

# **APLICAÇÃO DA TEORIA DE DANO NA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO**

ROBERTO CARLOS PAVAN

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA.

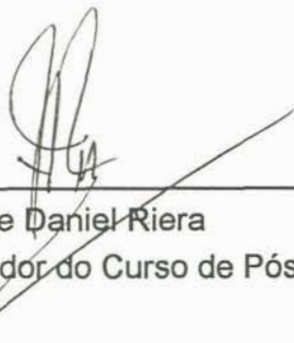
Porto Alegre  
Agosto, 1994

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



---

Prof. Guillermo Juan Creus  
Orientador



---

Prof. Jorge Daniel Riera  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

#### BANCA EXAMINADORA

- Prof. Guillermo Juan Creus (Orientador)  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Américo Campos Filho  
D.Sc. pela EPUSP
- Prof. Armando Miguel Awruch  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Sérgio Roberto Maestrini  
PhD pela North Carolina State University

## AGRADECIMENTOS

Estas com certeza não são páginas menos importantes que as demais pois, tão importante quanto o trabalho desenvolvido, são as pessoas e instituições que direta ou indiretamente contribuíram para a realização do mesmo.

Primeiramente, quero expressar meus agradecimentos às instituições que forneceram os subsídios técnicos e financeiros para que esta dissertação atingisse, da melhor forma possível, seus objetivos. Neste sentido, agradeço ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, representada por seus professores e funcionários; ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação de Amparo a Pesquisa do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

Agradeço, também, as pessoas que de algum modo contribuíram com esta dissertação. Primeiramente, ao Prof. Guillermo Juan Creus, pela sua compreensão, amizade, estímulo e auxílio, não apenas no sentido intelectual mas, também, contribuindo de forma direta na realização de meu trabalho. Depois, aos demais professores do curso que nunca negaram auxílio e contribuíram para um relacionamento de amizade. Aos colegas e amigos do curso, pelo incentivo, apoio, troca de conhecimentos e principalmente, pela alegria de nossa convivência diária. Aos meus pais e irmãos, por seu apoio e incentivo. Aos funcionários da secretaria e biblioteca, por seu auxílio e pronto atendimento. Por fim, aos meus amigos que tornaram meus dias mais alegres.

## SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS .....	iii
SUMÁRIO .....	iv
RESUMO .....	vii
ABSTRACT .....	viii
LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE TABELAS .....	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xiv
<b>CAPÍTULO 1</b>	
INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Características do comportamento do concreto .....	1
1.1.1. Comportamento instantâneo .....	2
1.1.1.1. Ensaio uniaxiais em tração e compressão .....	2
1.1.1.2. Carregamento sob compressão multiaxial .....	3
1.1.2. Comportamento diferido.....	6
1.2. O projeto de pesquisa .....	8
1.2.1. Objetivos .....	8
1.2.2. Importância.....	8
1.2.3. Metodologia .....	9
<b>CAPÍTULO 2</b>	
FORMULAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO .....	10
2.1. Modelo Uniaxial .....	11
2.1.1. Interpretação em termos da mecânica do dano contínuo.....	14

2.1.2. Aproximação numérica.....	15
2.1.3. Variações do modelo básico.....	15
2.2. Modelo multiaxial .....	17
2.2.1. Comportamento instantâneo .....	17
2.2.1.1. Caso linear.....	17
2.2.1.2. Caso não-linear .....	18
2.2.1.2.1. Modelo constitutivo para concreto .....	18
2.2.1.2.2. Critério de ruptura.....	18
2.2.1.2.3. Determinação dos parâmetros "a" e "k" .....	23
2.2.1.2.4. Pontos de intersecção das retas com a superfície de ruptura .....	24
2.2.2. Comportamento diferido .....	26

### CAPÍTULO 3

ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR E SUA IMPLI- MENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....	28
3.1. Formulação para E.P.T. (Estado Plano de Tensões) .....	28
3.2. Formulação para E.P.D. (Estado Plano de Deformações) .....	30
3.3. Formulação para Sólidos Axissimétricos .....	32
3.4. Formulação para Elementos Finitos Isoparamétricos .....	34
3.5. Formulação para o caso de não-linearidade geométrica - Flambagem .....	37
3.5.1. Processo de solução numérico básico para problemas não-lineares .....	38
3.5.2. O Método de Newton Raphson.....	39
3.5.3. O Método de Newton Raphson Modificado.....	40
3.6. Implementação computacional para não-linearidade do material.....	41
3.6.1. Solução de problemas de não-linearidade do material.....	42
3.6.1.1. Subrotina ALGOR.....	44
3.6.1.2. Subrotina CONVER .....	44
3.6.1.3. Subrotina STREP1.....	45
3.6.1.4. Subrotina OUTPUT.....	45
3.6.1.5. Subrotina GKN.....	46
3.6.1.6. LAÇO INCREM.....	46
3.6.1.7. LAÇO ITER.....	47
3.6.1.8. Teste NITER .....	47
3.6.2. Subrotina para cálculo das deformações viscoelásticas lineares e não-lineares .....	47
3.6.2.1. Subrotina INITSTR.....	47
3.7. Validação do programa .....	49

3.7.1. Validação da análise axissimétrica .....	49
3.7.2. Validação da análise de não-linearidade geométrica.....	50
3.7.2.1. Viga em balanço com carga concentrada no extremo livre .....	50
3.7.2.2. Pilar sob compressão excêntrica, com excentricidade inicial ....	52
<b>CAPÍTULO 4</b>	
<b>EXEMPLOS E APLICAÇÕES</b> .....	54
4.1. Comparação entre resultados teóricos (uniaxial) e resultados numéricos	54
4.2. Resultados numéricos ilustrativos do comportamento qualitativo do	
concreto .....	58
4.2.1. Ensaio Brasileiro à Tração .....	66
4.3 Comparação entre resultados experimentais e resultados numéricos....	70
4.4 Comparação de resultados de flambagem de pilares .....	75
4.4.1. Análise de pilares de concreto e concreto armado .....	75
4.4.1.1. Análise de pilares de concreto simples.....	75
4.4.1.2. Análise de pilares de concreto armado.....	78
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	81
5.1. Conclusões .....	81
5.2. Sugestões para trabalhos futuros .....	82
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	84

## RESUMO

A presente dissertação de mestrado tem por assunto a representação do comportamento mecânico do concreto sob cargas de curta e longa duração, incluindo efeitos não-lineares. Para tal fim trabalha-se com equações baseadas na teoria do dano contínuo. São propostas equações para o caso triaxial e, baseado nelas, é implementado um programa computacional.

Com diversos exemplos verifica-se que:

- a) A solução numérica aproxima bem os resultados teóricos.
- b) O comportamento do modelo representa bem as características qualitativas do concreto.
- c) O modelo permite aproximar bem alguns resultados experimentais, mas ainda deve ser aperfeiçoado, particularmente no que refere-se à identificação de parâmetros.

## ABSTRACT

This work aims to the representation of the mechanical behaviour of concrete under short and long time loads, including nonlinear effects. We propose equations based on the theory of Continuous Damage for three dimensional structures and implement the corresponding computer code.

Several examples show:

- a) The numerical solution approximates well simple analytical solutions.
- b) The model represents well the qualitative behaviour of concrete.
- c) The model approximates reasonably well some experimental results, but must still be improved, particularly with reference to parameter identification.



## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1

Figura 1.1 - Típica curva tensão/deformação para compressão uniaxial .....	2
Figura 1.2.- Curva tensão/alongamento para tração uniaxial .....	3
Figura 1.3 - Curva tensão/deformação para compressão multiaxial Tensões e deformações positivas em compressão .....	4
Figura 1.4 - Curva deformação volumétrica sob compressão biaxial	5
Figura 1.5 - Curva tensão/deformação sob carregamento cíclico de compressão .....	6
Figura 1.6 - Relação deformação/tempo sob altas tensões para concreto.....	7

### CAPÍTULO 2

Figura 2.1 - Modelo visco-elástico standard .....	10
Figura 2.2 - Modelo generalizado de elementos viscoelásticos (Kelvin).....	11
Figura 2.3 - Relação tensão/deformação da mola do elemento Kelvin .....	11
Figura 2.4 - Resultados teóricos para curvas de fluência excluída a deformação instantânea da mola .....	13
Figura 2.5 - Resultados teóricos para curvas de fluência incluída a deformação instantânea da mola .....	14

Figura 2.6 - Relação tensão/deformação corrigida .....	16
Figura 2.7 - Curvas de fluência corrigidas .....	16
Figura 2.8- Superfície de ruptura no espaço de tensões principais.	19
Figura 2.9 - Superfície de ruptura para estado triaxial de tensões ..	19
Figura 2.10 - Superfície de ruptura para estado biaxial de tensões.	20

### CAPÍTULO 3

Figura. 3.1 - Problemas de Tensão Plana .....	28
Figura. 3.2 - Problemas de Deformação Plana .....	30
Figura 3.3 - Típico problema de sólido axissimétrico .....	32
Figura 3.4 - Elemento serendipity de 8 nós .....	37
Figura 3.5 - Algoritmo de solução pelo método de Newton Raphson para variável simples .....	40
Figura 3.6 - Algoritmo de solução pelo método de Newton Raphson modificado para variável simples .....	41
Figura 3.7 - Módulos do programa para solução não-linear .....	41
Figura 3.8 - Organização do programa para aplicações bidimensionais não-lineares .....	43
Figura 3.9 - Organização do programa viscoelástico aplicando variáveis de estado ao M. E. F. ....	48
Figura 3.10 - Malha utilizada para cálculo de sólido axissimétrico (dimensões em "mm") .....	49
Figura 3.11 - Deslocamento radial em um cilindro espesso .....	50
Figura 3.12- Malha utilizada para viga em balanço com carga concentrada no extremo livre (dimensões em mm) .....	51
Figura 3.13 - Viga em balanço com carga concentrada no extremo livre.....	51
Figura 3.14 - Viga em balanço com carga concentrada no extremo livre.....	52
Figura 3.15 - Malha utilizada para coluna com excentricidade inicial (dimensões em mm) .....	53
Figura 3.16 - Pilar com excentricidade inicial .....	53

### CAPÍTULO 4

Figura 4.1 - (a)Modelo generalizado de elementos visco-elásticos (Kelvin não-linear) e suas constantes; (b)Sólido utilizado para cálculo Axissimétrico;(c)Sólido utilizado para cálculo de problemas de Estado Plano de Tensões (E.P.T.) e Estado Plano de Deformações (E.P.D.); (d) Eixos coordenados.....	54
Figura 4.2 - Malha utilizada para o exemplo rodado como sólido Axissimétrico( dimensões em mm ) .....	55
Figura 4.3 - Curvas de fluência, excluindo as deformações instantâneas .....	56
Figura 4.4 - Curvas de fluência, incluída as deformações instantâneas .....	57
Figura 4.5 - Curvas de fluência para diversos valores de "γ" .....	58
Figura 4.6 - Curva tensão/deformação para compressão uniaxial ...	59
Figura 4.7.- Curva tensão/deformação para tração uniaxial .....	59
Figura 4.8 - Curva tensão/deformação axial para compressão multiaxial .....	60
Figura 4.9- Curva tensão/deformação lateral para compressão multiaxial .....	61
Figura 4.10 - Curva tensão/deformação volumétrica sob compressão biaxial .....	62
Figura 4.11. Relação tensão/deformação instantânea para sólido axissimétrico sujeito a pressão lateral .....	63
Figura 4.12 - Malha utilizada para o exemplo rodado como Estado Plano de Tensões ( dimensões em mm ) .....	64
Figura 4.13 - -Relação tensão/deformação instantânea para estado plano de tensões sujeito a pressão lateral .....	64
Figura 4.14 - Curvas de fluência para estado plano de tensões sujeitas a pressão lateral .....	65
Figura 4.15 - Curvas de fluência para sólido axissimétrico sujeito a pressão lateral .....	66
Figura 4.16 - Malha utilizada para o Ensaio Brasileiro (dimensões em mm) .....	67
Figura 4.17 - Estado de tensões $\sigma_{xx}$ sob carregamento diâmetral .	67
Figura 4.18 - Estado de tensões $\sigma_{yy}$ sob carregamento diâmetral..	69
Figura 4.19 - Deformação versus tempo para o Ensaio Brasileiro de Tração .....	70
Figura 4.20 - Curvas tensão/deformação dependentes da pressão lateral.....	71

Figura 4.21 - Curvas tensão/deformação dependentes da pressão lateral.....	71
Figura 4.22-- Curvas tensão/deformação dependentes da pressão lateral .....	72
Figura 4.23 - Deformação versus tempo para diversos sistemas de carregamento .....	73
Figura 4.24 - Malha utilizada para sólido axissimétrico (dimensões em mm) .....	74
Figura 4.25 - Deformação versus tempo sob carregamento uniaxial de compressão .....	74
Figura 4.26 - Malha utilizada para pilar de concreto simples sujeito à compressão excêntrica (dimensões em mm) .....	76
Figura 4.27 - Relação carga/deslocamento de um pilar de concreto simples sujeito à compressão excêntrica. Não se limitou em $0.1f_c$ as tensões de tração no concreto .....	76
Figura 4.28-Relação carga/deslocamento de um pilar de concreto simples sujeito à compressão excêntrica. Tensões de tração no concreto limitadas a $0.1f_c$ .....	77
Figura 4.29-Deformações versus tempo para um pilar de concreto simples sujeito à compressão excêntrica .....	78
Figura 4.30 - Malha utilizada para pilar de concreto armado sujeito à compressão excêntrica ( dimensões em mm) .....	79
Figura 4.31 - Relação carga/deslocamento de um pilar de concreto armado sujeito à compressão excêntrica .....	79
Figura 4.32 - Deformações ao longo do tempo de um pilar de concreto armado sujeito à compressão excêntrica .....	80

## LISTA DE TABELAS

Tabela. 3.1 - Deslocamentos nodais, matrizes de deformação e volumes elementares para aplicações bidimensionais .....	35
Tabela 4.1 - Resultados numéricos de $\sigma_{xx}$ para diversos valores de "P" .....	68

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras romanas minúsculas

$\exp.$	Exponencial
$d$	Variável de dano.
$f_c = f_c$	Resistência do concreto à compressão.
$f_t$	Resistência à tração do concreto.
$t$	Tempo de interesse.
$t_{ref}$	Tempo de referência.
$b$	Fator de correção da mola.
$s_{ij}$	Componente desviadora do tensor de tensões.
$s$	Matriz do tensor de tensões desviadoras.
$\tilde{e}_{ij}$	Componente desviadora do tensor de deformações.
$e$	Matriz do tensor de deformações desviadoras.
$\tilde{q}_{ij}$	Variável de estado.
$q^o$	Variável de estado para deformação volumétrica.
$q^{s_{ij}}$	Variável de estado para deformações desviadoras.

### Letras romanas maiúsculas

$E$	Módulo de elasticidade do material.
$E_i$	Módulo de elasticidade do material relativo a mola do elemento "i".
$E_{ef}$	Módulo de elasticidade efetivo do material.
$E'$	Módulo de elasticidade do material corrigido.
$E_{ijkl}$	Tensor Elástico instantâneo.
$K$	Módulo de compressibilidade do material.

$K_o$	Módulo de compressibilidade para as deformações instantâneas.
$K_1$	Módulo de compressibilidade do primeiro elemento Kelvin.
$K_2$	Módulo de compressibilidade do segundo elemento Kelvin.
$G$	Módulo de corte do material.
$G_o$	Módulo de corte para as deformações instantâneas.
$G_1$	Módulo de corte do primeiro elemento Kelvin.
$G_2$	Módulo de corte do segundo elemento Kelvin.
$I$	Matriz identidade.
$\tilde{I}_s$	Segundo invariante do tensor desviador de tensões.
$I_\sigma$	Primeiro invariante do tensor de tensões.

### Letras gregas

$\beta$	Fator de não-linearidade da mola.
$\beta_i$	Fator de não-linearidade da mola do elemento "i".
$\beta'$	Fator de não-linearidade da mola corrigido.
$\beta_o$	Fator de não-linearidade para as deformações instantâneas.
$\beta_{1o}$	Fator de não-linearidade volumétrico para o primeiro elemento Kelvin.
$\beta_{1s}$	Fator de não-linearidade desviador para o primeiro elemento Kelvin.
$\beta_{2o}$	Fator de não-linearidade volumétrico para o segundo elemento Kelvin.
$\beta_{2s}$	Fator de não-linearidade desviador para o segundo elemento Kelvin.
$\sigma$	Tensão nominal.
$\sigma_L = \sigma_1$	Tensão longitudinal ou axial.
$\sigma_r = \sigma_2$	Tensão transversal.
$\sigma_r = \sigma_3$	Tensão transversal.
$\sigma_e$	Tensão de escoamento do material.
$\sigma_{ef}$	Tensão efetiva.
$\sigma^n$	Tensão nominal relativa ao incremento "n".
$\sigma_{max}$	Tensão máxima.
$\sigma_{ij}$	Tensor de Tensões.
$\sigma_o$	Componente hidrostática do tensor de tensões.
$\varepsilon$	Deformação específica.
$\varepsilon_{max}$	Deformação específica máxima.
$\varepsilon^n$	Deformação específica relativa ao incremento "n".
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações específicas.
$\varepsilon_o$	Componente hidrostática do tensor de deformações.
$\gamma$	Parâmetro de dano (corrige o módulo de corte).
$\gamma'$	Parâmetro de dano (corrige o módulo de compressibilidade).

$\eta$	Coeficiente de viscosidade do amortecedor.
$\Delta \varepsilon^n$	Varição da deformação específica relativa ao incremento "n".
$\Delta t$	Intervalo de variação do tempo.
$\delta_{ij}$	Delta de Kroneker.
$\theta$	Tempo de retardação.
$\theta_o$	Tempo de retardação para as deformações instantâneas.
$\theta_{1o}$	Tempo de retardação volumétrico para o primeiro elemento Kelvin.
$\theta_{1s}$	Tempo de retardação desviador para o segundo elemento Kelvin.
$\theta_{2o}$	Tempo de retardação volumétrico para o segundo elemento Kelvin.
$\theta_{2s}$	Tempo de retardação desviador para o segundo elemento Kelvin.
$\nu$	Coeficiente de Poisson do material.
$\nu_o$	Coeficiente de Poisson para as deformações instantâneas.
$\nu_1$	Coeficiente de Poisson do primeiro elemento Kelvin.
$\nu_2$	Coeficiente de Poisson do segundo elemento Kelvin.



## **1-INTRODUÇÃO**

Até recentemente, os métodos de análise de estruturas de concreto foram principalmente baseados em análises elásticas, combinados com vários procedimentos clássicos e fórmulas empíricas, baseadas em dados experimentais. O rápido desenvolvimento das técnicas de análise numérica e dos computadores digitais, estão mudando esta situação. Com o método de Elementos Finitos e utilizando-se análise não-linear, as características de deformação e ruptura de estruturas de concreto podem ser analisadas com mais precisão.

Um fator limitante da aproximação aos resultados reais, está na dificuldade de estabelecer-se modelos de deformação e ruptura que represente a realidade do comportamento do concreto. Portanto, muitos esforços continuam a ser feitos no sentido de melhorar a descrição matemática das relações constitutivas.

### **1.1. Características do comportamento do concreto**

O concreto é um material composto e como tal, apresenta um comportamento físico muito complexo.

O concreto é um material frágil. Tensões e deformações afetam o desenvolvimento de micro/macro-fissuras, especialmente na interface entre o agregado e a argamassa. Estas micro-fissuras iniciais são causadas pela segregação, retração e expansão térmica da pasta de cimento. Sob carga, micro-fissuras adicionais podem surgir na interface da pasta de cimento e agregado, que constitui o elo mais frágil do sistema. A progressão destas fissuras determina o comportamento não-linear.

### 1.1.1. Comportamento instantâneo

#### 1.1.1.1. Ensaio uniaxiais em tração e compressão

Uma típica curva tensão/deformação em um teste de compressão uniaxial é mostrada na figura 1.1. Há três estágios observados neste teste simples. O primeiro estágio corresponde a tensões de até 30% da resistência do concreto à compressão ( $f_c$ ). Neste estágio, as fissuras existentes no concreto, antes do carregamento, permanecem praticamente inalteradas. Assim o comportamento tensão/deformação é aproximadamente linear e elástico;  $0.3f_c$  é proposto como "limite de elasticidade". Além deste limite, a curva tensão/deformação começa a desviar-se de uma linha reta. Tensões entre 30% e 75% de  $f_c$ , caracterizam o segundo estágio, no qual as fissuras começam a aumentar em comprimento, largura e número. Posteriormente algumas fissuras nas proximidades da superfície do agregado começam a propagar-se na argamassa. Com o desenvolvimento das fissuras, a não-linearidade do material torna-se mais evidente. A propagação das fissuras, neste estágio, é ainda estável até as tensões alcançarem o nível de 75% de  $f_c$ . Este nível é geralmente denominado "começo da propagação instável da fratura". Aumentos adicionais da carga resultam em "fratura instável", e neste terceiro estágio, o progresso da ruptura do concreto é principalmente causado por fissuras na argamassa. Estas aglomerações de fissuras próximas ao agregado formam as "zonas de fissuras" ou "dano interno". Finalmente, fissuras maiores formam-se paralelas a direção do carregamento, causando ruptura do espécime.

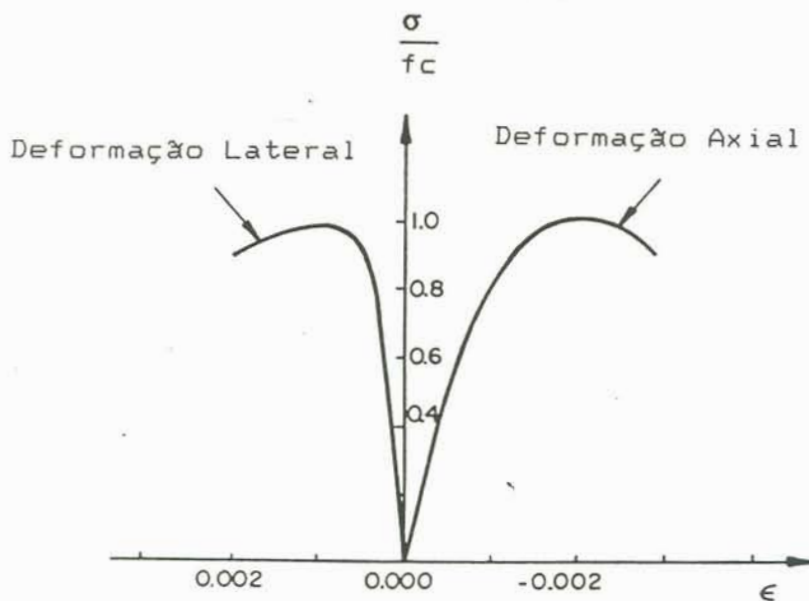


Figura 1.1 - Típica curva tensão/deformação para compressão uniaxial [40].

Embora a discussão acima é relativa a compressão uniaxial, os três estágios de deformação podem ser identificados em outros casos de carregamento e devem ser considerados no modelamento do comportamento do concreto.

A figura 1.2 mostra uma típica curva tensão/deslocamento em tração. O limite de elasticidade é de aproximadamente 60% a 80% da resistência última à tração. Acima deste nível, as micro-fissuras começam a crescer. Como em um estado de tração uniaxial o crescimento das fissuras é muito mais rápido que em compressão, podemos esperar que o intervalo de estabilidade de propagação das fissuras seja menor e a propagação instável seja mais rápida. A interface agregado/argamassa tem uma resistência a tração significativamente menor do que a argamassa, sendo esta a principal razão para a baixa resistência à tração do concreto.

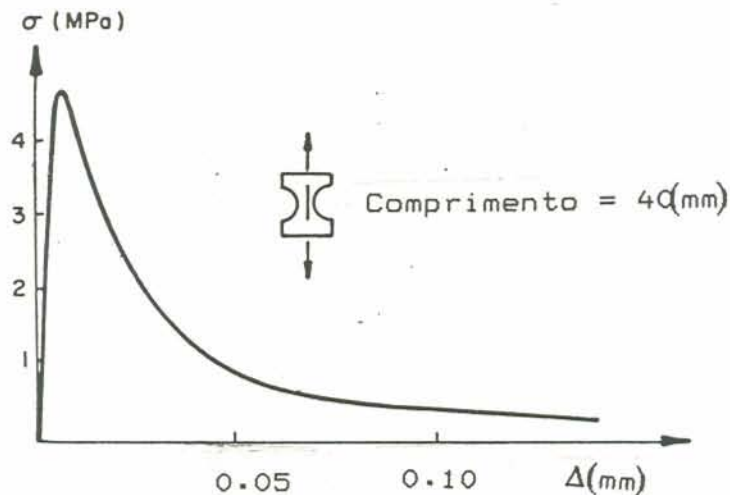


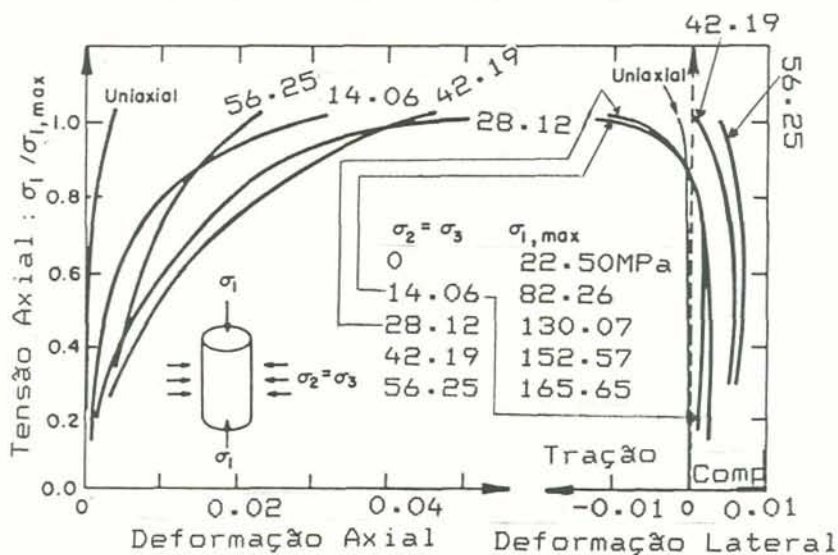
Figura 1.2.- Curva tensão/alongamento para tração uniaxial [41].

#### 1.1.1.2 - Carregamento sob compressão multiaxial

Um comportamento típico sob carregamento multiaxial do concreto é mostrado na figura 1.3. Os resultados são obtidos de testes com corpos de prova cilíndricos. Os cilindros de concreto são submetidos a pressão lateral constante,

$\sigma_2 = \sigma_3$ . A pressão axial  $\sigma_1$  é aumentada até a ruptura. A figura 1.3 mostra as curvas tensão axial/deformação axial ( $\sigma_1 - \varepsilon_1$ ) e a tensão axial/deformação lateral ( $\sigma_1 - \varepsilon_2$ ), para diferentes valores de pressão de confinamento (lateral). Observa-se que a pressão de confinamento exerce uma significativa influência no comportamento da deformação do espécime. Primeiro, a deformação axial e lateral na ruptura aumenta com o aumento da pressão de confinamento. Mas, além de um determinado valor, o aumento da tensão lateral provoca um decréscimo nos valores da deformação axial na ruptura. Comparado ao caso de compressão uniaxial, deformações maiores ocorrem no espécime de concreto confinado. Pode ser visto que sob carregamento de compressão, com pressão de confinamento, o concreto exibe um certo grau de ductilidade antes da ruptura.

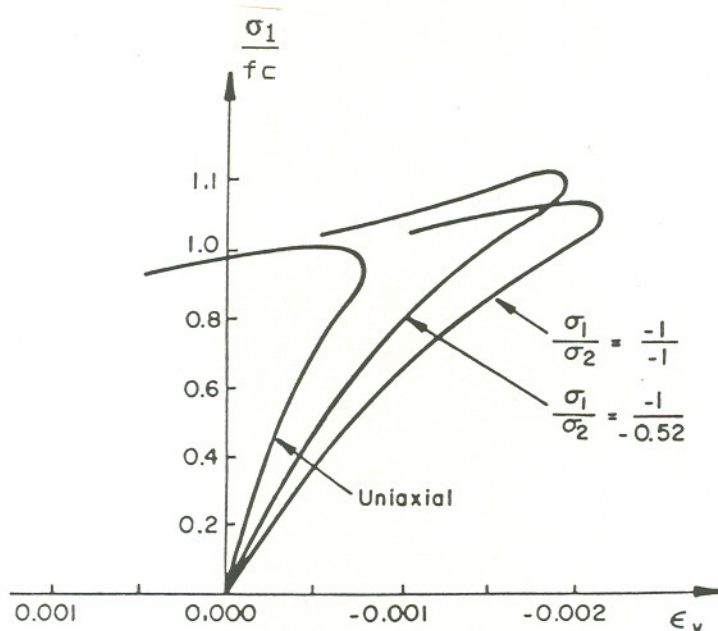
Como no caso uniaxial há, também, três estágios de deformações para um concreto confinado, ou seja, linearmente elástico, inelástico e localizado.



**Figura 1.3 - Curva tensão/deformação para compressão multiaxial [42].  
Tensões e deformações positivas em compressão.**

A figura 1.4 mostra as deformações volumétrica versus as tensões em um teste de compressão biaxial. Inicialmente, a deformação decresce até aproximadamente 0.75 a 0.90 da tensão última. Então a tendência é reversa com o

aumento das tensões. Foi mostrado [33] que a pasta de cimento não se expande sob carregamento de compressão. A pasta de cimento continua a consolidação na ruptura. Expansão volumétrica é observada somente quando a pasta de cimento é misturada com agregados, isto indica que a natureza da “composição” do concreto é o principal responsável pela dilatação volumétrica. É notado que a tensão na qual o volume começa a aumentar está relacionada a um notável aumento das microfissuras através da argamassa, ou seja, no limiar de uma instável propagação das fissuras.

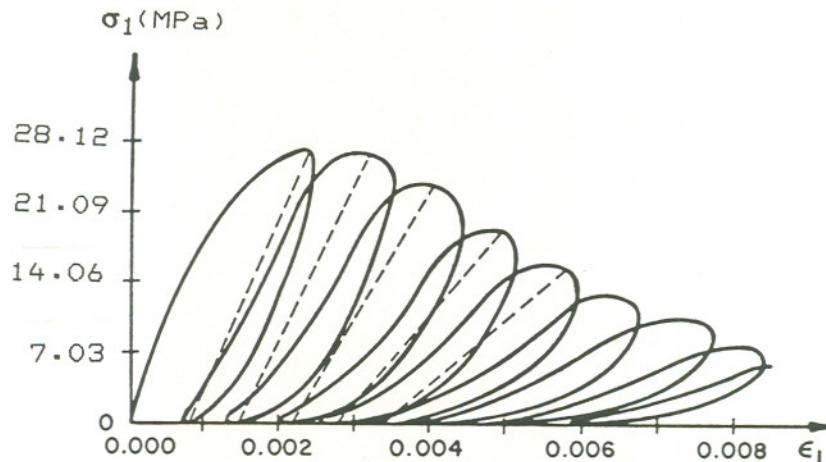


**Figura 1.4 - Curva deformação volumétrica sob compressão biaxial [40].**

A figura 1.5 mostra uma típica curva tensão/deformação do concreto sob carregamento cíclico.

Como se sabe, as curvas de carregamento e descarregamento não são segmentos de linhas retas mas “laços” que mudam de tamanho com o decréscimo da inclinação média [34]. Se considerarmos a inclinação média de uma linha reta conectando os pontos extremos da curva de cada ciclo, vemos que o módulo de

elasticidade decresce com o aumento da deformação. Esta degradação da rigidez está relacionada a alguns tipos de dano (micro-vazios e micro-fissuras).



**Figura 1.5 - Curva tensão/deformação sob carregamento cíclico de compressão [34].**

Este comportamento é completamente diferente de aquele mostrado para metais, e sugere que a teoria da plasticidade usual não é adequada para o concreto.

### **1.1.2. Comportamento diferido**

Há várias teorias que tentam explicar o mecanismo interno da fluência na pasta de cimento e todas elas, aceitam que o fenômeno está relacionado à absorção de água pela superfície interna do material. Sob carga, a pasta de cimento exibe deformações instantâneas e deformações dependentes do tempo, que são devidas a transferência da água para a superfície externa do sólido e daí para o meio ambiente.

O agregado tem uma pequena contribuição nas deformações de fluência, mas a interface entre a pasta e o agregado é um elo frágil onde muitas microfissuras são originadas e estas microfissuras são responsáveis por grande parte da fluência não-linear sob altas tensões.

De fato, as experiências mostram que a fluência é função das tensões aplicadas, idade e tempo de carregamento, dependendo também da composição da mistura e das condições do meio ambiente.

Alguns fatos a respeito da fluência são comumente aceitos:

a) Quanto maior a idade do concreto menor a sua fluência. O módulo de elasticidade e a resistência do concreto aumentam com o tempo.

b) Para tensões constantes menores que  $0.4f_c$ . o comportamento do concreto pode ser modelado pela teoria da viscoelasticidade linear com envelhecimento. Para tempo tendendo ao infinito as deformações aproximam-se de um valor limite.

c) Para tensões constantes superiores a  $0.4f_c$ . a não-linearidade no comportamento visco-elástico do concreto começa a acentuar-se [22] e cessa a aplicabilidade do princípio da superposição. Para tensões maiores que  $0.8f_c$ . as deformações crescem aceleradamente e levam a ruptura.

A relação deformação/tempo sob tensão constante, é ilustrada na figura 1.6.

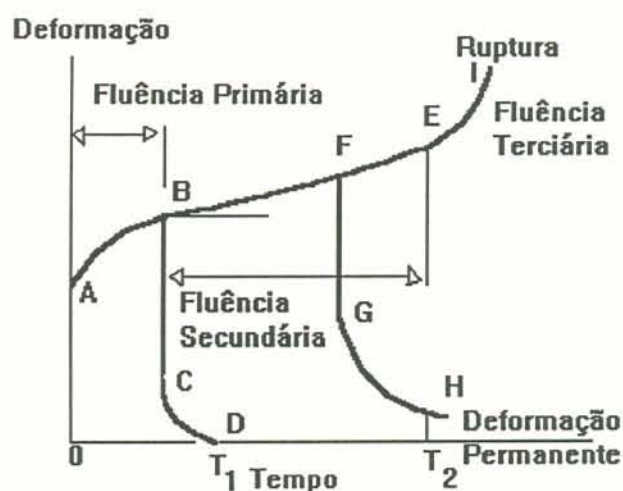


Figura 1.6 - Relação deformação/tempo sob altas tensões para concreto.

A deformação instantânea elástica, OA, é seguida por uma fluência primária AB, que se durante a qual ocorrer um descarregamento, há uma

recuperação de resultados elásticos instantâneos, seguida pela recuperação elástica devida ao tempo, CD. Se a carga não é removida em " $T_1$ ", então se dá início a chamada fluência secundária, que é acompanhada de deformações permanentes. Descarregando em algum tempo da curva BE gera uma deformação permanente no material. Continuando o carregamento passando o tempo " $T_2$ ", começa a fluência terciária, conduzindo quase que inevitavelmente a ruptura.

## **1.2 - O projeto de pesquisa**

### **1.2.1. - Objetivos**

No presente trabalho objetivou-se desenvolver equações constitutivas para o concreto que, embasadas na teoria do dano contínuo, permitissem representar a deformação lenta a altas tensões e ruptura do material.

Outros autores tem já proposto relações constitutivas para descrever este comportamento [4], mas ainda não existe um modelo consagrado; este é um tema ainda aberto a discussões.

Partindo-se do modelo uniaxial [8], mostra-se que a equação constitutiva pode ser fundamentada na Mecânica do Dano Contínuo, generalizada ao caso triaxial e implementada em um programa de Elementos Finitos. Aceita-se uma relação parabólica (no caso uniaxial), para representar o comportamento não-linear das deformações instantâneas do concreto, sob tensões elevadas, e um critério de ruptura equivalente no caso multiaxial.

Seguimos assim a orientação do último simpósio sobre fluência lenta do concreto, realizado em Barcelona (ConCreep 5) onde houve forte consenso no sentido que a representação da fluência não-linear deveria ser baseada em teoria de Dano Contínuo.

O modelo será comparado com resultados experimentais e aplicado a análise de problemas práticos.

### **1.2.2. - Importância**

Quando as tensões excedem aproximadamente 40% de  $f_c$ , a fluência do concreto exhibe uma forte dependência não-linear das tensões e o princípio da superposição não pode mais ser empregado.



A viscoelasticidade não-linear pode ser importante sempre que há presença de altas tensões, como no caso de fratura, cargas concentradas, flambagem, etc.

### **1.2.3. - Metodologia**

A formulação básica corresponde à teoria do dano contínuo.

Na análise numérica é adotada uma programação modular de modo que diferentes operações sejam executadas por diferentes subrotinas. Como programa base, partiu-se do desenvolvido por Masuero [18].

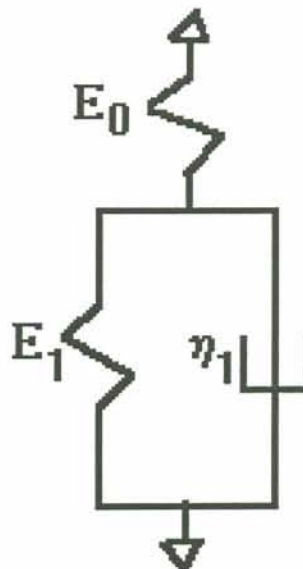
Para problemas não-lineares, necessita-se subrotinas para incrementar a carga e iterar a solução até a convergência. Também são necessárias subrotinas para avaliação das forças residuais e de monitoramento da convergência. São empregados dois métodos para a seqüência iterativa, ou seja, o método de Newton Raphson e o método de Newton Raphson modificado.

Para a análise viscoelástica a utilização de uma formulação integral mostra-se inconveniente, visto que requer o armazenamento de toda história de tensões ao longo do processo viscoelástico, nos nós ou nos pontos de integração de todos os elementos no qual o meio contínuo foi discretizado. O método de variáveis de estado baseia-se numa aproximação das derivadas das funções de fluência, sendo necessário o armazenamento de apenas uma pequena parte da história de tensões.

Computacionalmente o método é de fácil implementação e, embora necessite que os intervalos de tempo utilizados ao longo do processo sejam pequenos, sua eficiência computacional, medida como tempo de máquina para um certo nível de precisão, mostrou-se vantajosa.

## 2-FORMULAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO

O presente modelo parte de uma variante não-linear do modelo Kelvin (figura 2.1) e caracteriza-se pela sua capacidade de representar comportamento mecânico não-linear, ruptura instantânea e dependente do tempo. O modelo é capaz de representar as principais características do concreto; fluência não-linear, deformações instantâneas e dependentes do tempo e ruptura retardada sob tensão constante (ruptura por fluência).



**Figura 2.1 - Modelo viscoelástico standard**

Uma melhor aproximação do comportamento de um material real pode ser obtida com o uso de vários elementos (modelo generalizado).

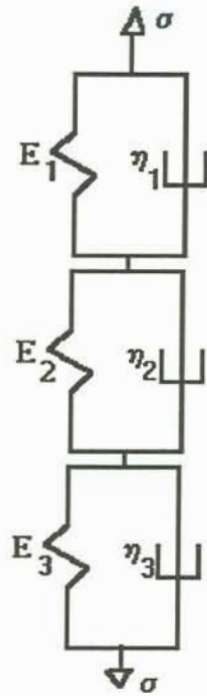


Figura 2.2 - Modelo generalizado de elementos viscoelásticos (Kelvin)

### 2.1-Modelo uniaxial

O modelo uniaxial é um modelo Kelvin com mola não-linear.

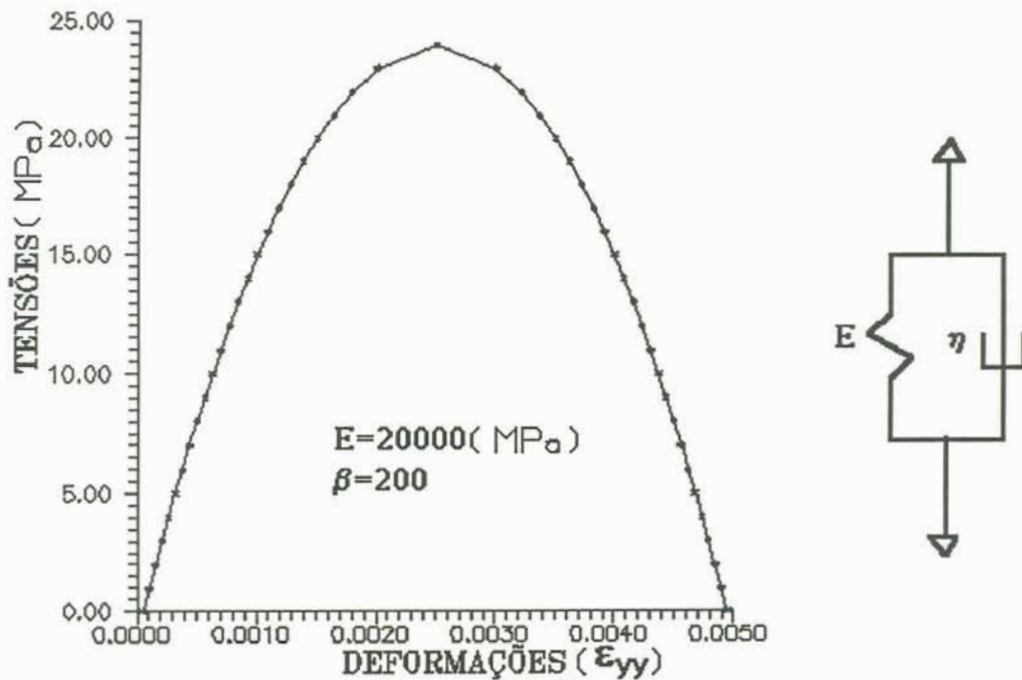


Figura 2.3 - Relação tensão/deformação da mola do elemento Kelvin.

A equação correspondente à mola (figura 2.3) é

$$\sigma = E\varepsilon(1 - \beta\varepsilon) \quad ; \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1/\beta \quad (2.1)$$

onde  $\beta$  é o fator de não-linearidade que pode ser interpretado em termos da mecânica do dano contínuo (seção 2.1.1) e  $E$  é uma constante. Esta equação define a tensão máxima  $\sigma_{max} = \frac{E}{4\beta}$  e a correspondente deformação  $\frac{1}{2\beta}$ . Aumentando-se as deformações de  $\frac{1}{2\beta}$  para  $\frac{1}{\beta}$  é possível obter um decréscimo de tensões. Não há significado físico para deformações maiores do que  $\frac{1}{\beta}$ .

A inversão da equação (2.1) proporciona a expressão

$$\varepsilon = \frac{1}{2\beta} \left[ 1 - \sqrt{\left( 1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_{max}} \right)} \right]; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\beta} \quad (2.2)$$

onde  $\sigma = cte = \sigma_o$  e  $\sigma_{max}$  é a tensão máxima.

Considerando comportamento linear para o amortecedor do modelo Kelvin, temos

$$\sigma = E\varepsilon(1 - \beta\varepsilon) + \eta\varepsilon \quad (2.3)$$

A (2.3) é a equação não-linear de Riccati, que pode ser resolvida para  $\sigma = cte = \sigma_o$ . Dependendo do valor do parâmetro

$$\gamma = 4\beta\sigma_o / E = \sigma_o / \sigma_{max} \quad (2.4)$$

Obtemos [8]

Para  $\gamma < 1$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\beta} \left( 1 - \sqrt{1-\gamma} \frac{1 + \sqrt{1-\gamma} + [1 - \sqrt{1-\gamma}] \exp[-E / \eta\sqrt{1-\gamma}t]}{1 + \sqrt{1-\gamma} - [1 - \sqrt{1-\gamma}] \exp[-E / \eta\sqrt{1-\gamma}t]} \right) \quad (2.5)$$

Para  $\gamma = 1$ ,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\beta} \left( \frac{t}{\frac{2\eta}{E} + t} \right) \quad (2.6)$$

Para  $\gamma > 1$ ,

$$\varepsilon(t) = \frac{\gamma}{2\beta} \left( \frac{1 + \sqrt{1-\gamma} \operatorname{sen} E / \eta\sqrt{1-\gamma}t - \cos E / \eta\sqrt{1-\gamma}t}{\gamma + 2 + \sqrt{1-\gamma} \operatorname{sen} E / \eta\sqrt{1-\gamma}t + (\gamma - 2) \cos E / \eta\sqrt{1-\gamma}t} \right) \quad (2.7)$$

O comportamento está indicado na figura 2.4.

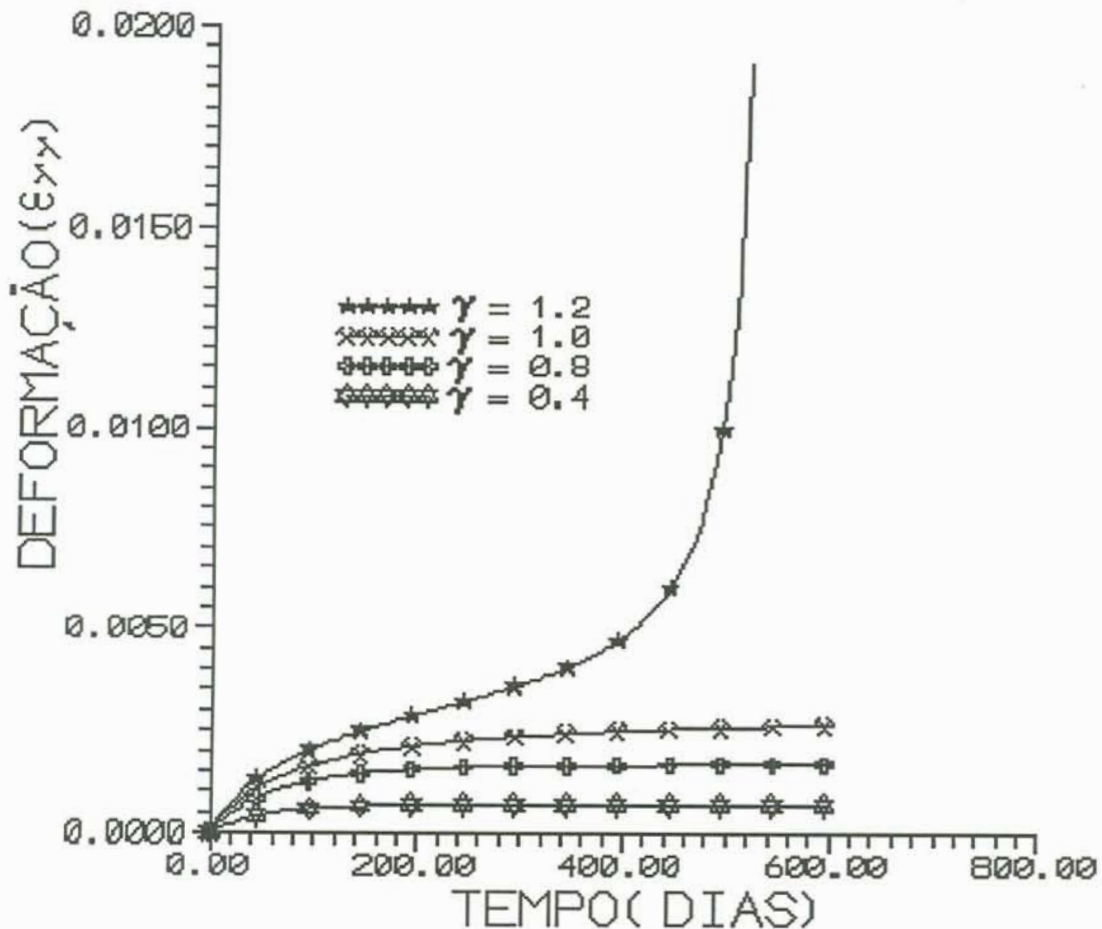


Figura 2.4 - Resultados teóricos para curvas de fluência excluída a deformação instantânea da mola

Observa-se que  $\sigma_{max} = \frac{E}{4\beta}$  é a maior tensão que pode ser suportada pelo modelo (tensão superior a  $\sigma_{max}$  gera deformações que tenderão ao infinito).

O comportamento de um modelo formado por uma mola e um elemento Kelvin (figura 2.1), está representado na figura 2.5, que mostra um comportamento similar ao observado no concreto [22]. Obviamente, a  $\sigma_{max}$  relativa à mola da parte instantânea, deve ser maior que a  $\sigma_{max}$  correspondente a mola do elemento Kelvin, do contrário, a tendência da curva deformação versus tempo seria sempre de estabilização para um tempo infinito.

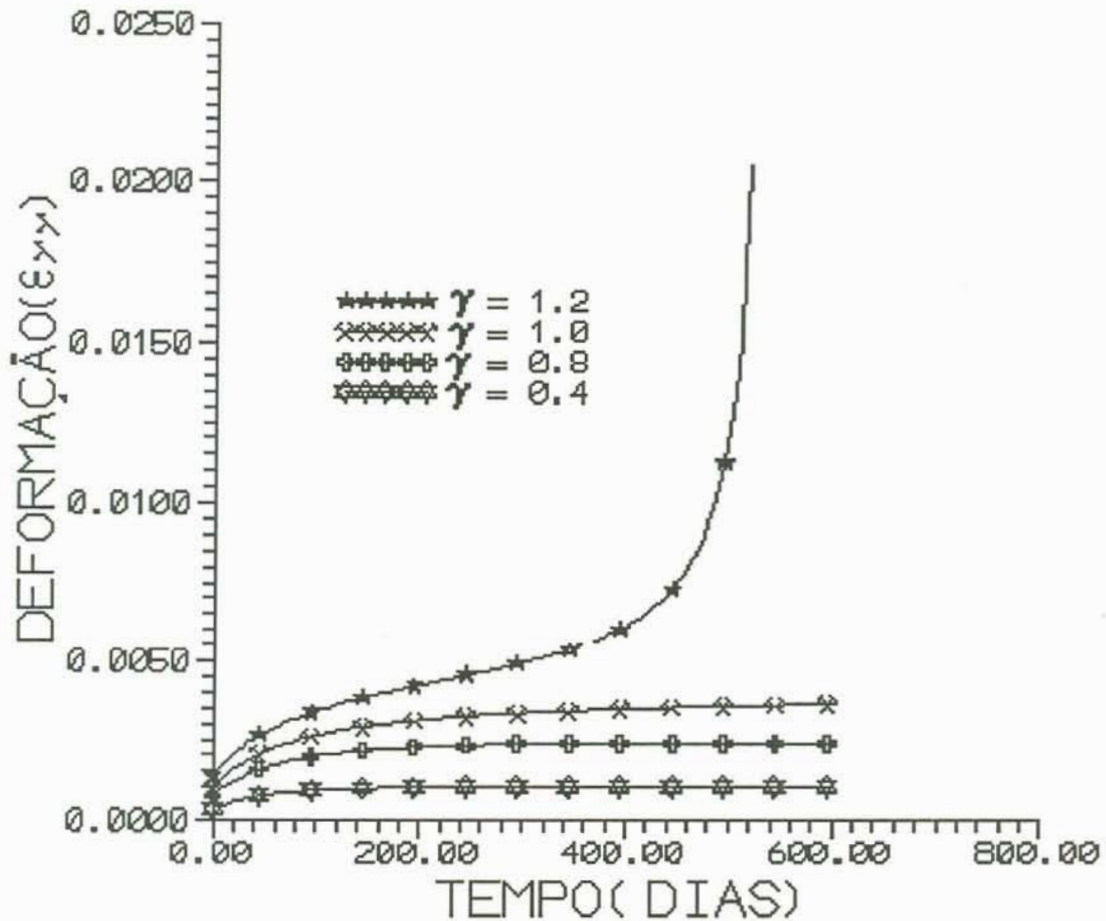


Figura 2.5 - Resultados teóricos para curvas de fluência incluída a deformação instantânea da mola

### 2.1.1-Interpretação em termos da mecânica do dano contínuo

A teoria do dano contínuo [31] propõe uma variável de dano, usualmente representada por " $d$ ", tal que a tensão efetiva  $\sigma_{ef}$  é escrita, em função da tensão nominal como

$$\sigma_{ef} = \frac{\sigma}{1-d} \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (2.8)$$

Analogamente, podemos definir um módulo de elasticidade efetivo

$$E_{ef} = E(1-d) \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (2.9)$$

Um ponto importante é a determinação da lei de crescimento do dano " $d$ ", que deve ser feita com base em evidência experimental. A hipótese mais simples é assumir que o dano aumenta linearmente com a deformação.

$$d = \beta \epsilon \quad \beta = cte \quad (2.10)$$

Assim a (2.9) fica

$$E_{ef} = E(1 - \beta\varepsilon) \quad (2.11)$$

que é o critério empregado em (2.1).

Embora seja simples a formulação empregada, ela permite modelar muitas das características observadas no comportamento do concreto.

### 2.1.2-Aproximação numérica

Dado que a solução fechada da equação de Riccati (2.3) só é disponível para o caso de tensão constante, é necessário empregar para aplicações mais gerais uma solução numérica.

Para tal, partindo de (2.3) escrevemos

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E\varepsilon(1 - \beta\varepsilon)}{\eta} \quad (2.12)$$

que define o seguinte algoritmo de solução

$$\Delta\varepsilon^n = \left[ \frac{\sigma^n}{\eta} - \frac{E\varepsilon^n(1 - \beta\varepsilon^n)}{\eta} \right] \Delta t \quad (2.13)$$

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + \Delta\varepsilon^n \quad (2.14)$$

### 2.1.3-Variações do modelo básico

A fim melhor representar o comportamento do concreto, é interessante modificar a equação da mola não-linear (2.1), na forma indicada abaixo (figura 2.6):

$$\sigma = E\varepsilon(1 - \beta/\varepsilon) \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1/2\beta \quad (2.15)$$

$$\sigma = E'(\varepsilon + b)[1 - \beta'/\varepsilon + b] \quad 1/2\beta \leq \varepsilon \leq 1/\beta \quad (2.16)$$

onde

$$\beta' = \frac{\beta}{1 + 2\beta b} \quad (2.17)$$

$$E' = E \frac{\beta'}{\beta} = E \frac{1}{1 + 2\beta b} \quad (2.18)$$

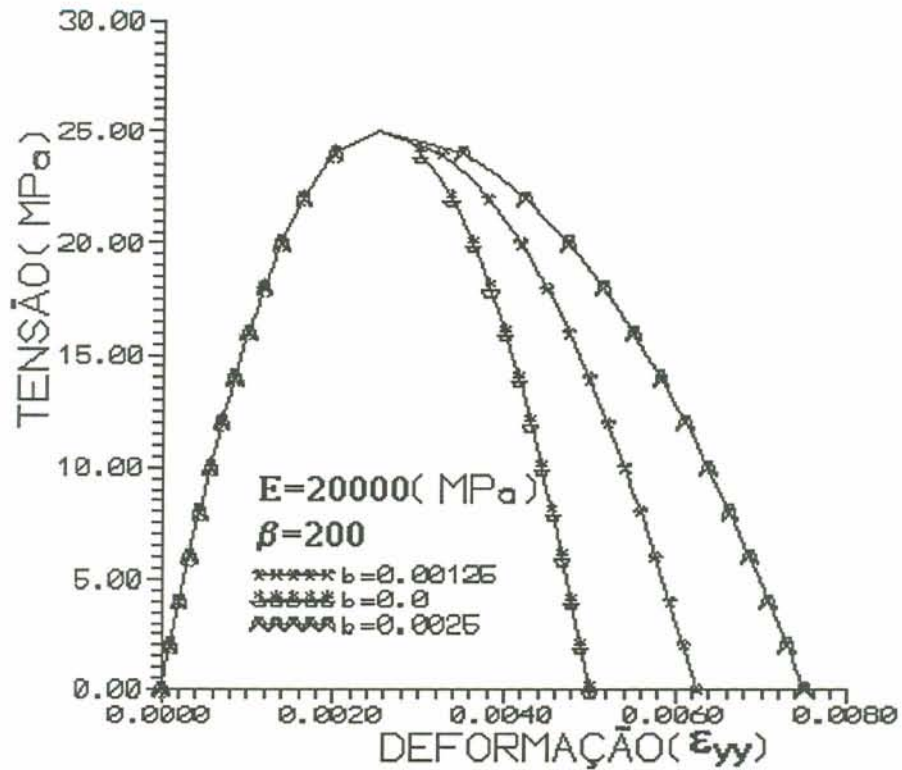


Figura 2.6 - Relação tensão/deformação corrigida

A resposta do modelo Kelvin, para diversos valores de "b", pode ser observada na figura 2.7.

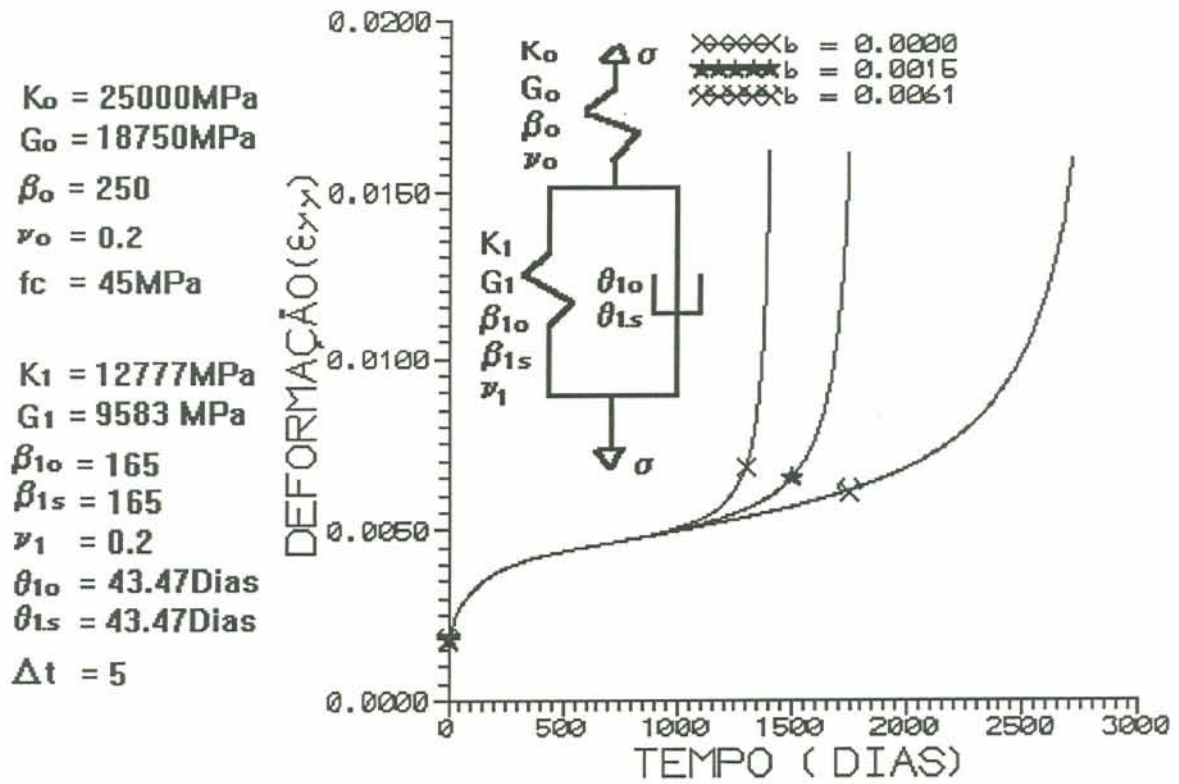


Figura 2.7 - Curvas de fluência corrigidas



## 2.2-Modelo Multiaxial

A fim de resolver problemas mais complexos, propomos aqui equações para representar o comportamento do concreto sob cargas multiaxiais, que serão implementadas no programa de Elementos Finitos.

Usamos equações simples que dependem unicamente do conhecimento de  $f_c$ .

### 2.2.1-Comportamento instantâneo

#### 2.2.1.1-Caso linear

A relação linear uniaxial

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.19)$$

pode ser generalizada ao caso tridimensional, para materiais isotrópicos, homogêneos e elásticos-lineares, escrevendo

$$\sigma_o = 3K\varepsilon_o \quad (2.20)$$

$$\underset{\sim}{s} = 2G\underset{\sim}{e} \quad (2.21)$$

onde

$$\sigma_o = tr \underset{\sim}{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.22)$$

$$\underset{\sim}{s} = \frac{1}{3}(\underset{\sim}{\sigma} - I tr \underset{\sim}{\sigma}) \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_o = tr \underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.24)$$

$$\underset{\sim}{e} = \frac{1}{3}(\underset{\sim}{\varepsilon} - I tr \underset{\sim}{\varepsilon}) \quad (2.25)$$

são as componentes esférica e desviadoras de tensor de tensões e deformações, respectivamente.

### **2.2.1.2-Caso não-linear**

#### **2.2.1.2.1 - Modelo constitutivo para concreto.**

O modelo considera uma superfície de ruptura no espaço de tensões a qual define o nível de tensões em que a ruptura acontece. A condição de ruptura ocorrerá quando o estado de tensões atingir ou ultrapassar esta superfície de ruptura.

Considerando isotropia do material, podemos expressar a forma genérica da superfície de ruptura como

$$f(I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma) = 0 \quad (2.26)$$

onde  $I_\sigma$  é o primeiro invariante do tensor de tensões,  $II_\sigma$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões e  $III_\sigma$  é o terceiro invariante do tensor desviador de tensões.

A forma explícita da função de ruptura é definida por dados experimentais. Os dados experimentais disponíveis, claramente indicam as características essenciais da superfície de ruptura do concreto [6].

#### **2.2.1.2.2 - Critério de Ruptura**

O presente modelo caracteriza-se por ter dois parâmetros e foi proposto por Mises-Schleicher (figura 2.8). As equações definem uma superfície de ruptura com meridianos curvos, seção transversal circular no plano desviador e independência do ângulo de similaridade  $\theta$  [6]. Os meridianos são parábolas quadráticas. A seção transversal tem propriedades de simetria e convexidade.

Todos os invariantes de tensões, que aparecem no critério de ruptura (2.28), estão normalizados pelo  $f_c$ .

Os dois parâmetros do critério de ruptura podem ser determinados com base em testes uniaxiais típicos.

1. Resistência uniaxial à compressão.
2. Resistência uniaxial à tração.

Para a representação de resultados experimentais obtidos de testes triaxiais, com tensões  $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3$ , o espaço de interesse será a intersecção com o plano  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

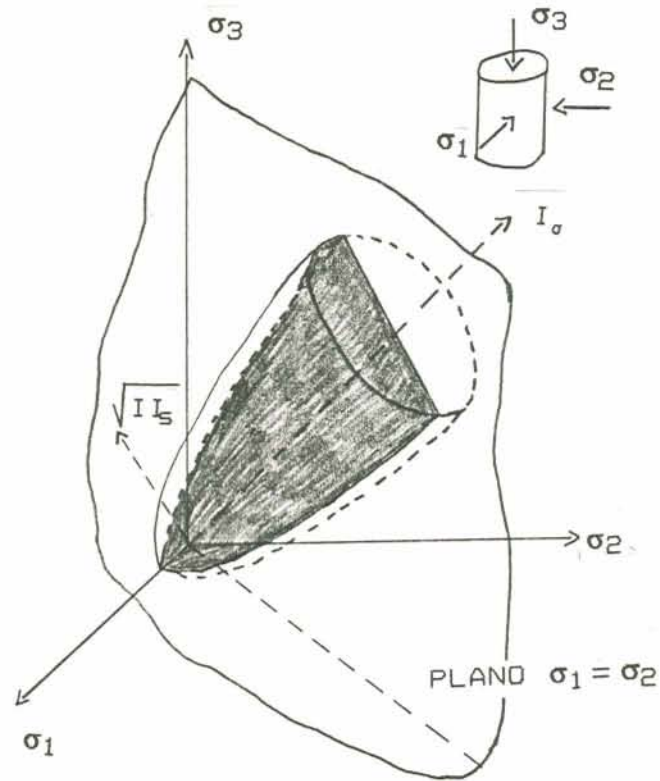


Figura 2.8- Superfície de ruptura no espaço de tensões principais

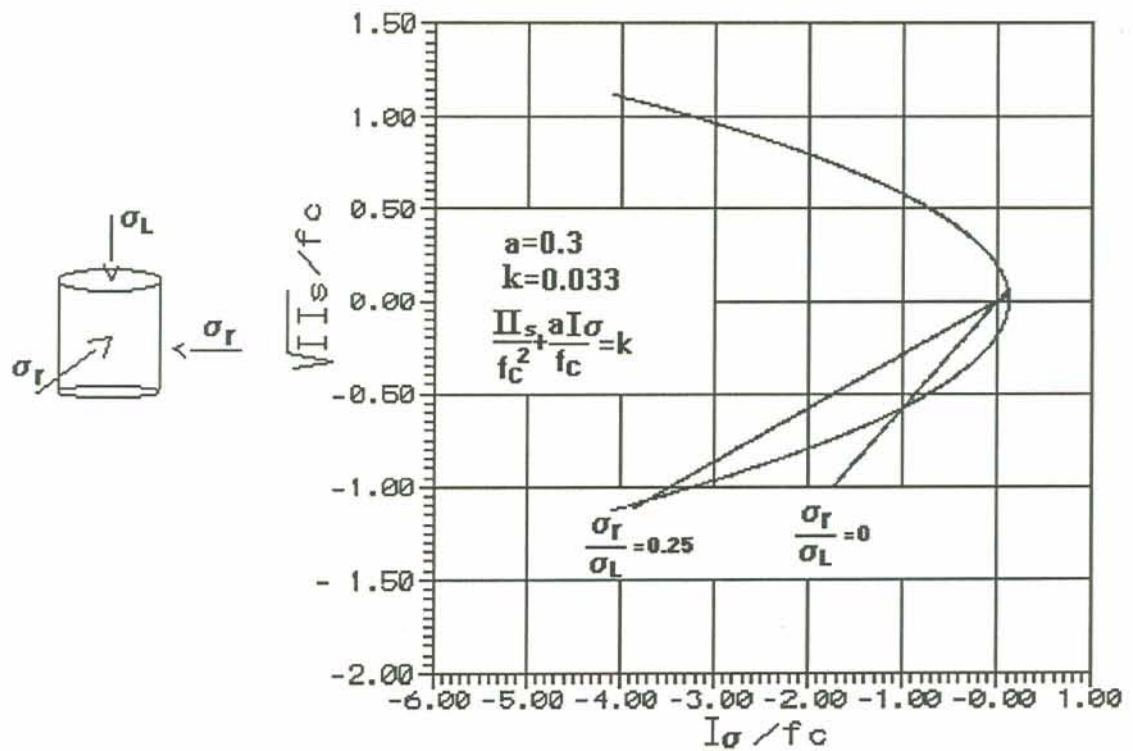


Figura 2.9 - Superfície de ruptura para estado triaxial de tensões

A superfície de ruptura neste subespaço está representada na figura 2.9 usando como coordenadas o  $I_\sigma$  (primeiro invariante do tensor de tensões) e o  $II_\sigma$  (segundo invariante do tensor desviador de tensões).

Para estado biaxial de tensões, o critério toma a forma da figura 2.10.

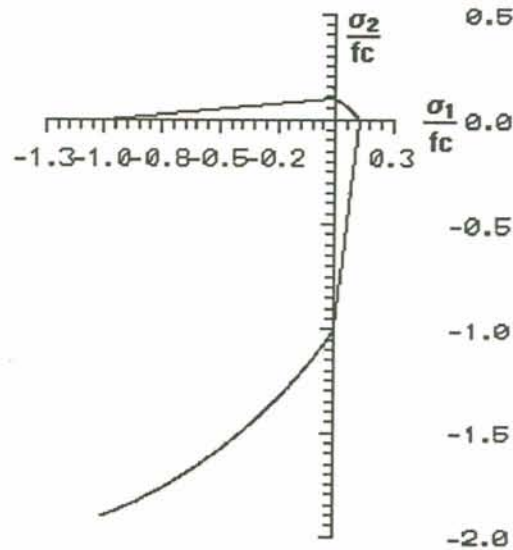


Figura 2.10 - Superfície de ruptura para estado biaxial de tensões

Convém salientar que o trecho  $\frac{\sigma_1}{f_c} > 0$  e  $\frac{\sigma_2}{f_c} < 0$  foi aproximado por meio de uma reta para se adequar melhor as curvas experimentais [6]; percebeu-se a necessidade desta mudança ao rodar o exemplo do Ensaio Brasileiro à Tração (seção 4.2.1).

As equações para esta superfície são:

a) Trecho compreendido no intervalo  $\frac{\sigma_1}{f_c} > 0$  e  $\frac{\sigma_2}{f_c} < 0$

$$\gamma = \gamma' = \frac{\sigma_1}{0.1\sigma_2 + 0.1f_c} \quad (2.27)$$

onde os parâmetros de dano ( $\gamma, \gamma'$ ) indicam se o presente estado de tensões localiza-se em um ponto interior a curva ( $0 \leq \gamma < 1$ ); sobre a curva ( $\gamma = 1$ ); ou exterior a curva ( $\gamma > 1$ ), neste caso, caracterizando a ruptura do material. O parâmetro de dano ( $\gamma'$ ) atualizará o módulo de compressibilidade (2.48) e o parâmetro de dano ( $\gamma$ ) atualizará o módulo de corte (2.49).

b) Demais trechos

$$\hat{II}_s + a\hat{I}_\sigma = k \quad (2.28)$$

Onde,

$$\hat{\Pi}_s = II_s / f_c^2 \quad (2.29)$$

$$\hat{I}_\sigma = I_\sigma / f_c \quad (2.30)$$

$a$ =Constante

$k$ =Constante

$f_c$ =Resistência do concreto à compressão

$II_s$ =Segundo invariante do tensor desviador de tensões

$I_\sigma$ =Primeiro invariante do tensor de tensões

$$I_\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.31)$$

$$II_s = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad (2.32)$$

Então definimos

$$\gamma = \frac{\hat{\Pi}_s}{k - a\hat{I}_\sigma} \quad (2.33)$$

$$\gamma' = \frac{|\hat{I}_\sigma|}{12} \quad (2.34)$$

O parâmetro de dano  $\gamma'$  (2.34) foi criado para se poder considerar a hipótese de um carregamento esférico, situação esta não representada pelo parâmetro de dano ( $\gamma$ ) já que, neste caso,  $II_s = 0$ .

A expressão para  $\gamma'$  foi escrita baseada em dados experimentais.

Conforme (2.1), temos:

$$\sigma = E\varepsilon(1 - \beta\varepsilon); \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\beta} \quad (2.35)$$

e de acordo com (2.2)

$$\varepsilon = \frac{1}{2\beta} \left[ 1 - \sqrt{\left( 1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_{max}} \right)} \right]; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\beta} \quad (2.36)$$

ou

$$\varepsilon = \frac{1}{2\beta} \left[ 1 - \sqrt{1-\gamma} \right]; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\beta}; \quad \gamma = \frac{\sigma_o}{\sigma_{max}} \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em lugar do segundo  $\varepsilon$  de (2.35) resulta

$$\sigma = \frac{E\varepsilon}{2} (1 + \sqrt{1-\gamma}) \quad (2.38)$$

Sabendo-se que

$$\sigma_o = 3K\varepsilon_o \quad (2.39)$$

$$\underline{s} = 2G\underline{e} \quad (2.40)$$

temos portanto

$$\sigma_o = \frac{3K\varepsilon_o}{2} (1 + \sqrt{1-\gamma}) \quad (2.41)$$

$$\underline{s} = G\underline{e} (1 + \sqrt{1-\gamma}) \quad (2.42)$$

Para análise incremental, podemos ainda escrever

$$\dot{\sigma}_o = 3K_n \dot{\varepsilon}_o \quad (2.43)$$

$$\underline{\dot{s}} = 2G_n \underline{\dot{e}} \quad (2.44)$$

Conforme (2.1) temos

$$\sigma = E\varepsilon(1-\beta\varepsilon); \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\beta} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E(1-2\beta\varepsilon) \quad (2.46)$$

Substituindo (2.37) em (2.46) temos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E\sqrt{1-\gamma} \quad (2.47)$$

Portanto

$$K_n = K\sqrt{1-\gamma'} \quad (2.48)$$

$$G_n = G\sqrt{1-\gamma} \quad (2.49)$$

Estas expressões, bem como a equação (2.28) poderiam ser melhoradas considerando os seguintes pontos:

a) a expressão (2.33), que define a não-linearidade ou parâmetro de dano, poderia ser escrita de um modo similar através de outro critério de ruptura.

b) a expressão (2.48 e 2.49) foram escolhidas para mostrar, no caso uniaxial, uma relação tensão/deformação na forma de uma parábola. Outras formas são possíveis.

Vemos que na medida que o ponto representativo do estado de tensões se aproxima da superfície de ruptura, os valores de  $G_n$  e  $K_n$  diminuem, tendendo a zero e gerando deformações indefinidas. Observa-se que, embora por simplicidade tenha sido empregada a superfície de Mises-Schleicher, qualquer outro critério, (Ottosen, Willam, ...) [6] poderia ser analogamente empregado.

### **2.2.1.2.3 - Determinação dos parâmetros “a” e “k”**

A fim de determinar os parâmetros podemos usar testes uniaxiais.

a) Consideremos o caso de compressão uniaxial  $-\sigma$ . Então

$$I_\sigma = -\sigma \quad ; \quad II_s = \frac{\sigma^2}{3} \quad (2.50)$$

e (2.28) fica

$$\frac{\sigma^2}{3f_c^2} + a \frac{-\sigma}{f_c} = k \quad (2.51)$$

Para ruptura temos  $\sigma = f_c$  e assim  $k = \frac{1}{3} - a$

b) Consideremos agora tração uniaxial  $\sigma$ . Então

$$I_\sigma = \sigma \quad ; \quad II_s = \frac{\sigma^2}{3} \quad (2.52)$$

e (2.28) fica

$$\frac{\sigma^2}{3f_c^2} + a \frac{\sigma}{f_c} = k \quad (2.53)$$

Para haver ruptura  $\sigma = \alpha f_c$ , onde  $\alpha$  é dado por fórmulas padrões. Substituindo em (2.53) obtemos

$$\frac{\alpha^2}{3} + a\alpha = k \quad (2.54)$$

e para  $\alpha=1/10$  (atribuído) nós temos  $1/30 + a = 10k$

Assim finalmente obtemos

$$\underline{k} = 1/30 \quad (2.55)$$

$$\underline{a} = 0.3 \quad (2.56)$$

Note que estes valores são válidos para todos os concretos com  $\frac{f_t}{f_c} = \frac{1}{10}$ .

#### **2.2.1.2.4 - Pontos de intersecção das retas com a superfície de ruptura**

Para caso triaxial, onde  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_r$ , e  $\sigma_3 = \sigma_L$ , temos de (2.31)

$$I_\sigma = \sigma_L + 2\sigma_r \quad (2.57)$$

onde  $\sigma_L$  é a tensão axial e  $\sigma_r$  a tensão transversal. De (2.32) obtem-se

$$\pm\sqrt{II_s} = \pm\frac{(\sigma_L - \sigma_r)}{\sqrt{3}} \quad (2.58)$$

De (2.57) e (2.58), obtemos

$$\sigma_L = \frac{I_\sigma + 2\sqrt{3II_s}}{3} \quad (2.59)$$

$$\sigma_r = \frac{I_\sigma - \sqrt{3II_s}}{3} \quad (2.60)$$

Substituindo a equação da reta  $\frac{\sigma_r}{\sigma_L} = 0$  em (2.60), temos

$$I_\sigma = \sqrt{3II_s} \quad (2.61)$$

ou

$$II_s = \frac{I_\sigma^2}{3} \quad (2.62)$$



Substituindo (2.62) em (2.28), temos

$$I_{\sigma}^2 + 3af_c I_{\sigma} - 3kf_c^2 = 0 \quad (2.63)$$

onde "a" e "k" são os parâmetros determinados na seção 2.2.1.2.3 e  $f_c$  é a resistência do concreto à compressão.

De (2.63), obtemos

$$I_{\sigma} = -f_c \quad (2.64)$$

$$I_{\sigma} = 0.1f_c \quad (2.65)$$

Substituindo (2.64) em (2.28), obtemos

$$\pm \frac{\sqrt{II_s}}{f_c} = 0.5774 \quad (2.66)$$

Substituindo (2.65) em (2.28), obtemos

$$\pm \frac{\sqrt{II_s}}{f_c} = 0.05774 \quad (2.67)$$

Substituindo a equação da reta  $\frac{\sigma_r}{\sigma_L} = 0.25$  em (2.60) e (2.59), temos

$$I_{\sigma} = 2\sqrt{3II_s} \quad (2.68)$$

ou

$$II_s = \frac{I_{\sigma}^2}{12} \quad (2.69)$$

Substituindo (2.69) em (2.28), temos

$$I_{\sigma}^2 + 12af_c I_{\sigma} - 12kf_c^2 = 0 \quad (2.70)$$

onde "a" e "k" são os parâmetros determinados na seção 2.2.1.2.3 e  $f_c$  é a resistência do concreto à compressão.

De (2.70), obtemos

$$I_{\sigma} = -3.7079f_c \quad (2.71)$$

$$I_{\sigma} = 0.1079f_c \quad (2.72)$$

Substituindo (2.71) em (2.28), obtemos

$$\pm \frac{\sqrt{\Pi_s}}{f_c} = 1.070 \quad (2.73)$$

Substituindo (2.72) em (2.28), obtemos

$$\pm \frac{\sqrt{\Pi_s}}{f_c} = 0.031 \quad (2.74)$$

### 2.2.2-Comportamento diferido

O caso linear compreende a viscoelasticidade linear apresentada em [18].

No caso não-linear escrevemos

$$\sigma^o = 3K\varepsilon^o(1 - \beta/\varepsilon^o l) + 3\eta_o \dot{\varepsilon}^o \quad (2.75)$$

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}(1 - \beta/e_{ij} l) + 2\eta_s \dot{e}_{ij} \quad (2.76)$$

Aplicando variáveis de estado e denominando

$$\varepsilon^o = q^o(t) \quad \eta_o / K = \theta_o \quad (2.77)$$

$$e_{ij} = q_{ij}^s(t) \quad \eta_s / G = \theta_s \quad (2.78)$$

$$\dot{q}_{ij}^s(t) = \Delta q_{ij}^s(t) / \Delta t \quad (2.79)$$

obtemos

$$\dot{q}^o(t) + \frac{q^o(t)(1 - \beta/q^o(t)l)}{\theta_o} = \frac{\sigma^o}{3\eta_o} \quad (2.80)$$

$$\dot{q}_{ij}^s(t) + \frac{q_{ij}^s(t)(1 - \beta/q_{ij}^s(t)l)}{\theta_s} = \frac{s_{ij}}{2\eta_s} \quad (2.81)$$

Empregando o método de Euler para integração no tempo, temos

$$\Delta q^o(t) = \left[ \frac{-q^o(1 - d)}{\theta_o} + \frac{\sigma^o}{3\eta_o} \right] \Delta t \quad (2.82)$$

$$q^o(t + \Delta t) = q^o(t) + \Delta q^o(t) \quad (2.83)$$

$$d(t) = \beta / q^o(t) / \quad (2.84)$$

$$\varepsilon_v^o = \sum_i q_i^o(t) \quad (2.85)$$

$$\Delta q_{ij}^s(t) = \left[ \frac{-q_{ij}^s(1-d)}{\theta_s} + \frac{s_{ii}}{2\eta_s} \right] \Delta t \quad (2.86)$$

$$q_{ij}^s(t + \Delta t) = q_{ij}^s(t) + \Delta q_{ij}^s(t) \quad (2.87)$$

$$d(t) = \beta / q_{ij}^s(t) / \quad (2.88)$$

$$\varepsilon_v^s = \sum_i q_i^s(t) \quad (2.89)$$

As correspondentes condições iniciais são:

$$\begin{cases} q^o(0) = 0 \\ d(0) = 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

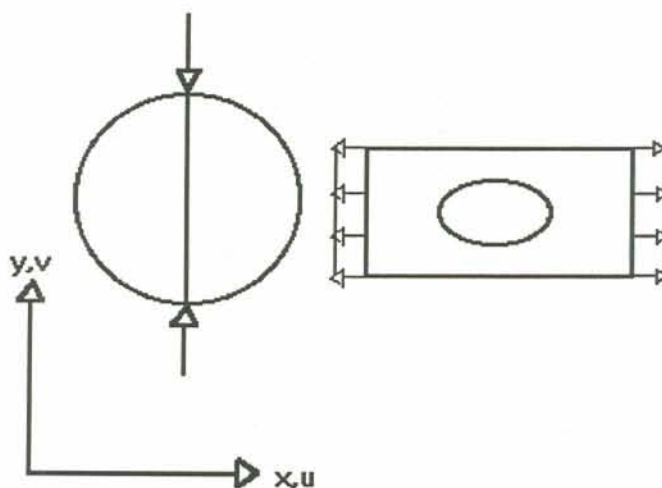
$$\begin{cases} q_{ij}^s(0) = 0 \\ d(0) = 0 \end{cases} \quad (2.91)$$

### 3-ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR E SUA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O modelo anterior foi implementado num programa de análise via Elementos Finitos, para situações de Estado Plano de Tensões , Estado Plano de Deformações e Sólidos Axissimétricos.

#### 3.1 - Formulação para Estado Plano de Tensões

A figura 3.1 ilustra problemas de Estado Plano de Tensões.



**Figura. 3.1 - Problemas de Tensão Plana.**

Consideraremos uma placa fina sujeita a cargas aplicadas no plano "xy", que é o plano da estrutura. A espessura da placa é assumida pequena comparada

com as dimensões do plano “xy”. Assume-se que as tensões são constantes ao longo da espessura do plano e  $\sigma_x, \tau_{xx}, \tau_{xy}$  são ignoradas.

Assim os deslocamentos podem ser expressos como

$$\underline{\underline{u}} = [u, v]^T, \quad (3.1)$$

onde “u” e “v” são deslocamentos no plano nas direções “x” e “y”, respectivamente.

As componentes de deformações diferentes de zero são,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T, \quad (3.2)$$

onde,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.4)$$

Os deslocamentos virtuais são dados por

$$\underline{\underline{\delta u}} = [\delta u, \delta v]^T, \quad (3.5)$$

e as deformações associadas são

$$\underline{\underline{\delta \varepsilon}} = \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta v)}{\partial y}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right]^T \quad (3.6)$$

A relação tensão/deformação é dada por

$$\underline{\underline{\sigma}} = E \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.7)$$

onde  $\underline{\underline{\sigma}} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ , na qual  $\sigma_x, \sigma_y$  são as tensões normais nas direções “x e y” respectivamente e  $\tau_{xy}$  é a tensão de corte no plano “xy”.

Para materiais homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares, a matriz tensão/deformação ou matriz constitutiva é dada por

$$\underline{\underline{E}} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde  $E$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

As forças de volume são dadas por

$$\underline{b} = [b_x, b_y]^T, \quad (3.9)$$

As forças de contorno são expressas como

$$\underline{t} = [t_x, t_y]^T, \quad (3.10)$$

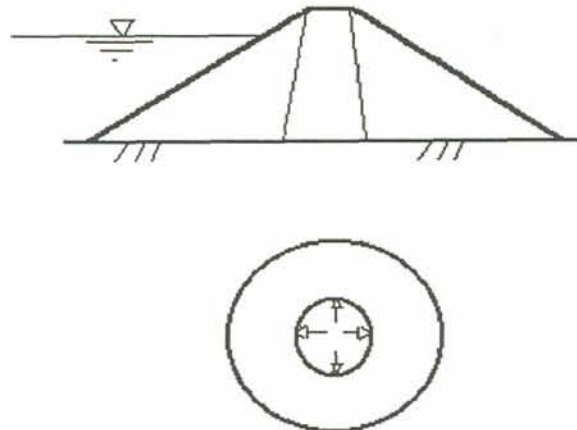
Um volume elementar é dado como

$$dv = h dx dy, \quad (3.11)$$

onde "h" é a espessura.

### 3.2 - Formulação para Estado Plano de Deformações

A figura 3.2 ilustra problemas de Estado Plano de Deformações.



**Figura. 3.2 - Problemas de Deformação Plana.**

Para problemas de deformação plana a dimensão normal a um plano "xy" é grande comparada com dimensões típicas no plano "xy" e o corpo está sujeito a cargas somente no plano "xy". Para problemas de deformações plana pode ser assumido que os deslocamentos na direção "z" são desprezíveis e que os deslocamentos "u" e "v" são independentes de "z".

Os deslocamentos são dados por

$$\underline{u} = [u, v]^T, \quad (3.12)$$

onde “u” e “v” são deslocamentos no plano nas direções “x” e “y”, respectivamente.

As componentes de deformações diferentes de zero são,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T, \quad (3.13)$$

onde,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.14)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.15)$$

Os deslocamentos virtuais são dados por

$$\underline{\underline{\delta u}} = [\delta u, \delta v]^T, \quad (3.16)$$

e as deformações associadas são

$$\underline{\underline{\delta \varepsilon}} = \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta v)}{\partial y}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right]^T \quad (3.17)$$

A relação tensão/deformação é dada por

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.18)$$

onde  $\underline{\underline{\sigma}} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ , na qual  $\sigma_x, \sigma_y$  são as tensões normais nas direções “x e y” respectivamente e  $\tau_{xy}$  é a tensão de corte no plano “xy”.

Para materiais homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares, a matriz tensão/deformação ou matriz constitutiva é dada por

$$\underline{\underline{E}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde  $E$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

A tensão normal ao plano “xy” é dada por

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.20)$$

As forças de volume são dadas por

$$\underline{b} = [b_x, b_y]^T, \quad (3.21)$$

As forças de contorno são expressas como

$$\underline{t} = [t_x, t_y]^T, \quad (3.22)$$

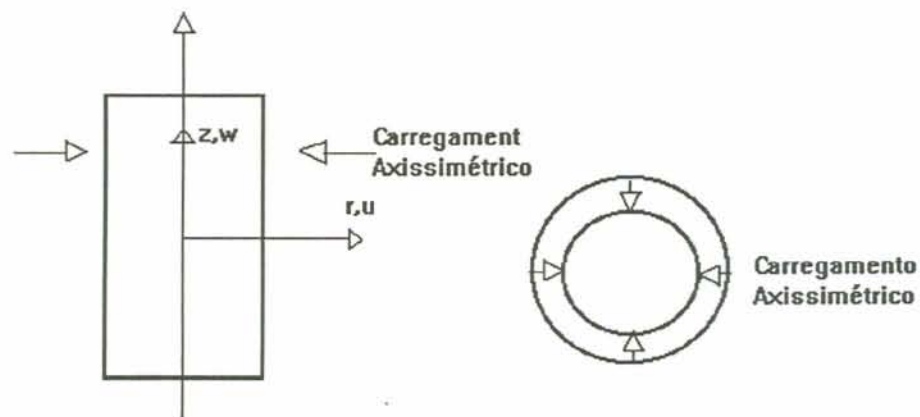
Um volume elementar é dado como

$$dv = dx dy, \quad (3.23)$$

considerando que uma unidade de espessura é analisada.

### 3.3-Formulação para sólidos axissimétricos

A figura 3.3 ilustra um problema de Sólido Axissimétrico.



**Figura 3.3 - Típico problema de sólido axissimétrico.**

Entende-se como sólido axissimétrico o sólido tridimensional que é simétrico em relação ao seu eixo central (que coincide com o eixo "z") e que está sujeito a cargas e condições de contorno que são simétricas a este eixo; o comportamento é independente da coordenada circunferencial " $\theta$ ".

Os deslocamentos podem ser expressos como

$$\underline{u} = [u, w]^T, \quad (3.24)$$

onde "u" e "w" são deslocamentos nas direções "r" e "z", respectivamente.

As deformações diferentes de zero são,

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}]^T, \quad (3.25)$$



onde ,

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad e \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.26)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3.27)$$

Os deslocamentos virtuais são dados por

$$\underline{\delta u} = [\delta u, \delta w]^T, \quad (3.28)$$

e as deformações associadas são

$$\underline{\delta \varepsilon} = \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial r}, \frac{\delta u}{r}, \frac{\partial(\delta w)}{\partial z}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial r} \right]^T \quad (3.29)$$

A relação tensão/deformação é dada por

$$\underline{\sigma} = E \underline{\varepsilon} \quad (3.30)$$

onde  $\underline{\sigma} = [\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}]^T$ , na qual  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$  são as tensões normais nas direções "r,  $\theta$  e z" respectivamente, e  $\tau_{rz}$  é a tensão de corte no plano "rz".

Para materiais homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares, a matriz tensão/deformação é dada como

$$\underline{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ 0 & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left( \frac{(1-2\nu)}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

As forças de volume são dadas por

$$\underline{b} = [b_r, b_z]^T \quad (3.32)$$

As forças de contorno são expressas como

$$\underline{t} = [t_r, t_z]^T \quad (3.33)$$

Um volume elementar é dado como

$$dv = 2\pi r dr dz \quad (3.34)$$

onde  $r$  é a distância radial ao ponto de Gauss em consideração.

### 3.4-Formulação para Elementos Finitos Isoparamétricos

Em Elementos finitos, os deslocamentos e deformações e seus complementos virtuais podem ser expressos pelas relações

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u}} &= \underline{\underline{N}} \underline{\underline{u}}^n = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad ; \quad \delta \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \delta \underline{\underline{u}}^n = \sum_{i=1}^n N_i \delta u_i \quad ; \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}^n = \sum_{i=1}^n B_i u_i \quad ; \quad \delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \delta \underline{\underline{u}}^n = \sum_{i=1}^n B_i \delta u_i \quad ; \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde para o nó "i",  $(u_i, u_i)$  são os vetores de variáveis nodais,  $(\delta u_i, \delta u_i)$  é o vetor de variáveis nodais virtuais,  $N_i = I N_i$  é a matriz de funções de forma global e  $B_i$  é a matriz deformação/deslocamento global. O número total de nós em toda malha é "n".

A condição de equilíbrio é estabelecida de forma fraca através do princípio dos trabalhos virtuais expresso como

$$\int_{\underline{\underline{v}}} [B_i]^T \underline{\underline{\sigma}} d\underline{\underline{v}} - \int_{\underline{\underline{v}}} [N_i]^T \underline{\underline{b}} d\underline{\underline{v}} - \int_A [N_i]^T \underline{\underline{t}} dA = 0 \quad (3.36)$$

onde  $\underline{\underline{\sigma}}$  é um vetor que contém as componentes significativas do tensor de tensões,  $\underline{\underline{t}}$  é o vetor de forças no contorno, " $\underline{\underline{v}}$ " é o domínio de interesse e " $A$ " é a parte no contorno no qual os deslocamentos são conhecidos.

Note que na representação isoparamétrica pode-se usar as seguintes representações para as coordenadas "x" e "y" dentro do elemento

$$\begin{bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(e)} \\ y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde para o nó "i" do elemento "e",  $N_i^{(e)}$  são as mesmas funções de forma. Podemos então avaliar a matriz jacobiana como

$$\underline{\underline{J}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^r \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i^{(e)} & \sum_1^r \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i^{(e)} \\ \sum_1^r \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i^{(e)} & \sum_1^r \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A inversa de  $\underline{\underline{J}}^{(e)}$  é então avaliada usando a expressão

$$\left[ \tilde{J}^{(e)} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \tilde{J}^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

As relações deformação/deslocamento são expressas como

$$\tilde{\varepsilon}^{(e)} = \sum_{i=1}^r B_i^{(e)} u_i^{(e)} \quad (3.40)$$

na qual  $B_i^{(e)}$  é a matriz de deformação.

O volume elementar é dado

$$dv = h^{(e)} \det \tilde{J}^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.41)$$

onde  $h^{(e)}$ ,  $u_i^{(e)}$ ,  $B_i^{(e)}$  e  $dv^{(e)}$  são dados na tabela 3.1 para as três aplicações.

Aplicação	$u_i^{(e)}$	$B_i^{(e)}$	$dv^{(e)}$
Tensão Plana	$\begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix}$	$dv^{(e)} = h^{(e)} \det \tilde{J}^{(e)} d\xi d\eta$
Deformação Plana	$\begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix}$	$dv^{(e)} = \det \tilde{J}^{(e)} d\xi d\eta$
Sólido Axissimétrico	$\begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ w_i^{(e)} \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i^{(e)}}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial r} \end{bmatrix}$	$dv^{(e)} = 2\pi r^{(e)} \det \tilde{J}^{(e)} d\xi d\eta$

**Tabela 3.1 - Deslocamentos nodais, matrizes de deformação e volumes elementares para aplicações bidimensionais**

As derivadas das funções de forma cartesianas podem ser obtidas usando-se a regra da derivação em cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} &= \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} &= \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y}\end{aligned}\quad (3.42)$$

na qual os termos  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  e  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$  podem ser obtidos da inversão da matriz jacobiana dada em (3.39).

Desde que temos uma relação tensão/deformação dentro de cada elemento da forma

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(e)} = \underline{\underline{E}}^{(e)} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(e)} = \underline{\underline{E}}^{(e)} \left( \sum_{j=1}^r B_j^{(e)} u_j^{(e)} \right) \quad (3.43)$$

a contribuição do elemento "e" para o primeiro termo de (3.36) é dada como

$$\sum_{i=1}^r K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} = \int_v [B_i^{(e)}]^T \underline{\underline{E}}^{(e)} \left( \sum_{j=1}^r B_j^{(e)} u_j^{(e)} \right) dv \quad (3.44)$$

onde  $K_{ij}^{(e)}$  é a submatriz de rigidez da matriz de rigidez do elemento  $\underline{\underline{K}}^{(e)}$ .

A contribuição do elemento "e" para o segundo termo de (3.36) é dada como

$$f_{Bi}^{(e)} = \int_{v^{(e)}} [N_i]^T \underline{\underline{b}}^{(e)} dv \quad (3.45)$$

Para o terceiro termo de (3.36), a contribuição do elemento "e" é

$$f_{Ti}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} [N_i]^T \underline{\underline{t}}^{(e)} dA \quad (3.46)$$

onde  $A^{(e)}$  é a parte da  $A$  que coincide com o contorno do elemento "e". Naturalmente muitos elementos não contribuem para  $f_{Ti}^{(e)}$ .

Utiliza-se neste trabalho um elemento baseado na formulação isoparamétrica. Este elemento é o quadrilátero Serendipity de 8 nós com lados curvos e uma variação quadrática do campo de deslocamento dentro do elemento.

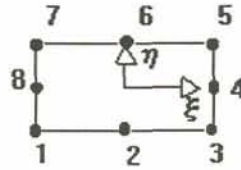


Figura 3.4 - Elemento serendipity de 8 nós

Para os nós dos cantos

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (3.47)$$

Para os nós intermediários

$$N_i^{(e)} = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2), \quad i = 2, 4, 6, 8 \quad (3.48)$$

### 3.5-Formulação para o caso de não-linearidade geométrica - Flambagem

Em todas as fórmulas empregadas até aqui, implicitamente assumimos que os gradientes de deslocamentos na estrutura são pequenos. Em termos práticos, isto significa que a geometria dos elementos permanece basicamente inalterada durante o processo de carregamento e que deformações infinitesimais lineares de primeira ordem podem ser usadas.

Na continuação introduziremos equações adequadas para deslocamentos finitos. Veremos que, empregando uma formulação Lagrangeana atualizada, muitas das expressões e subrotinas do Programa de Elementos Finitos, anteriormente mencionadas, podem ainda ser aproveitadas.

Se um ponto material originalmente na posição  $\underline{X}$  passa para posição  $\underline{x}$ , após a deformação, temos o deslocamento

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} \quad (3.49)$$

Definimos também a taxa de deslocamento

$$\dot{\underline{u}} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \quad (3.50)$$

O gradiente da taxa de deslocamento é

$$\underline{L} = \frac{\partial \dot{\underline{u}}}{\partial \underline{x}} \quad (3.51)$$

que pode ser decomposto nas suas parcelas simétrica e antissimétrica

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}} \quad (3.52)$$

onde  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\varepsilon}}$  é a taxa de deformação específica e  $\underline{\underline{W}}$  é a taxa de rotação.

Empregando o método de Elementos Finitos, aproximando as variáveis na forma usual

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{x}}^n \quad (3.53)$$

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{u}}^n \quad (3.54)$$

$$\dot{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{N}} \dot{\underline{\underline{u}}}^n \quad (3.55)$$

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{N}} \dot{\underline{\underline{u}}}^n \quad ; \quad \underline{\underline{N}} = \frac{\partial \underline{\underline{N}}}{\partial \underline{\underline{x}}} \quad (3.56)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \dot{\underline{\underline{u}}}^n \quad ; \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \underline{\underline{N}}}{\partial \underline{\underline{x}}} + \left( \frac{\partial \underline{\underline{N}}}{\partial \underline{\underline{x}}} \right)^T \right] \quad (3.57)$$

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais estendido a situações geometricamente não-lineares, pode ser mostrado [30] que

$$\dot{\underline{\underline{P}}} = \underline{\underline{K}} \dot{\underline{\underline{u}}}^n \quad (3.58)$$

onde

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_L + \underline{\underline{K}}_{NL} \quad (3.59)$$

$$\underline{\underline{K}}_L = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}} dv \quad (3.60)$$

$$\underline{\underline{K}}_{NL} = \int_V \left( \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{N}} - 2 \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}} \right) dv \quad (3.61)$$

### 3.5.1. Processo de solução numérica básico para problemas não-lineares

O uso de uma discretização em Elementos Finitos, resulta em um sistema de equações simultâneas da forma

$$\underline{H}\underline{\varphi} + \underline{f} = 0 \quad (3.62)$$

na qual  $\underline{\varphi}$  é o vetor de incógnitas básicas,  $\underline{f}$  é o vetor de cargas aplicadas e  $\underline{H}$  é a matriz de rigidez.

Se os coeficientes da matriz  $\underline{H}$  dependem das incógnitas ou suas derivadas, o problema torna-se não-linear. Neste caso a solução direta do sistema de equações (3.62) é impossível e um esquema iterativo deve ser adotado. Duas opções possíveis para a seqüência iterativa são descritas a seguir.

### **3.5.2 - O método de Newton Raphson**

Para situações não-lineares, na qual a rigidez depende dos deslocamentos,  $\underline{H}$  é igual ao gradiente local da relação força/deslocamento da estrutura e é denominada rigidez tangencial. A análise de tais problemas deve ser feita de modo incremental, desde que a solução num determinado estágio, pode não somente depender dos correntes deslocamentos da estrutura, mas também, da história prévia do carregamento. Conseqüentemente, o problema pode ser linearizado dentro do incremento de carga e os termos não-lineares podem ser desconsiderados.

O processo de solução é ilustrado na figura 3.5, para uma única variável. O mesmo é iniciado de um valor inicial da incógnita  $\varphi^o$  (para problemas estruturais a posição inicial da solução é quase invariavelmente  $\varphi^o = 0$ ). A rigidez tangencial,  $H(\varphi^o)$  é determinada conforme descrito na subrotina STIFPS, com base em valores atualizados do K (módulo de compressibilidade) e G (módulo de corte), estes atualizados na subrotina GKN. A força residual é determinada conforme descrito na subrotina CONVER.

A correção,  $\Delta\varphi^o$ , para o valor inicial é encontrada de acordo com a forma linearizada

$$\Delta\varphi^r = -[H(\varphi^r)]^{-1} \psi(\varphi^r) \quad (3.63)$$

Uma melhor aproximação para as incógnitas é então obtida como

$$\varphi^1 = \varphi^o + \Delta\varphi^o \quad (3.64)$$

Este processo iterativo é então continuado até a solução convergir para a solução não-linear que é indicada pela condição que  $\varphi^r$  praticamente desaparece.

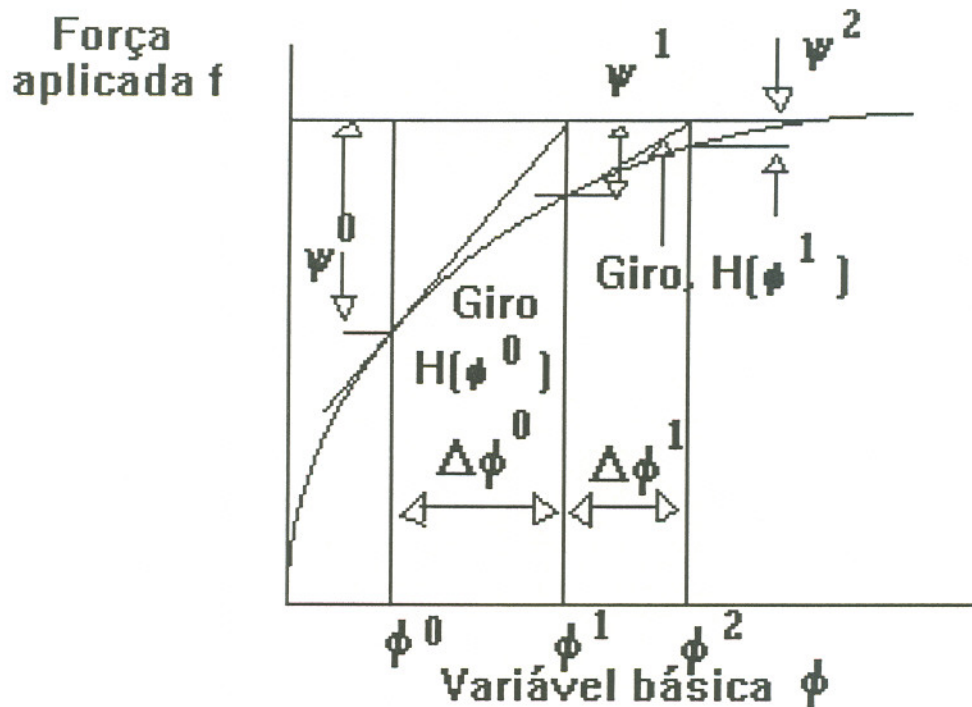


Figura 3.5 - Algoritmo de solução pelo método de Newton Raphson para variável simples.

### 3.5.3 - O método de Newton Raphson modificado

Por este método não há necessidade de uma completa fatorização (redução) e solução do conjunto completo de equações simultâneas que descrevem a estrutura discretizada, a cada iteração, como no caso descrito na seção anterior.

Para este método, uma completa solução das equações necessita somente ser executada para a primeira incremento de carga e as subseqüentes aproximações para a execução da solução não-linear são feitas via a expressão

$$\Delta\varphi^r = -[H(\varphi^o)]^{-1} \psi(\varphi^r) \quad (3.65)$$

Desde que a mesma matriz de rigidez  $H(\varphi^o)$  é empregada em cada estágio, as equações reduzidas podem ser empregadas em sua forma reduzida ou fatorada e uma segunda ou subseqüente solução, meramente necessita a redução dos termos de  $\psi(\varphi^r)$ , junto com uma retrosubstituição. Isto tem a vantagem de reduzir significativamente o custo computacional por iteração mas reduz a taxa de convergência, como pode ser visto na figura 3.6, onde o esquema está ilustrado esquematicamente.



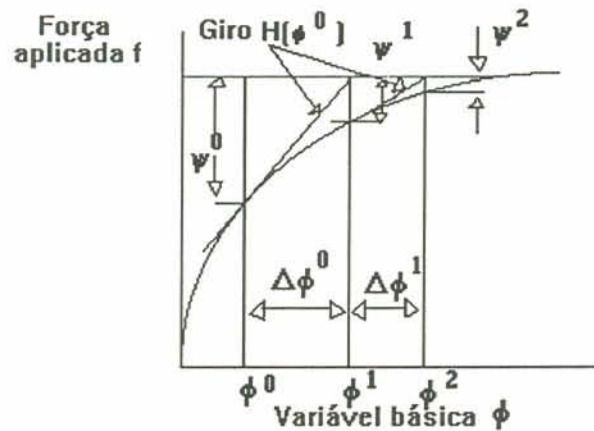


Figura 3.6 - Algoritmo de solução pelo método de Newton Raphson modificado para variável simples.

### 3.6 - Implementação computacional para não-linearidade do material

O objetivo deste capítulo é descrever a aplicação do método de Elementos Finitos empregado na solução de problemas de materiais não-lineares.

Subrotinas separadas são empregadas para executar várias operações requeridas na análise de elementos finitos não-lineares.

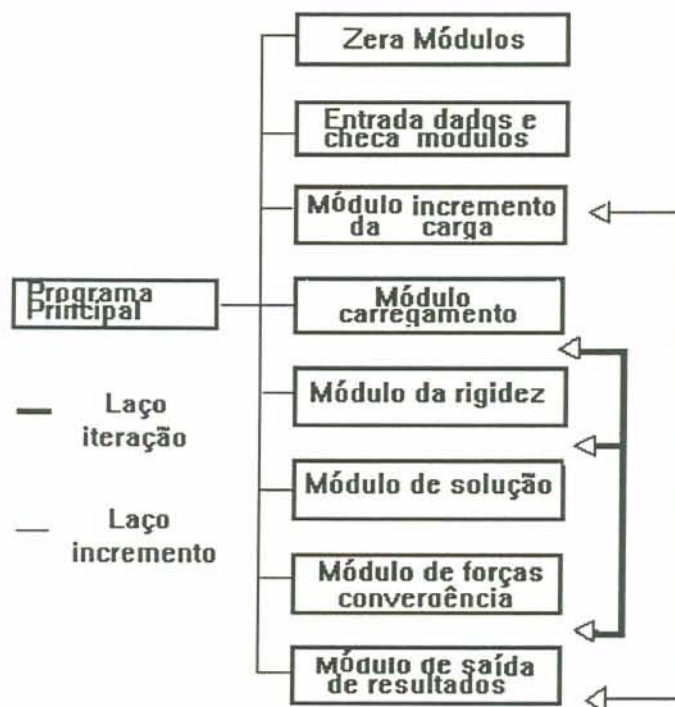


Figura 3.7 - Módulos do programa para solução não-linear

Os módulos mostrados esquematicamente na figura 3.7, são descritos em relação a suas funções gerais.

**a)Módulo zero** - este é o primeiro módulo entrado e sua função é inicializar a zero vários vetores e matrizes no começo do processo de solução.

**b)Entrada dados e checa módulos** - este módulo manuseia os dados de entrada que definem a geometria, condições de contorno e propriedades do material. Estes dados são checados usando rotinas de diagnóstico e se erros ocorrerem eles são impressos num arquivo de saída apropriado. Para elementos isoparamétricos, as constantes de integração de Gauss e coordenadas dos nós intermediários de um segmento reto do elemento, são também, avaliados nesta seção. Uma vez usado este módulo, não se necessita usá-lo novamente.

**c)Módulo carregamento** - este módulo organiza o cálculo das forças nodais devido a várias formas de carregamento para bidimensionais aplicações. Este processo inclui pressão, gravidade e carga concentrada.

**d)Módulo incremento de carga** - para solução de materiais não-lineares em Elementos Finitos, deve-se proceder de forma incremental. Portanto a função deste módulo é controlar o incremento da carga avaliada no módulo de carregamento.

**e)Módulo da rigidez** - organiza a avaliação da matriz de rigidez de cada elemento. As matrizes de rigidez são armazenadas em disco na ordem de seqüência requerida para montagem e redução das equações.

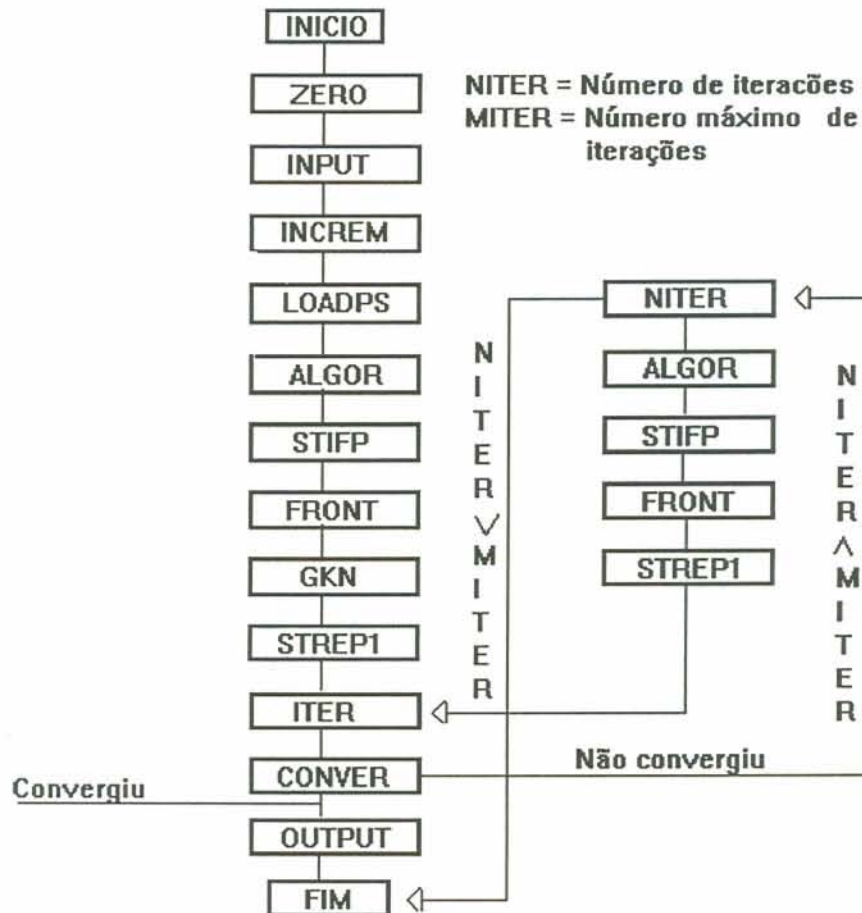
**f)Módulo da solução** - o propósito desta subrotina é montar, reduzir e resolver o conjunto de equações , para dar os deslocamentos nodais, reações nos nós restringidos e tensões nos pontos de Gauss de cada elemento.

**g)Módulo de forças e convergência** - a função deste módulo é calcular as forças residuais em cada estágio da análise e checar a convergência da solução não-linear contra o critério estabelecido.

**h)Módulo de saída de resultados** - este módulo organiza a saída das quantidades requeridas.

### **3.6.1.-Solução de problemas de não-linearidade do material.**

Uma metodologia modular é adotada para o presente programa, com várias operações executadas em subrotinas separadas.



**Figura 3.8 - Organização do programa para aplicações bidimensionais não-lineares**

Um programa de Elementos Finitos não-linear, deve necessariamente conter todas as subrotinas para a análise linear, ou seja, subrotina que aceita os dados de entrada, uma subrotina para a formulação da rigidez do elemento, subrotinas para montagem e solução das equações e uma subrotina de saída de resultados.

A fim de implementar a solução dos algoritmos descritos na seção 2.2, subrotinas adicionais, "LAÇOS" e testes são necessárias. Em particular dois "LAÇOS" são necessários; para iterar a solução até a convergência desta ocorrer e para incrementar o carregamento aplicado, se necessário. Subrotinas devem ser incluídas para avaliar as forças residuais e também para monitorar a convergência da solução. A figura 3.8 mostra o fluxograma do programa.

O programa apresentado neste capítulo, também, forma a base do programa viscoelástico.

As próximas seções descrevem as subrotinas implementadas.

### 3.6.1.1 - Subrotina ALGOR

A função desta subrotina é controlar o processo de solução de acordo com o valor do parâmetro, NALGO, entrado na subrotina INPUT.

NALGO é o indicador usado para identificar o tipo de algoritmo de solução a ser empregado:

1 - método de Newton Raphson modificado.

2 - método de Newton Raphson.

- A subrotina coloca o valor da variável KRRSL igual a 1 ou 2 de acordo com NALGO e o corrente valor do número da iteração IITER e o número do incremento IINCS. Um valor de KRRSL = 1 indica reformulação da rigidez do elemento acompanhado por uma solução completa das equações e KRRSL = 2 indica que a rigidez do elemento não deve ser modificada e conseqüentemente somente a resolução das equações deve ser realizada.

### 3.6.1.2 - Subrotina CONVER

A função desta subrotina é monitorar a convergência do processo de iteração da solução não-linear. A convergência da solução é baseada nos valores das forças residuais. O critério de convergência empregado é

$$\frac{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^N (\psi_i^r)^2 \right]}}{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^N (f_i)^2 \right]}} * 100 \leq TOLER \quad (3.66)$$

onde "N" é o número total de pontos nodais no problema e "r" representa o número da iteração. Este critério declara que a convergência ocorre se a norma das forças residuais torna-se menor do que TOLER vezes a norma das forças totais aplicadas. O parâmetro NCHEK é usado para indicar se a convergência ocorreu ou não. Os valores para NCHEK são:

NCHEK = 0      Solução convergiu

NCHEK = 1      Solução convergindo, com a norma das forças residual sendo menor para iteração  $r$  do que para a iteração  $(r-1)$ .

NCHEK = 999 Solução divergindo. A norma das forças residual é maior para iteração  $r$  do que para a iteração  $(r - 1)$ .

Desde que para problemas bidimensionais nós temos mais que um grau de liberdade por ponto nodal, o somatório em (3.66) deve ser feito sobre o número total de graus de liberdade da estrutura.

### **3.6.1.3. - Subrotina STREP1**

A função desta subrotina é avaliar as forças nodais que são estaticamente equivalentes ao campo de tensões, satisfazendo as condições de contorno e/ou iniciais. A comparação destas forças nodais equivalentes com as cargas aplicadas dá as forças residuais.

$$\underline{\psi} = \underline{H} \underline{\varphi} + \underline{f} \neq 0 \quad (3.67)$$

Todas as componentes das tensões e deformações devem ser acumuladas dos valores obtidos em cada iteração.

As cargas aplicadas para a iteração  $r$  são as forças residuais calculadas no fim da iteração  $(r - 1)$ , de acordo com (3.67). Estas cargas aplicadas dão origem a incrementos de deslocamentos,  $\Delta\varphi^r$ . Pode-se calcular, portanto, o correspondente incremento de deformação  $\Delta\varepsilon^r$ .

### **3.6.1.4. - Subrotina OUTPUT**

Esta subrotina imprime os resultados conforme frequência determinada pelos parâmetros NOUTP(1) e NOUTP(2).

NOUTP(1) controla a saída dos resultados ainda não convergidos após a primeira iteração. A fim de examinar o processo de convergência é possível variar a frequência de saída para cada incremento de carga.

- 1-Imprime os deslocamentos somente após a primeira iteração.
- 2-Imprime os deslocamentos e reações nodais após a primeira iteração.
- 3-Imprime os deslocamentos, reações e tensões após a primeira iteração.

NOUTP(2) controla a saída dos resultados convergidos.

- 1-Imprime somente os deslocamentos finais.

2-Imprime os deslocamentos finais e reações nodais.

3-Imprime os deslocamentos finais, reações e tensões.

As tensões principais e direções são calculadas também nesta subrotina e estas são dadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2\right)} \quad (3.68)$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2\right)} \quad (3.60)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (3.70)$$

com “x” e “y” sendo substituído por “r” e “z” para o caso axissimétrico. O termo  $\theta$  define o ângulo que a tensão principal máxima faz com os eixos (y ou z); ângulo positivos tem sua medida no sentido anti-horário.

### **3.6.1.5. - Subrotina GKN**

A função desta subrotina é atualizar o Módulo de Compressibilidade (K) e o Módulo de Corte (G). A atualização tem como base as tensões e emprega-se a formulação apresentada na seção 2.2.1.2.2.

Caso KRRSL for igual a dois e o número máximo de iterações (MITER) for igual a zero, então, o processo de solução será puramente incremental, com a atualização de “K” e “G” a cada incremento de carga, ou seja, a medida que as tensões crescem, “K” e “G” diminuem, atingindo valor zero para  $\gamma=1$  (ponto que corresponde ao estado de tensões máxima suportado pelo material).

### **3.6.1.6. - LAÇO INCREM**

Tem como função incrementar o carregamento aplicado. O “LAÇO” encerra-se quando o número do incremento (IINCS) for igual ao número de incrementos em que a carga foi subdividida (NINCS).

### **3.6.1.7. - LAÇO ITER**

Sua função é controlar o número de iterações executadas pelo programa.

Resume-se a um “LAÇO” que encerra-se quando o número de iterações (NITER) for igual ao número máximo de iterações permitidas (MITER).

### **3.6.1.8 - Teste NITER**

Tem como objetivo averiguar a convergência da solução, obedecido o número máximo de iterações (MITER).

Se a norma das forças residuais for maior do que TOLER vezes a norma das forças totais aplicadas (quando NCHEK=1 ou NCHEK=999, averiguados pela Subrotina CONVER) e o número de iterações (NITER) for igual ao número máximo de iterações (MITER), então, trunca-se o programa com a mensagem “Solução Não Convergiu”.

As demais subrotinas não mencionadas e utilizadas, encontram-se detalhadas e explicadas em [13],[14] e [18].

## **3.6.2 - Subrotina para cálculo das deformações viscoelásticas lineares e não-lineares**

### **3.6.2.1 - Subrotina INITSTR**

A função desta subrotina é calcular a taxa de deformação viscoelástica.

O presente programa partiu de uma formulação para o cálculo de viscoelasticidade linear via variáveis de estado introduzida por Masuero [18]. Devido, agora, querermos trabalhar com fluência não-linear, a formulação mencionada é substituída pela nova formulação introduzida na seção 2.2.2.

Por ser a viscoelasticidade um fenômeno transiente, o essencial objetivo de um processo de solução numérica é determinar as deformações viscoelásticas num intervalo de tempo de interesse. Conseqüentemente, algum esquema de solução baseado em intervalos de tempo deve ser introduzido a fim de permitir a solução e avançar de um tempo  $t_n$  para um tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$  onde, os subíndices “n” e “n+1” representam sucessivos tempos e  $\Delta t_n$  o intervalo entre estes. O mais simples método de incremento de quantidades é oferecido pelo método de Euler. Neste a taxa média de mudança sobre o intervalo é tomada como o valor no começo

do intervalo e assim, o valor determinado de alguma quantidade "X" no tempo  $t_{n+1}$  é extrapolado no tempo para ser

$$X^{n+1} = X^n + \left( \dot{X} \right)^n \Delta t_n \quad (3.71)$$

O método de Euler tem como principal atrativo sua simplicidade.

Considerando que, no instante inicial ( $t = 0$ ), as deformações viscoelásticas são nulas, as tensões obtidas em cada passo atualizam as variáveis de estado, as quais formam o vetor de pseudo-cargas viscoelástico para o passo seguinte. O processo está esquematizado no fluxograma da figura 3.9 onde,  $\tilde{P}^b$  é o vetor de cargas de volume,  $\tilde{P}^s$  é o vetor de cargas aplicadas no contorno,  $\tilde{P}^T$  é o vetor de pseudo-cargas térmicas,  $\tilde{P}^v$  é o vetor de pseudo-cargas viscoelásticas,  $\tilde{\varepsilon}$  é o vetor de deformações viscoelásticas,  $\Delta t$  é o intervalo de tempo [18].

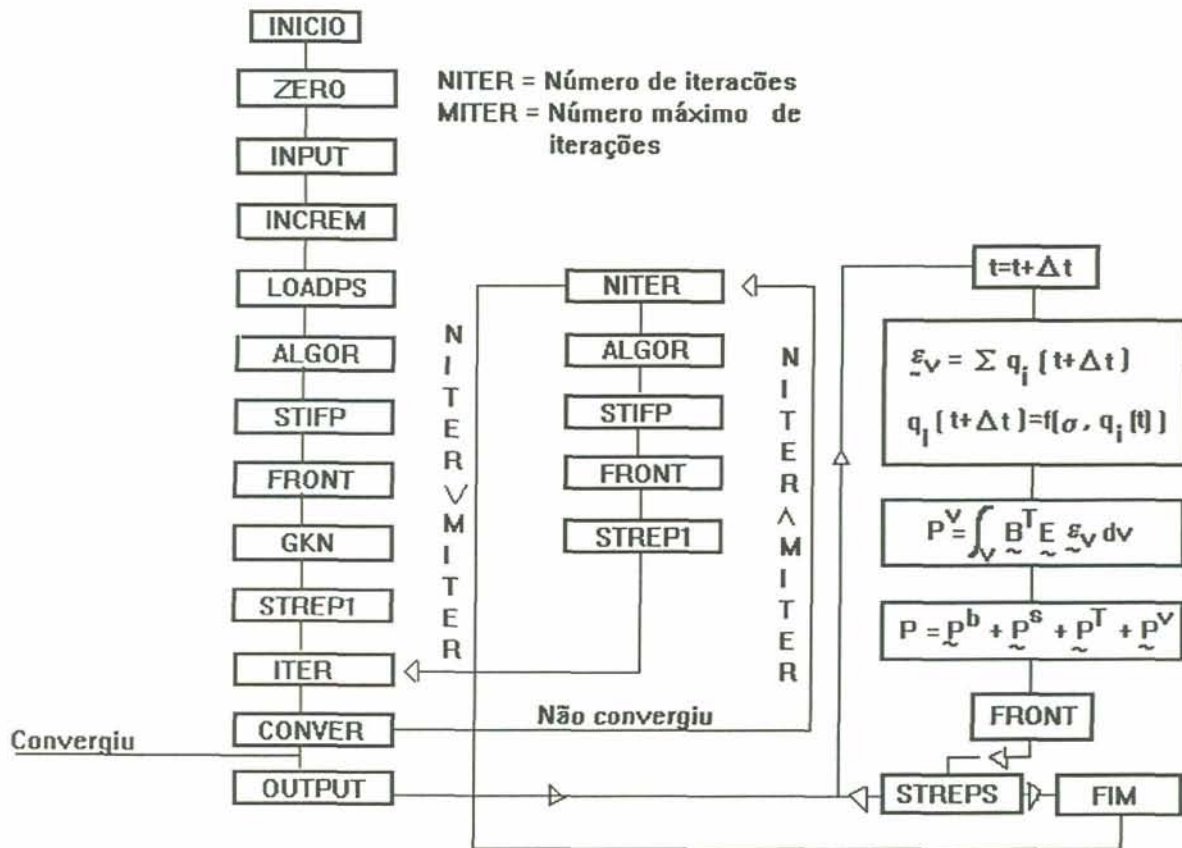


Figura 3.9 - Organização do programa viscoelástico aplicando variáveis de estado ao M. E. F.



### 3.7 - Validação do programa

#### 3.7.1. Validação da análise axissimétrica

Para verificar a funcionamento da formulação axissimétrica introduzida ao programa, analisou-se um problema simples e comparou-se com os resultados obtidos do sistema GAELI [43].

Para a solução numérica via Elementos Finitos utilizou-se uma malha de dezesseis elementos de igual dimensões (figura 3.10).

A figura 3.11 refere-se a um cilindro sujeito a pressão interna  $P=6.1354 \frac{N}{mm^2}$ . O módulo de elasticidade utilizado foi de  $E=206829 \frac{N}{mm^2}$  e o coeficiente de Poisson foi  $\nu=0.3$ . A linha cheia refere-se a solução obtida utilizando-se o sistema GAELI e os símbolos representam a solução numérica obtida com a utilização do presente programa de elementos finitos.

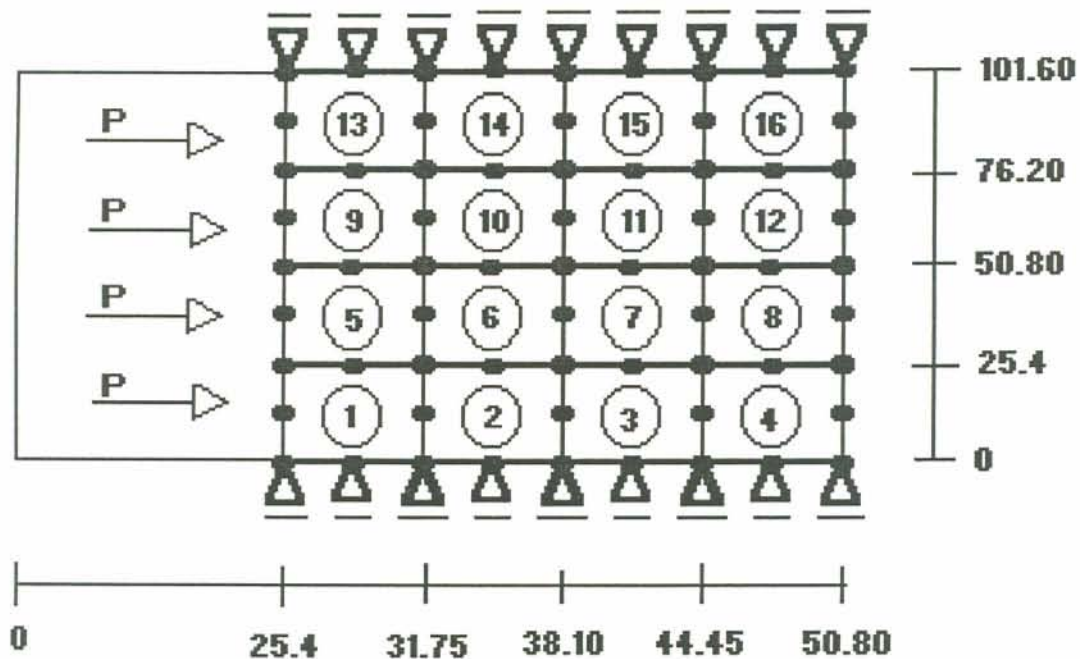


Figura 3.10 - Malha utilizada para cálculo de sólido axissimétrico (dimensões em "mm").

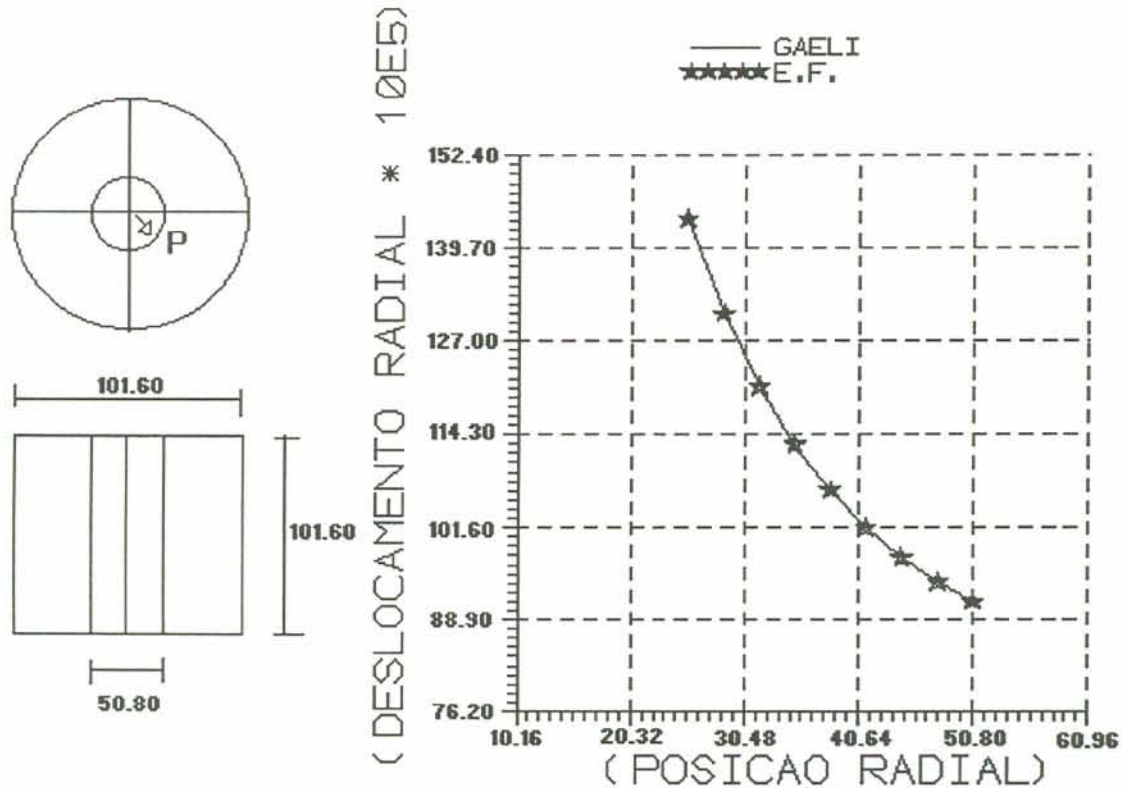


Figura 3.11 - Deslocamento radial em um cilindro espesso.

### 3.7.2. Validação da análise de não-linearidade geométrica

Para verificar o funcionamento do programa após a inclusão da análise de não-linearidade geométrica, foram rodados exemplos elásticos clássicos com solução fechada.

#### 3.7.2.1. Viga em balanço com carga concentrada no extremo livre.

Para a solução numérica via Elementos Finitos dos exemplos da figura 3.13 e figura 3.14 utilizou-se uma malha de quatro elementos de igual dimensões e o incremento de carga permaneceu constante e igual a 100 Newtons durante toda a análise (figura 3.12). O comprimento da viga foi  $L=2000\text{mm}$ , área da seção transversal  $A=100\text{mm}^2$ , módulo de elasticidade  $E=20000\text{MPa}$ , momento de inércia  $I=83333.33\text{mm}^4$  e coeficiente de Poisson foi  $\nu=0.2$ . Estes exemplos foram rodados como Estado Plano de Tensões e referem-se a uma viga em balanço submetida a uma carga concentrada na extremidade livre.

Os resultados numéricos dos deslocamento verticais e horizontais (símbolos) foram comparados com a solução analítica [30] (figura 3.13).

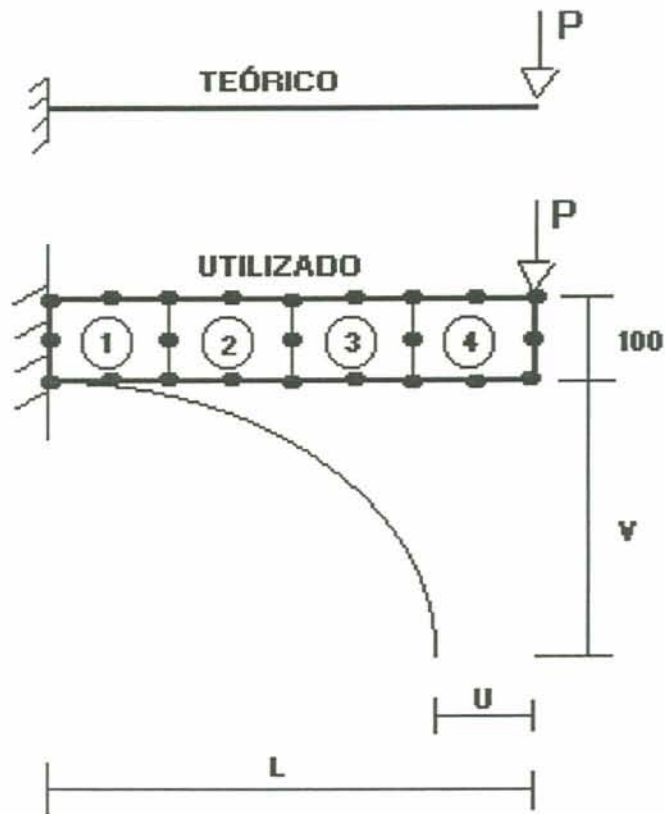


Figura 3.12 - Malha utilizada para viga em balanço com carga concentrada no extremo livre (dimensões em mm).

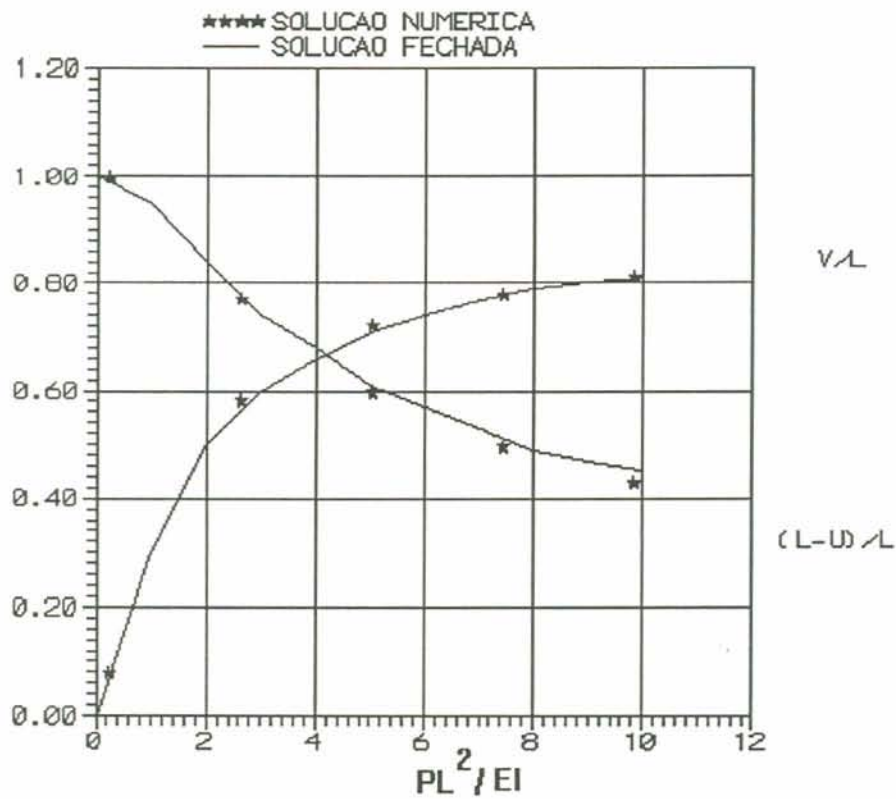


Figura 3.13 - Viga em balanço com carga concentrada no extremo livre

No exemplo da figura 3.14 permitiu-se deslocamentos muito grandes (DESL. V e DESL. U) a fim de melhor visualizar o comportamento da estrutura ao longo do tempo.

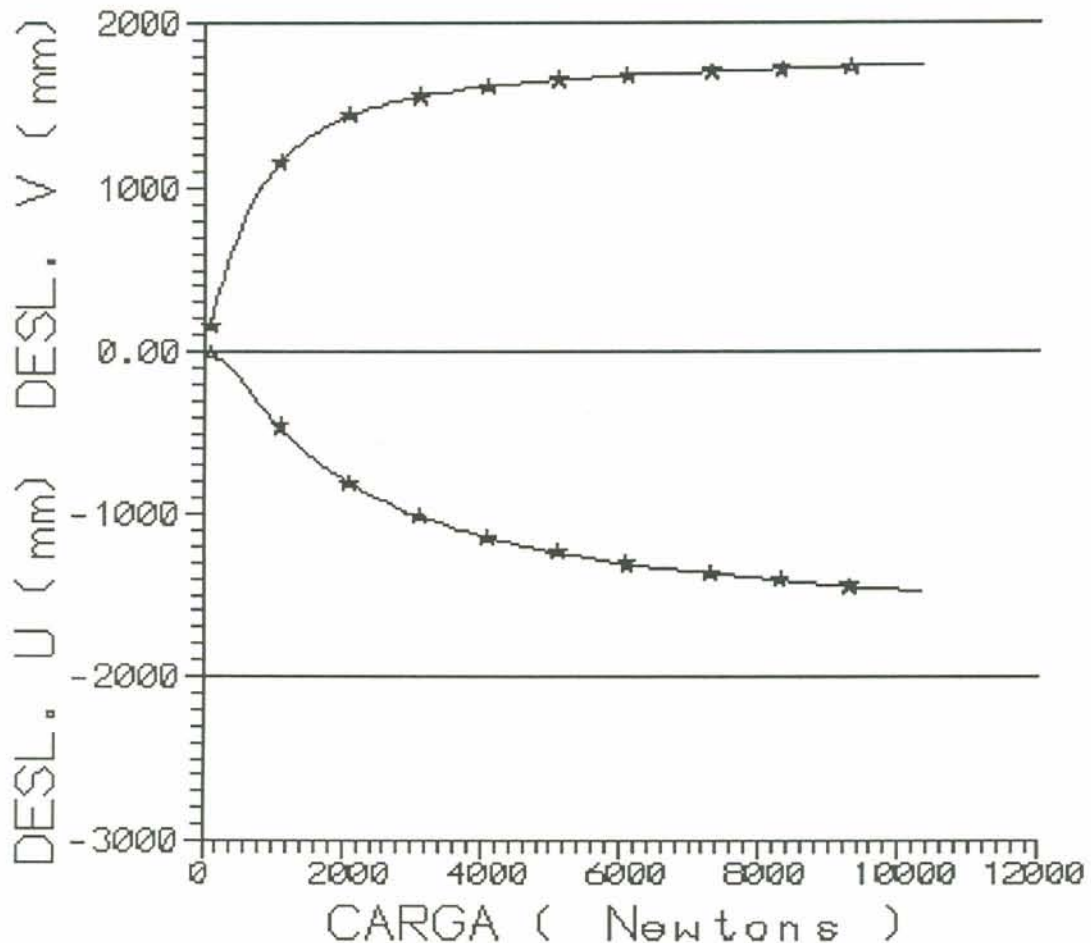


Figura 3.14 - Viga em balanço com carga concentrada no extremo livre

### 3.7.2.2. Pilar sob compressão excêntrica, com excentricidade inicial.

Para solução numérica utilizou-se uma malha de quatro elementos de iguais dimensões e o incremento de carga permaneceu constante e igual a 100 Newtons durante toda a análise (figura 3.15). O comprimento do pilar foi  $L=2000\text{mm}$ , área da seção transversal  $A=100\text{mm}^2$ , módulo de elasticidade  $E=20000\text{MPa}$  e coeficiente de Poisson foi  $\nu=0.2$ .

A linha cheia refere-se a solução fechada de um pilar com excentricidade inicial encontrada em [30].

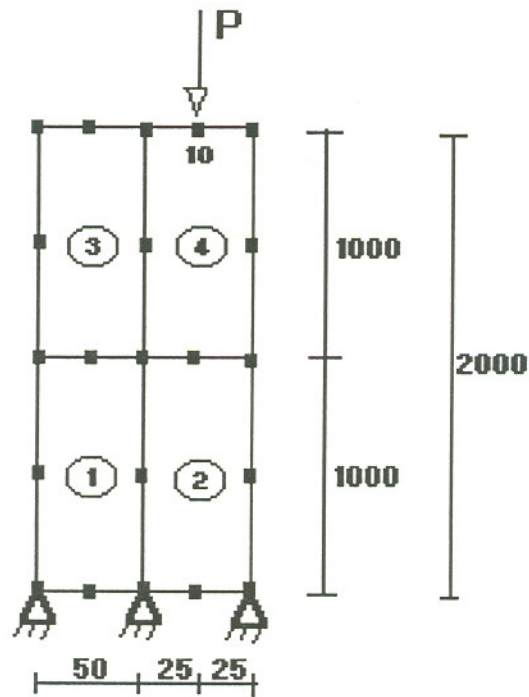


Figura 3.15 - Malha utilizada para coluna com excentricidade inicial (dimensões em mm).

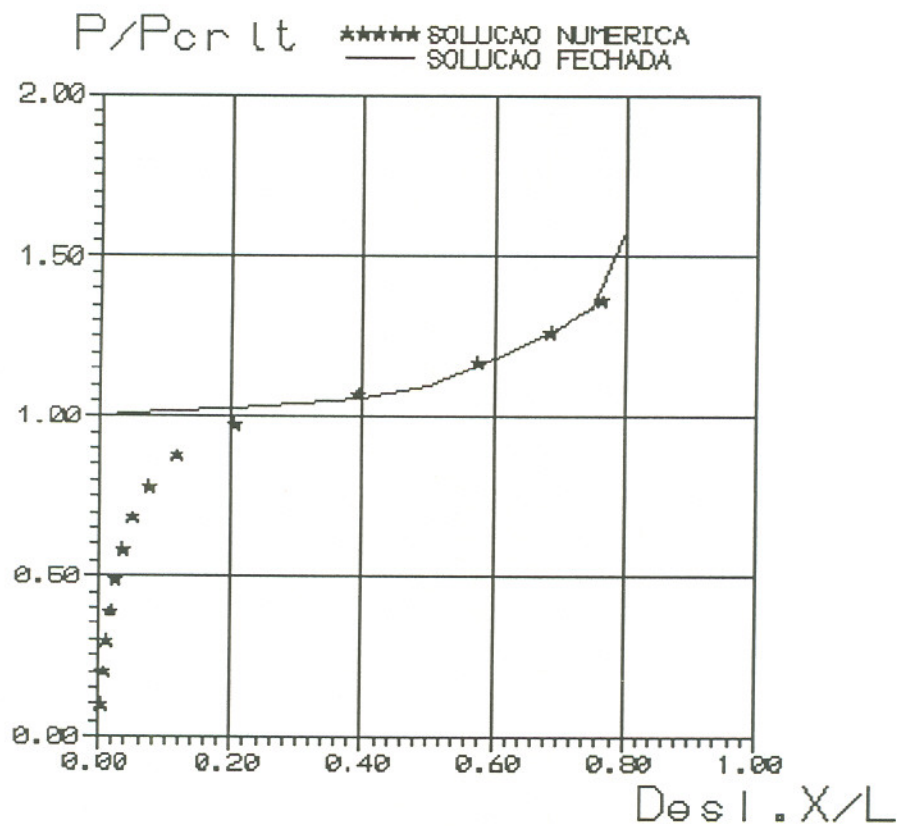


Figura 3.16 - Pilar com excentricidade inicial

A solução teórica difere da solução numérica, devido ao fato da solução teórica não considerar excentricidade inicial.

## 4. EXEMPLOS E APLICAÇÕES

### 4.1 - Comparação entre resultados teóricos (uniaxiais) e resultados numéricos

A figura 4.1 mostra os modelos e orientação dos eixos coordenados utilizados nos exemplos ilustrativos a partir deste ponto.

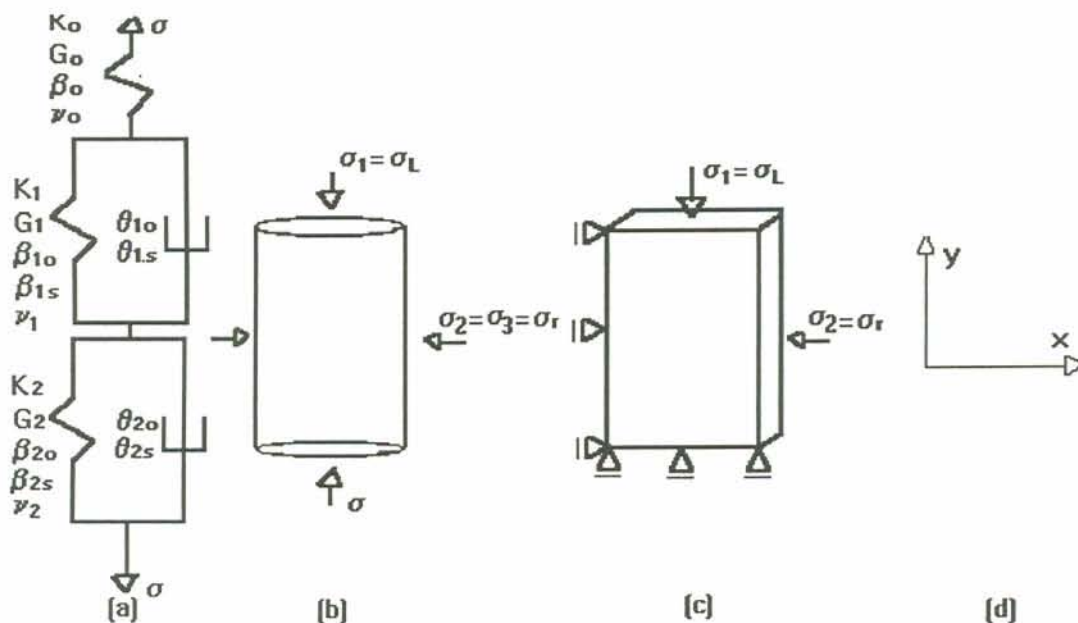


Figura 4.1 - (a) Modelo generalizado de elementos viscoelásticos (Kelvin não-linear) e suas constantes; (b) Sólido utilizado para cálculo Axissimétrico; (c) Sólido utilizado para cálculo de problemas de Estado Plano de Tensões (E.P.T.) e Estado Plano de Deformações (E.P.D.); (d) Eixos coordenados.

Para todos os exemplos apresentados a partir deste ponto, rodados como Estado Plano de Tensões, a espessura utilizada foi igual a uma unidade de medida em consideração.

Estes exemplos foram rodados para validar o processo de integração numérica.

No exemplo da figura 4.3 e figura 4.4 considerou-se um cilindro de dimensões 150 x 400mm (diâmetro e altura, respectivamente) e discretizado com quatro elementos de iguais dimensões (figura 4.2). Estes exemplos foram rodados como sólidos axissimétricos. A solução teórica para estes problemas é encontrada em [8]. Gráficou-se os resultados numéricos (símbolos) frente aos resultados teóricos (linhas cheias), para diversos valores de “ $\gamma$ ”; o cilindro foi submetido a uma tensão de compressão axial, tendo deformações axiais e laterais livres.

Para o exemplo da figura 4.3 o material foi modelado por um elemento Kelvin não-linear para as deformações viscoelásticas, com constantes  $K_1 = 12777 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 9583 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 165$  e  $\beta_{1s} = 165$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 43.4783$  dias e  $\theta_{1s} = 43.4783$  dias e coeficiente de viscosidade do amortecedor  $\eta = 100000 \frac{N}{mm^2} \text{ dias}$ . O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 5$ .

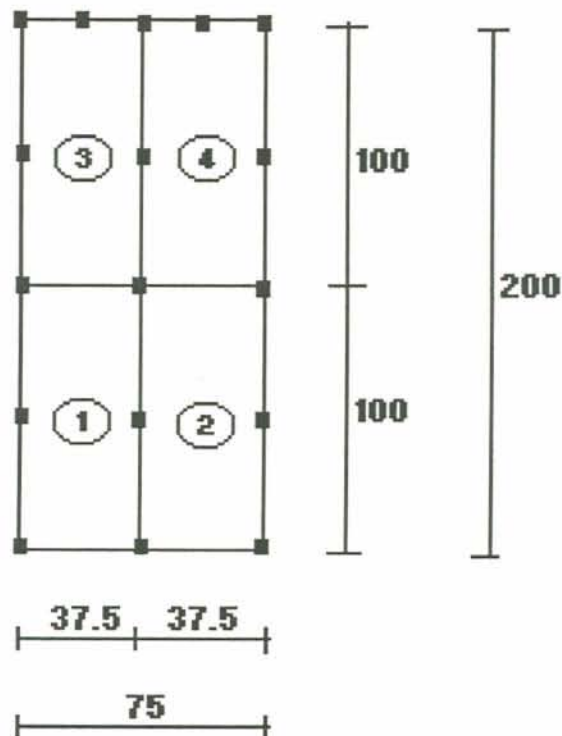


Figura 4.2 - Malha utilizada para o exemplo rodado como sólido axissimétrico( dimensões em mm ).

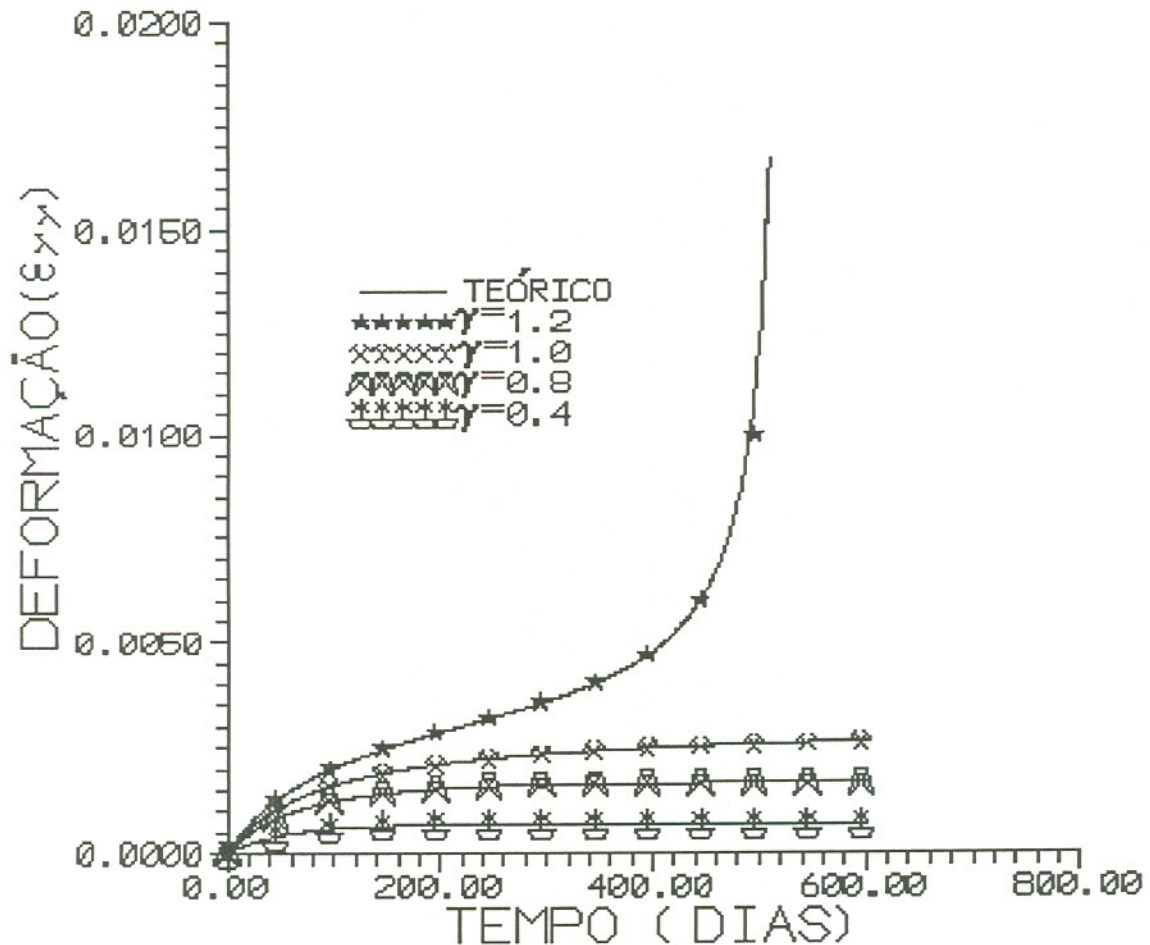


Figura 4.3 - Curvas de fluência, excluída as deformações instantâneas

Para o exemplo da figura 4.4 o material foi modelado para as deformações instantâneas com constantes  $K_o = 25000 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 18750 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 45 \frac{N}{mm^2}$ . e por um elemento Kelvin, para as deformações viscoelásticas, com constantes  $K_1 = 12777 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 9583 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 165$  e  $\beta_{1s} = 165$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 43.4783$  dias e  $\theta_{1s} = 43.4783$  dias e coeficiente de viscosidade do amortecedor  $\eta = 100000 \frac{N}{mm^2} \text{ dias}$ . O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 5$ .



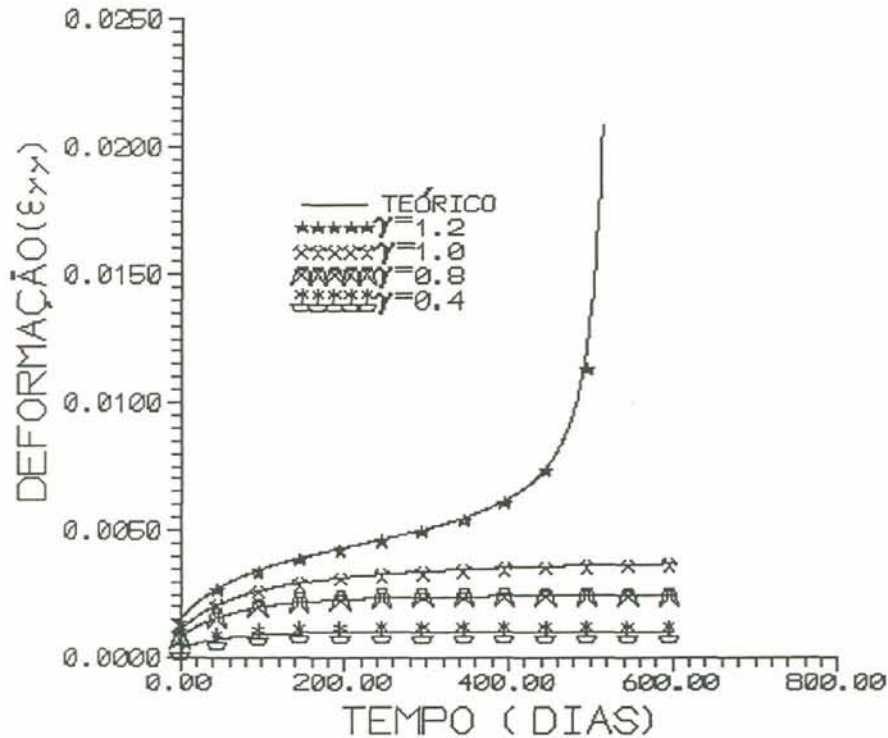


Figura 4.4 - Curvas de fluência, incluída as deformações instantâneas.

No exemplo da figura 4.5 considerou-se um cubo com 100 mm de aresta discretizado com apenas um elemento. Este exemplo foi rodado como Estado Plano de Tensões.

Analisou-se o cubo submetido a uma tensão de compressão axial, tendo deformações axiais e laterais livres. O material foi modelado para as deformações instantâneas com constantes  $K_o = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$  e por um elemento Kelvin não-linear, para as deformações viscoelásticas, com constantes  $K_1 = 16666 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 12500 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 250$  e  $\beta_{1s} = 250$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 10.55$  dias e  $\theta_{1s} = 10.55$  dias e coeficiente de viscosidade do amortecedor  $\eta = 600000 \frac{N}{mm^2} \text{ dias}$ . O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 1$ .

A solução teórica para este problema é dada pela formulação apresentada em [8].

A figura 4.5 mostra o resultados numéricos (pontos) frente aos resultados teóricos (linhas cheias).

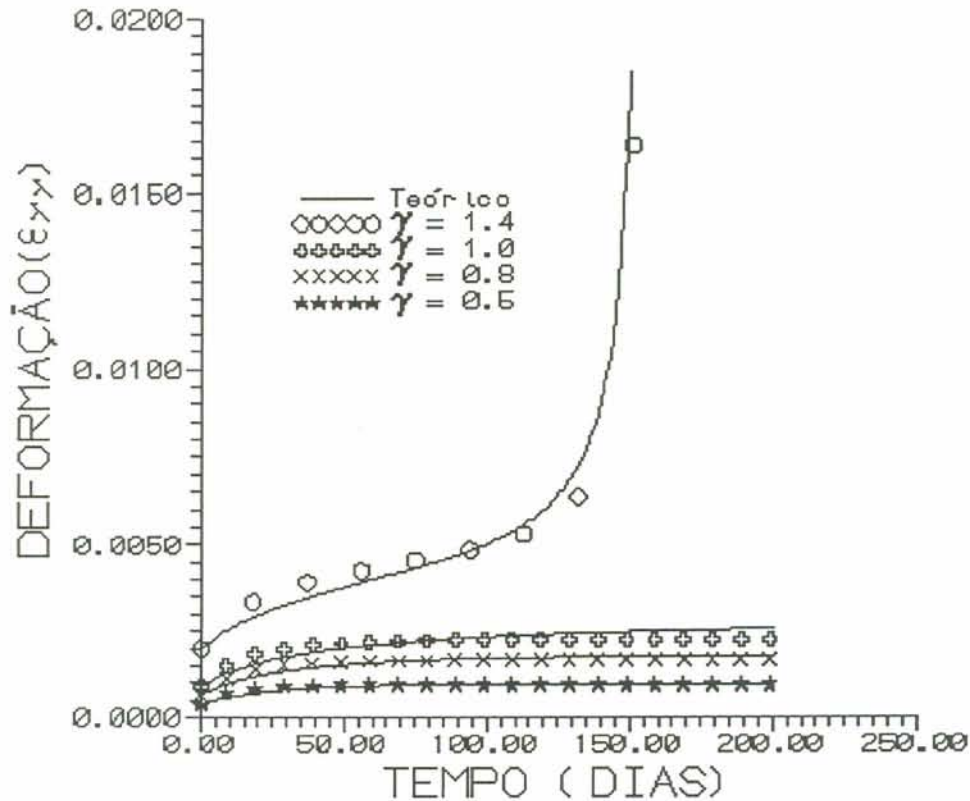


Figura 4.5 - Curvas de fluência para diversos valores de “ $\gamma$ ”.

#### 4.2- Resultados numéricos ilustrativos do comportamento qualitativo do concreto

Estes exemplos indicam que o comportamento previsto pelo modelo é qualitativamente similar ao observado experimentalmente.

Para os exemplos da figura 4.6, figura 4.7, figura 4.8 e figura 4.9 o material foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$ .

Nos exemplos da figura 4.6, figura 4.7 e figura 4.10 considerou-se um cubo com 100mm de aresta, discretizado por um único elemento. Os exemplos foram rodados como Estado Plano de Tensões.

No exemplo da figura 4.6 analisou-se o cubo submetido a uma tensão de compressão axial, tendo deformações axiais e laterais livres. Os valores nodais da tensão axial normal à face foram incrementados de  $1 \frac{N}{mm^2}$ , até atingir a ruptura.

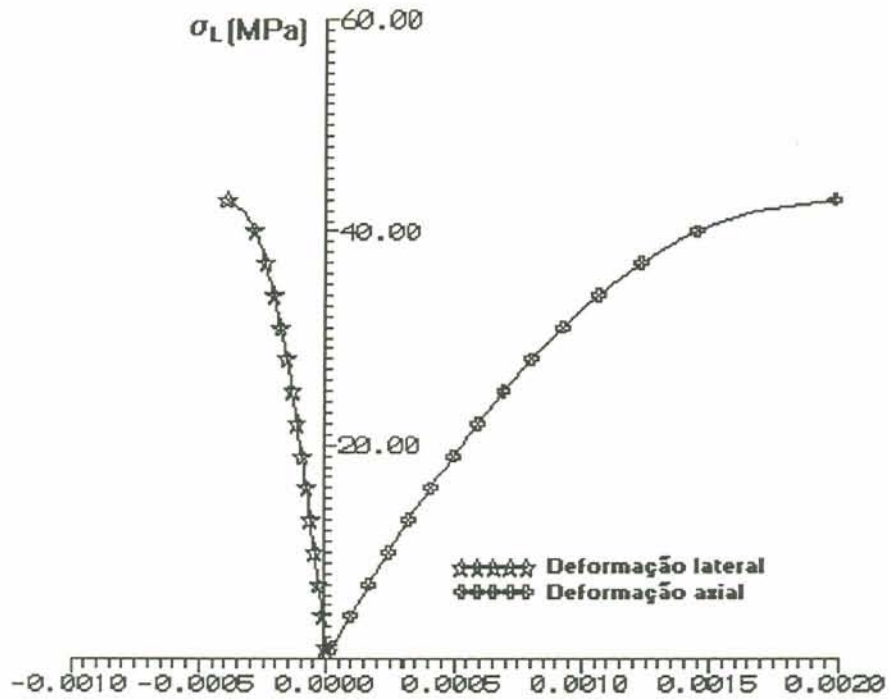


Figura 4.6 - Curva tensão/deformação para compressão uniaxial.

No exemplo da figura 4.7 analisou-se o cubo submetido a uma tensão de tração axial, tendo deformações axiais e laterais livres. Os valores nodais da tensão axial normal à face foram incrementados de  $0.215 \frac{N}{mm^2}$ , até atingir a ruptura.

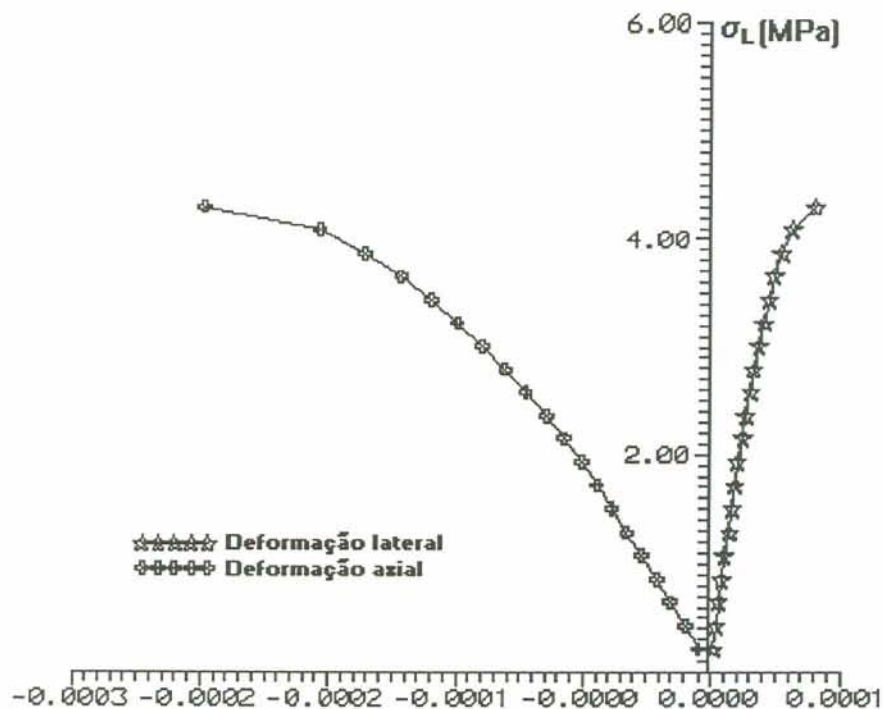


Figura 4.7.- Curva tensão/deformação para tração uniaxial.

Com relação a figura 4.6 e figura 4.7, os limites de linearidade aproximaram-se daqueles verificados em ensaios experimentais (figura 1.1 e figura 1.2). No caso de compressão uniaxial obteve-se  $\sigma_{max} = f_c$  e  $\varepsilon_{max} = \frac{1}{2\beta}$  e no caso de tração uniaxial  $\sigma_{max} = \frac{1}{10} f_c$ , como esperava-se.

Nos exemplos de figura 4.8 e figura 4.9 considerou-se um cilindro de dimensões 150 x 400 mm (diâmetro e altura, respectivamente), discretizado por quatro elementos de iguais dimensões (figura 4.2). Os exemplos foram rodados como Sólidos Axissimétricos.

Nos exemplos da figura 4.8 e figura 4.9 o cilindro foi submetido a um carregamento multiaxial, tendo deformações axiais e laterais livres. Os valores nodais da tensão axial normal à face foram incrementados de  $1 \frac{N}{mm^2}$ , até atingir a ruptura.

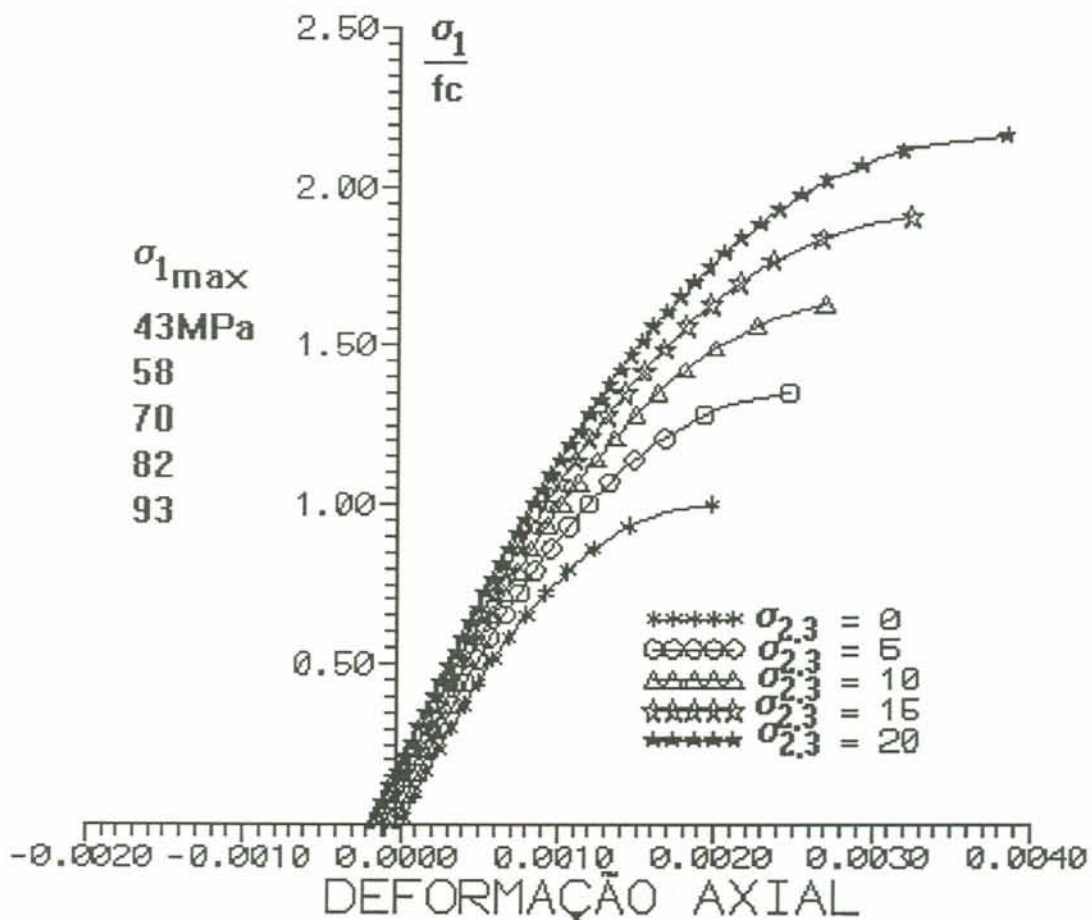


Figura 4.8 - Curva tensão/deformação axial para compressão multiaxial.

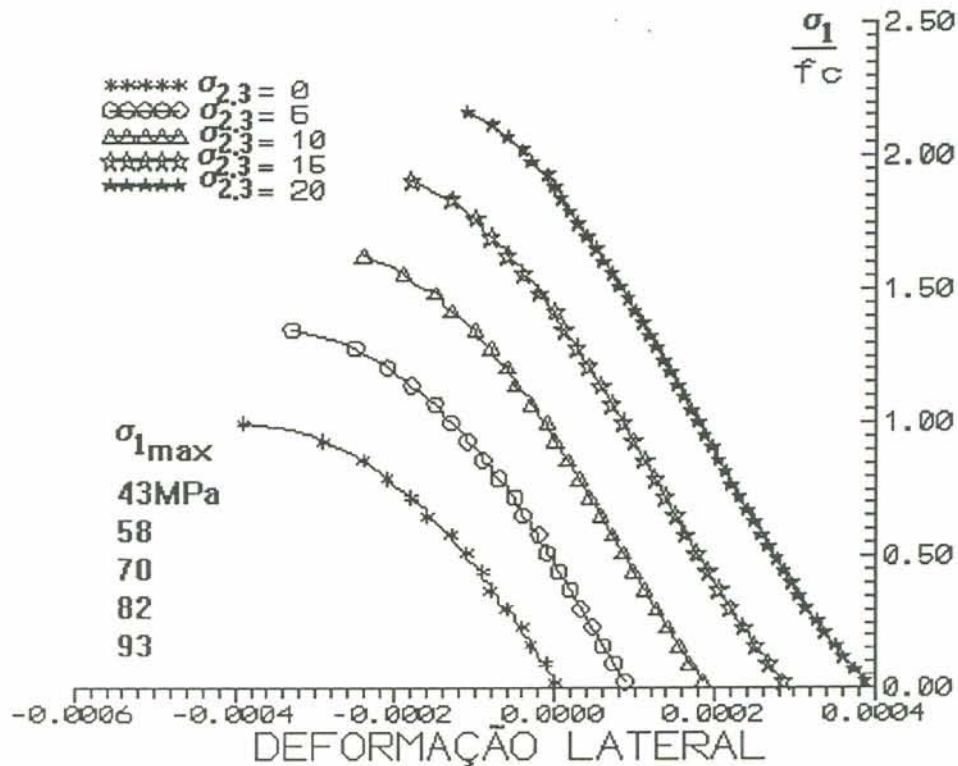


Figura 4.9- Curva tensão/deformação lateral para compressão multiaxial.

Nos exemplos da figura 4.8 e figura 4.9, as deformações iniciais foram menores que zero, no caso da deformação axial, e maiores que zero, no caso da deformação lateral, devido ao fato do valor do somatório dos primeiros incrementos de carga axial ser bastante inferior ao valor da pressão lateral atuante (pressão lateral constante). A medida que a carga axial é incrementada, este comportamento vai desaparecendo.

Os resultados apresentados na figura 4.10 foram obtidos da seguinte forma:

Temos conforme (2.1)

$$\sigma = E\varepsilon(1 - \beta\varepsilon) \quad (4.1)$$

Generalizando ao caso tridimensional, obtemos

$$\sigma_o = 3K\varepsilon_o(1 - \beta\varepsilon_o) \quad (4.2)$$

$$\underline{S} = 2G\underline{e}(1 - \beta\underline{e}) \quad (4.3)$$

De (4.2) e (4.3), obtemos

$$\varepsilon_o = \frac{1}{2\beta} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4\beta\sigma_o}{3K}} \right] \quad (4.4)$$

$$\tilde{e} = \frac{1}{2\beta} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2\beta S}{G}} \right] \quad (4.5)$$

As deformação específica é dada como

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{I} \varepsilon_o + \tilde{e} \quad (4.6)$$

onde  $\tilde{I}$  é a matriz identidade.

A deformação volumétrica é dada por

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (4.7)$$

O cubo foi submetido ao estado de tensões incrementais normais à face especificado na figura 4.10, tendo deformações axiais e laterais livres. O material foi modelado, para as deformações instantâneas, com as constantes  $K_o = 1111 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 8333 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$ .

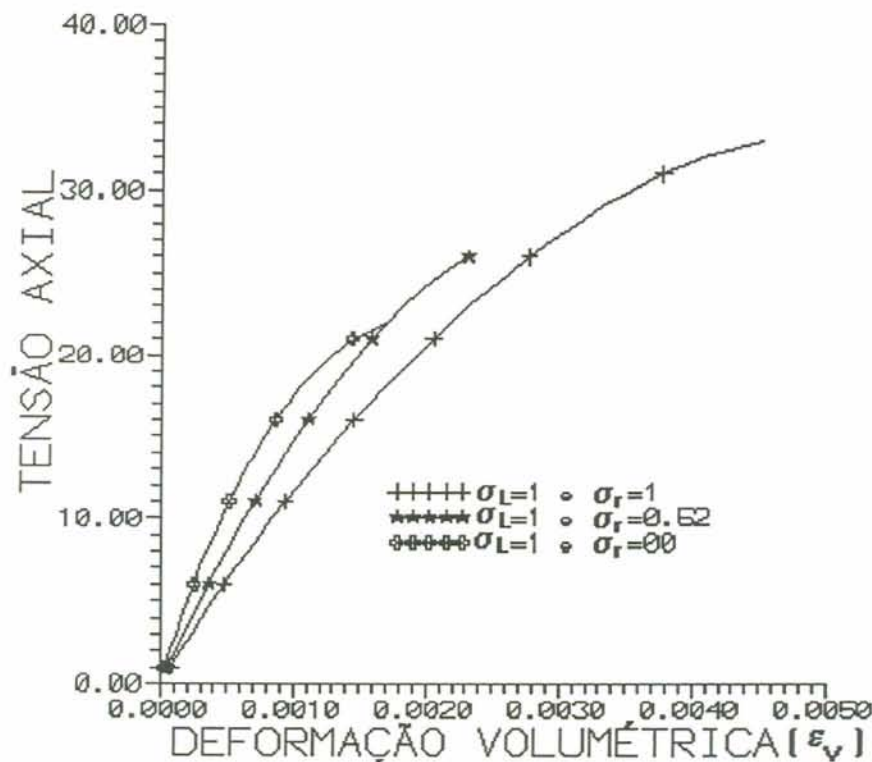


Figura 4.10 - Curva tensão/deformação volumétrica sob compressão biaxial.

O objetivo dos exemplos da figura 4.11 e figura 4.13 foi testar o comportamento instantâneo de um sólido sujeito a diferentes pressões laterais (constantes), especificadas nas figuras. Os sólidos foram submetidos a uma tensão incremental de compressão axial, tendo deformações axiais e laterais livres. O material foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 25000 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 18750 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 45 \frac{N}{mm^2}$ .

Para o exemplo da figura 4.11 foi empregado um cilindro de dimensões 150 x 400mm (diâmetro e altura, respectivamente) e discretizado com quatro elementos de iguais dimensões (figura 4.2). Este exemplo foi rodado como sólido axissimétrico

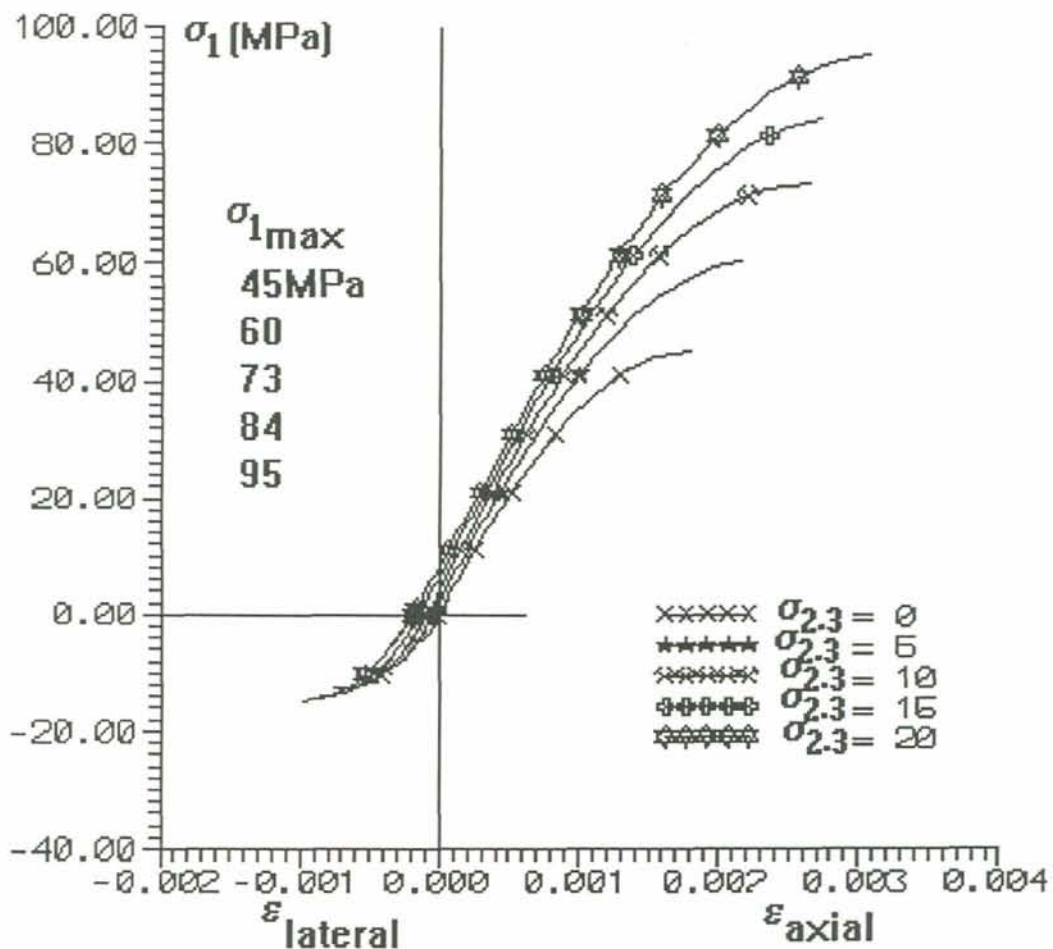


Figura 4.11. Relação tensão/deformação instantânea para sólido axissimétrico sujeito a pressão lateral

Para o exemplo da figura 4.13 o corpo de dimensões 150 x 400mm (largura e altura, respectivamente) foi discretizado com quatro elementos iguais (figura 4.12). Este exemplo foi rodado como Estado Plano de Tensões.

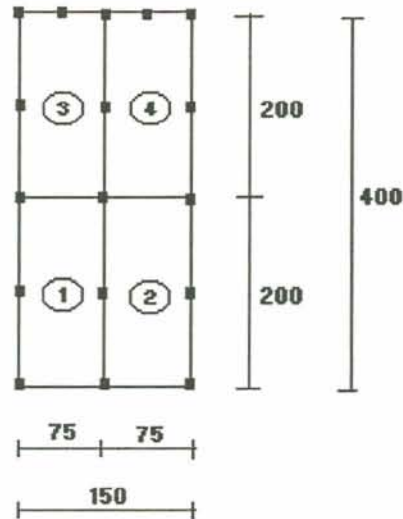


Figura 4.12 - Malha utilizada para o exemplo rodado como Estado Plano de Tensões ( dimensões em mm ).

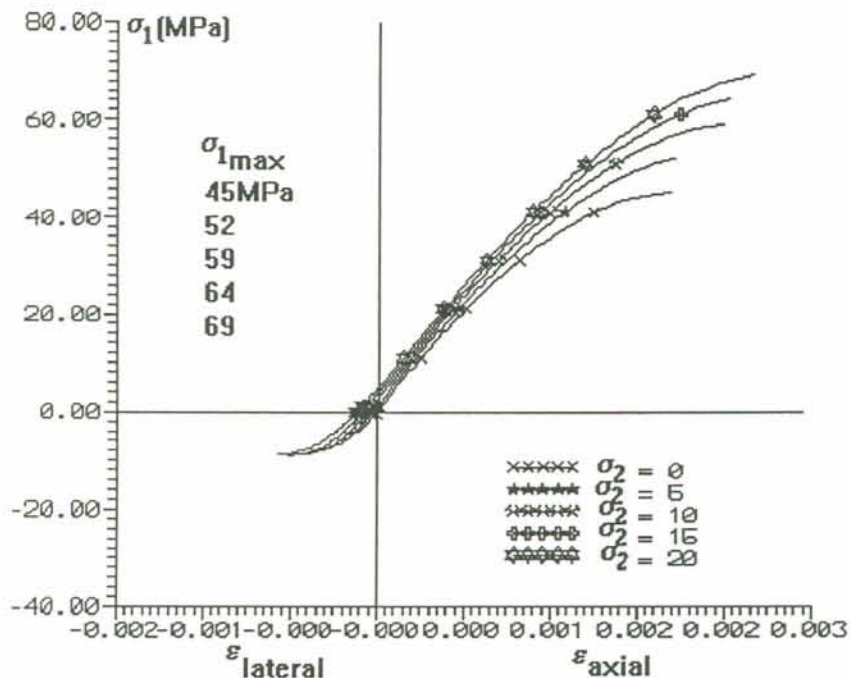


Figura 4.13 - -Relação tensão/deformação instantânea para estado plano de tensões sujeito a pressão lateral

Percebe-se que ( figura 4.8, figura 4.11 e figura 4.13) à medida que a pressão lateral, mantida constante enquanto incrementa-se a tensão axial, é aumentada, a tendência da  $\sigma_{max}$  e  $\epsilon_{max}$  é aumentarem seus valores. Para uma

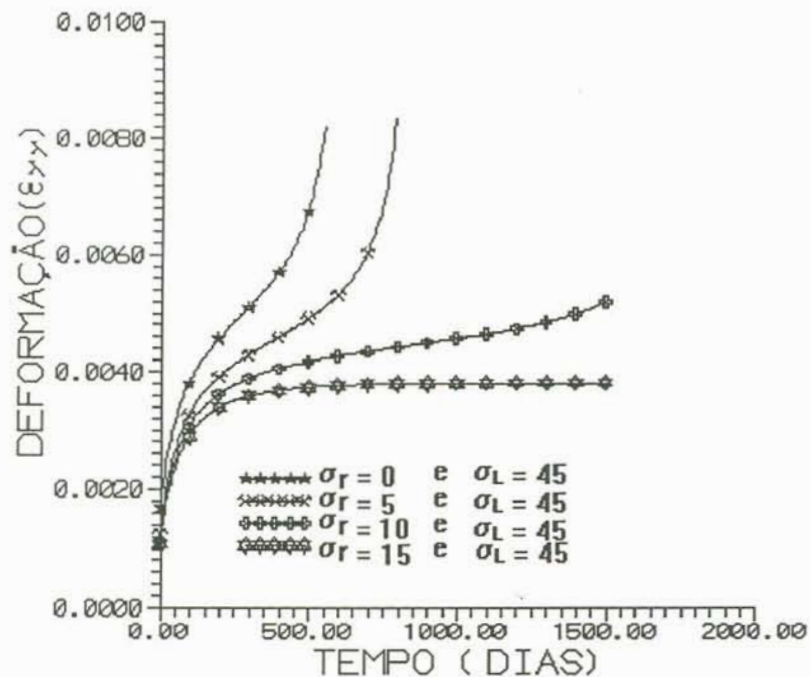


pressão lateral nula, obteve-se  $\sigma_{max} = f_c$  e  $\varepsilon_{max} = \frac{1}{2\beta}$ , resultados estes que confirmam o esperado.

O objetivo dos exemplos da figura 4.14 e figura 4.15 foi testar o comportamento viscoelástico de um sólido sujeito a diferentes pressões laterais (constantes), especificadas nas figuras.

Analisou-se o sólido submetido a uma tensão de compressão axial (constante), tendo deformações axiais e laterais livres. O material foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 25000 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 18750 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 45 \frac{N}{mm^2}$  e por um elemento Kelvin não-linear, para as deformações viscoelásticas, com constantes  $K_1 = 23000 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 8625 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 165$  e  $\beta_{1s} = 165$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 43.4783$  dias e  $\theta_{1s} = 43.4783$  dias. O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 5$ .

Para o exemplo da figura 4.14, o sólido de dimensões 150 x 400mm (largura e altura, respectivamente) e foi discretizado com quatro elementos iguais (figura 4.12). Este exemplo foi rodado como Estado Plano de Tensões.



**Figura 4.14 - Curvas de fluência para estado plano de tensões sujeitas a pressão lateral.**

Para o exemplo da figura 4.15 o cilindro tinha dimensões 150 x 400mm (diâmetro e altura, respectivamente); foi discretizado com quatro elementos de iguais dimensões (figura 4.2). Este exemplo foi rodado como Sólido Axissimétrico.

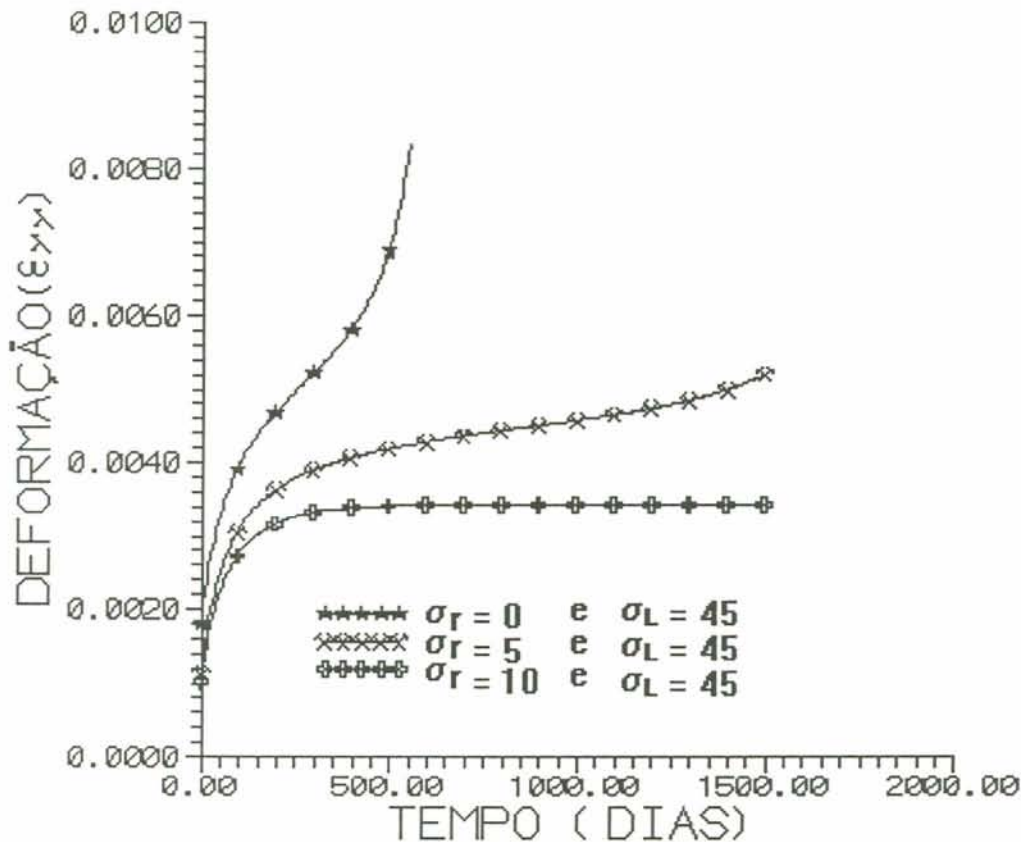


Figura 4.15 - Curvas de fluência para sólido axissimétrico sujeito a pressão lateral

Com relação a figura 4.14 e figura 4.15, percebe-se que à medida que a pressão lateral é aumentada, a tendência das deformações, que inicialmente tendiam ao infinito para um tempo finito é de tenderem assintoticamente a um valor limite para um tempo infinito, conforme esperava-se.

#### 4.2.1.- Ensaio Brasileiro à Tração

Nos exemplos das figuras 4.17, figura 4.18 e figura 4.19 considerou-se um cilindro de 150mm de diâmetro, discretizado por cento quarenta quatro elementos, conforme malha da figura 4.16. Os exemplos foram rodados como Estado Plano de Tensões. O cilindro foi submetido a um carregamento auto-equilibrado, distribuído em duas arestas diametralmente opostas, simulando o Ensaio Brasileiro de Tração.

Para os exemplos das figuras 4.17 e figura 4.18 o material foi modelado com constantes  $K_o = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$ . O carregamento foi incrementado até atingir a ruptura.

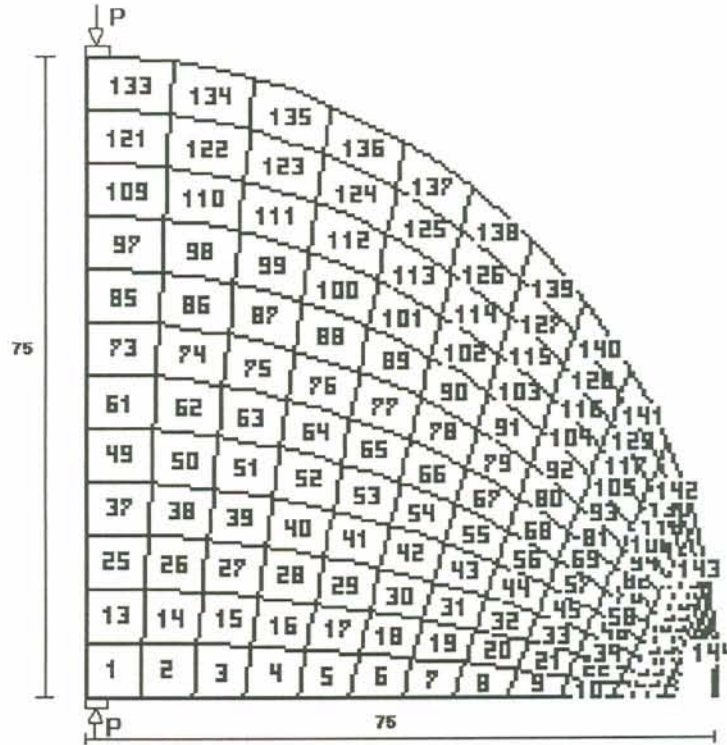


Figura 4.16 - Malha utilizada para o Ensaio Brasileiro (dimensões em mm).

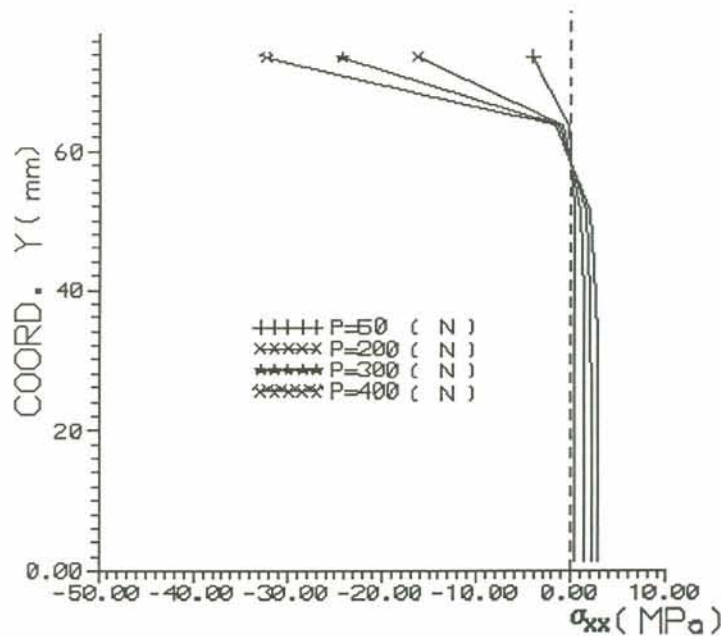


Figura 4.17 - Estado de tensões  $\sigma_{xx}$  sob carregamento diâmetral

Conforme indicado na figura 4.16 fazendo-se atuar um carregamento auto-equilibrado, distribuído em duas arestas diametralmente opostas de um cilindro, surgem tensões de tração praticamente constantes na direção perpendicular àquela da aplicação do carregamento, rompendo-se o corpo de prova por fendilhamento, quando for atingida sua resistência à tração  $f_t$ . Caso as tensões de tração ( $\sigma_{xx}$ ) fossem constantes em toda seção transversal do cilindro, teríamos como condição de ruptura a relação  $f_t = \frac{2P}{\pi dh}$  [37] onde,  $P$  é a força;  $d$  é o diâmetro;  $\pi$  é uma constante conhecida e  $h$  é a espessura. No entanto, um coeficiente corretivo tem que ser aplicado a esta expressão para compensar o fato da existência de compressão, próximo aos bordos carregados, na direção normal à do carregamento, ficando-se então com  $f_t = \frac{0.55P}{dh}$  [37].

Na tabela 4.1 mostra-se os resultados numéricos e teórico ( $f_t$ ) para diversos valores da carga ( $P$ ).

COORD.Y(mm)	$\sigma_{xx}$ (MPa) P = 100N $f_t = 0.3666MPa$	$\sigma_{xx}$ (MPa) P = 400N $f_t = 1.4666MPa$	$\sigma_{xx}$ (MPa) P = 600N $f_t = 2.2000MPa$	$\sigma_{xx}$ (MPa) P = 800N $f_t = 2.9333MPa$
73.648	-4.046	-16.185	-24.278	-32.371
63.794	-0.213	-0.854	-1.281	-1.708
512.99	0.258	1.033	1.550	2.066
38.804	0.329	1.319	1.979	2.638
32.557	0.341	1.365	2.048	2.730
26.310	0.347	1.390	2.085	2.781
20.062	0.351	1.405	2.107	2.810
13.815	0.353	1.413	2.120	2.827
7.568	0.354	1.418	2.127	2.836
1.320	0.354	1.419	2.129	2.839

Tabela 4.1 - Resultados numéricos de  $\sigma_{xx}$  para diversos valores de "P".

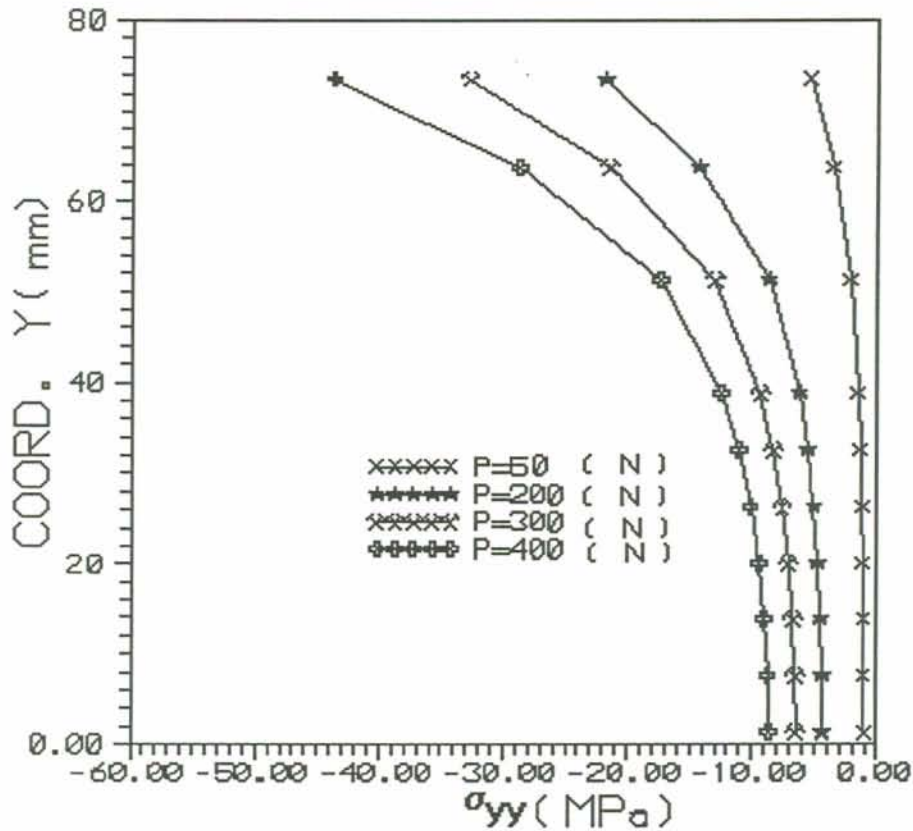


Figura 4.18 - Estado de tensões  $\sigma_{YY}$  sob carregamento diâmetroal

O comportamento da tensão  $\sigma_{YY}$  pode ser comparado ao gráfico apresentado, para a mesma, em [37].

Este exemplo foi interessante pois mostrou a necessidade de alterar a função de ruptura (2.28) nas zonas tração-compressão, como se indica na figura 2.10.

Para o exemplo da figura 4.19 o material foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$  e por dois elementos Kelvin, para as deformações viscoelásticas, com constantes  $K_1 = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 155$  e  $\beta_{1s} = 155$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 13$  dias e  $\theta_{1s} = 13$  dias, para o primeiro elemento Kelvin, e constantes  $K_2 = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_2 = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_2 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{2o} = 155$  e  $\beta_{2s} = 155$ , tempo de retardação  $\theta_{2o} = 120$  dias e  $\theta_{2s} = 120$

dias, para o segundo elemento Kelvin. O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 10$ .

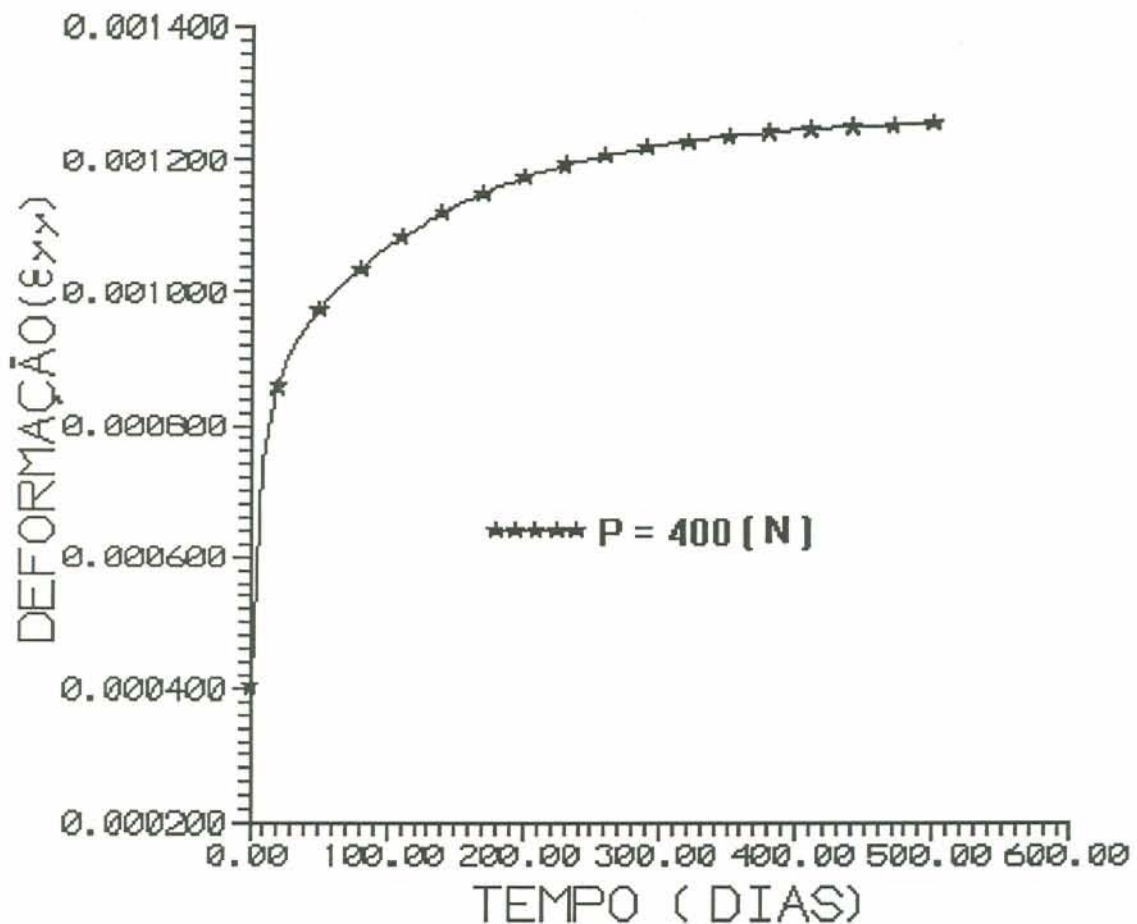


Figura 4.19 - Deformação versus tempo para o Ensaio Brasileiro de tração.

#### 4.3.-Comparação entre resultados experimentais e resultados numéricos

No exemplo da figura 4.20, figura 4.21, figura 4.22 e figura 4.23 considerou-se um cilindro de dimensões 150 x 400mm (diâmetro e altura, respectivamente), discretizado por quatro elementos de iguais dimensões (figura 4.2). Os exemplos foram rodados como Sólidos Axissimétricos. Os resultados numéricos obtidos foram comparados aos resultados experimentais encontrados em [32]. Analisou-se o cilindro submetido a um carregamento axissimétrico, tendo deformações axiais e laterais livres.

Para os exemplos da figura 4.20, figura 4.21 e figura 4.22 o material foi modelado, para deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 2180 \frac{N}{mm^2}$ ,

$G_o = 16354 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 228$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$ . Os valores nodais da tensão axial normal à face foram incrementados de  $1 \frac{N}{mm^2}$ , até atingir a ruptura.

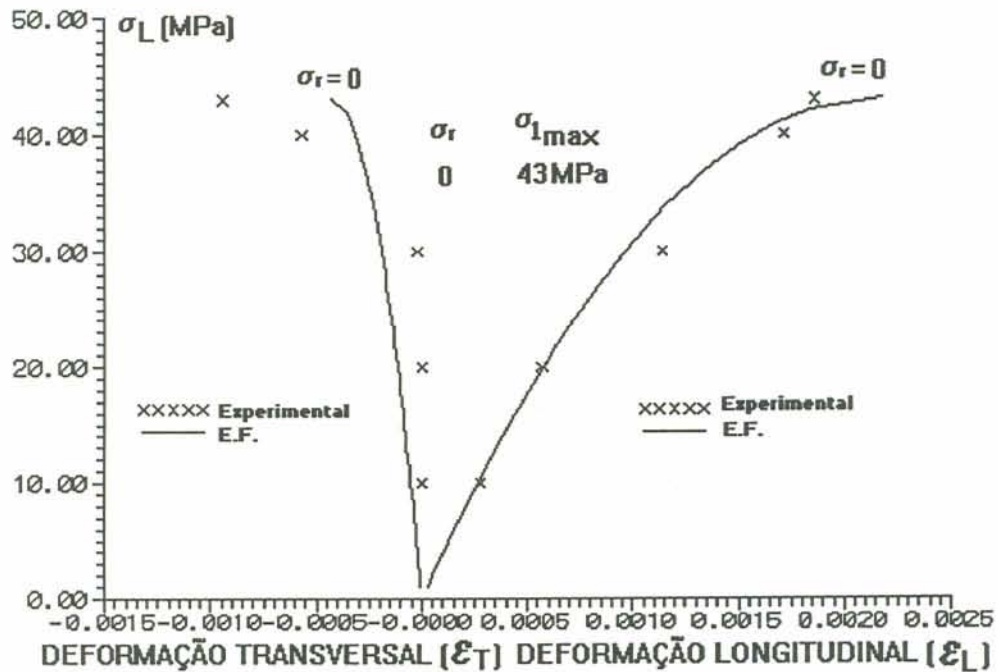


Figura 4.20 - Curvas tensão/deformação dependentes da pressão lateral.

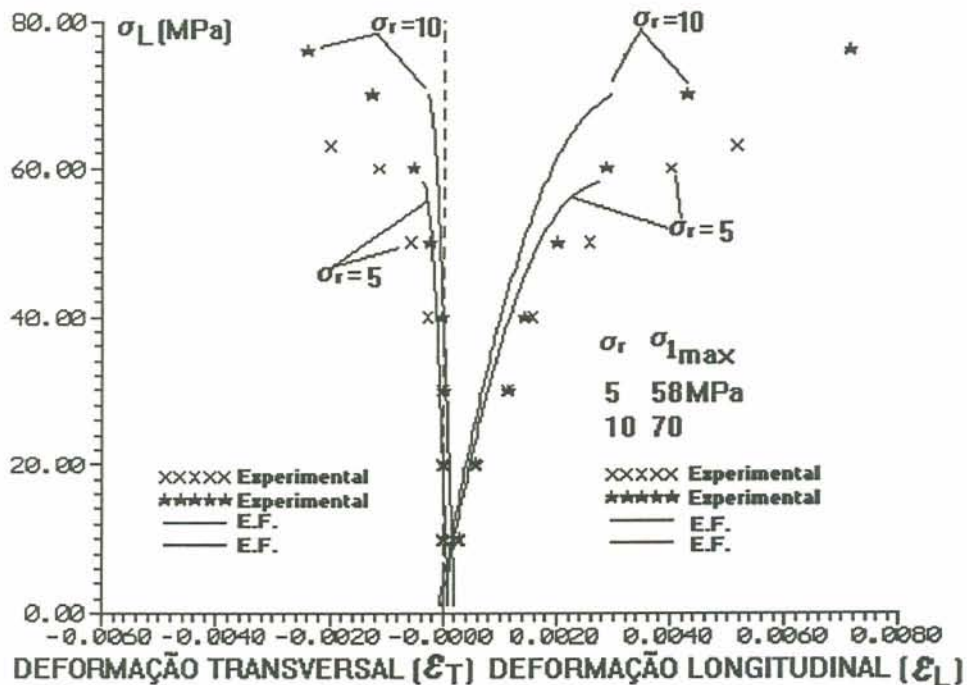


Figura 4.21 - Curvas tensão/deformação dependentes da pressão lateral

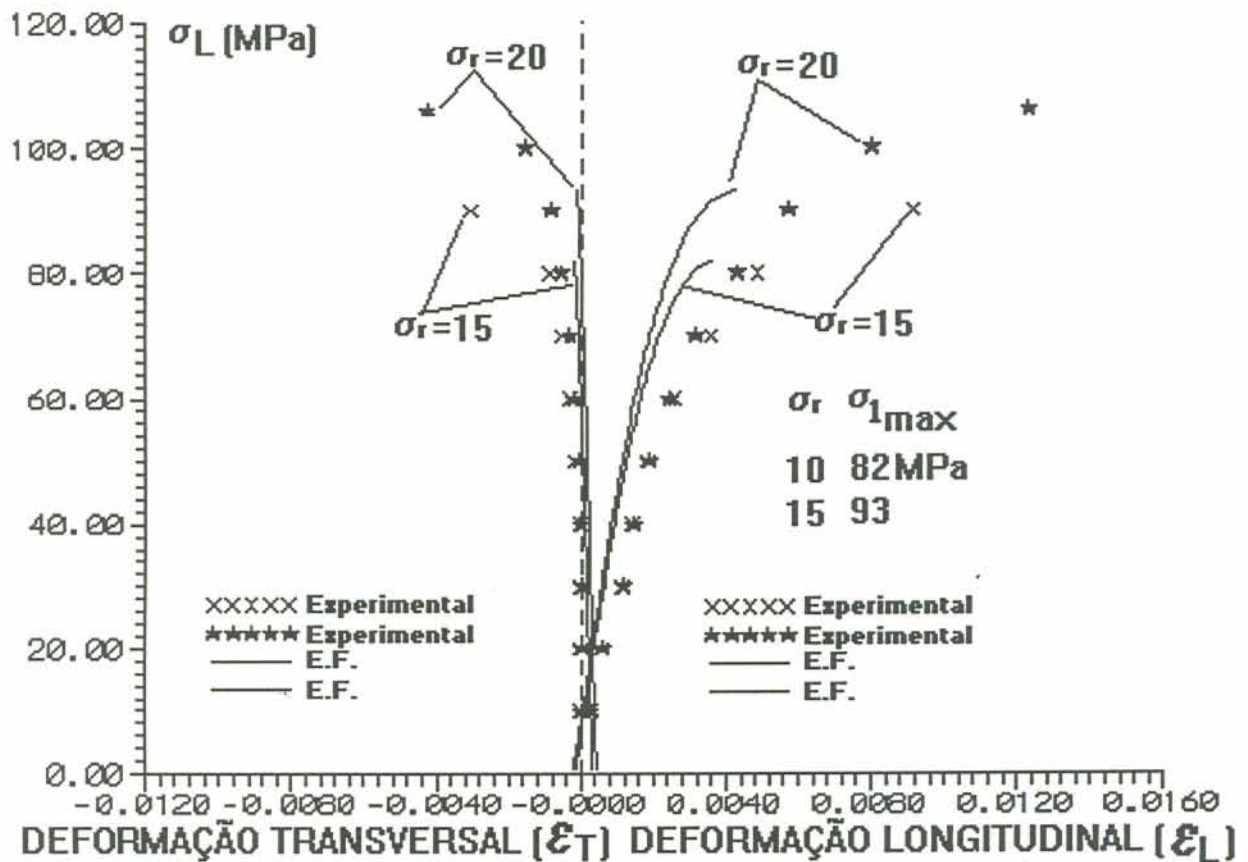


Figura 4.22-- Curvas tensão/deformação dependentes da pressão lateral.

Para o exemplo da figura 4.23 o material foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 2180 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 16354 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 228$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$  e por dois elementos Kelvin, para as deformações viscoelásticas, com constantes  $K_1 = 21805 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 16354 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 170$  e  $\beta_{1s} = 170$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 358$  dias e  $\theta_{1s} = 0.75$  dias, para o primeiro elemento Kelvin, e constantes  $K_2 = 2180 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_2 = 16354 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_2 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{2o} = 170$  e  $\beta_{2s} = 170$ , tempo de retardação  $\theta_{2o} = 348$  dias e  $\theta_{2s} = 0.75$  dias, para o segundo elemento Kelvin. O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 0.5$ .



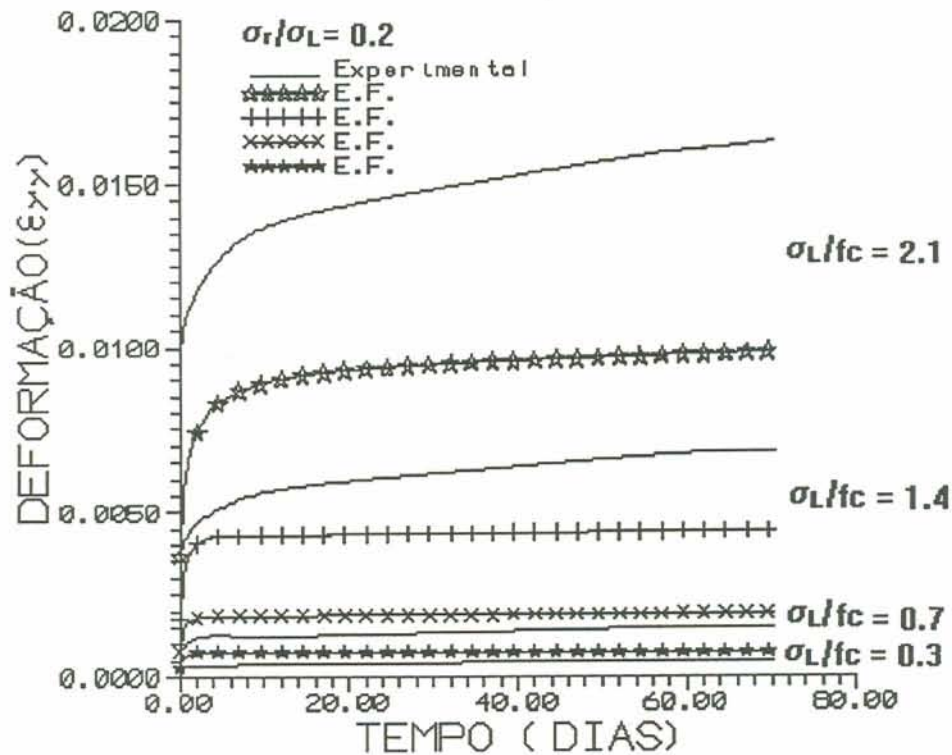


Figura 4.23 - Deformação versus tempo para diversos sistemas de carregamento.

No exemplo da figura 4.25 considerou-se o cilindro de dimensões 102 x 203mm (diâmetro e altura, respectivamente) discretizado com quatro elementos de iguais dimensões (figura 4.24). Este exemplo foi rodado como sólido axissimétrico. O cilindro foi submetido a uma tensão de compressão axial, tendo deformações axiais e laterais livres.

O material foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 21486 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 16114 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 154$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 62.78 \frac{N}{mm^2}$  e por dois elementos Kelvin, para as deformações viscoelásticas, com constantes  $K_1 = 21486 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 16114 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 155$  e  $\beta_{1s} = 155$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 13$  dias e  $\theta_{1s} = 13$  dias, para o primeiro elemento Kelvin, e constantes  $K_2 = 21486 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_2 = 16114 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_2 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{2o} = 155$  e  $\beta_{2s} = 155$ , tempo de retardação  $\theta_{2o} = 120$  dias e  $\theta_{2s} = 120$  dias, para o segundo elemento Kelvin. O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 10$ .

Os resultados experimentais para este problema são encontrados em [36].

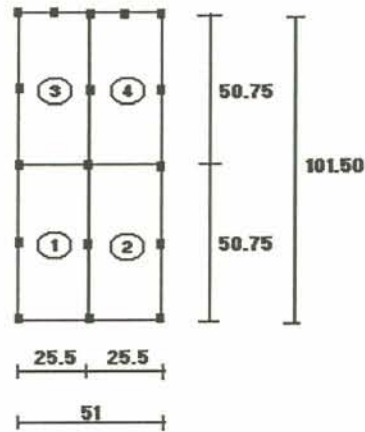


Figura 4.24 - Malha utilizada para sólido Axissimétrico (dimensões em mm).

A figura 4.25 mostra o resultados numéricos (linhas cheias) frente aos resultados experimentais (símbolos).

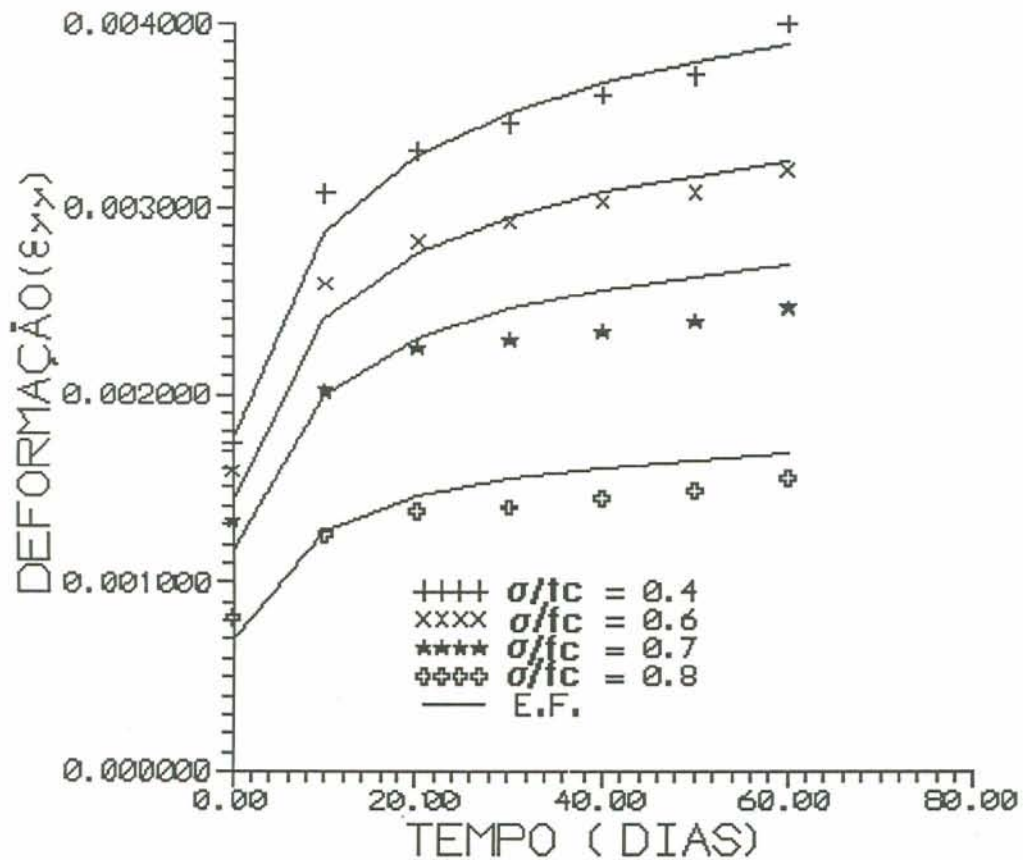


Figura 4.25 - Deformação versus tempo sob carregamento uniaxial de compressão.

Observe-se que em alguns casos foi possível encontrar valores para os parâmetros que aproximam os resultados experimentais. Em outros casos, particularmente na figura 4.23, os resultados numéricos e experimentais são bastantes diferentes.

#### **4.4- Comparação de resultados de Flambagem de Pilares**

##### **4.4.1 - Análise de pilares de concreto e concreto armado**

O objetivo dos exemplos a seguir foi verificar o comportamento do modelo quando aplicado a pilares sujeitos a compressão excêntrica. Permitiu-se, para alguns exemplos, que o concreto atingisse tensões de tração superiores a  $0.1f_c$  ( $0.1f_c$  representa a tensão de ruptura para o concreto tracionado), razão das grandes deformações ou deslocamentos verificados, para possibilitar uma melhor visualização da não-linearidade física e geométrica. No caso de concreto armado, quando as tensões no aço atingem os valores das tensões de escoamento ( $\sigma_s$ ), estas são mantidas constantes, simulando uma relação elasto-plástica perfeita para o mesmo. Os exemplos foram rodados como Estado Plano de Tensões.

##### **4.4.1 1.- Análise de pilares de concreto simples**

Utilizou-se para a solução numérica dos exemplos da figura 4.27, figura 4.28 e figura 4.29, uma malha de quatro elementos de iguais dimensões (figura 4.26).

O material dos exemplos da figura 4.27 e figura 4.28 foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$ .

O exemplo da figura 4.27 mostra a relação carga/deslocamento "x" do nó 10 (figura 4.26); o incremento de carga permaneceu constante e igual a 100 Newtons durante toda a análise.

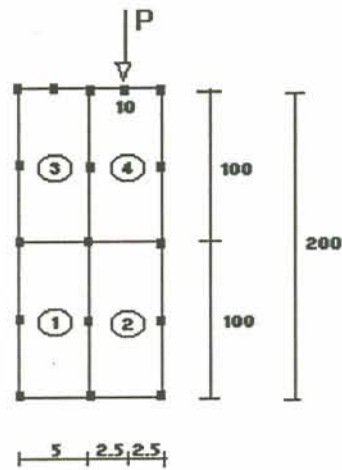


Figura 4.26 - Malha utilizada para pilar de concreto simples sujeito à compressão excêntrica (dimensões em mm).

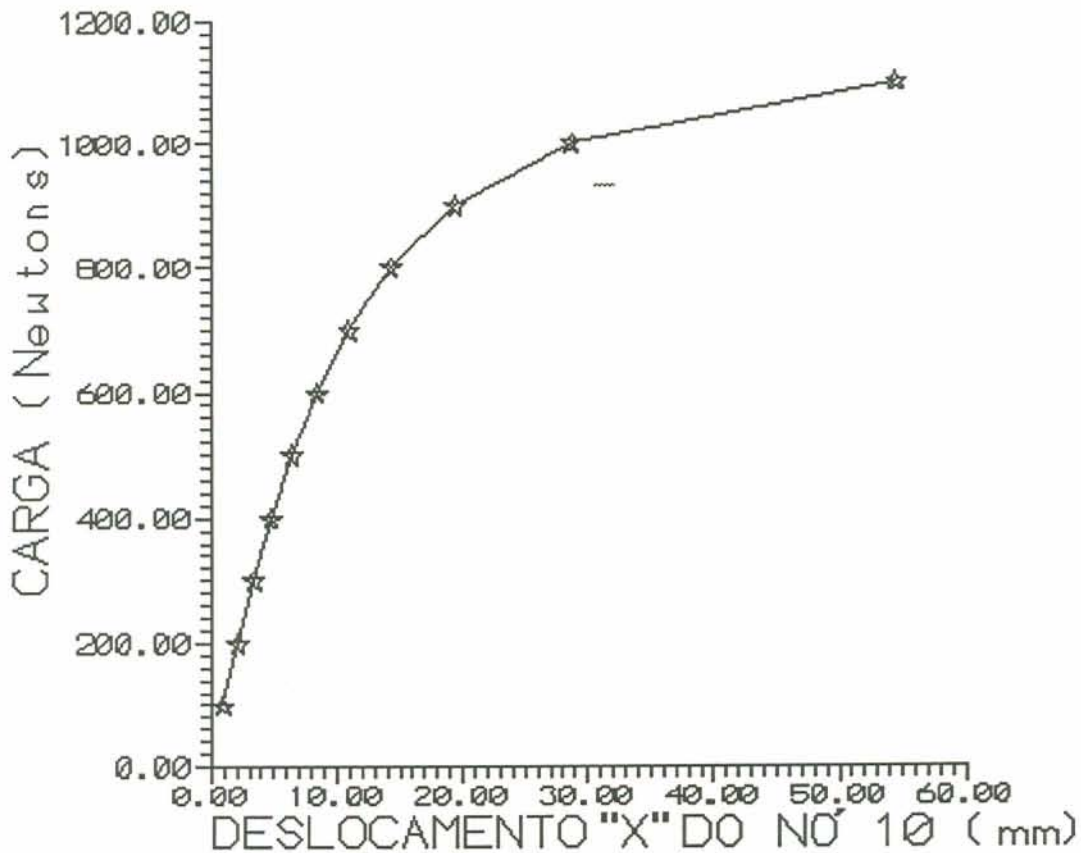
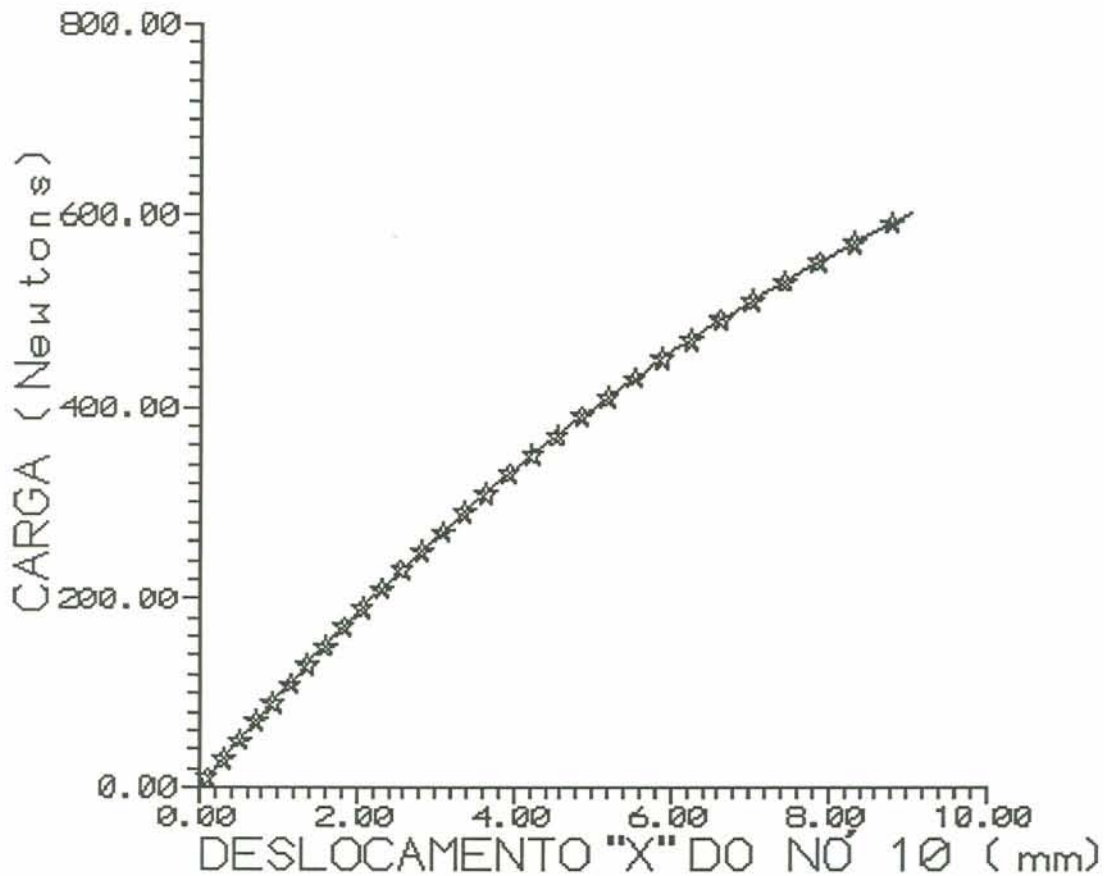


Figura 4.27 - Relação carga/deslocamento de um pilar de concreto simples sujeito à compressão excêntrica. Não se limitou em  $0.1 f_c$  as tensões de tração no concreto.

O exemplo da figura 4.28 mostra a relação carga/deslocamento "x" do nó 10 ( figura 4.26 ) para tensões de tração no concreto limitadas a  $0.1 f_c$ . O incremento de carga permaneceu constante e igual a 10 Newtons durante toda a análise.



**Figura 4.28 - Relação carga/deslocamento de um pilar de concreto simples sujeito à compressão excêntrica. Tensões de tração no concreto limitadas a  $0.1 f_c$ .**

Para a solução numérica do exemplo da figura 4.29 o material foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$ , e por dois elementos Kelvin, para as deformações viscoelásticas, com constantes  $K_1 = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 155$  e  $\beta_{1s} = 155$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 13$  dias e  $\theta_{1s} = 13$  dias, para o primeiro elemento Kelvin, e constantes  $K_2 = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_2 = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_2 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{2o} = 155$  e  $\beta_{2s} = 155$ , tempo de retardação  $\theta_{2o} = 120$  dias e  $\theta_{2s} = 120$  dias, para o segundo elemento Kelvin. O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 5$ .

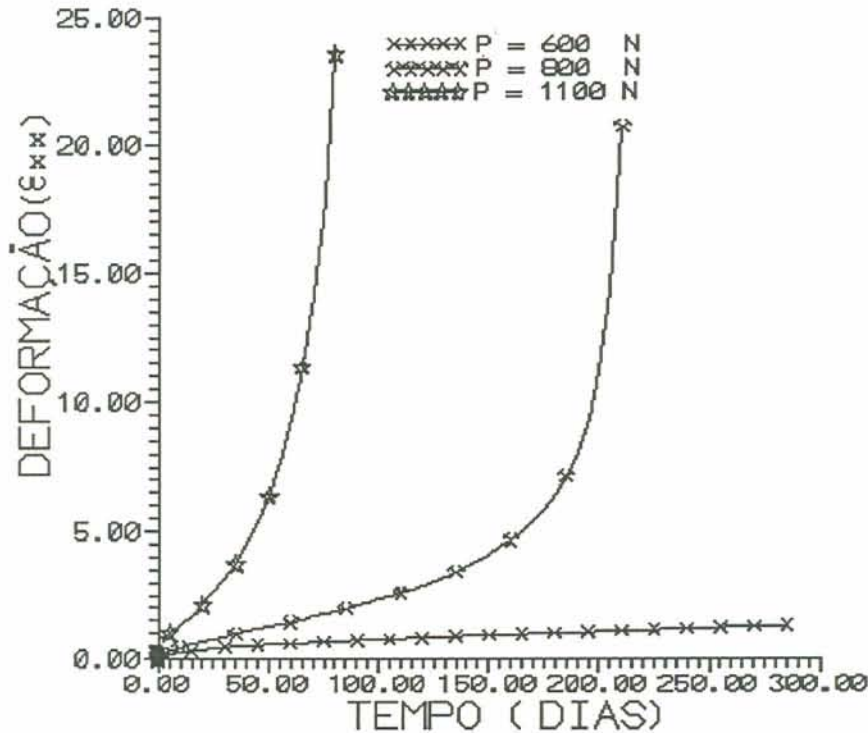


Figura 4.29 - Deformações versus tempo para um pilar de concreto simples sujeito à compressão excêntrica

#### 4.4.1 2.- Análise de pilares de concreto armado

Utilizou-se para os elementos representativos do aço, no exemplo a seguir, as constantes  $a=0$  e  $k=1/3$ , reduzindo o critério de ruptura (2.28) para a forma  $\hat{I}_s = K$  ( critério de Von Mises [6] ).

Utilizou-se para solução numérica dos exemplos da figura 4.31 e figura 4.32 uma malha de dez elementos de iguais dimensões, para modelar o concreto, e dez elementos de iguais dimensões para modelar o aço (figura 4.30).

Para o exemplo da figura 4.31 o concreto foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$ . O aço foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 116666 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 87500 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 13$  e tensão de escoamento  $\sigma_e = 400 \frac{N}{mm^2}$ .

A figura 4.31 mostra a relação carga/deslocamento "x" do nó 76 ( figura 4.30), de um pilar de concreto armado sujeito à compressão excêntrica, sendo que, o incremento de carga permaneceu constante e igual a 1000 Newtons durante toda a análise.

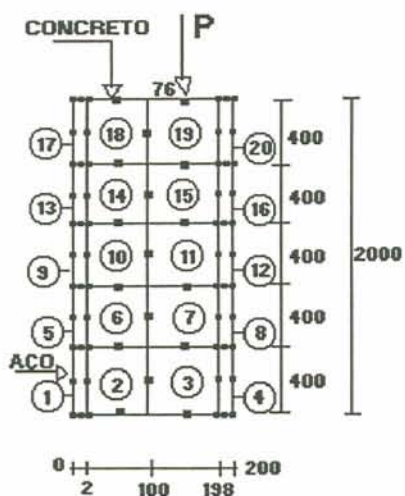


Figura 4.30 - Malha utilizada para pilar de concreto armado sujeito à compressão excêntrica (dimensões em mm).

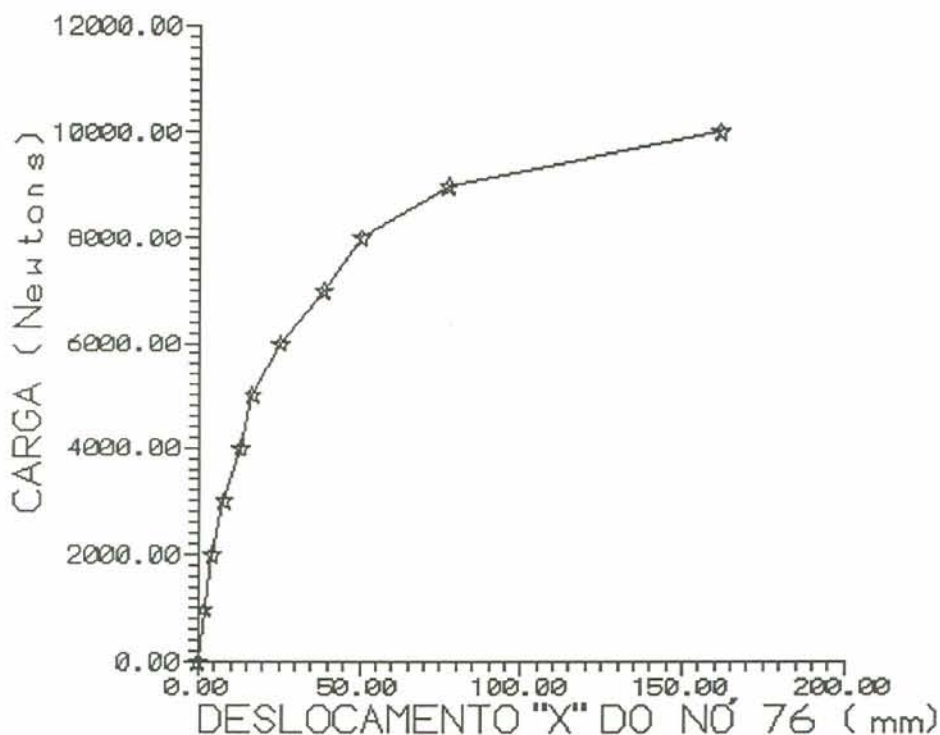


Figura 4.31 - Relação carga/deslocamento de um pilar de concreto armado sujeito à compressão excêntrica.

Para o exemplo da figura 4.32 o concreto foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 250$  e resistência do concreto à compressão  $f_c = 43 \frac{N}{mm^2}$  e o aço foi modelado, para as deformações instantâneas, com constantes  $K_o = 116666 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_o = 87500 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_o = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_o = 13$  e tensão de escoamento  $\sigma_e = 400 \frac{N}{mm^2}$ . A parte viscoelástica do concreto (aço não apresenta deformações viscoelásticas), foi modelada por dois elementos Kelvin, com constantes  $K_1 = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_1 = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_1 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{1o} = 155$  e  $\beta_{1s} = 155$ , tempo de retardação  $\theta_{1o} = 13$  dias e  $\theta_{1s} = 13$  dias, para o primeiro elemento Kelvin, e constantes  $K_2 = 23888 \frac{N}{mm^2}$ ,  $G_2 = 17916 \frac{N}{mm^2}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_2 = 0.2$ , fator de não-linearidade  $\beta_{2o} = 155$  e  $\beta_{2s} = 155$ , tempo de retardação  $\theta_{2o} = 120$  dias e  $\theta_{2s} = 120$  dias, para o segundo elemento Kelvin. O intervalo de tempo utilizado para integração foi  $\Delta t = 5$ .

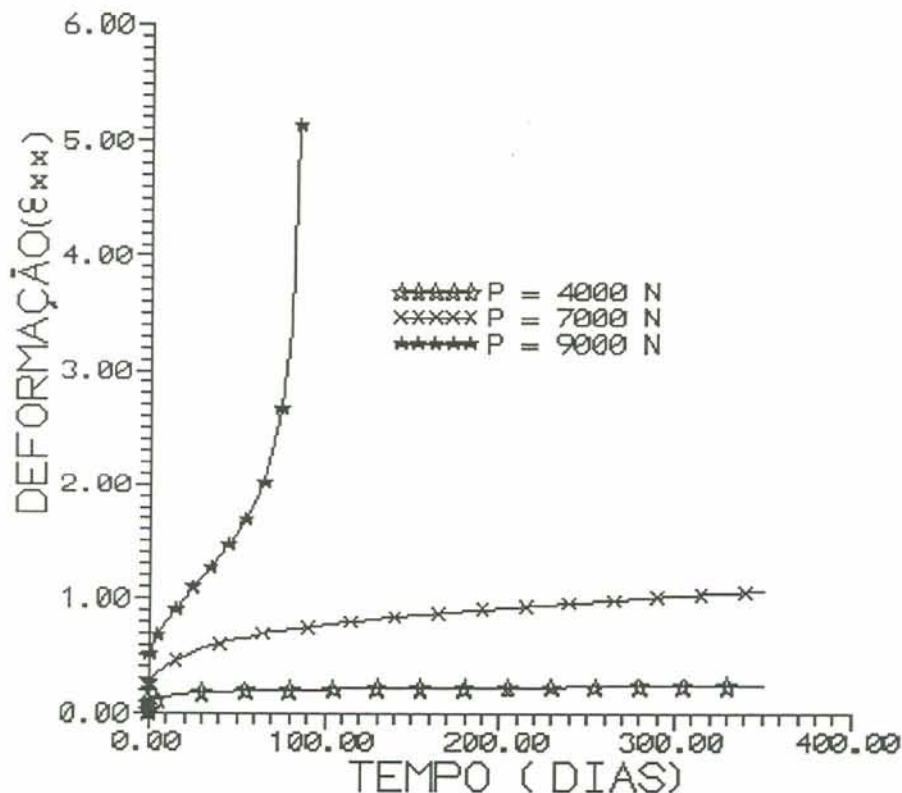


Figura 4.32 - Deformações ao longo do tempo de um pilar de concreto armado sujeito à compressão excêntrica



## **5. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

### **5.1. Conclusões**

Ao longo do desenvolvimento do trabalho, visando a representação do comportamento não-linear do concreto mediante teoria do dano e sua aplicação em alguns problemas de interesse, foi possível obter as seguintes conclusões:

a) O elemento isoparamétrico de 8 nós apresenta um bom desempenho, permitindo a obtenção de valores com considerável precisão, mesmo com malhas grosseiras. Em alguns exemplos, como o exemplo da figura 3.11, a utilização de uma malha mais refinada, gerou resultados muito parecidos aos obtidos com a utilização de uma malha mais grosseira. O algoritmo de solução empregado (seção 2.1.2) destaca-se por sua satisfatória eficiência e facilidade de implementação.

b) A utilização do algoritmo de Variáveis de Estado para modelamento do comportamento viscoelástico não-linear mostrou-se muito vantajoso, quer por sua facilidade de implementação, por sua facilidade de modelamento de reologias diversas (para a parte volumétrica e de corte), quer por sua eficiência computacional. O método mostrou-se estável para intervalos de tempo relativamente grandes.

c) Os métodos para a seqüência iterativa, com base em incrementos de cargas, propostos para a solução numérica de problemas não-lineares, atenderam os objetivos. Com base no grau de não-linearidade do problema, o usuário pode optar por um dos métodos iterativos disponíveis (Método de Newton Raphson ou Método de Newton Raphson Modificado). A implementação da formulação para sólidos axissimétricos, permitiu ao programa uma maior versatilidade e facilidade de modelamento. Da mesma forma, a formulação para análise de não-linearidade geométrica, permitiu a abrangência de problemas para os quais são verificados grandes deslocamentos, ou seja, a geometria do elemento sofre modificações

consideráveis e deformações lineares de primeira ordem não podem mais serem usadas. Os resultados obtidos, também, foram satisfatórios.

d)O critério de ruptura proposto, embora caracterizado por ser um modelo de dois parâmetros, com seção transversal circular, atendeu as expectativas pois, as parábolas quadráticas que formam os meridianos e a dependência da pressão hidrostática, geram uma representação satisfatória da superfície de ruptura do concreto.

e)Outro detalhe importante é a possibilidade de modificar a equação da mola não-linear do elemento Kelvin (seção 2.1.3). Esta possibilidade de correção da curva viscoelástica pode se constituir num importante artifício para ajustar os resultados numéricos aos resultados experimentais.

## **5.2. Sugestões para trabalhos futuros**

Visando um aperfeiçoamento da análise numérica dentro das diretrizes seguidas por esta dissertação, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

a)Adaptação da formulação desenvolvida para diferentes elementos, acoplados a algoritmos de geração de malhas para geometrias quaisquer, possibilitaria um estudo numérico mais preciso.

b)Implementar, junto com Newton Raphson e Newton Raphson Modificado, o método de iteração baseado em Controle do Trabalho [44] que permitiria modelar o abrandamento ( "strain-softening" ) em processos de carga rápida.

c)Melhorar o modelo uniaxial na parte de tração, para adequá-lo ao comportamento indicado na figura 1.2.

d)Substituir o atual critério de ruptura de dois parâmetros, por outro mais refinado, que reproduza todas as características importantes da superfície de ruptura triaxial do concreto e proporcione uma estimativa mais realística da superfície de ruptura experimental do concreto.

e)Poderia-se, também, substituir a presente equação constitutiva viscoelástica não-linear por outra mais complexa, com termos de mais alta ordem, tentando com isso melhor descrever o comportamento viscoelástico não-linear do concreto.

f) Devido ao fato de tratar-se cada incremento de carga como um problema elástico-linear com matriz de rigidez tangencial avaliada no início de cada incremento [38,39], o método empregado para análise geométrica não-linear pode acumular erros. Recomenda-se, por este motivo, subdividir a carga em pequenos incrementos, ou então, estender o sistema incremental-iterativo para a parte geométrica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BATHE, K.J. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, N.J.; Prentice-Hall, (1982). 735p.
2. BAZANT, Z.P. **Theory of creep and shrinkage in concrete structures: a précis of recent developments**. In: NEMAT-NASSER, S. ed. *Mechanics Today*, New York, Pergamon Press, (1975).
3. BAZANT, Z.P. **Mathematical models for creep and shrinkage of concrete**. In: Z.P. BAZANT and WITTMANN, F.H., eds. Creep and shrinkage of concrete structures. New York, John Wiley (1982).
4. BAZANT, Z.P.; ASGHARI, A.A. **Constitutive law for nonlinear creep of concrete**, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 103, No. EM1, Feb., (1977), p. 113-124.
5. BAZANT, Z.P.; TSUBAKI, T. **Nonlinear creep buckling of reinforced concrete columns**. *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol. 106, (11), (1980), p. 2235-57.
6. CHEN, W.F., HAN, D.J. **Plasticity for structural engineers**. New York; Springer , (1988). 606p.
7. CREUS, G.J. **Viscoelasticity: basic theory and applications to concrete structures**. Berlin; Springer, (1986). 169p.
8. CREUS, G.J.; HELMAN, H. **A nonlinear rheological model describing time-dependent deformations and failure**. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 10(3/4), (1975), p. 167-172.
9. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Structural effects of time-dependent behaviour of concrete**. Paris, (1980), (Bulletin d'Information, 136)

- 10.COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Cracking and deformation**. Paris, (1982), (Bulletin d'Information, 143)
- 11.COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Structural effects of time-dependent behaviour of concrete**. (1984), (Bulletin d'Information, 142/142 bis). Saint Saphorin, Giorgi.
- 12.FLÜGGE, W. **Viscoelasticity**. Berlin, Springer, (1975).
- 13.HINTON, E., OWEN, D.R.J. **Finite element programming**. London; Academic Press, (1977). 305p.
- 14.HINTON, E., OWEN, D.R.J. **Finite elements in plasticity: Theory and practice**. Swansea, U.K.; Pineridge Press Limited, (1980). 594p.
- 15.IABSE, **Symposium: Design and safety of reinforced concrete compression members**. Introductory report and final report, International Association for Bridge and Structural Engineering. Quebec, (1974).
- 16.ILLSTON, J.M. **Creep of concrete**. In: POMEROY, C.D., ed. Creep of engineering materials. London, Mechanical Engineering Publications Limited, (1978).
- 17.KEMPNER, J. **Viscoelastic buckling**. In: FLÜGGE, W. ed. Handbook of engineering materials. New York, McGraw-Hill (1962).
- 18.MASUERO, J.R. **Análise de problemas de fratura em materiais viscoelásticos via elementos finitos**. Dissertação de mestrado apresentada no CPGEC da UFRGS Porto Alegre; (1992). 90p.
- 19.NEVILLE, A.M.; DILGER, W. **Creep of concrete: plain, reinforced and prestressed**. Amsterdam, North-Holland, (1970).
- 20.NEVILLE, A.M.; DILGER, W. **Creep of plain and structural concrete**. London, Longman, (1982).
- 21.ROCKEY, K.C.; EVANS, H.R.; GRIFFITHS, D.W.; NETHERCOT, D.A. **The finite element method: A basic introduction**. London, Crosby Lockwood Staples, (1975), p. 131-176.
- 22.RÜSH, H. **Researches toward a general flexural theory for structural concrete**. Journal of de American Concrete Institute, Vol.32,(1960), p. 1-28.
- 23.RÜSH, H. et alii **Creep and shrinkage**. New York, Springer,(1983).
- 24.ZIENKIEWICZ, O.C. **The finite element method**. 3.ed. London; McGraw-Hill, (1977). 787p.
- 25.COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **FIP Model Code for Concrete Structures**. Paris, (1978), (Bulletin d'Information, 125E).
- 26.COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Modelling of Structural Reinforced and Prestressed Concrete in Computer Programs**. Paris, (1990), (Bulletin d'Information, 194\*), ISBN 2-88394-001-0, 124p.

27. ARGYRIS, J. H. ; SCHARPF, D. W. **Methods of elasto-plastic analysis**. Stuttgart, ISD, ISSC Symp. on Finite Element Tech., (1969).
28. REINER, M. **Rheology; in Encyclopedia of Physics**. ( S. Flügge editor) . Springer-Verlag, vol. VI, (1958), p. 434-549.
29. FREUDENTHAL, A. M. ; ROLL, F. **Creep and creep recovery of concrete under high compressive stresses**. ACI Journal, Proceedings, vol. 54, (1958), p. 1111-1142.
30. CREUS, G. J. **Análisis no lineal de estructuras. Elementos básicos y aplicaciones**. Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, CE - 07, (Outubro 1985). 124p.
31. KRAJCINOVIC, D. ; LEMAITRE, J. **Continuum damage mechanics theory and applications**. International Centre for Mechanical Sciences. CISM Courses and Lectures N° 295. New York, Springer-Verlag, (1987), 294p.
32. LANIG, N. ; STÖCKL, S. ; KUPFER, H. **Tests on creep and influence of creep on strength of concrete under multiaxial stresses**. Versuche zum Kriechen und zur Restfestigkeit von Beton bei mehrachsiger Beanspruchung. München, (Dezember, 1988).
33. SHAH, S. P. ; CHANDRA, S. **Critical stress volume change and microcracking of concrete**. ACI Journal 65(9), (1968), p. 770-781.
34. SINHA, B.P. ; GERSTLE, K. H. ; TULIN, L. G. **Stress-Strain relations for concrete under cyclic loading**. ACI Journal 61(2), (1964), p. 195-211.
35. HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. New York, Oxford University Press, (1950).
36. SMADI, M.M. ; SLATE, F.O. ; NILSON, A. H. **Shrinkage and creep of high-medium and low-strength concretes including overloads**. ACI Materials Journal, (1987).
37. SÜSSEKIND, J.C. **Curso de concreto. Concreto armado Volume I, 3ª ed.** Rio de Janeiro, Globo, (1983), 376 p.
38. MARÇAL, P.V. **Finite element analysis of combined problems of material and geometric behavior**. Techn. Rep. 1, ONR, Brown University, (1969), also Proc. Am. Soc. Mech. Eng. Conf. on "Computational Approaches in Applied Mechanics", 133, (June 1969).
39. ARGYRIS, J. H. ; KELSEY, S. ; KAMEL, H. **Matrix methods of structural analysis**, AGARD-ograph 72, Pergamon Press, (1963).
40. KUPFER, H. ; HILSDORF, H.K. ; RÜSCH, H. **Behavior of concrete under biaxial stresses**. ACI Journal 66(8), (1969), p. 656-666.
41. PETERSON, P.E. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Report N° TVBM-1106, Division of Building Materials, University of Lund, Lund, Sweden, (1981).

42. PALANISWAMY, R. ; SHAH, S.P. **Fracture and stress-strain relationship of concrete under triaxial compression.** Journal of Structural Division, ASCE 100(ST5), (1974), p. 901-916.
43. GROEHS, A.G. ; SANTOS, M.I.G. **GAELI - Gerador e analisador de estruturas lineares.** CPGEC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Versão 03-90, (1990).
44. YANG, Y.B. **Linear and nonlinear analysis of space frames with nonuniform torsion using interactive computer graphics.** Department of Structural Engineering Report, Cornell University, N° 84-10, (junho 1984).