UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM O *GEOGEBRA GRAPHING CALCULATOR* NA ESCOLA BÁSICA: UM OLHAR PARA A COOPERAÇÃO ENTRE OS ESTUDANTES

SHÉRIDAN DOS REIS PINTO

Porto Alegre
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM O *GEOGEBRA GRAPHING CALCULATOR* NA ESCOLA BÁSICA: UM OLHAR PARA A COOPERAÇÃO ENTRE OS ESTUDANTES

SHÉRIDAN DOS REIS PINTO

Porto Alegre
2018

SHÉRIDAN DOS REIS PINTO

ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM O *GEOGEBRA GRAPHING CALCULATOR* NA ESCOLA BÁSICA: UM OLHAR PARA A COOPERAÇÃO ENTRE OS ESTUDANTES

Trabalho de conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, submetido como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva

Porto Alegre
2018

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM O *GEOGEBRA GRAPHING CALCULATOR* NA ESCOLA BÁSICA: UM OLHAR PARA A COOPERAÇÃO ENTRE OS ESTUDANTES

Shéridan dos Reis Pinto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Britto Velho de Mattos

Colégio de Aplicação/UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia

Instituto de Matemática e Estatística- UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva

Instituto de Matemática e Estatística- UFRGS- Orientador

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais José e Joise, que durante os quatros anos e meio de graduação estiveram sempre ao meu lado, ajudando no que foi preciso para que esta etapa fosse concluída. Estou grata por vocês me educarem a sempre tentar ser uma pessoa melhor e a correr atrás de meus objetivos. Sem vocês, nada disso seria possível.

À amiga e colega Alana por sempre estar disponível para estudarmos para as disciplinas mais difíceis. Obrigada por fazer parte dessa caminhada e fortificar ainda mais nossa amizade.

Ao Reinaldo que deu suporte e me incentivou a sempre estudar mais. Agradeço por ter paciência e todo o auxílio durante essa reta final de graduação.

Ao professor Eduardo Britto de Velho Mattos por me acolher no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Obrigada por oportunizar a aprendizagem do ser professor, por sempre sanar as dúvidas que lhe trouxe durante esses dois anos de bolsa e por aceitar contribuir na construção desse trabalho.

Ao professor Rodrigo Sychocki da Silva por aceitar orientar a elaboração dessa pesquisa. Obrigada pelo ensinar fazer docente, pela paciência e incentivo na construção do trabalho.

Obrigada ao professor Rodrigo Dalla Vecchia por aceitar meu convite para colaborar na produção desse trabalho.

Às pessoas que ajudaram de alguma forma durante minha caminhada acadêmica, muito obrigada.

RESUMO

Este trabalho busca analisar como a cooperação influencia na aprendizagem das funções quadráticas por meio do estudo de seus coeficientes utilizando a tecnologia móvel. A pesquisa teve aporte teórico nas construções de Jean Piaget sobre cooperação. Apresenta-se a experiência de ensino e aprendizagem realizada no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul com os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. O experimento, de viés metodológico qualitativo, consistiu na construção, aplicação e reflexão teórica de uma sequência de atividades sobre funções quadráticas na qual foi utilizado o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. A partir da análise dos dados coletados na pesquisa, verificou-se a importância do trabalho coletivo no âmbito da sala de aula e como a cooperação influencia no processo de aprendizagem. Constatou-se também que a tecnologia móvel foi o meio para que o diálogo entre os pares ocorresse.

Palavras chave: Aprendizagem. Cooperação. Funções Quadráticas. Tecnologia Digital.

ABSTRACT

This work seeks to analyze how cooperation influence the learning of quadratic functions through the study of their coefficients using mobile technology. The research had a theoretical contribution in Jean Piaget's constructions on cooperation. We present the teaching and learning experience at the College of Application of the Federal University of Rio Grande do Sul with the students of the first year of high school. The qualitative methodological bias consisted in the construction, application and theoretical reflection of a sequence of activities on quadratic functions where the *GeoGebra Graphing Calculator* application was used. From the analysis of the data collected in the research, we verified the importance of collective work within the classroom and how the cooperation influences the learning process. It was also found that mobile technology was the means for peer-to-peer dialogue to take place.

Keywords: Learning. Cooperation. Quadratic functions. Digital Technology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho utiliza a tecnologia digital por meio do *software* GeoGebra, para abordar o conteúdo de funções quadráticas por meio do estudo de seus coeficientes no Ensino Médio. Pretende-se analisar como os alunos constroem o conhecimento dando ênfase à cooperação entre os sujeitos, realçando as construções apresentadas por Jean Piaget. Assim, a pergunta inicial dessa pesquisa é: *Como a cooperação entre os sujeitos influenciam na aprendizagem das funções quadráticas por meio do estudo de seus coeficientes?*

A motivação em estudar esse tema surgiu a partir da experiência da pesquisadora em planejar aulas sobre o conteúdo de funções reais durante a disciplina da graduação intitulada MAT01072 – Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III. As aulas foram elaboradas após discussões entre os professores em formação sobre como o ensino de funções era conduzido por vezes na educação básica. Devido a isso, decidiu-se preparar uma sequência de atividades que incluísse o prelúdio desse conteúdo para uma melhor compreensão dos conteúdos estudados nas disciplinas de Cálculo que envolvesse a construção de conhecimento e a utilização da tecnologia digital como meio que fizesse emergir a aprendizagem.

Baseado nessa prática e que o conteúdo de funções de variável real é visto inicialmente pelos alunos da Educação Básica, o interesse na aprendizagem de funções quadráticas pelos estudantes emerge na disciplina de MAT01048-Pesquisa em Educação Matemática na UFRGS. Fundamenta-se teoricamente a presente pesquisa nos seguintes eixos: um olhar para o que as diretrizes demandam sobre o ensino de funções; a influência das tecnologias digitais em Educação Matemática e a presença/influência dos conceitos de colaboração e cooperação propostos por Jean Piaget envolvidos no processo de aprendizagem.

A escolha do tema desta pesquisa justifica-se pela união da matemática com tecnologias utilizando a ideia de que o ensino de funções quadráticas pode ser trabalhado por meio do uso de tecnologias digitais móveis, já que foi constatado que os sujeitos participantes dessa pesquisa tinham celulares e que essa foi a saída para a aplicação da prática deste trabalho, pois o laboratório de informática da escola não dispunha de horários livres para uso. Buscou-se analisar como a construção desse conhecimento pode ser realizada a partir da colaboração e cooperação entre os estudantes. Seguindo a linha de pesquisa qualitativa, houve a elaboração e execução de uma sequência de atividades que explora o estudo dos coeficientes das funções quadráticas. Essas atividades foram realizadas no Colégio de Aplicação da

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, com estudantes do 1º ano do Ensino Médio, no ano de 2017.

A partir do entendimento que o estudante deva ser o protagonista no espaço de sala de aula, entende-se que essa pesquisa possa contribuir no planejamento pedagógico do professor, considerando o desenvolvimento de ações autônomas e de senso crítico dos estudantes. Portanto, considera-se que a realização desse projeto torna-se relevante, pois busca contribuir para uma Educação Matemática com suporte nas tecnologias digitais móveis, com ênfase na formação de cidadãos mais críticos e autônomos.

O texto está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 apresentam-se os objetivos traçados no início da elaboração da pesquisa; Capítulo 3 encontra-se a fundamentação teórica divida em duas seções, uma sobre o ensino de funções na sala de aula, com subseções sobre as diretrizes curriculares nacionais, análise dos livros didáticos com um olhar sobre o uso das tecnologias digitais e trabalhos já elaborados com esse tema. A segunda seção desse capítulo aborda o processo cognitivo contendo duas subseções, colaboração e cooperação na perspectiva de Jean Piaget e trabalhos correlatos sobre esse tópico; No capítulo 4 expõem-se os processos metodológicos dessa pesquisa, contendo subseções da metodologia adotada nessa pesquisa, os sujeitos participantes e os materiais e métodos utilizados; As análises do experimento ocorrido constam no capítulo 5; Por fim, no capítulo 6, apresentam-se as reflexões finais deste trabalho.

2 OBJETIVOS

Pelo surgimento do questionamento sobre como a colaboração e a cooperação influenciam na aprendizagem das funções quadráticas por meio do estudo dos seus coeficientes, elencam-se a seguir os objetivos gerais e específicos dessa pesquisa.

2.1 Objetivo Geral

Entende-se que o objetivo geral da presente pesquisa seja: Analisar por meio da investigação sobre como a cooperação entre os estudantes influencia na aprendizagem das funções quadráticas.

2.2 Objetivos Específicos

A partir do objetivo geral elencam-se os seguintes objetivos específicos:

- Analisar o que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio elencam para o ensino de funções, em especial para as funções quadráticas;
- Verificar como é a abordagem/apresentação desse conteúdo no Ensino Médio por meio de uma pesquisa em livros didáticos recém-aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD);
- Investigar como emerge a cooperação, a partir das ideias de Jean Piaget, entre os estudantes;
- Planejar e executar uma sequência de atividades que envolva a exploração das funções quadráticas por meio do estudo dos seus coeficientes e que faça uso do *software GeoGebra Graphing Calculator*;
- Analisar se a cooperação influencia no processo de aprendizagem das funções quadráticas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo contém a abordagem teórica dessa pesquisa. Constam as demandas das diretrizes curriculares nacionais sobre o ensino de funções quadráticas, a utilização da tecnologia digital e como a cooperação pode influenciar na aprendizagem da matemática. Além disso, apresenta-se uma investigação em livros didáticos usualmente utilizados no primeiro ano de Ensino Médio.

3.1 Escrito sobre funções quadráticas

Nesta seção pretende-se investigar como as funções quadráticas estão sendo abordadas/apresentadas no Ensino Médio, por meio da análise em livros recentemente aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), uma inspeção nas orientações contidas nas diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio e uma revisão de literatura em trabalhos acadêmicos que tratam da temática do ensino das funções quadráticas fazendo uso das tecnologias digitais.

3.1.1 Diretrizes Curriculares

Sobre o estudo de funções, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio-PCNEM (BRASIL, 2002), abordam que o conhecimento desse conteúdo concede ao aluno a obtenção de uma linguagem algébrica que é fundamental para expressar relações entre grandezas e investigar situações-problema, formando modelos descritivos de fenômenos e consentindo conexões na matemática e fora dela. Além disso, os PCNEM (1999) salientam a importância da representação gráfica das funções quadráticas, referente à interpretação de sua forma algébrica, enfatizando que:

> o estudo dessa função- posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. (BRASIL, 1999, p. 72)

É valorizada a utilização da tecnologia dentro da sala de aula de Matemática, visto que a mesma "deve acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade" (BRASIL, 2002, p. 118).

Ainda é mencionado que ao inserir e fazer uso das tecnologias permite-se afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa matéria e que o conhecer matemático deve estar ligado ao saber fazer Matemática e de um "saber pensar matemáticos." (BRASIL, 1999, p. 41).

Inserido em um contexto de sala de aula, a partir de um olhar sobre o trabalho cooperativo entre os estudantes, os PCNs (1999) destacam que um dos objetivos da aprendizagem da matemática no nível médio é "promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação" (BRASIL, 1999, p.42). O trabalhar colaborando e cooperando também é destacado pelas diretrizes com a ênfase que esse tipo de exercício faz com que a aprendizagem das Ciências e da Matemática torne-se mais eficaz.

Ainda é mencionado pelas diretrizes (2002) que a aprendizagem não se dá com o estudante afastado, sem viabilidade de relacionar-se com os colegas e com o professor, mas em conjunto, demonstrando para si e para os outros seus pensamentos e contratempos. Assim, ao trabalharem coletivamente, é exercida a comunicação oral que

> tem como instrumento para seu desenvolvimento o trabalho de grupo ou dupla, quando os alunos, além de aprenderem uns com os outros, precisam organizar o que sabem para se fazerem entender e, para isso, usam a linguagem que está sendo aprendida. (BRASIL, 2002, p.130)

Em suma, segundo as orientações nacionais curriculares,

> a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. (BRASIL, 2002, p.111)

Assim, reunindo-se as informações sobre o que as diretrizes enunciam, o estudo da matemática deve contribuir para a formação global do estudante, e que o mesmo seja capaz de fazer leituras de mundo com uma melhor apreensão a partir do saber pensar matemática. Entende-se, consoante com o proposto nas diretrizes que o trabalho coletivo entre os estudantes com a utilização da tecnologia, realizando a construção do conhecimento sobre as funções quadráticas por meio do estudo de seus coeficientes torna o aprendizado desse conteúdo matemático eficiente.

3.1.2 Um olhar nos livros didáticos quanto ao uso das tecnologias digitais

A partir do que consta sobre o ensino das funções quadráticas nas diretrizes curriculares nacionais, buscou-se analisar quatro livros didáticos recentemente aprovados pelo PNLD[1]/2018 para o Ensino Médio. Esses livros estavam disponíveis no Colégio de Aplicação (UFRGS), no qual foi realizada esta pesquisa. Durante esta os professores da disciplina de matemática realizavam um estudo que visava escolher a coleção a ser usada no próximo ano na escola. Abaixo segue os quatro livros analisados:

- Matemática: Paiva, Ensino Médio I, Manoel Paiva, 2015;
- Matemática: ciências e aplicações: ensino médio, volume I, Gelson Iezzi... [et. al.], 2016;
- Matemática: interação e tecnologia, volume 1, Rodrigo Balestri, 2016;
- Matemática: contexto & aplicações: ensino médio, Luiz Roberto Dante, 2016.

O objetivo desse olhar é verificar nesses quatro livros como é abordado/apresentado o conteúdo de funções quadráticas. Explorou-se o capítulo sobre funções quadráticas, destacando se cada exemplar tinha alguma explanação sobre o estudo dos coeficientes da lei de formação da função e se a explanação fazia uso das tecnologias digitais. A partir do que foi visto nos livros didáticos a construção da sequência de atividades foi norteada pelo desejo de se fazer algo que ultrapassasse a abordagem dos livros consultados. A elaboração de uma sequência de atividades que norteasse o estudo da função quadrática fazendo-se uso das tecnologias digitais e que fizesse emergir discussões e construção de hipóteses pelos estudantes foi o ponto a ser alcançado. Logo, a partir de um olhar de como a apresentação do conteúdo aderente a essa pesquisa estava sendo feita nos livros didáticos consultados, a pesquisa se direcionou a elaborar algo novo e que não repetisse as ideias já constantes nos livros.

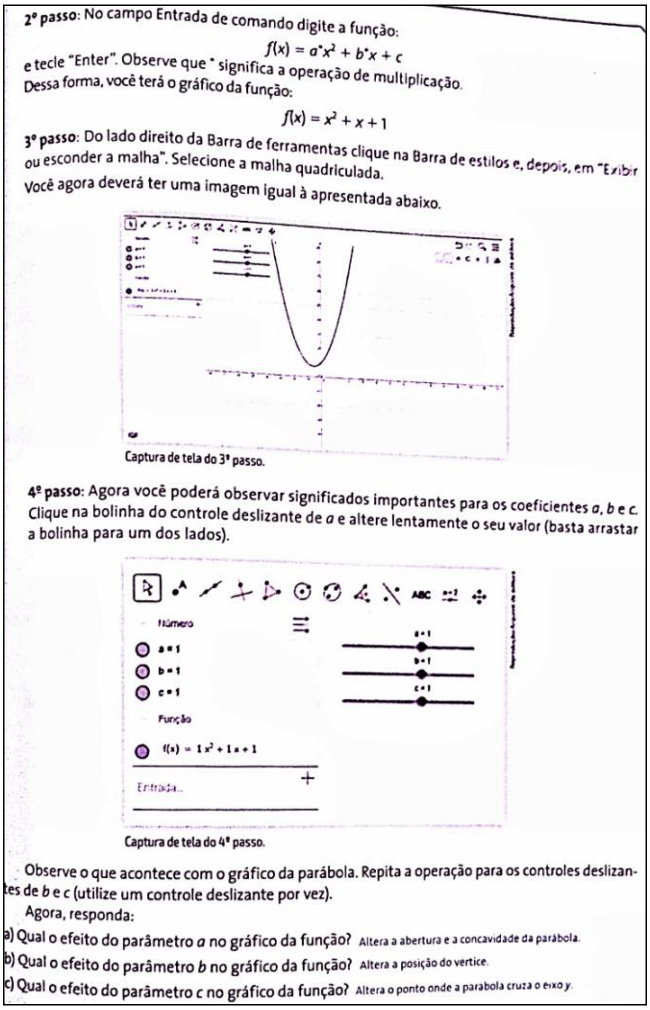
Para a continuidade das investigações, faz-se necessário estudar a tecnologia digital no cenário escolar. Sobre a utilização desse instrumento dentro das escolas, Borba e Penteado (2002, p.45) entendem que “uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre dada

[1] Para a apropriação sobre o Programa Nacional do Livro Didático: Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12391& > Acesso em dezembro de 2017.

pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento.”. A respeito desse conhecimento, os autores enfatizam que a inserção da informatização nas escolas demanda a superação de práticas antigas e tal exercício:

> está também em harmonia com uma visão de construção de conhecimento que privilegia o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e com uma postura epistemológica que entende o conhecimento como tendo sempre um componente que depende do sujeito. (BORBA e PENTEADO, 2002, p. 46)

Ao iniciar o olhar sobre os livros didáticos e o uso das tecnologias que os mesmos fazem ao explorar o assunto deparou-se com um espectro de abordagens e métodos. Dante (2016) no final do capítulo exibe um “bloco” sobre tecnologia e matemática, contendo um manual introdutório sobre o *software* GeoGebra e atividades no *software* com variação dos parâmetros *a*, *b* e *c* da lei das funções quadráticas. Após a apresentação e familiarização com o *software* o autor expõe questões norteadoras que fazem o leitor explorar o papel que cada coeficiente desempenha no esboço gráfico da função.


2º passo: No campo Entrada de comando digite a função:

$$f(x) = a{*}x^2 + b{*}x + c$$

e tecle “Enter”. Observe que * significa a operação de multiplicação.
Dessa forma, você terá o gráfico da função:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

3º passo: Do lado direito da Barra de ferramentas clique na Barra de estilos e, depois, em “Exibir ou esconder a malha”. Selecione a malha quadriculada.
Você agora deverá ter uma imagem igual à apresentada abaixo.

Captura de tela do 3º passo.

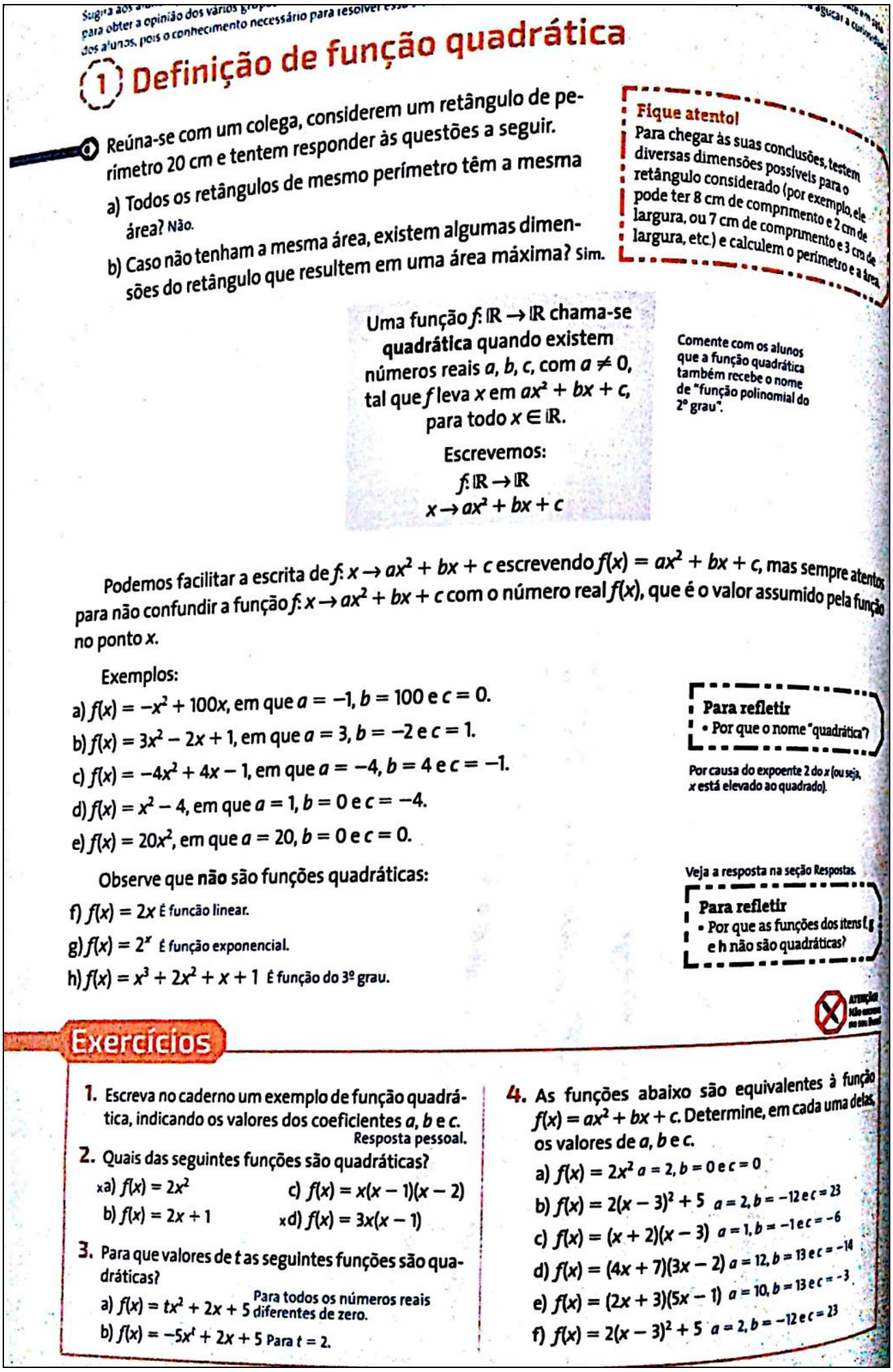
4º passo: Agora você poderá observar significados importantes para os coeficientes *a*, *b* e *c*. Clique na bolinha do controle deslizante de *a* e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados).

Captura de tela do 4º passo.

Observe o que acontece com o gráfico da parábola. Repita a operação para os controles deslizantes de *b* e *c* (utilize um controle deslizante por vez).
Agora, responda:
a) Qual o efeito do parâmetro *a* no gráfico da função? Altera a abertura e a concavidade da parábola.
b) Qual o efeito do parâmetro *b* no gráfico da função? Altera a posição do vertice.
c) Qual o efeito do parâmetro *c* no gráfico da função? Altera o ponto onde a parabola cruza o eixo *y*.

Figura 1: Dante, 2016, p.123.

Apesar de ter a inserção da tecnologia no ensino de funções quadráticas, Dante (2016), no restante do capítulo, apresenta as definições e características (zeros da função, papel dos parâmetros, vértice da parábola, pontos de máximo/mínimo) das funções quadráticas seguidas de exercícios e problemas aplicados.



1 Definição de função quadrática

Reúna-se com um colega, considerem um retângulo de perímetro 20 cm e tentem responder às questões a seguir.

a) Todos os retângulos de mesmo perímetro têm a mesma área? Não.

b) Caso não tenham a mesma área, existem algumas dimensões do retângulo que resultem em uma área máxima? Sim.

Fique atento!
Para chegar às suas conclusões, testem diversas dimensões possíveis para o retângulo considerado (por exemplo, ele pode ter 8 cm de comprimento e 2 cm de largura, ou 7 cm de comprimento e 3 cm de largura, etc.) e calculem o perímetro e a área.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **quadrática** quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que f leva x em $ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Escrevemos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to ax^2 + bx + c$$

Comente com os alunos que a função quadrática também recebe o nome de "função polinomial do 2º grau".

Podemos facilitar a escrita de $f: x \to ax^2 + bx + c$ escrevendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, mas sempre atentos para não confundir a função $f: x \to ax^2 + bx + c$ com o número real $f(x)$, que é o valor assumido pela função no ponto x.

Exemplos:

a) $f(x) = -x^2 + 100x$, em que $a = -1$, $b = 100$ e $c = 0$.

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, em que $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$.

c) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$, em que $a = -4$, $b = 4$ e $c = -1$.

d) $f(x) = x^2 - 4$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$.

e) $f(x) = 20x^2$, em que $a = 20$, $b = 0$ e $c = 0$.

Para refletir
• Por que o nome "quadrática"?

Por causa do expoente 2 do x (ou seja, x está elevado ao quadrado).

Observe que **não** são funções quadráticas:

f) $f(x) = 2x$ É função linear.

g) $f(x) = 2^x$ É função exponencial.

h) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ É função do 3º grau.

Veja a resposta na seção Respostas.

Para refletir
• Por que as funções dos itens f, g e h não são quadráticas?

Exercícios

1. Escreva no caderno um exemplo de função quadrática, indicando os valores dos coeficientes a, b e c. Resposta pessoal.

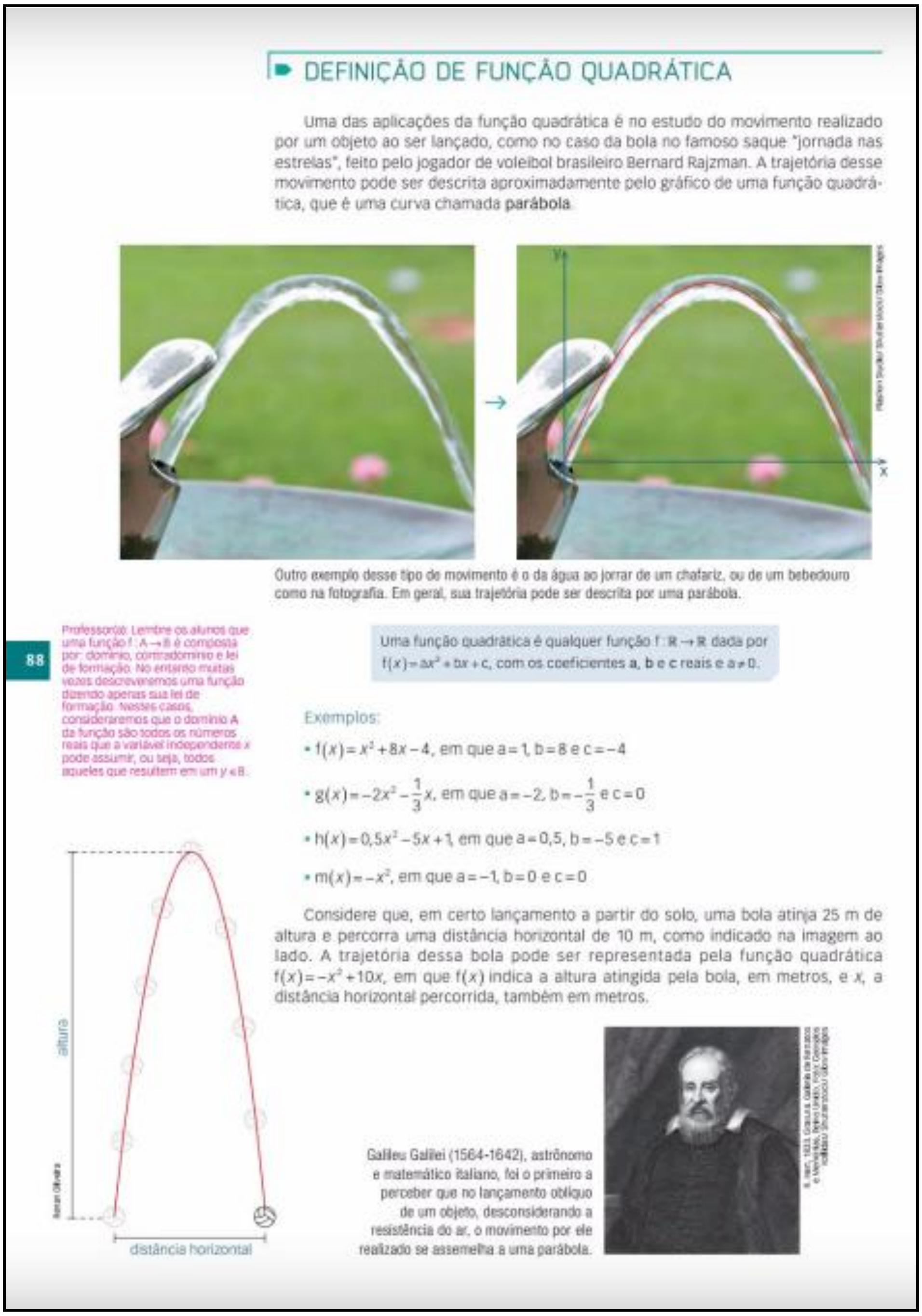
2. Quais das seguintes funções são quadráticas?
   x a) $f(x) = 2x^2$
   b) $f(x) = 2x + 1$
   c) $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$
   x d) $f(x) = 3x(x - 1)$

3. Para que valores de t as seguintes funções são quadráticas?
   a) $f(x) = tx^2 + 2x + 5$ Para todos os números reais diferentes de zero.
   b) $f(x) = -5x^t + 2x + 5$ Para $t = 2$.

4. As funções abaixo são equivalentes à função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine, em cada uma delas, os valores de a, b e c.
   a) $f(x) = 2x^2$ $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$
   b) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ $a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$
   c) $f(x) = (x + 2)(x - 3)$ $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$
   d) $f(x) = (4x + 7)(3x - 2)$ $a = 12$, $b = 13$ e $c = -14$
   e) $f(x) = (2x + 3)(5x - 1)$ $a = 10$, $b = 13$ e $c = -3$
   f) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ $a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$

Figura 2: Dante, 2016, p. 102.

Assim como Dante (2016), Balestri (2016) exibe em seu exemplar, após a apresentação do conteúdo e desvinculado da sequência de atividades do autor, no capítulo sobre funções quadráticas um bloco sobre tecnologia. Utilizando o GeoGebra, o autor convida o leitor a visualizar a composição de funções quadráticas. No restante do livro não é mencionado como utilizar a tecnologia na variação dos parâmetros das funções. O conteúdo é apresentado por definições, problemas aplicados e exercícios.



DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma das aplicações da função quadrática é no estudo do movimento realizado por um objeto ao ser lançado, como no caso da bola no famoso saque "jornada nas estrelas", feito pelo jogador de voleibol brasileiro Bernard Rajzman. A trajetória desse movimento pode ser descrita aproximadamente pelo gráfico de uma função quadrática, que é uma curva chamada **parábola**.

Outro exemplo desse tipo de movimento é o da água ao jorrar de um chafariz, ou de um bebedouro como na fotografia. Em geral, sua trajetória pode ser descrita por uma parábola.

88

Professor(a): Lembre os alunos que uma função $f: A \to B$ é composta por: domínio, contradomínio e lei de formação. No entanto muitas vezes descreveremos uma função dizendo apenas sua lei de formação. Nesses casos, consideraremos que o domínio A da função são todos os números reais que a variável independente x pode assumir, ou seja, todos aqueles que resultem em um $y \in B$.

Uma função quadrática é qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com os coeficientes **a**, **b** e **c** reais e $a \neq 0$.

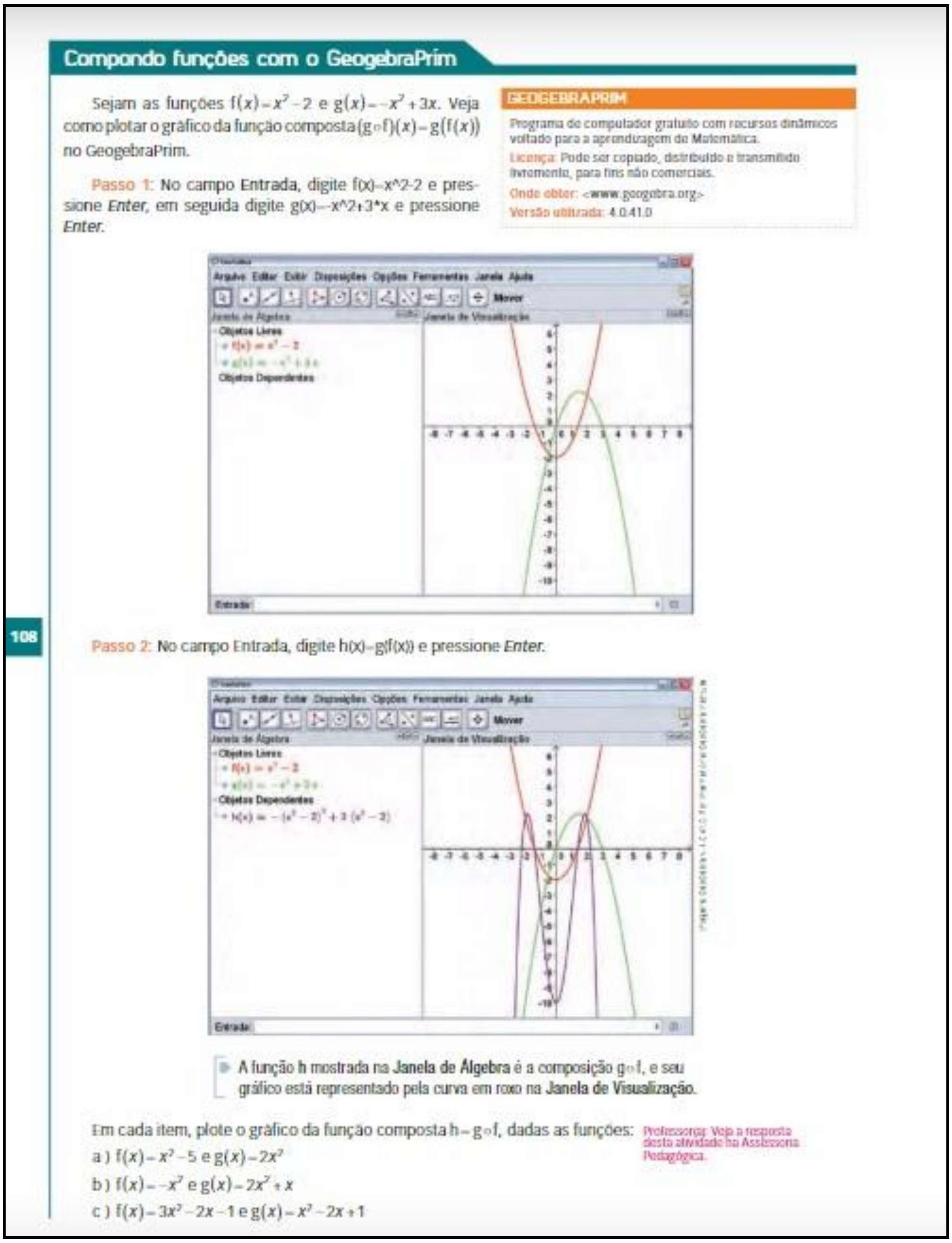
Exemplos:

- $f(x) = x^2 + 8x - 4$, em que $a = 1$, $b = 8$ e $c = -4$
- $g(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x$, em que $a = -2$, $b = -\frac{1}{3}$ e $c = 0$
- $h(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 1$, em que $a = 0{,}5$, $b = -5$ e $c = 1$
- $m(x) = -x^2$, em que $a = -1$, $b = 0$ e $c = 0$

Considere que, em certo lançamento a partir do solo, uma bola atinja 25 m de altura e percorra uma distância horizontal de 10 m, como indicado na imagem ao lado. A trajetória dessa bola pode ser representada pela função quadrática $f(x) = -x^2 + 10x$, em que $f(x)$ indica a altura atingida pela bola, em metros, e x, a distância horizontal percorrida, também em metros.

Galileu Galilei (1564-1642), astrônomo e matemático italiano, foi o primeiro a perceber que no lançamento oblíquo de um objeto, desconsiderando a resistência do ar, o movimento por ele realizado se assemelha a uma parábola.

Figura 3: Balestri, 2016, p. 88.



Compondo funções com o GeogebraPrím

Sejam as funções $f(x)=x^2-2$ e $g(x)=-x^2+3x$. Veja como plotar o gráfico da função composta $(g \circ f)(x)=g(f(x))$ no GeogebraPrim.

GEOGEBRAPRIM

Programa de computador gratuito com recursos dinâmicos voltado para a aprendizagem de Matemática.

Licença: Pode ser copiado, distribuído e transmitido livremente, para fins não comerciais.

Onde obter: <www.geogebra.org>

Versão utilizada: 4.0.41.0

Passo 1: No campo Entrada, digite f(x)=x^2-2 e pressione *Enter*, em seguida digite g(x)=-x^2+3*x e pressione *Enter*.

Passo 2: No campo Entrada, digite h(x)=g(f(x)) e pressione *Enter*.

A função h mostrada na **Janela de Álgebra** é a composição $g \circ f$, e seu gráfico está representado pela curva em roxo na **Janela de Visualização**.

Em cada item, plote o gráfico da função composta $h=g \circ f$, dadas as funções:

Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

a) $f(x)=x^2-5$ e $g(x)=2x^2$

b) $f(x)=-x^2$ e $g(x)=2x^2+x$

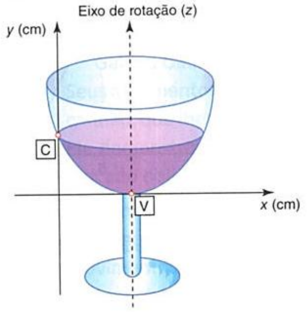
c) $f(x)=3x^2-2x-1$ e $g(x)=x^2-2x+1$

108

Figura 4: Balestri, 2016, p. 108.

Paiva (2015) emprega em seu livro definições e exercícios aplicados sobre as quadráticas, assim como os dois exemplares mencionados anteriormente. A diferença entre ele e os demais é que ele destina a tecnologia na matemática em um pequeno bloco no meio do capítulo. Tal fato é exemplificado pela figura:

4 (Enem) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetro. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

a) 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

alternativa e

5 No mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções $y = x^2 - 3x + 2$ e $y = -x + 5$ e determine as coordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos.

(−1, 6) e (3, 2); ver Suplemento com orientações para o professor.

6 Esboce o gráfico da função.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, \text{ se } x \leq 4 \\ 7, \text{ se } 4 < x \leq 6 \\ x + 1, \text{ se } x > 6 \end{cases}$$

Ver Suplemento com orientações para o professor.

Resolva os *exercícios complementares* **1** a **6**.

CRIANDO PROBLEMAS

Inspirando-se nos exercícios propostos 2 a 4, elaborem e resolvam um problema sobre a função polinomial do 2º grau que envolva uma situação do cotidiano. Resposta pessoal.

CONECTADO

Usando o *Winplot*, programa de construção de gráficos já instalado no computador (veja a atividade *Conectado* na página 165 do capítulo 6), faça o que se pede.

a) Construa o gráfico de uma função polinomial do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, escolhendo quaisquer valores reais para a, b e c, com $a \neq 0$.

b) No mesmo plano cartesiano (ou seja, na mesma tela), construa o gráfico das funções:

I. $y = ax^2 + bx + c + 3$

II. $y = ax^2 + bx + c - 3$

III. $y = a(x + 3)^2 + b(x + 3) + c$

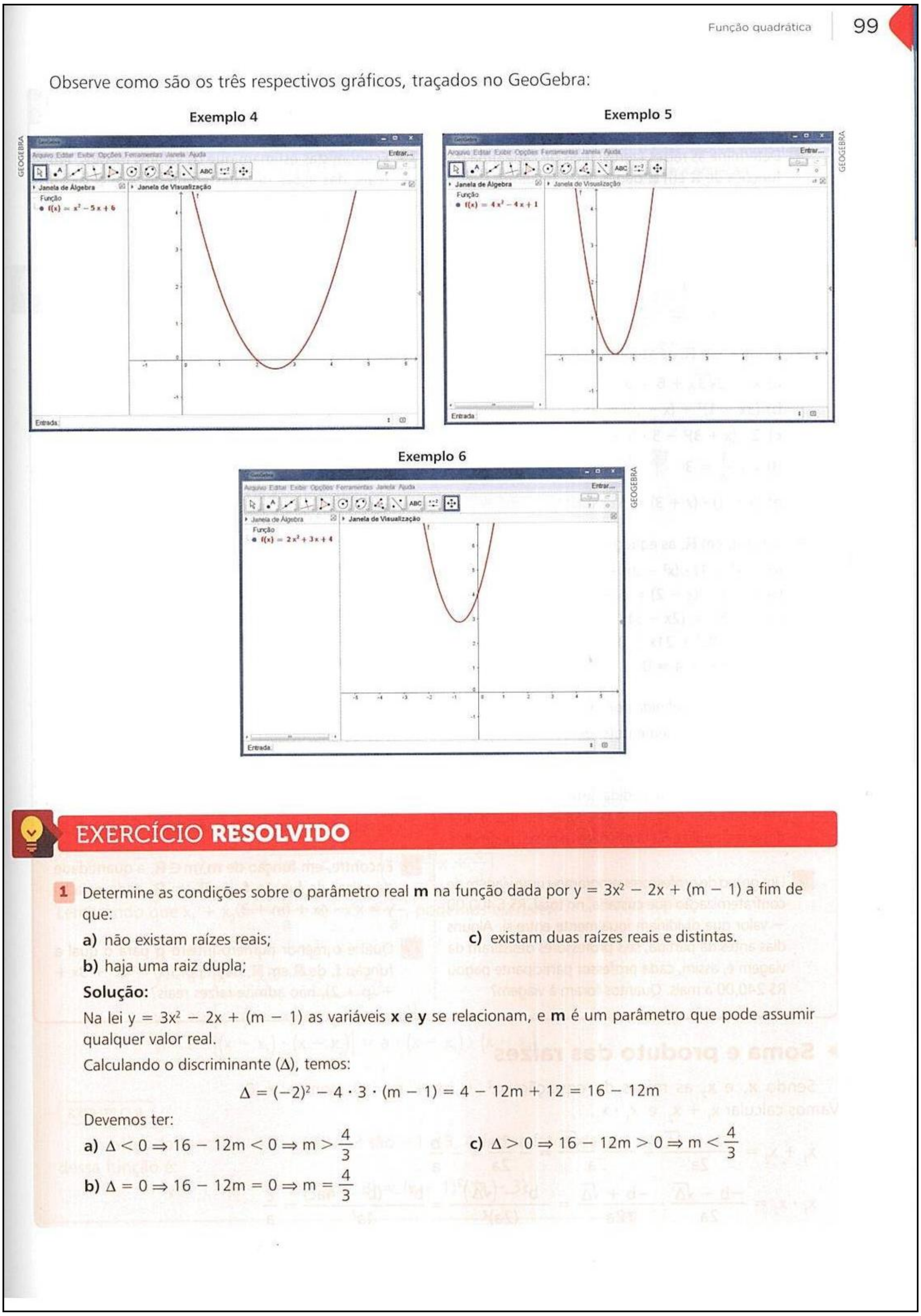
IV. $y = a(x - 3)^2 + b(x - 3) + c$

Para cada um dos subitens (I), (II), (III) e (IV), redija um texto explicando a transformação que sofreu o gráfico em relação ao gráfico original, construído no item **a**. Tente generalizar suas conclusões. Ver Suplemento com orientações para o professor.

Figura 5: Paiva, 2015, p. 184.

Como é observado, ele sugere a utilização do *software* Winplot para o leitor visualizar o que ocorre com o gráfico das funções quadráticas quando há alteração de seus parâmetros. Para que o mesmo construa e visualize a atribuição dos coeficientes na representação gráfica, o autor o indaga a refletir sobre o que aconteceu com os gráficos em relação ao construído na primeira atividade, em seguida, convida o leitor a tentar generalizar o que previamente foi pensado.

Iezzi (2016) não utilizou a tecnologia no estudo dos coeficientes. Em uma parte do capítulo ele utilizou o GeoGebra para a visualização de exemplos de funções. No restante, o conteúdo foi explicitado por definições, exemplos, problemas aplicados e exercícios.



Observe como são os três respectivos gráficos, traçados no GeoGebra:

Exemplo 4

Exemplo 5

Exemplo 6

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Determine as condições sobre o parâmetro real **m** na função dada por $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ a fim de que:

a) não existam raízes reais;

b) haja uma raiz dupla;

c) existam duas raízes reais e distintas.

Solução:

Na lei $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ as variáveis **x** e **y** se relacionam, e **m** é um parâmetro que pode assumir qualquer valor real.

Calculando o discriminante (Δ), temos:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m - 1) = 4 - 12m + 12 = 16 - 12m$$

Devemos ter:

a) $\Delta < 0 \Rightarrow 16 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{4}{3}$

b) $\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 12m = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

c) $\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 12m > 0 \Rightarrow m < \frac{4}{3}$

Figura 6: Iezzi, 2016, p.99.

Após a análise, percebe-se que o estudo das funções quadráticas com a tecnologia é evidenciado e estimulado com aderência ao feito nesta pesquisa apenas no livro de Dante

(2016), porém o autor apresenta a integração de tecnologia com o ensino de funções apenas no final do capítulo, assim como os outros autores. Quanto aos demais exemplares observados, mesmo com o avanço tecnológico, percebe-se que é destinado o espaço de uma página, sendo que a exploração dos coeficientes com tecnologia não consta em dois livros (Paiva, 2015 e Iezzi, 2016). Destaca-se assim a diferenciação da proposta desta pesquisa de integralizar tecnologia com ensino de funções quadráticas com o ensino abordado pelos livros didáticos apresentados.

A utilização do *software* GeoGebra segundo Borba et. al. (2014) afirmam que tal aplicação se aproxima ao uso de lápis e papel sobre o que é aprendido em matemática além de propiciar a "experimentação, visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo". (Borba et. al. 2014, p.73). Devido a isso ao fazer uso do *software* GeoGebra no ensino de funções, Rezende, Pesco e Bortolossi (2012, apud Borba et. al., 2014, p.48), afirmam

> No GeoGebra, pontos podem ser criados sobre gráficos de funções de modo que, ao movê-los, eles continuem sempre sobre o gráfico da função. Os valores das coordenadas desses pontos podem ser então recuperados e usados em cálculos ou na criação de outros elementos geométricos (pontos, segmentos e retas). Esse tipo de recurso permite ao usuário estudar (graficamente, algebricamente e numericamente) como, por exemplo, características locais da função (taxas de variação média e instantânea) mudam de acordo com a posição do ponto sobre o gráfico da função (REZENDE, PESCO e BORTOLUSSI, 2012, p.78).

Com vistas a garantir as possibilidades da construção do conhecimento por meio do aproveitamento dos instrumentos digitais atuais, Borba et. al. (2014) refletem que a experimentação deva fazer parte do processo de apreensão e aprendizagem das ideias matemáticas. Os autores destacam que é necessário planejar e implementar um "design experimental" (Borba et. al., 2014, p. 50) ao se realizar atividades de matemática. Nas palavras, dos autores "dessa forma, buscamos formar cenários de investigação matemática, ou seja, um ambiente heurístico, de descobertas, de formulação de conjecturas acerca de um problema e busca por possíveis e diversificadas soluções." (Borba et. al., 2014, p. 50). Com isso, após constatar que o ensino das funções quadráticas nos livros didáticos distancia-se da proposta das diretrizes curriculares nacionais, entende-se que propiciar ambientes convidaditos e estimulantes à construção do conhecimento e saberes por parte dos estudantes seja também o compromisso da presente pesquisa.

3.1.3 Trabalhos correlatos

Esta seção consiste numa revisão de literatura, feita à luz da busca, consulta e reflexão e exposição de pesquisas realizadas que versam o tema abordado, ensino de funções quadráticas por meio de mídias digitais. Os estudos consultados trazem em seu escopo contribuições para a Educação Matemática no conteúdo de Funções reais de variável real.

Giraldo, Guimarães e Muruci (2008) por meio da utilização do *software* Tabulae, analisaram o desenvolvimento das representações algébricas, gráficas e numéricas de funções. As atividades do minicurso envolviam a exploração dos esboços gráficos das funções reais no *software*. Os autores trazem uma opção de proposta didática para os professores realizarem em suas salas de aula. Sobre as atividades elaboradas:

> Ao longo dessas atividades os participantes serão levados à compreensão do processo de construção do gráfico de funções, sendo capazes de construir os seus próprios gráficos, utilizando as funcionalidades do ambiente. Esta construção envolve vários conceitos matemáticos, como translações e rotações, vetores, produto de escalar por vetor, lugar geométrico, parâmetros e variáveis, o que efetivamente contribuirá para um entendimento mais abrangente e aprofundado de diversos aspectos e propriedades relacionadas a sistema de coordenadas, funções e seus gráficos. (GIRALDO, GUIMARÃES e MURICI, 2008, p.3)

Caires e Nascimento (2012) em seu artigo realizaram uma pesquisa qualitativa com atividades sobre funções do primeiro e segundo graus também com a utilização do computador, fazendo uso do *software* Kmplot. Os autores refletem sobre o uso da mídia digital em sala de aula:

> O uso de diferentes esquemas se mostrou útil na assimilação de parte do conteúdo. Procurou-se através do suporte computacional, um esquema de trabalho que ajudasse aos alunos romperem a barreira da representação, que eles encontraram no momento de fazer a representação gráfica de polinômios de primeiro grau e também dos polinômios de segundo grau. Mesmo visualizando no quadro os resultados mostrados através de exemplos, há uma dificuldade apresentada pelos discentes na representação das funções afim e quadrática a partir da plotagem. (CAIRES e NASCIMENTO, 2012, p.407)

Santos, Silva e Soares (2012) em seu estudo buscaram por meio do uso do *software* WinPlot ensinar conteúdos matemáticos. Os autores elaboraram uma sequência de atividades com o *software* a qual propunha a análise dos parâmetros das funções afim e quadrática. Sobre a contribuição que a pesquisa tem, os autores mencionam:

> Os resultados dessa pesquisa comprovam que o computador é uma importante ferramenta de motivação, e mostra quanto é importante inovar nas aulas para torná-las mais atrativas e dinâmicas. O dinamismo oferecido pelo software contribuiu significativamente para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos participantes. (SANTOS, SILVA e SOARES, 2012, p.204)

Miragem e Rocha (2010) em seu trabalho de investigação realizaram atividades sobre funções quadráticas. Durante as aulas, os autores trabalharam com o estudo dos coeficientes da função quadrática utilizando o *software* Winplot. Após aplicaram questões que são abordadas em vestibulares de duas maneiras: um pré-teste, testando os conhecimentos prévios dos estudantes sobre as funções e um pós-teste, considerando os conhecimentos subsequentes. Sobre o uso das tecnologias para o ensino de matemática, os autores refletem:

> Constatamos que a utilização do software Winplot facilitou o entendimento do conteúdo, de modo que o rendimento no pós-teste foi significativo, em relação ao pré-teste. Acreditamos que iniciativas como essas são importantes para que o ensino da Matemática cumpra o seu papel na formação cognitiva e sociocultural dos nossos educandos. (MIRAGEM e ROCHA, 2010, p. 9)

Bona e Lutz (2015) em um estudo realizado num curso de especialização em Educação Matemática pesquisaram sobre o ensino do conteúdo gráficos da função quadrática por meio da utilização de tecnologias e a recepção dos discentes quanto à proposta. Trabalhando com comparações entre diversos gráficos da função quadrática e o estudo dos coeficientes da função, com o auxílio do *software* Winplot a atividade foi construída. As atividades consistiam no professor mediador instigar os alunos e indicar os comandos a serem incluídos no *software*. Ao final das atividades a professora coletou a opinião dos estudantes avaliando as atividades.

Colet (2015) utilizou a engenharia didática para uma pesquisa com foco no desempenho dos coeficientes da função quadrática por meio da aplicação do *software* Winplot. “(...) é importante que o professor se alie a diferentes recursos e metodologias de ensino para poder abranger a diversidade de alunos existentes em uma mesma turma, considerando suas dificuldades e limitações.” (Colet, p.10, 2015). Sobre o uso das tecnologias, em suas conclusões a autora menciona que a “utilização dessas ferramentas tem se mostrado essencial para ampliar o conhecimento de conteúdos em estudo e desenvolver nos alunos novos hábitos de pensamento, autonomia e poder de investigação na realização das atividades.” (Colet, p.20, 2015).

Em um estudo que investigou e analisou atividades de dois livros didáticos sobre a introdução de funções quadráticas especificando seu diagnóstico nas representações gráficas e algébricas dessas funções Lopes (2013) verificou que há uma descrição sobre as duas representações, e constatou que houve a ausência da conversão entre elas. Então, a partir de cada atividade do livro didático analisado, a proposta de pesquisa consistiu em alternativas de atividades realizadas com o *software* que utilizam o estudo dos parâmetros das funções quadráticas.

Araújo e Silva, (2016) relatam sobre a preocupação dos docentes em tornar visível aos estudantes conteúdos de maior abstração da matemática. Nesse sentido, foi elaborada uma proposta de atividade com a utilização do *software* GeoGebra para o ensino de Funções Quadráticas. Sobre o uso das tecnologias e a relação disso com o fazer docente os autores contribuem:

> A tecnologia em sala de aula é grande aliada dos professores no que diz respeito ao processo de ensino aprendizagem, o uso dos *softwares* matemáticos, faz o docente refletir sobre sua própria prática, ou seja, levar o docente repensar suas atitudes. É preciso que o professor tenha vontade e desejo de mudança. (ARAÚJO e SILVA, 2016, p. 5).

Quanto à criação de materiais para o ensino de matemática Bortolossi, Pesco e Rezende (2012) em seu artigo focaram na utilização do *software* GeoGebra para oportunizar uma metodologia de trabalho dinâmico do ensino de funções afins, quadráticas e exponenciais. As atividades sobre os três tipos de funções envolviam o estudo das variações de seus coeficientes. Ainda nessa temática, Silva (2014) em seu estudo buscou introduzir a utilização do *software* GeoGebra no ensino de funções quadráticas. Foram realizadas atividades focadas no estudo dos gráficos e coeficientes.

Medeiros e Schardosim (2011) trataram sobre uma proposta didática para a exploração do conceito de funções quadráticas com o auxílio do software GeoGebra. O objetivo da proposta foi estimular a curiosidade, a imaginação e a construção de diferentes caminhos para a resolução de problemas e o desenvolvimento das capacidades de abstração. Foram realizadas atividades com problemas de área e a construção das leis que expressavam as funções. Em seguida os estudantes interagiram com o *software* e os coeficientes das funções quadráticas. A utilização do software no ensino da função quadrática oportunizou a construção dos conceitos matemáticos apresentados nas atividades, na qual “o aluno trabalha com o processo algébrico e também geométrico das funções do tipo $y= ax^2+bx+c$ (...)” (Medeiros e Schardosim, ano, p.10).

Amaral *et al* (2014) descrevem uma atividade utilizando o *software* GeoGebra no ensino de funções quadráticas com ênfase na representação gráfica. Em cada atividade realizada, os estudantes analisaram os esboços gráficos obtidos com ênfase nas raízes das funções. Sobre o papel do professor no processo os autores refletem que o mesmo “tem papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem já que apenas com informática o aluno não conseguiria construir o conhecimento de maneira sólida. O professor deve então ser o mediador de todo processo de construção do conhecimento.” (Amaral, *et al,* p. 11, 2014)

Ricardo (2012), em sua dissertação traz uma proposta para o ensino de funções quadráticas, utilizando o *software* GeoGebra. O autor teve como objetivo desenvolver, analisar e avaliar uma proposta de ensino mediada pela tecnologia no estudo de funções quadráticas. A análise dos dados foi feita por atividade. Em relação ao papel de cada coeficiente, os estudantes, com suas palavras respondiam o que acontecia com o gráfico da função à medida que alteravam os coeficientes. O autor entende que a proposta “se enquadra no que planejamos não um trabalho que tenha finalidade de ensinar o conteúdo, mas um trabalho que sirva como apoio.” (Ricardo, 2012, p.110). O mesmo ainda conclui com a pesquisa que os discentes estão aptos a conhecer algo novo, um método diferenciado perante o ensino da matemática.

E por fim, porém não menos importante, a pesquisa de mestrado de Sousa (2014) abordou o ensino das funções quadráticas por meio da utilização do *software* GeoGebra. O autor propôs sete atividades envolvendo a representação gráfica das funções e o estudo de seus parâmetros. Foram atividades com a mediação do professor o qual convidava os estudantes a elaborar conjecturas e hipóteses sobre a funcionalidade dos parâmetros nas funções quadráticas. A partir da prática de ensino realizada e que valorizou a participação dos estudantes, sobre a construção dos conhecimentos matemáticos o autor contribui:

> No momento da realização das atividades, ficou claro que o interesse dos alunos é bem maior quando estes são chamados a participar na construção de seus próprios conhecimentos e isto acontece quando se parte de um assunto interessante e instigante que faça parte de seu cotidiano e por meio do mesmo os conceitos são construídos. Além disso, foi possível perceber que o conhecimento em construção desafia a escola a aliar as suas atividades inovadoras com a educação, de forma a utilizá-las dentro de suas condições e limitações, no sentido de melhorar o ensino-aprendizagem. (SOUSA, 2014, p.72)

Os estudos apresentados nessa revisão de literatura evidenciam a importância da utilização de tecnologias no ensino de funções e como elas influenciaram na aprendizagem dos estudantes. Parte das pesquisas consultadas posiciona o professor como mediador do conteúdo abordado. Entende-se que um estudo de matemática guiado pela tecnologia e mediado pelo professor possa ser significativo e profícuo na construção de conceitos e ideias matemáticas. Por isso, a elaboração de uma sequência de atividades sobre funções quadráticas incluindo a tecnologia digital combinado com a mediação do professor é a proposta desta pesquisa.

3.2 PROCESSOS COGNITIVOS

Esta seção baseia-se nas construções sobre cooperação de Jean Piaget e suas implicações na aprendizagem dos estudantes. Ainda apresenta-se uma revisão de literatura sobre esse conceito, aderente às aulas de matemática.

3.2.1 Cooperação

> "(...) o conhecimento humano é essencialmente coletivo e a vida social constitui um dos fatores essenciais da formação e do crescimento dos conhecimentos pré-científicos e científicos." (PIAGET, 1973, p. 17).

A partir desse trecho inicia-se essa seção. O conceito de cooperação é central para a construção e análise do experimento ocorrido em sala de aula e apresentado neste texto. A apresentação e debate centra-se nas ideias propostas por Piaget, precursor no desenvolvimento da teoria da equilibração e da Epistemologia Genética.

Essa pesquisa pretende após a realização do experimento de ensino em sala de aula realizar uma análise sobre como a cooperação entre os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, sujeitos dessa pesquisa, influencia na construção de conceitos e ideias matemáticas. Portanto, as articulações entre os fazeres individuais e coletivos dos estudantes envolvidos na presente pesquisa constituem um elemento de incomensurável importância para o exercício da reflexão sobre o fazer docente em sala de aula. Sobre cooperação, Piaget (1973) apresenta:

> A cooperação consiste ela mesma num sistema de operações, de tal forma que as atividades do sujeito se exercendo sobre os objetos, e as atividades dos sujeitos quando agem uns sobre os outros se reduzem na realidade a um só e mesmo sistema de conjunto, no qual o aspecto social e o aspecto lógico são inseparáveis na forma como no conteúdo. (PIAGET, 1973, p. 103)

A cooperação "é operar em comum, isto é, ajustar por meio de novas operações (...) de correspondência, reciprocidade ou complementaridade." (PIAGET, 1973, p. 105). Ou seja, cooperação em uma discussão de um grupo de estudantes sobre um determinado assunto matemático, por exemplo, pode ser exercida pela troca de ideias e pensamentos desses estudantes sobre o mesmo. Além disso, Bona (2012) salienta:

> Quando as ações dos estudantes são ajustadas umas às outras, parte-se do já realizado pelo colega, por meio da aceitação ou refutação da ação alheia. Essa integração ou negação ocorre mediante reflexionamentos elevados a um patamar mais elevado a cada interação cooperativa. (BONA, 2012, p. 62)

Dentro da sala de aula, quando os estudantes agem em atividades em conjunto, em atividades que incitem discussões e reflexões entre os mesmos, emerge a cooperação. Ela encontra-se implícita e a cada ideia posta na resolução das ações entre esses indivíduos possivelmente ocorrem momentos de aprendizagem. Em relação à aprendizagem,

> a cooperação é um processo de aprendizagem criador de realidades novas, de novas perspectivas sobre um assunto de matemática, por exemplo, e não apenas um meio de trocas entre estudantes. Esse processo é viabilizado pelas tecnologias digitais em atividades sincrônicas e assincrônicas. (BONA, 2012, p. 63)

Essa criação de novas realidades oportuniza aos estudantes a reflexão e "o desenvolvimento das operações racionais supõe uma cooperação entre os indivíduos liberando-os de seu egocentrismo intelectual inicial." (PIAGET, 1973, p. 83).

Sobre a colaboração, um conceito de Piaget aqui subjacente e com sentido complementar ao de cooperação, pode-se afirmar que a mesma equivale a um agrupamento de ações em prol de um objetivo comum entre sujeitos. Nas palavras de Piaget (1973):

> Eis dois indivíduos que se propõem a construir cada um, sobre as duas bordas de um riacho, uma escada de pedras em forma de trampolim, e ligar estas duas escadas por uma prancha horizontal formando uma ponte. Em que vai consistir sua colaboração? A ajustar umas às outras algumas ações, das quais umas são semelhantes e se corespondem por suas características comuns (...), das quais as segundas são recíprocas ou simétricas (...) e das quais as terceiras são complementares. (PIAGET, 1973, 104)

O que difere cooperação e colaboração é que na primeira o trabalho é em conjunto e todos os sujeitos operam juntos em correspondência, reciprocidade ou complementaridade. Na colaboração, os sujeitos trabalham com finalidade comum, porém não são explícitos às colaborações dos outros, ou seja, cada sujeito realiza uma parte da tarefa. Contudo, ao cooperarem, cada sujeito pode exercer a colaboração em outro sujeito[2].

Camargo e Becker (2012, p. 529) discorrem sobre a história da cooperação segundo Piaget. Esse percurso, tal como apresentado pelos autores, é dividido em quatro períodos. Primeiro há o pensamento infantil: "a cooperação é explicada como um tipo de relação que permeia a autonomia moral.". Em um segundo momento o pensamento precede a linguagem: a cooperação é encontrada "na explicação do desenvolvimento do egocentrismo para a

---

[2] Sobre a diferença entre cooperar e colaborar sugere-se assistir ao seguinte vídeo, de autoria da profa. Dra. Aline Silva de Bona. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=tl-DD5gvaTQ> Acesso em novembro de 2017.

descentração cognitiva.”. No terceiro período mostra-se presente o conceito de operação: “cooperação é relacionada com coordenação de pontos de vista.”. E por fim, no quarto período a “cooperação está relacionada à explicação da abstração reflexionante”.

> O estudo contribui para uma melhor compreensão das relações entre os fatores individuais e sociais no desenvolvimento mental bem como para evitar uma dicotomia entre a dimensão afetiva e a dimensão cognitiva desse desenvolvimento, na interpretação das ideias de Piaget. (BECKER e CAMARGO, 2012, p.547)

Piaget em suas notas discorre sobre o trabalho em equipes nas escolas. Ele critica a visão de senso comum de que a escola seja considera um local de “transmissão do conhecimento”.

> Sendo o mestre detentor dos conhecimentos exatos às técnicas a adquirir, o ideal é a submissão da criança a sua autoridade e todo contato intelectual das crianças entre si não comporta senão perda de tempo e riscos de deformações e erros. (PIAGET, 1993, p.3)

A dificuldade de o professor fazer o aluno compreendê-lo. “A criança não é um ser passivo, do qual se trate de rechear o cérebro, mas um ser ativo, cuja tendência à pesquisa espontânea tem necessidade de alimentos.” (PIAGET, 1993, p. 3). A razão e seu elemento social de cooperação, “a cooperação é indispensável à elaboração da razão.” (PIAGET, 1993, p.5). Ou seja, nota-se que a cooperação seja um elemento indispensável na produção e aperfeiçoamento dos conhecimentos. Para evoluir é necessário, não suficiente, cooperar. Nas palavras do autor:

> A cooperação não age somente sobre a tomada de consciência do indivíduo e sobre o seu senso de objetividade, mas termina, afinal, por constituir toda uma estrutura normativa que remata sem dúvida o funcionamento da inteligência individual, mas completando-a no sentido da reciprocidade. (...) A cooperação é verdadeiramente criadora, ou o que vem a ser o mesmo, constitui a condição indispensável para a completa formação da razão. (PIAGET, 1993, p.8).

Assim, pode-se compreender que colaboração e cooperação juntamente exercidas em ações coletivas, contribuem para reflexões e posteriormente a formação de conhecimentos sobre determinados fatos. Dessa forma, considera-se importante investigar tais concepções dentro da sala de aula, já que a mesma pode ser considerada um ambiente coletivo e social.

3.2.2 Trabalhos correlatos

Esta seção compõe-se de uma análise e apresentação de trabalhos acadêmicos realizados e que exploram as ideias de Jean Piaget sobre colaboração e cooperação. Os estudos realizados apresentam reflexões sobre o trabalho coletivo e de que forma tais práticas educativas possam contribuir na construção de conceitos.

Sobre a importância de se conhecer as ideias de Piaget, Gomes e Ghedin (2012) em seu estudo apresentam uma súmula da teoria proposta pelo autor e como esta pode ser importante na execução do trabalho do professor. É um estudo formado por uma revisão de literatura sobre a composição intelectual da criança durante sua educação escolar. Os autores decorrem sobre tópicos da teoria de Piaget e um desses tópicos denomina-se a teoria de Piaget na sala de aula:

> em sala de aula é necessário respeitar o momento do sujeito, o instante em que o estudante está pronto para aprender determinado conteúdo, possibilitando a ele experiências que possa agir ativamente no processo, conseguindo um equilíbrio entre o que já conhece e aquilo que é novo e que precisa conhecer por meio da interação com outros sujeitos. (GHEDIN e GOMES, 2012, p. 8)

Treviso (2013) apresenta um parecer da percepção de relações sociais no trabalho de Piaget assim como as consequências dessa visão para a educação escolar. Em sua pesquisa, a autora conclui que “o enfoque dado por Piaget às relações sociais resulta em implicações para a educação escolar no sentido de *secundarizar* a função do professor e defender que o aluno deva aprender a aprender.” (TREVISO, 2013, p.13). Sobre a importância da prática emancipatória, com foco no desenvolvimento da autonomia dos estudantes, e que valoriza acima de tudo o trabalho cognitivo oriundo da ação do sujeito sobre o mundo concreto e de ideias em que vive, a autora contribui:

> Sendo assim, uma prática educativa que se pretenda transformadora, que busque a atuação de indivíduos críticos, não pode se pautar numa concepção de que o desenvolvimento cognitivo e psicológico acontece como resultado de um processo interno, baseado simplesmente numa relação entre indivíduo e meio ambiente. (TREVISO, 2013, p.67)

Silva, Ribeiro e Silva (2013) exibem o resultado de um estudo ligado ao uso tecnologias de informação e comunicação (TIC) que mostra como os estudantes de graduação agem colaborativamente e cooperativamente possibilitando a aprendizagem em comunidades de prática. Os autores utilizaram a ideia de cooperação apresentada por Piaget, na qual a mesma possibilitou: “A cooperação dos membros enquanto estavam inseridos no contexto da disciplina possibilitou que as discussões sobre os assuntos fossem enriquecidos com elementos trazidos pelos próprios alunos, durante as aulas do semestre.” (SILVA, RIBEIRO e SILVA, 2013, p.13).

Em seu artigo, Bona, Basso e Fagundes (2011), apresentam os resultados parciais de uma pesquisa de doutorado com estudantes de Ensino Médio, explicando o local de aprendizagem digital para a Matemática utilizando conceitos de cooperação e colaboração para analisar como aprender a aprender a matemática, onde os autores concluem que "Os estudantes fazem uso da cooperação para solucionar problemas cognitivos de forma qualitativa." (BASSO, BONA e FAGUNDES, 2011, p.6).

Em outra pesquisa, Bona *et. al.* (2014) apresenta um fragmento de uma pesquisa-ação sobre o espaço de aprendizagem digital da matemática posto à rede social Facebook com estudantes do segundo ano do ensino médio. A pesquisa entre outros aspectos objetivou mostrar que a rede social citada é um espaço de aprendizagem digital que permite o aprender a aprender a matemática por cooperação. A inferência, a partir do que ocorreu em termos de pesquisa foi que a "rede social Facebook é um espaço de aprendizagem digital, que possibilita por meio das tecnologias digitais online o aprender a aprender matemática por ações cooperativas." (BONA et. al., 2014, p.14). Agrega-se a isso a seguinte reflexão de Bona *et. al.*, (2011):

> Salienta-se, (...), o acompanhamento dos progressos na abstração dos estudantes nos processo de aprendizagem cooperativa em ambiente digital como possibilidade de avaliação, como método que leve em conta o desenvolvimento humano, mais do que o desempenho baseado em condutas pontuais ou isoladas. Trata-se de uma perspectiva que privilegia a cooperação como prática complexa, desencadeada na solidariedade dos grupos como meio de progresso também intelectual. (BONA et. al., 2011, p.8)

Destacados esses trabalhos os quais usam como aporte teórico para a construção da pesquisa as ideias de Piaget sobre colaboração e cooperação, evidencia-se a relevância de utilizar esses dois conceitos na análise do experimento de ensino ocorrido na presente pesquisa. Ademais, as pesquisas correlatas constituem-se num recorte que, para todos os efeitos, demonstraram resultados positivos de que a ações cooperativas auxiliam no aprender do sujeito.

Portanto, entende-se que esta pesquisa procurou realizar uma sequência de atividades sobre funções quadráticas com a utilização da tecnologia digital. Com intuito de fazer-se provocar a cooperação entre os estudantes e a partir da mediação da professora pesquisadora fosse possível oportunizar a construção do conhecimento do estudante.

4 PROCESSOS METODOLÓGICOS

Nesta seção apresentam-se características da pesquisa qualitativa, indicam-se os sujeitos e o contexto da pesquisa, a sequência de atividades aplicada e os instrumentos utilizados para a coleta dos dados apresentados como materiais e métodos. As atividades foram elaboradas com o foco no estudo das funções quadráticas por meio da variação dos parâmetros utilizando o *software GeoGebra Graphing Calculator*. Além da exploração com a tecnologia, cada questão foi construída com o intuito de provocar, a partir do trabalho coletivo, as reflexões dos participantes buscando a resposta da pergunta central desta pesquisa: *Como a cooperação influencia na aprendizagem das funções quadráticas por meio do estudo dos seus coeficientes?*

4.1 Metodologia

Para construir uma efetiva resposta da pergunta central dessa pesquisa e a realização dos objetivos gerais e específicos, escolheu-se desenvolver uma metodologia que visasse esclarecer o problema em estudo. Para isso o caminho escolhido foi usar o conceito de pesquisa qualitativa.

Sobre os aspectos da pesquisa qualitativa:

> Os aspectos essenciais da pesquisa qualitativa consistem na escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos. (FLICK, 2009, p.23)

Além disso, Bodgan e Biklen citam as cinco características de uma pesquisa qualitativa, as quais serão explanadas a seguir.

Característica 1: A fonte dos dados é o ambiente natural, tomando o investigador como o objeto principal:

> Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. (...) (Metz, 1978) Os investigadores qualitativos assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre, deslocando-se, sempre que possível, ao local de estudo. (BODGAN e BIKLEN, 1994, p.48)

Característica 2: A pesquisa qualitativa é descritiva, ou seja, "os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitado, tanto quanto o possível, a forma em que os dados foram registrados ou transcritos." (BODGAN e BIKLEN, p.48, 1994).

Característica 3: Em pesquisa qualitativa há predominantemente "Interesse no processo da pesquisa do que pelos resultados" (BODGAN e BIKLEN, p.49, 1994).

Característica 4: Há uma tendência de análise dos dados de forma indutiva:

> Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar o infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. (...) Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes. (BODGAN e BIKLEN, 1994, p.50).

Característica 5: Destaca-se a importância do significado: "Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas." (BODGAN e BIKLEN, 1994, p.50).

A pesquisa qualitativa se adéqua a essa pesquisa, já que se pretende analisar como a colaboração e cooperação influenciam na aprendizagem sobre funções quadráticas dos estudantes observando os tipos de discussões matemáticas que emergem ao trabalharem em grupos. O papel do investigador durante a pesquisa foi essencial, dado que ele esteve presente em todo experimento, coletou os materiais escritos dos estudantes que influenciaram na investigação e registrou em gravações todas as discussões dos sujeitos da pesquisa, as quais foram os principais objetos de análise, sendo esses dois de caráter descritivo e de extrema importância no resultado da pesquisa.

Dessa maneira, a coleta dos materiais escritos e o registro de todas as discussões dos sujeitos em áudios proporcionam a essa pesquisa perspectivas distintas de dados similares. Assim, oportuniza-se a combinação de diferentes métodos de recolhimento de dados que consolidam o resultado dessa pesquisa.

4.2 Sujeitos e contexto da pesquisa

A sequência de atividades foi aplicada durante o período da disciplina de Estágio em Educação Matemática III (EDU02X15) da pesquisadora. No contexto, os estudantes já haviam começado a estudar sobre a função afim, a próxima seria a função quadrática. A escola, lócus da pesquisa, foi o Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. A turma participante do experimento era uma turma de Ensino Médio regular do primeiro ano. A faixa etária do grupo estava entre os 15 e 17 anos.

A escola dispõe de laboratório de informática com 20 máquinas e todas com acesso à internet. Porém, devido à lotação da sala de informática da escola durante a prática de estágio III da pesquisadora, foi necessário pensar em uma alternativa para tornar exequível a sequência de atividades. Como a escola tem rede *Wireless* de internet, os estudantes poderiam utilizar o celular para fazer o download do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*, que dispõe de interface para esboçar gráficos de funções reais. O aplicativo pode ser baixado na loja de aplicativos de *smartphones*. Na figura 7 mostra-se o *layout* do aplicativo depois de instalado no celular:

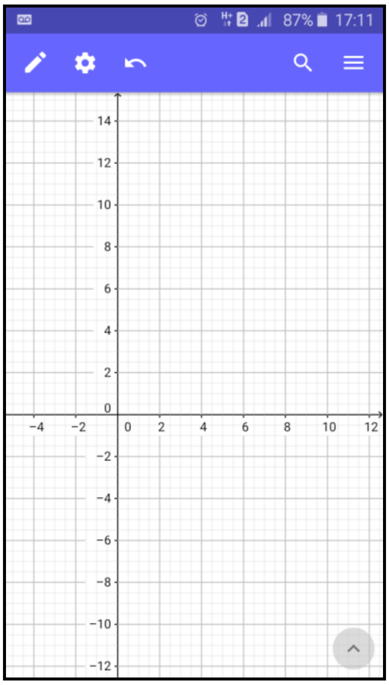


Figura 7: Layout do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. Fonte: arquivo pessoal.

Anteriormente ao período de docência, em cumprimento ao estágio, foi observado nessa turma que a maioria dos estudantes possuía celular. Com isso, foi solicitado a um aluno de cada grupo instalar o aplicativo em seu dispositivo e assim a prática de experimentação e execução da sequência de atividades pôde ser realizada.

4.3 Materiais e métodos

Ao pesquisar sobre como a colaboração e a cooperação poderiam influenciar na aprendizagem de funções quadráticas, pretendeu-se explorar como tal influência pudesse ocorrer por meio do trabalho em grupo na sala de aula. Seguindo as características da pesquisa qualitativa, planejou-se desenvolver uma sequência de atividades sobre funções quadráticas por meio do estudo de seus coeficientes utilizando o *software GeoGebra*

Graphing Calculator. Os materiais coletados são os documentos e áudios das aulas produzidos pelos estudantes. Para análise escolheu-se dois grupos para a realização da transcrição das gravações. A escolha de um determinado número de grupo descende da citação de Bodgan e Biklen (1994, p. 173):

> Sobre as transcrições de entrevistas: “pense curto”. (...) arranje um número razoável de sujeitos e gaste um conjunto de tempo em cada entrevista que faça sentido em termos do trabalho envolvido na sua transcrição. Você não quer que o respondente divague por diversos campos, mas que se centre numa área particular.

Durante a pesquisa buscou-se coletar dados com intuito de alcançar os objetivos traçados no início dessa pesquisa. Bogdan e Biklen (1994, p. 149) enunciam a relevância desses dados:

> Os dados são simultaneamente as provas e as pistas. Coligidos cuidadosamente, servem como fatos inegáveis que protegem a escrita que possa ser feita de uma especulação não fundamentada. Os dados ligam-nos ao mundo empírico e, quando sistemática e rigorosamente recolhidos, ligam a investigação qualitativa a outras formas de ciência. Os dados incluem os elementos necessários para pensar de forma adequada e profunda acerca dos aspectos da vida que pretendemos explorar.

Seguindo a linha de raciocínio dos autores, os dados a serem coletados são as notas de campo contendo anotações do professor mediador/investigador e áudios das aulas que foram analisadas. Dois tipos de informações compõem as notas de campo, segundo Bogdan e Biklen (p. 150, 1994). Um é descritivo contendo descrições de imagens por escritos, pessoas, ações e conversas. Todos esses dados são observados pelo professor mediador/ investigador. O outro aspecto dessas notas é de cunho reflexivo que inclui as opiniões do observador.

Além disso, nessa seção apresentam-se as atividades aplicadas nessa pesquisa e o cronograma em que elas aconteceram. Elas foram elaboradas de acordo com o que foi proposto na metodologia. Cada um dos exercícios versava estimular discussões, as quais gerariam reflexões por parte dos estudantes.

Data da atividade	**Duração**	**Atividade**
05/09/2017	1h e 30min	Variação dos parâmetros
08/09/2017	1h e 30min	Zeros da função
12/09/2017	1h e 30min	Pontos de máximo/mínimo
15/09/2017	1h e 30min	Pontos de máximo/mínimo

Quadro 1: Distribuição da sequência de atividades executadas.

4.3.1 Atividade 1: Variação dos parâmetros

A primeira atividade (Apêndice 1) iniciou-se com um breve manual sobre a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. As instruções foram úteis para a realização dos exercícios. A atividade seguiu com uma definição sobre a função quadrática e iniciaram-se os questionamentos.

As atividades seguiram-se após os estudantes inserirem no campo de entrada a função genérica: $f(x) = ax^2+bx+c$. A primeira questão objetivou que os participantes conseguissem entender o papel de cada parâmetro no gráfico da função, por meio das variações de a, b e c utilizando a ferramenta controle deslizante do aplicativo.

A segunda questão exigiu que os estudantes já tivessem compreendido quais os parâmetros que acompanham as variáveis da lei da função e indiquem quais são eles. A última questão forneceu o gráfico e pediu que os sujeitos encontrassem os parâmetros que formam a lei de cada um. A resolução dessa questão exigiu que os estudantes soubessem resolver sistemas de equações, pois para encontrar os parâmetros a e b com o conhecimento recentemente explorado, necessitou tal método de resolução. Cabe destacar que esse método pode não ser único, pois cada grupo pode ter seu meio particular de resolver a questão.

Todas as questões elaboradas, dessa primeira atividade, incitavam cooperações, as quais a partir de colaborações desenvolveu-se o exercício da autonomia dos estudantes, o trabalho em conjunto e a atribuição da tecnologia para promover a construção do conhecimento sobre o papel de cada parâmetro no gráfico da função quadrática. Desejou-se que os participantes, por meio do trabalho coletivo conseguissem conjecturar e emergir discussões relevantes no desenvolvimento da atividade.

4.3.2 Atividade 2: Zeros da função

A partir da definição dos zeros da função quadrática, no início dessa segunda atividade (Apêndice 3) os estudantes analisaram os gráficos e identificaram as raízes de cada um. Em cada função da questão 1, é possível encontrar os zeros a partir da análise gráfica, sem ser necessário efetuar cálculos.

Na questão 2, objetivou-se que eles analisassem cada gráfico e refletissem se é possível encontrar os zeros da função sem efetuar cálculos e na questão 3, as raízes são as mesmas da questão 1, desejando que eles já explorassem a relação entre essas duas questões. Essa relação evidenciou-se na resposta da questão 4. Após as discussões e o conhecimento explorado durante as questões anteriores, na questão 5 eles aplicaram o que entenderam no encontro dos zeros da função e tentaram indicar a lei da função que forma cada gráfico.

Nessa atividade, objetivou-se que a partir das atividades exploradas com o uso do *GeoGebra* móvel, os estudantes conseguissem construir conjecturas e aplicassem o que entenderam na questão 5. Aspirou-se que eles encontrassem duas formas de formar a lei das funções quadráticas, uma pode ser por sistema de equações com dois pontos escolhidos arbitrariamente no gráfico e a outra pelo encontro das raízes, pela forma fatorada.

4.3.2 Atividade 3: Pontos de máximo/mínimo

Essa atividade (Apêndice 4) foi composta de seis questões sobre os conceitos de pontos mínimo e máximo de uma função quadrática. O objetivo da primeira questão foi que os estudantes percebessem que dados dois valores *x'* e *x''*, definidos pela questão, os mesmos podem ter a mesma *f(x)*, ou seja, *f(x') = f(x'')*. Essa atividade explorou a simetria da parábola.

Na questão 2, os estudantes já tendo explorado a simetria da parábola, deveriam encontrar as coordenadas dos pontos de máximo ou mínimo de cada gráfico esboçado no GeoGebra móvel. Objetivou-se nessa questão que os participantes conseguissem construir conjecturas de como calcular os pontos máximo/mínimo dos gráficos.

Aspirou-se que os estudantes conseguissem encontrar os pontos de máximo/ mínimo, na questão 3, desejou-se que os sujeitos refletissem sobre a questão: toda parábola possui ponto de máximo/ mínimo? Nessa questão eles deveriam argumentar defendendo sua resposta.

Nas questões 4 e 5, objetivaram-se que os estudantes percebessem de que há infinitas parábolas com mesmo ponto de máximo/ mínimo. Por meio da análise de que os parâmetros da função variam, e de que podem variar mantendo os mesmos pontos de máximo/mínimo.

A questão 6 explorou o conhecimento dos estudantes da parábola e o papel dos parâmetros no gráfico. Assim, eles deveriam concluir que somente o parâmetro *a* possibilita a existência da parábola com seus pontos de máximo/ mínimo.

Assim, desejou-se nessa aula que os estudantes manipulassem e refletissem sobre a simetria da parábola. A partir disso, trabalhando em conjunto, exercendo colaboração e cooperação a utilização do *software GeoGebra Graphing Calculator* buscou além das investigações das atividades propostas, realizar o exercício e desenvolvimento da autonomia dos participantes.

5 ANÁLISES DO EXPERIMENTO

A análise das atividades foi feita na ordem em que as mesmas foram aplicadas. Apresentam-se os resultados do experimento por meio das transcrições de trechos de áudios de dois grupos da turma. Esses áudios exemplificam como eles conjecturaram e refletiram sobre as questões. Ademais, as produções escritas desses grupos foram coletadas e serão exibidas nessa seção.

A primeira atividade foi aplicada na turma 101, no dia 05 de setembro de 2017. No período da disciplina de Estágio em Educação Matemática III (EDU02X15), era a segunda aula da docência, ou seja, a pesquisadora já conhecia os estudantes. De início a turma foi disposta em grupos e cada grupo recebeu o material impresso com as atividades. A atividade 1, sobre a variação dos parâmetros foi a primeira a ser realizada.

5.1 Variação dos parâmetros

No primeiro momento, a professora pesquisadora entregou a primeira atividade e deixou que os estudantes a lessem e se familiarizassem com a mesma. Todos pareceram saber utilizar o *GeoGebra Gaphing Calcultor*, não demonstraram dúvidas. Houve discussões significativas e bons argumentos na resolução das questões. Foram analisadas questão por questão. Abaixo seguem os comentários dos áudios analisados.

Os estudantes que compõem os áudios serão identificados como alunos A, B e C e eles compõem o grupo 1, preservando suas identidades. Nessa atividade, algumas questões foram respondidas via áudio e outras por escrito. Todas elas constam nessa seção.

Questão 1:

a) Variando o parâmetro *a*:

A: Tá, pera aí, onde é que ta o parâmetro "a"*?* *B: Parâmetro* a *é 1.* *C: tá, por que é 1?* *B: Por que tá dizendo aí.* *A: por que o* x *é igual a 1.* *C: Tá.* *C: Por que se modifica? Se muda a função, modifica né.* *A: Vamos ver.* *C: Bota no ponto 2 A. É modificou, mas não entendi direito.* *A: Ele ficou fechadinho.*

Quadro 2: Início do diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (a).

O quadro 2 evidencia o início da exploração do *GeoGebra Graphing Calculator* pelo grupo 1. O trecho grifado em amarelo mostra o que os estudantes estão visualizando ao variarem o parâmetro *a*. Apenas nesse começo de resolução da questão já é presenciado o que consta no capítulo 3.1.2, quando Borba et al (2014) trabalham com tecnologia dentro da sala de aula de matemática e concluem que tal ação forma "cenários de investigação" (Borba et. al., 2014, p. 50). Esse é o início desse cenário proposto pela pesquisadora.

Pedem auxílio para a professora. *A: o Sora, não entendi a (a) aqui.* *Professora: Tá, conseguiu enxergar isso aqui no teu celular?* *A: essa ai não, essa aqui é mais fechadinha.* *Professora muda a escala para eles analisarem melhor.* *Professora: na primeira é pra variar o parâmetro* a*. Pegar esse* a *(controle deslizante) aqui e pra um lado e pro outro e ver o que acontece com o gráfico.* *B: Ele vai mudando a posição. É ele muda de lugar.*

Quadro 3: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (a).

O quadro 3 mostra a primeira intervenção da professora no grupo auxiliando os estudantes na sua dúvida. Nesse trecho percebe-se que com uma intervenção da professora, o aluno B conseguiu explicar o que ele entende quando visualizou o gráfico da função variando o parâmetro *a*. Treviso (2013), citada na seção 3.2.2, discorre em seu estudo sobre Piaget e as relações sociais sobre a *secundarização* da função do professor. Ou seja, o professor não obter o papel principal dentro da sala de aula e sim dar foco aos estudantes e no seu processo de aprendizagem. Devido a isso, a professora pesquisadora procura intervir de forma que os sujeitos pensem sobre o que estão a conhecer, auxiliando em suas dúvidas como exemplificado no quadro 3.

A: tá meu, o que varia é que ele fica reta, parábola negativa e parábola positiva. Pode ser sora? *Professora: O que?* ***Resposta letra (d)*** *A: que ele varia entre reta, parábola positiva e negativa.* *Professora: Reta, quando?* *A: no zero.*

Quadro 4: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (d).

No quadro 4, remetendo aos cenários de investigação propostos por Borba et al (2014), o trecho grifado em amarelo exemplifica a conclusão dos estudantes ao explorarem o *GeoGebra Graphing Calculator* e vislumbrarem que quando o parâmetro *a* obtém o valor zero, o gráfico se torna uma reta. Cabe ressaltar que essa conclusão do grupo se deve ao uso do aplicativo. Como citado na seção 3.1.2 dessa pesquisa, o uso da tecnologia propicia a "experimentação, visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo". (Borba et. al. 2014, p.73).

Professora: tá e o que o a *faz no gráfico?*
B: Ele deixa negativa ou positiva?
C: É.
Professora: Se ele é negativo, qual é a cara do gráfico?
A: Fica tristezinha.
C: Fica triste.
Professora: E se é positivo?
A:Fica feliz.

Quadro 5: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (a).

Por fim, o quadro 5 explicita a conclusão do grupo. Como mostrado nos quadros anteriores, o grupo 1 discutiu e refletiu em um trabalho coletivo e por fim chegaram a uma resolução do item (a) e item (d) da questão1. Piaget (1993), citado na seção 3.2.1 dessa pesquisa, salienta que a cooperação é criadora, ou seja, condiciona a formação da razão. O que foi relatado nesses áudios demonstra isso, os estudantes, em conjunto, conseguiram criar uma conjectura sobre o que o parâmetro *a* faz no gráfico da função quadrática.

b) Variando o parâmetro *b*:

A: temos que variando o ponto b.
B: Pera aí, só vamos tirar o zero aqui.
A: Vai mudando a posição da parábola.
C: É.
A: pera ai. Deixa no zero lá.
B: Estamos colocando o a no zero.
B: Vai mudando a posição.
C: É muda a posição da parábola. Bota no 1 que tava. Mas ele pode sair da parábola. Ratiei.
B: Nem precisa. Tá, vemos que muda a posição.
A: Eu também acho. É o b que ta mudando né.
C: É que vai mudar de posição mesmo ele estando zero.
A: Tá, por que ele ta mudando de posição?
C: Por causa que aqui ó.
B: por causa que aqui eu vou estar mudando o número correspondente da letra b.
C: Bota 1 aqui. A gente só fez com o 0.
B: Não, a gente fez na parábola, coloca aqui pro C ver.
A: Tá mudando a posição.
C: Hum, uhum, dependendo ela cresce ó.
B: Então é isso a resposta da letra (b)?

Quadro 6: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (b).

Rezende, Pesco e Bortolossi (2012, apud Borba et. al., 2014, p.48), seção 3.1.2, enfatizam que a utilização do *software GeoGebra* permite aos estudantes uma análise gráfica e de outras características das funções, como sua forma algébrica. O trecho grifado mostra o manuseio do *GeoGebra Graphing Calculator* e como ele foi o meio que oportunizou uma discussão entre os estudantes. Eles variam o parâmetro *b*, sendo que o parâmetro *a* assume o valor 0. Eles analisam o desenho de uma reta por um tempo, até perceberem que eles devem variar o parâmetro *b* da parábola. Por fim, concluem que dependendo do valor do *b*, o gráfico cresce.

Pedem auxílio para a professora. *A: Sora, eles falaram que o b só muda de posição.* *Professora: É, muda uma posição, mas tenta tirar uma conclusão um pouco mais interessante.* *A: Mas é difícil de tirar o que que acontece ali ó.* *C: Muda aí de novo. Coloca negativo.* *Professora: Vamos tentar olhar no eixo y.* *C: Sora, no negativo ele foi pro lado positivo e no positivo ele foi pro negativo.* *Professora: é isso é uma coisa legal. Acho que tu olhou o eixo y quando disse que é positivo e negativo né?* *C: É.* *Professora: Uma coisa que pode olhar também, como é que é o gráfico quando ele ta em volta do eixo y em um e em outro.* *A: Ba, já sei qual é que é sora. No caso ele fica com dois pontos, não fica? Dois pontos no y.* *Professora: No x então, não no y.* *A: Ah sim, no y só com um ponto. Tá, no caso se eu ponho tudo negativo, ele fica no -5, então aqui em cima ele fica no zero.* *Professora: não ta no zero.* *A: ah, é, não tá no zero.* *Professora: esse ponto ele muda? Por quê? Qual é o ponto?* *C: 1.* *Professora: É o 1. Agora vai mudando esse ai o b. O que que muda?* *A: Tá, mas no caso, o a também é 1.* *Professora: Tá, o a, nesse caso se colocar outro, não vai mudar a propriedade do b.* *C: Mesmo a parábola mudando de positiva pra negativa, fica num ponto só.* *Professora: É, não sai do 1. O b não faz mudar isso. O que faz mudar é essa linha, como é que ela tava e como é que ela fica. Ele quer saber por que que muda, não só o que tá mudando.* *A: Por que que muda aqui ó? Tá tudo bem, tá sempre b aqui.* *Professora: por que tu tá variando o b.*

Quadro 7: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (b).

No quadro 7, a exploração do *GeoGebra Graphing Calculator*, assim como no quadro 6, oportunizou a discussão dos estudantes quanto a variação do parâmetro *b*. Além disso, Borba *et al* (2014), na seção 3.1.2 desse trabalho, oportunizou que a aula se tornasse um espaço investigativo que aloca possíveis descobertas, criações de conjecturas. No trecho grifado em amarelo considerando o movimento da parábola enquanto variava o parâmetro *b*, a primeira conclusão do grupo, é de que ele faz o gráfico mudar de posição. A professora pesquisadora intervém tentando conseguir uma conclusão mais minuciosa ou como mencionada por ela, interessante sobre o papel do coeficiente no gráfico da função. Nas figuras 8 e 9 exemplificam-se as variações do parâmetro *b* e o que os estudantes estavam analisando.

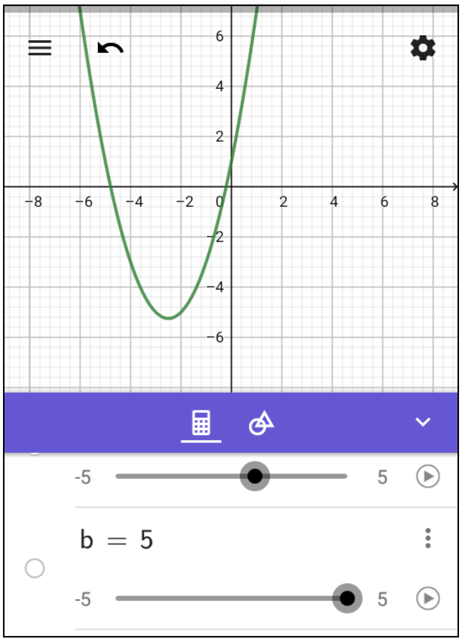


Figura 8: Variação do parâmetro *b* quando *b>0*. Fonte: arquivo pessoal.

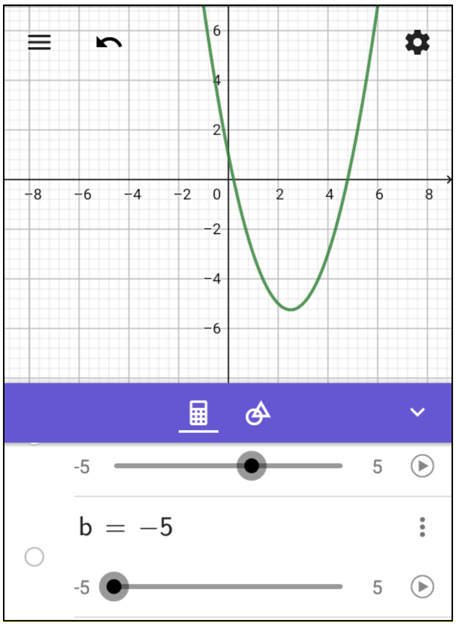


Figura 9: Variação do parâmetro *b*, quando *b<0*. Fonte: arquivo pessoal.

O trecho grifado em amarelo mostra a intervenção da professora, direcionando os estudantes a focarem no eixo *y* enquanto variam o *b*. Além disso, apresenta a conclusão do estudante C, que parece começar a entender a função do parâmetro *b*. Novamente, a intervenção da professora é de o estudante criar sua própria conjectura e dizer o que está visualizando no gráfico. No quadro 7, evidencia-se a valorização da ação do sujeito, *secundarizando* a função do professor citado por Treviso (2013), seção 3.2.2.

Professora: Explica primeiro o que que ta mudando. *A: Ah, tem vezes que nem no eixo x ela não passa, só no eixo y.* *Professora: são coisas importantes que tu ta falando. Mas difícil de descobrir tudo ao mesmo tempo. Pensa primeiro o que o b ta fazendo no gráfico, o desenho dele, como ele corta o eixo y.* *B: o a tá fixo? É ele vai girando em volta do a, não?* *A: acho que não.* *Professora: o que é esse movimento do corte no eixo y?* *A: é tipo uma, ele sobe desce.* *Professora: Esse subir e descer em matemática, tem um nome mais bonitinho?* *B: variação?* *Professora: Isso. Subir, o que pode ser na linguagem matemática?* *B: crescimento?* *Professora: isso. E descer?* *A: decrescimento.* *Professora: Isso, onde ele tá subindo? Variando o b. Quando o b é positivo, ele sobe ou desce?* *C: quando ele é positivo ele desce.* *A: não.* *C: Ah não, ele sobe.* *A: quando o b é negativo ele sobe.* *C: Sim.* *Professora: o b é positivo.* *A: mas é isso que eu to dizendo sora, ele também é negativo, por que ele também tem ponto no gráfico.* *Professora: É que assim, o b é só a parte de crescer e decrescer o gráfico quando corta o eixo y. Por exemplo aqui, ele é positivo e quando ele corta o eixo y, ele ta crescendo ou decrescendo?* *A: cresce?* *Professora: tá e quando ele é negativo?* *B: Negativo. Decresce.*

Quadro 8: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (b).

Ribeiro, Silva e Silva (2013) salientam que a cooperação foi um fator que favoreceu as discussões dos estudantes que em conjunto trabalharam para a resolução de situações ligadas às Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), trabalhadas durante o semestre de uma disciplina da graduação. Tal fato ocorre no quadro 8, em azul, em que surgiu uma análise sobre o gráfico da função quadrática que não se previa pela professora pesquisadora. Quando a função não possui raízes reais, seu gráfico não corta o eixo *x*. O estudante A trouxe esse apontamento na discussão da resposta do item (b). Além disso, o ambiente informatizado oportuniza o surgimento dessas questões, como Borba *et. al.* (2014) enfatizam na seção 3.1.2 dessa pesquisa, novas descobertas surgem ao se trabalhar com a tecnologia.

Sobre a intervenção da professora, novamente ela os auxilia de forma que eles tentem conjecturar e discutir sobre o papel do parâmetro *b*. Então ela orienta o grupo a olhar para a linha de corte do eixo *y* novamente. Nesse momento o aluno B, consegue concluir o papel do parâmetro no gráfico. Ressalta-se que foram necessárias discussões e o desafio dos estudantes para conseguirem concluir a atribuição do coeficiente no desenho do gráfico.

c) Variando parâmetro *c*:

B: Vamos variar a letra c. *C: Hum, positivo e negativo.* *B: c definirá se é positivo ou negativo.* *B: no caso da reta, definirá.* *C: é.* *A: Não.* *B: No caso da reta, definirá.* *B: é, embaixo e em cima.* *A: Não.* *C e B: Sim.* *A: vamos dar um zoom. O sora o* c *aqui, sora.* *Professora: Variem o c.* *A: Vai pra cima ou pra baixo.* *C: Sim, meu. Pra cima, pra cá positivo pra lá negativo.* *A: não, nada ver isso.* *C: Olha aqui a ponta do gráfico.* *A: quem diz se é positivo ou negativo é o* a. *Tá, ele vai pra cima e pra baixo, mas não diz se é positivo ou negativo.* *C: Mas não é essa ponta aqui que diz do gráfico?* *A: ó, ele vai pra baixo.*

Quadro 9: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (c).

Novamente, o ator informatizado fazendo emergir discussões relevantes pelo grupo 1. Na seção 3.1.2 se trouxe *Borba et al.* (2014) e Borba e Penteado (2012), enfatizando a importância da utilização das tecnologias digitais dentro da sala de aula de matemática. Percebe-se que devido a exploração do *GeoGebra Graphing Calculator* pelos estudantes, que as conjecturas começaram a surgir. No trecho grifado em amarelo ao variarem o parâmetro *c*, a primeira conjectura é elaborada pelos estudantes. Positivo ou negativo demonstra o que os mesmos veem, o deslocamento vertical para baixo e para cima é o que eles enxergam. Após eles pensarem em negativo e positivo, o estudante B cita o para baixo e para cima. Percebe-se a discussão entre o grupo com suas palavras coloquiais, dizendo o que eles entendem sobre o parâmetro.

Piaget (1973) citado na seção 3.2.1 dessa pesquisa enuncia cooperação como o "operar em comum" (PIAGET, 1973, p. 105) reajustando ações por "correspondência, reciprocidade ou complementaridade" (PIAGET, 1973, p. 105). Percebe-se esses reajustes no quadro 9, os argumentos, negativo ou positivo, contrariam a opinião do estudante A. No trecho em azul ele mostra sua insatisfação enfatizando que apenas o parâmetro *a* indica se o gráfico é positivo ou negativo, enquanto os estudantes B e C argumentam que o gráfico se desloca verticalmente.

Depois de um tempo analisando o gráfico. *A: Ah, acho que eu já sei o que é.* *C: O c vai indicar o ponto que tá marcando na reta (eixo y).*

Quadro 10: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 1, item (c).

Então, no quadro 10, o ajuste de ações ocorreu e os estudantes entram em acordo e concluem que o parâmetro *c* indica a coordenada *y* quando $x = 0$. Destaca-se que a questão 1 foi resolvida pela análise gráfica com o *GeoGebra Graphing Calculator*. Durante a exploração do grupo no aplicativo, eles trabalharam em conjunto em prol da compreensão da questão e puderam conjecturar, explorar, analisar, inferir e (re)construir hipóteses sobre os parâmetros da função quadrática. Houve manifestações de cooperação, já exemplificadas nos quadros 1 ao 10. Além disso, a mediação da professora pesquisadora, exposta como intervenções afastou-se de uma prática passiva e unidirecional de conhecimentos.

<u>Questão 2:</u>

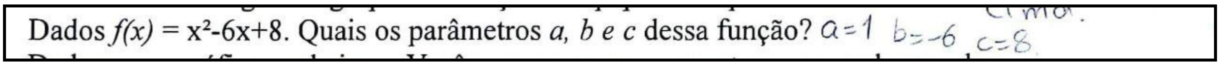

Dados $f(x) = x^2-6x+8$. Quais os parâmetros *a, b e c* dessa função? a=1 b=-6 c=8

Figura 10: Resolução da atividade 1, grupo 2, questão 2.

Essa questão explorou o entendimento de onde se localizavam os parâmetros *a*, *b* e *c* na lei de formação da função explicitada. Os dois grupos não registraram suas falas nessa questão. Entende-se que os grupos tenham transcrito para o material impresso as observações feitas na tela do celular.

<u>Questão 3:</u>

C: Sora vem cá. Olha só, é correto afirmar que aqui nesse primeiro gráfico, o c *é 2 por que tá cortando no 2.*
Professora: Certo.
C: O b *ele é -1, por que tá descendo no -1.*
Professora: não está correto.
A: Acho que o b *seria 0, não? Zero não? Seria 1,5 né? Também não tá certo?*
Professora: vocês vão ter que fazer um sistema pra descobrir o a *e o* b*. Não tem como olhar no gráfico e saber. Só dá pra saber quando ele é 0. Mas quando não é zero, não da pra saber. Só pelo sisteminha.*
A: tá, mas no caso, tá pedindo o valor do b *aqui?*
Professora: do b*, do* c *e do* a.
A: Tá, mas como é que a gente vai saber o valor do b*?*
Professora: Sistema.
A: Qual sistema?
Professora: Tá, tu já sabe que o c é 2 então aquele ax^2+bx+c *é* ax^2+bx+2.
C: é.
Professora: Então daí, assim, tu vai pegar pontos que tu sabe do gráfico x e o y e vai substituir no lugar do x e do y. Vai ficar incógnitas a *e* b*. Tentem fazer isso.*

Quadro 11: Diálogo grupo 1, atividade 1, questão 3, item (a).

Como foi observado no trecho em amarelo, no início da questão, o grupo necessitou de uma intervenção da professora para explicar como eles encontrariam os parâmetros *a* e *b*. Porém, eles conseguiram, apenas analisando o gráfico saber que o *c* possuía um valor e o sinal do parâmetro *a*. Abaixo segue a resolução a questão:

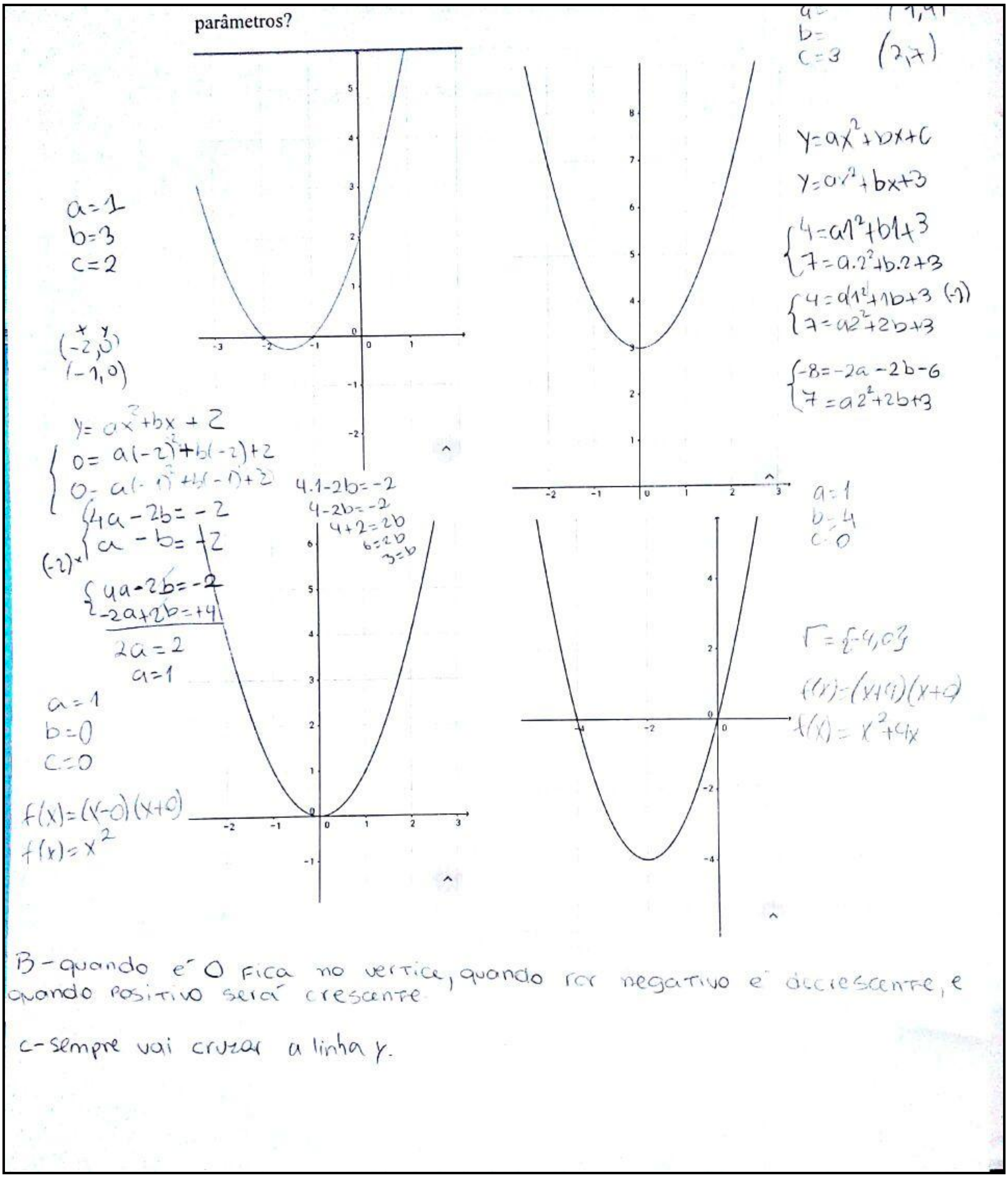


Figura 11: Resolução da atividade 1, grupo 1, questão 3.

Os áudios analisados na atividade 1 mostram a integralização do grupo elencando discussões e conjecturas com o intuito de solucionar as questões. O trabalho coletivo oportunizou que eles ajustassem suas ações e solucionassem a atividade.

Por meio da utilização do *GeoGebra Graphig Calculator*, os estudantes conseguiram visualizar o que estava acontecendo no momento da variação dos parâmetros. A partir disso responderam com suas palavras o papel de cada coeficiente no gráfico da função. Percebe-se que o grupo de alunos conseguiu aplicar os conhecimentos adquiridos no início das atividades nas questões 3 e 4.

Ademais, esse espaço de trabalho oportunizou aos mesmos que analisassem outras questões sobre o gráfico da função, que é quando ela não possui raízes reais, ou seja, não cruza o eixo x. Enfatiza-se aqui que, mesmo direcionados a responderem qual o papel dos coeficientes da função quadrática, o grupo analisado conseguiu ir além e perceber outras peculiaridade do gráfico.

5.2 Zeros da função

O objetivo dessa atividade era os estudantes entenderem o que são os zeros da função quadrática, como poderiam calculá-los e como identificá-los na forma fatorada da lei da função. Os áudios transcritos são dos grupos 1 e 2. Identificados como A, B e C, estudantes do grupo 1 e D, E e F, estudantes do grupo 2.

<u>Questão 1:</u>

Professora: Vamos pensar assim, o que que é a raiz de uma função. O que acontece pra ela ser a raiz de uma função?
D: Não sei,
Professora: Tá ali na definição que eu dei pra vocês.
D: Quando possui valores reais para x tal que vale igual f(x) =0. Quando isso aqui for 0? Quando a, b *e* c *for 0?*
Professora: Não. Quando f(x) *for 0. Quem é* f(x) *no nosso gráfico? Que eixo ele é?* x *ou* y*?*
D: y.
Professora: Então quando y *é 0, a gente tem valores de* x *que fazem essa equação ser 0. Ai a minha pergunta: quais são esses valores em cada uma daquelas funções?*
D: Não entendi.
Professora: Tá, tu tem aqui o gráfico, teu y tá aqui, pra ser raiz, o y tem que ser 0.
D: -6, não é?
Professora: Não, o y tem que ser 0. Onde é o y=0*?*
D: Aqui.

Quadro 12: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 1.

O quadro 11 foi explicitado para mostrar o início da discussão do grupo. O estudante D tenta entender o que a questão pede, o que são os zeros da função é sua dúvida. Para o entendimento, a professora auxilia na dúvida elencada:

Professora: Então vocês conseguem dizer quem são as raízes?
D: Não sei ver.
E: Sora, mas não é 1?
D: Tá, não é pra ser o 6?
Professora: Não, me diz as coordenadas desse ponto.
D: (6,0).
Professora: Não.
E: (0,6)?
Professora: Sim, por que aqui ó, o y=6.
E: O y é o que sobe e o x é o que anda pro lado.

Quadro 13: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 1, item (a).

O trecho grifado em amarelo mostra como o estudante D exemplifica seu entendimento no encontro da coordenada do ponto em que o gráfico intercepta o eixo *y*. Em seguida o aluno E indica a coordenada do ponto em discussão e ainda complementa colaborando com seu entendimento de como se encontram as coordenadas *x* e *y* de pontos de um gráfico. A professora interviu para auxiliar os estudantes, novamente questionando-os a resolver a questão em grupo, assim como Treviso (2013), seção 3.2.2 dessa pesquisa, cita ao dar relevância à aprendizagem do estudante em primeiro lugar e o professor como mediador da atividade.

D: Tá então é o 2 e o 3?
Professora: Por que?
D: é quando o y tá no zero.
Professora: Tá, e tu sabe disso por que viu no gráfico?
D: Aham.

Quadro 14: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 1, item (a).

Assim, após a colaboração do aluno E, o aluno D indica as raízes da primeira função, apenas olhando o gráfico desenhado pelo GeoGebra (Quadro 13). Ressalta-se que a ajuda do aluno E no encontro das coordenadas dos pontos fez o aluno D conseguir responder a questão. Evidencia-se a cooperação proposta por Bona (2012), citado na seção 3.2.1 dessa pesquisa, que destaca que a cooperação é um processo de aprendizagem descobridor de novas verdades e visões sobre um assunto matemático.

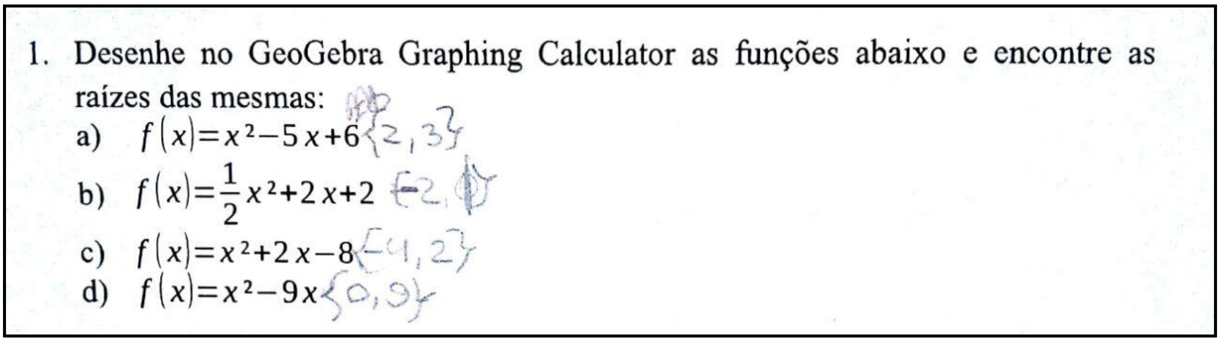
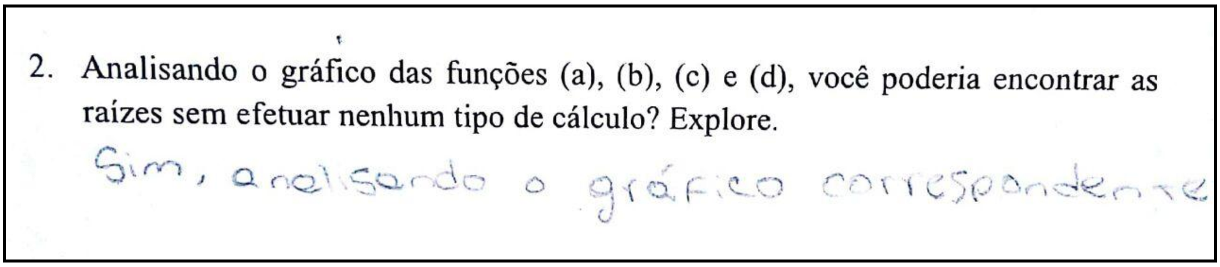

1. Desenhe no GeoGebra Graphing Calculator as funções abaixo e encontre as raízes das mesmas:
a) $f(x)=x^2-5x+6$ {2, 3}
b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+2$ {-2,
c) $f(x)=x^2+2x-8$ {-4, 2}
d) $f(x)=x^2-9x$ {0, 9}

Figura 12: Resolução da atividade 2, grupo 2, questão 1.

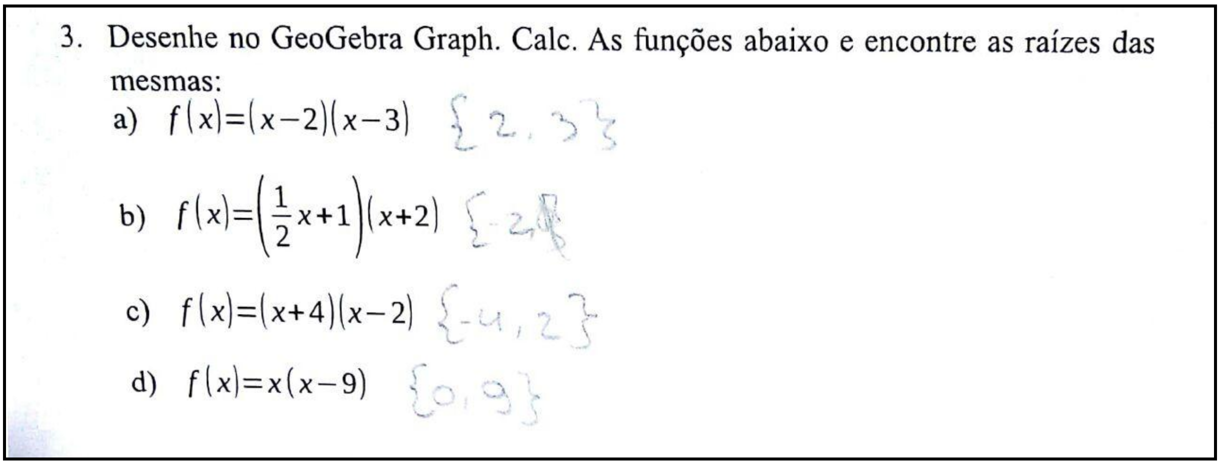
Questão 2:


2. Analisando o gráfico das funções (a), (b), (c) e (d), você poderia encontrar as raízes sem efetuar nenhum tipo de cálculo? Explore.

Sim, analisando o gráfico correspondente

Figura 13: Resolução da atividade 2, grupo 2, questão 2.

Questão 3:


3. Desenhe no GeoGebra Graph. Calc. As funções abaixo e encontre as raízes das mesmas:

a) $f(x)=(x-2)(x-3)$ $\{2, 3\}$

b) $f(x)=\left(\frac{1}{2}x+1\right)(x+2)$ $\{-2, [illegible]$

c) $f(x)=(x+4)(x-2)$ $\{-4, 2\}$

d) $f(x)=x(x-9)$ $\{0, 9\}$

Figura 14: Resolução da atividade 2, grupo 2, questão 3.

A resolução das questões (1), (2) e (3) se deu pela análise gráfica. Os alunos desenharam o gráfico no *GeoGebra Graphing Calculator* móvel e identificaram os valores para *x* que zeram as funções. Evidencia-se a importância da utilização da tecnologia móvel para a resposta das mesmas. O meio para que os estudantes conseguissem solucioná-las se deu pela visualização gráfica, propiciada pelo *GeoGebra Graphing Calculator*. Os estudantes do grupo 2 a realizaram por meio da análise gráfica. Pesco e Bortolossi (2012, apud Borba et. al., 2014, p.48), citados na seção 3.1.2 desse trabalho, discorrem sobre o uso do *software* GeoGebra que auxilia no estudo gráfico das funções. Os estudantes, pela análise do desenho gráfico da função quadrática, conseguiram evidenciar os zeros de cada uma das funções.

<u>Questão 4:</u>

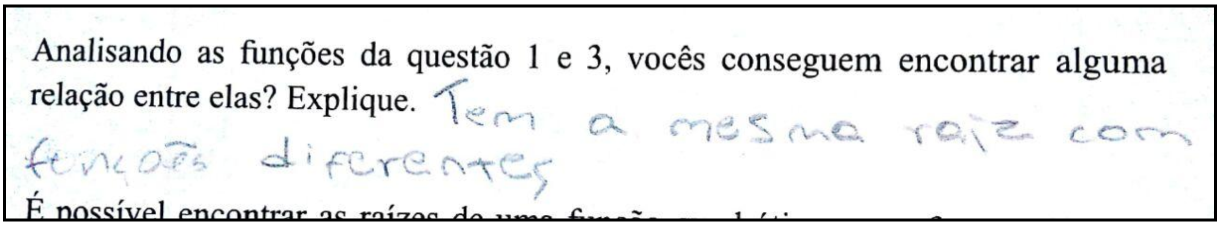

Analisando as funções da questão 1 e 3, vocês conseguem encontrar alguma relação entre elas? Explique. Tem a mesma raiz com funções diferentes
É possível encontrar as raízes de uma

Figura 15: Resolução da atividade 2, grupo 2, questão 4.

Na questão 4, exemplificada na figura 15, os estudantes percebem que as raízes das funções da questão 1 e 3 são as mesmas. A justificativa deles indica que eles se deparam com duas situações que representam as funções.

<u>Questão 5:</u>

Professora: Como faz isso? *D: A mesma coisa da outra.* *Professora: Mas fala.* *D: Observando o gráfico podemos ver que os pontos são de y igual a zero será a raiz da função.* *Professora: Tem mais algum jeito se não tiver o gráfico?* *E: Calculando.* *Professora: sem calcular?* *E: A pessoa tem que ser um crânio então.* *Professora: (Aponta pra questão 1) Aqui tem como sem calcular?* *E: Analisando o gráfico.* *Professora: e aqui (questão 3).* *D: Sem o gráfico não tem como.*

Quadro 15: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 5.

Amaral et. al. (2014), citados na seção 3.1.3 salienta a importância do professor ser mediador de todo o processo de aprendizagem, quando os estudantes trabalham com a tecnologia. Assim, no quadro 15, a professora intervém questionando o grupo como se podem obter os zeros das funções da questão sem efetuar nenhum tipo de cálculo (trecho grifado em amarelo). Percebendo que o grupo não havia percebido a semelhança entre a forma fatorada da lei da função, em que se utilizou o valor das raízes para chegar na lei de formação. Nesse trecho percebe-se a mediação da professora pesquisadora ao auxiliar o grupo e incitá-lo a analisar mais uma vez a questão 3.

Professora: Vocês desenharam essas funções no GeoGebra? *D: Sim.* *Professora: Aí fizeram essas raízes.* *D: É.* *Professora: E viram que é igual?* *D: É.* *Professora: Mas vocês não pensaram sobre as raízes colocando aqui?* *D: Ata.* *Professora: O que que acontece se tu colocar esses valores aqui?* *D: Vai dar 2? Não, não vai dar 2.* *Professora: Tenta ó, coloca 2 no lugar do x.* *D: Vai dar 0 e -1.* *Professora: Tem que multiplicar né.* *E: ã? Tu não teria que fazer chuveirinho?* *Professora: Por que chuveirinho aqui? Tem o número aí tu já vai descobrir o valor.* *E: Tá, a gente teria que botar o 2 aqui e aqui?* *D: É. Vai ficar 2-2, vai dar zero e 2 da -1, vai dar 0.* *Professora: E se tu colocar o 3, vai dar zero também?* *D: 3-2 vai dar 1, vai.* *Professora: Por que será que os dois deu zero?* *E: Por que eles são raiz.* *Professora: Tá e por que que nessa conta ali da justamente esse mesmo número, tem alguma coisa a ver com a lei?* *D: Que?* *Professora: o que que tem a ver isso ai que tu marcou.* *D: É com isso aqui ó.* *Professora: é o 2 e o 3?*

Quadro 16: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 5.

No quadro 16, exemplifica-se outra vez a mediação da professora, como Amaral et. al. (2014), seção 3.1.3 dessa pesquisa, salienta. Seguindo a intervenção, ela elenca questões que o grupo já havia respondido para poderem encontrar uma resposta para a questão 5. Como exemplificado no trecho grifado em amarelo, a professora intervém e pergunta o que acontece ao substituir as raízes correspondentes de cada função em sua lei fatorada, na questão 3. Então o grupo testou e a professora questionou por que resultava em zero ao substituí-las e resolver a álgebra. Por cada número testado ser as raízes das funções, é resposta do grupo.

Após, a professora interroga o grupo se há uma relação com a lei de formação da função na questão 3 e suas raízes. O entendimento do grupo é exemplificado no quadro 17. Verifica-se que a professora pesquisadora, nessa questão, está desempenhando intervenções que podem fazer com que o grupo chegue às conclusões. Como mencionado no estudo de Treviso (2013), trabalho correlato citado na seção 3.1.3 dessa pesquisa, a professora oportunizou aos alunos que eles construíssem seu conhecimento sobre os zeros das funções.

D: A raiz. Só que olha esse aqui, esse aqui não é ó. *Professora: Não?* *D: Hum, eu acho que vai ser. Vai dar -1? +1, vai dar zero também. Tá, mas o que que tem sora?* *Professora: Tem alguma coisa a ver a raiz com os números que tu tem aqui?* *D: Os números que tão aqui é raiz.* *Professora: Tá, agora se tu não soubesse a raiz, só olhando pra isso aqui, tu conseguiria descobrir a raiz?* *D: O 2 e o 3.*

Quadro 17: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 5.

Devido a mediação da professora e o trabalho coletivo do grupo 2, os estudantes conseguiram concluir a questão 5, demonstrada em azul. Após discussões e intervenções da professora junto ao grupo, os alunos conseguiram estabelecer uma relação entre a forma fatorada da lei da função com suas raízes.

Professora: Por que?(Silêncio) *Tá, vou inventar uma outra então. Escreve aqui do lado. (x-4)(x+3). Quais serão as raízes?* *E e D: 4 e 3?* *D: Não, -4.* *Professora: Testa.* *E: Aqui daria 0.* *Professora: -4-4 dá zero?* *E: Não daria -8 e aqui daria -1.* *Professora: tá, daí da zero?* *E: Não.* *Professora: então não é -4 e 3.* *D: É 4 e -3 talvez?* *Professora: Testa.* *D: vamos tentar com 4.* *E: Se for o quatro aqui da zero.* *D: Aqui tem que ser o -3 pra dar zero aqui.* *E: Tá, mas aqui ó. Se tu faz com o 4.* *D: Vai dar zero também. Então 4 e -3.* *E: É, é 4 e -3.*

Quadro 18: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 5.

No quadro 18, a professora sente a necessidade de intervir novamente. Ao questionar o grupo sobre o motivo de os valores 2 e 3 serem raízes da função do item a questão 3, houve silêncio, então a professora pensou em fornecer outro exemplo de função na forma fatorada e perguntou as raízes da mesma. Na resposta dos estudantes D e E percebe-se que eles entenderam que as raízes seriam positivas. A professora pede que eles testem esses dois valores na lei da função dada, então eles conseguem perceber que precisam de dois valores que anulem ou a primeira ou a segunda parcela.

Evidencia-se nesse quadro o quão importante é o trabalho em conjunto dos alunos e também da mediação da professora. Apenas com o uso do *GeoGebra Graphing Calculator* não foi possível que o grupo conseguisse resolver todas as questões. As intervenções da professora foram importantes e relevantes na conclusão do grupo.

Professora: Então me explica agora isso.
E: Ah, quando aqui for positivo, a gente tem que achar um número que seja negativo pra dar zero. O mesmo número tem que ser negativo pra dar zero.
D: Por isso que aqui é 2 positivo e 3, pra poder dar zero. E aqui tem que ser negativo 2.
E: Então a gente tem que sempre olhar.
D: Aqui vai dar +2 e -4. Por que deu 0 aqui?
E: por que tem o x ali na frente?
D: Esse aqui?
Professora: Vocês testaram e dava 2 também.
D: Como é que a gente vai escrever isso?
E: Temos que observar os parênteses pra ver o sinal.
D: Mas não necessariamente os parênteses, olha aqui ó, temos que observar os números.
E: e as incógnitas. Porque olha aqui, se a gente não visse aqui, não ia dar zero e a gente só ia colocar o 9.
D: Os números, as incógnitas.
E: Isso ai, pra ficar bonito.
D: e os sinais. Se o número for positivo, devemos botar negativo pra dar zero.

Quadro 19: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 5.

Em amarelo (Quadro 19), consegue-se perceber a conjectura criada pelo grupo. O estudante D explica com suas palavras o que entendeu sobre o encontro dos zeros das funções em forma fatorada e o estudante E complementa que se devem analisar além dos números, as incógnitas. Evidencia-se a cooperação no grupo. Piaget (1993), seção 3.2.1 dessa pesquisa, salienta que a cooperação é criadora de aprendizagens, para tanto o grupo 2 mostrou isso nos trechos em amarelo.

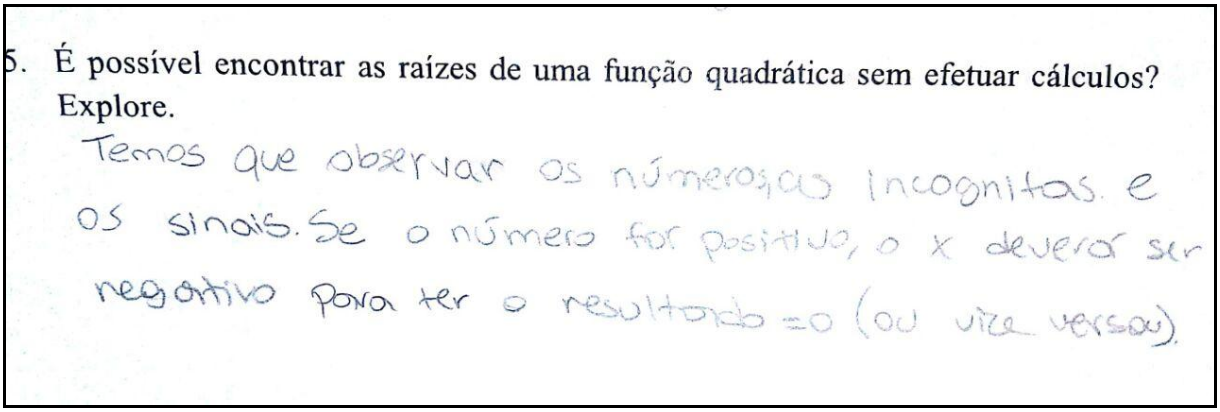

5. É possível encontrar as raízes de uma função quadrática sem efetuar cálculos? Explore.
Temos que observar os números, as incognitas e os sinais. Se o número for positivo, o x deverá ser negativo para ter o resultado = 0 (ou vize versa)

Figura 16: Resolução da atividade 2, grupo 2, questão 5.

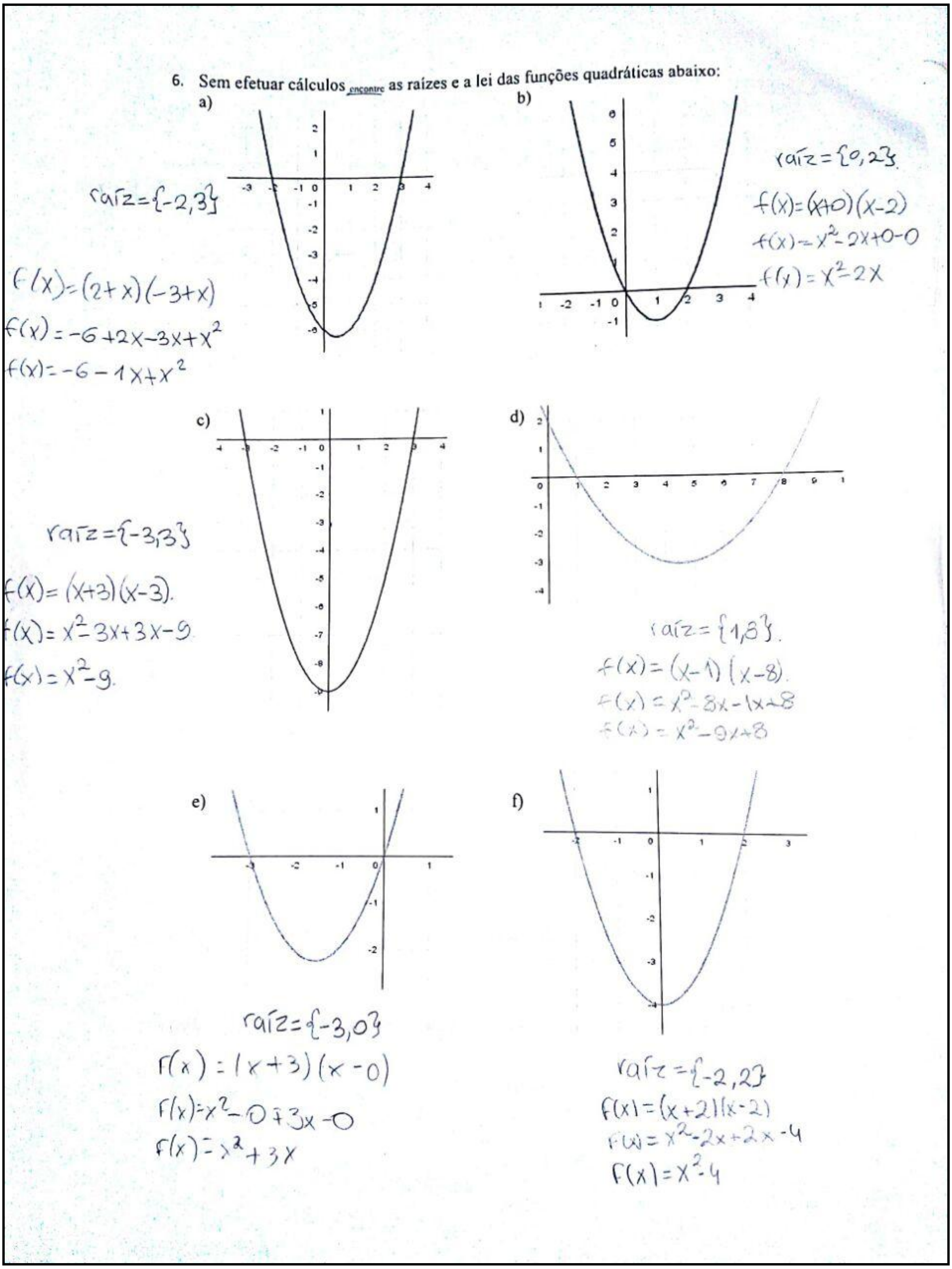
Na figura 16, evidencia-se a resposta do grupo 2 sobre como encontraram os zeros da função quadrática quando sabem a forma fatorada da lei da função. Percebe-se que eles explicaram com suas palavras o modo de encontrar as raízes da função. Explicitou-se uma conjectura criada pelo grupo que se deu pela cooperação dos sujeitos evidenciada nas transcrições dos áudios dos quadros 16, 17, 18 e 19.

<u>Questão 6:</u>

D: Tá, qual vai ser a raiz? *E: -2 e 3.* *F: Não.* *D: Por quê?* *E: Teria que ser ao contrário, teria que ser 2 e -3.* *D: Que 2, tá louca?* *E: Por que não teria que ser ao contrário?* *F: Mas ta pedindo pra fazer isso aqui ó.* *E: É e teria que ser ao contrário.* *Professora: Tá dita aqui as raízes. Continua, ta certo.* *D: A raiz vai ser?* *E: -3 e 3.* *D: como é que se escreve?* *Professora: É que quando tu bota parênteses, é um ponto de coordenadas x e y. Daí, coloca entre chaves.* *E: Bota chaves, 1 e 8.* *D: (x+0)(x-2). Ta, mas e como é que vai ficar, ah tem que fazer chuveirinho.* *D: x^2-2x+0-0.* *E: Tá, que divertido, gostei desse.* *D: Também gostei de fazer esse.* *D: Aqui vai dar (x+3) (x-0).* *E: Na verdade ficou a mesma coisa se vocês pensarem né.* *D: Sim, porque...* *D: Vai ficar só -9? Por que tipo -3x+3x, vai dar zero.*

Quadro 20: Diálogo grupo 2, atividade 2, questão 6.

Em amarelo (Quadro 20), o grupo inicia a realização da atividade 6. Já no início há uma discussão sobre como encontrar a lei da função do item (a). O aluno E indica as raízes do gráfico, porém o aluno F não concorda com a afirmação. O grupo começa a discutir sobre como será a lei que forma o primeiro gráfico. O aluno E indica que teria que ser ao contrário, no caso, as raízes teriam seus sinais trocados. O aluno D discorda da afirmação do aluno E e mostra o que eles tem que fazer, mas o aluno E continua afirmando que para isso eles precisariam trocar os sinais. Cada colocação feita tanto pelo aluno E ou F exemplificam as contestações ou aceitações citadas por Bona (2012), na seção 3.2.1.



6. Sem efetuar cálculos encontre as raízes e a lei das funções quadráticas abaixo:

a)

raíz={-2,3}

$f(x)=(2+x)(-3+x)$

$f(x)=-6+2x-3x+x^2$

$f(x)=-6-1x+x^2$

b)

raíz={0,2}

$f(x)=(x+0)(x-2)$

$f(x)=x^2-2x+0-0$

$f(x)=x^2-2x$

c)

raíz={-3,3}

$f(x)=(x+3)(x-3)$

$f(x)=x^2-3x+3x-9$

$f(x)=x^2-9$

d)

raíz={1,8}

$f(x)=(x-1)(x-8)$

$f(x)=x^2-8x-1x+8$

$f(x)=x^2-9x+8$

e)

raíz={-3,0}

$f(x)=(x+3)(x-0)$

$f(x)=x^2-0\mp 3x-0$

$f(x)=x^2+3x$

f)

raíz={-2,2}

$f(x)=(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^2-2x+2x-4$

$f(x)=x^2-4$

Figura 17: Resolução da atividade 2, grupo 2, questão 6.

A figura 17 mostra a resolução da atividade 6 do grupo 2. Nessa questão objetivou-se que os alunos utilizassem a análise gráfica identificando os zeros da função e a partir deles encontrassem a lei da função sem efetuar um sistema de equações, como realizaram na atividade 1. Percebe-se que os mesmos entenderam a proposta e conseguiram resolver a questão 6.

Nessa atividade o que auxiliou diretamente os estudntes a relacionarem a forma algébrica da função com seu gráfico foi a utilização do *GeoGebra Graphing Calculator*. Essa conexão é expressa pelas diretrizes curriculares nacionais (Brasil, 2006), mencionado nessa pesquisa na seção 3.1.1, em que eles demandam que os alunos possam relacionar gráfico e lei de formação das funções quadráticas, evitando que os estudantes decorarem fórmulas.

Ainda salienta-se que o trabalho coletivo do grupo, as mediações da professora, o uso do *GeoGebra Graphing Calculator*, auxiliaram na resolução da atividade 2. Devido a isso, evidencia-se a importância do trabalho desse tipo dentro de uma sala de aula de matemática. Isso oportunizou que o grupo criasse aprendizagens significativas sem que a professora transmitisse o conteúdo de forma direta e os estudantes o recebessem sem questionar.

5.3 Pontos de máximo/mínimo

Analisar, por meio das questões abordadas, que o gráfico da parábola é simétrico. Além desse, os objetivos dessa atividade eram que os estudantes indicassem os pontos de máximo ou mínimo das leis de funções quadráticas exibidas e os relacionassem com o conjunto imagem. Os dados coletados nessa atividade mesclam-se entre resoluções escritas na folha de respostas e análise dos áudios dos grupos 1 e 2 composto pelos estudantes A, B e C e D, E e F, respectivamente.

Questão 1:

D: Como é que é?
Professora: Quando x é -2, daí só substituir aqui na lei ó, a lei é x²-x-2.
D: Mas aí eu vou colocar -2 e vai ficar reta.
Professora: Não. Tu vai calcular a mão, por que se colocar no aplicativo x=-2, ele vai desenhar uma reta, aí a interseção dessa reta com a parábola é o ponto que tu quer, que é o f(-2).
D: Que é 4. É isso aí que tem que fazer?
Professora: É, descobrir o y de f(-2).
D: E tem que fazer f(3). E o que que eu faço com esse x=3? Eu uso no f(3)?
Professora: Tu pode colocar no aplicativo x=3, aí vai dar outra reta, aí tu vê a interseção da parábola com essa reta.
D: É 4 também.

Quadro 21: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 1.

Rezende, Pesco e Bortolossi (2012, apud Borba et. al., 2014, p.48), citados na seção 3.2.1 dessa pesquisa salientam a importância da utilização do GeoGebra como um meio que oportuniza os estudantes a estudarem as funções em sua forma gráfica e algébrica. No quadro 21, o trecho grifado em amarelo, expressa como o grupo 2 encontrou os pontos simétricos, propostos na questão 1. Enquanto o grupo 1, encontrava o valor do *y* de cada ponto de forma algébrica, eles desenhavam no *GeoGebra Graphing Calculator* uma reta vertical no valor de *x* apresentado na questão.

E: Como é que tu descobre esse 4? *D: Aqui ó, eu tenho que botar x=3, que é o f de x 3 na função que ele já deu, entendeu? aí vai dar a reta na interseção.* *D: Agora o f(0).* *E: 0.* *D: -2, não?* *E: Como -2?* *D: é que é onde bate o ponto que vai os dois entendeu?* *E: Ah.* *D: A interseção. É -2, eu acho, não? E o f de...* *E: Eu acho que é 2, ou -2.* *D:-2.* *E: Eles repetiram os números, então tem alguma coisa aí.* *D: é, mas o que tem em comum entre -2 e 3 e 0 e 1?* *D: Olha só, que que tem em comum? Que deu o mesmo resultado?* *E: É, porque a interseção era igual.* *D: Por quê?* *D: Será que colocando qualquer número aleatório, vai dar?* *E: Não sei. Tenta botar -3.* *D: Da 10.* *F: Coloca 5.* *E: Ou 2, tenta colocar 2.* *D: Da 0.* *E: Bota -1. Dá 19 eu acho, 18.* *D: Ah, não sei.* *E: Bota -1.* *E: Não sei, não faço a menor ideia.*

Quadro 22: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 1.

Bona (2012), citada na seção 3.2.1 dessa pesquisa, salienta que a cooperação é criadora de novas verdades e que esse processo é oportunizado pelo uso das tecnologias. No quadro 22, em amarelo, exemplifica o que Bona (2012) citou, mostra a explicação do estudante D para o estudante E sobre como ele encontrou os valores de *y*, propostos pela questão. Há o compartilhamento de conhecimentos entre esses dois alunos. Os dois sujeitos enquanto resolviam a questão, cooperaram e evidenciaram suas conclusões.

Ainda no quadro 21, em azul, o grupo começa a perceber a simetria da parábola. Isso é indicado pelo estudante E, quando diz que há algo relacionado a dois valores de *x* diferentes terem o mesmo valor da imagem. Quando o estudante D questiona o motivo da equivalência, ele mesmo se pergunta se isso funciona com qualquer número. Enquanto o grupo tenta colocar valores aleatórios no gráfico para *x*, não percebem o outro lado simétrico da parábola então, no próximo quadro pedem auxílio para a professora. O uso da tecnologia móvel oportunizou que os estudantes levantassem hipóteses, testassem, analisassem, repensassem, criassem novas hipóteses, evidenciando o processo de aprendizagem.

No trecho em azul, explicitado anteriormente, retoma-se o que Bona (2012), seção 3.2.1 desse trabalho, afirma sobre a cooperação ser criadora de aprendizagens. Os estudantes tentam conjecturar o que entenderam sobre a simetria da parábola para outros valores, para testar se essa compreensão era válida para qualquer valor de *y* da função.

D: Dois deles deu valor igual, -2 e 3, 0 e 1. *Professora: Tá, essa é a característica. Agora tem que dizer o por quê, analisando o gráfico ali.* *Professora: Tentem colocar todas as retas: x=-2...* *D: Tem como?* *Professora: Tem, só colocar x=.* *Professora: Deu, agora vamos analisar. Então quando x é -2 e 3, eles tem o mesmo valor de y.* *D: Tá, mas isso é por causa do...* *Professora: Continua.* *D: Da função, não é? Da curva da função.* *Professora: Sim, por que? O que ela é? Se tu dividir ela ao meio?* *D: Simétrica.* *Professora: Isso aí.* *E: Ah, é por que ela, não sei sora.* *Professora: Se tu divide, colocar um no meio.* *E: Elas são iguais.* *D: Então os valores são iguais, porque ela é simétrica.* *Professora: Isso.*

Quadro 23: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 1.

O quadro 22, em azul, a professora explora o que o grupo havia feito para fazer a primeira questão. Ela pede que eles coloquem no *GeoGebra Graphing Calculator* todas as retas feitas anteriormente. Feito isso, eles analisam o que está explícito no aplicativo.

Em amarelo, após a análise, ainda no quadro 22, o estudante D se dá conta da resposta. Primeiramente diz que é por causa do desenho do gráfico. Por fim, após a professora intervir dizendo se dividir o gráfico no meio, o estudante D diz que a parábola é simétrica. Evidencia-se aqui a mediação da professora que auxiliou o grupo a concluírem a simetria da parábola.

As diretrizes curriculares nacionais (BRASIL, 1999), citadas na seção 3.1.1 dessa pesquisa, salientam que a matemática no Ensino Médio deve ultrapassar a visão de decoro de fórmulas e sim saber pensar a matemática. No trecho, em amarelo citado anteriormente, demonstra-se isso, os estudantes compreendendo a simetria da parábola podem partir para o encontro dos pontos de máximo/mínimo da parábola. Além disso, para que o grupo 2 obtivesse tal conclusão a mediação da professora, o uso do *GeoGebra Graphing Calculator* e as ações cooperativas foram importantes para a resolução da questão.

Questão 2:

D: Tá, tem que identificar o máximo e o mínimo. O mínimo é 3, só que olha o máximo. Tenta achar o máximo aí. É infinito eu acho. *E: é infinito.* *D: é infinito né? Mínimo é 3. Tá, eu vou botar assim ó, mínimo é 3 e o máximo vou colocar o coisinha do infinito. Tá bota a b aí.*

Quadro 24: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 2, item (a).

No quadro 24, o grupo resolve a questão pela análise gráfica e já encontra o ponto de mínimo no item (a). Sobre o ponto máximo, indicam que é infinito. A conclusão dos alunos demonstra que implicitamente, sem eles perceberem, já indicaram o conjunto imagem do gráfico. Ressalta-se que essa resposta foi realizada apenas com a análise gráfica.

Aplicativo desenha a função do item b e os alunos estão ajustando o zoom para tentar encontrar o ponto de mínimo ou máximo. *D: Que número é esse? Ai, bugou minha mente. Por que que não vai menor isso aqui? É assim?* *E: Olha...* *D: Acho que mudou, não mudou?* *E: Aí.* *D: É infinito também o máximo?* *E: É.* *D: E o mínimo?* *E: Mas acho que não é assim que a gente vê, acho que a sora, como ela adora fazer pegadinhas, tem alguma outra forma mais fácil de ver.* *Os alunos digitam no aplicativo a função, novamente.* *E: Mas olha só, acho que a gente tinha feito alguma coisa errada, porque o mínimo virou isso aqui, ó, 3 e pouquinho.* *D: Mas esse aqui é o mínimo do x e do y? É -3 tu acha?* *E: Seria mais um pouquinho, seria abaixo de -3 ainda.* *D: E o máximo seria infinito.* *Respondendo a letra c:* *Colocam a função no aplicativo.* *D: Tá, a c deu mínimo 2 e máximo é infinito.* *E: Só que esse é o problema, não da 2 exato, da número com vírgula.*

Quadro 25: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 2, item (b).

No item (b), exemplificado no quadro 25, em amarelo, o grupo não consegue encontrar o valor exato do ponto de mínimo. Mas, mesmo assim, os alunos deixam como resposta o que falaram. Em azul, ainda no quadro 25, o aluno E fala em poder haver um jeito mais simples de resolver a questão, então o grupo pede auxílio para a professora. Evidencia-se a cooperação no grupo, salientada por Bona (2012), citada na seção 3.2.1, sobre os ajustes das ações e aceitações ou negações dos fazeres uns dos outros.

Resolvendo a letra d *E: Olha isso.* *D: O máximo é 1* *E: E é infinito também.* *D: A hipótese é que sempre vai ter algum infinito.* *E: O máximo sempre vai ser infinito.* *D: Mas aqui tem um mínimo que é infinito.* *E: Não, o máximo...* *F: Tem um mínimo infinito.* *D: Então, sempre vai ter um dos pontos infinitos.* *E: O máximo é infinito.* *D: Não, mas é que esse máximo deu 1. Ó. O máximo dele deu 1, não deu infinito, o mínimo dele deu infinito.* *E: Por que aqui é mínimo?* *D: Porque é o menor.* *E: Ah.* *D: Então sempre terá um ponto infinito.*

Quadro 26: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 1, item (d).

O grupo 2 criou a hipótese na questão 1 de que a parábola sempre terá em seu conjunto imagem o infinito. Isso é exemplificado no quadro 26, em amarelo. Em azul, o aluno E pergunta o motivo de no gráfico o ponto ser mínimo e o aluno D responde que é mínimo por ele ser o menor. Nesse trecho percebe-se o quanto há o compartilhamento de saberes entre um aluno e outro quando trabalham em conjunto.

Professora: Conseguiram já o ponto de mínimo ou máximo? *E: Tá certo?* *Professora: É. Mas o ponto tem que ter as coordenadas x e y. Não esqueçam. Aqui tu botou só o y.* *D: Fala sério. Tem que botar tudo de novo. Mas o x é o que, é -3.* *E: deitado, -3.* *D: essa é a d, (-3,1). Agora tem que botar a outra.* *E: Na questão c, não tem o ponto x.* *D: Não é que não tenha, é que dá...* *E: Não tem.* *D: Seria y= 2 e x= -1, será?* *E: Não tem 2, não tem x, ele não encosta no x.* *D: Mas não precisa encostar. Quando tu faz um ponto, tá? Por exemplo, a coordenada (1,2).* *E: Tá, então seria -1.* *D: É, eu acho que é (-1, 2).* *E: E por que tá fazendo todo esse drama D?* *D: Mas calma, porque o ponto não tá exatamente no -1 e no 2. Entendeu? Aqui seria o ponto (-1,2), só que ele tá um pouquinho abaixo.*

Quadro 27: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 1.

No quadro 27, em amarelo, novamente o aluno D auxilia a compreensão de aspectos do gráfico de uma função quadrática do aluno E. Novamente há o compartilhamento de conhecimento entre dois sujeitos que estão exercendo o trabalho em conjunto e a cooperação conforme exposto por Piaget (1973), citado na seção 3.2.1 dessa pesquisa, que é o “operar em comum, isto é, ajustar por meio de novas operações (...) de correspondência, reciprocidade ou complementaridade.” (Piaget, 1973, p. 105) é evidenciada.

D: Teacher.
Professora: Pensando no gráfico aqui, qual é a parte que divide ele no meio?
D: É aqui, não é?
Professora: e tem algo a ver com o máximo e mínimo?
D: O mínimo é onde divide.
Professora: Tá, então beleza. Disse que se tu divide ao meio, como é que tu falou?
E: As partes ficam iguais, não tem nada de diferença, são iguais.
Professora: Por exemplo, tu tinha achado aqui do -2 era igual o 3.
D: Tem a mesma distância do ponto mínimo.
Professora: Isso. Isso é um jeito de descobrir onde ele tá.
D: Tá, mas qual seria a coordenada desse aqui?
Professora: Ah, tu pega duas que tu sabe o valor, que são iguais. Por exemplo aqui, no 0 é 3 né, quando será que é 3 também ali. De repente pode ser no meio do caminho. Acha dois pontos que são iguais e descobre o meio do caminho.
D: Mas o meio do caminho deles seria isso aqui né?
Professora: Sim, qual o nome dele?
D: É isso que gente tá na dúvida, o que a gente botaria.
Professora: Daí tu pode calcular.
D: Como?
Professora: Por exemplo nesse aqui, tu tinha o 3 e o -2 tu descobriu que eles davam no 4. Tu descobriu o meio do caminho dos dois, a média deles vai ser o x do máximo ou do mínimo. Pensa um pouquinho nisso.

Quadro 28: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 2.

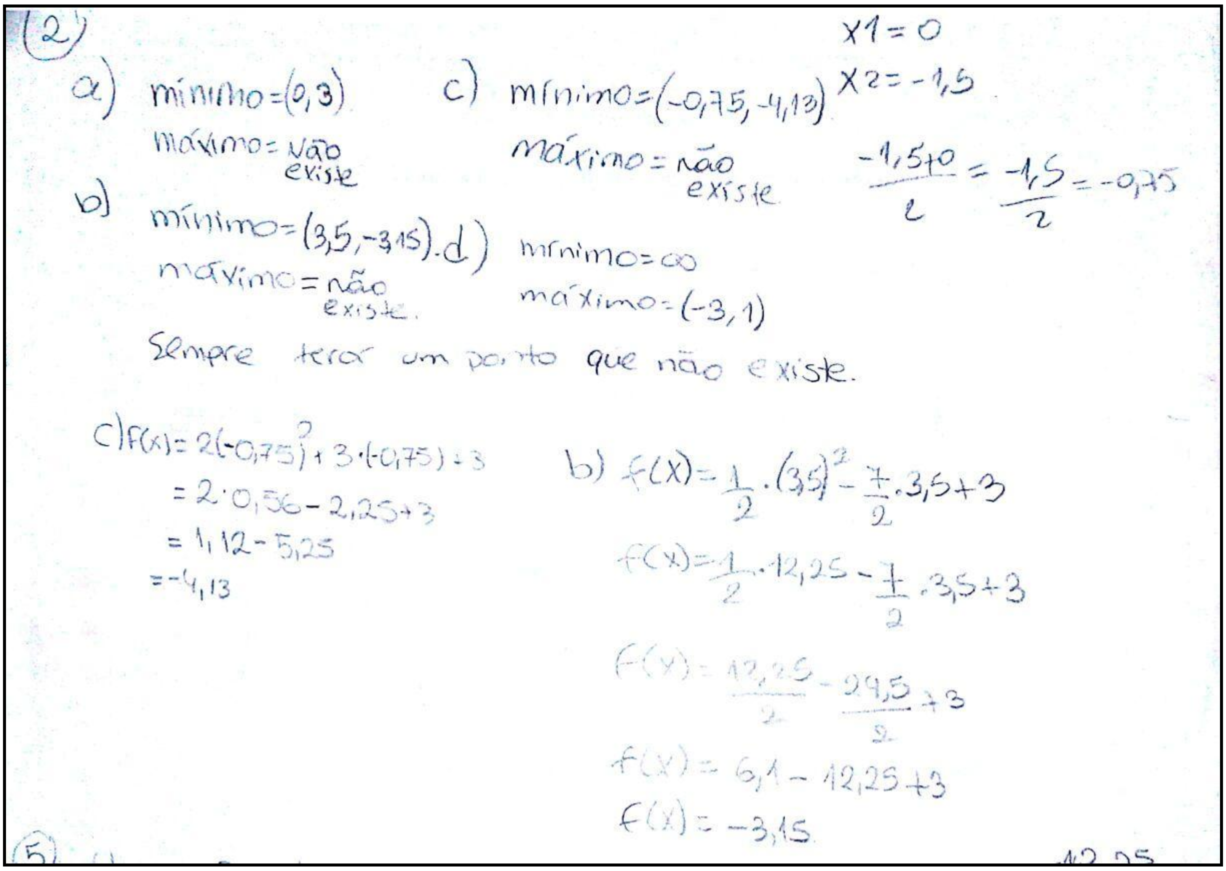
No quadro 28, em amarelo, percebe-se novamente mediação da professora pesquisadora auxiliando o grupo na resolução da questão. O estudante D compreendeu que o único ponto que não é simétrico de uma parábola é o ponto de mínimo ou máximo. Então, no trecho grifado em azul, o aluno E responde a professora dizendo que esse ponto divide o gráfico em duas partes iguais. Assim, o estudante D diz que dois pontos com mesma imagem têm a mesma distância até o ponto de mínimo ou máximo.

Apenas nesse trecho têm-se três conclusões importantes que podem levar os alunos a conjecturar como se calculam pontos de máximo/ mínimo de uma parábola. Logo, no trecho cinza, a professora auxilia o grupo a tentar calcular o meio do caminho de dois pontos com mesma imagem. Evidencia-se a cooperação, a mediação da professora e o uso do *Geogebra Graphing Calculator*.

D: Sora, a gente tá com dúvida de como botar esse aqui. *Professora: o c. Tá, lembra que a parábola é simétrica né. Então se tu pegar dois x que tem o mesmo y.* *D: Se tu achar o meio do caminho, a gente já descobriu.* *Professora: Fazendo o ponto médio entre esses dois x. Tu soma os dois x e divide por 2.* *D: Mas esse aqui não tem como saber ó. Não aparece nunca.* *Professora: Mas é a metade do caminho. Então, tu tem o x1= 0 e o x2= -1,5, ele vai tá no meio, soma os dois e divide por dois. Tu vai somar o -1,5 + 0 e vai dividir por 2. Ai tu vai ter um número. Esse vai ser o x desse ponto.* *D: Quanto vai dar?* *Professora: Ah, daí eu não sei.* *E: Da um número com vírgula, mais vírgula ainda.* *Professora: isso quer dizer a metade do caminho. Tu soma os dois x e divide por 2.* *D: Então o x vai ser -0,75.* *Professora: Aí pra descobrir o y é só tu substituir na tua lei da função, fazer esse ao quadrado.* *D: Ah então isso aqui tá errado?* *Professora: não sei, tem uns que dá pra ver direto no gráfico, outros que não. Esses que não tu vai fazer esse caminho aí. Tu olha o gráfico, vê dois pontos que tu acha o x, por exemplo, eu sei que o y é 3, 5 ou 6, daí eu acho dois x pra esse y pego a metade do caminho deles, descubro o x do ponto. Depois só substituo na lei.* *D: Por que o x1 aqui é 0?* *Professora: ah porque a gente viu aqui ó, a gente pegou quando y é 3, quando y é 3, o x é 0 e o outro x é o -1,5, que tu me disse. A gente tem que achar a metade do caminho dessas duas coisas, então.* *D: Tá, então eu tenho que pegar o -0,75 e substituir aqui no lugar do x e eu vou descobrir o ponto máximo.* *Professora: É ponto mínimo não é?* *D: Ah, tá, tá. Vou descobrir o y aqui.* *Estão descobrindo o y de cada uma das questões que elas haviam aproximado o valor.*

Quadro 29: Diálogo grupo 2, atividade 3, questão 2

Novamente há a mediação da professora para com o grupo, como Amaral et. al. (2014), citados na seção 3.1.3 dessa pesquisa, salienta a importância da intervenção do professor de matemática para a promoção da aprendizagem dos estudantes. Como o grupo não estava conseguindo calcular o ponto de mínimo/máximo da questão, a professora auxiliou os alunos. Tal fato é expresso no quadro 29, trecho grifado em amarelo. Após eles efetuarem a média entre as duas abscissas de mesma imagem, a professora os informou que é só substituir o valor encontrado na lei da função, assim ele encontrariam a ordenada do ponto.



(2)

a) mínimo=(0,3)
máximo= não existe

b) mínimo=(3,5,-3,15)
máximo=não existe

c) mínimo=(-0,75,-4,13)
máximo = não existe

d) mínimo=∞
máximo=(-3,1)

$x1 = 0$
$x2 = -1,5$
$\frac{-1,5+0}{2} = \frac{-1,5}{2} = -0,75$

Sempre terá um ponto que não existe.

c) $f(x) = 2(-0,75)^2 + 3\cdot(-0,75) + 3$
$= 2\cdot 0,56 - 2,25 + 3$
$= 1,12 - 5,25$
$= -4,13$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(3,5)^2 - \frac{7}{2}\cdot 3,5 + 3$
$f(x) = \frac{1}{2}\cdot 12,25 - \frac{7}{2}\cdot 3,5 + 3$
$f(x) = \frac{12,25}{2} - \frac{24,5}{2} + 3$
$f(x) = 6,1 - 12,25 + 3$
$f(x) = -3,15$

Figura 18: Resolução da atividade 3, grupo 2, questão 2.

A figura 18 mostra a resolução do grupo 2 da questão 2. Após as discussões e intervenções da professora o grupo conseguiu elaborar uma hipótese, mesmo que implícita, para o cálculo do ponto máximo/mínimo de uma função quadrática. Ressalta-se nessa questão como foi importante a mediação da professora, a cooperação dos estudantes e o uso do *GeoGebra Graphing Calculator* que juntos oportunizaram as conjecturas do grupo 2.

Questão 3:

C: Sim. *B: Faltou teu argumento.* *C: Mas é que a gente sabe que uma função quadrática tem um ponto de máximo e mínimo né? Não sabe?* *A: Eu acho que é por causa da forma dela de parábola.* *C: É.*

Quadro 30: Diálogo grupo 1, atividade 3, questão 3.

Bona (2012), citada na seção 3.2.1, sobre os ajustes das ações, negações ou aceitações dos fazeres dos sujeitos. No quadro 30, percebe-se que o aluno B não se convence da resposta do aluno C, então o aluno C explica no trecho grifado. Porém, não convencendo com seu argumento, o aluno A completa que é pelo desenho da parábola. Assim, o grupo aceita que o gráfico ter forma parabólica faz com que tenha pontos de máximo ou mínimo.

Questão 4:

C: Deixa eu pegar um lápis. A sora me explicou assim ó, pra ti saber fazer aquela questão aqui ó. Daí marca 1 e o 3. Marcou aqui daí ponto mínimo vai ser aqui ó, entendeu, sempre passando no ponto. Passar nesse ponto pode ser quantas funções quiser, daí ela é infinita. *B: ahh... tá.* *C: Entendeu?* *B: sim, entendi.* *C: Ela vai ser infinita e tal, porque sempre vai ter esse ponto.* *B: porque sempre vai passar por ele.* *C: É, o A falou que não era infinito.* *B: Por que é infinito?* *C: Por causa que ela pode passar um monte de vez, pode passar assim, pode ser mais aberta...* *A: Ela não é infinita.*

Quadro 31: Diálogo grupo 1, atividade 3, questão 4.

Como mostra o quadro 31, em seus trechos grifados, o aluno C desenha no papel sua explicação para a resposta da questão 4, tentando convencer seus colegas. O aluno A não aceita a resposta. Nesse trecho exemplifica-se o que Bona (2012), que consta na seção 3.2.1 deste trabalho, comenta sobre os ajustes dos atos dos sujeitos. No caso desse trecho são as aceitações ou não do grupo relativo à resposta do aluno C

A explicação do aluno C, esboçando as diversas parábolas com mesmo ponto de mínimo expressa na figura 19:

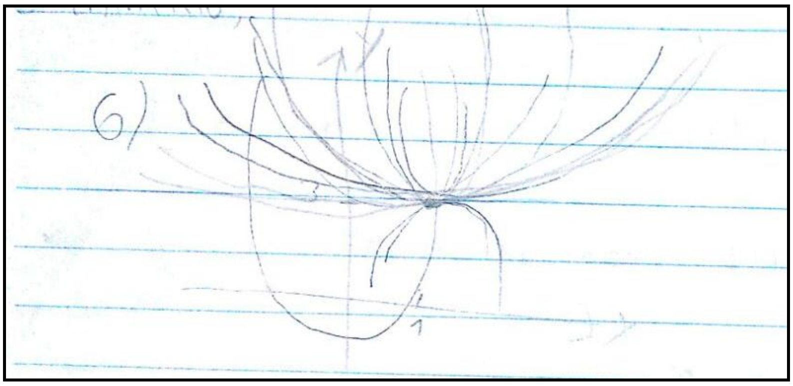


Figura 19: Resolução da atividade 3, grupo 1, questão 4.

C: O sora.
A: Ele falou que só é infinita porque ele não sabe um número aproximado. Ela não é infinita. Pode ter a reta. E aí?
C: Ela é infinita, porque é muita, muita, muita.
A: Mas não é infinita.
B; Tá, mas como é que a gente vai contar quantas possibilidades.
C: Sora, pode passar infinitamente nesse ponto, no ponto mínimo, da questão 6 né?
Professora: Qual é tua opinião (aluno C)?
C: Acho que é infinito.
B: Acho que são muitas.
A: são muitas, mas não infinitas.
A: tá mas não é infinita.
Professora: Tá, muitas quantas?
A: Muitas, muitas.
Professora: um número que a gente não consegue contar é qual?
B: é infinito.
Professora: mas quando acaba?
A: Ah, daí...
Professora: então, quantas parábolas passam por aqui?
A: infinitas. Mas uma hora acaba, nada tira da minha cabeça.
Professora: Tá, pensa numa parábola qualquer que tem esse ponto de mínimo. Eu posso alterar os valores de a, b ou c e manter esse mesmo ponto, assim como tá o desenho de vocês, todas essas parábolas desenhadas tem uma lei e o que muda são os parâmetros. Esses parâmetros eles podem assumir qualquer valor dos números reais. E vocês sabem quantos números reais existem?
A: Infinitos.
Professora: Então, quantas parábolas existem com esse ponto de mínimo?
Todo o grupo: Infinitas.

Quadro 32: Diálogo grupo 1, atividade 3, questão 4.

No quadro 32, os trechos grifados mostram os alunos B e C tentando convencer o aluno A de que existem infinitas parábolas com ponto de mínimo equivalente. Após desenhos e falas, eles decidem chamar a professora pesquisadora para convencer o aluno A de que essa é a resposta correta. Então, a professora pesquisadora retoma os parâmetros da função para convencer o aluno A.

Questão 5:

C: A 6 é a mesma coisa.
A: É só que pra baixo.
B: É a mesma coisa, só que vai ser negativo.

Quadro 33: Diálogo grupo 1, atividade 3, questão 5.

Os alunos A, B e C seguiram o mesmo raciocino da questão 4. Esboçaram as diversas parábolas com esse mesmo ponto de máximo. Tendo como exemplo a questão 4, os alunos utilizam a mesma resposta para a questão 5 (figura 20 e quadro 33).

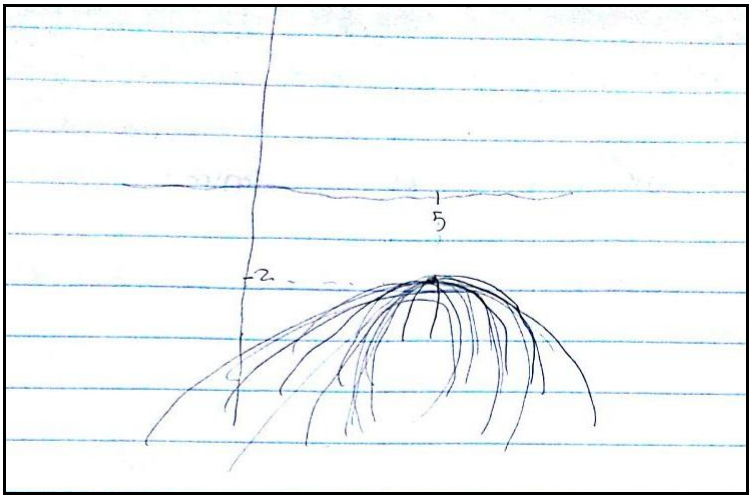


Figura 20: Resolução da atividade 3, grupo 1, questão 5.

Questão 6:

C: Precisa ter o a*, a sora falou.* *B: É, o* a*, porque tem que ser positivo ou negativo pra entender a função.* *A: Mas essa ainda não é a resposta, não é isso que tá pedindo.* *C: Não, a sora já viu, já.* *C: Não, tá certo. Porque tipo, pra ter, saber o ponto máximo tem que ter o* a*, por que o* a *diz se é positivo ou negativo.* *A: ata.*

Quadro 34: Diálogo grupo 1, atividade 3, questão 6.

Nesse trecho do quadro 34, em amarelo, o aluno C se convenceu que o parâmetro *a* definia se a função possui ponto de máximo/mínimo pelo que a professora havia explicado para ele, porém ele não exibiu seu argumento para que essa resposta seja a certa. O aluno B tenta explicar de forma detalhada, explicando que é o parâmetro *a* que indica o sinal da função quadrática. Por fim o aluno C exibe seu argumento explicando da mesma forma que o aluno B. Assim, eles “convencem” o aluno A.

O trecho grifado exemplifica cooperação de acordo com Piaget (1973) na seção 3.2.1 desta pesquisa, em que as ações dos sujeitos uns sobre os outros é uma ação, a busca pela resposta final, pelo entendimento de que existem infinitas parábolas que possuem mesmo ponto de máximo/ mínimo.

Após a análise das resoluções por áudios em papel dos grupos 1 e 2, constatou-se que houve cooperações, conceito tralhado por Piaget (1973) exemplificados na seção 3.2.1 dessa pesquisa. Ao cooperarem em prol de respostas das três atividades, os dois grupos conseguiram construir um saber sobre os aspectos gráficos e algébricos das funções quadráticas.

Além disso, a tecnologia digital, uso do *software GeoGebra Graphing Calculator* desempenhou um papel importante na aprendizagem dos alunos. Já que foi com a análise gráfica que os alunos conseguiram responder a maioria das questões. Borba et. al. (2014), exemplificados na seção 3.1.2 desse trabalho, defendem a utilização e a exploração dessa tecnologia dentro da sala de aula, assim como as diretrizes curriculares nacionais (Brasil, 1999), explanadas na seção 3.1.1 desta pesquisa, em que admitem que o ensino da Matemática deva acompanhar o avanço tecnológico, inserindo essa tecnologia nas aulas dessa ciência.

Inserir a tecnologia nas aulas de matemática vem sendo explorado nos livros didáticos, analisados na seção 3.1.2. Mesmo que alguns apenas a utilizem para visualização, percebe-se que a tecnologia pode estar presente nas salas de aula do próximo ano. Porém, o objetivo, elencado pelas diretrizes curriculares nacionais (Brasil, 2002), seção 3.1.1, de que os estudantes possam aprender sem memorização de regras e fórmulas, ainda é aspirado e não comentado nos livros didáticos presentes nessa pesquisa.

Defendendo trabalhos coletivos e inserção da tecnologia na sala de aula de matemática, exemplificaram-se a partir de três atividades aplicadas e analisadas a quantidade de saberes e aprendizagens que ocorreram nos momentos de aula. Todo esse conhecimento construído transpareceu nos áudios de cada grupo, quando os sujeitos dessa pesquisa discutiam, concordavam ou refutavam cada argumento postado durante a resolução das questões.

6 REFLEXÕES FINAIS

A pesquisa iniciou-se com a pergunta: "*Como a cooperação influencia na aprendizagem das funções quadráticas por meio do estudo dos seus coeficientes?*".

Iniciaram-se pesquisas sobre como o ensino de funções encontrava-se relacionado com a tecnologia digital. Foram feitas análises em quatro livros didáticos de matemática do 1º ano do Ensino Médio, recentemente aprovados pelo PNLD, e a busca do que as diretrizes curriculares nacionais demandam sobre o ensino desse conteúdo. O estudo sobre o processo cognitivo foi realizado baseado nas ideias de Jean Piaget sobre cooperação.

Ao averiguar os resultados da pesquisa teórica na seção 3.1, percebeu-se uma falta de harmonia entre o que enfatizam as diretrizes e os livros didáticos em relação à tecnologia combinada com trabalhos coletivos e a possível construção do conhecimento pelos estudantes, que busca minimizar a memorização de regras e fórmulas. Posteriormente, na tentativa de responder a pergunta central desse trabalho, elaborou-se uma sequência de atividades que fosse sobre funções quadráticas utilizando tecnologia móvel (*GeoGebra Graphing Calculator*) e os sujeitos da pesquisa fossem estudantes da escola básica. A partir da análise do referencial teórico estudado, optou-se por organizar os participantes em grupos, com o objetivo de observar os processos cognitivos e metodológicos ao longo da experimentação de ensino.

Tão logo na primeira atividade que os estudantes conheceram o GeoGebra versão "móvel", mostraram o domínio das funcionalidades do aplicativo exigidas para a exploração das questões. Os grupos mostraram-se interessados e todos conseguiram realizar a atividade por completo. Tal fato ocorreu também nas outras duas atividades realizadas. Após a familiarização com o software, a exploração das questões, ao invés de apenas respostas estáticas, do tipo efetuar cálculos e informar a resposta final, os alunos conseguiram criar hipóteses, conjecturar e explorar as características da função quadrática e seu gráfico.

A sequência de atividades foi realizada em grupos. Pressupõe-se que essa escolha de organização dos estudantes no momento das atividades favoreceu e forneceu elementos para aprendizagem de matemática. Observou-se que um ambiente em que os sujeitos, em conjunto, realizam as atividades propiciou o surgimento de diálogos que os conduziram às conclusões diante de cada questão. Ademais, essas interações levaram os alunos a conversarem sobre matemática. Novamente destaca-se que a partir do processo dialógico entre os estudantes e mediados pela professora fizeram emergir a criação, teste, validação/reorganização de conjecturas.

Nota-se que a utilização da tecnologia móvel por meio de um aplicativo que os sujeitos pudessem interagir entre si e com o artefato tecnológico foi o meio para que acontecessem os diálogos. Ao utilizar o *GeoGebra Graphing Calculator* nota-se que o "movimento" fornecido aos elementos que antes eram predominantemente estáticos nos livros didáticos oportunizou aos estudantes conduzir o processo da própria aprendizagem, ou seja, a partir de suas palavras elaborar o seu próprio entendimento sobre a matemática que estavam estudando.

Ao interagirem com o aplicativo e discutirem com os colegas sobre as resoluções das questões fez-se presente a cooperação. De maneira simultânea, os estudantes, gradativamente, conseguiram entender os papéis dos coeficientes e as características gráficas da função quadrática. Durante as discussões, na análise dos áudios transcritos, perceberam-se colaborações por parte dos alunos, ou seja, enquanto cooperavam exerceram a colaboração. Em outras palavras, observou-se que nos diálogos o processo de argumentação matemática se faz presente, e isso oportunizou que todos os participantes de alguma forma construíssem conhecimentos matemáticos.

Portanto, uma consequência e contribuição da presente pesquisa é olhar para o diálogo entre os pares na sala de aula como elemento necessário para a aprendizagem da matemática. Notou-se com a pesquisa, que oportunizar momentos de compartilhamento e enfrentamento de situações de forma conjunta é bom para o grupo e também é benéfico para o sujeito individual. Tal metodologia de trabalho diametralmente se afasta da prática unidirecional de divulgação de conhecimentos em sala de aula, e dessa forma, enfatiza-se aqui importância de se trabalhar em sala de aula atividades de forma conjunta e com características colaborativas.

7 REFERÊNCIAS

AMARAL, Aruana do; FILHO, Júlio de Mesquita; NOGUEIRA, Raíra Elberhardt. **O Uso do Geogebra no Estudo da Função Quadrática**. II Congresso Nacional de Formação dos Professores; XII Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Professores. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/141829/ISSN2357-7819-2014-4274-4286.pdf?sequence=1. Acesso em junho de 2017.

ARAÚJO, Joselito Elias de; Silva, José Vinícius do Nascimento. **Uma abordagem sobre o estudo de funções quadráticas usando o GeoGebra**. Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências, 2016. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV058_MD4_SA91_ID782_10052016213929.pdf. Acesso em junho de 2017.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: Interação e tecnologia**. Volume 1. 2. Ed. São Paulo: Leya, 2016.

BOGDAN, Robert.; BIKLEN, Sari. ***Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.*** Porto: Porto Editora, 1994.

BONA, Aline Silva de. **Espaço de aprendizagem digital da matemática:** O aprender a aprender por cooperação. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/63132. Acesso em julho de 2017.

BONA, Aline Silva De.; FAGUNDES, Léa da Cruz; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. A Cooperação e/ou a Colaboração no Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática. **RENOTE- Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 2, 2011. Disponível em: http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/25163. Acesso em outubro de 2017.

BONA, Aline Silva de; BRAVO, Lucas; MACIEL, Vinicius; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Aprendendo matemática na rede social *facebook* por ações cooperativa. **Scientia Tec: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia do IFRS- Câmpus Porto Alegre**, Porto Alegre, v.1 n.1, p. 3-16, jan/jun. 2014. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/ScientiaTec/article/view/1420/0. Acesso em outubro de 2017.

BONA, Aline Silva de; LUTZ, Maurício Ramos. **Explorando os coeficientes da função quadrática por meio do *software* Winplot: Uma experiência com alunos do 2º ano do Ensino médio.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v. 10, n.2, p. 209-226, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/40105. Acesso em junho de 2017.

BONA, Aline Silva de; SCHÄFER, Patrícia Behling; FAGUNDES, Léa da Cruz; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Cooperação na Complexidade: Possibilidades de Aprendizagem Matemática suportadas por Tecnologias Digitais. **CINTED- UFRGS: Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 2, dezembro, 2011. Disponível em: http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/25168/14659. Acesso em outubro de 2017.

BORBA, Marcelo de Carvalho, GADANIDIS, George e SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**. 1. Ed.- Autêntica Editora, 2014. 152 p. (Coleção: Tendências em educação matemática)

BORBA, Marcelo de Carvalho, PENTEADO, Miriam Godoy- **Informática e Educação Matemática** - 2. Ed. - Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 104 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 2).

BORTOLOSSI, Humberto José; PESCO, Dirce Uesu; REZENDE, Wanderley Moura. **Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra**. 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra, p. 74-89, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8370/6580. Acesso em junho de 2017.

BRASIL, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em julho de 2017.

BRASIL, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Bases legais.** Brasília: MEC, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em julho de 2017.

CAIRES, João Batista Silva; NASCIMENTO, Jorge Costa.**Um estudo de funções polinomiais de 1º e 2º graus em ambiente informatizado**. Revista Eventos Pedagógicos. V.3, n.3, p.390-409, Ago-Dez. 2012. Disponível em: http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/eventos/article/viewFile/946/677. Acesso em junho de 2017.

CAMARGO, Liseane Silveira; BECKER, Maria Luíza Rheingantz. O Percurso do Conceito de Cooperação na Epistemologia Genética. **Edu. Real.**, Porto Alegre, v. 37, n. 2, p. 527-549, maio/ago, 2012. Disponível em: http://seer.ufrgs.br/educacaoerealidade/article/view/17341. Acesso em outubro de 2017.

COLET, Elita Bavaresco. **Uma nova proposta para o ensino de funções quadráticas.** Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica. Instituto de Matemática- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134088/000983935.pdf?sequence=1. Acesso em junho de 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações: Ensino Médio**. 3. Ed. São Paulo: Ática, 2016.

FLICK**,** Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa** / Uwe Flick ; tradução. Joice Elias Costa. - 3. ecl. - Porto Alegre : Artmed, 2009v. 405 p.

GIRALDO, Victor Augusto; GUIMARÃES, Luiz Carlos; MURICI, Maria Lucia. **Funções reais: possibilidades em um ambiente de geometria dinâmica**. IV HTEM–Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática, 2008. Disponível em: http://limc.ufrj.br/htem4/papers/69.pdf. Acesso em junho de 2017.

GOMES, Ruth Cristina Soares; GHEDIN, Evandro. O desenvolvimento cognitivo na visão de Jean Piaget e suas implicações a educação científica. **VIII ENPEC: Encontro Nacional de Pesquisa em educação em Ciências**, dezembro, 2011. Disponível em: http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/viiienpec/resumos/R1092-2.pdf. Acesso em outubro de 2017.

IEZZI, Gelson et. al. **Matemática: ciência e aplicações: Ensino Médio**. Volume 1. 9. Ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LOPES, Sandra Pereira. **Registros de representações semióticas no estudo das funções polinomiais de segundo grau.** XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas. Curitiba- Paraná, 2013. Disponível em: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1554_1454_ID.pdf. Acesso em junho de 2017.

MEDEIROS, Margarete Farias; SCHARDOSIM, Erica. **Utilização do Software Geogebra No Ensino E Aprendizagem De Funções Polinomiais Do Segundo Grau.** 3º Simpósio de Integração Científica e Tecnológica do Sul Catarinense. Disponível em: http://emt2015.pbworks.com/w/file/fetch/94667282/SICT-SUL_Artigo_8337549020%20erica.pdf Acesso em junho de 2017.

MIRAGEM, Fernando Flores; ROCHA, Josy. **Explorando a função quadrática com o software Winplot**. CINTED-UFRGS. Novas Tecnologias. V. 8 n.3, dezembro 2010. Disponível em: http://seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/18105/10677. Acesso em junho de 2017.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**. 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2015.

PIAGET, Jean. **Estudos Sociológicos**. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

PIAGET, Jean. O trabalho por equipes na escolha- Jean Piaget. **Revista de educação**, São Paulo set/dez, 1936, tradução Luiz G. Fieury. Disponível em: https://www.ufrgs.br/psicoeduc/piaget/o-trabalho-por-equipes-piaget/. Acesso em outubro de 2017.

RICARDO, Jonas da Conceição. **Uma proposta para o ensino de funções quadráticas mediada pela tecnologia: um estudo de caso.** Vassouras, 2012, 135p. Dissertação, Universidade Severino Sombra. Pós- Graduação Stricto-Sensu em Educação Matemática. Disponível em: http://www.uss.br/arquivos/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/dissertacoes/2012/Dissertacao_Jonas_FichaOK.pdf. Acesso em junho de 2017.

SANTOS, Luciana V.; SILVA, Adriano C.; SOARES, Willames de A.. **Utilização do Winplot como *software* educativo para o ensino de matemática**. Revista Diálogos n.6- Revista de Estudos Culturais e da Contemporaneidade- UPE/ Faceteg- Garanhuns/ PE- 2012. Disponível em: http://www.revistadialogos.com.br/Dialogos_6/Dialogos_6_Willames_Adriano_Luciana.pdf. Acesso em junho de 2017.

SILVA, Rodrigo Sychocki; RIBEIRO, Alexandre Moretto; SILVA, João Luis Tavares;. História da matemática & tecnologia da informação e comunicação: uma experiência semipresencial cooperativa na formação de professores. **Tear: Revista de educação e Tecnologia**, Canoas, v.2, n.2, 2013. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/view/1804. Acesso em outubro de 2017.

SILVA, Willian Ribeiro da. **Aplicação do GeoGebra no estudo de funções quadráticas**. Revista Digital FAPAM, Pará de Minas, v. 5, n.5, 160-185, abr. 2014. Disponível em: http://fapam.web797.kinghost.net/periodicos/index.php/synthesis/article/view/87/82. Acesso em junho de 2017.

SOUSA, Reilson Matos de. **O uso do GeoGebra no ensino de função.** Satarém, 2014, 77p. Dissertação, Universidade Federal do Oeste do Pará. Pós- Graduação matemática em rede nacional. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1128/2011_00908_REILSON_MATOS_DE_SOUSA.pdf?sequence=1. Acesso em junho de 2017.

TREVISO, Vanessa Cristina. **As relações sociais para Jean Piaget:** implicações para a Educação Escolar. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/90280. Acesso em outubro de 2017.

8 APÊNDICES E ANEXOS

ANEXO 1- TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO ALUNOS

Termo de consentimento entregue e assinado pelos alunos do Colégio de Aplicação/UFRGS, da turma 101 do Ensino Médio Regular.

Eu,____, R.G. _______, responsável pelo (a) aluno(a)_, da turma_____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Estudo de funções quadráticas: um olhar para a colaboração e cooperação**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Shéridan dos Reis Pinto . Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelo Professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do email: sychocki.rodrigo@gmail.com. Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: Um dos objetivos principais da pesquisa é desenvolver uma sequência didática que aborde o estudo dos coeficientes da função quadrática por meio do *software* GeoGebra e a colaboração e cooperação entre os alunos. Ou seja, como a colaboração e cooperação influenciam na aprendizagem de funções quadráticas por meio do estudo dos seus coeficientes.

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio de gravações em áudio das aulas analisadas, bem como da participação em aula, em que ele (ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. A colaboração do (a) aluno (a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o (a) pesquisador (a) responsável pelo e-mail: sherydrp@gmail.com.

Fui ainda informado (a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre,__de_____de_____.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa

APÊNDICE 1- ATIVIDADE 1: VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

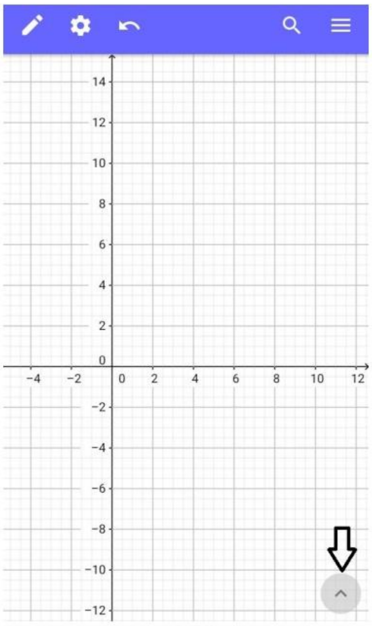
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

COLÉGIO DE APLICACÃO- 1º ANO

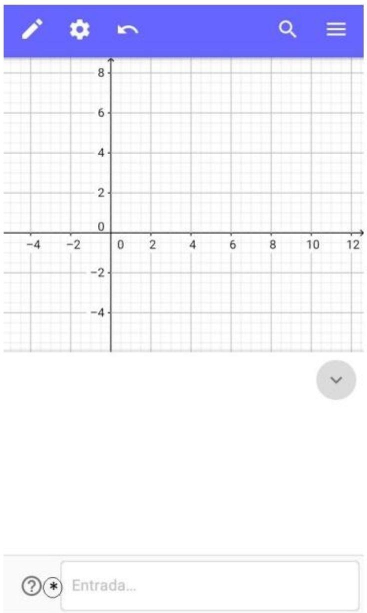
Professor: Eduardo Britto **Estagiária: Shéridan dos Reis**

Função Quadrática

- Breve manual de utilização do software GeoGebra Graphing Calculator para smartphones.

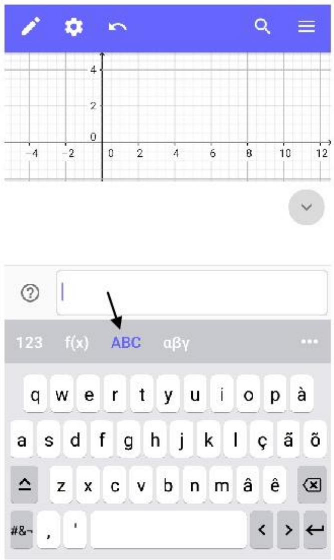


Visualização inicial do software



* Campo de entrada para inserir a função

Aba que disponibiliza campo de entrada



[1] (123) Calculadora

[2] (a^2) Elevar um número ou incógnita ao quadrado

[3] (x) Operação de multiplicação

[4] (÷) Operação de divisão

[5] (+) Operação de adição

[6] (-) Operação de subtração

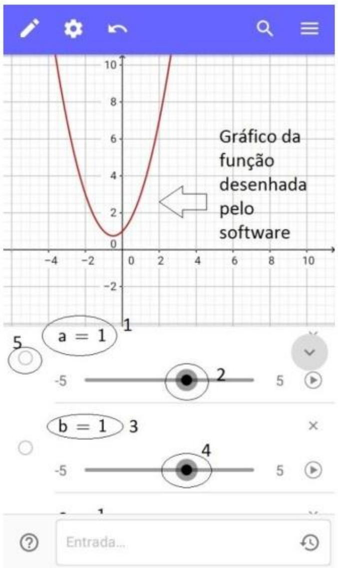
[7] (↵) Tecla Enter para a entrada da função e desenho de seu gráfico

→ Inserção de letras se necessário

- Uma função *f*: R→R é uma função quadrática, quando existem números reais *a*, *b* e *c*, com $a \neq 0$, tal que *f* leva *x* em ax^2+bx+c.

Atividades:

1. Escreva no campo *entrada* do *software* a lei de formação da função quadrática: $f(x) = ax^2+bx+c$.



Esse é o gráfico gerado pela entrada de ax^2+bx+c.

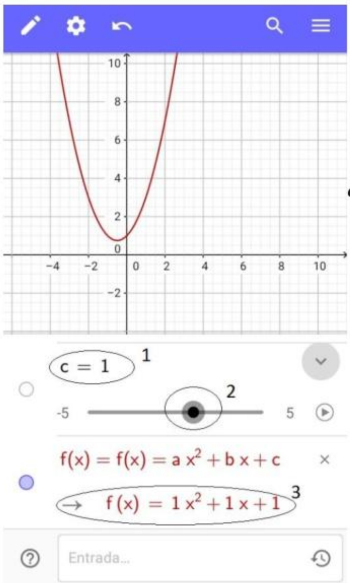
[1] Parâmetro *a*

[2] Botão que varia o parâmetro *a*

[3] Parâmetro *b*

[4] Botão que varia o parâmetro *b*

[5] Botão que pode exibir ou esconder objetos.



[1] Parâmetro *c*

[2] Botão que varia o parâmetro *c*

[3] Lei de formação da *f(x)* com os valores de *a, b* e *c*.

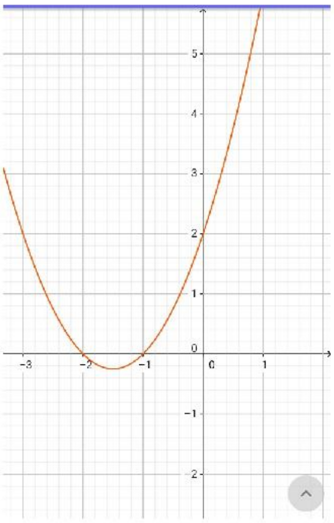
a) Varie o parâmetro *a*. Discuta com seus colegas. O que vocês podem dizer sobre o movimento do gráfico da função? Ele se modifica? Descrevam o movimento.

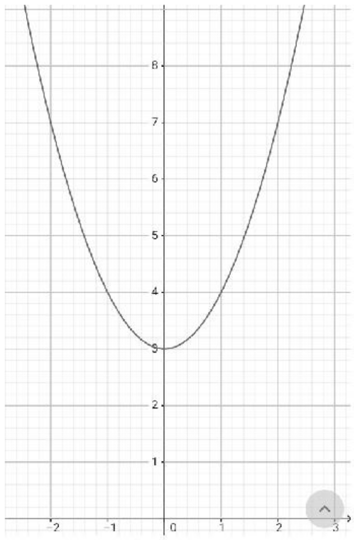
b) Varie o parâmetro *b*. Discuta com seus colegas. O que vocês podem dizer com seus colegas. O que vocês podem dizer sobre o movimento do gráfico da função? Ele se modifica? Descrevam o movimento.

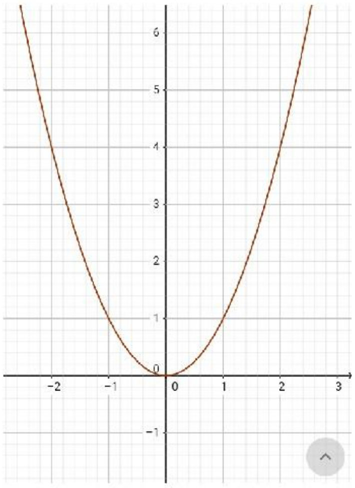
c) Varie o parâmetro *c*. Discuta com seus colegas. O que vocês podem dizer sobre o movimento do gráfico da função? Ele se modifica? Descrevam o movimento.

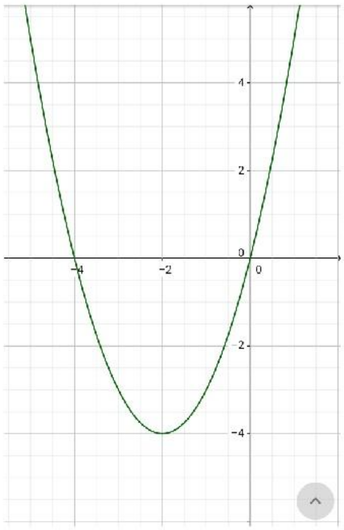
d) Existe algum valor para "a" que modifica esse tipo de gráfico? Explique.

2. Dados *f(x)* = x^2-6x+8. Quais os parâmetros *a, b e c* dessa função?
3. Dados os gráficos abaixo. Vocês conseguem encontrar os valores dos parâmetros?









APÊNDICE 3- ATIVIDADE 2: ZEROS DA FUNÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO
ENSINO MÉDIO 1º ANO

Professor: Eduardo Britto Velho de Mattos **Estagiária: Shéridan dos Reis**

Função quadrática

Definição: Uma função possui raiz real, quando $f(x)= ax^2+bx+c$ possui valores reais para x tal que vale a igualdade: $f(x) =0$.

Atividade 1

1. Desenhe no GeoGebra Graphing Calculator as funções abaixo e encontre as raízes das mesmas:
   a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
   b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$
   c) $f(x) = x^2 + 2x - 8$
   d) $f(x) = x^2 - 9x$

2. Analisando o gráfico das funções (a), (b), (c) e (d), você poderia encontrar as raízes sem efetuar nenhum tipo de cálculo? Explore.

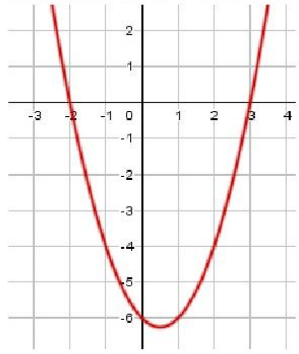
3. Desenhe no GeoGebra Graph. Calc. As funções abaixo e encontre as raízes das mesmas:
   a) $f(x) = (x - 2)(x - 3)$
   b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)(x + 2)$
   c) $f(x) = (x + 4)(x - 2)$
   d) $f(x) = x(x - 9)$

4. Analisando as funções da questão 1 e 3, vocês conseguem encontrar alguma relação entre elas? Explique.

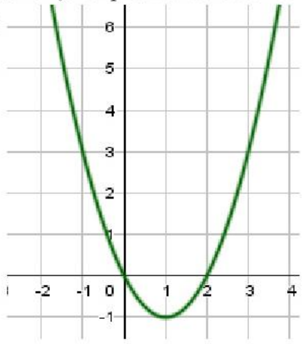
5. É possível encontrar as raízes de uma função quadrática sem efetuar cálculos? Explore.

6. Sem efetuar cálculos encontre as raízes e a lei das funções quadráticas abaixo:

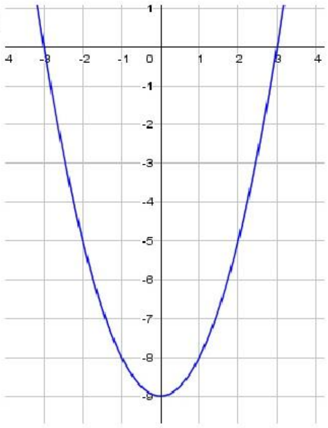
a)



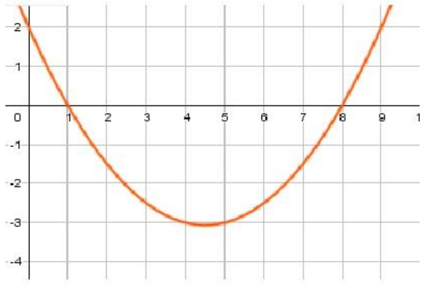
b)



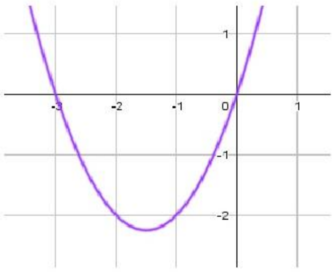
c)



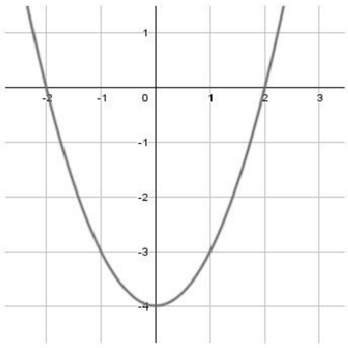
d)



e)



f)



APÊNDICE 4- ATIVIDADE 3: PONTOS MÁXIMO/MÍNIMO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO
ENSINO MÉDIO 1º ANO

Professor: Eduardo Britto Velho de Mattos **Estagiária: Shéridan dos Reis**

Função quadrática

Atividade 1

1. No GeoGebra Graphing Calculator insira a função: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Agora definam os três parâmetros como a=1, b = -1, c = -2. Atribuam para x os valores: x = -2 e x = 3. Agora calculem $f(-2) e\ f(3)$. Agora calculem $f(0) e\ f(1)$, o resultado fica com alguma característica? Por que isso acontece com a função quadrática que vocês definiram para análise? Explorem.

2. Dadas as funções abaixo, desenhe-as no Geogebra Graphing Calculator e indique as coordenadas do ponto máximo mínimo do gráfico:
   a) $f(x) = x^2 + 3$
   b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3$
   c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$
   d) $f(x) = -x^2 - 6x - 8$
   Após os cálculos feitos, elaborem/criem uma hipótese sobre os pontos de máximo/mínimo. Em seguida, expliquem/argumentem o motivo da escolha/criação da hipótese.

3. Uma função quadrática sempre tem ponto de máximo/mínimo? Argumentem.

4. Quantas funções quadráticas têm como mínimo o ponto P = (1;3)? Argumentem.

5. Quantas funções quadráticas têm como máximo o ponto P = (-2;5)? Argumentem.

6. O que precisa ocorrer na função quadrática para se ter um ponto de máximo/mínimo? Argumentem.