para atingir os objetivos propostos pelo trabalho.

Capítulo 4 - Aplicações: Apresenta exemplos de aplicação da ferramenta desenvolvida, bem como resultados e suas discussões.

Conclusão - Considerações finais do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo é realizada uma breve revisão formada por itens referentes a Fadiga, Modelos coesivos, Processo de dano e Caracterização dos ciclos. Esses itens possuem relevância para a compreensão da metodologia e das aplicações desenvolvidas.

2.1 FADIGA

A fadiga é um processo de degradação do material que possui como característica a geração e/ou a propagação de uma fissura através de carregamentos cíclicos aplicados sobre uma estrutura, podendo ou não levar a falha mecânica. O fenômeno é largamente presente nos campos da engenharia aeroespacial, transportes, maquinários, microtecnologia, saúde, entre outras indústrias. Quando desconsiderado, o mesmo pode ser agente causador de perdas econômicas e até mesmo acidentes. Talvez, o caso de maior conhecimento dentro da área seja o dos aviões Comet, que na década de 50 apresentaram uma série de falhas catastróficas devido a fadiga causada pela variação de pressão atmosférica vinculada ao formato de suas janelas. Mais recentemente, o acidente com o Boeing 737 da Aloha Airlines em 1988 também pode ser citado (Fig. 2.1), nesse caso as investigações apontaram falha estrutural pela combinação de corrosão e fadiga das partes mecânicas da aeronave.



Figura 2.1 - Boeing 737 Aloha Airlines (1988) após perder parte de sua fuselagem

Fonte: Meier, 2015

A fadiga pode incidir tanto em materiais homogêneos como metais, polímeros, cerâmicas, entre outros, quanto em combinações desses mesmos. Dessa forma, é de grande

importância evitar a sua ocorrência e para isso, os agentes que influenciam a fratura devem ser claros. Previsões acuradas e eficientes da nucleação e do crescimento de trincas por fadiga (*fatigue crack growth* - FCG) são úteis para se ter certeza de como os fatores participantes afligem o problema.

Historicamente, o fenômeno da fadiga teve a sua primeira observação no início do século 19 quando eixos de vagões ferroviários começaram a falhar após um breve período de serviço. Mesmo sendo construídos com aço dúctil, os eixos exibiam características de fraturas frágeis e repentinas, o que levou Rankine (1843) a mencionar que o material havia cristalizado e se tornado frágil devido as tensões flutuantes.

Naquela época os eixos haviam sido projetados baseando-se na experiência da engenharia disponível, que era fundamentada no comportamento de estruturas carregadas estaticamente. A partir desse momento, com o advento de grandes invenções, os carregamentos dinâmicos passaram a ser um fenômeno novo preocupante nos projetos de estruturas.

Wöhler (1860) foi pioneiro ao investigar a falha por fadiga. Em seus testes ele submeteu eixos de trens até a falha sob carregamento alternado, sendo que as suas descobertas identificaram que o número de ciclos eram os causadores do colapso, e ainda apontaram a existência de uma tensão limite de resistência à fadiga para os aços empregados. Esses resultados foram plotados em gráficos por Basquin (1910), conhecidos como curvas de Wöhler ou curvas S-N, onde a tensão aplicada se relaciona com o número de ciclos até a ruptura.

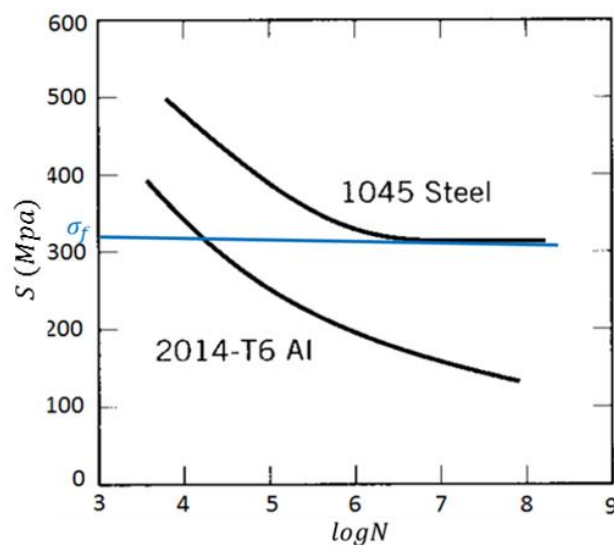


Figura 2.2 - Curvas de Wöhler: para uma liga de metal ferroso (1045 *Steel*); para liga de metal não ferroso (2014-T6 *Al*)

Fonte: Cayro, 2016

A Fig. (2.2) apresenta duas curvas de Wöhler com características que distinguem dois tipos de materiais diferentes.

Observa-se que alguns materiais, a exemplo dos metais ferrosos como o aço ou mesmo polímeros, representados por uma curva semelhante a superior, exibem um valor de tensão limite na qual se não for ultrapassado indica vida infinita da peça. Já outros materiais, que não apresentam esse valor de tensão, podem ser enquadrados em curvas parecidas com a inferior. Nesse caso, por menor que seja a tensão aplicada sobre o material este sempre apresenta fratura depois de um determinado número de ciclos. São exemplos desse grupo as ligas de metais não ferrosos como compostos de alumínio.

As curvas de Wöhler permitem o conhecimento do número de ciclos para a ruptura das estruturas avaliadas e consistem em uma forma de análise simplificada da fadiga. Tomando o seu lugar em projetos, o conceito de vida em fadiga tem sido utilizado. Essa concepção permite a propagação da trinca antes da estrutura atingir a ruptura, considerando o número de ciclos de carregamento na qual a peça apresenta uma fissura com crescimento estável, sendo por muitas vezes empregado na indústria automobilística e aeronáutica. Em algumas ocasiões inclusive, esse método leva a respostas muito diferentes das fornecidas pela simples análise da ruptura. Os experimentos controlados são o meio de antever esse comportamento, o que permite os projetos em falha segura (*fail safe*).

Para a previsão do FCG, a mecânica da fratura tem sido aplicada em um grande número de investigações encontradas na literatura. A bem conhecida lei de Paris, fundamentada na mecânica da fratura linear, prevê com sucesso o FCG para condições de pequenas escalas de propagação, amplitude constante de carregamento e grandes trincas.

2.1.1 Previsões de FCG pela lei de Paris

A forma mais clássica de ilustrar o comportamento de um material sujeito à fadiga se dá pela curva de Paris (1961). O autor demonstrou em seu experimento com chapas metálicas, que a variação do fator intensidade de tensões ΔK , que é uma propriedade ligada ao material e a geometria do problema, é o agente controlador da FCG, e não a tensão como a literatura anterior ponderava. Na Fig. (2.3) são mostrados os resultados dessa análise, evidenciando a dependência da taxa de propagação da trinca da/dN em relação a ΔK .

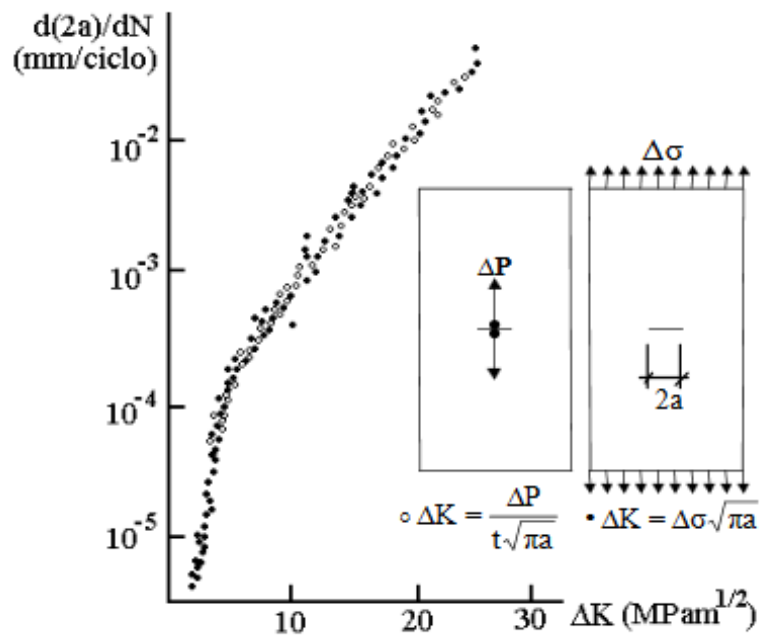


Figura 2.3 - Taxa de propagação de trinca em relação ao fator de intensidade de tensões aplicado nas chapas metálicas encontrado por Paris (1961)

Realizando-se a plotagem de forma logarítmica dos resultados da/dN vs. ΔK , obteve-se uma curva que tornou possível fazer-se previsões sobre a vida residual da estrutura trincada. Esse diagrama é mostrado na Fig. (2.4), podendo ser caracterizado em 3 regiões distintas.

A região I apresenta baixas velocidades de propagação de trincas, possuindo um limite inferior ΔK_{th} abaixo da qual não ocorre a FCG, ou ocorre a valores muito reduzidos. Este valor de ΔK representa um parâmetro de segurança para projetos de vida útil segura na resistência a fadiga. Devido ao fato do valor de ΔK_{th} algumas vezes ser muito menor que a tenacidade característica do material K_c , para determinadas estruturas é permitido a propagação de trincas na sua avaliação. Nessa região o comportamento da fadiga é sensível a microestrutura do material e a carga média aplicada.

A região II representa a faixa de propagação estável da trinca. De acordo com Paris esse trecho pode ser representado por uma função no formato potência como a Eq. (2.1).

$$da/dN = C(\Delta K)^m \quad (2.1)$$

Na relação, a constante C é variável conforme o material e razão de tensões empregadas no problema, já a constante m depende apenas do material. Na região II a deformação na ponta da trinca pode estender-se por vários grãos evidenciando uma componente plástica contínua, diminuindo a dependência da microestrutura.

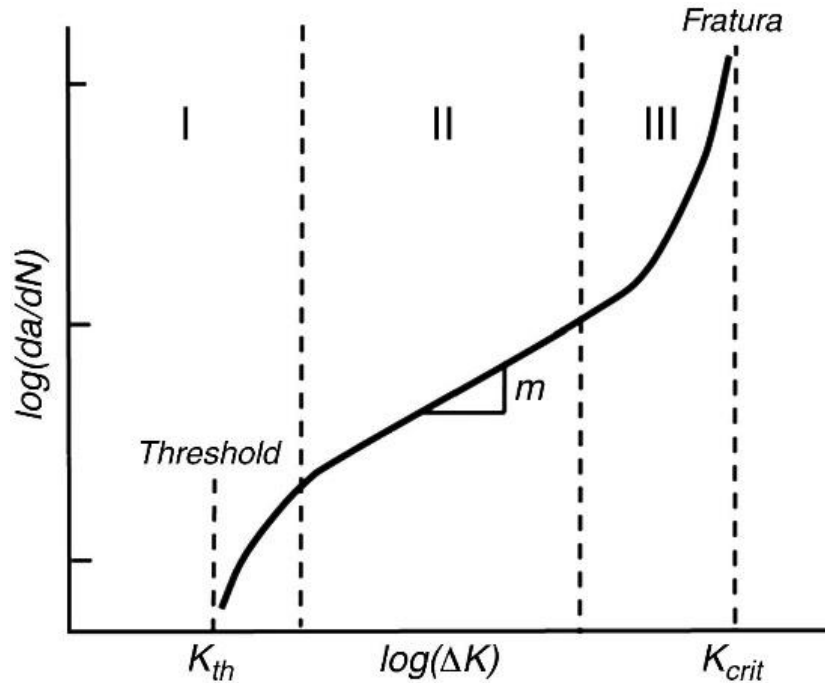


Figura 2.4 - Diagrama logarítmico da função $da/dN=f(\Delta K)$

Fonte: Soares e Iturrioz, 2015

A região III concentra a propagação instável da trinca. Nessa etapa o material ou peça, cujo o fator de intensidade de tensões possui a tendência de se aproximar do valor crítico K_C , apresenta uma acelerada taxa de propagação de trincas atingindo a falha por propagação instantânea em poucos ciclos ou outro fenômeno.

2.1.2 Limitações da lei de Paris

O método de Paris possui uma grande diversidade de teorias associadas que foram construídas a partir de modificações na lei original. A literatura apresenta propostas que incorporam fatores como a amplitude de carregamento variada (WHEELER, 1972), a variação da razão de tensões (WEERTMAN, 1984) e (NOROOZI, *et al.*, 2005), pequenas trincas (ELBER, 1970) e (EL HADDAD, *et al.*, 1980), e mesmo comportamentos específicos de materiais frágeis (LIU e CHEN, 1991). Algumas dessas leis são apresentadas no item 2.1.3.

Entretanto, esse método não consegue englobar diferentes fatores em uma mesma solução. Como é aplicável apenas para condições de propagação em pequena escala, durante o cálculo do FCG com a lei de Paris o fator de intensidade de tensões ΔK se mantém constante

em todos os incrementos. Dessa forma, esse método não é consistente com as condições reais principalmente na fadiga de estruturas compostas por diferentes materiais.

Yao e Shang (1997), que estudaram o comportamento de espécimes formados por uma solda de estanho/chumbo e duas placas de cobre sobre ação de vários carregamentos de modos mistos, reportaram que os valores limites de fadiga possuem conexão com o modo misto de propagação. Dessa forma, essas questões acabam gerando dependências aos parâmetros C e m na lei de Paris.

Esse efeito pode ser atribuído a mudanças no mecanismo de dano atuando na interface e também a variações nos campos de tensão-deformação na vizinhança da ponta da trinca. O conhecimento dessas implicações não pode ser adquirido simplesmente utilizando os resultados obtidos de carregamentos monotônicos, pois a dependência da geometria e a questão do fechamento de trincas por fadiga introduz complexidades adicionais (ROE e SIEGMUND, 2003).

Ainda, o fenômeno do FCG é com frequência vinculado ao eventos de *crack bridging*. O fenômeno do *crack bridging*, ver Fig. (2.5), ocorre em uma zona de um tamanho definido, se essa zona possui um tamanho comparável ao comprimento da trinca ou outra dimensão do espécime, as condições para o sucesso da aplicação da lei de Paris podem novamente ser violadas (ROE e SIEGMUND, 2003). Isso ocorre devido ao fato de no mecanismo *crack bridging* o aumento da intensidade de tensões resultar geralmente de uma fase adicional do material que faz a união entre as duas superfícies da trinca. Esses ligamentos presentes na trinca, que podem ser provenientes de grãos alongados ou fibras contínuas, acabam por suportar parcialmente a carga aplicada, reduzindo o valor de K na ponta da trinca.

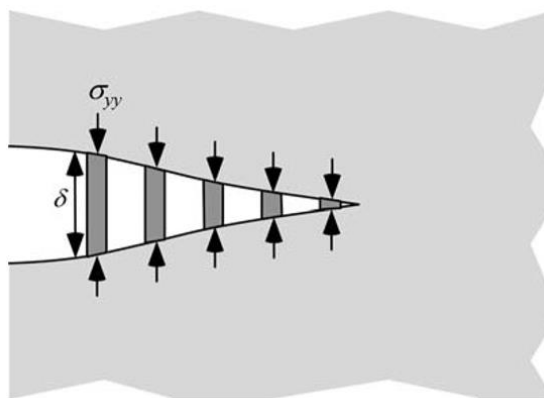


Figura 2.5 – Mecanismo do *crack bridging*

Fonte: Anderson, 2005, p. 284

2.1.2.1 Fechamento de trincas (*crack closure*)

O fenômeno do fechamento de trincas, foi expressado pela primeira vez por Elber (1970), como uma anomalia no comportamento elástico de alguns espécimes sujeitos a fadiga. Em grandes carregamentos o comportamento de $d\Delta/dP$ (Δ é a abertura da trinca e P a carga aplicada) seguia as fórmulas padronizadas para espécimes da mecânica da fratura, mas em baixas cargas, a relação era próxima da dos espécimes não fissurados. O autor acreditava que essa mudança na relação era devido ao contato entre as superfícies da trinca em cargas que eram baixas, porém maiores do que zero.

O autor então, postulou que o fechamento de trincas decresce a taxa de FCG, pois reduz a variação efetiva do fator de intensidade de tensões. Quando uma estrutura é sujeita a uma variação cíclica entre valores de K_{max} e K_{min} , as superfícies da trinca entram em contato abaixo de um valor K_{op} , que corresponde a intensidade de tensões na qual a trinca abre. Dessa maneira, assume-se que a porção do ciclo de carga correspondente a valores abaixo do K_{op} não contribui para o FCG, pois não provoca mudança na deformação da ponta da trinca. Por isso, o fenômeno também ficou conhecido por *crack shielding*, devido a ocorrência de uma “proteção” ou contenção do avanço da ponta da fissura. Assim, modelos para o cálculo da fadiga que consideram esse fenômeno retardam o crescimento da trinca.

Dessa forma, definiu-se a variação de intensidade de tensões efetiva, caracterizada na Fig. (2.5), através da Eq. (2.2).

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} \quad (2.2)$$

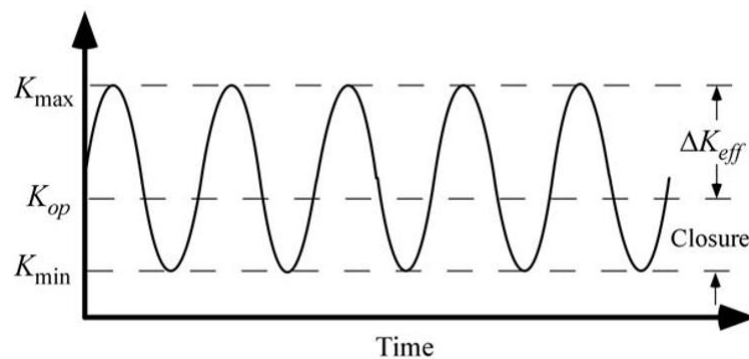


Figura 2.6 - Definição da variação de intensidade de tensões efetiva considerando o fechamento de trincas

Fonte: Anderson, 2005, p. 455

2.1.3 Métodos de abordagem da FCG

Devido aos motivos apresentados nos itens anteriores, a abordagem do FCG necessitou se expandir por outros caminhos que conseguissem expressá-la de melhor forma considerando todas as situações do problema.

Alguns pesquisadores buscaram criar leis que descreviam apenas algumas fases da propagação. Foreman *et al.* (1967) propuseram uma relação que visava representar o comportamento do material exclusivamente nas regiões II e III da lei de Paris. Seguindo a Eq. (2.3), o FCG era descrito pela tenacidade K_C , variação do fator intensidade de tensões ΔK , duas constantes C e m (que não possuíam os mesmos valores numéricos de Paris) e pela razão R de carregamento (2.4).

$$da/dN = \frac{C(\Delta K)^m}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad (2.3)$$

Klesnil e Lukás (1972) indicaram uma modificação na equação de Paris para incluir o fator limite de intensidade de tensões ΔK_{th} , Eq. (2.4). O maior problema desse método é o fato de ΔK_{th} ser determinado experimentalmente e com frequência depender do valor do fator R .

$$da/dN = C(\Delta K^m - \Delta K_{th}^m) \quad (2.4)$$

Considerando as três regiões da propagação, o método desenvolvido pela NASA, publicado inicialmente por Forman e Mettu (1990), pode ser citado como a principal ferramenta criada. Basicamente, esse método é entregue pela Eq. (2.5), onde o material é descrito pelo uso de seis parâmetros constantes: ΔK_{th} , K_C , q , p , C e m .

$$da/dN = C\Delta K^m \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K}\right)^p}{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_C}\right)^q} \quad (2.5)$$

O conceito de integral J na fratura não linear também foi empregado em larga escala para tratar problemas de fratura. Alguns autores propuseram o seu uso para o cálculo da energia de fratura, tal que $\Delta J \cong \Delta G$, e então a aplicaram na lei de Paris (DOWLING e BEGLEY, 1976), ver Eq. (2.6). Apesar dos registros, a aplicação da integral J foi considerada difícil de ser avaliada devido as operações de integração complexas naquela época.

$$da/dN = C(\Delta J)^m \quad (2.6)$$

Outras aproximações foram propostas como alternativas para o cálculo de FCG. Entre elas pode se destacar o uso de modelos baseados em correlações geométricas entre o deslocamento da abertura na ponta da trinca (*crack tip opening displacement* - CTOD) e o avanço da trinca (NEUMANN, 1974). Entretanto, um valor de CTOD não pode ser assumido como um parâmetro do material, pois é dependente do modo misto de carregamento (ROE e SIEGMUND, 2003).

Em modelos de zona de processos (MCCLINTOCK, 1963), o FCG é descrito pelo conceito de acumulação de dano em uma zona na ponta da trinca a qual endurece sobre uma constante deformação cíclica até que um estado de dano crítico é alcançado, e ocorre a propagação da trinca. O principal problema desse modelo é o fato de por vezes ela considerar na integra o uso de leis de fadiga de baixo-ciclo e regras de acumulo de dano linear. Outro fato negativo, é ela apresentar como característica um tamanho da zona de processos único e definido para o material (ROE e SIEGMUND, 2003). Mesmo assim, essa metodologia é considerada a antecessora do modelo de zona coesiva.

Como um método alternativo, o modelo de zona coesiva (*cohesive zone model* - CZM) tem recebido crescente atenção. O conceito de CZM pode ser ligado aos modelos coesivos originais de Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) que possuíam como característica a não linearidade da fratura e que a zona de ação da mesma poderia ser modelada como uma prolongação da fissura.

Sem o critério de nucleação de trincas usado na mecânica da fratura clássica, o CZM remove as singularidades de tensões não reais na ponta da trinca e considera o crescimento da trinca um processo progressivo de degradação do material. Uma característica importante da aproximação por CZM é que ela pode ser facilmente implementada em vários métodos computacionais, como o FEM.

De forma muito comum, o CZM é utilizado para lidar com problemas de fratura e por consequência estendido para prever a fratura por fadiga. Recentemente esse método foi empregado para crescimento de trincas por fadiga em adesivos (MORONI e PIRONDI, 2011), compostos materiais (HARPER e HALLETT, 2010), metais laminados (YAMAGUCHI *et al.*, 2009), soldas (YANG, 2006), entre outros.

2.2 MODELOS DE ZONA COESIVA

Durante a propagação de trincas existe uma camada limite denominada zona coesiva, observar Fig. (2.6), que é formada por duas superfícies coesivas fictícias a qual se sobrepõe uma a outra em uma configuração indeformável. Sobre um carregamento externo, as superfícies podem ser separadas mas continuam conectadas por tensão coesiva. A relação entre a tensão coesiva e o salto de deslocamento das superfícies coesivas é conhecida como lei de tensão-separação.

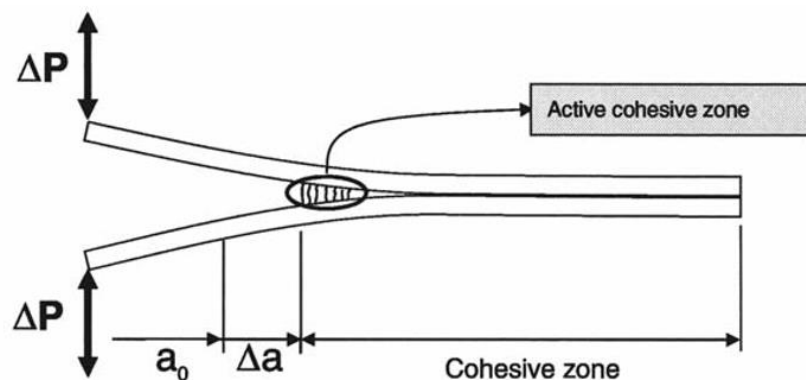


Figura 2.7 - Identificação da zona coesiva em relação a trinca em um modelo de viga

Fonte: Siegmund, 2004

Como a lei reporta um modelo fenomenológico, não há evidências para qual forma de tensão-separação deve-se seguir exatamente. Por consequência, muitas leis tem sido propostas por pesquisadores de acordo com as características do material e do carregamento.

Quando resguardada ao modo I de fratura, a relação entre a tensão normal e separação normal deve ser definida pela lei de tensão-separação, Fig. (2.7). Para essa relação Needleman (1987) propôs uma forma polinomial na qual a tensão primeiramente aumenta até um valor de pico e depois decresce até zero em uma separação crítica, o que leva a zona coesiva à fratura. Hillerborg *et al.* (1976) sugeriu um decrescimento linear, onde a tensão inicia com uma rigidez infinita até que a tensão coesiva é atingida. Outras formas típicas de leis de tensão-separação para a fratura em modo I incluem forma exponencial proposta por Needleman (1990), a forma bilinear proposta por Geubelle e Baylor (1990), a forma constante de Yuan *et al.* (1996) e a forma multilinear de Tvergaard e Hutchinson (1992).

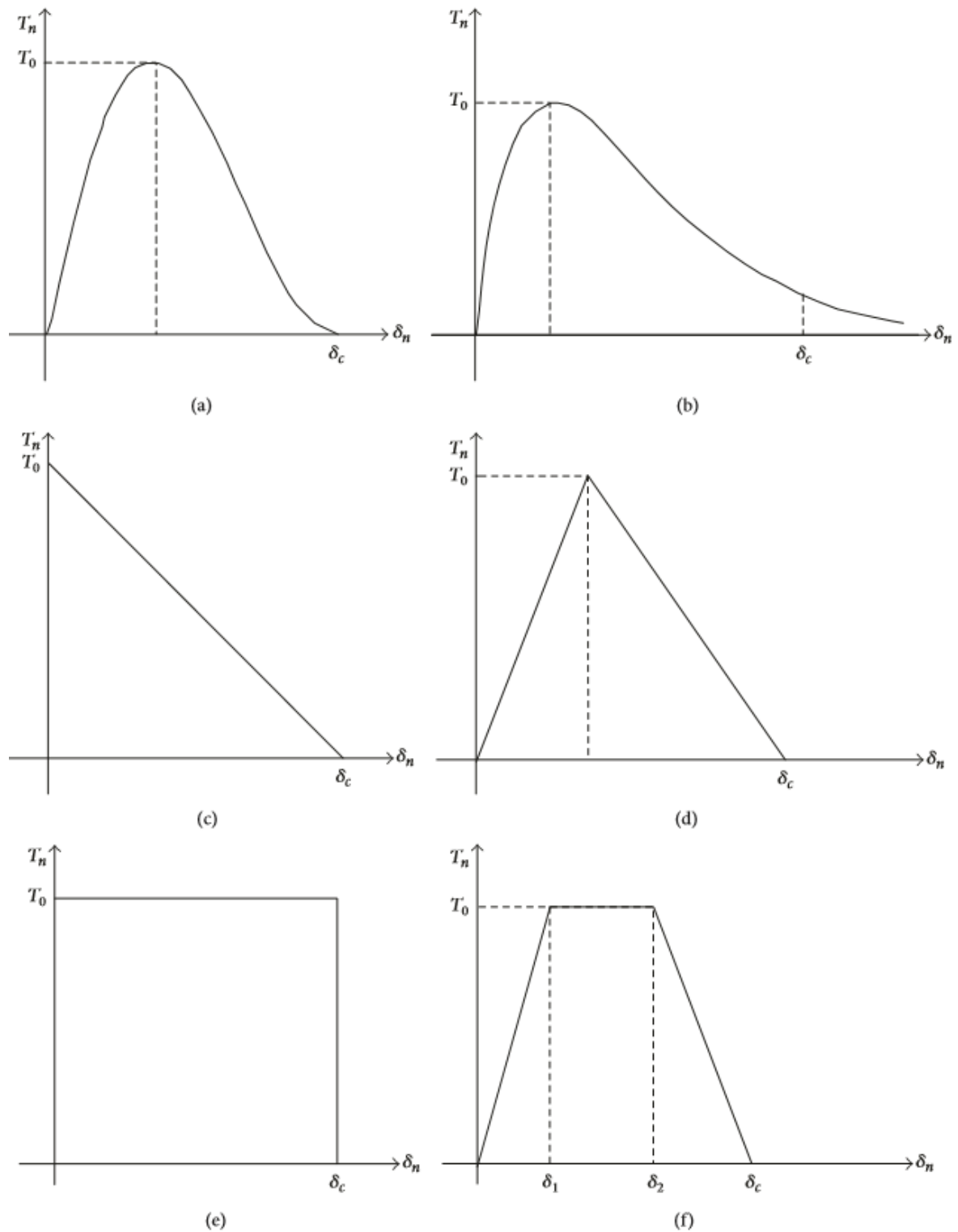


Figura 2.8 - Leis de tensão-separação: (a) Needleman (1987); (b) Needleman (1990); (c) Hillerborg *et al.* (1976); (d) Geubelle e Baylor (1990); (e) Yuan *et al.* (1996); (f) Tvergaard e Hutchinson (1992)

Para o modo II de fratura (*In-plane Shear*), relações lineares e trigonométricas entre a tensão tangencial e a separação tangencial, respectivamente, foram usadas por Needleman (1987). A forma trigonométrica descreve uma dependência periódica da tensão na separação

tangencial. Geubelle e Baylor (1990) empregaram uma forma bilinear. Tvergaard (1990) aplicou uma forma polinomial. Xu e Needleman (1993) utilizaram a forma exponencial para prever a separação por corte, enquanto que uma forma de decrescimento linear foi adotada por Camacho e Ortiz (1996). Recentemente, Chen e Linzell (2010) introduziram a forma trapezoidal para simular o modo II de fratura.

No modo III de fratura (*Out-of-plane Shear*), uma forma bilinear era usada pelos pesquisadores Pirondi e Moroni (2011). Outra forma possível foi sugerida por Zhang e Deng (2005) a partir de tensões elásticas e campos de deslocamento ao redor da ponta da trinca. De forma geral, para esse modo de ruptura são poucas as leis de tensão-separação disponíveis na literatura.

2.2.1 Parâmetros coesivos

Usualmente, os CZMs envolvem três importantes parâmetros sendo eles a separação crítica δ_c , a tensão coesiva T_0 e a energia coesiva Γ_0 , que corresponde a área abaixo da curva da lei de tensão-separação. A tensão coesiva geralmente é considerada como o principal parâmetro material não apenas para comportamento frágil mas também para o dúctil. A seleção de um segundo parâmetro depende da preferência do critério de falha e não pode ser determinado previamente. Entretanto, é usual tomar a energia e a tensão como os parâmetros constitutivos coesivos na pesquisa.

Os parâmetros coesivos das leis de tensão-separação em cada modo de fratura devem ser determinados por aplicação de técnicas em ensaios de laboratório. Geralmente, os métodos usados para determinar parâmetros coesivos em materiais dúcteis e materiais frágeis são propostos de acordo com o modo de fratura. Nota-se que alguns métodos da literatura tem também sido aplicados para a identificação de parâmetros de compósitos laminados, adesivos e soldas.

2.2.2 Implementação de CZM

O CZM se encaixa naturalmente com a estrutura de elementos finitos, sendo que para a sua implementação no FEM, pesquisadores tem colocado o modelo dentro de elementos finitos

coesivos. Esses elementos são superfícies compatíveis de forma geral com as malhas da estrutura sólida, ligando faces e governando a sua separação de acordo com a lei coesiva.

Dentro da literatura, também são encontrados outros métodos de implementação do CZM. Um destaque é a combinação com o método dos elementos de contorno, sendo esse meio atrativo devido a discretização isolada do contorno, o que fornece uma matriz de rigidez reduzida em relação ao FEM. Outro artifício é a implementação dentro método dos elementos finitos estendidos (*extended finite element method* - XFEM). Nesse método, são introduzidos diversos graus de liberdade e uma função adicional dentro dos nós dos elementos finitos, o que permite a criação de uma nova superfície de trinca em um local e direção arbitrários na malha de elementos finitos, sem a necessidade de refazer a malha (LIU *et al.*, 2013).

2.2.3 CZM aplicado no crescimento de trincas

Quando CZMs são aplicados ao campo específico da fadiga, visando a caracterização do processo de FCG sobre ciclos de carregamento, são três principais aspectos que devem ser tratados com antecedência:

- i) O comportamento do CZM sobre descarregamento local, visando contabilizar o processo de dano irreversível em casos de descarga global;
- ii) A captura dos efeitos da vida finita em fadiga, através de uma relação constitutiva que reflète a acumulação de dano sobre carregamento cíclico;
- iii) A consideração dentro do modelo do possível contato, podendo ser sobreposição ou fricção, das superfícies da zona coesiva.

2.2.4 Caminho de carga/descarga

Dentro do estudo do comportamento de estruturas submetidas a carregamentos monotônicos, de forma geral, a curva de carga-deflexão do CZM é suficiente para lidar-se com as condições de carga propostas (LI *et al.*, 1998). Isso é possivelmente a principal razão de CZMs propostos inicialmente serem reversíveis e independentes da história, sem a consideração de comportamentos vinculados ao processo de carga/descarga.

2.2.4.1 Modo de fratura puro

Quando considerado o modo puro de fratura, que vem a ser a ocorrência exclusiva de um modo atuante sobre a estrutura (Modo I, Modo II ou Modo III), pesquisadores tem empregado diferentes caminhos de carga/descarga para materiais frágeis e dúcteis.

Para materiais frágeis, Camacho e Ortiz (1996) usaram uma relação linear de carga/descarga no CZM. Nesse modelo, o descarregamento e o carregamento seguem o mesmo caminho, sendo que a separação decresce para zero quando a tensão desaparece com a rigidez reduzida.

Para materiais dúcteis, Roe (2001) introduziu uma caminho distinto de carga/descarga. A redução da separação se comporta de forma elástica com a rigidez inicial até a origem. Nessa configuração, pode existir a presença de deslocamento residual contínuo. Este, pode ser explicado pelo fato de a separação inelástica ser irreversível desde que o trabalho por dano induzido seja totalmente dissipado através da nucleação da micro trinca, crescimento de vazios e sua posterior união.

Deve-se notar que durante o processo de descarregamento e subsequente carregamento mencionados acima assume-se que o mesmo caminho é seguido. A zona do processo de fratura (zona coesiva) eventualmente se estabiliza com danos acumulados não muito grandes, a qual causam efeitos de prisão de trincas sobre carregamentos cíclicos (YANG e RAVI-CHANDAR, 1996). Por consequência, essa configuração linear de descarga/recarga é incapaz de modelar o crescimento de trincas subcrítico. Dessa forma, deve ser introduzido a evolução de dano durante o carregamento cíclico.

2.3 PROCESSO DE DANO

O uso da configuração mencionada na seção 2.2 para simular trincas por fadiga irá trazer vida infinita para a previsão, o que não é condizente com as condições reais. Para capturar o efeito da vida finita na fadiga, a evolução de dano durante o processo cíclico deve ser considerada. Existem alguns trabalhos que apresentam métodos para o cálculo desse efeito, traçando diferentes caminhos para o encontro de uma variável de dano.

2.3.1 Princípios da mecânica do dano

No nível de microescala, o dano tem surgimento no acumulo de micro tensões nos arredores das falhas ou interfaces próprias do material, levando ao rompimento das ligações no ponto danificado. Os micro defeitos e a evolução destes contribuem significativamente para a resposta não-linear dos sólidos, sendo isso demonstrado macroscopicamente pela redução da resistência do material e da rigidez.

As variáveis de dano são uma forma de regular o nível de degradação mecânica a partir da estrutura macroscópica, sendo que os tensores possibilitam descrever modificações anisotrópicas causadas pelo dano. A mecânica do dano contínuo possui como alicerce os princípios gerais da termodinâmica e dos processos irreversíveis, onde é considerado um número finito de variáveis internas.

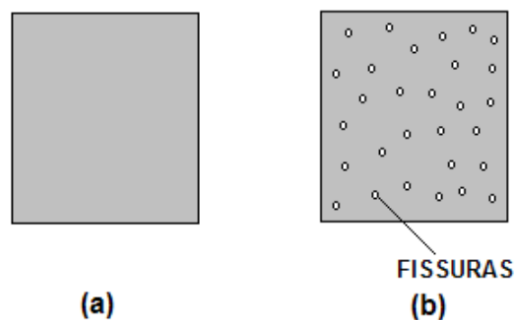


Figura 2.9 - Seção transversal: nominal (a), degradada (b)

Fonte: Rodrigues, 2011, p. 17

Modelos constitutivos de dano são usados para analisar e prever a perda de rigidez em estruturas. O modelo de dano isótropo (considera isotropia do material e da sollicitação) sugere que as falhas tem o mesmo comportamento mecânico, independente da direção, controlado por uma variável escalar D . Dessa forma, como indicado na Fig. (2.8), para uma seção transversal de um elemento danificado a variável D é definida pela Eq. (2.7), onde A_D é a área de defeitos e A a área total da seção transversal.

$$D = \frac{A_D}{A} \quad (2.7)$$

A variável D está contida no intervalo $0 \leq D \leq 1$. Quando D assume o valor de zero, há indicação que A_D é nulo, o que corresponde a integridade total do material. Quando D possui o valor unitário tem-se A_D igual a A , significando o estado de degradação completo. Portanto,

a área da seção que resiste de forma efetiva as forças aplicadas \bar{A} pode ser representada pela Eq. (2.8).

$$\bar{A} = A - A_D \quad (2.8)$$

Assim, para um elemento unidimensional com carregamento axial, podem-se definir dois valores de tensão, a aparente σ , que está associada a área total A e a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ que está associada a área efetiva \bar{A} . Na Eq. (2.9) a tensão aparente é descrita em função da variável de dano e da tensão efetiva.

$$\sigma = (1 - D) \cdot \bar{\sigma} \quad (2.9)$$

Sabendo-se o valor da tensão efetiva no momento da ruptura do material, pode-se encontrar um valor de dano crítico D_c . Esse conceito baseia-se no fato de que quando D iguala o valor de D_c ocorre a formação de uma macro trinca que acaba por romper o material. Materiais comuns como metais apresentam valores de D_c entre 0.15 e 0.5 (LEMAITRE e DESMORAT, 2005).

2.3.2 Modelo de dano

Considerando a evolução de dano um processo não-linear para a deformação inelástica, o CZM pode ser estabelecido como uma analogia dos princípios da plasticidade que permitem o amolecimento da tensão característica. As propriedades conhecidas das leis de evolução de dano elásto-plásticas tipicamente incluem as seguintes considerações (LEMAITRE, 1996):

- i) O dano inicia o seu acúmulo uma vez que uma medida de deformação, acumulada ou atual, é maior que um valor crítico;
- ii) O taxa de dano é relacionada a taxa de deformação ponderado pelo nível atualizado de carregamento;
- iii) Existe uma resistência de fadiga limite a qual um nível de tensão inferior pode ser aplicado de forma cíclica sem causar acúmulo de dano e posterior falha.

Baseando-se nessas considerações, Roe e Siegmund (2003) propuseram uma equação de evolução de dano da zona coesiva sobre carregamento cíclico (a equação desse modelo, juntamente com outros detalhes, são apresentados no capítulo da metodologia).

Na equação de Roe e Siegmund (2003), o dano acumulado é contabilizado de forma explícita e incremental, sendo que o modelo consegue prever condições complicadas de carregamento. Os caminhos de carga/descarga são mostrados na Fig. (2.9) para deslocamentos normais e de corte, e a Fig. (2.10) apresenta uma resposta típica sobre condições de carregamento controladas. Em ambos os casos são considerados o modelo de descarga de Roe (2001).

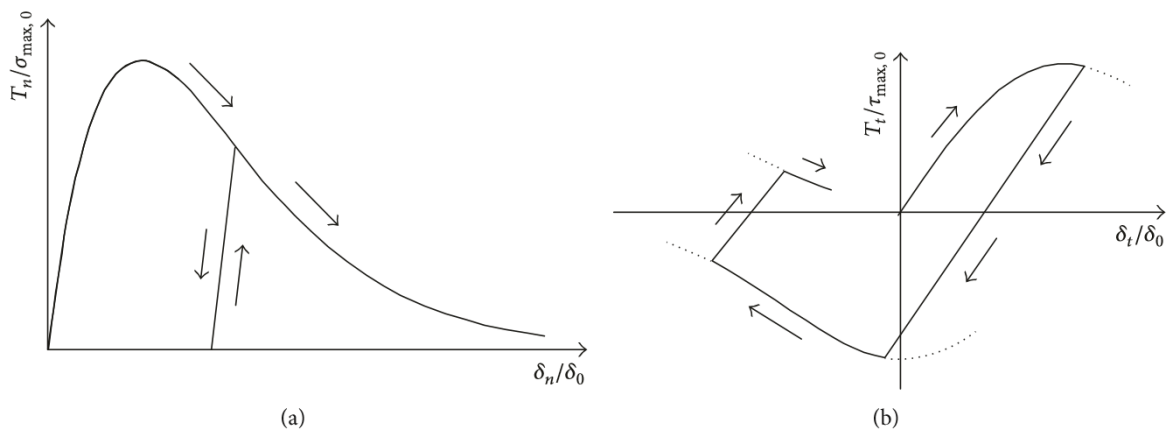


Figura 2.10 - Caminhos de carga/descarga apresentados por Roe e Siegmund (2003): (a) normal, (b) corte

Fonte: Roe e Siegmund, 2003

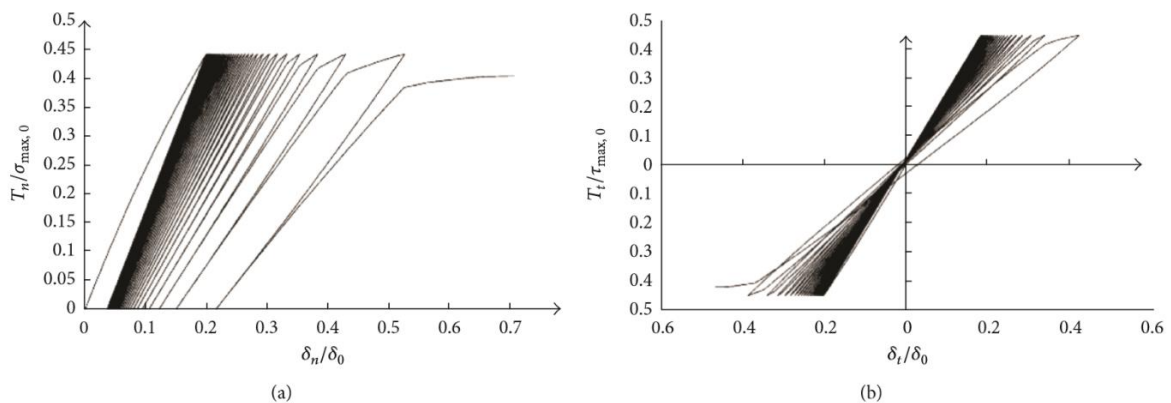


Figura 2.11 - Respostas típicas sobre condições de carregamento controladas para o modelo de Roe e Siegmund (2003): (a) normal, (b) corte

Fonte: Roe e Siegmund, 2003

Usando uma viga de duplo balanço, esse modelo reproduziu características importantes encontradas em experimentos de adesivos, incluindo a previsão de FCG em uma lei de potência que depende da energia aplicada na estrutura (SIEGMUND, 2004).

O modelo de acumulação de dano, também foi aplicado em pesquisas que reportam o FCG sobre cargas transientes e proteção do efeito *crack bridging* (SIEGMUND, 2004), a influência do efeito limitador de camada plástica (*constraint effect*) (WANG e SIEGMUND, 2005) e o efeito da plasticidade do gradiente de tensões (BRINCKMANN e SIEGMUND, 2008).

O fator de FCG em estados de tensões complexos (JHA e BANERJEE, 2012) e a plasticidade incompatível em interfaces de materiais, que ocorre quando a trinca se estende por dois materiais diferentes, (WANG e SIEGMUND, 2006) também foram investigados utilizando esse modelo. Ainda, constata-se a sua presença em averiguações de condições 3D e previsão de sobrecarga (JIANG *et al.*, 2009) e no uso de XFEM permitindo a simulação de FCG sobre modo misto de propagação (XU e YUAN, 2009).

2.4 CARACTERIZAÇÃO DOS CICLOS

Os carregamentos cíclicos aplicados aos materiais podem ser classificados conforme o valor médio da carga em alternado puro, repetido, alternado ou ondulado, como indicado na Fig. (2.11).

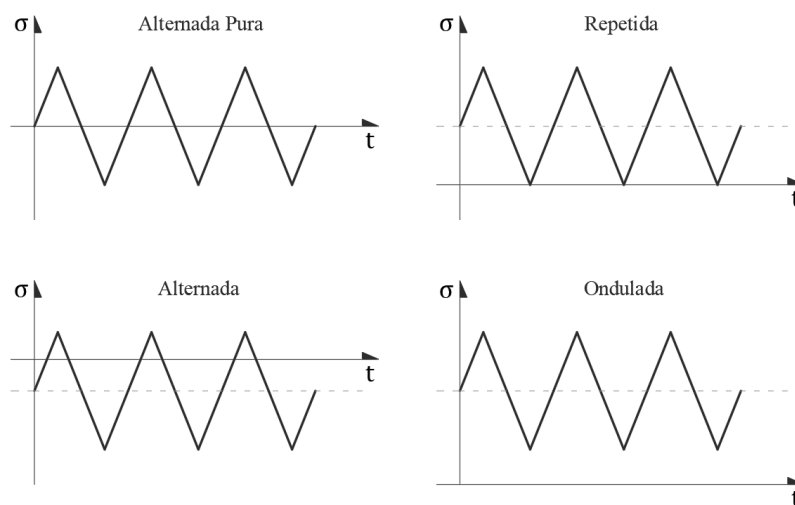


Figura 2.12 - Modos de carregamento para cargas cíclicas

Porém, na prática as cargas podem se apresentar de forma distinta com distribuições aleatórias. Nesses problemas os carregamentos podem ser agrupados em blocos, procurando uma aproximação real que possibilite a análise (MACHADO, 2007).

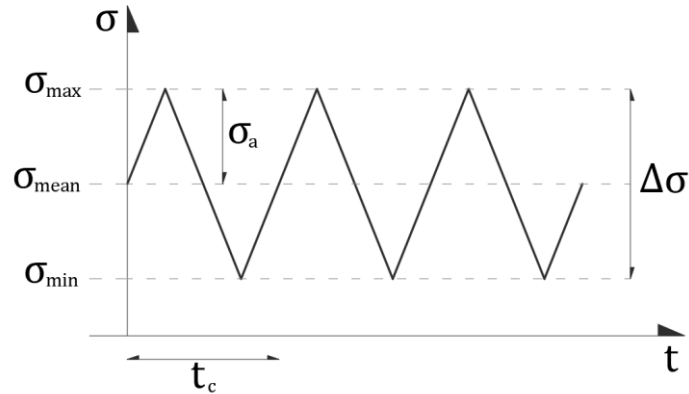


Figura 2.13 - Parâmetros das solicitações de fadiga

Durante a análise de problemas é comum o uso de algumas relações entre as tensões aplicadas máxima σ_{max} e mínima σ_{min} apresentadas na Fig. (2.12). A tensão média σ_{mean} fornecida a uma estrutura é definida pela Eq. (2.10), já amplitude de tensão σ_a pode ser encontrada pela Eq. (2.11), e por último a razão de tensões R pela Eq. (2.12). Na gravura o tempo de ciclo ou período t_c , corresponde ao tempo necessário para um ciclo completo de carga e descarga sobre a estrutura.

$$\sigma_{mean} = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2 \quad (2.10)$$

$$\sigma_a = \Delta\sigma/2 = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2 \quad (2.11)$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (2.12)$$

Essas mesmas relações são aplicadas no presente trabalho considerando a variação de deslocamentos prescritos Δu , de cargas ΔP e de fatores de intensidade de tensões ΔK .

3 METODOLOGIA

Nesse capítulo são apresentados em detalhes os modelos empregados no algoritmo, bem como as ferramentas utilizadas para fazê-lo. São expostos 4 subcapítulos que descrevem especificamente o modelo de zona coesiva de Needleman (1992), o modelo de dano de Roe e Siegmund (2003), os elementos de interface coesiva aplicados e o algoritmo desenvolvido sobre a plataforma Metafor (PONTHOT, 1995).

3.1 MODELO DE ZONA COESIVA DE NEEDLEMAN

A formulação do modelo de zona coesiva de Needleman (1992) parte do PTV (apresentado no item 3.3), onde busca-se uma relação entre a tensão coesiva e a separação do material. Primordialmente, a lei coesiva visa descrever a separação do material sobre carregamento monotônico através de uma função potencial ϕ , que é originada por potenciais interatômicos. Essa energia depende dos valores atualizados da separação normal Δu_n e tangencial Δu_t , sendo que a sua derivada em relação as separações gera as tensões coesivas normal T_n e de corte T_t . De acordo com essa metodologia, as tensões coesivas normal e de corte são entregues pela Eq. (3.1)¹.

$$T_n = \sigma_{max,0} \exp(1) \exp\left(-\frac{\Delta u_n}{\delta_0}\right) \left\{ \frac{\Delta u_n}{\delta_0} \exp\left(-\frac{\Delta u_t^2}{\delta_0^2}\right) + (1.0 - q) \frac{\Delta u_n}{\delta_0} \left[1.0 - \exp\left(-\frac{\Delta u_t^2}{\delta_0^2}\right) \right] \right\} \quad (3.1a)$$

$$T_t = 2\sigma_{max,0} \exp(1) q \frac{\Delta u_t}{\delta_0} \left(1.0 + \frac{\Delta u_n}{\delta_0} \right) \exp\left(-\frac{\Delta u_n}{\delta_0}\right) \exp\left(-\frac{\Delta u_t^2}{\delta_0^2}\right) \quad (3.1b)$$

A tensão coesiva inicial máxima sobre carregamento monotônico $\sigma_{max,0}$, é um dos parâmetros materiais nas leis constitutivas apresentadas e corresponde a máxima tensão normal alcançada sobre carregamento normal puro. Associado a esse valor, a tensão coesiva inicial de corte sobre carregamento monotônico $\tau_{max,0}$, adquirida sobre separação de corte pura, é encontrada pela Eq. (3.2).

¹ O operador $\exp(x)$ indica a função exponencial e^x , sendo e o número de Euler.

$$\tau_{max,0} = \sqrt{2\exp(1)}q\sigma_{max,0} \quad (3.2)$$

O segundo parâmetro material, denominado comprimento coesivo δ_0 , corresponde a separação acumulada necessária para o material atingir a tensão coesiva inicial em carregamento normal.

As energias coesivas de superfície normal e de corte sobre carregamento monotônico são definidas pela Eq. (3.3). O parâmetro q , presente em Eq. (3.1) e (3.2), representa a razão entre essas energias, $\phi_{n,0}/\phi_{t,0}$.

$$\phi_{n,0} = \sigma_{max,0}\delta_0\exp(1) \quad (3.3a)$$

$$\phi_{t,0} = \sqrt{\frac{\exp(1)}{2}}\tau_{max,0}\delta_0 \quad (3.3b)$$

A plotagem das curvas geradas pela Eq. (3.1) encontra-se nas Fig. (3.1) e (3.2), onde as tensões T_n e T_t normalizadas estão em função dos deslocamentos Δu_n e Δu_t . Na Fig. (3.1), restringe-se à Eq. (3.1a) um deslocamento puramente normal, aplicando-se um valor nulo de Δu_t . A mesma consideração é tomada na Fig. (3.2) com relação a Eq. (3.1b), onde o deslocamento normal Δu_n adotado é nulo, tornando o deslocamento um corte puro.

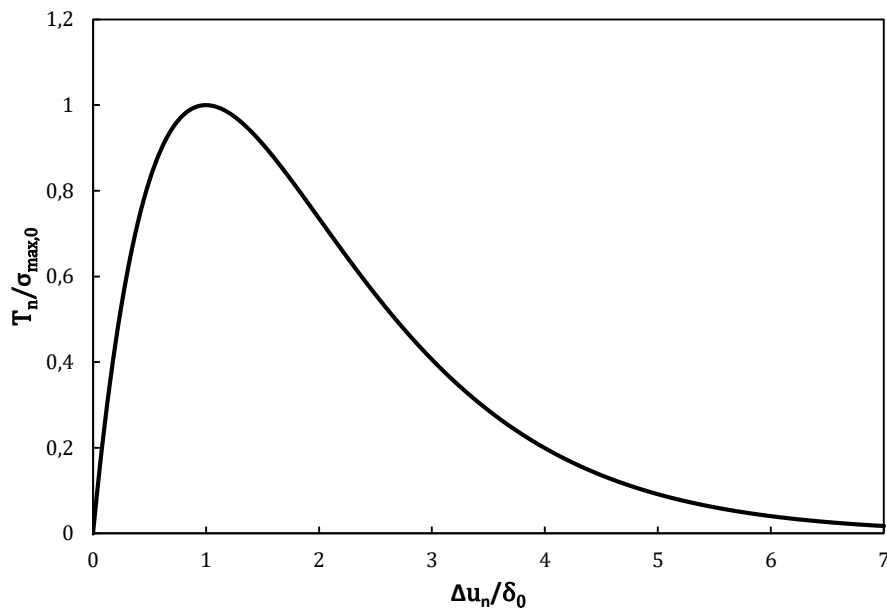


Figura 3.1 - Tensão normal T_n em função de Δu_n

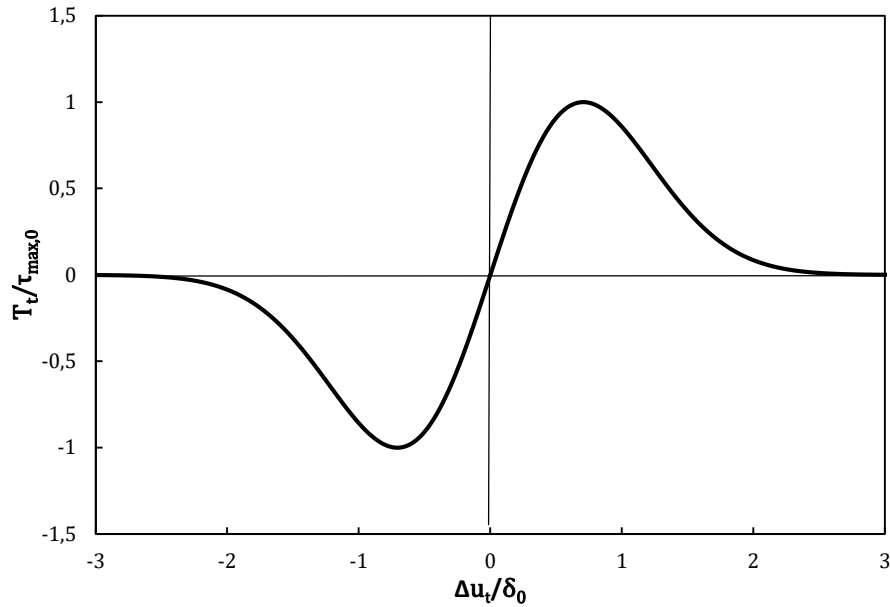


Figura 3.2 - Tensão tangencial T_t em função de Δu_t

3.2 MODELO DE DANO DE ROE E SIEGMUND

No modelo de dano de Roe e Siegmund (2003) a variável de dano D_c , é designada para descrever o retrocesso da propriedade coesiva do material. Seguindo esta colocação, as tensões coesivas atualizadas, σ_{max} e τ_{max} , se relacionam com as tensões coesivas iniciais, $\sigma_{max,0}$ e $\tau_{max,0}$, pelo emprego da Eq. (3.4). Dentro do modelo, todas as funções (exceto a lei de contato) para o cálculo de tensões coesivas empregam valores atualizados da tensão coesiva característica do material.

$$\sigma_{max} = (1 - D_c) \cdot \sigma_{max,0} \quad (3.4a)$$

$$\tau_{max} = (1 - D_c) \cdot \tau_{max,0} \quad (3.4b)$$

De acordo com Wang e Siegmund (2005), para obter-se o estado atualizado do dano deve-se realizar uma descrição do seu desenvolvimento no formato de taxa, $\dot{D}_c = \dot{D}_c(\bar{T}, \Delta\dot{u}, D_c)$. Baseando-se nos requerimentos apresentados no item 2.3.2, a evolução da taxa de dano \dot{D}_c pode ser descrita pela Eq. (3.5), onde a taxa de abertura total $\Delta\dot{u}$ é encontrada pelo emprego das Eq. (3.6) e (3.7), sendo $\Delta\bar{u}$ a abertura resultante na zona coesiva.

$$\dot{D}_c = \frac{|\Delta\dot{u}|}{\delta_\Sigma} \left[\frac{\bar{T}}{\sigma_{max}} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right] H(\Delta\bar{u}_{acc} - \delta_0) \quad (3.5)$$

$$\Delta\bar{u} = \sqrt{\Delta u_n^2 + \Delta u_t^2} \quad (3.6)$$

$$\Delta\dot{\bar{u}} = \Delta\bar{u}_t - \Delta\bar{u}_{t-\Delta t} \quad (3.7)$$

Por outro lado, a tensão resultante na zona coesiva \bar{T} é encontrada pela Eq. (3.8), onde o fator $2\exp(1)q^2$ tem a função de ajustar a tensão tangencial T_t em relação a T_n .

$$\bar{T} = \sqrt{T_n^2 + T_t^2 / (2\exp(1)q^2)} \quad (3.8)$$

A Eq. (3.5) é subordinada a uma função *Heaviside* H regida pela separação acumulada do material, $\Delta\bar{u}_{acc}$. Uma vez que $\Delta\bar{u}_{acc}$, encontrado através da Eq. (3.9), for maior que o valor de referencia δ_0 a taxa de dano pode ser calculada, possuindo este sempre um valor positivo ou nulo ($\dot{D}_c \geq 0$). Nota-se ainda que \dot{D}_c depende de $|\Delta\dot{\bar{u}}|$ sendo que podem existir taxas \dot{D}_c tanto no processo de carga quanto no de descarga. Essa é uma característica que diferencia o presente trabalho da metodologia aplicada em Cayro (2016).

$$\Delta\bar{u}_{acc} = \int_t |\Delta\dot{\bar{u}}| dt \quad (3.9)$$

Na Eq. (3.5) são introduzidos dois novos parâmetros da zona coesiva do material, o comprimento coesivo acumulado δ_Σ e o limite de resistência a fadiga σ_f (tensão abaixo do qual o material apresenta vida infinita). A propriedade δ_Σ tem a função de ponderar a taxa de separação do material, sendo uma grandeza proporcional a diferença entre o comprimento coesivo crítico e δ_0 . A magnitude do taxa de dano é proporcional a taxa normalizada de separação, $|\Delta\dot{\bar{u}}|/\delta_\Sigma$. Não ocorre acumulação de dano ($\dot{D}_c = 0$), se a tensão coesiva \bar{T} normalizada pela tensão coesiva atual σ_{max} é menor que a razão entre o limite de resistência a fadiga σ_f e a tensão coesiva inicial $\sigma_{max,0}$ (WANG e SIEGMUND, 2005), tal que:

$$\dot{D}_c = 0 \quad \text{se} \quad \frac{\bar{T}}{\sigma_{max}} < \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \quad (3.10)$$

3.2.1 Leis de carga e descarga

São utilizados dois formatos principais para descrever os ciclos de solicitações sobre o material através do modelo de zona coesiva proposto. O primeiro, exemplificado pela Fig. (3.3),

considera que dentro do processo cíclico o carregamento e o descarregamento ocorrem sobre uma mesma reta que possui direção até a origem.

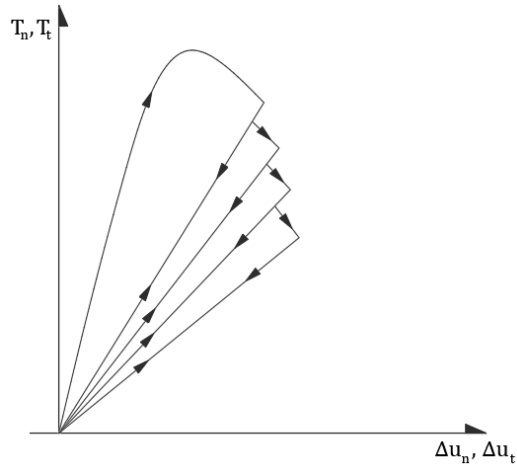


Figura 3.3 - Lei de carga-descarga até a origem com diminuição e escalonamento da tensão coesiva

Através da Fig. (3.3), percebe-se que os sucessivos ciclos alteram a inclinação da reta, o que demonstra a degradação das propriedades elásticas do material. De forma anexada, são tomadas alterações devido ao dano do material, fundamentadas pelo modelo de Roe e Siegmund (2003), a qual geram a diminuição da tensão coesiva que é evidenciada pelo escalonamento na curva.

Esse processo de carga/descarga ocorre seguindo a rigidez $T_{max}/\Delta u_{max}$. Essa condição é descrita separadamente pela Eq. (3.11) para os casos de abertura normal e tangencial (WANG e SIEGMUND, 2005). As tensões máximas $T_{n,max}$ e $T_{t,max}$ presentes nessas leis correspondem aos valores alcançados pelas aberturas máximas $\Delta u_{n,max}$ e $\Delta u_{t,max}$ respectivamente, no ciclo anterior de carga/descarga.

$$T_n = T_{n,max} + \left[\frac{T_{n,max}}{\Delta u_{n,max}} \right] (\Delta u_n - \Delta u_{n,max}) \quad (3.11a)$$

$$T_t = T_{t,max} + \left[\frac{T_{t,max}}{\Delta u_{t,max}} \right] (\Delta u_t - \Delta u_{t,max}) \quad (3.11b)$$

O segundo modo de descarga, representado na Fig. (3.4), segue os mesmos princípios do primeiro, apresentando como única diferença uma inclinação de reta de carga e descarga dependente da tensão σ_{max} atualizada pelo dano. Esse fato indica a preservação das propriedades elásticas do material (ângulo θ constante), gerando um deslocamento residual acumulativo durante os sucessivos ciclos de carga/descarga.

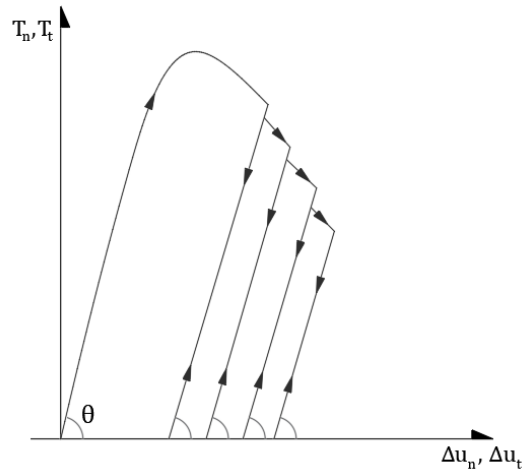


Figura 3.4 - Lei de carga e descarga com deslocamento residual e escalonamento da tensão coesiva

Nesse caso, o processo é descrito pela Eq. (3.12), onde as tensões σ_{max} e τ_{max} representam as tensões coesivas atualizadas características (SIEGMUND, 2004).

$$T_n = T_{n,max} + \frac{\sigma_{max} \exp(1)}{\delta_0} (\Delta u_n - \Delta u_{n,max}) \quad (3.12a)$$

$$T_t = T_{t,max} + \sqrt{2 \exp(1)} \frac{\tau_{max}}{\delta_0} (\Delta u_t - \Delta u_{t,max}) \quad (3.12b)$$

Durante o processo cíclico, existe ainda a possibilidade de haver contato entre as superfícies da trinca durante o descarregamento evidenciando compressão, afetando unicamente as tensões coesivas normais. Para esse caso existem procedimentos que devem ser tomados.

No formato que remete a origem, a tensão coesiva normal é encontrada através de uma modificação na Eq. (3.1a) na qual é aplicada uma grande penalidade em sua rigidez, que é representada pela variável A . Os autores Wang e Siegmund (2005) sugerem um valor de A igual a 30 para casos em que $\Delta u_n < 0$.

$$T_{n,comp} = A \cdot T_n(\Delta u_n, \Delta u_t) \quad (3.13)$$

Para ocorrências na qual o processo de descarga ocorre de forma paralela, recorre-se a Eq. (3.14), onde toma-se $B = 10$. O valor de $T_n(\Delta u_n, \Delta u_t)$ faz referência ao valor de T_n calculado em Eq. (3.1a) (ROE e SIEGMUND, 2003).

$$\begin{aligned}
T_{n,comp} = T_n(\Delta u_n, \Delta u_t) + T_{n,max} - \frac{\sigma_{max} \exp(1)}{\delta_0} \Delta u_{n,max} \\
+ B\sigma_{max,0} \exp(1) \exp\left(-\frac{\Delta u_n}{\delta_0}\right) \left(\frac{\Delta u_n}{\delta_0}\right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

As leis para o cálculo das tensões coesivas são incorporadas nos elementos coesivos dentro da interface. No momento em que esses sofrem o rompimento, ou seja, atingem o dano acumulado unitário ($D_c = 1$) no caso do presente trabalho, as tensões coesivas deixam de existir. Assim, os elementos passam a apresentar apenas tensões de contato de direção normal, encontradas pela Eq. (3.15), restritas a aberturas normais negativas.

$$T_{n,contact} = B\sigma_{max,0} \exp(1) \exp\left(-\frac{\Delta u_n}{\delta_0}\right) \left(\frac{\Delta u_n}{\delta_0}\right) \tag{3.15}$$

3.3 ELEMENTOS DE INTERFACE COESIVA

Neste trabalho o fenômeno da fratura é abordado de uma forma discreta. Para tal consideração, são utilizados elementos de interfaces coesivas, que são qualificados como elementos finitos fictícios inseridos entre as laterais de dois elementos finitos reais adjacentes. Para implementar esse método de abordagem faz-se uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), onde busca-se o equilíbrio do problema analisado.

3.3.1 Princípio dos trabalhos virtuais

Baseando-se no PTV, através da Eq. (3.16) pode-se representar o estado de equilíbrio do problema. Este é encontrado a partir da inserção de um termo de trabalho interno na parte esquerda da igualdade representando as tensões coesivas.

$$\int_{\Omega} \sigma : \left(\frac{\partial \delta U}{\partial x}\right) dV + \int_{\Omega} \rho \dot{U} \cdot \delta U dV + \int_{\Gamma^C} T_{CZ} \cdot \delta \Delta dS = \int_{\Omega} B \cdot \delta U dV + \int_{\Gamma^F} F \cdot \delta U dS \tag{3.16}$$

Nessa igualdade, Ω representa o volume do corpo, Γ^F a superfície do corpo e Γ^C a superfície da zona coesiva; σ são as tensões de Cauchy, U os deslocamentos ao longo do corpo, ρ a massa específica do material, T_{CZ} as tensões coesivas na interface da trinca, Δ a abertura da

trinca, B as forças de volume, F as forças aplicadas no contorno do corpo e δ uma variação arbitrária virtual.

O contorno externo do corpo em estudo, simbolizado por Γ , é dividido em duas partes de maneira que $\Gamma = \Gamma^U + \Gamma^F$, onde Γ^U representa o local onde existem restrições e deslocamentos prescritos. Por outro lado, o contorno interno é representado pela superfície Γ^C , como mostra a Fig. (3.5).

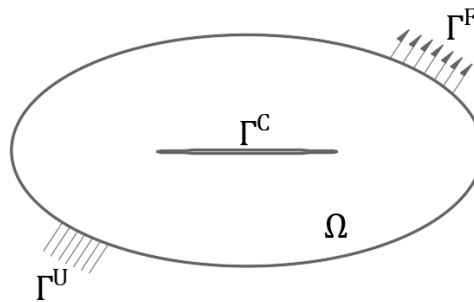


Figura 3.5 - Corpo em estudo

A equação de equilíbrio pode ser transformada em uma equação diferencial ordinária após a eliminação dos deslocamentos nodais virtuais, desse modo ela assume o formato evidenciado pela Eq. (3.17).

$$M\ddot{U} + F_{int} - F_{ext} = 0 \quad (3.17)$$

Nessa relação, M representa a matriz de massa consistente, \ddot{U} as acelerações nos nós, F_{int} as forças internas e F_{ext} as forças externas. Para esse caso, o vetor das forças internas terá a contribuição de parcela proveniente das tensões coesivas.

Nos problemas analisados em que as forças inerciais são desprezíveis o sistema torna-se linear, possuindo o formato $F_{int} - F_{ext} = 0$. Dessa forma, pode ser resolvido pelo emprego do método de Newton-Raphson.

3.3.2 Caracterização dos elementos coesivos

A Fig. (3.6) representa um elemento coesivo colocado entre as laterais de dois elementos finitos vizinhos. Apresentando quatro nós, o elemento coesivo pode se deslocar nas direções

normal n e tangencial t conforme os eixos indicados. Os nós apontados pelos números 1 e 4, possuem as mesmas coordenadas iniciais, assim como os indicados por 2 e 3.

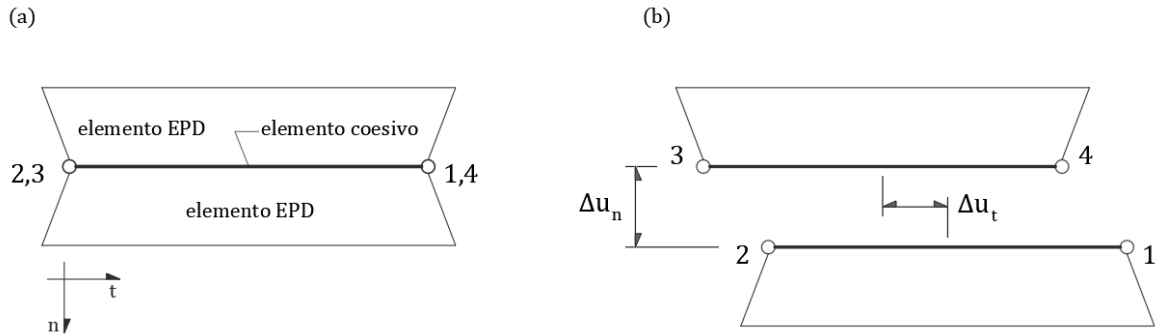


Figura 3.6 - Elemento coesivo de interface (a) em estado inicial; (b) após carregamento

Seguindo o PTV, deve-se encontrar a parcela correspondente ao trabalho desenvolvido na superfície coesiva Γ^C . Considera-se que o vetor das tensões no elemento coesivo T_{CZ} , possui duas componentes, uma normal e outra tangencial, sendo representado pela Eq. (3.18).

$$T_{CZ} = T^e = \{T_n \quad T_t\}^e \quad (3.18)$$

O vetor dos deslocamentos Δ , normal e tangencial da interface, é formado por:

$$\Delta = \Delta^e = \begin{Bmatrix} \Delta_n \\ \Delta_t \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Através da Eq. (3.18) e (3.19) pode-se encontrar o trabalho de abertura nas interfaces coesivas W^e , como sendo:

$$W^e = \int_{\Gamma^{C,e}} T^e \Delta^e dS \quad (3.20)$$

São essas tensões de coesão que buscam unir as interfaces dos elementos quando elas se afastam uma da outra, e impedem a sua sobreposição quando as mesmas possuem a tendência a interpenetrar-se.

3.4 ALGORITMO DO METAFOR

A plataforma oferecida pelo programa Metafor (PONTHOT, 1995) possui como objetivo simular problemas de conformação mecânica com o uso do MEF. Normalmente esses problemas denotam grande complexidade devido a junção de diferentes fenômenos o que torna

suas soluções altamente não lineares. Por isso, a funcionalidade do Metafor o torna adequado para solucionar diversas situações na engenharia.

O programa Metafor foi desenvolvido inteiramente na linguagem Fortran 77. A entrada de dados faz uso de arquivos de simples texto (ASCII), sendo contido neles informações relativas a malha de elementos finitos (coordenadas dos nós, conectividades dos elementos, etc.), carregamentos ou deslocamentos impostos a estrutura, coordenadas temporais e opções de resolução do problema.

A introdução do algoritmo contendo a metodologia da pesquisa ocorreu essencialmente dentro de duas sub-rotinas. Essas sub-rotinas são responsáveis pelo processamento e cálculo das tensões nos elementos coesivos da estrutura.

Basicamente, a primeira sub-rotina desempenha mais funções dentro do algoritmo sendo a mais solicitada. Ela pode ser classificada em quatro principais etapas:

Etapa 01 – Etapa inicial onde é realizada a leitura dos deslocamentos nos nós do elemento coesivo e posterior cálculo dos deslocamentos nos pontos de Gauss do elemento;

Etapa 02 – Efetuação do cálculo dos deslocamentos e tensões resultantes nos pontos de Gauss com os dados armazenados da iteração anterior. Cálculo da taxa de dano e atualização das propriedades do material. Impressão dos dados em um arquivo de saída. (Essa etapa é acionada apenas com as forças da estrutura estando em equilíbrio);

Etapa 03 – Cálculo das tensões coesivas no ponto de Gauss e armazenagem de dados para os cálculos da Etapa 02;

Etapa 04 – Obtenção das tensões coesivas nos nós e posterior envio dos valores para a matriz de rigidez da estrutura.

Por outro lado, a segunda sub-rotina desempenha a função de atualizar os termos da matriz de rigidez da estrutura que possuem influência dos elementos coesivos quando esta se encontra em desequilíbrio. Essa sub-rotina é utilizada durante o processo iterativo incremental de solução do problema até o momento em que é atingido o equilíbrio. Basicamente, possui as mesmas etapas da primeira, a exceção da 02.

4 APLICAÇÕES

O quarto capítulo possui foco em aplicações práticas do modelo desenvolvido dentro do Metafor. Inicialmente, esses exemplos visam comprovar o funcionamento do algoritmo através da análise dos comportamentos de tensões coesivas, danos acumulados e propagações de trincas. Após confirmada a estabilidade do programa, parte-se para discussão dos resultados obtidos nos exemplos, bem como alguns comparativos com os trabalhos de referência.

4.1 APLICAÇÃO 01: ELEMENTO SEM DESLOCAMENTO RESIDUAL

Essa aplicação pretende verificar o funcionamento do programa através da análise de um único elemento coesivo sujeito às relações de tensão/separação que não apresentam deformação residual. O elemento coesivo se encontra posicionado entre dois elementos finitos em EPD como representado na Fig. (4.1). A simulação busca o desempenho somente do elemento adesivo que une os dois elementos finitos, sendo que estes não possuem influência nos valores obtidos para a análise.

O material do elemento coesivo possui como propriedades tensão coesiva inicial $\sigma_{max,0} = 1GPa$, comprimento coesivo $\delta_0 = 0.005mm$, comprimento coesivo acumulado $\delta_{\Sigma} = 4\delta_0$ e limite de fadiga $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$.

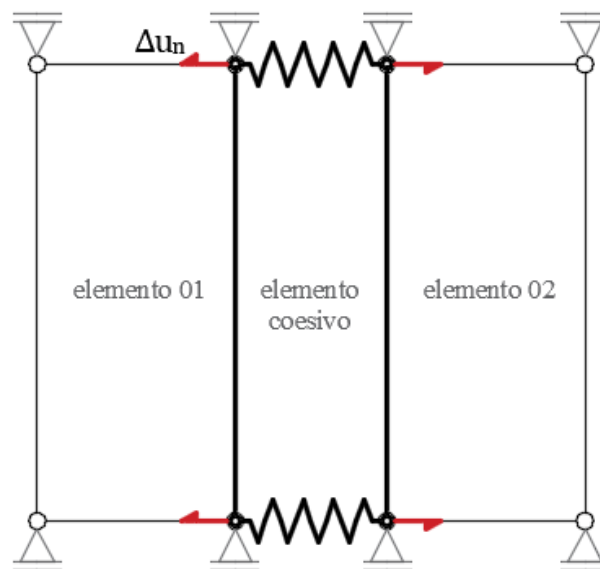


Figura 4.1 - Representação do sistema analisado na aplicação 01

São aplicados deslocamentos prescritos Δu_n de três diferentes magnitudes sobre o elemento coesivo, sendo eles razões do valor de δ_0 característico do material. Os deslocamentos são aplicados de forma cíclica como apresentado na Fig. (4.2), possuindo período de carga/descarga de dois segundos.

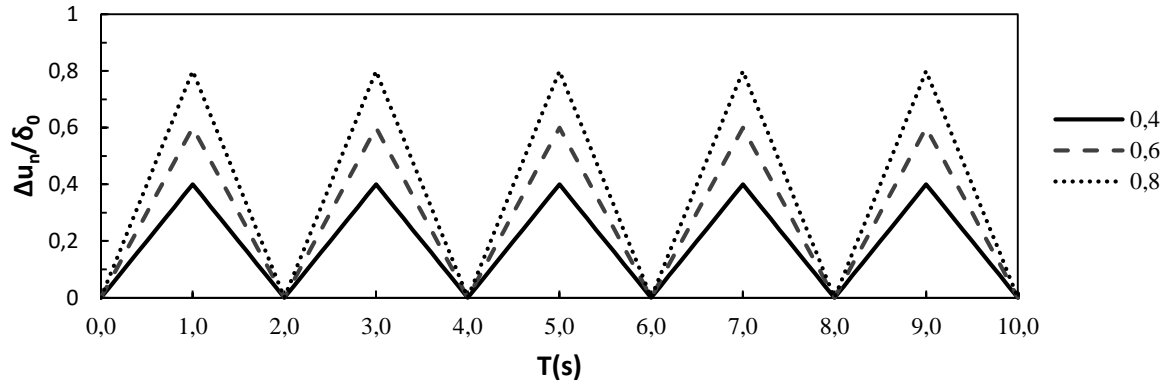


Figura 4.2 - Amplitudes dos deslocamentos prescritos aplicados sobre o elemento coesivo

Na Fig. (4.3) são plotadas as tensões coesivas T_n em função das aberturas Δu_n alcançadas pelas interfaces do elemento no processo cíclico, ambas normalizadas. Observa-se que os máximos valores atingidos em cada caso são justamente os deslocamentos prescritos aplicados.

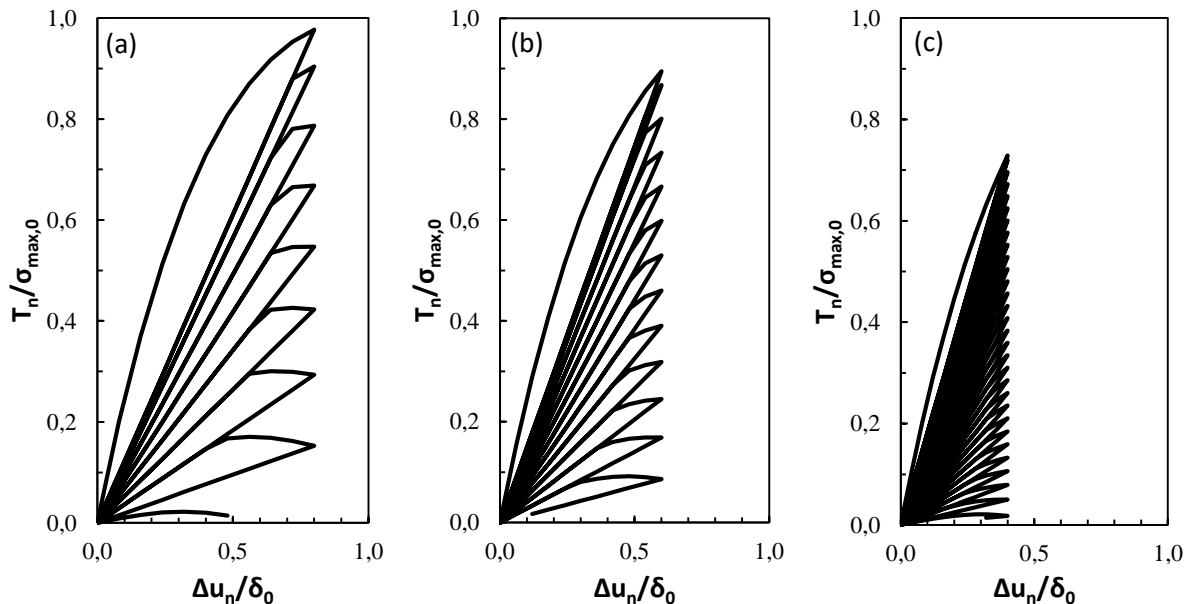


Figura 4.3 - Tensão coesiva em relação a abertura do elemento para o deslocamento prescrito de (a) $0,8\delta_0$; (b) $0,6\delta_0$ e (c) $0,4\delta_0$

A evolução do dano acumulado D_c , até atingir o valor unitário, para cada um dos deslocamentos é mostrada na Fig. (4.4). Para o valor prescrito de $0,8\delta_0$ foram necessários 8.3

ciclos de carga/descarga para alcançar a ruptura, enquanto que para o de $0.6\delta_0$ foram precisos 12.9 ciclos, e por fim para $0.4\delta_0$, 29.6 ciclos.

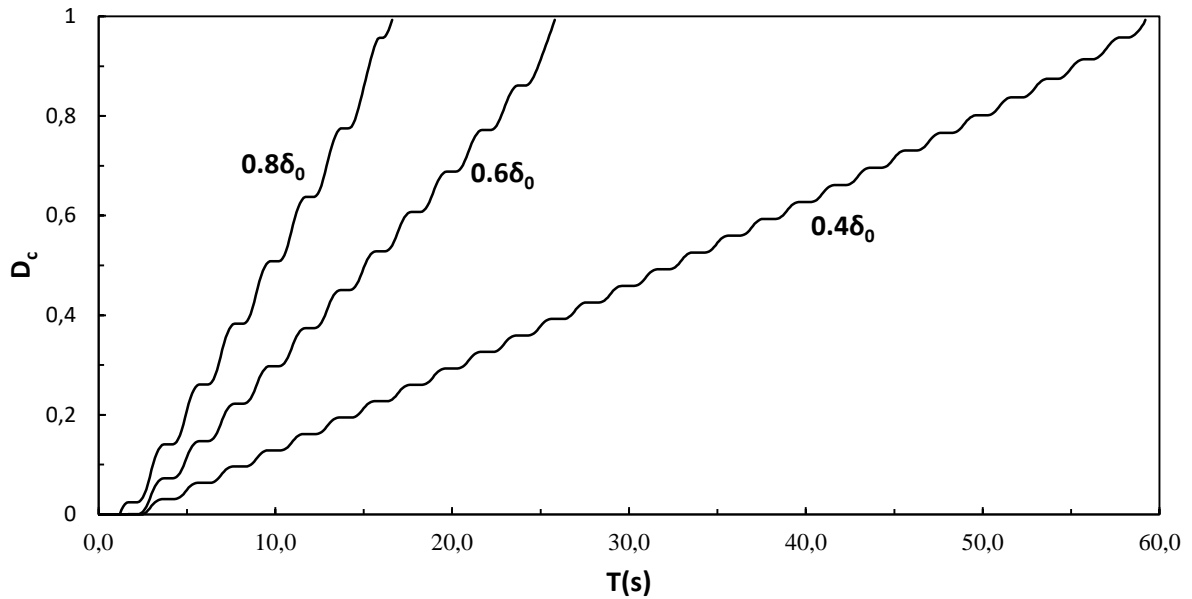


Figura 4.4 - Evolução de D_c em relação ao tempo para cada valor do deslocamento prescrito aplicado

4.2 APLICAÇÃO 02: ELEMENTO COM DESLOCAMENTO RESIDUAL

Nessa aplicação também documenta-se a resposta de um único elemento coesivo submetido a carregamentos cíclicos até o seu rompimento. São seguidos os passos de Siegmund (2004), onde são utilizadas as leis de carga/descarga com deslocamento residual, buscando-se avaliações de tensões normais e tangenciais.

O sistema analisado é formado por três elementos seguindo o modelo da primeira aplicação, Fig. (4.5), sendo o elemento central um elemento coesivo e os laterais elementos quadriláteros em EPD. As forças são aplicadas diretamente nos quatro nós que formam o elemento coesivo.

Para o elemento coesivo são utilizadas propriedades características de um polietileno de alta densidade (adesivo), que apresenta tensões coesivas iniciais $\sigma_{max,0} = \tau_{max,0} = 6.66MPa$, comprimento coesivo $\delta_0 = 0.203mm$, comprimento coesivo acumulado $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e limite de fadiga $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$.

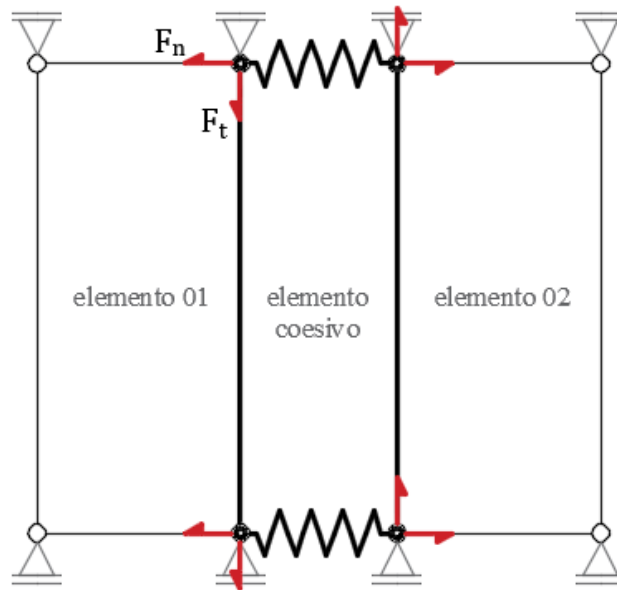


Figura 4.5 - Representação do sistema analisado na aplicação 02

4.2.1 Carregamento de amplitude constante

A primeira etapa da análise objetiva encontrar o número de ciclos para a falha N_f , do elemento coesivo tomando $D_c = 1$, utilizando uma série de carregamentos uniaxiais que visam representar diferentes tensões médias, σ_{mean} e τ_{mean} , além de diferentes amplitudes, $\Delta\sigma$ e $\Delta\tau$. Assim como no caso anterior, o tempo de duração de cada ciclo t_c é de 2 segundos.

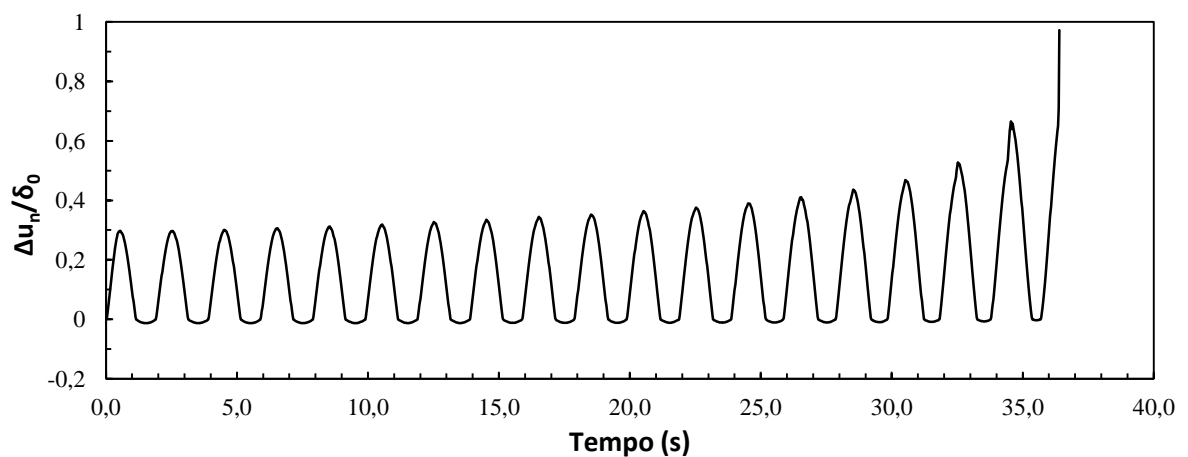


Figura 4.6 - Abertura normalizada do elemento coesivo sobre carregamento normal no tempo para o caso de $\sigma_{mean}=0$ e $\Delta\sigma=1.20\sigma_{max,0}$

Inicialmente, exemplifica-se o comportamento esperado para o carregamento normal no elemento de interface sendo essa análise realizada para os valores de $\sigma_{mean} = 0$ e $\Delta\sigma =$

$1.20\sigma_{max,0}$ ($\sigma_a = 0.6\sigma_{max,0}$). Com essas grandezas, a ruptura do adesivo ocorre após 36.2 segundos, ou no ciclo 19. A Fig. (4.6) demonstra os valores de Δu_n , normalizados por δ_0 , atingidos no decorrer do tempo.

A evolução de D_c em função do tempo e de Δu_n normalizado é apresentado na Fig. (4.7). Nesse caso observa-se que ao atingir um dano acumulado superior a 0.4, e portanto a tensão coesiva atualizada para 60% do seu valor inicial, o elemento atinge o rompimento antes do próximo pico de carregamento, pois a carga aplicada corresponde aos mesmos 60% de $\sigma_{max,0}$.

O progresso das tensões coesivas T_n é caracterizada através da Fig. (4.8), onde seus valores, normalizados por $\sigma_{max,0}$, são plotados em função dos fatores de Δu_n durante os sucessivos ciclos.

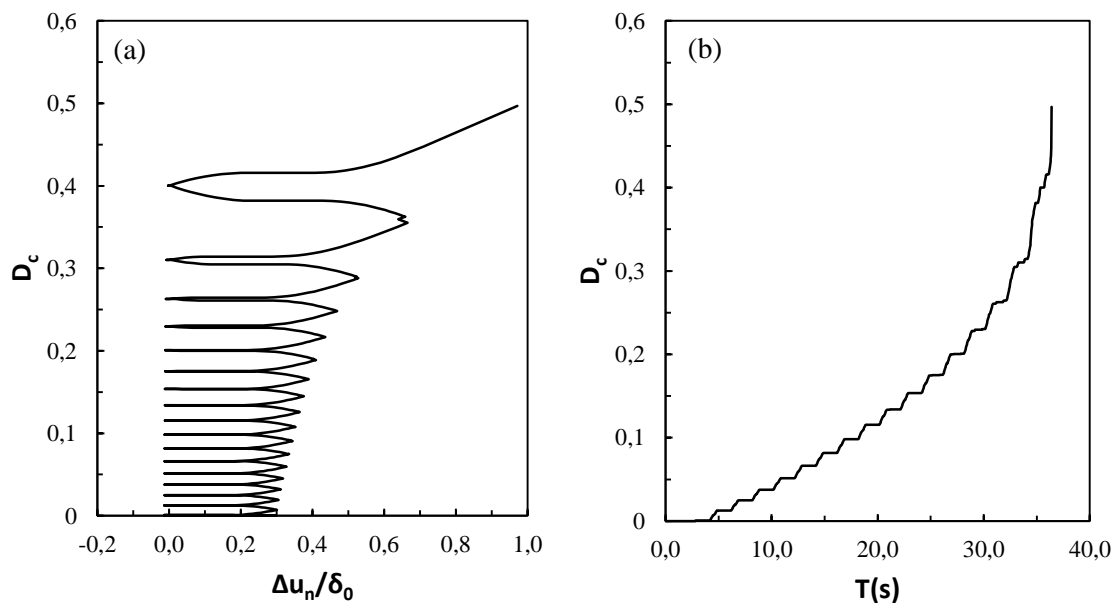


Figura 4.7 - Dano acumulado pelo elemento coesivo sobre carregamento normal: (a) Em função do tempo; (b) Em função da abertura normalizada

Da mesma forma, observa-se o comportamento do elemento ao carregamento tangencial, fazendo uso de $\tau_{mean} = 0$ e $\Delta\tau = 1.20\tau_{max,0}$ e encontrando a ruptura após 17 segundos, no ciclo 9. Os mesmos gráficos construídos para o carregamento normal são observados nas Fig. (4.8)-(4.11).

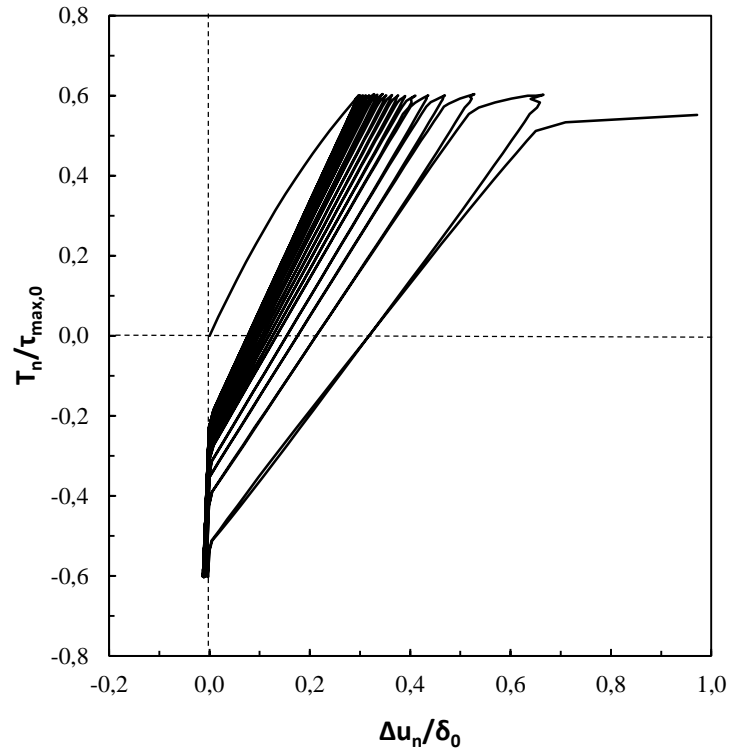


Figura 4.8 - Tensão coesiva normal normalizada em relação ao fator de abertura no elemento coesivo

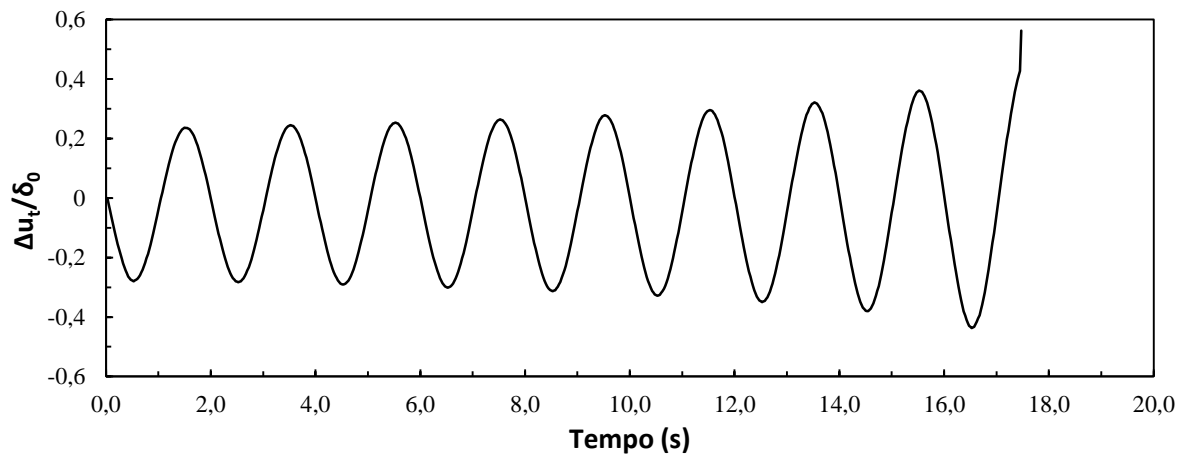


Figura 4.9 - Abertura normalizada do elemento coesivo sobre carregamento tangencial no tempo para o caso de $\tau_{mean}=0$ e $\Delta\tau=1.20\tau_{\max,0}$

Na Fig. (4.9) pode-se observar que a abertura tangencial se desenvolve de forma igual para ambos os lados do corte, dessa forma é indiferente o sentido na qual se aplica a força sobre o elemento. O dano acumulado acaba refletindo o comportamento da abertura, sendo que a sua taxa depende apenas do módulo da tensão coesiva nesse caso. Dessa forma, a ruptura ocorre em um tempo inferior ao caso do carregamento normal, como mostra a Fig. (4.10). A Fig. (4.11) complementa mostrando o desenvolvimento das tensões T_t em função das aberturas Δu_t .

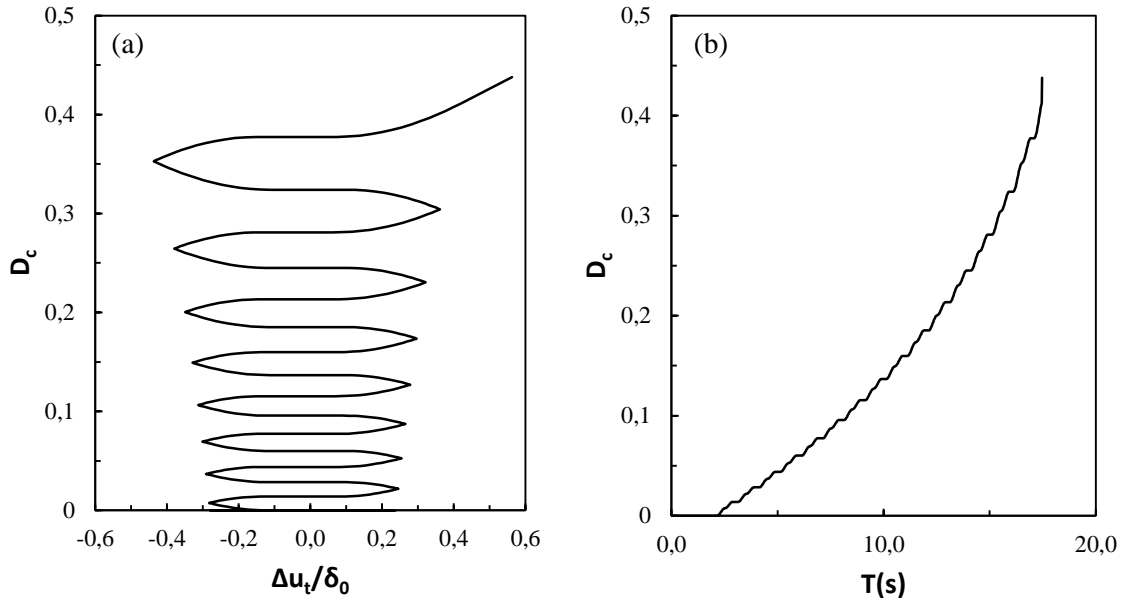


Figura 4.10 - Dano acumulado pelo elemento coesivo sobre carregamento tangencial: (a) Em função do tempo; (b) Em função da abertura normalizada

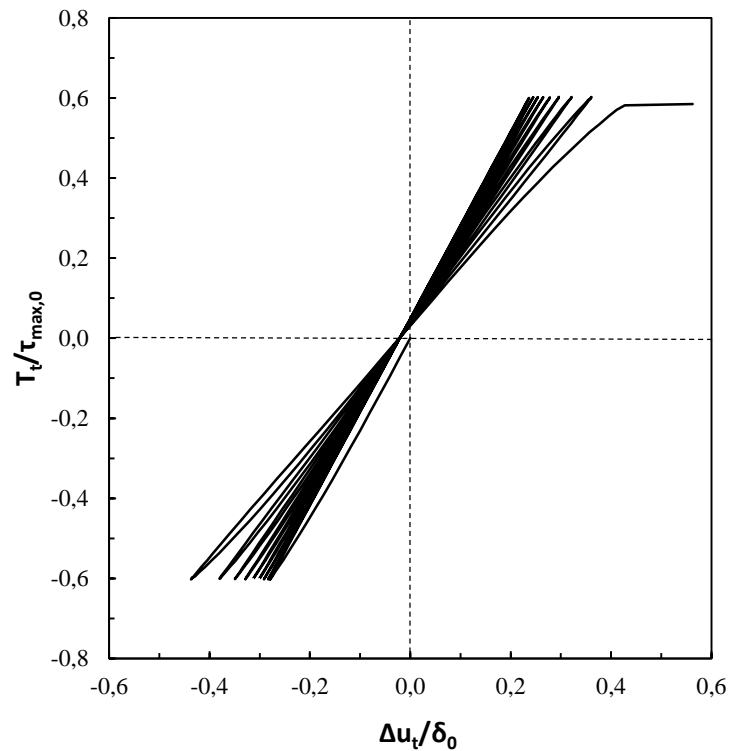


Figura 4.11 - Tensão coesiva tangencial normalizada em relação ao fator de abertura no elemento coesivo

O mesmo procedimento exemplificado foi repetido para diferentes valores de σ_{mean} e τ_{mean} , obtendo-se como resultado principal o número de ciclos necessários para atingir o valor unitário de D_c . Essas grandezas foram plotadas nos gráficos das Fig. (4.12) e (4.13).

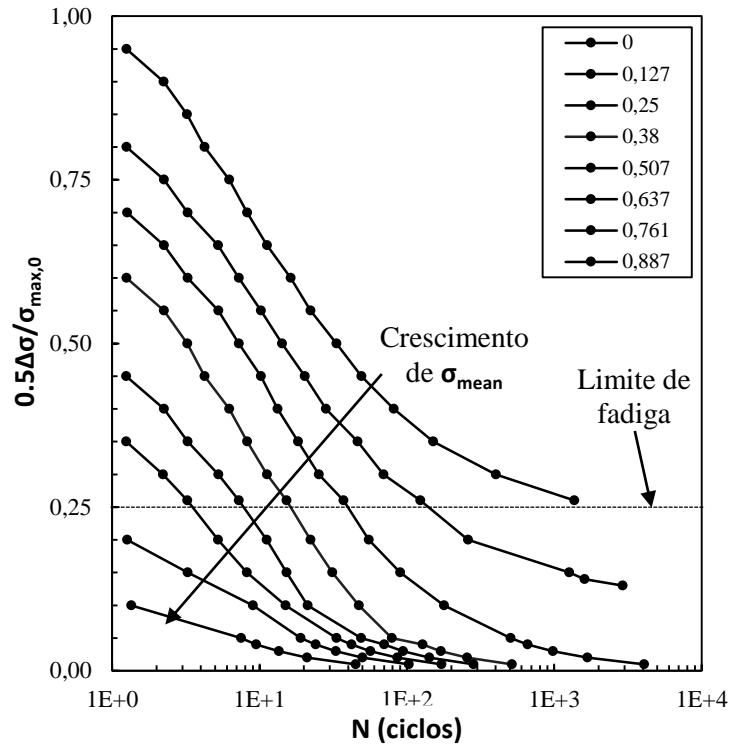


Figura 4.12 - Número de ciclos para falha sobre constante amplitude de carregamento para valores de σ_{mean}

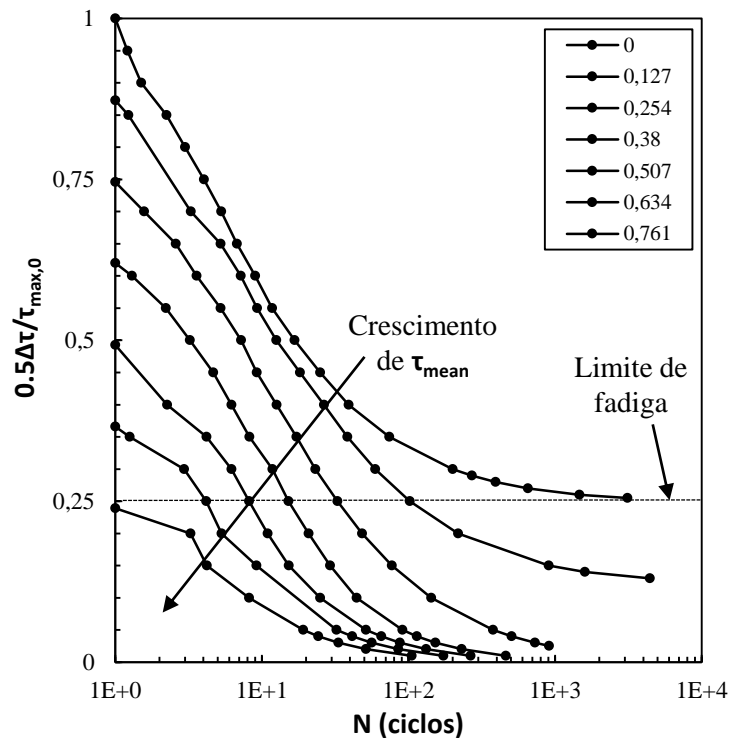


Figura 4.13 - Número de ciclos para falha sobre constante amplitude de carregamento para valores de τ_{mean}

Considerando-se para σ_{mean} e τ_{mean} o valor de zero, se estabelece graficamente o limite de fadiga, destacado no gráfico, abaixo do qual o elemento deixa de apresentar tensões suficientemente grandes para iniciar o processo de acumulo de dano. Esse fator, representado

pelo σ_f , caracteriza a concepção de vida infinita na análise de fadiga das curvas S-N. Aumentando-se as tensões médias este limite tende a diminuir em ambos os casos.

4.2.2 Carregamentos de amplitude variada

Essa etapa visa obter a resposta do elemento coesivo quando sobre ele é aplicada uma variação das tensões, sendo que é considerando o mesmo material do item 4.2.1. Nessa análise são utilizados dois valores de tensões normais aplicadas em sequência, ambos com $\sigma_{mean} = 0$, sendo $(\Delta\sigma)_1$ o primeiro valor e $(\Delta\sigma)_2$ o segundo valor.

Inicialmente foram obtidos os valores de N_{f1} e N_{f2} , que correspondem ao número de ciclos para o adesivo alcançar $D_c = 1$ sendo aplicado unicamente $(\Delta\sigma)_1$ e $(\Delta\sigma)_2$, respectivamente. Foi averiguado o caso que considera $(\Delta\sigma)_1/2 = 0.26\sigma_{max,0}$ com $N_{f1} = 3551$ e $(\Delta\sigma)_2/2 = 0.31\sigma_{max,0}$ com $N_{f2} = 377$ e também o caso que inverte a ordem de aplicação das tensões.

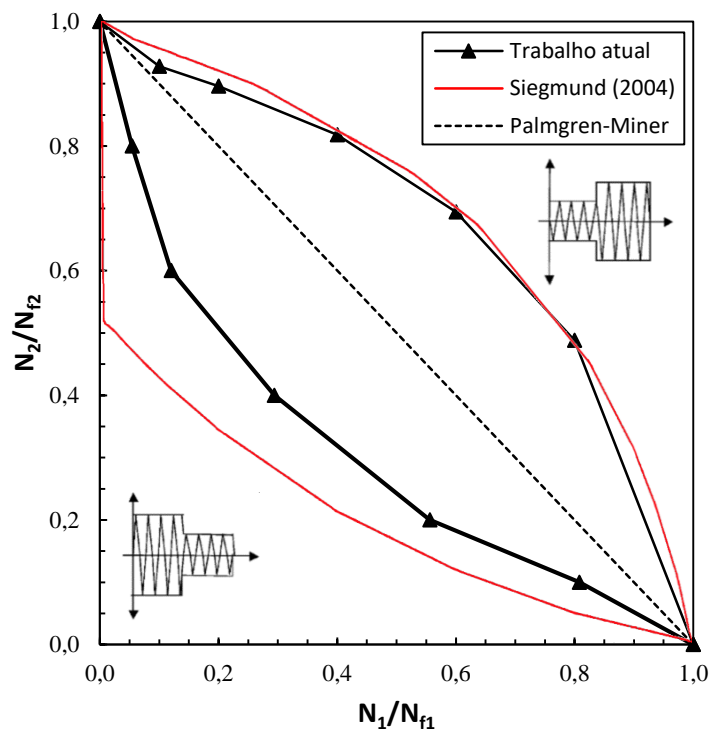


Figura 4.14 - Número de ciclos para falha durante duas diferentes sequências de carregamento em comparação com a regra de Palmgren-Miner

Juntamente com as respostas obtidas para cada uma das duas situações propostas, foram plotados os valores do trabalho de referência e a reta de Palmgren-Miner na Fig. (4.14) (detalhes são expostos no Anexo A). Esta é a aproximação mais básica para descrever a fadiga através de esforços uniaxiais sobre amplitude variada (SIEGMUND, 2004).

No gráfico, o eixo das abcissas representa o fator de ciclos de carregamento de $(\Delta\sigma)_1$ aplicados no adesivo, onde 1.0 indica a ação exclusiva da carga. O eixo das ordenadas denota o mesmo com relação à $(\Delta\sigma)_2$. Os pontos do gráfico representam as combinações dos fatores de ciclos necessários para o rompimento do adesivo.

De forma geral, o acúmulo de dano sobre carregamento de amplitude variada mostrou-se não linear apresentando o maior desvio nas combinações de carregamento intermediárias (com porcentagem de 50). Tal comportamento já era esperado levando em consideração as respostas do item anterior para o acúmulo de dano. Dessa forma, carregamentos que possuem a carga inicial de menor amplitude demandam um maior número de ciclos para romper, enquanto que o contrário ocorre em carregamentos inversos.

Siegmund (2004) capta em seus resultados um desvio maior nos testes que possuem carga inicial de maior amplitude, sendo essas diferenças conectadas ao efeito do período necessário para o início do acúmulo de dano (relacionado a variável $\Delta\bar{u}_{acc}$, ver item 3.2) sobre o número de ciclos necessário para a ruptura. Em outras palavras, menores carregamentos possuem uma maior porcentagem dos ciclos N_f designada para “ativar” o acúmulo de dano, enquanto que para os maiores ocorre o contrário, justificando um possível desvio de maior grandeza da relação linear nesse caso. No presente trabalho, o método utilizado para cálculo da variável $\Delta\bar{u}_{acc}$ dentro do Metafor pode não ser idêntico ao utilizado no trabalho de referência, justificando as diferenças encontradas.

4.3 APLICAÇÃO 03: CARREGAMENTO TRANSIENTE EM DCB

Nessa seção realiza-se a análise do crescimento de fissuras sobre a ação de fadiga transiente em uma viga DCB² que segue o modelo apresentado em Siegmund (2004).

² Do inglês *double cantilever beam* (viga de duplo balanço).

A estrutura representada pela Fig. (4.15), é formada pela união de duas chapas metálicas através de um adesivo estrutural. Suas dimensões principais são comprimento $L = 216mm$, altura total $2h = 18.72mm$ e espessura $B = 25.4mm$. O adesivo estrutural possui espessura $e = 0.2mm$ sendo nele contida uma trinca de tamanho inicial $a_0 = 127mm$, cujo inicialmente não apresenta abertura.

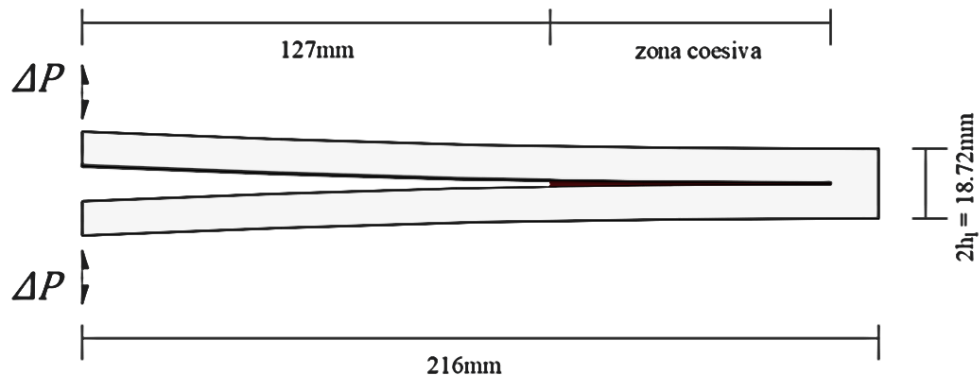


Figura 4.15 - Modelo de viga de duplo balanço utilizado na aplicação 03

São utilizadas as mesmas propriedades do adesivo da aplicação 02, exceto quando mencionado o contrário. As placas de alumínio apresentam módulo de elasticidade longitudinal $E = 70000GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.34$.

O carregamento cíclico é aplicado de forma incremental na viga através da carga pontual ΔP , que é determinada segundo a energia de fratura G para a estrutura. Para o modelo de viga empregado, sujeita exclusivamente ao modo I de ruptura, G pode ser encontrada através da Eq. (4.1) (ANDERSON, 2005). Dessa forma, uma variação de carregamento ΔP pode ser representada por uma variação da taxa de liberação de energia ΔG , onde $\Delta G = G_{max} - G_{min}$.

$$G = \frac{12P^2 a_0^2}{B^2 h^3 E} \quad (4.1)$$

Modela-se o problema em elementos finitos considerando que a trinca se propaga exclusivamente pelo adesivo estrutural onde são colocados os elementos coesivos. Faz-se uso da simetria através de restrições sobre deslocamentos verticais no eixo de simetria horizontal, apontadas na Fig. (4.16). O nó na qual a carga ΔP é aplicada apresenta restrição na direção horizontal. São utilizados um total 2843 elementos quadriláteros em EPD e 190 elementos de interface coesiva que incorporam a lei de dano com deslocamento residual. Cada elemento de interface possui o comprimento de $0.4mm$, totalizando uma interface coesiva de $76mm$.

A Fig. (4.17) identifica o comprimento da zona coesiva l_{CZ} sendo este a diferença entre a posição da ponta da trinca Δa_{tip} e a posição da ponta da zona coesiva ativada Δa_{CZ} .

As análises realizadas observam o crescimento de Δa_{tip} , Δa_{CZ} e l_{CZ} . Assim, para as investigações são tomadas as seguintes considerações sobre os elementos coesivos: a partir do momento que algum dos pontos de Gauss de um elemento apresenta $D_c > 0$ este é incorporado em l_{CZ} ; da mesma forma, quando algum ponto atinge $D_c = 1$ é considerado o rompimento do elemento e posterior propagação de Δa_{CZ} .

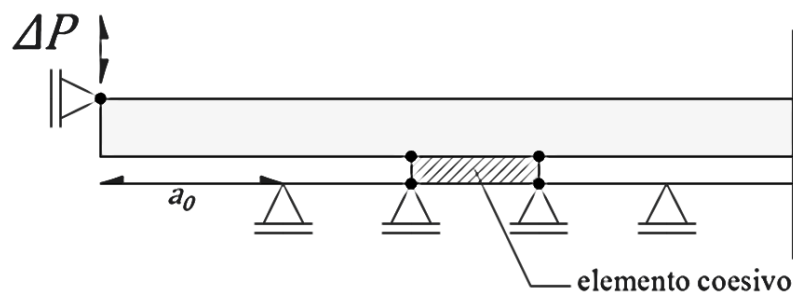


Figura 4.16 - Restrições no modelo de simetria

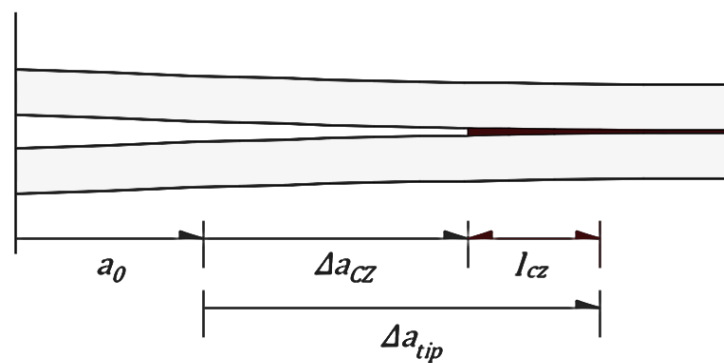


Figura 4.17 - Posicionamento da zona coesiva ativada l_{CZ}

4.3.1 Carregamento sobre constante amplitude

Inicialmente, as investigações tomam sobre a estrutura apenas carregamentos de amplitude constante e fator $R = 0$. São aplicados os valores de ΔP informados na Tab. (4.1) obtidos a partir da Eq. (4.1) para cada uma das variações de energia aplicadas ΔG . Essas variantes são referentes a porcentagens da energia coesiva de superfície normal $\phi_{n,0}$ do material.

Na Fig. (4.18) são apresentados valores obtidos para o crescimento da ponta da zona coesiva da trinca Δa_{cz} , normalizado por δ_0 , em função do número de ciclos de carregamento N para algumas relações de $\Delta G/\phi_{n,0}$ utilizadas. Observa-se que o valor de N necessário para que ocorra uma determinada propagação é maior quanto menor for a carga aplicada, sendo que cargas muito elevadas rompem a estrutura em poucos ciclos.

Tabela 4.1 - Valores dos carregamentos aplicados na estrutura sobre amplitude constante

$\frac{\Delta G}{\phi_{n,0}}$	$\Delta G(J)$	$\Delta P(N)$	$\frac{\Delta G}{\phi_{n,0}}$	$\Delta G(J)$	$\Delta P(N)$
0.9	3307.56	795.53	0.09	330.76	251.57
0.8	2940.05	750.03	0.08	294.01	237.18
0.7	2572.54	701.59	0.07	257.25	221.86
0.6	2205.04	649.55	0.06	220.50	205.40
0.5	1837.53	592.95	0.05	183.75	187.51
0.4	1470.03	530.35	0.04	147.00	167.71
0.3	1102.52	459.30	0.03	110.25	145.24
0.2	735.01	375.02	0.02	73.50	118.59
0.1	367.51	265.18	0.01	36.75	83.86

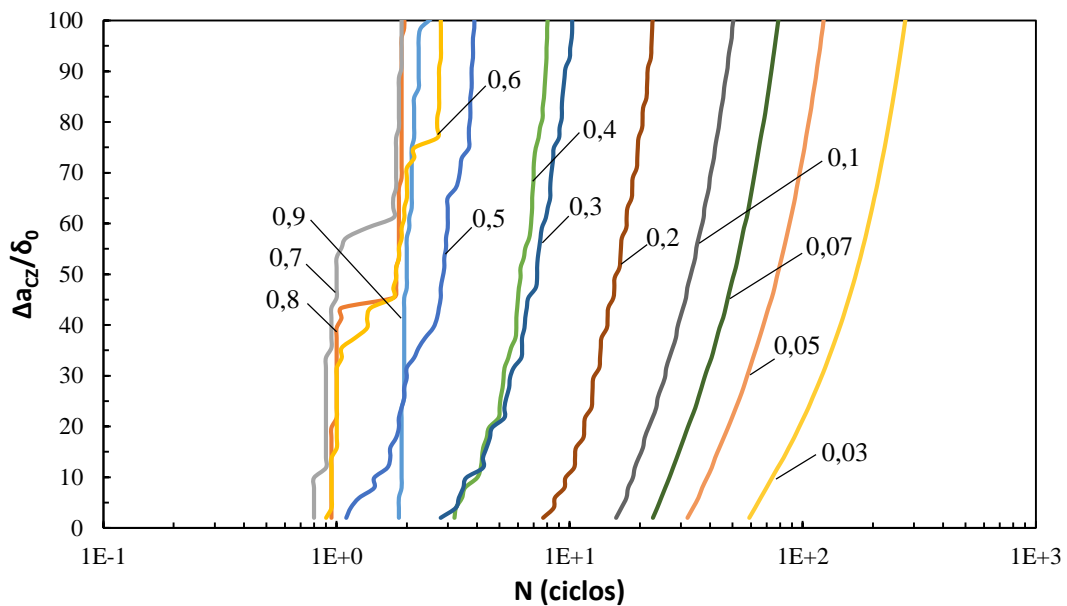


Figura 4.18 - Crescimento normalizado de Δa_{cz} em função de N para alguns valores de $\Delta G/\phi_{n,0}$

A velocidade de propagação da trinca pode ser obtida a partir da derivada inicial em relação ao tempo de cada uma das curvas geradas pelas diferentes variações de P . Esses valores podem ser associados às taxas de energia aplicadas na estrutura através da lei de Paris, seguindo o formato exposto na Eq. (4.2), onde os valores de Δa_{cz} e ΔG são normalizados.

$$\frac{d(\Delta a_{cz}/\delta_0)}{dN} = m \left(\frac{\Delta G}{\phi_{n,0}} \right)^a \quad (4.2)$$

O gráfico, exposto na Fig. (4.19) em escala bi-logarítmica, apresenta os valores reportados para o problema analisado e também destaca o limite de início de fadiga e o ponto onde ocorre a ruptura estática. Traçando-se uma curva de tendência, encontra-se como constantes para a Lei de Paris $m = 221$ e $a = 1.93$. Em conjunto também foi plotado os resultados de Siegmund (2004).

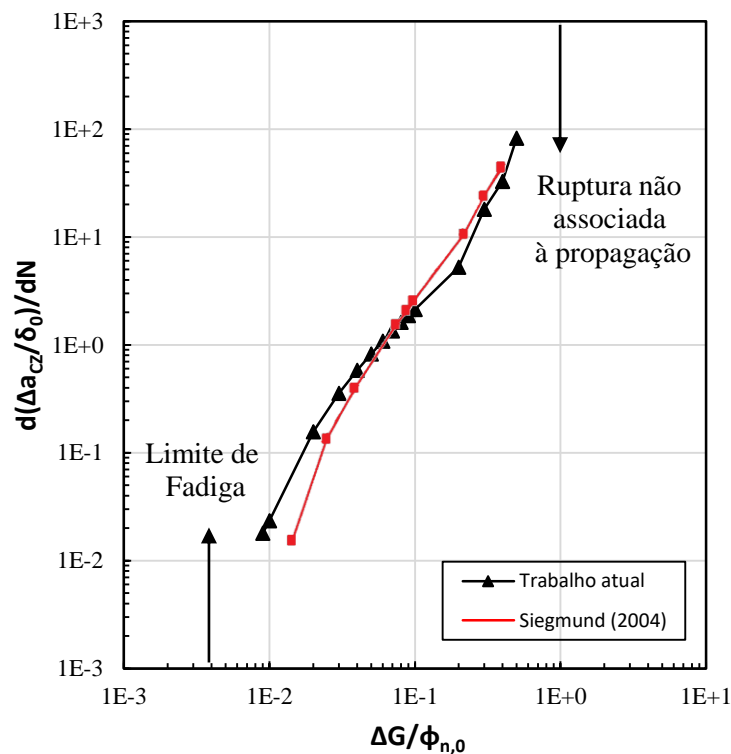


Figura 4.19 - Dependência da taxa de crescimento da trinca em relação a taxa de energia aplicada

O limite inferior de carga para qual inexistente a propagação por fadiga corresponde a carga ΔP para qual Δu_n e os valores associados de T_n não atingem magnitudes suficientes para que ocorra o acumulo de dano e posterior propagação de Δa_{cz} . No presente trabalho esse valor é associado a razão $\Delta G/\phi_{n,0} = 0.004$.

Em Siegmund (2004), a lei de Paris apresenta como constantes $m = 268$ e $a = 2.01$, sendo o limite de fadiga representado por $\Delta G/\phi_{n,0} = 0.007$. O autor também identifica um limite de aplicabilidade da relação, que ocorre entre a razão de energia $\Delta G/\phi_{n,0} = 0.05$ e a ruptura estática, sendo que esse intervalo foi utilizado para encontrar as constantes do atual

trabalho. Além disso, para razões de energia localizadas entre o limite de fadiga e o valor de 0.05 o comportamento não segue a lei de Paris.

No trabalho atual para alguns valores de $\Delta G/\phi_{n,0}$ a propagação ocorre de forma mais rápida levando a disparidade entre os resultados. Algumas razões apontadas para tais divergências são o formato da malha empregada para definir o problema, o que inclui principalmente tamanho de elementos finitos e sua densidade de distribuição; o número de pontos de Gauss e por fim as funções de interpolação utilizados pelos elementos coesivos.

4.3.2 Carregamento em blocos

Na sequência do estudo a estrutura é sujeita a dois ensaios, sendo cada um formado por um carregamento cíclico básico que apresenta no seu interior um bloco com diferentes características.

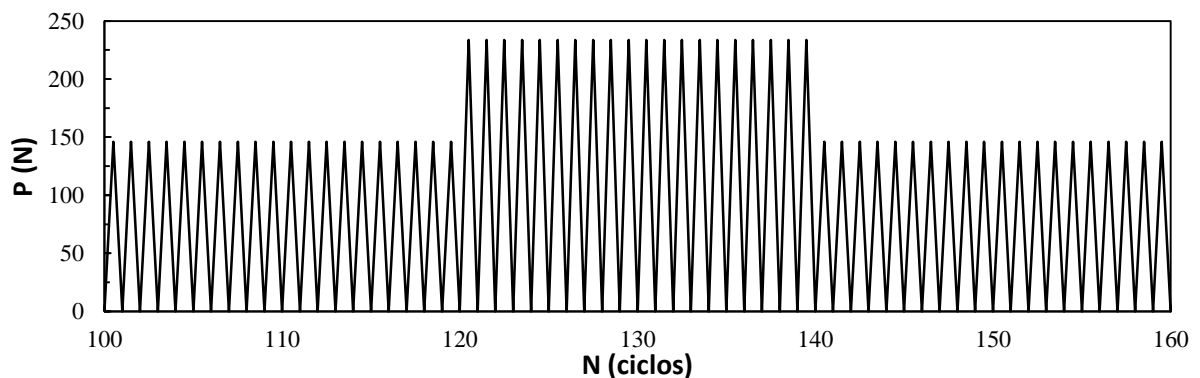


Figura 4.20 - Primeira sequência de carregamento aplicada na estrutura

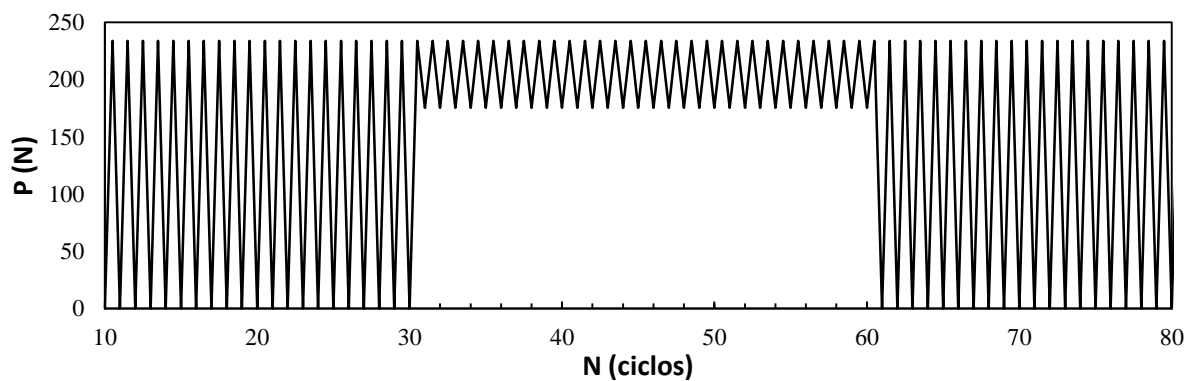


Figura 4.21 - Segunda sequência de carregamentos aplicada na estrutura

A primeira sequência, representada na Fig. (4.20) em função da carga P , aplica um carregamento básico com valores referentes a $\Delta G/\phi_{n,0} = 0.0303$ e $R = 0$ durante 120 ciclos. O bloco inserido consiste em uma sobrecarga de 20 ciclos com valor de $\Delta G/\phi_{n,0} = 0.0776$ e também $R = 0$.

No segundo teste, a estrutura é submetida a um carregamento básico de $\Delta G/\phi_{n,0} = 0.0776$ e $R = 0$ com duração de 30 ciclos. O bloco isolado é formado por 30 ciclos com $G_{max}/\phi_{n,0} = 0.0776$ e $R = 0.75$. A aplicação é mostrada na Fig. (4.21).

4.3.2.1 Sobrecarga

A Fig. (4.22) retrata o desenvolvimento da ponta da trinca Δa_{tip} e da ponta da zona coesiva ativada Δa_{cz} , ambas normalizadas por δ_0 , considerando a aplicação do primeiro bloco. Juntamente são mostrados os dados de Siegmund (2004).

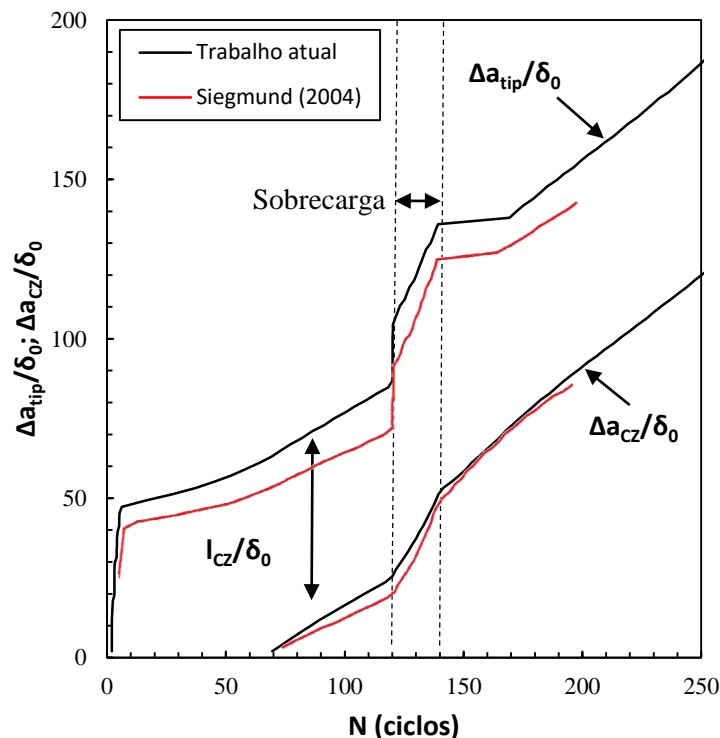


Figura 4.22 - Desenvolvimento normalizado de Δa_{tip} e Δa_{cz} para o caso de sobrecarga

Os primeiros ciclos de carregamento denotam a formação da zona coesiva l_{CZ} com um rápido crescimento, sendo que a $\Delta a_{tip}/\delta_0$ atinge um valor 43 após 7 ciclos. A partir do ciclo 8, $\Delta a_{tip}/\delta_0$ se desenvolve de forma quase constante, até o momento em que a sobrecarga é

aplicada. A trinca inicia o seu crescimento no ciclo 69, onde $\Delta a_{cz}/\delta_0$ segue um comportamento muito próximo do linear até o início da sobrecarga. Pouco antes do bloco ser aplicado l_{CZ}/δ_0 atinge o valor de 63.

No momento em que a estrutura é submetida a sobrecarga, $\Delta a_{tip}/\delta_0$ apresenta um aumento repentino de 16, e em seguida segue com um crescimento mais acentuado. Da mesma forma, $\Delta a_{cz}/\delta_0$ tem um aumento em sua velocidade de crescimento mas não de forma acentuada como $\Delta a_{tip}/\delta_0$. Assim, l_{CZ}/δ_0 passa a apresentar uma amplitude de 82.

Após a passagem pelo bloco de 20 ciclos, o crescimento de $\Delta a_{tip}/\delta_0$ é praticamente interrompido por 30 ciclos e em seguida retoma a uma velocidade muito próxima da que possuía antes da aplicação da sobrecarga. $\Delta a_{cz}/\delta_0$ enfrenta uma desaceleração e volta a atingir valores semelhantes aos apresentados anteriormente. Conseqüentemente, l_{CZ}/δ_0 se contrai ao tamanho inicial de 63.

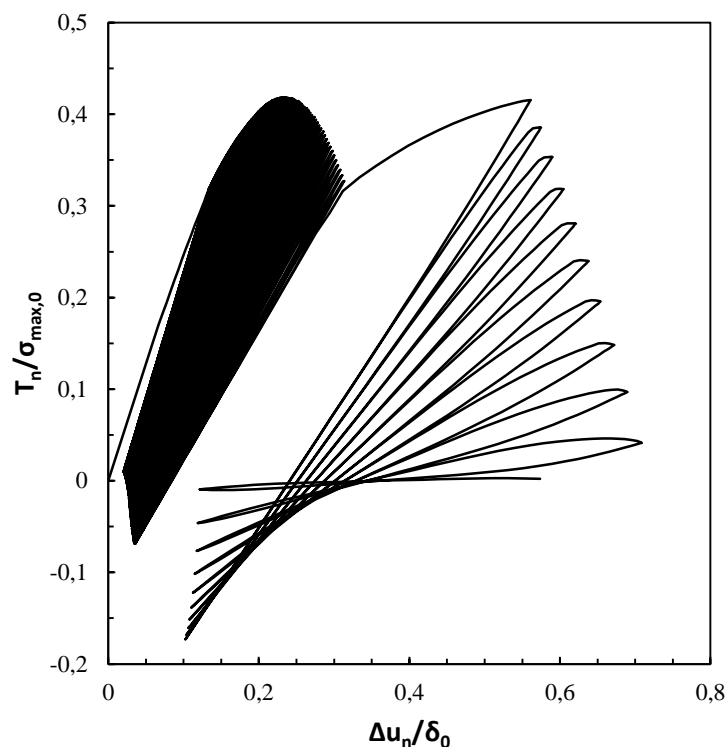


Figura 4.23 - Tensão coesiva normalizada em função da abertura normalizada para o ponto $x=a_0+37.5\delta_0$

De acordo com Siegmund (2004), carregamentos na qual ocorrem mudanças nos valores de ΔG e mantém constantes os valores de R levam a acelerações e desacelerações transientes das taxas de crescimento de trincas. Essa mudanças são conectadas às transformações do

comprimento da zona coesiva, denotando uma relação direta entre o tamanho de l_{CZ} e a velocidade de propagação.

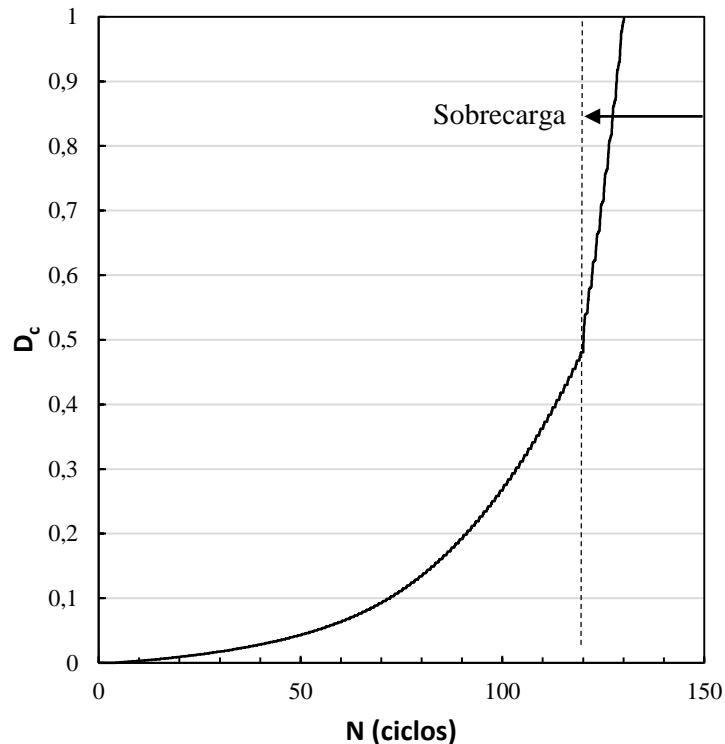


Figura 4.24 - Dano acumulado em função do número de ciclos aplicados para o ponto $x=a_0+37.5\delta_0$

O desenvolvimento de T_n em função de Δu_n , ambas normalizadas, para o ponto $x = a_0 + 37.5\delta_0$ é mostrado na Fig. (4.23). Este ponto faz parte da zona coesiva l_{CZ} no momento que a sobrecarga é aplicada. No instante em que o ponto é sujeito a sobrecarga a interface é submetida a aberturas de grandes amplitudes e por consequência altas tensões. Essas tensões levam a maiores acúmulos de dano, como observado na Fig. (4.24) onde mostra-se o desenvolvimento de D_c com relação à N para o mesmo ponto.

4.3.2.2 Carga de amplitude variada

A Fig. (4.25) retrata o crescimento normalizado de Δa_{tip} e Δa_{cz} encontrados para o caso de carga de amplitude variada, bem como os valores do trabalho de referência.

Durante os ciclos iniciais de carregamento tem-se um rápido crescimento de l_{CZ}/δ_0 , sendo que a $\Delta a_{tip}/\delta_0$ alcança o valor 70 após 9 ciclos. A partir do ciclo 10, $\Delta a_{tip}/\delta_0$ mostra um desenvolvimento linear. A trinca inicia os seus incrementos no ciclo 24, onde o aumento de

$\Delta a_{cz}/\delta_0$ apresenta um comportamento linear até o início da carga com amplitude variada. Pouco antes do bloco ser aplicado l_{cz}/δ_0 vale 87.

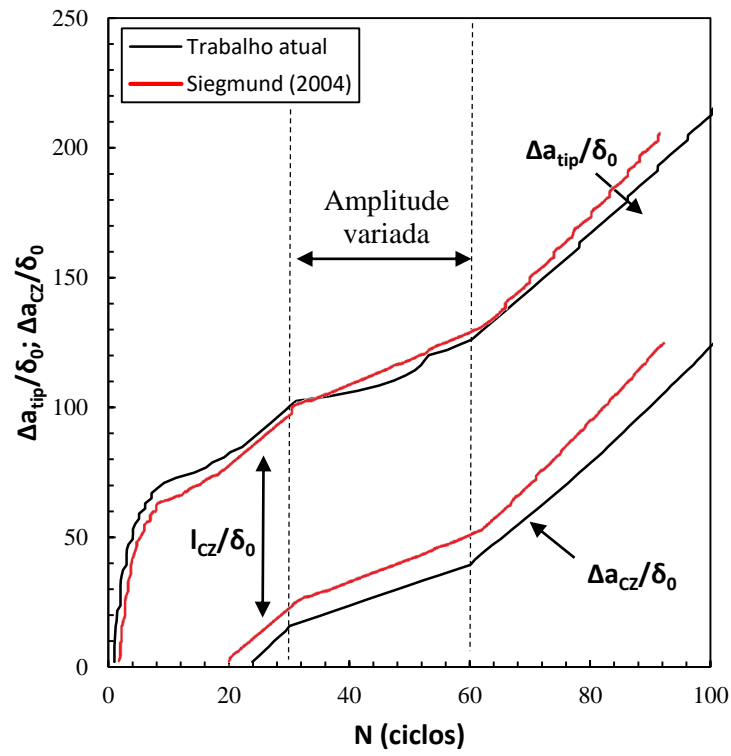


Figura 4.25 – Desenvolvimento normalizado de Δa_{tip} e Δa_{cz} para o caso de carga de amplitude variada

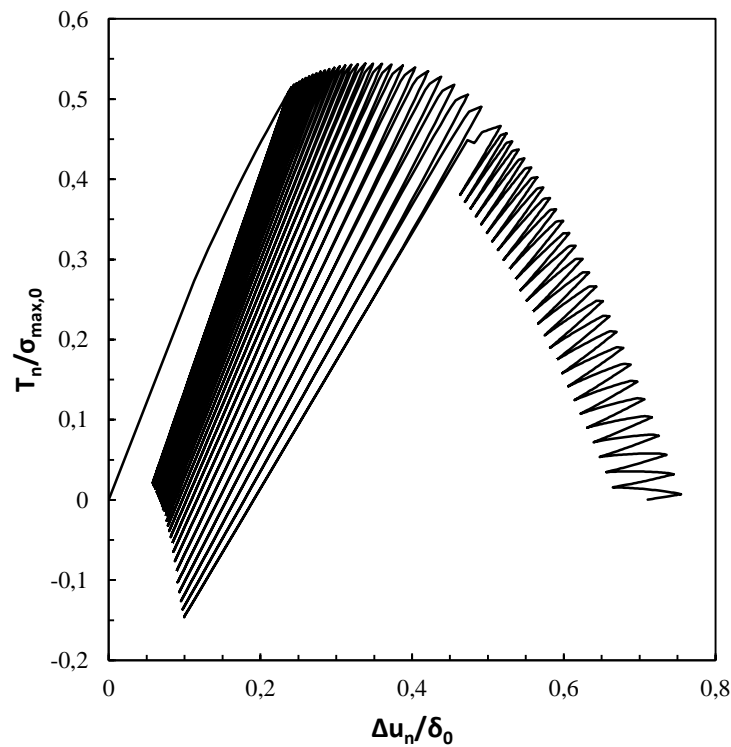


Figura 4.26 - Tensão coesiva normalizada em função da abertura normalizada para o ponto $x=a_0+37.5\delta_0$

No instante em que a estrutura é submetida à amplitude variada, Δa_{tip} apresenta um leve retardo na velocidade de crescimento e segue dessa forma até o termino do bloco. Do mesmo modo, Δa_{cz} também demonstra diminuição. Durante o bloco, l_{CZ}/δ_0 em geral permanece igual a 87. Após a passagem dos 30 ciclos, tanto Δa_{tip} quanto Δa_{cz} retomam as velocidades de propagação apresentadas anteriormente.

Siegmund (2004) destaca que carregamentos que apresentam variação apenas no fator R possuem mudanças na velocidade de crescimento de trincas, mas não demonstram zonas de transição, mantendo constante o tamanho da zona coesiva durante todo o processo.

A Fig. (4.26) retrata a evolução de T_n em função de Δu_n para o ponto $x = a_0 + 37,5\delta_0$. No instante que o ponto é sujeito a carga com amplitude variada tanto os deslocamentos quanto as tensões apresentam menores variações por ciclo, o que determina um menor acúmulo de dano, retardando o processo de ruptura, como reportado na Fig. (4.27).

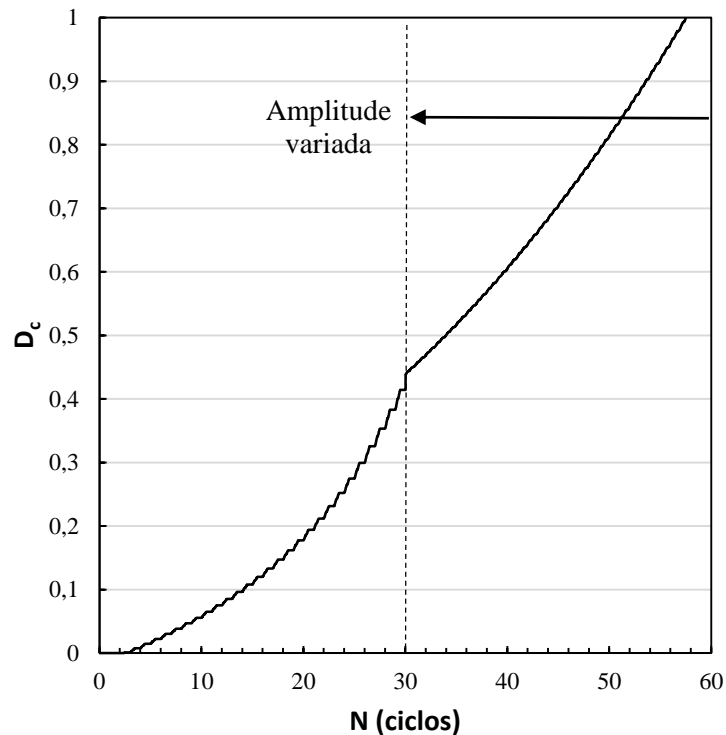


Figura 4.27 - Dano acumulado em função do número de ciclos aplicados para o ponto $x=a_0+37.5\delta_0$

4.3.3 Efeitos dos parâmetros da zona coesiva

Nessa seção são apurados os efeitos das variações nos parâmetros que definem a zona coesiva, o comprimento coesivo acumulado δ_Σ e o limite de resistência a fadiga σ_f , na estrutura sujeita a sobrecarga. O carregamento básico aplicado é referente a $\Delta G/\phi_{n,0} = 0.078$ com $R = 0$. A sobrecarga possui o valor de $\Delta G/\phi_{n,0} = 0.175$ também com $R = 0$, sendo que é atuante por um ciclo apenas. Dentro dessa análise, a mesma é aplicada no momento em que a propagação da trinca, ou Δa_{cz} , atinge o comprimento de $25\delta_0$. Para efeito comparativo são realizados ensaios sem a sobrecarga.

4.3.3.1 Variação do comprimento coesivo acumulado δ_Σ

São considerados três valores para o comprimento coesivo acumulado, $\delta_\Sigma = 3\delta_0, 4\delta_0$ e $5\delta_0$. O limite a fadiga é fixado em $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$. Os resultados encontrados para o crescimento de Δa_{cz} e Δa_{tip} são mostrados nas Fig. (4.28)-(4.30), onde as linhas pontilhadas simbolizam o carregamento com a ausência da sobrecarga e as cheias com a sua presença.

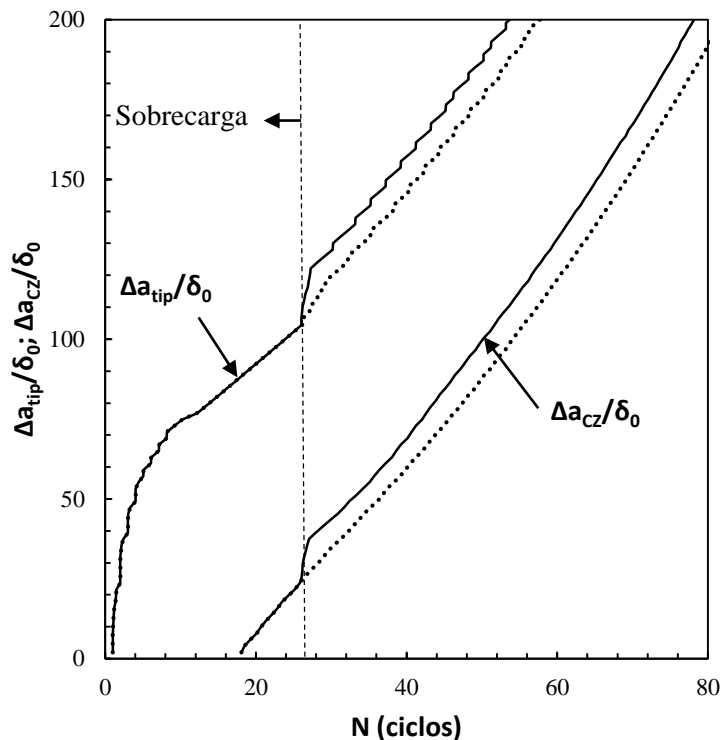


Figura 4.28 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 3\delta_0$ e $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$

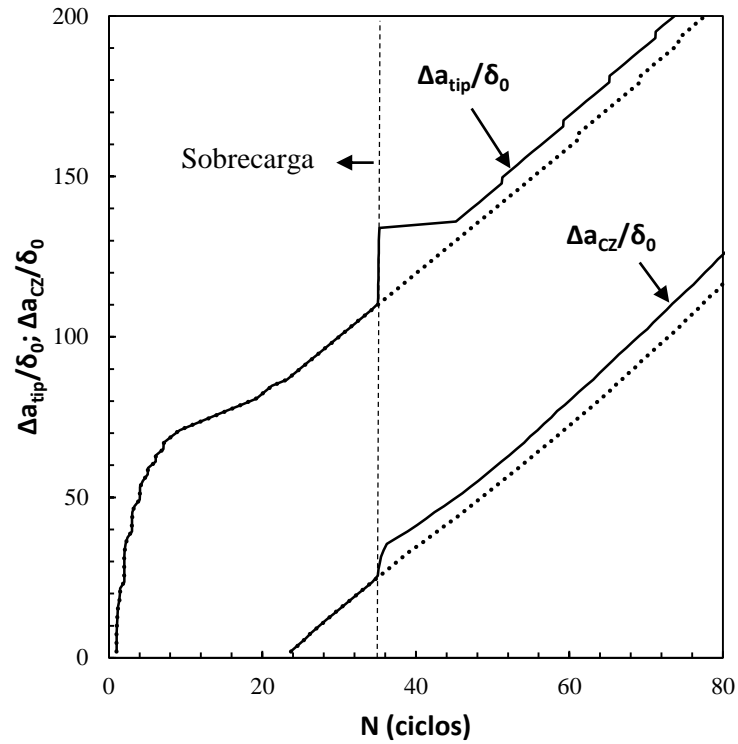


Figura 4.29 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$

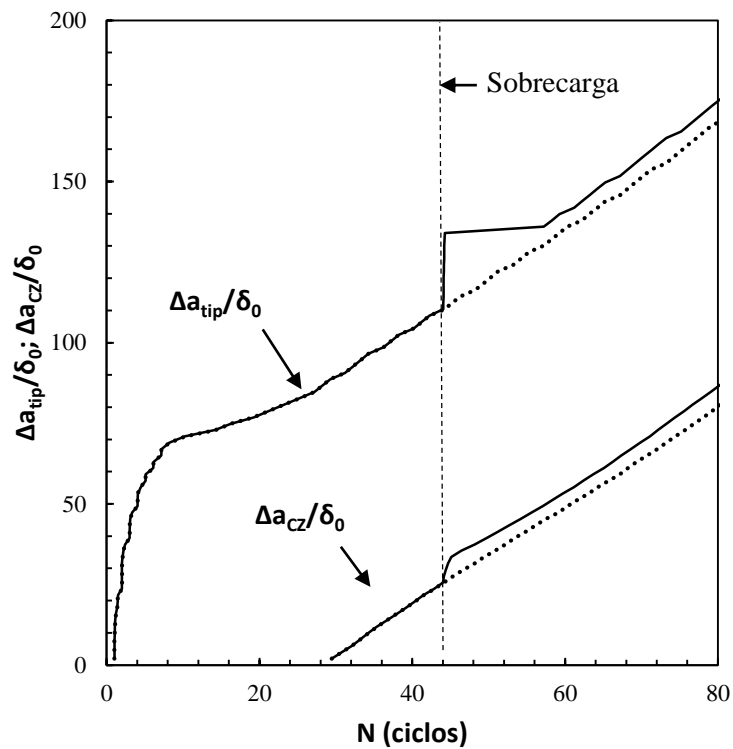


Figura 4.30 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 5\delta_0$ e $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$

A primeira percepção ao analisar os resultados é um nítido acréscimo em Δa_{tip} em todos os testes no momento em que a sobrecarga é aplicada. Os saltos de $\Delta a_{tip}/\delta_0$ apresentam valores diferentes para os três modelos, para o de $\delta_\Sigma = 3\delta_0$ tem o valor de 16 e para os demais o valor de 23. O salto de Δa_{cz} acompanha com a mesma magnitude para $\delta_\Sigma = 3\delta_0$, e é menor nos demais valores.

Para todos os casos o tamanho da zona coesiva antes e após a aplicação da sobrecarga, considerando um período para a estabilização da velocidade de crescimento de Δa_{tip} , é sempre o mesmo, em torno de 85.

Observando a Eq. (3.5), referente a taxa de dano, prevê-se que uma mudança no valor de δ_Σ reflete diretamente no valor dano contabilizado. Um acréscimo no valor de δ_Σ acaba por gerar um valor de dano menor, quando comparado ao valor padrão de $4\delta_0$, e por consequência um crescimento de Δa_{tip} e Δa_{cz} mais lento. Da mesma forma, uma decréscimo em δ_Σ acarreta em um aumento no desenvolvimento das mesmas variáveis.

$$\dot{D}_c = \frac{|\Delta \dot{u}|}{\delta_\Sigma} \left[\frac{\bar{T}}{\sigma_{max}} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right] H(\Delta \bar{u}_{acc} - \delta_0) \quad (3.5)$$

Através dos três testes, a previsão pode ser exemplificada pelo número de ciclos necessários para $\Delta a_{tip}/\delta_0$ atingir o valor 50. São necessários 33 ciclos quando $\delta_\Sigma = 3\delta_0$, 46 ciclos quando $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e 58 ciclos para $\delta_\Sigma = 5\delta_0$.

De acordo com Siegmund (2004), a aplicação de sobrecargas únicas sobre a estrutura não provoca crescimento do FCG. Como observado, as propriedades apresentam apenas um desenvolvimento acentuado após a passagem, seguido por um número de ciclos a qual não evoluem, retomando a taxa de crescimento anterior logo após. De forma geral, os resultados se mostraram equivalentes aos da referência.

4.3.3.2 Variação do limite de fadiga σ_f

São estimados três valores para o limite de fadiga, $\sigma_f = 0.15\sigma_{max,0}$, $0.25\sigma_{max,0}$ e $0.4\sigma_{max,0}$. O comprimento coesivo acumulado é fixado em $\delta_\Sigma = 4\delta_0$. Os valores encontrados para o desenvolvimento de Δa_{tip} e Δa_{cz} são apresentados nas Fig. (4.31) e (4.32), sendo o resultado para o caso de $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$ exibido no item anterior na Fig. (4.29).

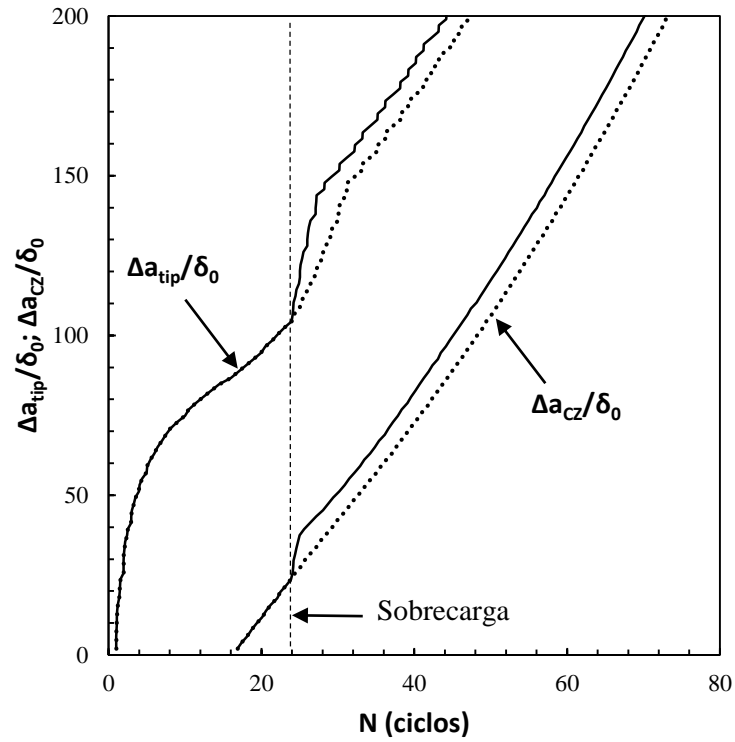


Figura 4.31 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e $\sigma_f = 0.15\sigma_{max,0}$

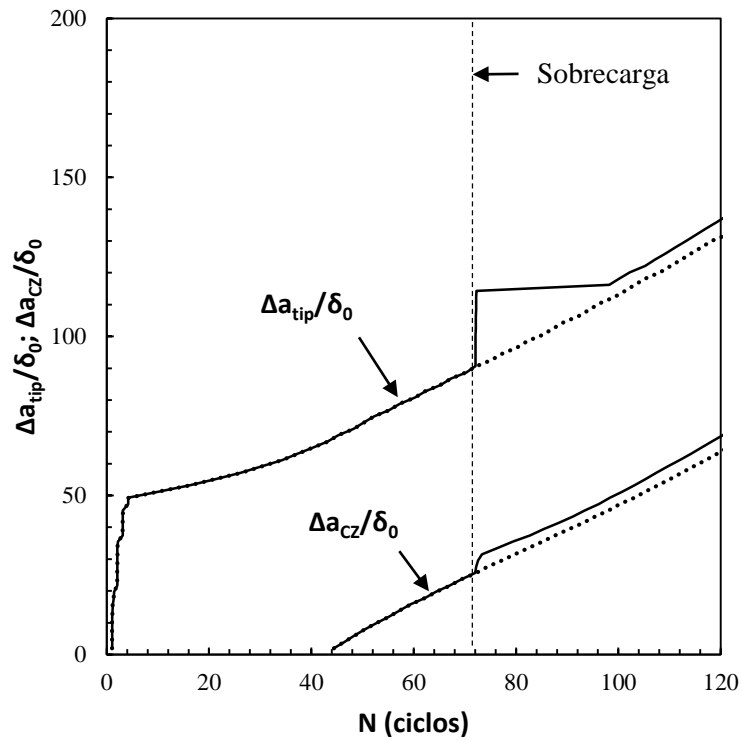


Figura 4.32 - Crescimento da trinca normalizado para uma sobrecarga única considerando $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e $\sigma_f = 0.4\sigma_{max,0}$

Novamente, os três casos apontam um salto nos valores de Δa_{tip} no momento em que sobrecarga é aplicada. Nesse mesmo instante Δa_{cz} também experimenta variações com diferentes magnitudes, sendo maior no modelo de $0.15\sigma_{max,0}$ e menor no modelo de $0.4\sigma_{max,0}$.

O tamanho de l_{CZ} apresenta ou não alterações segundo a proporção do limite de fadiga aplicado. No caso de $\sigma_f = 0.15\sigma_{max,0}$ o valor de l_{CZ}/δ_0 antes da sobrecarga é de 82 e após 102. Para a estrutura sujeita a $0.25\sigma_{max,0}$ esses correspondem a 84 e 87. E por último, para $0.4\sigma_{max,0}$ tem-se os tamanhos de l_{CZ}/δ_0 , 65 e 67, antes e após a sobrecarga.

Através da Eq. (3.5) pode-se ultimar que a ativação da zona coesiva, refletida pelo crescimento de Δa_{tip} , tem dependência relacionada com o limite de fadiga. Valores baixos de σ_f permitem uma ativação antecipada, enquanto valores elevados retardam a mesma. Da mesma forma, Δa_{cz} pode apresentar um crescimento breve se σ_f for um valor pequeno, o que permite um maior acúmulo de dano por ciclo ou, possuir uma desaceleração no crescimento se σ_f for de grande magnitude.

Como exemplo, cita-se o tempo necessário para que $\Delta a_{cz}/\delta_0$ atinja o valor de 40. Considerando $\sigma_f = 0.15\sigma_{max,0}$ são utilizados 26 ciclos, enquanto que para $0.25\sigma_{max,0}$ necessitam-se 40 ciclos e, por fim 88 ciclos para o modelo que emprega $0.4\sigma_{max,0}$. Mais uma vez, as análises se mostraram semelhantes à referência.

4.4 APLICAÇÃO 04: EFEITO ESCALA EM PLACA QUASE-FRÁGIL

Nessa seção é investigado o efeito escala sobre a propagação de trincas em uma placa sujeita a tração que segue o problema proposto em Wang e Siegmund (2006). A estrutura analisada é representada na Fig. (4.33).

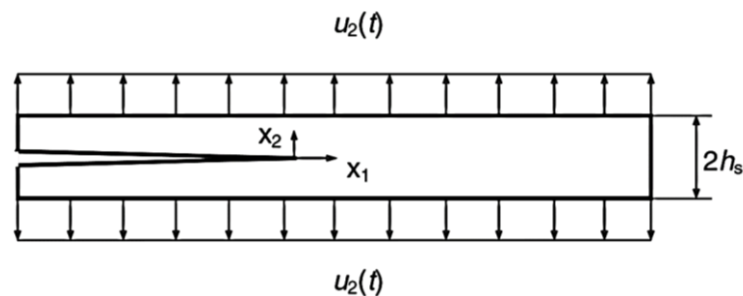


Figura 4.33 - Representação do modelo utilizado na aplicação 04

Fonte: Wang e Siegmund, 2006

A estrutura possui comprimento $L = 374mm$, sendo a ponta inicial da trinca localizada na posição $L/3$ como indicado. A altura $2h_s$ possui tamanho variável, sendo adotado diferentes valores. São utilizados elementos finitos bi-lineares em EPD para moldar a peça, e na altura h_s são dispostos em uma camada elementos coesivos que direcionam o crescimento da trinca. Esses elementos possuem o processo de carga/descarga que emprega a lei sem deformação residual durante os ciclos.

A estrutura apresenta módulo de elasticidade longitudinal $E = 10^{11}Pa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,34$. A interface onde a trinca é localizada tem tensão coesiva inicial $\sigma_{max,0} = 1GPa$, comprimento coesivo $\delta_0 = 0.1mm$, comprimento coesivo acumulado $\delta_{\Sigma} = 4\delta_0$ e limite de fadiga $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$.

O material dos substratos pode ser classificado como quase-frágil, mostrando um processo de ruptura fortemente dependente de sua escala, sendo este classificado em três possíveis conjuntos (WANG e SIEGMUND, 2006): (i) espécimes com valores h_s/δ_0 muito baixos que não apresentam propagação de trincas e sim ruptura instantânea por decoesão uniforme; (ii) peças com valores intermediários de h_s/δ_0 que apresentam uma propagação inicial da trinca, que é dependente da escala e pode ser representada por uma lei de Paris modificada; (iii) espécimes com valores altos de h_s/δ_0 que mostram uma propagação uniforme sem ação do efeito escala, podendo ser representados por uma lei de Paris.

Como indicado na Fig. (4.33), são aplicados deslocamentos prescritos $u_2(t)$ sobre as superfícies inferior e superior. Os valores desses deslocamentos são determinados em função da energia de fratura G da estrutura. De acordo com Wang e Siegmund (2006), para problemas com essa espécie de geometria, de tamanho infinito e trinca longa, o fator de liberação de energia variado no tempo é relacionado ao deslocamento aplicado pela Eq. (4.3).

$$G(t) = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{2[u_2(t)]^2}{h_s} \quad (4.3)$$

Essa relação possui validade comprovada para estruturas de tamanho finito pela integral J. A variação de energia ΔG é adotada como 20% da energia coesiva de superfície normal $\phi_{n,0}$ sendo variante com em períodos t_c de 20 segundos. Como a energia é aplicada com fator $R = 0$, pode-se reescrever a relação anterior em função de u_{max} chegando-se a Eq. (4.4)

$$u_{max} = \sqrt{\frac{0.2\phi h_s(i + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)}} \quad (4.4)$$

Dessa forma, obtém-se o carregamento da estrutura para três valores de h_s , cada um correspondente a um termo de $u_2(t)$. Esses valores são evidenciados na Tab. (4.2), onde h_s é normalizado por δ_0 .

Tabela 4.2 - Valores dos deslocamentos prescritos aplicados na estrutura sobre amplitude constante

$\frac{h_s}{\delta_0}$	$u_2(t)[m]$
20	2.6579E-5
240	9.2071E-5
750	1.6276E-4

4.4.1 Início da propagação

A primeira observação realizada sobre as estruturas corresponde ao tempo decorrente para o início da propagação da trinca. De acordo com a teoria essa grandeza, também conhecida por período de incubação N_{inc} , é maior quanto menores os valores de h_s/δ_0 , e menor caso o contrário.

Tabela 4.3 - Valores dos períodos de incubação para os modelos analisados

h_s/δ_0	N_{inc}		
	WANG e SIEGMUND (2006)	CAYRO (2016)	Presente análise
20	19.80	18.23	23.44
240	6.00	5.54	8.59
750	7.00	7.50	8.26

Considera-se que a propagação se inicia no momento em que o primeiro ponto de Gauss do primeiro elemento a frente da ponta trinca atinge o valor de dano acumulado $D_c = 1$. Seguindo essa concepção, a análise reportou os valores indicados na Tab. (4.3), que se mostraram maiores ao dos outros trabalhos. A justificativa para as diferenças encontradas de N_{inc} é fundamentada pelo método de cálculo da variável $\Delta\bar{u}_{acc}$, que acaba retardando o processo de acúmulo de dano, assim como ocorrido no item 4.2.2.

4.4.2 Crescimento de trincas por fadiga

A propagação da trinca ocorre de forma diferente para os três modelos, conforme mostrado a Fig. (4.34), onde o avanço da ponta da trinca Δa normalizado por δ_0 é plotado em função dos ciclos N aplicados. Também, para efeito de comparação, são mostrados os resultados de Wang e Siegmund (2006).

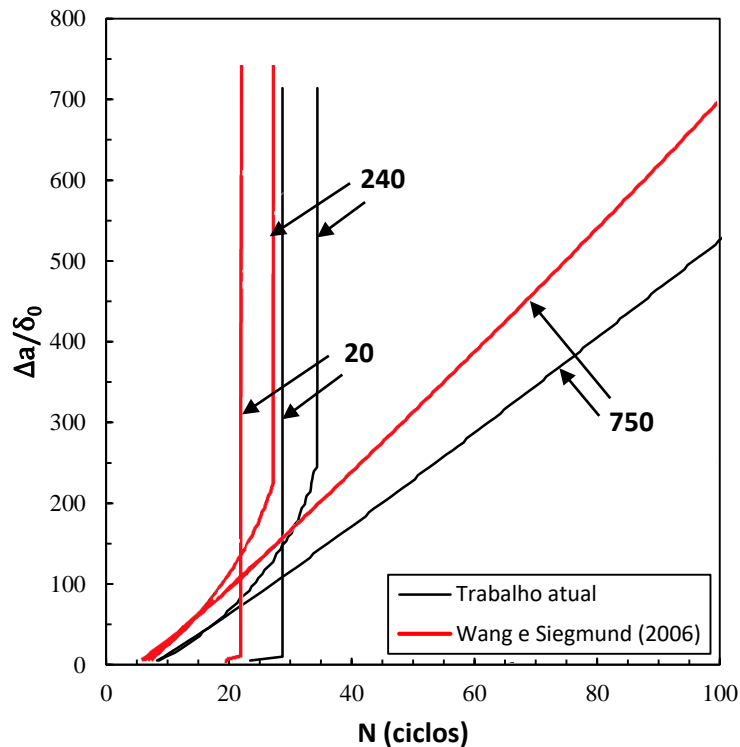


Figura 4.34 - Extensão da trinca normalizada prevista em função do número de ciclos para os modelos analisados

A partir da análise dos dados, retira-se que o modelo que possui $h_s/\delta_0 = 750$ apresenta um desenvolvimento da trinca de forma linear, sendo que no conjunto a qual esse espécime está inserido, é permitido a utilização de uma equação de Paris para prever o crescimento das trincas.

Por outro lado, o modelo de $h_s/\delta_0 = 240$ mostra um breve período de crescimento com taxas variáveis, sendo que após esse tempo ocorre a ruptura do restante da zona coesiva em um determinado ciclo crítico. Nesse caso, uma lei de Paris dependente da escala pode ser utilizada até um valor crítico de h_s/δ_0 , a partir do qual a trinca passa a se propagar de forma linear, seguindo uma lei de Paris que não depende da escala.

E por último, o espécime de $h_s/\delta_0 = 20$ apresenta a falha total com quase nenhum desenvolvimento gradual da trinca em um ciclo crítico. O crescimento da trinca não pode ser

calculado para esse modelo, pois ele está inserido na faixa de tamanhos de h_s/δ_0 na qual a ruptura ocorre por decoesão e não mais por propagação de trinca.

Os resultados obtidos apresentaram comportamentos muito semelhantes aos do trabalho de referência. Percebe-se um pequeno retardo na propagação das trincas para o trabalho atual em relação aos dados de Wang e Siegmund (2006), fato que mais uma vez é relacionado à variável $\Delta\bar{u}_{acc}$.

4.4.3 Distribuição do dano e da abertura

A Fig. (4.35), apresenta o dano acumulado D_c em cada posição à frente da ponta da trinca no momento em que a estrutura está sujeita a 15.5 ciclos. Nesse caso, D_c é mostrado em função da posição x normalizada por δ_0 .

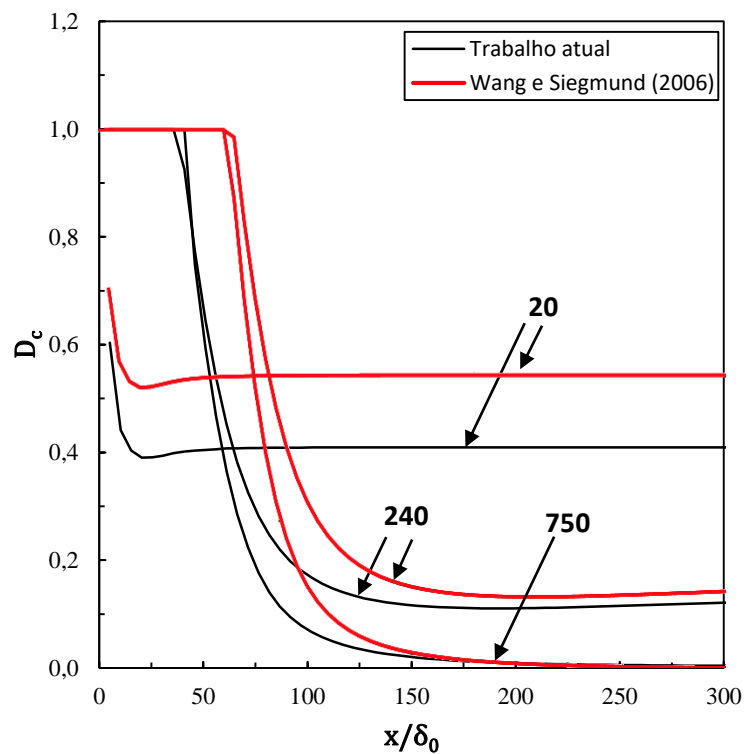


Figura 4.35 - Distribuição de dano na peça quando $N=15.5$ como função de h_s/δ_0

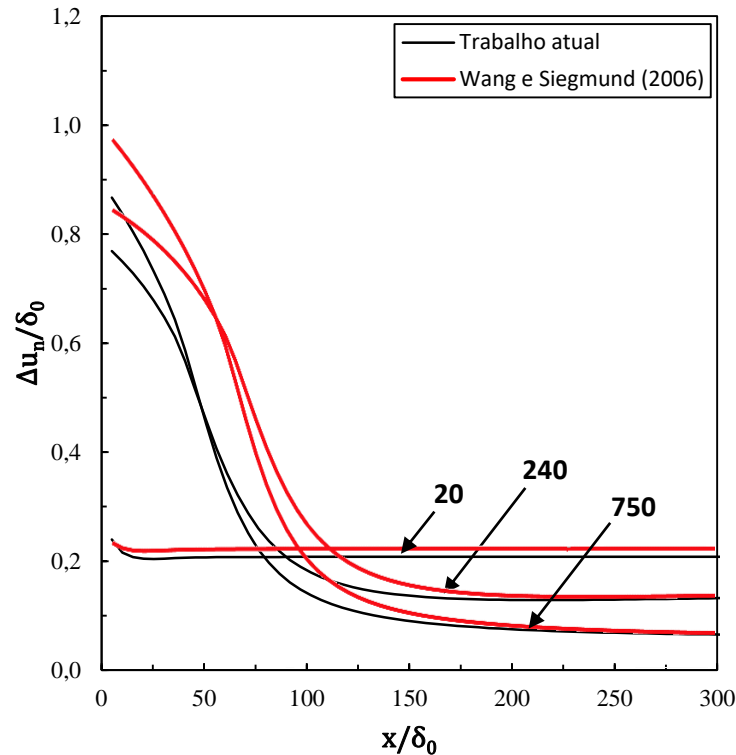


Figura 4.36 - Distribuição da abertura normal na peça quando $N=15.5$

Observa-se que existe a tendência de valores h_s/δ_0 menores, como o espécime de 20, apresentarem danos distribuídos de forma igual por toda a peça, o que termina por ocasionar a ruptura por decoesão uniforme. Por outro lado, valores mais altos de h_s/δ_0 apontam uma zona de crescimento de trincas com um dano acumulado muito superior ao restante da peça. Nota-se que dentro desses espécimes ocorre uma transição gradual da quantidade de dano acumulado nas regiões distantes da ponta da trinca. A exemplo disso, o modelo de 240 demonstra um acúmulo de dano considerável mesmo na posição x/δ_0 , o que não ocorre no espécime de 750.

As considerações apontadas podem ser justificadas através da observação da abertura da trinca Δu_n em cada posição. Na Fig. (4.36), os valores de Δu_n para cada ponto são mostrados no mesmo instante, 15.5 ciclos. Essas aberturas estão relacionadas com o comportamento dos substratos, sendo que as peças de menores alturas apresentam tensões uniformes distribuídas por toda a peça, enquanto que nas peças maiores essas tensões são concentradas na ponta da trinca. Com isso, acarreta-se que superfícies sujeitas a grandes aberturas Δu_n , acabam por gerar maiores tensões coesivas T_n . Dessa forma, são calculadas maiores taxas de dano, justificando a distribuição do mesmo no gráfico anterior.

Em ambos os casos os gráficos apresentaram comportamento semelhante com os de Wang e Siegmund (2006). As discordâncias apresentadas nas aberturas quando comparados os

dois trabalhos, acabam justificando o retardo na propagação da trincas mostrado no item anterior.

4.5 APLICAÇÃO 05: EFEITOS DA PLASTICIDADE

Esta aplicação busca a avaliação do efeito da plastificação no processo de propagação de trincas por fadiga. Segue-se o trabalho de Wang e Siegmund (2005) utilizando o modelo multicamada exemplificado pelo esquema da Fig. (4.37), onde a geometria considera uma estrutura formada por uma camada dúctil limitada por dois substratos elásticos submetida ao Modo I de ruptura. A trinca é localizada exatamente no meio da camada, que possui altura $2h_l$, sendo que sua ponta é centrada no ponto O. Essa aplicação faz uso da lei de carga/descarga que considera a ausência de deslocamentos residuais nos elementos da zona coesiva.

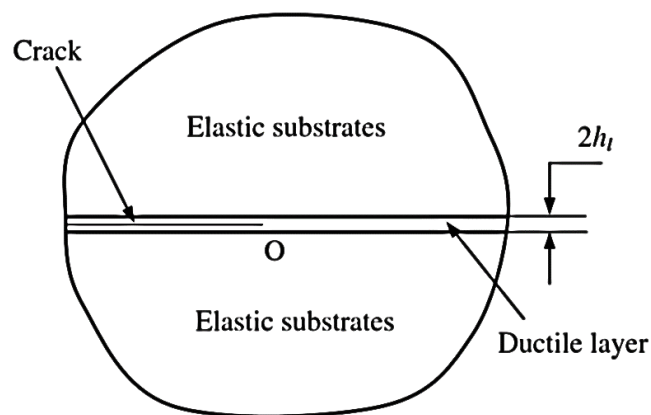


Figura 4.37 - Representação do modelo utilizado na aplicação 05

Fonte: Wang e Siegmund, 2005

A estrutura apresenta módulo de elasticidade longitudinal $E = 10^{11} Pa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,34$. A plasticidade da camada dúctil é tratada de forma isotrópica apresentando tensão de escoamento $\sigma_Y = 0.0025E$ e módulo de endurecimento $E_T = E/20$. Ainda, a interface coesiva tem tensão coesiva inicial $\sigma_{max,0} = 4\sigma_Y$, comprimento coesivo acumulado $\delta_\Sigma = 4\delta_0$ e limite de fadiga $\sigma_f = 0.25\sigma_{max,0}$.

A Fig. (4.38) mostra uma malha de elementos finitos semelhante a utilizada no problema, onde todas as dimensões da estrutura são entregues em função do comprimento característico do material (δ_0). Devido ao fato de estar submetida ao Modo I de ruptura, torna-

se possível o uso da simetria para a solução do problema, assim apenas a metade da estrutura é modelada apresentando restrições verticais no eixo onde está contida a zona coesiva.

A malha da estrutura possui diferentes graus de refinamento, enquanto que a nível global emprega-se uma malha grosseira, na região próxima a ponta da trinca tem-se uma zona com maior detalhamento. Nesse local os elementos quadriláteros possuem dimensão l , onde considera-se $l = 2.5\delta_0$. Ainda, a região refinada possui um comprimento total $L = 110l$. As dimensões globais da estrutura são $50000l$ de largura e $25000l$ de altura. Os parâmetros l e L foram tomados iguais aos de Wang e Siegmund (2005), uma vez que os resultados da estrutura apresentam dependência da malha.

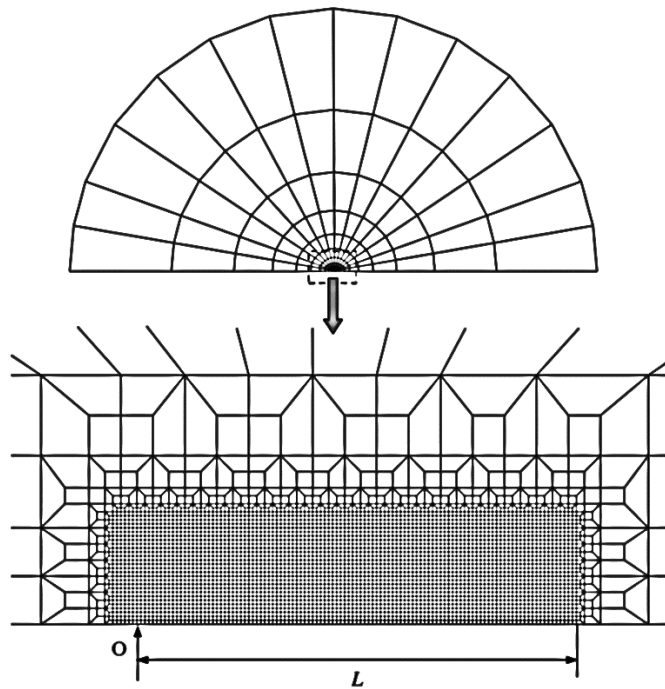


Figura 4.38 - Representação da malha utilizada na aplicação 05 detalhando a zona na ponta da trinca

Fonte: Wang e Siegmund, 2005

Para simular o processo de propagação de trincas por fadiga utiliza-se uma aproximação baseada em condições de contorno. Esse modelo, fundamentado pelas soluções de Westergaard (1939) busca resolver o campo de tensões na ponta da trinca (no presente caso para o Modo I) considerando o material elástico linear. Dessa forma, o carregamento é entregue em função do tempo através de deslocamentos prescritos aplicados na superfície externa da estrutura.

$$u_x(t) = K_I(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{1+\nu}{E} \cos \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) \quad (4.5a)$$

$$u_y(t) = K_I(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{1+\nu}{E} \sin \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) \quad (4.5b)$$

A Eq. (4.5) é utilizada para encontrar os deslocamentos prescritos em função das coordenadas polares (r, θ) do ponto sobre o contorno, das propriedades do material e do fator de intensidade de tensões aplicado. Nesse caso K_I é calculado seguindo a Eq. (4.6), onde ΔK corresponde ao valor de K_{max} uma vez que é considerado um fator $R = 0$.

$$K_I(t) = \Delta K (0.5 - 0.5 \cos 2\pi t) \quad (4.6)$$

O valor de ΔK pode ser encontrado pela Eq. (4.7), onde ΔG indica a variação de energia aplicada sobre a estrutura. Durante as análises são aplicadas porcentagens da energia coesiva de superfície normal $\phi_{n,0}$ característica do material, sendo que para essa energia é adotado o valor de $\phi_{n,0} = 20J/m^2$.

$$\Delta K = \sqrt{\frac{E \Delta G}{(1 - \nu^2)}} \quad (4.7)$$

4.5.1 Influência da camada limitadora na propagação

Inicialmente a estrutura é sujeita a algumas razões da energia coesiva buscando-se avaliar a taxa de propagação da trinca. Nessa etapa utiliza-se duas configurações diferentes para o problema, a primeira considera para a camada dúctil uma espessura correspondente a $h_l = 10\delta_0$, sendo o restante da estrutura considerado elástico, e a segunda associa a toda a estrutura um comportamento elasto-plástico denotando uma camada dúctil com tamanho infinito. Dessa forma objetiva-se avaliar o efeito da plastificação sobre o FCG.

A Fig. (4.39) compara as taxas de crescimento da trinca em função da energia normalizada aplicada para cada um dos casos. Para valores de $\Delta G/\phi_{n,0}$ situados no intervalo entre 0 e 0.1 a taxa de crescimento da trinca se mostrou igual para os dois casos, não evidenciando influência da camada sobre a propagação. Entretanto, valores de energia acima de 0.1 demonstram diferentes comportamentos, sendo que os modelos examinados com limitação da camada apresentam valores mais altos de propagação do que aqueles que tem camada infinita. Essas diferenças crescem conforme são aplicadas cargas mais elevadas. A exemplo disso, no caso da energia igual a 0.2 tem-se uma diferença de 6.7% provocada pelo

efeito limitador, já para a carga de 0.35 esse valor sobe para 42.6%. Wang e Siegmund (2005) destacam uma relação quase linear entre a porcentagem de diferença e a carga aplicada sobre a estrutura.

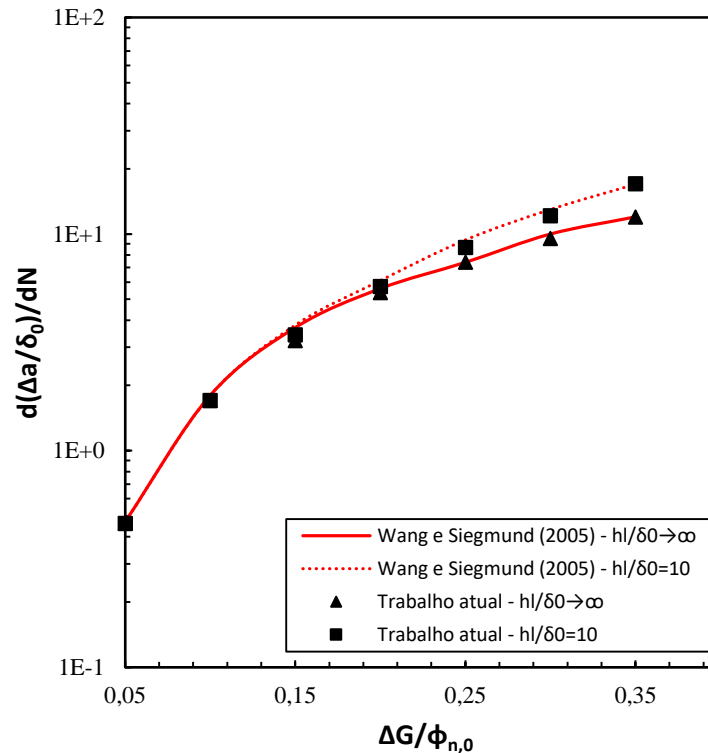


Figura 4.39 - Dependência da taxa de crescimento da trinca em relação a energia aplicada considerando o efeito limitador

Dando sequência a análise, busca-se avaliar a existência de uma relação entre a taxa de propagação da trinca e o tamanho h_l da camada dúctil. Nessa etapa, todos os testes submetem a estrutura a mesma taxa de energia $\Delta G / \phi_{n,0} = 0.25$ variando o valor de h_l . A Tab. (4.4) resume os resultados de da/dN encontrados.

Utilizando os dados da Tab. (4.4) construiu-se o gráfico da Fig. (4.40) que relaciona a razão do efeito limitador, encontrada pela Eq. (4.7), com a espessura da camada.

$$\text{Ratio} = \frac{[d(a/\delta_0)/dN]_{h_l/\delta_0} - [d(a/\delta_0)/dN]_{h_l/\delta_0 \rightarrow \infty}}{[d(a/\delta_0)/dN]_{h_l/\delta_0 \rightarrow \infty}} \quad (4.7)$$

Analisando a Fig. (4.40) constata-se que é necessário uma camada h_l/δ_0 maior do que 105 para que os efeitos da limitação desapareçam. De fato, Wang e Siegmund (2005) concluem que para valores acima de 120 a estrutura se comporta de forma semelhante àquela de camada infinita. Abaixo desse valor, a estrutura apresenta taxas de propagação mais elevadas conforme diminui-se o tamanho da camada, sendo que valores menores que 10 tendem a apresentar taxa

semelhante a estrutura totalmente elástica. Percebe-se que o trabalho atual apresentou um limite elástico inferior ao da referência, em torno de 0.17 contra 0.2, fato associado a questões de modelamento da malha dos substratos.

Tabela 4.4 - Taxas de propagação da trinca em função da altura h_l da camada limitadora

h_s/δ_0	da/dN
0	8.64
10	8.65
20	8.46
30	8.4
40	8.29
50	8.24
60	8.13
70	8.03
85	7.91
105	7.59
∞	7.40

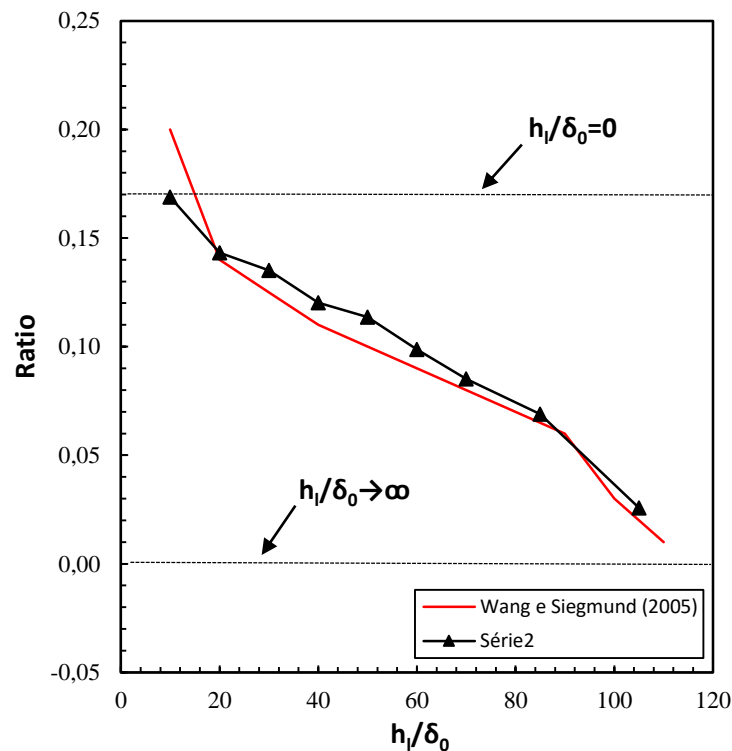


Figura 4.40 - Fator de crescimento de trincas em função da altura da camada limitadora

Como o modelo de zona coesiva empregado permite uma evolução das propriedades do material, o efeito limitador não apenas influencia a quantidade de material que sofre deformação plástica, mas também o modo como se comportam as tensões coesivas na linha de propagação da trinca. Camadas limitadoras de menor espessura geram tensões maiores na zona coesiva para

uma mesma energia aplicada sobre a estrutura, o que acaba por contribuir para uma deterioração mais rápida das propriedades (WANG e SIEGMUND, 2005).

A questão apontada é exemplificada na Fig. (4.41), onde tem-se plotado o dano distribuído na zona coesiva no final do ciclo 29 (sobre total descarga) considerando $h_l/\delta_0 = 10$ e $h_l/\delta_0 \rightarrow \infty$ para uma energia aplicada de 0.15. Como observado, o modelo sujeito ao efeito limitador apresenta maior propagação do que o totalmente elasto-plástico.

As tensões atuantes na zona coesiva possuem ligação direta com as aberturas atingidas nos processos de carga/descarga. A Fig. (4.42) permite visualizar a abertura na zona coesiva no mesmo instante para os dois casos analisados. Percebe-se a presença do *crack closure* no modelo com camada infinita, que é identificado por uma abertura negativa à frente da ponta da trinca. Associado a deformação plástica, esse fenômeno causa o retardo da propagação, uma vez que gera aberturas negativas na zona coesiva que acabam por determinar tensões de contato, que modificam as tensões resultantes nas vizinhanças da ponta da trinca.

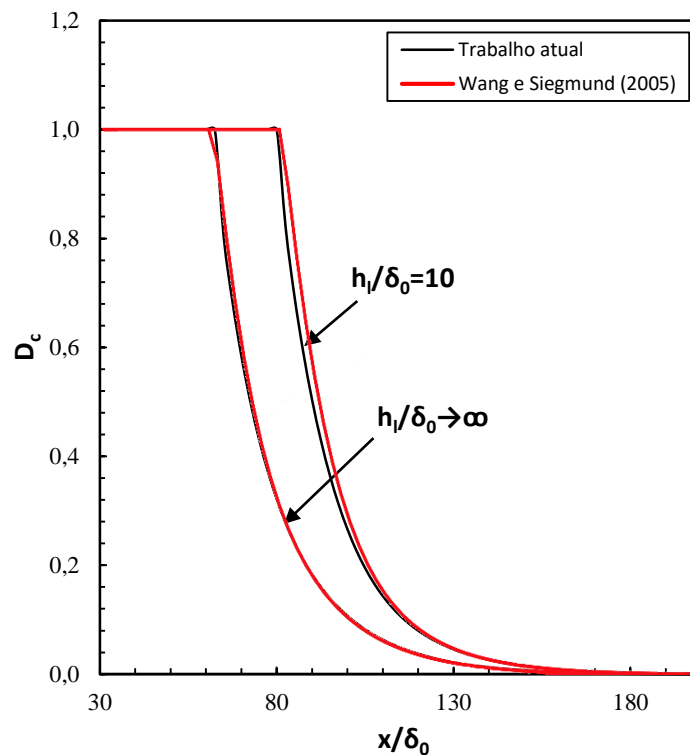


Figura 4.41 - Distribuição de dano sobre total descarga no ciclo 29

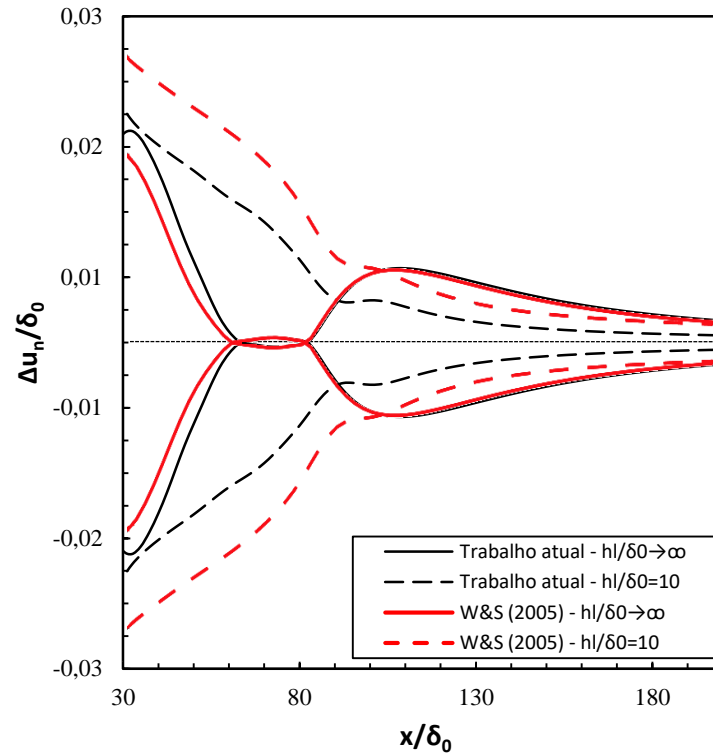


Figura 4.42 - Abertura da zona coesiva sobre total descarga no ciclo 29

Seguindo essa linha de raciocínio, nota-se que esse fenômeno será diretamente responsável pela taxa de propagação da trinca. O fato da plastificação do material ser considerada, acaba acarretando na necessidade da aplicação de uma maior energia, ou fator de intensidade de tensões, sobre a estrutura para se atingir uma mesma taxa de propagação, como observado na Fig. (4.39).

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou a atuação do mecanismo da fadiga em adesivos e metais. Todos os problemas levantados eram caracterizados pelo estado plano de deformações e a grande maioria pelo modo I de ruptura. As análises basearam-se na utilização de uma ferramenta desenvolvida dentro o software Metafor, fazendo uso de elementos coesivos de interface. No algoritmo foi considerado um modelo de zona coesiva irreversível e dependente da história, atuando em conjunto com dois modos de descarga que caracterizam diferentes comportamentos dos materiais.

A aplicação 01 validou com qualidade o funcionamento da ferramenta, reproduzindo o comportamento do mono-elemento da forma esperada para a descarga com ausência de deformação residual. O número de ciclos para a ruptura foi inversamente proporcional ao deslocamento aplicado. A aplicação 02 mostrou-se fiel a teoria na etapa onde foram avaliados diversos valores de tensões aplicadas sobre o mono-elemento. Obteve-se a formação de curvas S-N relacionando as tensões aplicadas com o número de ciclos para a ruptura tanto para carregamentos normais, quanto tangenciais. O efeito da tensão média foi captado. O modelo coesivo também mostrou que o acúmulo de dano ocorre de forma não linear, mostrando variações com relação a regra de Palmgren-Miner.

A aplicação 03 reportou que propagação para a estrutura analisada pode ser relacionada com a energia aplicada sobre a mesma através de uma lei de Paris. Quando a estrutura foi sujeita as cargas transientes, conseguiu-se associar o desenvolvimento da zona coesiva com o formato do bloco aplicado. Blocos de sobrecarga influenciam o tamanho da zona coesiva e aceleram a propagação, e blocos de amplitude variada não modificam o tamanho da zona coesiva, mas retardam o processo de propagação. Ainda, as análises reportadas considerando as variações dos parâmetros modeladores da lei de dano demonstraram a influência destes na propagação de trincas, ressaltando a importância de sua escolha.

A aplicação 04 representou com qualidade os diferentes meios de fratura através dos modelos de placas testados. Considerando o efeito escala, conseguiu-se captar representações dos três meios de ruptura, sendo eles a ruptura por decoesão, a propagação parcial e a propagação total. Dessa maneira provou-se que a aplicabilidade da lei de Paris está relacionada as dimensões da estrutura observada, sendo que as características de desenvolvimento da zona coesiva são regidas pela altura da placa.

Por último, na aplicação 05 alcançou-se uma boa análise do efeito limitador na taxa de FCG de trincas na estrutura multicamada. Obteve-se a influência da plastificação sobre a propagação, sendo essa presente apenas a partir de uma determinada taxa de energia aplicada sobre a peça. Também demonstrou-se que o efeito da camada limitadora deixa de existir a partir de uma altura. Por fim, o modelo captou o efeito do fenômeno *crack closure*, desempenhando este papel fundamental na propagação devido as aberturas negativas.

De uma forma geral, a ferramenta desenvolvida se mostrou capacitada para representar diferentes situações dentro dos eventos relacionados a fadiga a qual as estruturas podem estar sujeitas. Problemas envolvendo carregamentos transientes, efeito escala e plasticidade conseguiram ser desenvolvidos com qualidade.

A adequada representatividade alcançada nos casos observados decorre do fato de que o modelo de zona coesiva adotado permite a representação de comportamentos vinculados a materiais dúcteis e frágeis, podendo ser adotado para cerâmicas, metais, polímeros e adesivos. Dessa forma, o trabalho desenvolvido cumpriu com sucesso os objetivos, sendo que o algoritmo desenvolvido será fundamental em pesquisas posteriores dentro da área.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Dentro das áreas de pesquisa vinculadas a fadiga numérica é grande a ausência de trabalhos que quantifiquem a ação desse evento essencialmente para o Modo II e para o modo misto de propagação. Por isso, cita-se algumas sugestões de temas para trabalhos posteriores:

- i) Influencia dos fenômenos da sobrecarga, tensão média e plastificação em estruturas sujeitas ao Modo II de ruptura;
- ii) Efeitos da ação do atrito sobre a propagação de trincas no Modo II e Modo misto;
- iii) Influência das energias coesivas normal e tangencial na propagação de trincas considerando o Modo misto;
- iv) Análise da propagação de trincas considerando os modos puro e misto de propagação associados a plasticidade cristalina.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 3^a. ed. Boca Raton: CRC Press, 2005.

BAILON, J.; ANTOLOVICH, S. Effect of microstructure on fatigue crack propagation: a review of existing models and suggestions for further research. **ASTM STP**, v. 811:313, p. 49, 1983.

BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55-129, 1962.

BASQUIN, O. H. Proceedings of the ASTM, v. 10, p. 625-630, 1910.

BRINCKMANN, S.; SIEGMUND, T. Computations of fatigue crack growth with strain gradient plasticity and an irreversible cohesive zone model. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 75, p. 2276-2294, 2008.

CAMACHO, G. T.; ORTIZ, M. Computational modelling of impact damage in brittle materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, p. 2899-2938, 1996.

CAYRO, E. E. P. **Efeito de escala no crescimento de trincas por fadiga em materiais quase frágeis**. 2016. 99p. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2016.

CHEN, C.-C.; LINZELL, D. G. Modeling end notched flexure tests to establish cohesive element Mode II fracture parameters. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 77, p. 1338-1347, 2010.

DOWLING, N. E.; BEGLEY, J. A. Fatigue crack growth during gross plasticity and J-integral. **ASTM STP**, p. 82-103, 1976.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, n. 2, p. 100-104, 1960.

EL HADDAD, M. H.; M.; DOWLING, N. E.; TOPPER, T. H.; SMITH, K. N. J integral applications for short fatigue cracks at notches. **International Journal of Fracture**, v. 16, p. 15-30, 1980.

ELBER, W. Fatigue crack closure under cyclic tension. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 2, p. 37-44, 1970.

FEDRIGO, F. **Aplicação de interfaces coesivas na mecânica da fratura via método dos elementos finitos**. 2001. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2001.

FOREMAN, R.; KEARY, V.; ENGLE, R. Numeral analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. **Journal of Basic Engineering**, v. 89, p. 459-463, 1967.

FORMAN, Royce G.; METTU, Sambu R. Behavior of surface and corner cracks subjected to tensile and bending loads in Ti-6Al-4V alloy. 1990.

GEUBELLE, P. H.; BAYLOR, J. S. Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation. **Composites B**, v. 29, p. 589-602, 1990.

GUIMARÃES, S. R. **Desenvolvimento e aplicação de uma metodologia para previsão de vida de eixos de mandris de bobinadeiras de laminação a frio submetidas a danos acumulados por fadiga**. Dissertação em Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2009.

HARPER, P. W.; HALLETT, S. R. A fatigue degradation law for cohesive interface materials. **International Journal of Fatigue**, v. 32, p. 1774-1787, 2010.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, p. 773-781, 1976.

JHA, D.; BANERJEE, A. A cohesive zone model for fatigue failure in complex stress-states. **International Journal of Fatigue**, v. 36, p. 155-162, 2012.

JIANG, H.; GAO, X.; SRIVATSAN, T. S. Predicting the influence of overload and loading mode on fatigue crack growth: a numerical approach using irreversible cohesive elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, p. 675-685, 2009.

KLESNIL, M.; LUKÁŠ, P. Influence of strength and stress history on growth and stabilisation of fatigue cracks. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 4, n. 1, p. 77-92, 1972.

KRAJCINOVIC, D. **Damage Mechanics**. Amsterdam: Elsevier, 1996.

LEMAITRE, J. **A Course on Damage Mechanics**. 2^a ed. Cachan: Springer, 1996.

LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. **Engineering Damage Mechanics**. [S.l.]: Springer, 2005.

LI, Y. N.; HONG, A. P.; BINIENDA, W. K. Theory of cohesive crack model with interactive cracks. **International Journal of Solids and Structures**, v. 35, p. 981-994, 1998.

LIU, S. Y.; CHEN, I.-W. Fatigue of Yttria-Stabilized Zirconia II: Crack Propagation, Fatigue Striations, and Short Crack Behavior. **J. Am. Ceram. Soc.**, v. 74, n. 6, p. 1206-1218, 1991.

LIU, J.; XIANG, C.; YUAN, H. Prediction of 3D small fatigue crack propagation in shot-peened specimens. **Computational Materials Science**, v. 46, p. 566-571, 2009.

LIU, Jinxiang; LI, Jun; WU, Bo. The cohesive zone model for fatigue crack growth. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 5, p. 737392, 2013.

MACHADO, A. **Uso do método das interfaces coesivas na simulação do processo de propagação de trincas por fadiga**. 2007. 83p. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2007.

MEIER, R. Milagre nos céus - casos espetaculares de aviões em situações extremas, que conseguiram pousar em segurança. Disponível em: < <https://airway.uol.com.br/milagre-nos-ceus/>>. Acesso em: 30 mai. 2018.

MCCLINTOCK, Frank A. On the plasticity of the growth of fatigue cracks. **Fracture of solids**, v. 20, p. 65-102, 1963.

MORONI, F.; PIRONDI, A. A procedure for the simulation of fatigue crack growth in adhesively bonded joints based on the cohesive zone model and different mixed-mode propagation criteria. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 78, p. 1808-1816, 2011.

NEEDLEMAN, A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, p. 525-531, 1987.

NEEDLEMAN, A. An analysis of decohesion along an imperfect interface. **Internacional Journal Fract**, n. 42, p. 21-40, 1990.

NEEDLEMAN, A. Micromechanical modeling of interfacial decohesion. **Ultramicroscopy**, v. 40, p. 203-214, 1992.

NEUMANN, P. The geometry of slip processes at a propagating fatigue crack—II. **Acta Metallurgica**, v. 22, n. 9, p. 1167-1178, 1974.

NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. **Journal Proceedings**, 1967. 152-163.

NOROOZI, A. H.; GLINKA, G.; LAMBERT, S. A two parameter driving force for fatigue crack growth analysis. **International Journal of Fatigue**, v. 27, p. 1277-1296, 2005.

PARIS, P. C.; ANDERSON, W. E. A rational analytic theory of fatigue. **The Trend in Engineering**, v. 13, n. 1, p. 9-14, 1961.

PIRONDI, A.; MORONI, F. Simulation of mixed-mode I/II fatigue crack propagation in adhesive joints with modified cohesive zone model. **Journal of Adhesion Science and Technology**, v. 25, p. 2483-2499, 2011.

PONTHOT, J. P. Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis, 1995.

RANKINE, W. J. M. On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles; and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction. **Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, 1843. 105-107.

RODRIGUES, E. A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular comportamento de materiais quase-frágeis**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Bauru, p. 110. 2011.

ROE, K. L. **A cohesive zone model for fatigue crack growth simulation [M. S. Thesis]**. Purdue University. West Lafayette, USA. 2001.

ROE, K.; SIEGMUND, T. An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, n. 2, p. 209-232, 2003.

SIEGMUND, T. A numerical study of transient fatigue crack growth by use of an irreversible cohesive zone model. **International Journal of Fatigue**, v. 26, n. 9, p. 929-939, 2004.

SOARES, F. S.; ITURRIOZ, I. Simulação da propagação subcrítica de fissuras em materiais quase frágeis aplicando uma versão do método de elementos discretos formados por barras. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, p. 153-162, 2015.

SOUZA, J. B. D. **Estudo da danificação em barras de aço utilizadas na construção civil submetidas à corrosão através da mecânica do dano**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2005.

TVERGAARD, T. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. **Materials Science and Engineering A**, v. 125, p. 203-213, 1990.

TVERGAARD, V.; HUTCHINSON, J. W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 40, p. 1377-1397, 1992.

WANG, B.; SIEGMUND, T. A numerical analysis of constraint effects in fatigue crack growth by use of an irreversible cohesive zone model. **International Journal of Fracture**, v. 132, n. 2, p. 175-196, 2005.

WANG, B.; SIEGMUND, T. A computational analysis of size effects in fatigue failure. **Modelling and Simulations in Materials Science and Engineering**, n. 14, p. 775-787, 2006.

WANG, B.; SIEGMUND, T. Simulation of fatigue crack growth at plasticity mismatched bi-material interfaces. **International Journal of Plasticity**, v. 22, p. 1586-1609, 2006.

WEERTMAN, J. Rate of growth of fatigue cracks calculated from the theory of infinitesimal dislocations distributed on a plane. **International Journal of Fracture**, v. 26, n. 4, p. 308-315, 1984.

WESTERGAARD, H. M. Bearing Pressures and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v. 6, p. 49-53, 1939.

WHEELER, O. E. Spectrum loading and crack growth. **Journal of Basic Engineering**, v. 94, n. 1, p. 181-186, 1972.

WÖHLER, A. *Zeitschrift für Bauwesen*, v. 10, p. 583-616, 1860.

XU, X.-P.; NEEDLEMAN, A. Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v. 1, p. 111-132, 1993.

XU, Y.; YUAN, H. Computational analysis of mixed-mode fatigue crack growth in quasi-brittle materials using extended finite element methods. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 76, p. 165-181, 2009.

YAMAGUCHI, T.; OKABE, T.; YASHIRO, S. Fatigue simulation for titanium/CFRP hybrid laminates using cohesive elements. **Composites Science and Technology**, v. 69, p. 1968-1973, 2009.

YANG, B.; RAVI-CHANDAR, K. On the role of the process zone in dynamic fracture. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 44, p. 1955-1976, 1996.

YANG, S.-Y. Analysis of fatigue crack growth in weld specimen using three-dimensional cohesive zone model. **Key Engineering Materials**, v. 321, p. 674-677, 2006.

YAO, D.; SHANG, J. K. Effect of load-mix on fatigue crack growth in 63Sn-23Pb solder joints. **J. Electron Packaging**, p. 114-118, 1997.

YUAN, H.; LIN, G.; CORNEC, A. Verification of a cohesive zone model for ductile fracture. **Journal of Engineering Materials and Technology**, v. 118, p. 192-200, 1996.

ZHANG, W.; DENG, X. Formulation of cohesive zone model for a Mode III crack. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 72, p. 1818-1829, 2005.

ANEXO A - LEI DE ACUMULO DE DANO LINEAR DE PALMGREN-MINER

Quando carregamentos de diferentes amplitudes são aplicados em um material, faz-se o uso de técnicas para o cálculo do dano acumulado. A regra de Palmgren-Miner, proposta por Palmgren em 1924, baseia-se no fato de que se existem diferentes níveis de tensões aplicadas em um peça sujeita a ciclos repetitivos, pode-se calcular o dano total através da soma dos danos provocados por cada um dos carregamentos.

Considerando-se uma estrutura qualquer, pode-se calcular o dano acumulado D_c através da relação entregue pela Eq. (A.1).

$$\sum \frac{N_i}{N_{fi}} = D_c \quad (\text{A.1})$$

Onde N_{fi} corresponde ao número de ciclos necessários de uma carga de amplitude S_i a serem aplicados na estrutura para esta atingir a falha, e N_i é o número de ciclos aplicados da carga S_i na mesma estrutura.

Dessa forma, se N_i assume o valor de N_{fi} tem-se para D_c o valor unitário e atinge-se o rompimento. Quando existe mais de uma amplitude de carga aplicada na peça basta somar as razões dos ciclos aplicados para encontrar o valor de dano acumulado.

A relação de Palmgren-Miner consiste em uma forma linear de acumulo de dano, podendo possuir algumas limitações nas suas aplicações. O fato de necessitar de valores fixos de N_{fi} ignora a existência da variação probabilística natural do fenômeno da fadiga. Ainda, a relação linear pode não ser a melhor forma de representar o acumulo de dano em aplicações reais, sendo que este ocorre em diferentes proporções quando levado em consideração o histórico do carregamento.