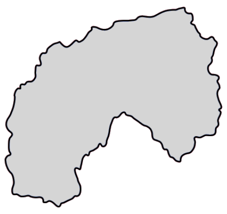
Uma extensão do teorema da curva de Jordan para o plano

Bruno Freitas dos Santos, orientador: Leonardo Prange Bonorino

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - **SIC 2017**

1. Introdução

Definição 1. *Uma curva de Jordan é um caminho fechado e injetivo em $\mathbb{R}^2$, isto é, uma função contínua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ injetiva exceto em seus extremos $\gamma(0) = \gamma(1)$.*



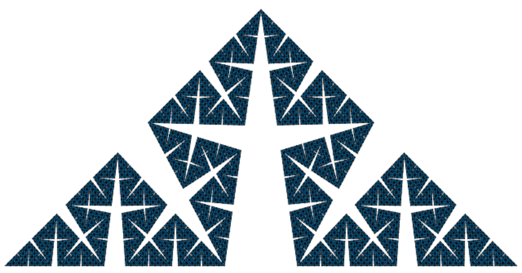
Equivalentemente, uma curva de Jordan é um subconjunto do plano homeomorfo ao círculo S^1.

Um célebre teorema de Jordan afirma que tais curvas dividem o plano em exatamente duas partes. Um resultado menos conhecido é a extensão de Schoenflies: essas partes são homeomorfas ao interior e ao exterior do disco D^2.

2. Teorema da curva de Jordan

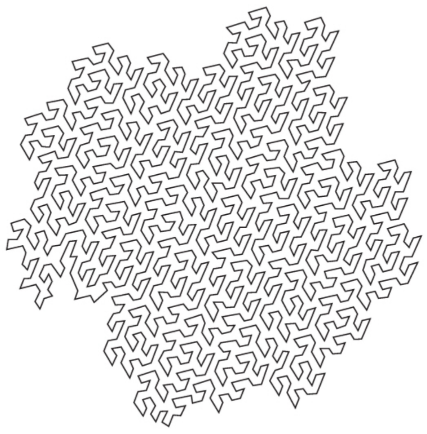
Teorema 1. *Se $J \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva de Jordan então o complemento J^C possui exatamente duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada. Ambas componentes são conexas por arcos e possuem J como fronteira.*

Esse teorema é evidente intuitivamente mas sua prova é difícil já que o conjunto das curvas de Jordan é grande e nossa intuição sobre suas características está muitas vezes errada.



As curvas de Osgood são curvas de Jordan com medida positiva.

A prova elementar usual envolve aproximações da curva por caminhos poligonais. Se o teorema do ponto fixo de Brouwer (para dimensão dois) é conhecido a prova pode ser encurtada para poucas páginas envolvendo considerações em sua maior parte topológicas (e não geométricas, específicas ao plano). Isso se dá em parte pelo teorema análogo para dimensões maiores também ser válido.



Dificuldade na prova usual: quais pontos estão no interior e quais estão no exterior da curva?

3. A extensão de Schoenflies

Teorema 2. *Se J é uma curva de Jordan então a componente limitada de J^C é homeomorfa ao disco aberto e a componente ilimitada ao exterior do disco fechado.*

Isto é, qualquer subespaço homeomorfo ao círculo divide o plano nos mesmos espaços que ele.

Diferente do teorema de Jordan esse resultado não é válido (sem modificações) para maiores dimensões, já falhando em $\mathbb{R}^3$: a esfera de Alexander é homeomorfa à S^2 mas seu exterior não é nem simplesmente conexo. Precisamos então apelar bastante à propriedades e construções específicas ao plano, o que faz a prova ser consideravelmente mais longa.

4. Prova da extensão

Omitindo os detalhes a prova pode ser dividida em 3 etapas:

1) definimos por indução uma sequência crescente de aproximações α_n para o interior da curva J e uma correspondente sequência de homeomorfismos h_n partindo de α_n para parte do interior do disco D^2.

2) provamos que o limite $\cup^\infty \alpha_n$ é o interior da curva e que os homeomorfismos h_n possuem uma extensão única para um homeomorfismo $Int(J) \to Int(D^2)$.

3) usando a projeção estereográfica da esfera para o plano provamos que o exterior da curva é homeomorfo ao interior do disco exceto um ponto e portanto homeomorfo ao exterior do disco fechado.