

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
Programa de Pós-Graduação em Física

# Um Objeto Compacto Exótico na Relatividade Geral Pseudo-Complexa \*

**Guilherme Lorenzatto Volkmer**

Dissertação realizada sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre  
2018

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Podemos enfrentar as leis humanas, mas não podemos resistir às leis naturais.

*Júlio Verne*

# Agradecimentos

★ Sou profundamente grato ao meu orientador, Dimiter Hadjimichef, por mais essa oportunidade e pela ampla contribuição ao meu desenvolvimento acadêmico.

★ Agradeço à minha namorada, Amanda Kronhardt Fritsch, cujo o apoio tem sido vital não apenas para este trabalho como também em cada passo que dei desde que a conheci.

★ Meus sinceros agradecimentos à minha família que sempre me incentivou a perseguir meus sonhos.

★ Agradeço ainda ao CNPq pelo apoio financeiro sem o qual este trabalho não seria possível.

# Resumo

O impacto que estruturas algébricas podem exercer em teorias físicas é bem ilustrado pela Mecânica Quântica, onde os números complexos são inquestionavelmente a escolha mais adequada para desenvolver a teoria. A Relatividade Geral pseudo-complexa avalia a possibilidade da interação gravitacional assumir sua descrição mais natural quando construída tendo como base os números pseudo-complexos, que consistem em uma das três possibilidades de números complexos abelianos com uma única unidade imaginária. Esse conjunto numérico é dotado de elementos não nulos cujo produto é zero, tais números recebem o nome de *zeros generalizados* ou *divisores de zero*.

A presença de zeros generalizados permite a introdução de um princípio variacional modificado do qual um termo adicional, ausente na Relatividade Geral, emerge nas equações de campo. Esse termo adicional é interpretado como uma *energia escura*, cuja origem física está relacionada com flutuações no vácuo. A inclusão desse efeito é legítima pois flutuações no vácuo *a priori* devem gravitar como qualquer outra forma de energia. Das equações de campo podemos resumir a principal ideia conceitual da teoria, na Relatividade Geral pseudo-complexa massa não apenas curva o espaço-tempo como também é capaz de alterar a estrutura do espaço-tempo ao redor da massa. As diferenças com relação à Relatividade Geral se manifestam em situações físicas extremas, no regime de campos gravitacionais intensos. Como aplicação analisamos sob o ponto de vista teórico um objeto compacto exótico composto por matéria escura fermiônica.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral pseudo-complexa. Números pseudo-complexos. Matéria escura. Energia escura. Objetos compactos.

# Abstract

The impact that algebraic structures can exert on physical theories is well illustrated by Quantum Mechanics, where complex numbers are unquestionably the most appropriate choice to develop the theory. Pseudo-complex General Relativity evaluates the possibility that the gravitational interaction acquires its most natural description when constructed upon pseudo-complex numbers, which consist of one of the three possibilities of abelian complex numbers with a single imaginary unit. This numerical set is endowed with nonzero elements whose product is zero, such numbers are called *generalized zeros* or *divisors of zero*.

The presence of generalized zeros allows the introduction of a modified variational principle from which an additional term, absent in General Relativity, emerges in the field equations. This additional term is interpreted as a *dark energy*, whose physical origin is related to vacuum fluctuations. The inclusion of this effect is legitimate because *a priori* vacuum fluctuations must gravitate as any other form of energy. From the field equations we can summarize the main conceptual idea of the theory, in pseudo-complex General Relativity mass not only curves spacetime but also is able to change the structure of the spacetime around the mass. The differences with respect to General Relativity are manifested in extreme physical situations in the regime of intense gravitational fields. As an application we analyze from the theoretical point of view an exotic compact object composed of fermionic dark matter.

**Keywords:** Pseudo-complex General Relativity. Pseudo-complex numbers. Dark matter. Dark energy. Compact objects.



# Lista de Figuras

2.1	Plano Pseudo-Complexo. . . . .	11
4.1	Equação de estado para a matéria escura. . . . .	44
4.2	Perfis fermiônicos obtidos para a densidade de energia, pressão, função de massa e massa total para $m_\chi = 1$ GeV. . . . .	49
4.3	Perfis fermiônicos obtidos para a densidade de energia, pressão, função de massa e massa total para $m_\chi = 50$ GeV. . . . .	50
4.4	Perfis fermiônicos obtidos para a densidade de energia, pressão, função de massa e massa total para $m_\chi = 100$ GeV. . . . .	51
4.5	Massa fermiônica total em função da densidade de energia central para $m_\chi = 1$ GeV, 50 GeV e 100 GeV. . . . .	52
4.6	Massa total fermiônica e massa total em função da densidade de energia central para $\alpha = -0.9$ e $m_\chi = 1$ GeV. . . . .	53

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela de multiplicação de números pseudo-complexos espaço-temporais. . . . .	12
2.2	Transformação polar hiperbólica para os setores da Figura 2.1 . . . . .	14
2.3	Relações entre as funções hiperbólicas estendidas e as funções hiperbólicas convencionais.	14
4.1	Parametrização adotada para os valores centrais de densidade de energia e pressão para $m_\chi = 1, 50$ e $100$ GeV. . . . .	46
4.2	Valores mínimos e máximos adotados para a densidade de energia central de matéria escura. . . . .	46
4.3	Massa fermiônica total, raio total e compacidade fermiônica para $m_\chi = 1$ GeV . . . .	47
4.4	Massa fermiônica total, raio total e compacidade fermiônica para $m_\chi = 50$ GeV . . .	47
4.5	Massa fermiônica total, raio total e compacidade fermiônica para $m_\chi = 100$ GeV . . .	48
4.6	Valores das constantes $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ e $\xi_4$ para as diferentes soluções abordadas. . . . .	52
4.7	Valores das constantes $\xi_5, \xi_6, \xi_7$ e $\xi_8$ para as diferentes soluções abordadas. . . . .	53



# Sumário

<b>1. Introdução</b> . . . . .	3
<b>2. A Matemática da Relatividade Geral Pseudo-Complexa</b> . . . . .	7
2.1 Preliminares . . . . .	7
2.2 A Geometria Gerada Pelos Números Pseudo-Complexos . . . . .	15
2.3 Cálculo No Formalismo Pseudo-Complexo . . . . .	18
<b>3. A Relatividade Geral Pseudo-Complexa</b> . . . . .	21
3.1 Prelúdio . . . . .	21
3.2 A Extensão Pseudo-Complexa da Relatividade Geral . . . . .	25
3.3 O Princípio Variacional Modificado e Equações de Campo . . . . .	29
3.4 O Pseudo-Grupo de Lorentz . . . . .	33
<b>4. Objetos Compactos na RG-PC</b> . . . . .	35
4.1 Equações TOV na RG-PC . . . . .	38
4.2 O Argumento de Landau para a Massa Máxima de Estrelas Compactas . . . . .	39
4.3 Um Objeto Compacto Exótico na Relatividade Geral Pseudo-Complexa . . . . .	41
4.4 Equações de Estado . . . . .	42
4.5 Implementação Numérica . . . . .	44
4.6 Resultados e Discussão . . . . .	45
<b>5. Considerações Finais</b> . . . . .	54
<b>A. Estruturas Matemáticas de Espaços Curvos</b> . . . . .	56
<b>B. Derivação das Equações TOV na RG-pc</b> . . . . .	60
<b>C. Matéria Escura e o Modelo do Portal de Higgs</b> . . . . .	70

---

D. Limite para a Compacidade na RG . . . . . 73

## Introdução

O físico teórico Lev Landau se referiu à Relatividade Geral como “A mais bela das teorias físicas existentes”. A combinação de dois elementos até então não relacionados, métrica e gravitação, tem profundamente modificado nosso entendimento da estrutura do espaço-tempo e representa um enorme feito da matemática aplicada. A Teoria da Relatividade Geral (RG) acumula diferentes previsões verificadas como a precessão do periélio de Mercúrio, arrasto de referenciais e mais recentemente a descoberta de ondas gravitacionais.

Diante de tamanho sucesso podemos nos questionar se é sensato propor modificações da Relatividade Geral. Contudo podemos facilmente encontrar ocasiões onde físicos, com as mais variadas motivações, acreditaram que a resolução de certos impasses residia em alterar a RG. De fato o próprio Einstein, na busca de uma *teoria unificada* da gravidade e do eletromagnetismo, estendeu o tensor de métrica a um corpo complexo [1, 2, 3]. Assim como Einstein, Max Born também tinha como motivação a unificação, todavia dessa vez da RG com a Mecânica Quântica. Guiado por simetrias presentes na Mecânica Quântica ele tentou amenizar inconsistências entre as teorias adicionando a RG um elemento de linha definido no espaço de momentum [3, 4, 5]. A unificação da RG com a Mecânica Quântica, dois pilares da física moderna, ainda permanece como um sonho dos físicos teóricos e é a principal fonte de propostas rivais à visão atual da interação gravitacional.

Outros segmentos ricos em alterações são aqueles que tentam explicar os diversos resultados observacionais que indicam que existe uma grande quantidade de matéria e energia no universo cuja natureza é desconhecida, os enigmas da *matéria escura* e *energia escura*. A matéria escura foi postulada com o objetivo de explicar as discrepâncias entre como os objetos em escalas astronômicas deveriam se mover (com base no nosso entendimento atual da interação gravitacional) e como eles de fato se movem. Uma importante característica da matéria escura, que complica enormemente sua detecção, é que se trata de uma forma de matéria fracamente interagente com a matéria ordinária. Existem evidências que sugerem que algo em torno de 90% da matéria no Universo se encontra na forma de matéria escura. A esse quadro soma-se ainda o fato que desde a década de 90 observações

vêm apoiando a ideia de que o Universo não está apenas se expandindo, como a expansão na realidade é acelerada. Ao componente responsável por essa aceleração damos o nome de energia escura. Em decorrência desses fatos, muitos físicos se questionam se o problema não está na nossa visão da interação gravitacional e diversos modelos são propostos. Em [6], por exemplo, tenta-se promover a RG a uma teoria tensorial-escalar visando resolver o problema da *matéria escura*. Algumas das propostas de modificação da RG em grandes escalas podem ser encontradas em [7].

Em [8] foi proposta uma extensão algébrica da Relatividade Geral, a Relatividade Geral pseudo-complexa (RG-pc), na qual o formalismo é desenvolvido adotando-se os chamados números *pseudo-complexos*<sup>1</sup>, que possuem uma natureza intrinsecamente não euclideana. Essa proposta permite um termo adicional nas equações de campo de Einstein denominado energia escura (flutuações no vácuo) que possui a propriedade de energia repulsiva. A comparação dessa energia escura com a energia escura cosmológica, responsável pela expansão do Universo, deve ser feita com cautela pois não é possível afirmar que ambas possuem a mesma origem [3]. Mesmo assim soluções cosmológicas na presença dessa contribuição extra do formalismo pseudo-complexo são desenvolvidas em [3].

A leitura das equações de campo no formalismo pseudo-complexo nos traz o aspecto central da teoria, *a ideia de que massa não apenas curva o espaço-tempo, como na Relatividade Geral, mas também altera a estrutura do vácuo do próprio espaço-tempo* [3]. Essa interpretação da interação gravitacional é de certa forma inspirada no trabalho realizado em [10, 11, 12, 13], onde usando uma abordagem semi-clássica mostra-se que a presença de massa cria flutuações no vácuo e que quanto maior a massa, mais intensas são as flutuações. Fenômenos como esse de natureza quântica podem vir a complementar nossa visão do colapso gravitacional clássico de corpos massivos, possibilitando um cenário de objetos compactos mais rico do que o usualmente considerado. Essa possibilidade não deveria gerar estranheza, visto que a explicação da estabilidade de objetos compactos como estrelas de nêutrons, por exemplo, não está centrada na Relatividade Geral, mas sim no princípio de exclusão de Pauli que evita que o colapso prossiga.

À primeira vista o uso de variáveis pseudo-complexas pode soar como uma complicação desnecessária, todavia parece uma escolha natural, visto que os números pseudo-complexos estão associados com o grupo de Lorentz da Relatividade Especial e são os únicos capazes de gerar uma extensão algébrica da Relatividade Geral livre de *fantasmas*<sup>2</sup> [3, 9, 14]. É imediato perceber que a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica possuem pontos de partida fundamentalmente diferentes, pois a primeira é construída sobre um corpo real e a segunda sobre um corpo complexo [15]. O estudo dos números pseudo-complexos pode vir a ser relevante no futuro para fins de unificação, pois existem trabalhos que afirmam que nenhuma álgebra divisível é capaz de unificar as estruturas da Mecânica Quântica e da Relatividade [16].

---

<sup>1</sup> O nome advém do fato que se trata de uma extensão dos números complexos que gera uma geometria *pseudo-euclideana* [9].

Devido a preferências de natureza filosófica, os autores da RG-pc a desenvolvem postulando que *nenhuma teoria física aceitável deveria possuir singularidades, nem mesmo singularidades de coordenadas* [3]. Segundo os autores a presença de singularidades em uma dada teoria física reflete a existência de limitações na teoria. Uma forte implicação de tal postulado seria a inexistência de *buracos-negros*. Sem dúvida é um ponto de vista delicado porém sustentável *a priori*, visto que até o presente momento não temos nenhuma observação direta de um horizonte de eventos [19, 20]. É perfeitamente possível que a incorporação de fenômenos quânticos altere resultados da RG, principalmente no âmbito das singularidades [21].

Entretanto mesmo na presença de singularidades a RG-pc é capaz de produzir resultados interessantes. Em setembro de 2015 foi feita a primeira detecção de ondas gravitacionais através da observação do evento denominado GW150914. Os resultados foram anunciados em fevereiro de 2016 pelos grupos LIGO e VIRGO [22]. As ondas observadas correspondem à fusão de dois buracos-negros de massas na ordem de  $30M_{\odot}$  cada. Toda a análise do evento foi feita utilizando a RG. Um aspecto peculiar foi que segundo a RG os buracos-negros deveriam estar separados por uma distância em torno de 350 km, o que é difícil de explicar caso os dois objetos tenham se formado em um sistema binário (contudo existem propostas que apontam que esse resultado pode ser obtido assumindo uma estrela primordial de rotação rápida) [23]. O evento GW150914, analisado sob o ponto de vista da RG-pc, indica que se trata da fusão de dois buracos-negros massivos formados no centro de duas galáxias primordiais que se fundiram. Logo na RG-pc não é necessário um sistema binário de buracos-negros tão próximos [23]. Em [24] é feita uma discussão dos resultados obtidos em [23] utilizando dados de experimentos de ondas gravitacionais. Argumenta-se ainda que mesmo no caso da Relatividade Geral pseudo-complexa a existência de buracos-negros é praticamente inevitável. Como podemos notar do exemplo acima dados referentes a ondas gravitacionais são de suma importância para testar possíveis alternativas à RG. É fundamental para confrontar a RG com a RG-pc identificar predições testáveis nas quais as teorias discordam. Os autores da RG-pc sempre trataram o assunto com atenção especial e possíveis testes experimentais da RG-pc podem ser consultados em [3, 25].

Em [3] encontra-se uma compilação clara e abrangente dos trabalhos dos autores da RG-pc acerca do tema. Ao longo do texto essa será nossa principal referência. No próximo capítulo aspectos básicos da matemática dos números pseudo-complexos serão apresentados. Os conhecimentos obtidos no Capítulo 2 são aplicados no Capítulo 3 para elaborar uma extensão algébrica da Relatividade Geral, a Relatividade Geral pseudo-complexa. No Capítulo 4 desenvolveremos um modelo de brinquedo que aplica o formalismo pseudo-complexo a um objeto compacto exótico composto por matéria escura fermiônica na presença de energia escura. No Capítulo 5 são feitas as considerações finais sobre o trabalho. De maneira complementar o trabalho conta ainda com 4 apêndices. No Apêndice A apresentamos, partindo da expressão do elemento de linha, as principais quantidades geométricas

<sup>2</sup> Fantasmas são estados de norma negativa, usualmente tratados como não-físicos [17, 18].

presentes na RG. No Apêndice B as equações de equilíbrio hidrostático da Relatividade Geral pseudo-complexa são derivadas. Um possível mecanismo para o surgimento da matéria escura fermiônica que integra o objeto compacto exótico do Capítulo 4 é discutido no Apêndice C. No Apêndice D é calculado um limite para a compacidade máxima permitida pela Relatividade Geral.

# A Matemática da Relatividade Geral Pseudo-Complexa

## 2.1 Preliminares

Os números constituem uma das noções mais fundamentais de toda a matemática e é um conceito vital no desenvolvimento de todas as ciências naturais. Apesar de o conceito de número na sua forma mais geral incluir objetos como quatérnions e matrizes, para a maioria das pessoas os estudos no que diz respeito a números partem dos números naturais e culmina nos chamados números complexos.

Os números complexos representam um instigante capítulo na história da matemática. Foram originalmente introduzidos para fornecer sentido às raízes quadradas de quantidades negativas que surgiam em certas soluções reais de equações cúbicas. Apesar da limitada finalidade inicial os números complexos foram incorporados em ramos científicos diversos e permitiram, por exemplo, explorar equações algébricas que do ponto de vista da geometria não admitiam soluções. Surgiu um estímulo recíproco no qual as aplicações deram relevância ao estudo de números complexos e em contrapartida eles possibilitaram a formalização de problemas práticos [9]. Euler foi um dos pioneiros nas aplicações e utilizou funções de variáveis complexas para descrever o movimento de um fluido [9]. Sob o ponto de vista da física o exemplo mais contundente das vantagens do uso de tais números ocorre na Mecânica Quântica, onde adotamos um espaço complexo de Hilbert com um produto interno hermitiano, logo nesse caso a aplicação dos números complexos está inserida nos fundamentos da Teoria Quântica e não é um mero artifício matemático.

Inspirado pelo caso dos números complexos, um cenário semelhante pode estar florescendo no conjunto dos *números pseudo-complexos* (também denominados de números hiperbólicos<sup>3</sup>), que consistem na mais simples extensão dos números complexos. Assim como os números complexos apre-

---

<sup>3</sup> A literatura é rica em nomenclaturas. Além de pseudo-complexos e hiperbólicos, tais números também são referidos como duplos, espaço-temporais, de Lorentz, paracomplexos, split-complex, duplex, alucinatórios, binários,

sentam uma íntima relação com a geometria Euclideana, os números pseudo-complexos são capazes de formalizar a geometria de Minkowski da Relatividade Especial em duas dimensões [9, 26].

As relações entre os números complexos e a Teoria de Grupos permitiram que o matemático Sophus Lie generalizasse os números complexos em números hipercomplexos (dos quais os números pseudo-complexos fazem parte) [9]. A Teoria de números hipercomplexos tem encontrado diversas aplicações na física, por exemplo, L. Sobrero aplicou as funções de um número hipercomplexo particular na Teoria da Elasticidade [9, 27]. Outro notório exemplo ocorre quando tentamos incorporar a Relatividade Especial na Mecânica Quântica, pois essa combinação requer coeficientes que não podem ser reais ou complexos. As famosas matrizes  $\gamma$  de Dirac constituem uma álgebra hipercomplexa [28, 29].

Antes mesmo da formalização dos números hipercomplexos feita por Lie, o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss já havia observado que uma generalização dos números reais e complexos não é possível sem renunciar a alguma propriedade algébrica presente nesses conjuntos numéricos. Se quisermos estabelecer uma álgebra cujo produto seja distributivo com respeito a soma e associativo devemos abrir mão da comutatividade do produto desses números (os quatérnions estão nesse caso) ou aceitar que o produto entre dois números não nulos pode ser zero. Ao conjunto de números com essa propriedade damos o nome de *zeros generalizados* ou *divisores de zero*. Os números *pseudo-complexos* pertencem a esse segundo caso [3, 9].

No que diz respeito a unidades nos Capítulos 2 e 3 adotaremos por simplicidade o sistema  $8\pi G = c = 1$ , onde  $G$  denota a constante gravitacional newtoniana e  $c$  a velocidade da luz. No entanto para estudarmos objetos compactos optaremos (a não ser que seja explicitamente dito o contrário) unidades nas quais  $G = c = 1$ , pois se trata da escolha usualmente feita na área. Também utilizaremos, quando manipulando índices referentes a componentes de tensores, a convenção de soma de Einstein na qual assume-se um somatório implícito quando um mesmo índice se repete em cima e embaixo.

No restante do capítulo faremos uma breve introdução à matemática dos números pseudo-complexos, necessária para construir a extensão algébrica da Relatividade Geral que será feita no próximo capítulo. Os números pseudo-complexos são definidos da seguinte forma [3, 9]:

$$\mathbb{P} = \{X = x_1 + I x_2; x_1, x_2 \in \mathbb{R}, I \notin \mathbb{R}; I^2 = 1\}, \quad (2.1)$$

onde  $I$  representa o gerador da álgebra e denominamos as componentes  $x_1$  e  $x_2$  de *real* e *pseudo-imaginária*, respectivamente [3, 9, 30]. Dois números pseudo-complexos,  $X$  e  $Y$ , são iguais se e somente se suas componentes são iguais, ou seja,  $x_1 = y_1$  e  $x_2 = y_2$ . O elemento *zero* é o elemento cujas componentes são nulas. O elemento unitário frente à multiplicação é dado por 1, visto que  $\forall X \in \mathbb{P}$  temos  $X1 = 1X = X$ . As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão seguem

---

perplexos, dentre outros.



analogia ao caso complexo:

$$X + Y = (x_1 + y_1) + I(x_2 + y_2), \quad (2.2)$$

$$X - Y = (x_1 - y_1) + I(x_2 - y_2), \quad (2.3)$$

$$X \cdot Y = (x_1 + Ix_2) \cdot (y_1 + Iy_2) = x_1y_1 + Ix_1y_2 + Ix_2y_1 + x_2y_2, \quad (2.4)$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{x_1 + Ix_2}{y_1 + Iy_2} = \frac{x_1 + Ix_2}{y_1 + Iy_2} \frac{y_1 - Iy_2}{y_1 - Iy_2} = \frac{x_1y_1 - x_2y_2 + I(x_2y_1 - x_1y_2)}{y_1^2 - y_2^2}. \quad (2.5)$$

Se analogamente aos números complexos denotarmos a parte real e pseudo-imaginária de um número pseudo-complexo  $X$  por  $Re(X) = x_1$  e  $Im(X) = x_2$ , respectivamente é imediato notar que

$$Re(X \pm Y) = Re(X) \pm Re(Y), \quad (2.6)$$

$$Im(X \pm Y) = Im(X) \pm Im(Y), \quad (2.7)$$

$$Im(X \cdot Y) = Re(X)Im(Y) + Im(X)Re(Y), \quad (2.8)$$

$$Re(X \cdot Y) = Re(X)Re(Y) + Im(X)Im(Y). \quad (2.9)$$

Para verificar que o produto de números pseudo-complexos é de fato comutativo introduzimos a multiplicação de versores para números hipercomplexos como

$$e_\alpha e_\beta = e_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (2.10)$$

onde  $C_{\alpha\beta}^\gamma$  são constantes reais denominadas *constantes de estrutura* e para os números pseudo-complexos temos os versores  $e_1 = 1$  e  $e_2 = I$ . Nesse caso temos que (2.10) leva ao seguinte conjunto de equações:

$$1 = C_{11}^1 + IC_{11}^2, \quad (2.11)$$

$$I = C_{12}^1 + IC_{12}^2, \quad (2.12)$$

$$I = C_{21}^1 + IC_{21}^2, \quad (2.13)$$

$$1 = C_{22}^1 + IC_{22}^2. \quad (2.14)$$

Logo

$$\begin{aligned} C_{11}^1 &= C_{12}^2 = C_{21}^2 = C_{22}^1 = 1, \\ C_{11}^2 &= C_{12}^1 = C_{21}^1 = C_{22}^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

O sistema é comutativo frente à multiplicação se as constantes de estrutura satisfazem  $C_{\alpha\beta}^\gamma = C_{\beta\alpha}^\gamma \forall (\alpha, \beta, \gamma)$ , o que claramente é satisfeito por (2.15). A multiplicação é dita associativa se as constantes de estrutura satisfazem  $C_{\gamma\delta}^\epsilon C_{\alpha\beta}^\gamma = C_{\alpha\gamma}^\epsilon C_{\beta\delta}^\gamma \forall (\alpha, \beta, \delta, \epsilon)$ . Pode ser facilmente verificado que (2.15) satisfaz essa relação [9].

O conjugado pseudo-complexo e o quadrado da norma são dados respectivamente por

$$X^* = x_1 - Ix_2, \quad (2.16)$$

$$|X|^2 = XX^* = (x_1^2 - x_2^2). \quad (2.17)$$

De (2.17) podemos observar que o quadrado da norma é uma quantidade real que representa o invariante de Lorentz da Relatividade Especial bidimensional [9]. Contudo não precisamos nos ater à base  $(1, I)$ . Como veremos no decorrer do trabalho a seguinte base é extremamente conveniente:

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm I), \quad (2.18)$$

com relações inversas

$$1 = \sigma_+ + \sigma_-, \quad (2.19)$$

$$I = \sigma_+ - \sigma_-. \quad (2.20)$$

Observe que a base  $\sigma_{\pm}$  é idempotente e o produto entre  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  é nulo

$$\sigma_{\pm}^2 = \frac{1}{4}(2 \pm 2I) = \sigma_{\pm}, \quad (2.21)$$

$$\sigma_+\sigma_- = \sigma_-\sigma_+ = \frac{1}{4}(1 - 1 + I - I) = 0. \quad (2.22)$$

Note ainda a partir de (2.19), (2.21) e (2.22) que a base  $\sigma_{\pm}$  forma um conjunto completo de operadores projeção para os números pseudo-complexos<sup>4</sup> [31]. Quando adotamos a base idempotente (2.18), os números estão na forma denominada *decomposta*. As variáveis nas bases  $(1, I)$  e  $(\sigma_+, \sigma_-)$  estão relacionadas por

$$x_1 + x_2 = x_+, \quad x_1 - x_2 = x_-, \quad (2.23)$$

$$x_1 = \frac{x_+ + x_-}{2}, \quad x_2 = \frac{x_+ - x_-}{2}. \quad (2.24)$$

Dessa forma podemos expressar um número pseudo-complexo  $X$  como  $X = x_1 + Ix_2$  ou alternativamente  $X = x_+\sigma_+ + x_-\sigma_-$ . Adotando a base  $\sigma_{\pm}$ , as operações básicas tornam-se

$$X + Y = (x_+ + y_+)\sigma_+ + (x_- + y_-)\sigma_-, \quad (2.25)$$

$$X - Y = (x_+ - y_+)\sigma_+ + (x_- - y_-)\sigma_-, \quad (2.26)$$

$$X \cdot Y = x_+y_+\sigma_+ + x_-y_-\sigma_-, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \frac{x_+\sigma_+ + x_-\sigma_-}{y_+\sigma_+ + y_-\sigma_-} = \frac{x_+\sigma_+ + x_-\sigma_-}{y_+\sigma_+ + y_-\sigma_-} \frac{y_+\sigma_- + y_-\sigma_+}{y_+\sigma_- + y_-\sigma_+}, \\ &= \frac{x_+y_-\sigma_+ + x_-y_+\sigma_-}{y_+y_-(\sigma_+ + \sigma_-)} = \sigma_+ \frac{x_+}{y_+} + \sigma_- \frac{x_-}{y_-}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$X^* = x_+\sigma_- + x_-\sigma_+, \quad (2.29)$$

$$|X|^2 = x_+x_-, \quad (2.30)$$

<sup>4</sup> Um conjunto de  $N$  operadores forma um conjunto completo de operadores projeção caso sejam satisfeitas as relações  $P_i^2 = P_i$ ,  $P_iP_j = 0$  para  $(i \neq j)$  e  $\sum_{i=1}^N P_i = 1$ .

onde utilizou-se que  $\sigma_{\pm}^* = \sigma_{\mp}$ .

Analogamente ao plano de Argand-Gauss, na Figura 2.1 introduzimos o plano pseudo-complexo [3, 9]. Representando os números em um plano cartesiano é imediato observar a semelhança desse plano com os diagramas espaço-temporais da Relatividade Especial. Logo um significado físico pode ser atribuído ao quadrado da distância relacionando-o a um intervalo espaço-temporal. Particularmente podemos notar que os divisores de zeros formam eixos diagonais que correspondem às linhas que formam o cone de luz (esses eixos dividem o plano em quatro setores que denominaremos por superior, inferior, direito e esquerdo) [9]. Para cada um desses quatro setores a condição  $|x_1^2 - x_2^2| = 1$  forma uma hipérbole e como exemplo representamos a hipérbole referente ao setor esquerdo na Figura 2.1. Se relacionarmos a variável pseudo-complexa  $X = x_1 + Ix_2$  com uma variável espaço-temporal  $X = t + Ix$ , valendo-se da nomenclatura usual para o intervalo na Relatividade Especial, a seguinte relação pode ser feita:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \implies \textit{tipo luz}, \tag{2.31}$$

$$x_1^2 - x_2^2 > 0 \implies \textit{tipo tempo}, \tag{2.32}$$

$$x_1^2 - x_2^2 < 0 \implies \textit{tipo espaço}. \tag{2.33}$$

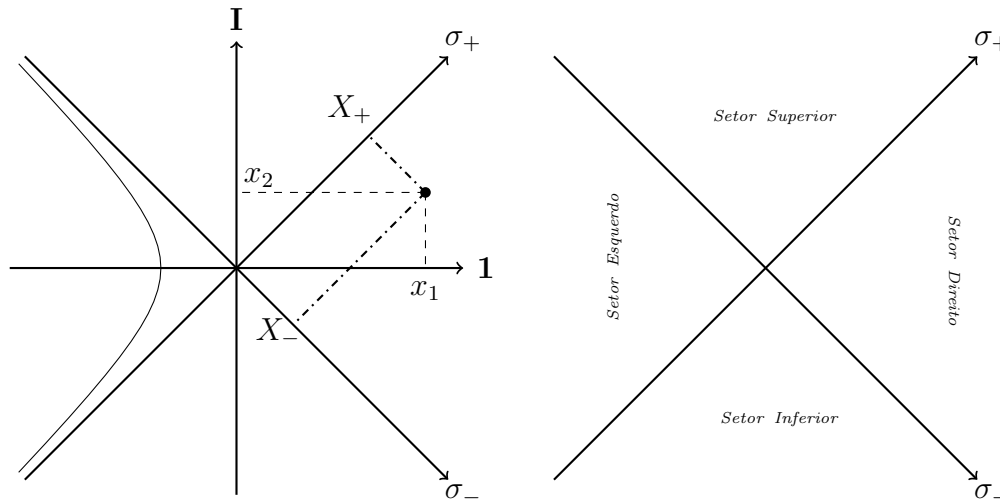


Figura 2.1: Plano Pseudo-Complexo.

É trivial verificar que a multiplicação dos números pseudo-complexos entre esses três casos gera a tabela de multiplicação retratada na Tabela 2.1 [32]. Observe que essa tabela de multiplicação é análoga à dos números reais caso seja feita a associação dos números tipo-luz com o zero, números tipo-tempo com números positivos e números tipo-espaço com números negativos. Essa correspondência já nos fornece um indicativo que no conjunto dos números pseudo-complexos temos

números que desempenham o papel de *zeros generalizados*. Qualquer número real vezes zero é igual a zero, assim como um número tipo-luz vezes um número pseudo-complexo qualquer resulta em um número tipo-luz.

Multiplicação	tipo-luz	tipo-tempo	tipo-espaço
tipo-luz	tipo-luz	tipo-luz	tipo-luz
tipo-tempo	tipo-luz	tipo-tempo	tipo-espaço
tipo-espaço	tipo-luz	tipo-espaço	tipo-tempo

**Tabela 2.1:** Tabela de multiplicação de números pseudo-complexos espaço-temporais.

Agora observe a equação

$$A \cdot B = 0. \tag{2.34}$$

Sabemos que se  $A$  e  $B$  forem números reais a equação (2.34) só é satisfeita se pelo menos um dos números for igual a zero. O objetivo agora é mostrar que no caso pseudo-complexo a equação (2.34) possui soluções mesmo quando ambos os números são diferentes de zero. Primeiramente considere o produto de dois números pseudo-complexos arbitrários

$$A \cdot B = (a_1 + Ia_2) \cdot (b_1 + Ib_2) = a_1b_1 + Ia_1b_2 + Ia_2b_1 + a_2b_2. \tag{2.35}$$

Note que, por exemplo, que se  $a_1 = a_2$  e  $b_1 = -b_2$  temos que  $A \cdot B = 0$ . Na base  $\sigma$  a existência de tais soluções é ainda mais evidente. Tendo em mente (2.22) observe que para  $A = a_+\sigma_+$  e  $B = b_-\sigma_-$  o produto torna-se

$$A \cdot B = (a_+\sigma_+) \cdot (b_-\sigma_-) = a_+b_-(\sigma_+\sigma_-) = 0. \tag{2.36}$$

Ou seja, o produto de um número que só possui a componente  $\sigma_-$  por outro que só possui a componente  $\sigma_+$  é zero. Visualmente podemos notar que isso ocorre quando multiplicamos números situados em eixos diagonais diferentes (ver Figura 2.1). Temos ainda a possibilidade de soluções não triviais para  $|X| = 0$ , que é satisfeita na equação (2.17) quando  $x_1^2 = x_2^2$ , ou equivalentemente na equação (2.30) quando  $x_+$  ou  $x_-$  são nulos. Esse conjunto de soluções motiva a definição dos chamados *divisores de zero* ou *zeros generalizados*, que constituem uma das principais características dos números pseudo-complexos e são definidos por

$$\mathbb{P}^0 = \{X \in \mathbb{P} \mid X = x_+\sigma_+ \text{ ou } X = x_-\sigma_-\} = \{X \in \mathbb{P} \mid x_1^2 = x_2^2\}. \tag{2.37}$$

Observe das equações (2.5) e (2.28) que assim como no âmbito dos números reais ou complexos não podemos dividir por zero, no caso dos números pseudo-complexos não podemos efetuar divisões onde o denominador é um divisor de zero. Isso implica que os divisores de zero não possuem elemento

inverso, logo os números pseudo-complexos apesar de constituírem um anel<sup>5</sup> comutativo não formam um corpo<sup>6</sup>, diferentemente dos números complexos.

Analogamente ao caso dos números complexos é possível uma representação exponencial dos números pseudo-complexos. Observe primeiramente que [9]:

$$\begin{aligned} e^{(\rho'+I\theta)} &= e^{\rho'} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(I\theta)^l}{l!} = e^{\rho'} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(I\theta)^{2l}}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(I\theta)^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) \\ &= e^{\rho'} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\theta)^{2l}}{(2l)!} + I \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\theta)^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) = e^{\rho'} (\cosh \theta + I \sinh \theta). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Podemos definir uma transformação exponencial para os números pseudo-complexos válida em todos os setores da Figura 2.1, a saber:

$$Se \ |x_1| > |x_2|; \quad x_1 + Ix_2 = \text{sign}(x_1)e^{\rho'+I\theta} \equiv \text{sign}(x_1)e^{\rho'} (\cosh \theta + I \sinh \theta), \quad (2.39)$$

$$Se \ |x_2| > |x_1|; \quad x_1 + Ix_2 = \text{sign}(x_2)e^{\rho'+I\theta} \equiv \text{sign}(x_2)e^{\rho'} (\sinh \theta + I \cosh \theta), \quad (2.40)$$

onde  $\text{sign}(x)$  representa a função sinal<sup>7</sup>. Definiremos, de maneira usual, a coordenada radial como

$$e^{\rho'} = \rho \equiv \sqrt{|x_1^2 - x_2^2|}. \quad (2.41)$$

A coordenada angular, por sua vez é definida por

$$Se \ |x_1| > |x_2| \implies \theta = \tanh^{-1} \left( \frac{x_2}{x_1} \right), \quad (2.42)$$

$$Se \ |x_2| > |x_1| \implies \theta = \tanh^{-1} \left( \frac{x_1}{x_2} \right). \quad (2.43)$$

Para elementos pertencentes ao setor direito da Figura 2.1 podemos introduzir a transformação polar pseudo-complexa como

$$x_1 + Ix_2 = \rho e^{I\theta} \equiv \rho (\cosh(\theta) + I \sinh(\theta)). \quad (2.44)$$

A Tabela 2.2 resume as definições para os quatro setores da Figura 2.1.

<sup>5</sup> Um anel é um conjunto  $A$  dotado de duas operações internas  $(x, y) \mapsto xy$  e  $(x, y) \mapsto x + y$  (denominadas de multiplicação e adição, respectivamente) tal que  $A$  é um grupo abeliano frente à adição e a multiplicação é associativa e distributiva com respeito à adição. Particularmente, devido as propriedades dos números pseudo-complexos enunciadas anteriormente, o anel formado é comutativo com unidade.

<sup>6</sup> Um anel com unidade constitui um corpo se todos elementos com exceção do elemento neutro frente à adição possuem inversa.

<sup>7</sup> Para  $x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq 0$  temos que  $\text{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ . Para  $x = 0 \implies \text{sign}(x) = 0$ .

Setor Direito	Setor Esquerdo	Setor Superior	Setor Inferior
$ x_1  >  x_2 $	$ x_1  >  x_2 $	$ x_2  >  x_1 $	$ x_2  >  x_1 $
$z = \rho e^{I\theta}$	$z = -\rho e^{I\theta}$	$z = I\rho e^{I\theta}$	$z = -I\rho e^{I\theta}$
$x = \rho \cosh(\theta)$	$x = -\rho \cosh(\theta)$	$x = \rho \sinh(\theta)$	$x = -\rho \sinh(\theta)$
$y = \rho \sinh(\theta)$	$y = -\rho \sinh(\theta)$	$y = \rho \cosh(\theta)$	$y = -\rho \cosh(\theta)$

**Tabela 2.2:** Transformação polar hiperbólica para os setores da Figura 2.1

Contudo é possível introduzir uma transformação polar estendida<sup>8</sup> como apresentado na Tabela 2.3 que preserva a forma usual da transformação em todos os setores da Figura 2.1, a saber [9]:

$$x_1 + Ix_2 = \rho (\cosh_e(\theta) + I \sinh_e(\theta)). \quad (2.45)$$

Quando  $\rho = 1$  obtemos a fórmula de Euler hiperbólica estendida

$$e_e^{I\theta} = \cosh_e(\theta) + I \sinh_e(\theta). \quad (2.46)$$

Na próxima seção usaremos a representação exponencial dos números pseudo-complexos para mostrar sua relação com a Relatividade Especial.

	Setor Direito	Setor Esquerdo	Setor Superior	Setor Inferior
$\cosh_e(\theta)$	$\cosh(\theta)$	$-\cosh(\theta)$	$\sinh(\theta)$	$-\sinh(\theta)$
$\sinh_e(\theta)$	$\sinh(\theta)$	$-\sinh(\theta)$	$\cosh(\theta)$	$-\cosh(\theta)$

**Tabela 2.3:** Relações entre as funções hiperbólicas estendidas e as funções hiperbólicas convencionais.

Agora nos voltaremos à questão de definir uma função pseudo-complexa. Uma função pseudo-complexa  $f$  mapeia um número pseudo-complexo  $X$  em um outro  $f(X)$  e ela pode ser representada por duas funções reais de argumentos reais da seguinte forma [3]:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x_1 + Ix_2) \\ &= f_1(x_1, x_2) + I f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} &= f(x_+ \sigma_+ + x_- \sigma_-) \\ &= f_+(x_+, x_-) \sigma_+ + f_-(x_+, x_-) \sigma_-. \end{aligned} \quad (2.48)$$

<sup>8</sup> Para mais detalhes veja [9].

Entretanto com frequência estamos interessados em funções que admitem representação em série de potências, denominadas analíticas. Note que na base decomposta para  $a_k \in \mathbb{R}$  temos que:

$$f(X) = \sum_k a_k X^k \equiv \sum_k a_k (x_+ \sigma_+ + x_- \sigma_-)^k = f_+(x_+) \sigma_+ + f_-(x_-) \sigma_-. \quad (2.49)$$

Ou seja, nesse caso podemos definir a função pseudo-complexa como uma continuação analítica das respectivas funções de variáveis reais [9]. Como exemplo tomemos a função exponencial:

$$\begin{aligned} e^X &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X_+ \sigma_+ + X_- \sigma_-)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X_+)^n}{n!} \sigma_+ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X_-)^n}{n!} \sigma_- \\ &= e^{X_+} \sigma_+ + e^{X_-} \sigma_-. \end{aligned} \quad (2.50)$$

No desenvolvimento da RG-pc estaremos particularmente interessados no conjunto de funções que respeitam o análogo das condições de Cauchy-Riemann para funções pseudo-complexas, como veremos na seção que trata do cálculo diferencial e integral para números pseudo-complexos.

## 2.2 A Geometria Gerada Pelos Números Pseudo-Complexos

Parte da motivação em criar uma extensão algébrica da Relatividade Geral baseada nos números pseudo-complexos advém das suas já conhecidas relações com a Relatividade Especial [9, 15, 33]. Visando ilustrar essa relação considere, por exemplo, uma transformação de Lorentz de um sistema que se move no sentido positivo de  $x$  com velocidade  $v$  para outro em repouso  $(x', t')$ , a saber:

$$x' = \gamma (x + vt), \quad (2.51)$$

$$t' = \gamma (t + vx), \quad (2.52)$$

onde  $\gamma$  é o *fator de Lorentz* e é dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.53)$$

É oportuno introduzir uma variável denominada *rapidez*, denotada por  $\beta$  e expressa por

$$v = \tanh(\beta). \quad (2.54)$$

A partir da expressão da rapidez podemos reescrever o fator de Lorentz como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(\beta)}} = \sqrt{\frac{\cosh^2(\beta)}{\cosh^2(\beta) - \sinh^2(\beta)}} = \cosh(\beta). \quad (2.55)$$

Note ainda que

$$v\gamma = \tanh(\beta) \cosh(\beta) = \sinh(\beta). \quad (2.56)$$

Com tais resultados podemos reescrever as transformações de Lorentz como

$$x' = x \cosh(\beta) + t \sinh(\beta), \quad (2.57)$$

$$t' = x \sinh(\beta) + t \cosh(\beta). \quad (2.58)$$

Ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\beta) & \sinh(\beta) \\ \sinh(\beta) & \cosh(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Agora analisaremos o grupo multiplicativo<sup>9</sup> unimodular dos números pseudo-complexos. Para tal considere o produto de uma variável  $X$  por uma constante denotada por  $c$

$$X' = cX \equiv (c_t + Ic_x)(t + Ix). \quad (2.60)$$

Esse grupo pode ser expresso na forma vetor-matriz como [33]:

$$\begin{pmatrix} t' \\ Ix' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_t & Ic_x \\ Ic_x & c_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ Ix \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

onde a constante multiplicativa pode ser encarada como um operador que atua sobre o vetor  $X$ . Para agregarmos de fato um significado físico ao sistema com o intuito de comparar com a transformação de Lorentz da situação anterior vamos associar a constante pseudo-complexa  $c$  a uma variável espaço-temporal. Dessa maneira devemos impor  $c_t > 0$  e observar que  $\frac{c_x}{c_t}$  estará relacionado a uma velocidade, portanto isso implica em  $c_t > c_x$ . Estamos interessados no caso unimodular onde temos  $c_t^2 - c_x^2 = 1$ . Utilizando a transformação polar pseudo-complexa correspondente podemos reescrever a constante  $c$  como

$$c \equiv c_t + Ic_x = \rho_c (\cosh \theta_c + I \sinh \theta_c) = \rho_c e^{I\theta_c}. \quad (2.62)$$

A equação 2.61 pode ser expressa como

$$\begin{pmatrix} t' \\ Ix' \end{pmatrix} = \rho_c \begin{pmatrix} \cosh \theta_c & I \sinh \theta_c \\ I \sinh \theta_c & \cosh \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ Ix \end{pmatrix} \equiv \rho_c \begin{pmatrix} t \cosh \theta_c + x \sinh \theta_c \\ It \sinh \theta_c + Ix \cosh \theta_c \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

<sup>9</sup> Um grupo multiplicativo é um conjunto de elementos que obedece uma multiplicação associativa, contém um elemento identidade frente à multiplicação e todo elemento possui um respectivo elemento inverso de tal forma que o produto entre eles resulta na identidade.



A condição unimodular implica em  $\rho_c = 1$ , portanto

$$\begin{pmatrix} t' \\ Ix' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta_c & I \sinh \theta_c \\ I \sinh \theta_c & \cosh \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ Ix \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t \cosh \theta_c + x \sinh \theta_c \\ It \sinh \theta_c + Ix \cosh \theta_c \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

ou seja,

$$t' = t \cosh \theta_c + x \sinh \theta_c, \quad (2.65)$$

$$x' = t \sinh \theta_c + x \cosh \theta_c. \quad (2.66)$$

Temos que o resultado acima é equivalente a transformação de Lorentz da manipulação anterior [26]. Logo podemos representar uma transformação de Lorentz como uma constante unimodular pseudo-complexa. O resultado apresentado acima é alcançado em diversos trabalhos introduzindo um *tempo imaginário*  $t' = it$ . Na prática isso iguala o invariante  $x^2 - t^2$  da Relatividade Especial ao invariante euclidiano  $x^2 + y^2$ . O método introduz ainda as funções trigonométricas hiperbólicas através da sua equivalência com as funções trigonométricas no círculo avaliadas com ângulos imaginários. Esse processo de introduzir uma rotação no plano  $(x, it)$  por um ângulo imaginário  $i\alpha$  é essencialmente artificial, enquanto o desenvolvimento baseado em números pseudo-complexos leva a uma equivalência com as transformações de Lorentz como resultado de simetrias preservadas. Os números pseudo-complexos possuem simetria espaço-temporal, enquanto números complexos têm a simetria de duas variáveis espaciais representadas em um plano euclidiano [9]. Reforçando as ideias da seção finalizamos com o seguinte teorema:

**Teorema 1.** *A transformação de Lorentz é equivalente a uma "rotação hiperbólica".*

*Demonstração.* Reescrevendo a variável pseudo-complexa  $X$  na forma exponencial temos

$$X = t + Ix = \rho e^{I\theta}. \quad (2.67)$$

Aplicando em  $X$  uma transformação de Lorentz também representada na forma exponencial

$$X' = cX = \rho e^{I(\theta_c + \theta)}. \quad (2.68)$$

□

Da expressão acima concluímos que a transformação de Lorentz é equivalente a uma "rotação hiperbólica" da variável  $X$  por um ângulo  $\theta_c$ . Por consequência a invariância sob transformações de Lorentz pode ser expressa como a independência do ângulo hiperbólico  $\theta_c$  [9].

## 2.3 Cálculo No Formalismo Pseudo-Complexo

Como citado anteriormente generalizações de números reais e complexos não podem ocorrer sem perda de propriedades algébricas. Essas generalizações possuem acentuadas diferenças no que diz respeito a invariantes e nem sempre é possível estabelecer um cálculo diferencial e integral, requisito essencial para uma extensão algébrica da RG ser construída. Felizmente existe um teorema (que enunciaremos sem prova) que garante a existência do cálculo diferencial e integral no caso dos números pseudo-complexos [9, 34].

**Teorema 2.** *Para sistemas distributivos que possuem a unidade, o cálculo diferencial e integral existe se e somente se os sistemas são comutativos.*

Como os números pseudo-complexos atendem aos requisitos do Teorema 2 podemos enunciar a definição de derivada. Assumindo que as funções são suaves no que diz respeito a seus argumentos definimos a derivada pseudo-complexa avaliada em um ponto  $X_0$  como [3]

$$f'(X_0) = \left. \frac{Df}{DX} \right|_{X=X_0} = \lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - f(X_0)}{X - X_0}; \quad (X - X_0) \notin \mathbb{P}^0, \quad (2.69)$$

ou seja, ao escolher o caminho no qual o limite será avaliado temos que nos certificar que não cruzaremos o conjunto dos divisores de zero. Para números hipercomplexos podemos enunciar as condições generalizadas de Cauchy-Riemann, que caso sejam satisfeitas definem o análogo das funções holomórficas do caso complexo. Considere uma função hipercomplexa  $f = f_1 + e^i f_i$ , onde  $e^i$  denota os versores e o versor  $e^1 = 1$  foi omitido. As condições generalizadas de Cauchy-Riemann são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x^m} = e_m \frac{\partial f}{\partial x^1}. \quad (2.70)$$

Aplicando (2.70) ao caso pseudo-complexo, onde  $f = f_1 + I f_2$  temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + I \frac{\partial f_2}{\partial x^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x^1} + I \frac{\partial f_1}{\partial x^1}. \quad (2.71)$$

Analogamente ao caso complexo podemos enunciar as condições de Cauchy-Riemann para o caso pseudo-complexo

$$\frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1}. \quad (2.72)$$

É fácil demonstrar diferenciando (2.72) com relação a  $x_1$  ou  $x_2$  e igualando as derivadas parciais mistas que  $f_1$  e  $f_2$  satisfazem a equação da onda, da mesma forma que as respectivas equações no caso complexo satisfazem a equação de Laplace [9]. Utilizando (2.23) e (2.24) podemos reescrever

(2.72). Do lado esquerdo de (2.72) temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(f_+ + f_-)}{\partial x_+} \frac{\partial x_+}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_+ + f_-)}{\partial x_-} \frac{\partial x_-}{\partial x_1} &= \frac{\partial(f_+ - f_-)}{\partial x_+} \frac{\partial x_+}{\partial x_2} + \frac{\partial(f_+ - f_-)}{\partial x_-} \frac{\partial x_-}{\partial x_2} \implies \\
 \frac{\partial(f_+ + f_-)}{\partial x_+} + \frac{\partial(f_+ + f_-)}{\partial x_-} &= \frac{\partial(f_+ - f_-)}{\partial x_+} - \frac{\partial(f_+ - f_-)}{\partial x_-} \implies \\
 \frac{\partial f_-}{\partial x_+} + \frac{\partial f_+}{\partial x_-} &= -\frac{\partial f_-}{\partial x_+} - \frac{\partial f_+}{\partial x_-} \implies \\
 \frac{\partial f_+}{\partial x_-} &= -\frac{\partial f_-}{\partial x_+}.
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Da outra relação obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(f_+ + f_-)}{\partial x_+} \frac{\partial x_+}{\partial x_2} + \frac{\partial(f_+ + f_-)}{\partial x_-} \frac{\partial x_-}{\partial x_2} &= \frac{\partial(f_+ - f_-)}{\partial x_+} \frac{\partial x_+}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_+ - f_-)}{\partial x_-} \frac{\partial x_-}{\partial x_1} \implies \\
 \frac{\partial(f_+ + f_-)}{\partial x_+} - \frac{\partial(f_+ + f_-)}{\partial x_-} &= \frac{\partial(f_+ - f_-)}{\partial x_+} + \frac{\partial(f_+ - f_-)}{\partial x_-} \implies \\
 \frac{\partial f_-}{\partial x_+} - \frac{\partial f_+}{\partial x_-} &= -\frac{\partial f_-}{\partial x_+} + \frac{\partial f_+}{\partial x_-} \implies \\
 \frac{\partial f_+}{\partial x_-} &= \frac{\partial f_-}{\partial x_+}.
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Logo na base idempotente as condições pseudo complexas de Cauchy-Riemann são dadas por

$$\frac{\partial f_+(X)}{\partial x_-} = 0, \quad \frac{\partial f_-(X)}{\partial x_+} = 0. \tag{2.75}$$

Se tais equações são satisfeitas podemos garantir a unicidade da derivada. Agora podemos evidenciar a conveniência de adotar a base  $\sigma_{\pm}$ . Nela podemos escrever uma função pseudo-holomórfica como

$$f(X) = f_+(x_+)\sigma_+ + f_-(x_-)\sigma_-. \tag{2.76}$$

Observe de (2.49) que funções analíticas são automaticamente pseudo-holomórficas. As derivadas em termos das componentes por sua vez tornam-se [3, 9]

$$f'(X) = \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} + I \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} + I \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2}, \tag{2.77}$$

$$f'(X) = \frac{\partial f_+}{\partial x_+} \sigma_+ + \frac{\partial f_-}{\partial x_-} \sigma_-. \tag{2.78}$$

O resultado (2.76) é de extrema importância, a estrutura do produto de números pseudo-complexos é preservada no caso de funções pseudo-holomórficas, assim como nas suas derivadas. Como veremos no capítulo a seguir, essa característica simplifica a introdução das variáveis na RG-pc.

Por fim podemos introduzir a integração pseudo-complexa [3]. A integração é facilmente definida uma vez fornecida uma curva  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$  que estabelece o caminho ao longo do qual será realizada a integração no plano pseudo-complexo. A curva é dada por

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + I\gamma_2(t), \tag{2.79}$$

onde  $t \in (a, b)$  denota um parâmetro real. A integração pseudo-complexa é definida por [3]

$$\int_{\gamma} fDX, \quad (2.80)$$

onde o diferencial pseudo-complexo é dado por:

$$DX = dx_1 + Idx_2 = dx_+\sigma_+ + dx_-\sigma_-. \quad (2.81)$$

Valendo-se das propriedades multiplicativas anunciadas anteriormente obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} fDX &= \int_{\gamma} (f_1 + If_2)(dx_1 + Idx_2) \\ &= \int_{\gamma} (f_1dx_1 + f_2dx_2) + I(f_2dx_1 + f_1dx_2) \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\gamma} (f_+\sigma_+ + f_-\sigma_-)(dx_+\sigma_+ + dx_-\sigma_-) \\ &= \sigma_+ \int_{\gamma} (f_+dx_+) + \sigma_- \int_{\gamma} (f_-dx_-). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ou seja na integração também podemos manipular cada setor na base idempotente independentemente.

# A Relatividade Geral Pseudo-Complexa

## 3.1 Prelúdio

A gravidade é uma força universal, de maneira que apesar de partículas de massas diferentes presenciarem uma força gravitacional distinta todas adquirem uma mesma aceleração. Essa propriedade é única da gravidade e não se encontra nas demais interações fundamentais. Apesar de seus efeitos serem conhecidos desde a antiguidade, a primeira formalização bem sucedida da gravidade deve-se a Newton. Na teoria newtoniana a intensidade da força gravitacional entre dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  separados por uma distância  $r$  é dada por  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ . A gravitação newtoniana na realidade pode ser vista como uma teoria de campo tridimensional na qual o potencial gravitacional é descrito por um campo escalar  $\phi$  que obedece a equação  $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ , conhecida como equação de Poisson [35]. Essa equação descreve como a matéria (representada pela densidade de massa  $\rho$ ) está relacionada com o potencial gravitacional  $\phi$ . A gravitação newtoniana é uma ótima aproximação em experimentos feitos na Terra e descreve com boa precisão o nosso Sistema Solar. Contudo existem efeitos mensuráveis no nosso Sistema Solar que não encontram explicação na teoria newtoniana, dentre eles, um avanço no periélio da órbita de Mercúrio de 43 segundos de arco por século e o deslocamento gravitacional de linhas espectrais [36].

A teoria elaborada por Newton, por depender de uma ação a distância instantânea<sup>10</sup>, é incompatível com a Relatividade Especial. À generalização da Relatividade Especial válida na presença de campos gravitacionais damos o nome de Relatividade Geral. A suposição básica da teoria, como afirmou o físico Vladimir Fock, está na ideia de que o espaço ao redor de corpos massivos é não-euclidiano [36]. Na Relatividade Geral o potencial escalar newtoniano é substituído pelo tensor de métrica<sup>11</sup>  $\mathbf{g}$  e em coordenadas locais suas componentes  $g_{\mu\nu}$  são frequentemente denominadas poten-

<sup>10</sup> Na expressão da força gravitacional newtoniana temos que  $F$  representa a força entre dois corpos em um dado tempo e  $r$  denota a distância nesse mesmo instante de tempo. Na Relatividade Especial a afirmação *ao mesmo tempo* é desprovida de sentido absoluto.

ciais gravitacionais. A magnitude da força gravitacional é determinada através de certos coeficientes  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  obtidos a partir do tensor de métrica e suas derivadas. Da gravitação newtoniana sabemos que massa é uma fonte de gravidade, todavia de verificações experimentais da Relatividade Especial sabemos que todas as formas de energia são equivalentes a massa e contribuem como fontes de gravidade. Logo na RG o tensor de energia-momentum  $\mathbf{T}$  assume o papel da densidade de massa  $\rho$ .

No que segue adotaremos a assinatura  $(-+++)$  para a métrica [3, 37, 38]. No vácuo, a dinâmica na RG é definida por um funcional denominado *ação de Einstein-Hilbert*, que representa um invariante de variedades pseudo-Riemannianas e é dado por

$$S_{EH} = \int \mathcal{L}_G d^4x = \int \frac{1}{2} \sqrt{-g} \mathcal{R} d^4x, \quad (3.1)$$

onde  $g$  expressa o determinante da matriz cujas componentes são  $g_{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{L}_G$  representa a densidade lagrangeana,  $\mathcal{R}$  é o escalar de curvatura e  $\sqrt{-g} d^4x$  é o elemento de volume invariante. Do princípio variacional temos que [35, 37]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left( \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Logo as equações de campo no vácuo são dadas por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3)$$

Na presença de outros campos precisamos adicionar um termo  $S_M$  à ação que representa os demais campos que atuam como fontes, a saber

$$S = S_{EH} + S_M. \quad (3.4)$$

Aplicando novamente o princípio variacional temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left( \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (3.5)$$

Se o tensor de energia-momentum for definido como

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.6)$$

as equações de campo da Relatividade Geral são expressas por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

---

<sup>11</sup> As definições das principais grandezas geométricas utilizadas na Relatividade Geral podem ser encontradas no Apêndice A.

ou alternativamente usando as componentes do tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Observe que a RG descreve as propriedades da matéria através de um tensor de energia-momentum, todavia a teoria não nos fornece as possíveis formas que o tensor assume para diferentes tipos de matéria. As estruturas utilizadas para o tensor de energia-momentum são oriundas de outros ramos da física, de tal maneira que não podemos considerar a RG como uma teoria fechada, faceta que foi considerada por Einstein como um dos defeitos da RG [39].

As equações de campo podem ser justificadas e verificadas experimentalmente, porém não são derivadas de algum princípio fundamental [21]. Na RG temos que as equações de campo mostram como a métrica interage com energia e momentum, nos transmitindo uma mensagem nova com relação à gravitação newtoniana. As equações de Einstein expressam como a geometria do universo é determinada através da distribuição de matéria. É digno de menção o fato de que apesar da Relatividade Geral estar sedimentada em grandezas associadas com a geometria, e nesse sentido podemos dizer que se trata de uma teoria *geometrizada*, simplesmente seria um equívoco concluir que a gravitação se reduziu a geometria. A gravitação de forma alguma se reduziu a geometria e sim a geometria que se tornou uma expressão do campo gravitacional [40]. Apesar da generalidade e simplicidade das equações (3.8) elas são delicadas de serem manipuladas devido ao seu caráter não linear e da interação mútua entre espaço-tempo e matéria. Existem poucos casos nos quais podemos encontrar soluções fechadas para as equações de Einstein e com frequência é necessário recorrer a soluções numéricas.

Logo após a RG ser proposta, Einstein tentou aplicar a teoria na descrição do Universo guiado pelo princípio de um universo estático. No entanto para a versão original das equações de campo (3.8) não foram encontradas soluções estáticas estáveis. A insatisfação de Einstein com a predição de um universo dinâmico pela forma original das equações de campo o levou a introduzir um termo nas equações de campo com o objetivo de manter sua forte convicção em um universo estático. Nesse caso as equações assumem a forma

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

Essa forma das equações de campo pode ser obtida adicionando a constante  $2\lambda$  ao escalar de Ricci em (3.1). O termo  $\lambda$  é conhecido hoje pelo nome de *constante cosmológica* e desde seu nascimento gera um intenso debate entre os físicos. O termo é matematicamente motivado pois uma combinação linear do tensor de Einstein e do tensor de métrica é a relação mais geral puramente geométrica que é simétrica e possui divergência covariante nula. Logo na ausência de matéria  $\lambda$  deve ser constante pois as identidades de Bianchi (Apêndice A) garantem o anulamento da divergência covariante do tensor de Einstein [41]. Se a constante não é nula, no limite de campos fracos a teoria newtoniana não é obtida, todavia se  $\lambda$  for suficientemente pequeno esses desvios não seriam percebidos [37].

Posteriormente Einstein e de Sitter publicaram um artigo no qual foi sugerido que a introdução da constante cosmológica não era necessária, visto que os dados observacionais apoiavam a ideia de um universo dinâmico. Em 1933, McVittie argumentou contra essa visão sugerida por Einstein e de Sitter que tratava a constante cosmológica como um mero parâmetro livre indiferente do ponto de vista físico. Ele defendeu que haviam imposições físicas advindas das observações da expansão do Universo que nos indicam a existência de uma constante cosmológica positiva [42]. Essa ideia se intensifica em 1998 com observações da expansão do Universo feitas por dois grupos e ambos concluindo que a expansão era compatível com uma constante cosmológica não nula e positiva. Como mencionado no Capítulo 1, os dados indicaram ainda que a expansão do Universo ocorre de forma acelerada e ao elemento responsável por essa expansão damos o nome de energia escura. A maioria dos físicos hoje acredita que essa energia cósmica seja uma manifestação da constante cosmológica.

Caso os princípios da Mecânica Quântica se apliquem ao campo gravitacional somos levados a acreditar que a Relatividade Geral é, na melhor das hipóteses, uma aproximação de uma teoria gravitacional mais completa, talvez semelhantemente ao eletromagnetismo de Maxwell que é uma aproximação da eletrodinâmica quântica [37]. Uma constante cosmológica não nula pode representar o efeito gravitacional da energia do vácuo. Como na Relatividade Geral temos que todas formas de energia gravitam tal efeito deveria ser levado em conta nas equações de campo [43]. Em Teoria Quântica de Campos temos que, devido à invariância de Lorentz, o tensor de energia momentum do vácuo possui a forma  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle \rho_{vac} \rangle g_{\mu\nu}$ , logo o termo  $\lambda g_{\mu\nu}$  pode ser interpretado como um fluido perfeito com  $\lambda = \rho_{vac}$  [41, 42]. Contudo algo certamente está faltando nessa versão da história porque o valor renormalizado da energia do vácuo é muitas ordens de grandeza superior ao valor observado em cosmologia. A aparente impossibilidade de conciliar esses valores é conhecida como o *problema da constante cosmológica*. Essa falha sem dúvida abre espaço para atacar o problema utilizando outras abordagens. Poderíamos até mesmo questionar a realidade física da energia do vácuo caso não existissem fortes evidências experimentais a favor da existência dessa forma de energia [43].

Estudos em física de partículas e Teoria Quântica de Campos, juntamente com observações em cosmologia, motivaram a possibilidade de um  $\lambda$  dinâmico. Diferentes abordagens foram propostas, todavia independentemente do método devemos ter a presença de outra fonte de energia e momentum diferente de  $\lambda g_{\mu\nu}$ , caso contrário temos  $\lambda$  constante como argumentado acima [41]. Uma forte complicação reside no fato que checar os efeitos de uma constante cosmológica fora do contexto da cosmologia é extremamente difícil.

Poderíamos talvez buscar por equações de campo diferentes das propostas por Einstein. O problema é que propor equações de campo diferentes de (3.8) e (3.9) não é tarefa fácil, pois certos resultados como o teorema de Lovelock impõem sérias restrições em possíveis modificações [44, 45]. Se procuramos por uma equação tensorial na forma  $\mathbf{G} = \mathbf{T}$ , onde as componentes  $G_{\mu\nu}$  são compostas pelas componentes do tensor de métrica, assim como por suas primeiras e segundas



derivadas (assegurando uma equação diferencial parcial de segunda ordem que generaliza a equação de Poisson) e se  $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ , ou seja,  $\mathbf{G}$  possui divergência nula, as equações de campo precisam ter a forma

$$A \left( \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R} \right) + B g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes.

## 3.2 A Extensão Pseudo-Complexa da Relatividade Geral

Na RG-pc exploramos a possibilidade da gravitação assumir sua manifestação mais natural quando construída adotando-se números pseudo-complexos, que são intrinsecamente não euclidianos. Como vimos no capítulo anterior, quando estamos operando na base idempotente podemos efetuar os cálculos independentemente para cada componente. Decorre desse fato que as entidades matemáticas necessárias para construir a extensão algébrica da RG não sofrerão grandes alterações na sua estrutura e sua introdução é simples e direta, todavia mesmo assim surge a possibilidade de uma teoria com resultados próprios e conceitualmente distinta. Essa faceta sem dúvida pode ser considerada uma vantagem porque frequentemente teorias modificadas da Relatividade Geral infligem agressivas mudanças no formalismo original.

A diferença mais acentuada dos números pseudo-complexos com relação aos reais sob os quais a RG é tradicionalmente construída é que no primeiro conjunto temos a presença dos chamados divisores de zero, que atuam como zeros do sistema [9]. Essa propriedade do sistema é incorporada em um princípio variacional modificado que provê um termo que será identificado como uma correção de ordem quântica, sendo interpretado como a contribuição média das flutuações no vácuo.

O primeiro passo na construção da Relatividade Geral pseudo-complexa é promover as variáveis reais da Relatividade Geral a variáveis pseudo-complexas<sup>12</sup>

$$x^\mu \rightarrow X^\mu = X_+^\mu \sigma_+ + X_-^\mu \sigma_-. \quad (3.11)$$

A variedade pseudo-complexa correspondente pode ser construída a partir de um espaço produto de duas variedades reais  $W_+ \otimes W_-$ , onde  $W_+$  é a variedade que descreve a componente  $\sigma_+$  (e o mesmo obviamente vale para  $W_-$  e  $\sigma_-$ ) [3]. Observe que como os números pseudo-complexos são bidimensionais temos efetivamente um espaço octadimensional. O tensor de métrica  $\mathbf{g}$  mantém no formalismo pseudo-complexo seu papel como campo dinâmico da teoria. Suas componentes são dadas por

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^+(X_+) \sigma_+ + g_{\mu\nu}^-(X_-) \sigma_-. \quad (3.12)$$

<sup>12</sup> Em [3] é introduzido na componente pseudo-imaginária um parâmetro associado a um comprimento mínimo. Isso possibilita tratar coordenadas e velocidades de maneira semelhante, faceta que lembra a reciprocidade proposta por Max Born [3, 4, 5]. Apesar de ser um caminho extremamente interessante, o comprimento mínimo não será relevante no presente trabalho e portanto não aparecerá explicitamente.

Como observado em [3] note que  $g_{\mu\nu}^+$  e  $g_{\mu\nu}^-$  são diferentes mesmo que possuam dependências funcionais idênticas, pois os argumentos  $X_+$  e  $X_-$  são diferentes. Assumiremos um tensor de métrica simétrico<sup>13</sup> ( $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ) e que ambas as componentes possuem a mesma dependência funcional, isto é,  $g_{\mu\nu}^+(X^+) = g_{\mu\nu}(X^+)$  e  $g_{\mu\nu}^-(X^-) = g_{\mu\nu}(X^-)$ . Impomos ainda que a métrica é descrita por funções pseudo-holomórficas, ou seja, deve satisfazer as relações generalizadas de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}^1}{\partial X_1^\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}^2}{\partial X_2^\lambda}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}^1}{\partial X_2^\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}^2}{\partial X_1^\lambda}. \quad (3.14)$$

As componentes contravariantes e covariantes satisfazem a seguinte relação:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} &= \left( g_{\mu\nu}^+ \sigma_+ + g_{\mu\nu}^- \sigma_- \right) \left( g_+^{\nu\lambda} \sigma_+ + g_-^{\nu\lambda} \sigma_- \right) \\ &= g_{\mu\nu}^+ g_+^{\nu\lambda} \sigma_+ + g_{\mu\nu}^- g_-^{\nu\lambda} \sigma_- \\ &= \delta_\mu^\lambda \sigma_+ + \delta_\mu^\lambda \sigma_- = \delta_\mu^\lambda (\sigma_+ + \sigma_-) = \delta_\mu^\lambda. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Lembrando que a delta de Kronecker  $\delta_\mu^\lambda$  é definida em espaços curvos da mesma forma que no caso plano, a saber:

$$\delta_\mu^\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu \\ 0, & \lambda \neq \mu. \end{cases} \quad (3.16)$$

À seguinte forma quadrática associada à métrica damos o nome de elemento de linha [3, 38]:

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= g_{\mu\nu}(X, \mathbb{A}) DX^\mu DX^\nu \\ &= g_{\mu\nu}^+(X_+, \mathbb{A}_+) dX_+^\mu dX_+^\nu \sigma_+ + g_{\mu\nu}^-(X_-, \mathbb{A}_-) dX_-^\mu dX_-^\nu \sigma_- \\ &= d\omega_+^2 \sigma_+ + d\omega_-^2 \sigma_-, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\mathbb{A}$  representa os parâmetros presentes na teoria. O elemento de linha na base  $(1, I)$  pode ser obtido substituindo as relações entre as componentes nas bases  $(1, I)$  e  $(\sigma_+, \sigma_-)$  na expressão acima:

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= g_{\mu\nu}^+ dX_+^\mu dX_+^\nu \sigma_+ + g_{\mu\nu}^- dX_-^\mu dX_-^\nu \sigma_- \\ &= \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu}^1 + g_{\mu\nu}^2 \right) (dX_1^\mu + dX_2^\mu) (dX_1^\nu + dX_2^\nu) (1 + I) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu}^1 - g_{\mu\nu}^2 \right) (dX_1^\mu - dX_2^\mu) (dX_1^\nu - dX_2^\nu) (1 - I) \\ &= \left( g_{\mu\nu}^1 dX_1^\mu dX_1^\nu + g_{\mu\nu}^1 dX_2^\mu dX_2^\nu + g_{\mu\nu}^2 dX_1^\mu dX_2^\nu + g_{\mu\nu}^2 dX_2^\mu dX_1^\nu \right) \\ &\quad + I \left( g_{\mu\nu}^1 dX_1^\mu dX_2^\nu + g_{\mu\nu}^1 dX_2^\mu dX_1^\nu + g_{\mu\nu}^2 dX_1^\mu dX_1^\nu + g_{\mu\nu}^2 dX_2^\mu dX_2^\nu \right) \\ &= d\omega_1^2 + I d\omega_2^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

<sup>13</sup> Uma formulação onde o tensor de métrica não é simétrico pode ser consultada em [46, 47].

Uma imposição desejável de natureza física é dada pela condição  $d\omega_2^2 = 0$ , assim o movimento de uma partícula física é descrito por um elemento de linha real. O anulamento da componente pseudo-imaginária implica em

$$g_{\mu\nu}^1 dX_1^\mu dX_2^\nu + g_{\mu\nu}^1 dX_2^\mu dX_1^\nu + g_{\mu\nu}^2 dX_1^\mu dX_1^\nu + g_{\mu\nu}^2 dX_2^\mu dX_2^\nu = 0, \quad (3.19)$$

porém observe que

$$\begin{aligned} d\omega_+^2 - d\omega_-^2 &= g_{\mu\nu}^+ dX_+^\mu dX_+^\nu - g_{\mu\nu}^- dX_-^\mu dX_-^\nu \\ &= \left( g_{\mu\nu}^1 + g_{\mu\nu}^2 \right) (dX_1^\mu + dX_2^\mu) (dX_1^\nu + dX_2^\nu) \\ &\quad - \left( g_{\mu\nu}^1 - g_{\mu\nu}^2 \right) (dX_1^\mu - dX_2^\mu) (dX_1^\nu - dX_2^\nu) \\ &= 2 \left( g_{\mu\nu}^1 dX_1^\mu dX_2^\nu + g_{\mu\nu}^1 dX_2^\mu dX_1^\nu + g_{\mu\nu}^2 dX_1^\mu dX_1^\nu + g_{\mu\nu}^2 dX_2^\mu dX_2^\nu \right) \\ &= 2d\omega_2^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Logo podemos expressar a condição do elemento pseudo-imaginário do elemento de linha ser nulo como

$$g_{\mu\nu}^+ dX_+^\mu dX_+^\nu - g_{\mu\nu}^- dX_-^\mu dX_-^\nu = 0. \quad (3.21)$$

O que está precisamente de acordo com as relações entre as componentes expressas em (2.23) e (2.24).

O deslocamento paralelo de um vetor pseudo-complexo de componentes  $W^\mu$  é dado por [3]

$$\begin{aligned} DW^\mu &= -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu DX^\nu W^\lambda \\ &= -\Gamma_{\nu\lambda}^{+\mu} dX_+^\nu W_+^\lambda \sigma_+ - \Gamma_{\nu\lambda}^{-\mu} dX_-^\nu W_-^\lambda \sigma_- \\ &= dW_+^\mu \sigma_+ + dW_-^\mu \sigma_-, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $DX^\nu$  se refere a mudança na coordenada  $X^\nu$  e  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  são os coeficientes da conexão. No decorrer do trabalho desconsideraremos torsão, ou seja é válida a relação  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ , o que caracteriza a *conexão de Levi-Civita* que é a conexão tradicionalmente adotada na RG [3, 48, 49]. Nesse caso aos coeficientes da conexão damos o nome de símbolos de Christoffel de segundo tipo. Os símbolos de Christoffel de primeiro tipo são dados por

$$\Gamma_{\kappa\mu\nu} = [\nu\mu, \kappa] = \frac{1}{2} \left( \frac{Dg_{\mu\kappa}}{DX^\nu} + \frac{Dg_{\nu\kappa}}{DX^\mu} - \frac{Dg_{\mu\nu}}{DX^\kappa} \right). \quad (3.23)$$

Os símbolos de Christoffel de segundo tipo serão denotados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\mu \end{matrix} \right\}_+ \sigma_+ + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\mu \end{matrix} \right\}_- \sigma_-. \quad (3.24)$$

Os símbolos de Christoffel de segundo tipo podem ser expressos em termos dos símbolos de Christoffel de primeiro tipo através de

$$\Gamma^{\pm\lambda}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\mu \end{array} \right\}_{\pm} = g_{\pm}^{\lambda\kappa} [\nu\mu, \kappa]_{\pm}. \quad (3.25)$$

A derivada covariante de um vetor contravariante é dada por [3, 38]

$$\nabla_{\nu} W^{\mu} = \frac{DW^{\mu}}{DX^{\nu}} + \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\lambda \end{array} \right\} W^{\lambda} \quad (3.26)$$

$$= \left( \frac{\partial W^{\mu}}{\partial X^{\nu}_{+}} + \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\lambda \end{array} \right\}_{+} W^{\lambda} \right) \sigma_{+} + \left( \frac{\partial W^{\mu}}{\partial X^{\nu}_{-}} + \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\lambda \end{array} \right\}_{-} W^{\lambda} \right) \sigma_{-}. \quad (3.27)$$

A derivada covariante de um vetor covariante por sua vez é dada por

$$\nabla_{\nu} Q_{\mu} = \frac{DQ_{\mu}}{DX^{\nu}} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\mu \end{array} \right\} Q_{\lambda} \quad (3.28)$$

$$= \left( \frac{\partial Q_{\mu}}{\partial X^{\nu}_{+}} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\mu \end{array} \right\}_{+} Q_{\lambda} \right) \sigma_{+} + \left( \frac{\partial Q_{\mu}}{\partial X^{\nu}_{-}} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\mu \end{array} \right\}_{-} Q_{\lambda} \right) \sigma_{-}. \quad (3.29)$$

É importante verificar que na RG-pc a compatibilidade da derivada covariante é mantida, ou seja,  $\nabla \mathbf{g} = 0$  [3, 38]. Primeiramente de (3.23) note que

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}^{+}}{\partial X^{\rho}_{+}} \sigma_{+} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}^{-}}{\partial X^{\rho}_{-}} \sigma_{-} = \left( \Gamma_{\alpha\beta\rho}^{+} + \Gamma_{\beta\alpha\rho}^{+} \right) \sigma_{+} + \left( \Gamma_{\alpha\beta\rho}^{-} + \Gamma_{\beta\alpha\rho}^{-} \right) \sigma_{-}, \quad (3.30)$$

logo:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} &= \nabla_{\alpha}^{+} g_{\mu\nu}^{+} \sigma_{+} + \nabla_{\alpha}^{-} g_{\mu\nu}^{-} \sigma_{-} \\ &= \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}^{+}}{\partial X^{\alpha}_{+}} - \Gamma_{+\alpha\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu}^{+} - \Gamma_{+\alpha\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda}^{+} \right) \sigma_{+} + \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}^{-}}{\partial X^{\alpha}_{-}} - \Gamma_{-\alpha\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu}^{-} - \Gamma_{-\alpha\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda}^{-} \right) \sigma_{-} \\ &= \left( \Gamma_{\mu\nu\alpha}^{+} + \Gamma_{\nu\mu\alpha}^{+} - \Gamma_{\nu\alpha\mu}^{+} - \Gamma_{\mu\alpha\nu}^{+} \right) \sigma_{+} + \left( \Gamma_{\mu\nu\alpha}^{-} + \Gamma_{\nu\mu\alpha}^{-} - \Gamma_{\nu\alpha\mu}^{-} - \Gamma_{\mu\alpha\nu}^{-} \right) \sigma_{-} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A curvatura é quantificada, assim como na RG, pelo tensor de curvatura de Riemann que pode ser expresso por

$$\mathcal{R}^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = \left( \frac{\partial (\Gamma^{+})^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial X^{\mu}_{+}} - \frac{\partial (\Gamma^{+})^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial X^{\nu}_{+}} + (\Gamma^{+})^{\kappa}{}_{\mu\eta} (\Gamma^{+})^{\eta}{}_{\nu\lambda} - (\Gamma^{+})^{\kappa}{}_{\nu\eta} (\Gamma^{+})^{\eta}{}_{\mu\lambda} \right) \sigma_{+} \quad (3.32)$$

$$+ \left( \frac{\partial (\Gamma^{-})^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial X^{\mu}_{-}} - \frac{\partial (\Gamma^{-})^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial X^{\nu}_{-}} + (\Gamma^{-})^{\kappa}{}_{\mu\eta} (\Gamma^{-})^{\eta}{}_{\nu\lambda} - (\Gamma^{-})^{\kappa}{}_{\nu\eta} (\Gamma^{-})^{\eta}{}_{\mu\lambda} \right) \sigma_{-} \quad (3.33)$$

$$= (\mathcal{R}^{+})^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} \sigma_{+} + (\mathcal{R}^{-})^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} \sigma_{-}. \quad (3.34)$$

$$(3.35)$$

O anulamento do tensor de curvatura é uma condição necessária e suficiente para uma região de uma variedade ser plana. Um tensor de curvatura não nulo implica, por sua vez, em uma presença intrínseca de gravidade.

Através de contrações do tensor de curvatura de Riemann obtemos o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, a saber

$$\mathcal{R}_{\lambda\nu} = \mathcal{R}^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu} = (\mathcal{R}^+)_{\lambda\nu} \sigma_+ + (\mathcal{R}^-)_{\lambda\nu} \sigma_-, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{R} = g_+^{\lambda\nu} (\mathcal{R}^+)_{\lambda\nu} \sigma_+ + g_-^{\lambda\nu} (\mathcal{R}^-)_{\lambda\nu} \sigma_- = \mathcal{R}^+ \sigma_+ + \mathcal{R}^- \sigma_-. \quad (3.37)$$

A partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura podemos definir o tensor de Einstein pseudo-complexo cujas componentes são dadas por

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \\ &= (\mathcal{R}^+)_{\mu\nu} \sigma_+ + (\mathcal{R}^-)_{\mu\nu} \sigma_- - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu}^+ \sigma_+ + g_{\mu\nu}^- \sigma_-) (\mathcal{R}^+ \sigma_+ + \mathcal{R}^- \sigma_-) \\ &= (G^+)_{\mu\nu} \sigma_+ + (G^-)_{\mu\nu} \sigma_-. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esses resultados sem dúvida evidenciam as vantagens que decorrem dos números pseudo-complexos possuírem uma base cujos membros atuam como operadores projeção. Na próxima seção nos voltamos à tarefa de obter as equações de campo da RG-pc.

### 3.3 O Princípio Variacional Modificado e Equações de Campo

Em 1744 Pierre-Louis Moreau de Maupertuis enunciou pela primeira vez o princípio de mínima ação, princípio que tem sido um poderoso aliado na compreensão da natureza e permeia diversas teorias na física [50]. A mensagem por trás do princípio refletia tamanha sabedoria na opinião de Maupertuis, que o levou a associá-lo com um ser supremo. Na Relatividade Geral o princípio assume um papel de destaque. Primeiramente o Princípio da Relatividade requer que as leis da natureza sejam expressadas de maneira independente de qualquer sistema de referências especial. O cálculo variacional automaticamente satisfaz esse ponto pois o mínimo de um escalar é independente das coordenadas nas quais ele é medido. O princípio variacional estabelece ainda um modo consistente de obter as equações de campo visto que a geometria diferencial de Riemann nos fornece invariantes que podem ser tomados como ação fundamental [51]. Outro ponto a ser observado é que diferentemente da formulação newtoniana, o método variacional é compatível com a noção moderna de campo.

Nosso objetivo no que segue é apresentar uma versão modificada do princípio variacional motivada pelas propriedades dos números pseudo-complexos [3, 52]. Partindo de uma ação  $S$ ,

$$S = \int \mathcal{L} D^4 X, \quad (3.39)$$

tomando a variação da ação e igualando a zero temos como princípio variacional

$$\delta S = \delta S_+ \sigma_+ + \delta S_- \sigma_- = 0. \quad (3.40)$$

Como as componentes claramente atuam de maneira independente somos levados ao fato que as componentes devem ser independentemente nulas

$$\delta S_+ \sigma_+ = 0, \quad (3.41)$$

$$\delta S_- \sigma_- = 0. \quad (3.42)$$

Nesse caso temos que cada setor da base decomposta nos fornece uma cópia da Relatividade Geral e nada de novo é obtido. Contudo como estamos realizando uma extensão algébrica na qual os elementos formam um anel comutativo com a presença de um conjunto de zeros generalizados, um princípio variacional modificado torna-se possível. Nesse contexto em [52] foi proposto modificar o princípio variacional para

$$\delta S = \delta S_+ \sigma_+ + \delta S_- \sigma_- \in \text{divisores de zero}. \quad (3.43)$$

O princípio variacional modificado nos oferece uma contribuição extra relacionada aos divisores de zero. Com o intuito de melhor justificar esse princípio vamos mostrar que ele é compatível com a solução de subespaços não equivalentes frente a imposição que o termo pseudo-imaginário do elemento de linha,  $d\omega_2^2$  é nulo. Lembrando de (3.21) que esse requerimento pode ser expresso através da seguinte equação

$$g_{\mu\nu}^+ dX_+^\mu dX_+^\nu - g_{\mu\nu}^- dX_-^\mu dX_-^\nu = 0. \quad (3.44)$$

Essa equação de vínculo pode ser alternativamente escrita em termos de  $U_\pm^\mu = \frac{dX_\pm^\mu}{d\tau_\pm}$ , onde  $d\tau_\pm = \sqrt{-g_{\mu\nu}^\pm dX_\pm^\mu dX_\pm^\nu}$ . A variável  $\tau$  é denominada tempo próprio. Reescrevendo (3.44)

$$g_{\mu\nu}^+ U_+^\mu U_+^\nu d\tau_+ d\tau_+ - g_{\mu\nu}^- U_-^\mu U_-^\nu d\tau_- d\tau_- = 0. \quad (3.45)$$

Contudo da equação (3.44) juntamente com a definição de  $d\tau_\pm$  temos que  $d\tau_+ = d\tau_-$  logo a expressão acima pode ser reduzida a

$$g_{\mu\nu}^+ U_+^\mu U_+^\nu - g_{\mu\nu}^- U_-^\mu U_-^\nu = 0. \quad (3.46)$$

A densidade lagrangeana para o campo gravitacional é dada por  $\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}\mathcal{R}$  [35, 37], portanto nesse caso o princípio variacional nos leva a

$$\delta S = \delta \int D^4 X \sqrt{-g} \mathcal{R} = 0. \quad (3.47)$$

Como no formalismo pseudo-complexo temos

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{\delta S_+}{\delta g_{\mu\nu}^+} \delta g_{\mu\nu}^+ \sigma_+ + \frac{\delta S_-}{\delta g_{\mu\nu}^-} \delta g_{\mu\nu}^- \sigma_-, \quad (3.48)$$

Se aplicarmos variações independentes para cada setor da base decomposta obtemos

$$\int \left[ \mathcal{R}_+^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_+^{\mu\nu} \mathcal{R}_+ \right] \sigma_+ \delta g_{\mu\nu}^+ ds + \int \left[ \mathcal{R}_-^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_-^{\mu\nu} \mathcal{R}_- \right] \sigma_- \delta g_{\mu\nu}^- ds = 0. \quad (3.49)$$

Observe que nas variações acima não estamos igualando a variação da ação a um divisor de zero pois o objetivo aqui é justamente corroborar a possibilidade de seu surgimento. Note ainda que não podemos igualar a zero as relações entre colchetes em (3.49) devido a equação de vínculo (3.46). Nesse caso é útil aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange, ou seja, a densidade lagrangeana que será utilizada é

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_G + \lambda v, \quad (3.50)$$

onde representamos por  $v$  o vínculo  $v = g_{\mu\nu}^+ U_+^\mu U_+^\nu - g_{\mu\nu}^- U_-^\mu U_-^\nu = 0$  e  $\lambda$  é um fator indeterminado. Para estabelecer a variação da ação considere primeiramente a variação do vínculo dada por

$$\delta v = \delta v_+ \sigma_+ + \delta v_- \sigma_- \quad (3.51)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial g_{\mu\nu}^+} \delta g_{\mu\nu}^+ \sigma_+ + \frac{\partial v}{\partial g_{\mu\nu}^-} \delta g_{\mu\nu}^- \sigma_- \quad (3.52)$$

$$= U_+^\mu U_+^\nu \delta g_{\mu\nu}^+ \sigma_+ - U_-^\mu U_-^\nu \delta g_{\mu\nu}^- \sigma_- = 0. \quad (3.53)$$

Observe que consideramos  $U_\pm^\mu$  como componentes arbitrárias fixas de um vetor no espaço tangente, portanto não são consideradas variáveis a serem variadas [3]. Segue que [53]:

$$\int \left( \mathcal{R}_+^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_+^{\mu\nu} \mathcal{R}_+ \right) \sigma_+ \delta g_{\mu\nu}^+ ds + \int \left( \mathcal{R}_-^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_-^{\mu\nu} \mathcal{R}_- \right) \sigma_- \delta g_{\mu\nu}^- ds \quad (3.54)$$

$$+ \int \lambda \left( U_+^\mu U_+^\nu \delta g_{\mu\nu}^+ \sigma_+ - U_-^\mu U_-^\nu \delta g_{\mu\nu}^- \sigma_- \right) ds = 0. \quad (3.55)$$

Observe que a adição da segunda integral na expressão acima não é trivial porque apesar de termos somado um zero, uma soma foi acrescentada na qual os termos individuais não são nulos [51]. Segue que:

$$\int \left( \mathcal{R}_+^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_+^{\mu\nu} \mathcal{R}_+ + \lambda (U_+^\mu U_+^\nu) \right) \sigma_+ \delta g_{\mu\nu}^+ ds \quad (3.56)$$

$$+ \int \left( \mathcal{R}_-^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_-^{\mu\nu} \mathcal{R}_- - \lambda (U_-^\mu U_-^\nu) \right) \sigma_- \delta g_{\mu\nu}^- ds = 0. \quad (3.57)$$

Agora escolhemos  $\lambda \in \mathbb{P}$  de maneira que

$$\mathcal{R}_+^{\mu\nu} \sigma_+ - \frac{1}{2} g_+^{\mu\nu} \mathcal{R}_+ \sigma_+ + \lambda (U_+^\mu U_+^\nu) \sigma_+ = 0. \quad (3.58)$$

É fácil verificar que a escolha de  $\lambda$  que fornece subespaços não equivalentes é  $\lambda \in \mathbb{P}^0$ . Escolhemos  $\lambda = \lambda_- \sigma_-$  (poderia ter sido feito analogamente escolhendo  $\lambda = \lambda_+ \sigma_+$ ) e da equação acima decorre que

$$G_+^{\mu\nu} \sigma_+ = 0. \quad (3.59)$$

Esse resultado mostra que um dos subespaços é equivalente à Relatividade Geral. Aplicando o  $\lambda$  na outra relação obtemos

$$G_-^{\mu\nu} \sigma_- = \lambda_- (U_-^\mu U_-^\nu) \sigma_-. \quad (3.60)$$

O multiplicador de Lagrange nos fornece grande liberdade [3]. Logo, devido às características das equações de campo de Einstein, almejamos através de sua escolha mapear esse termo extra a um tensor de energia-momentum. Observe, por exemplo, que escolhendo

$$\lambda_- = \varepsilon + p - 4p, \quad (3.61)$$

implica em:

$$\lambda_- (U_-^\mu U_-^\nu) \sigma_- = [(\varepsilon + p) U_-^\mu U_-^\nu - 4p U_-^\mu U_-^\nu] \sigma_-. \quad (3.62)$$

A relação acima pode ser reescrita como

$$\Lambda_-^{\mu\nu} \sigma_- = [(\varepsilon + p) U_-^\mu U_-^\nu + p g_-^{\mu\nu}] \sigma_-. \quad (3.63)$$

Observe que a expressão acima define um fluido perfeito<sup>14</sup> caso  $g_{\mu\nu}^- U_-^\mu U_-^\nu = -1$ , relação que é claramente satisfeita tendo em mente a expressão para o tempo próprio. As equações de campo da RG-pc no vácuo são dadas por:

$$G_-^{\mu\nu} = \Lambda_-^{\mu\nu}; \quad G_+^{\mu\nu} = 0. \quad (3.64)$$

Note que  $\Lambda$  está presente mesmo na ausência de matéria, logo se trata de uma contribuição associada com a própria natureza do espaço-tempo. Esse termo extra será o responsável por carregar o caráter repulsivo da teoria sendo relacionado às flutuações do vácuo. Uma discussão de como esse tipo de efeito emerge pode ser encontrado em [10, 12]. Na presença de matéria temos que (3.64) torna-se:

$$G_+^{\mu\nu} = T_+^{\mu\nu}; \quad G_-^{\mu\nu} = T_-^{\mu\nu} + \Lambda_-^{\mu\nu}. \quad (3.65)$$

Para obter as soluções na RG-pc resolvemos cada setor da base decomposta separadamente, todavia como o setor  $\sigma_+$  exhibe a mesma estrutura da RG suas soluções são idênticas às do formalismo original. O setor  $\sigma_-$  é o responsável pelas diferenças com relação à RG, onde as soluções incluem o tensor extra de energia-momentum. A interpretação das equações de campo na RG-pc nos oferece uma mensagem nova com relação à RG, a ideia de que a massa além de curvar o espaço-tempo também é capaz de alterar as propriedades do vácuo, que por sua vez responde a interação adicionando curvatura ao sistema. Em qualquer proposta de modificação da RG que modifica as equações de campo é interessante refazer as soluções conhecidas, dessa forma podemos procurar por diferenças e eventuais inconsistências. As soluções de Schwarzschild, Kerr e Reissner-Nordström no formalismo da RG-pc são detalhadamente desenvolvidas em [3].

<sup>14</sup> Um fluido perfeito é um meio no qual a pressão é isotrópica no referencial de repouso de cada elemento do fluido e tensões de cisalhamento assim como transporte de calor estão ausentes [54]. É caracterizado por um tensor de energia-momentum de componentes  $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$ .



### 3.4 O Pseudo-Grupo de Lorentz

Semelhantemente à Mecânica Quântica, onde apesar de os cálculos serem realizados em um espaço complexo sempre é preciso retornar a observáveis reais, na RG-pc após as manipulações em um espaço pseudo-complexo devemos realizar uma projeção no espaço-tempo físico quadridimensional. Um procedimento a ser adotado para retornar ao espaço-tempo físico pode ser ilustrado a partir do grupo de Lorentz-pc [3]. Uma transformação de Lorentz finita pseudo-complexa assume a forma

$$e^{-i\omega^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mu\nu}} = e^{-i\omega_+^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mu\nu}^+}\sigma_+ + e^{-i\omega_-^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mu\nu}^-}\sigma_-, \quad (3.66)$$

onde  $\omega^{\mu\nu} = \omega_+^{\mu\nu}\sigma_+ + \omega_-^{\mu\nu}\sigma_-$  são os parâmetros pseudo-complexos da transformação e  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$  são os geradores do grupo de Lorentz pseudo-complexo. Os geradores por sua vez podem ser expressos através de operadores antissimétricos

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu \quad (3.67)$$

$$= \left(X_\mu^+ P_\nu^+ - X_\nu^+ P_\mu^+\right)\sigma_+ + \left(X_\mu^- P_\nu^- - X_\nu^- P_\mu^-\right)\sigma_- \quad (3.68)$$

$$= \mathcal{L}_{\mu\nu}^+\sigma_+ + \mathcal{L}_{\mu\nu}^-\sigma_-, \quad (3.69)$$

onde  $X_\mu$  e  $P_\nu$  são as variáveis pseudo-complexas de posição e momentum, respectivamente. Note que  $\mathcal{L}_{\mu\nu}^+$  e  $\mathcal{L}_{\mu\nu}^-$  representam os geradores do grupo de Lorentz presente em cada setor. Devido a comutatividade das componentes temos que a estrutura do grupo é dada por [3]:

$$SO_{\mathcal{P}}(3, 1) = SO_+(3, 1) \otimes SO_-(3, 1) \supset SO(3, 1). \quad (3.70)$$

Logo o grupo pseudo-complexo de Lorentz consiste no produto direto de dois grupos de Lorentz. A projeção ao grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$  é obtida efetuando

$$e^{-i\omega^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mu\nu}} \rightarrow e^{-i\omega_1^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mu\nu}^1}. \quad (3.71)$$

Realizando essa projeção segue que  $X_\mu \rightarrow X_\mu^1$  e  $P_\nu \rightarrow P_\nu^1$ . Esse processo nos fornece uma prescrição consistente para retornarmos ao espaço físico quadridimensional. *A projeção para o grupo de Lorentz padrão é alcançada substituindo todos os parâmetros e variáveis na teoria por suas componentes reais* [3].

Para ilustrar o processo de projeção considere as equações de campo da RG-pc dadas por

$$G_{\mu\nu}^+\sigma_+ + G_{\mu\nu}^-\sigma_- = T_{\mu\nu}^+\sigma_+ + T_{\mu\nu}^-\sigma_- + \Lambda_{\mu\nu}^-\sigma_-. \quad (3.72)$$

Tomando a projeção real da expressão acima temos

$$\frac{G_{\mu\nu}^+ + G_{\mu\nu}^-}{2} = \frac{T_{\mu\nu}^+ + T_{\mu\nu}^-}{2} + \frac{\Lambda_{\mu\nu}^-}{2}, \quad (3.73)$$

onde foi utilizado o fato que a parte real de  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  é  $\frac{1}{2}$ . Tendo em mente as relações (2.23) e (2.24) temos que cada termo representa de fato a parte real, logo a projeção das equações de campo é dada por:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}. \quad (3.74)$$

A projeção de outras variáveis ocorre de maneira análoga.

## Objetos Compactos na RG-PC

Quando, devido a uma instabilidade gravitacional iniciada por algum fator externo ou queda de temperatura, uma nuvem de gás interestelar começa a se contrair em virtude de sua própria atração gravitacional temos o início do processo de formação de uma estrela. Durante a contração ocorre uma conversão da energia potencial gravitacional em energia térmica, o que eleva a temperatura do gás. A pressão do gás tenta parar o colapso e se o mesmo não perdesse energia essa pressão evitaria o colapso já nesse estágio. Contudo o gás perde energia na forma de radiação eletromagnética e como resultado a nuvem não consegue manter a pressão necessária e o colapso segue, cada vez mais quente. Após um lento colapso o centro da nuvem torna-se suficientemente quente para que reações nucleares ocorram e a estabilidade é atingida. A energia irradiada é balanceada pela geração de energia nuclear de forma que a nuvem não precisa seguir o colapso para conseguir a energia térmica necessária para manter a pressão requerida para alcançar estabilidade. É o surgimento de uma estrela.

Esse processo de equilíbrio é temporário e quando ocorre o término do processo de fusão nuclear no seu interior, uma estrela chegou ao estágio final de sua evolução e torna-se um *objeto compacto*. O termo agrupa tradicionalmente duas formas de *estrelas compactas* denominadas *anãs brancas*<sup>15</sup> e *estrelas de nêutrons*<sup>16</sup>, assim como os buracos-negros. O fator principal na determinação de qual desses três destinos uma dada estrela terá é sua massa [54, 55]. Acredita-se que anãs-brancas sejam o destino final de estrelas mais leves, de massas  $M \lesssim 4M_{\odot}$ . Estrelas de nêutrons e buracos-negros são o estágio final de estrelas mais massivas, todavia traçar uma linha que divide essas duas possibilidades é difícil pois a nossa compreensão dos estágios finais na evolução de estrelas massivas é limitada [55]. Esses remanescentes estelares destacam-se por apresentar ambientes dentre os mais densos encontrados no Universo<sup>17</sup>.

<sup>15</sup> “Anãs” pois são consideravelmente menores e mais condensadas que estrelas ordinárias e “brancas” pois sua temperatura na superfície é alta quando essa fase é iniciada.

<sup>16</sup> O nome pode ser impróprio, visto que segundo os modelos atuais esses objetos passam longe de ser compostos inteiramente por nêutrons [54, 56].

<sup>17</sup> No caso de estrelas de nêutrons, por exemplo, as densidades podem chegar a uma ordem de grandeza maior do

Estrelas compactas, diferentemente de estrelas ordinárias, não podem se sustentar contra o colapso gravitacional gerando pressão térmica, visto que não realizam mais fusão nuclear e caso se encontrem isoladas irão se resfriar até eventualmente zerar sua temperatura [55]. Em altas temperaturas as partículas possuem elevada energia e muitos estados quânticos se encontram disponíveis. Na média, a probabilidade de qualquer estado quântico estar ocupado é baixa e nesse caso o princípio de exclusão de Pauli não desempenha um papel central.

No regime de baixas temperaturas as partículas têm menos energia e menos estados quânticos estão disponíveis, ou seja, a ocupação média de cada estado aumenta. Logo o princípio de exclusão de Pauli é vital na descrição da dinâmica de tais sistemas. Os níveis disponíveis até uma certa energia máxima (determinada pela densidade) estão, em média, praticamente cheios e os níveis superiores estão em média praticamente vazios. Tais sistemas são denominados degenerados. Essa análise só é rigorosamente válida a temperatura zero e se as interações mútuas entre os férmions são ignoradas. Desse cenário imposto pelo princípio de exclusão de Pauli que impede que férmions ocupem o mesmo estado quântico surge uma pressão adicional de natureza quântica que é denominada pressão de degenerescência, que é fundamental na descrição da estabilidade de estrelas compactas. As anãs brancas equilibram a gravidade através da pressão de degenerescência de elétrons, enquanto estrelas de nêutrons são balanceadas pela pressão de degenerescência de bárions. Fowler foi o primeiro a propor que a estabilidade de anãs-brancas poderia ser descrita em termos da pressão de degenerescência de elétrons usando a estatística de Fermi-Dirac em 1926. Com a descoberta do nêutron em 1932 as ideias de Fowler para o elétron foram rapidamente generalizadas [57]. A ideia de que as estrelas de nêutrons seriam o estágio final na evolução de certas estrelas luminosas remonta a 1934 em um trabalho pioneiro realizado por Baade e Zwicky [54].

Estima-se que estrelas de nêutrons representam algo em torno de 1% da massa da Galáxia (das quais apenas uma pequena fração já foi detectada) e são um exemplo de objetos astrofísicos multidisciplinares nos quais as quatro interações fundamentais estão presentes de maneira significativa. A descrição da matéria em condições extremas no interior fica a cargo da física nuclear e de partículas. Nesse nível de compressão a geometria do espaço-tempo desvia drasticamente do caso plano, logo também é necessário o uso da RG. A combinação dos formalismos é consolidada nas equações de campo de Einstein, onde o tensor de energia-momentum  $\mathbf{T}$  é o responsável por carregar as informações advindas da equação de estado<sup>18</sup>. Uma equação diferencial é fundamental na descrição da estrutura de uma estrela relativística estática e esfericamente simétrica no escopo da RG. Tal equação diferencial é denominada equação Tolman-Oppenheimer-Volkoff<sup>19</sup> (equação TOV) e é dada

---

que a densidade de núcleos atômicos [56].

<sup>18</sup> No presente trabalho consideraremos uma equação de estado uma relação  $p(\epsilon)$  que expressa a dependência funcional entre a pressão e a densidade de energia no objeto em questão.

<sup>19</sup> A equação TOV garante que a pressão decrescerá monotonamente caso a equação de estado considerada para um dado modelo respeite a razoável restrição  $\epsilon \geq 0$  para todo  $p \geq 0$  [56].

por [54, 56]:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p(r) + \varepsilon(r)) (m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r (r - 2m(r))}; \quad m(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \varepsilon_m dr'. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) substitui a equação de equilíbrio hidrostático da gravitação newtoniana, a saber

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2} \rho, \quad (4.2)$$

onde foram adotadas unidades nas quais  $G = c = 1$ , que é a escolha usual na área de estrelas compactas [3]. Observe que o lado direito da equação TOV dada por (4.1) é sempre maior em magnitude que o lado direito de (4.2), ou seja, na RG é mais difícil manter o equilíbrio hidrostático e mais pressão é necessária do que na teoria newtoniana. Outro ponto digno de atenção, como exposto em [54], consiste no fato de que a expressão da função de massa em (4.1) tem exatamente a forma que seria esperada em um tratamento não relativístico para uma massa cuja distribuição é dada por  $\varepsilon(r)$  (note que como nas unidades adotadas  $c = 1$  segue que não é feita distinção entre a densidade de energia e a densidade de massa). Isso pode gerar estranheza visto que da RG sabemos que a massa curva o espaço-tempo e em contrapartida a massa é movida e reposicionada pelo espaço-tempo de acordo com as equações de campo. A explicação advém do fato que a expressão de  $m(r)$  em (4.1) não é uma prescrição para computar a massa total a partir de uma distribuição arbitrária  $\varepsilon(r)$ . Não existem distribuições arbitrárias na gravidade, na realidade  $\varepsilon(r)$  é precisamente prescrito pela equação TOV, de tal maneira que  $m$  representa a massa da estrela e seu campo gravitacional. Devido a relação mútua entre massa, energia e espaço-tempo na RG não faz sentido se questionar a respeito da massa da estrela isoladamente de seu campo gravitacional. Por isso que  $m(r)$  é referida como a massa da estrela interior a um raio  $r$  e é o único tipo de massa que é contemplada na RG [54].

A primeira aplicação da RG no tratamento numérico de estrelas de nêutrons foi feita por Oppenheimer e Volkoff em 1939 [58]. Na ocasião a massa máxima estável encontrada para um gás livre de Fermi composto por nêutrons foi de  $0.75M_\odot$ , acima disso não existiam soluções com equilíbrio estático. Estudos posteriores modificaram o limite de massa de estrelas de nêutrons e hoje acredita-se que ele está entre  $1.5M_\odot$  e  $2.2M_\odot$  [57]. Esses limites abrem a discussão de que uma estrela, desde que massiva o suficiente, no final de sua evolução se contrairia indefinidamente nunca atingindo o equilíbrio e o produto final desse colapso completo é uma *singularidade*. Os objetos decorrentes dessa situação são denominados *buracos negros*.

Um fato interessante e ao mesmo tempo curioso é que o próprio Einstein discordava da realidade física das singularidades previstas por sua teoria e publicou em 1939 um artigo com suas ideias a respeito. O notório astrofísico Sir Arthur Eddington foi outro que acreditou até o final de sua vida que deveria existir algum processo físico capaz de prevenir a formação de uma singularidade. O físico dinamarquês Claus Møller sugeriu, em uma palestra em 1979 dedicada a Einstein que discutia a realidade da singularidade, que deveríamos procurar por uma teoria gravitacional que concordasse

com os resultados da RG no limite de campos fracos mas que apresentasse diferenças em campos gravitacionais fortes de forma a evitar a presença de singularidades [36, 57].

Além dos objetos compactos já citados existem diversos modelos teóricos de *estrelas exóticas*, objetos hipotéticos com composição não usual e balanceados contra o colapso gravitacional através da pressão de degenerescência ou de outras propriedades quânticas. Apesar da existência desses objetos não ter sido ainda evidenciada o estudo de objetos exóticos é importante devido sua relação com problemas não resolvidos na astrofísica moderna, como a matéria escura, energia escura, a formação de estruturas no universo e o destino final de estrelas massivas [59]. Como exemplos de tais objetos podemos citar estrelas de quark, estrelas bosônicas e gravastars, sendo a última uma alternativa aos buracos-negros [59]. Ainda nesse capítulo nos dedicaremos ao estudo de um objeto exótico que possui dois aspectos incomuns, primeiramente o objeto será modelado sob o formalismo da RG-pc, logo incorporará os efeitos repulsivos propostos na teoria e a composição considerada será matéria escura fermiônica.

## 4.1 Equações TOV na RG-PC

Como visto no capítulo anterior na RG-pc é proposta uma contribuição adicional às equações de campo com um caráter repulsivo e essa contribuição altera a equação de equilíbrio hidrostático dada por (4.1). Com o objetivo de expressar o análogo de (4.1) na RG-pc considere a projeção real das equações de campo da RG-pc dada por

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi T^\mu{}_\nu + 8\pi \Lambda^\mu{}_\nu. \quad (4.3)$$

Analisaremos apenas o interior de objetos estáticos esfericamente simétricos cujo elemento de linha pode ser expresso por:

$$ds^2 = -e^{-\nu(r)} dt^2 + e^{\mu(r)} dr^2 + r^2(\sin^2(\theta)d\phi^2 + d\theta^2). \quad (4.4)$$

Tanto  $\Lambda$  quanto  $T$  serão tomados como fluidos perfeitos isotrópicos que podem ser representados de forma matricial por

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} -\varepsilon_\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\Lambda \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$T^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} -\varepsilon_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_m \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde denotamos as variáveis referentes a matéria por um subíndice  $m$  e as contribuições advindas da energia escura por um subíndice  $\Lambda$ . Dada a simetria proposta segue que a pressão e a densidade de energia serão funções apenas da coordenada  $r$  [3, 60]. Resolvendo as equações de campo da RG-pc para o elemento de linha (4.4) assumindo que a única interação entre os fluidos é a gravitacional podemos escrever o sistema TOV da RG-pc<sup>20</sup> [3]:

$$\frac{dp_m}{dr} = -\frac{(\varepsilon_m(r) + p_m(r))}{r(r - 2m_m(r) + 2m_\Lambda(r))} [m_m(r) - m_\Lambda(r) + 4\pi r^3(p_m(r) + p_\Lambda(r))], \quad (4.7)$$

$$\frac{dp_\Lambda}{dr} = -\frac{(\varepsilon_\Lambda(r) + p_\Lambda(r))}{r(r - 2m_m(r) + 2m_\Lambda(r))} [m_m(r) - m_\Lambda(r) + 4\pi r^3(p_m(r) + p_\Lambda(r))]. \quad (4.8)$$

Onde as funções de massa são dadas por:

$$m_m(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \varepsilon_m dr', \quad (4.9)$$

$$m_\Lambda(r) = -4\pi \int_0^r r'^2 \varepsilon_\Lambda dr'. \quad (4.10)$$

Observe que na RG-pc existem duas funções de massa, uma que expressa a contribuição gravitacional advinda da matéria e outra que representa a contribuição associada a energia escura.

## 4.2 O Argumento de Landau para a Massa Máxima de Estrelas Compactas

Na RG a massa máxima estável de uma estrela compacta é profundamente dependente da equação de estado escolhida e por consequência da estrutura interna. Esse cenário dificulta a realização de um cálculo teórico confiável que determine a massa máxima de uma estrela compacta. Tendo em vista essas dificuldades Landau apresentou, valendo-se da gravitação newtoniana, da Relatividade Especial e da estatística de Fermi-Dirac, um método para estimar a massa máxima de uma estrela compacta [55, 61]. Apesar das aproximações distantes da situação real os resultados são úteis para visualizar certos aspectos básicos de estrelas compactas e ter uma primeira estimativa não apenas da massa, mas também do número de férmions e do raio correspondente. O ponto central do argumento é assumir que o equilíbrio de uma estrela degenerada corresponde a um mínimo de sua energia total. O modelo considera uma estrela composta de um gás de férmions livres a temperatura zero. Nesse caso o momentum de fermi  $k_F$  pode ser relacionado ao número de férmions  $N$  através de [61]

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{k_F^3}{3\pi^2}, \quad (4.11)$$

<sup>20</sup> Uma derivação das equações TOV da RG-pc pode ser encontrada no Apêndice B.

onde assumimos um fator de degenerescência estatística  $g = 2$  e unidades de  $\hbar = c = 1$ . De (4.11) podemos obter:

$$k_F = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{N^{\frac{1}{3}}}{R}. \quad (4.12)$$

A massa da estrela é dada por

$$M = m_f N. \quad (4.13)$$

A energia gravitacional por férmion é

$$E_G = -\frac{GMm_f}{R}. \quad (4.14)$$

Segue que a energia total de um férmion na superfície da estrela é expressa pela soma da contribuição gravitacional com a energia cinética de um férmion ultra-relativístico

$$E = -\frac{GMm_f}{R} + \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{N^{\frac{1}{3}}}{R}. \quad (4.15)$$

Uma boa estimativa para o número máximo de férmions pode ser obtida no caso limite onde  $E = 0$ , ou seja, quando ambas contribuições a energia total são iguais. Logo

$$N_{max} = \left(\frac{9\pi}{4G^3}\right)^{\frac{1}{2}} m_f^{-3}, \quad (4.16)$$

e a massa máxima da estrela é dada por

$$M_{max} = \left(\frac{9\pi}{4G^3}\right)^{\frac{1}{2}} m_f^{-2}. \quad (4.17)$$

Uma estimativa para o raio correspondente pode ser obtida considerando que a energia cinética do férmion localizado na superfície pode ser aproximada pela sua massa, logo o raio mínimo é dado por

$$R_{min} = \left(\frac{9\pi}{4G}\right)^{\frac{1}{2}} m_f^{-2}. \quad (4.18)$$

Podemos expressar de maneira aproximada a massa máxima por [61]

$$M_{max} \approx \frac{M_p^3}{m_f^2}, \quad (4.19)$$

e de maneira análoga o raio pode ser expresso por

$$R_{min} \approx \frac{M_p}{m_f^2}, \quad (4.20)$$

onde  $M_p$  representa a massa de Planck. Das expressões obtidas vemos que o número de férmions, a massa máxima e o raio mínimo podem ser estimados através da massa do férmion, sendo que com



o aumento da massa do férmion podemos esperar uma estrela resultante de menor massa e raio. Para um férmion de massa  $m_f = 1$  GeV as equações (4.19) e (4.20) resultam em  $M_{max} = 1.64 M_\odot$  e  $R_{min} = 2.41$  km. Apesar da massa final da estrela diminuir com o aumento da massa do férmion é fácil observar das expressões (4.17) e (4.18) que o mesmo não ocorre com a densidade de massa, que cresce com o aumento da massa do férmion. Apesar da relevância qualitativa pode-se destacar dois grandes defeitos no argumento de Landau. Primeiramente é assumido que a estrela é composta de partículas ultra-relativísticas ao longo de todo interior, o que não constitui uma situação realística e o cálculo foi desenvolvido utilizando a gravitação newtoniana, que por motivos apontados anteriormente, não é adequada para descrever esses objetos [58].

### 4.3 Um Objeto Compacto Exótico na Relatividade Geral Pseudo-Complexa

Podemos estender as ideias de Fowler, assim como foi feito no caso das estrelas de nêutrons, para estudar objetos compactos compostos de férmions exóticos. Em [61] foi estudado o caso de uma estrela compacta composta de matéria escura fermiônica. Esses estudos são motivados, dentre outras razões, por simulações de halos de matéria escura que sugerem que a densidade de matéria escura nos arredores do centro Galáctico deve ser muitas ordens de grandeza superior à densidade no Sistema Solar [62]. Existe a possibilidade de quantidades consideráveis de matéria escura serem acretadas nessas regiões de elevada densidade, o que pode alterar a configuração interna das estrelas formadas nesses locais. A princípio é possível que mesmo estrelas ordinárias sejam capazes de acretar matéria escura, entretanto a acreção pode ser especialmente relevante no caso de objetos compactos devido as suas altas densidades e compacidades [63, 64, 65]. Dentre os possíveis produtos resultantes da acreção de matéria escura estão a formação de estrelas escuras degeneradas dentro de estrelas de nêutrons e núcleos auto-gravitantes [62]. O estudo dessas configurações pode nos revelar informações cruciais sobre a matéria escura caso sejam encontradas diferenças nos objetos compactos presentes nas regiões onde esse tipo de matéria é abundante. Até mesmo as configurações instáveis são relevantes pois podem gerar consequências observacionais [62].

Aplicar o formalismo pseudo-complexo a estrelas ordinárias (nas quais  $R \gg 2M$ ) não nos revelaria diferenças, pois nesse caso o espaço-tempo pode ser aproximado pelo espaço-tempo de Minkowski e o tratamento clássico é suficiente. Na RG-pc se propõe uma correção a RG para campos gravitacionais intensos, onde colapsos gravitacionais podem permitir o acúmulo de uma energia associada a flutuações no vácuo. No caso de objetos compactos como estrelas de nêutrons as diferenças já se tornam perceptíveis <sup>21</sup>. Acreditamos que o cenário de uma estrela compacta composta de matéria escura fermiônica (onde a massa do férmion considerada é superior à do nêutron e o objeto resultante é ainda mais denso) seja um ambiente propício para a aplicação da RG-pc. A ideia de um

vácuo atuante em escalas não cosmológicas não é nova. Geralmente atribui-se a Gliner a proposta de que um vácuo localizado (na ocasião esse vácuo foi inclusive considerado como uma forma de matéria) pode ser relevante em colapsos gravitacionais [39]. De fato, como exposto em [3], não existe argumento que exclua a possibilidade da energia escura se acumular ao redor de concentrações de massa. O trabalho de Visser tem mostrado que a presença de massa é capaz de gerar flutuações no vácuo e que as flutuações tornam-se mais intensas com o aumento da massa.

No que segue vamos considerar um *modelo de brinquedo* que descreve um objeto compacto não luminoso que combina matéria escura fermiônica (que possui origem no modelo do *portal de Higgs*<sup>22</sup> [66]) com os efeitos repulsivos da energia escura da RG-pc. A combinação desses dois ingredientes, atração gravitacional e a repulsão da energia escura permite a princípio que o equilíbrio hidrostático seja atingido no objeto compacto. Parte dos resultados obtidos foram publicados e podem ser encontrados em [67].

## 4.4 Equações de Estado

Para o sistema de equações diferenciais (4.7) e (4.8) ser solúvel é necessário especificar outras relações. Se levarmos em conta que observações indicam que os valores atuais das densidades de matéria escura e energia escura são da mesma ordem de magnitude, não seria surpresa descobrir que as componentes do setor escuro do Universo estão relacionadas entre si [68]. Uma vez que não podemos expressar de maneira precisa as propriedades gravitacionais do vácuo quântico, por simplicidade assumiremos um acoplamento linear entre  $\varepsilon_m$  e  $\varepsilon_\Lambda$ , ou seja,

$$\varepsilon_\Lambda = \alpha \varepsilon_m. \quad (4.21)$$

Utiliza-se  $|\alpha| \leq 1$  de modo a evitar situações com energia total negativa. Obviamente a relação (4.21) é demasiadamente simples, todavia não é incomum acoplamentos lineares entre matéria e energia escura para estudos iniciais, por exemplo em [69] uma relação semelhante a (4.21) é adotada. Em [70, 71] um acoplamento linear com matéria escura e energia escura é considerado.

No trabalho pioneiro realizado por Oppenheimer e Volkoff em [58] sobre estrelas de nêutrons foi assumido que os nêutrons podiam ser descritos como um gás ideal de Fermi. Seguiremos a mesma proposta para a matéria escura fermiônica que compõe o objeto compacto exótico nesse capítulo. Com o objetivo de motivar a equação de estado, primeiramente enunciaremos alguns resultados provenientes da Teoria Cinética. A densidade de energia é dada por (nessa seção utiliza-se  $\hbar = c = 1$ ) [55]:

$$\varepsilon_m = \int \frac{2Ef}{(2\pi)^3} d^3k, \quad (4.22)$$

<sup>21</sup> Em [3] encontra-se um capítulo inteiro dedicado ao estudo de estrelas de nêutrons no formalismo pseudo-complexo.

<sup>22</sup> Uma breve exposição do modelo pode ser encontrada no Apêndice C.

onde a energia  $E$  de um partícula de momentum  $k$  e massa  $m_\chi$  é dada por  $E = \sqrt{k^2 + m_\chi^2}$  e  $f$  é a função que define a distribuição no espaço de fase (foi assumido ainda um fator de degenerescência estatística  $g = 2$ ) [55, 61, 72]. Em uma distribuição isotrópica de momentum a pressão pode ser escrita como

$$p_m = \frac{1}{3} \int \frac{k^2}{E} \frac{2f}{(2\pi)^3} d^3k. \quad (4.23)$$

Para um gás ideal em equilíbrio a função  $f$  é dada por

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}, \quad (4.24)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $T$  a temperatura e  $\mu$  o potencial químico. No caso de férmions completamente degenerados ( $T = 0$ , ou seja,  $\frac{\mu}{k_B T} \rightarrow \infty$ ), o potencial químico  $\mu$  é denominado de energia de Fermi (que representa a energia máxima de um nível preenchido),  $E_F = \sqrt{k_F^2 + m_\chi^2}$  e temos que

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E \leq E_F, \\ 0, & E \geq E_F. \end{cases} \quad (4.25)$$

As equações que descrevem a pressão e a densidade de energia podem ser reescritas a partir das considerações acima como [55, 61, 72]

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{8\pi}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{k^2 + m_\chi^2} dk \\ &= \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{k^2 + m_\chi^2} dk \\ &= m_\chi^4 \Upsilon(z), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{8\pi}{(2\pi^3)} \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m_\chi^2} dk \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m_\chi^2} dk \\ &= m_\chi^4 \zeta(z), \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde introduzimos o parâmetro relativístico  $z = k_F/m_\chi$  e as funções  $\Upsilon(z)$  e  $\zeta(z)$  são definidas por

$$\Upsilon(z) = \frac{1}{24\pi^2} \left[ (2z^3 - 3z) (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} + 3 \sinh^{-1}(z) \right], \quad (4.28)$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ (2z^3 + z) (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} - \sinh^{-1}(z) \right]. \quad (4.29)$$

Logo a densidade de energia e a pressão na equação de estado ficam caracterizadas através da massa do férmion  $m_\chi$  e do momentum de fermi  $k_F$ . Para as relações obtidas para a pressão e densidade de

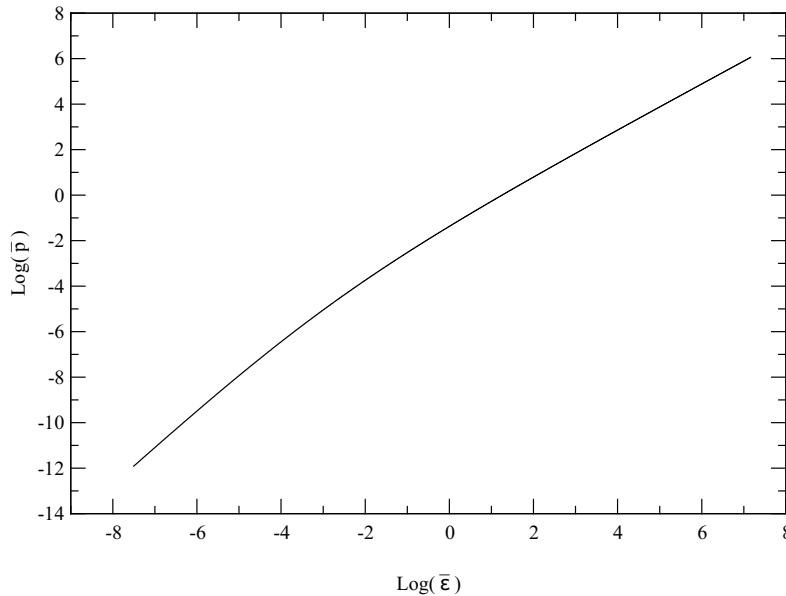
energia não é possível expressar uma equação de estado em um formato politrópico, ou seja,  $p_m \propto \varepsilon_m^\gamma$  com  $\gamma$  constante. Mesmo assim podemos verificar dois limites [61]. Primeiramente temos o limite não relativístico:

$$\bar{p} \propto \bar{\varepsilon}^{\frac{5}{3}} \quad (z \ll 1). \quad (4.30)$$

O segundo é o limite ultra-relativístico:

$$\bar{p} = \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \quad (z \gg 1), \quad (4.31)$$

onde  $\bar{p} = \frac{p_m}{m_\chi^4}$  e  $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_m}{m_\chi^4}$  representam a pressão e a densidade de energia adimensional respectivamente. Na Figura 4.1 podemos visualizar a equação de estado para a matéria escura, onde  $\text{Log}$  representa o logaritmo natural. A curva pode ser vista basicamente como duas retas de diferentes inclinações. Uma inclinação maior para o regime não relativístico para valores menores de  $\bar{\varepsilon}$  e uma inclinação menor para o regime relativístico onde temos valores maiores de  $\bar{\varepsilon}$ .



**Figura 4.1:** Equação de estado para a matéria escura. Pressão adimensional em função da densidade de energia adimensional para um gás de Fermi não interagente a temperatura zero.

## 4.5 Implementação Numérica

Para simular o modelo, o sistema (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10) é numericamente integrado usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para o sistema ser fechado precisamos ainda das equações (4.21), (4.26) e (4.27). Os dados iniciais que devem ser fornecidos são os valores centrais da densidade

de energia fermiônica ( $\varepsilon_{mC}$ ) e da componente  $\Lambda$  da pressão ( $p_{\Lambda C}$ ). Assumimos uma parametrização para o valor central da pressão em  $\Lambda$  dada por  $p_{\Lambda C} = |\alpha|\varepsilon_0$ , onde  $\varepsilon_0 = 141 \frac{MeV}{fm^3}$ . O programa cessa quando a pressão da matéria escura anula-se e nessa situação a massa fermiônica e o raio do objeto compacto atingem seus valores finais, que denotaremos por  $M_m$  e  $R$  respectivamente. Vale a pena ressaltar que apesar de um tratamento para o exterior (incluindo a contribuição da energia escura) do objeto ser possível, visto que a componente  $\Lambda$  não zera na superfície, no presente trabalho estamos preocupados apenas com a região interior do objeto compacto.

A massa do férmion  $m_\chi$  foi tratada como um parâmetro livre e nos restringimos a analisar casos contemplados por experimentos que visam detectar a matéria escura. A constatação que diferentes cenários referentes à matéria escura poderiam ser explicados por partículas leves, com massas  $m_\chi \approx 1$  GeV, não é recente [73]. Uma vez que partículas nessa faixa de massa não produziam sinais capazes de serem detectados pela maioria dos experimentos, esses candidatos foram amplamente negligenciados. Diante da falta de sucesso dos experimentos independentemente do regime de massa, partículas leves de matéria escura passaram a ser abordadas nos experimentos [74].

Hoje a empreitada experimental para aumentar a sensibilidade dos experimentos de detecção direta escreve um capítulo a parte na busca pela matéria escura [75]. Por exemplo, o experimento CoGeNT utiliza um único cristal de germânio de 440 gramas com elevada pureza e resfriado com nitrogênio líquido em suas medições. O aparato possui vantagens por ser capaz de medir níveis energéticos muito baixos de aproximadamente 0.5 keV, o que possibilita a procura de partículas de matéria escura de massa relativamente baixa, de unidades de GeV [76]. O experimento CRESST (atualmente na fase CRESST-III) é o líder na busca por partículas de matéria escura com massas  $m_\chi \leq 1.7$  GeV. Nesse experimento utilizam-se detectores criogênicos com o objetivo de detectar recuos nucleares induzidos por espalhamentos elásticos de partículas de matéria escura em cristais de  $CaWO_4$  [77, 78]. Partículas de matéria escura entre 50 e 100 GeV constituem uma faixa típica extensivamente abordada na literatura [61, 72, 79]. Uma partícula nessa faixa poderia ser, por exemplo, um neutralino<sup>23</sup>, cujas massas típicas avaliadas estão na ordem de 100 GeV, todavia casos de menor massa em torno de 50 GeV também são considerados [61, 72]. No presente trabalho nos limitaremos aos casos  $m_\chi = 1$  GeV, 50 GeV e 100 GeV.

## 4.6 Resultados e Discussão

Nessa seção o objetivo principal consiste em comparar as soluções da RG e RG-pc para o modelo proposto. Avaliaremos a influência que a constante de acoplamento  $\alpha$  exerce em observáveis como massa, raio, compacidade<sup>24</sup>, assim como nos perfis fermiônicos de densidade de energia e pressão. Os resultados obtidos foram compilados nas tabelas e figuras a seguir. Na Tabela 4.1 expressamos

<sup>23</sup> O neutralino é uma partícula hipotética postulada no contexto da supersimetria e frequentemente é considerado como um candidato viável à matéria escura fria.

os valores centrais adotados para as densidades de energia e pressão para as diferentes massas abordadas para o férmion. Como mencionado na seção anterior tanto  $\varepsilon_{mC}$  quanto  $p_{\Lambda C}$  são valores que devem ser previamente fornecidos. No que diz respeito a  $\varepsilon_{mC}$  adotamos os valores que fornecem, para a RG, a massa máxima estável e o raio mínimo. Não existe nada de particularmente especial nessa escolha, todavia julgamos que seja um ponto interessante para comparações entre a RG e a RG-pc. Os valores da Tabela 4.1 são utilizados para gerar os gráficos da densidade de energia, pressão e função de massa para a matéria escura, todos em função do raio. A Tabela 4.2 mostra as variações consideradas nas densidades de energia para gerar os gráficos da massa fermiônica total em função do raio total. As Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5 mostram as massas fermiônicas totais, raios totais e as respectivas compacidades fermiônicas obtidas para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ .

$m_\chi$ (GeV)	$\varepsilon_{mC}$ (MeV/fm <sup>3</sup> )	$p_{mC}$ (MeV/fm <sup>3</sup> )	$\varepsilon_{\Lambda C}$ (MeV/fm <sup>3</sup> )	$p_{\Lambda C}$ (MeV/fm <sup>3</sup> )
1	$2.82 \times 10^3$	$2.62 \times 10^2$	$\alpha \cdot \varepsilon_{mC}$	$ \alpha  \cdot \varepsilon_0$
50	$2.00 \times 10^{10}$	$1.96 \times 10^9$	$\alpha \cdot \varepsilon_{mC}$	$ \alpha  \cdot \varepsilon_0$
100	$3.00 \times 10^{11}$	$2.87 \times 10^{10}$	$\alpha \cdot \varepsilon_{mC}$	$ \alpha  \cdot \varepsilon_0$

**Tabela 4.1:** *Parametrização adotada: Densidade de energia central ( $\varepsilon_{mC}$ ) e pressão central ( $p_{mC}$ ) de matéria escura e densidade de energia central ( $\varepsilon_{\Lambda C}$ ) e pressão central ( $p_{\Lambda C}$ ) associada a energia escura com  $m_\chi = 1, 50$  e  $100$  GeV.*

$m_\chi$ (GeV)	$\varepsilon_{mC}^{[i]}$ (MeV/fm <sup>3</sup> )	$\varepsilon_{mC}^{[f]}$ (MeV/fm <sup>3</sup> )
1	1200	3200
50	$7 \times 10^9$	$2.5 \times 10^{10}$
100	$3 \times 10^{10}$	$4.5 \times 10^{11}$

**Tabela 4.2:** *Valores mínimos ( $\varepsilon_{mC}^{[i]}$ ) e máximos ( $\varepsilon_{mC}^{[f]}$ ) adotados para a densidade de energia central  $\varepsilon_{mC}$  de matéria escura. A pressão central em  $\Lambda$  escolhida foi  $p_{\Lambda C} = |\alpha| \cdot \varepsilon_0$ .*

As equações de campo (tanto da RG quanto da RG-pc) podem ser satisfeitas para diversos tensores de energia-momentum diferentes. Condições de energia reduzem a arbitrariedade através de imposições físicas sobre o tensor de energia-momentum [3]. Aqui consideramos as chamadas

<sup>24</sup> A compacidade é dada por  $\frac{2m(r)}{r}$  e pode-se mostrar que para todas as regiões estáveis de uma estrela é satisfeita a relação  $\frac{2m(r)}{r} < 1$  [54].

condições de energia fraca que no caso de um fluido perfeito isotrópico podem ser expressas como

$$\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda \geq 0, \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda + p_m + p_\Lambda \geq 0. \quad (4.33)$$

Como  $\varepsilon_\Lambda = \alpha\varepsilon_m$  podemos reescrever as condições acima como

$$\varepsilon_m (1 + \alpha) \geq 0, \quad (4.34)$$

$$\varepsilon_m (1 + \alpha) + p_m + p_\Lambda \geq 0. \quad (4.35)$$

Visto que o módulo da constante de acoplamento  $\alpha$  não assume valores maiores que a unidade e como  $\varepsilon_m$ ,  $p_m$  e  $p_\Lambda$  são sempre positivos segue que as condições são previamente respeitadas no modelo considerado.

Solução	$M_m (M_\odot)$	$R$ (km)	$\frac{2M_m}{R}$
RG	0.627	8.11	0.23
$\alpha = -0.1$	0.66	7.92	0.25
$\alpha = -0.3$	0.75	7.83	0.28
$\alpha = -0.5$	0.90	7.96	0.33
$\alpha = -0.7$	1.14	8.28	0.41
$\alpha = -0.9$	1.54	8.84	0.51

**Tabela 4.3:** Massa fermiônica total ( $M_m$ ), raio total ( $R$ ) e a respectiva compacidade fermiônica do objeto compacto exótico para  $m_\chi = 1$  GeV para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ . Nos cálculos foram utilizados os valores de  $\varepsilon_{mC}$  e  $p_{\Lambda C}$  presentes na Tabela 4.1.

Solução	$M_m (10^{-4}M_\odot)$	$R (10^{-3}$ km)	$\frac{2M_m}{R}$
RG	2.51	3.19	0.23
$\alpha = -0.1$	2.73	3.18	0.25
$\alpha = -0.3$	3.33	3.22	0.30
$\alpha = -0.5$	4.30	3.35	0.38
$\alpha = -0.7$	6.00	3.58	0.49
$\alpha = -0.9$	9.63	4.00	0.71

**Tabela 4.4:** Massa fermiônica total ( $M_m$ ), raio total ( $R$ ) e a respectiva compacidade fermiônica do objeto compacto exótico para  $m_\chi = 50$  GeV para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ . Nos cálculos foram utilizados os valores de  $\varepsilon_{mC}$  e  $p_{\Lambda C}$  presentes na Tabela 4.1.

Solução	$M_m$ ( $10^{-5} M_\odot$ )	$R$ ( $10^{-3}$ km)	$\frac{2M_m}{R}$
RG	6.27	0.81	0.23
$\alpha = -0.1$	6.84	0.80	0.25
$\alpha = -0.3$	8.38	0.82	0.30
$\alpha = -0.5$	10.8	0.85	0.38
$\alpha = -0.7$	15.2	0.91	0.49
$\alpha = -0.9$	24.6	1.02	0.71

**Tabela 4.5:** *Massa fermiônica total ( $M_m$ ), raio total ( $R$ ) e a respectiva compacidade fermiônica do objeto compacto exótico para  $m_\chi = 100$  GeV para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ . Nos cálculos foram utilizados os valores de  $\varepsilon_{mC}$  e  $p_{\Lambda C}$  presentes na Tabela 4.1.*

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram que para um dado raio fixo a densidade de energia fermiônica cresce para as soluções existentes com o aumento do módulo da constante de acoplamento  $|\alpha|$ , que quantifica a influência do formalismo pseudo-complexo. A mesma situação é observada no caso da pressão fermiônica. Constata-se ainda que o aumento de  $|\alpha|$  é sempre acompanhado por um crescimento da função de massa fermiônica do objeto compacto para um dado raio, independentemente da massa considerada para o férmion, como pode ser observado através das Figuras 4.2, 4.3 e 4.4. O mesmo não acontece com o raio total que para o modelo considerado, como retratado nas Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5, expressa uma tendência a uma leve retração para valores menores de  $|\alpha|$  e a partir de um dado valor passa a esboçar um crescimento. Já os gráficos da massa fermiônica total em função do raio total, também presentes nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, reforçam o quadro geral de um consistente aumento de massa mesmo quando valores menores de  $|\alpha|$  são considerados. Esse expressivo aumento na massa implica em um crescimento na compacidade fermiônica como retratado nas Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5.

Apesar das equações TOV serem suficientes para garantir equilíbrio hidrostático, as mesmas não nos asseguram equilíbrio dinâmico [80]. A seguinte condição é necessária para um objeto compacto ser estável [3, 55, 54]

$$\frac{dM_m(\varepsilon_{mC})}{d\varepsilon_{mC}} > 0. \quad (4.36)$$

A massa fermiônica total em função da densidade de energia central é apresentada na Figura 4.5. Nela é possível observar que mesmo para  $\alpha \neq 0$  existem intervalos onde a condição (4.36) é satisfeita para os diferentes valores avaliados para a massa do férmion.

Nas soluções da RG-pc estamos lidando com dois fluidos que interagem gravitacionalmente. Pode-se conjecturar que após um certo tempo eles podem ser tratados como um único fluido cuja massa é dada por  $M = M_m + M_\Lambda$  [81]. Tendo isso em mente, com o objetivo de ilustrar uma

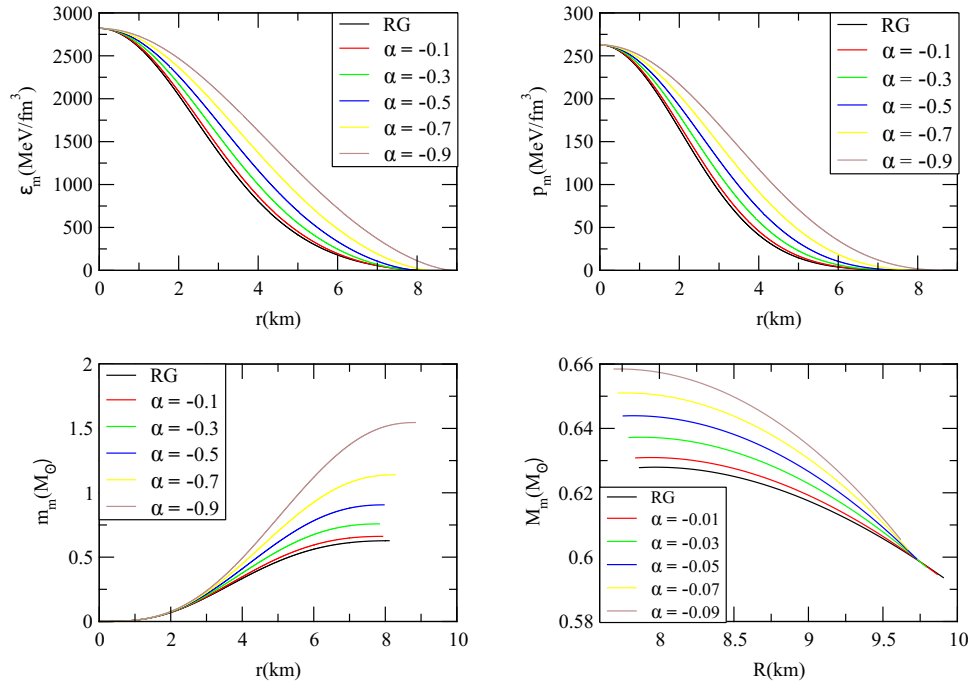


faceta pertinente da RG-pc, considere isoladamente a solução  $\alpha = -0.9$  para o férmion de massa  $m_\chi = 1$  GeV. Na Figura 4.6 podemos verificar que a condição (4.36) é satisfeita ao longo de todo o intervalo considerado para a densidade de energia na Tabela 4.2, mesmo quando consideramos a massa  $M = M_m + M_\Lambda$ . Para os valores centrais apresentados na Tabela 4.1 a compacidade fermiônica obtida foi  $\frac{2M_m}{R} = 0.51$ , o que por si só já estabelece um resultado significativo. Entretanto se considerarmos uma compacidade total adotando a massa  $M$  temos que

$$\frac{2M}{R} = 0.98 . \quad (4.37)$$

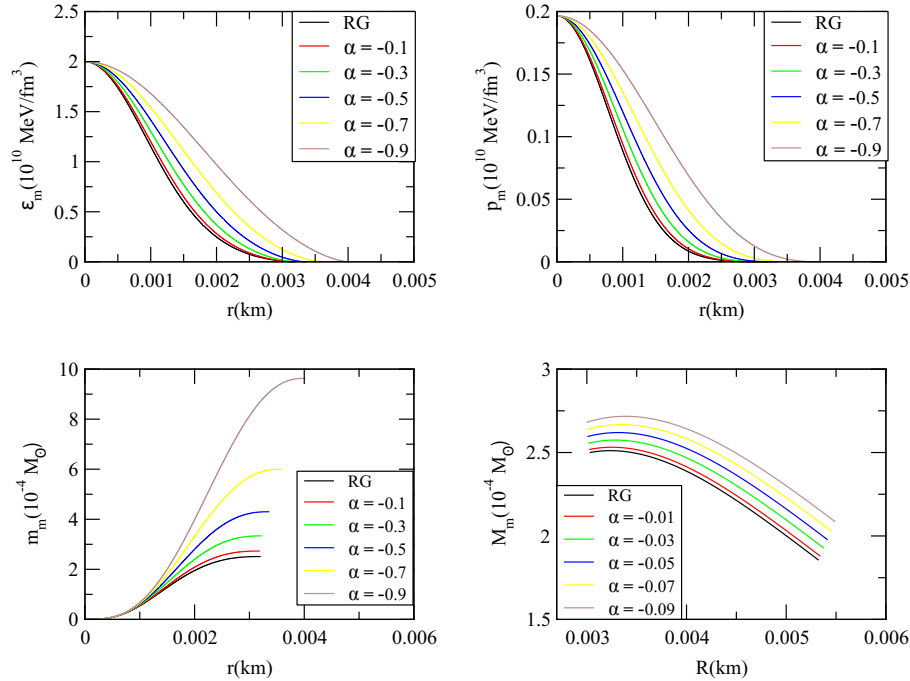
Esse resultado ultrapassa os limites permitidos na RG independentemente da equação de estado adotada. Na RG a estrutura da equação de equilíbrio hidrostático impõe a condição<sup>25</sup>  $\frac{2M}{R} < \frac{8}{9}$ . A equação (4.37) evidencia que pelo menos do ponto de vista teórico esses objetos compactos poderiam ser semelhantes a buracos-negros dependendo do modelo adotado para o exterior [3].

No trabalho sobre estrelas de nêutrons presente em [3], o formalismo pseudo-complexo apresenta soluções com compacidades bariônicas acima de 0.9, ou seja, sem incluir a contribuição de  $M_\Lambda$ .



**Figura 4.2:** Perfis fermiônicos obtidos para a densidade de energia (acima à esquerda), pressão (acima à direita), função de massa (abaixo à esquerda) e massa total em função do raio total (abaixo à direita). Diferentes valores de  $\alpha$  foram adotados e a massa considerada para o férmion foi  $m_\chi = 1$  GeV.

<sup>25</sup> Essa condição é o assunto central do Apêndice D.



**Figura 4.3:** Perfis fermiônicos obtidos para a densidade de energia (acima à esquerda), pressão (acima à direita), função de massa (abaixo à esquerda) e massa total em função do raio total (abaixo à direita). Diferentes valores de  $\alpha$  foram adotados e a massa considerada para o férmion foi  $m_\chi = 50$  GeV.

Os resultados obtidos seguem (mesmo se considerarmos a RG-pc) qualitativamente o argumento de Landau, ou seja, o crescimento da massa do férmion implica em um objeto compacto de menor massa e raio. Sabemos que relações gerais para a massa máxima e raio mínimo no âmbito da RG aparentemente não são possíveis, todavia para o caso particular de um gás de férmions livres a temperatura zero foram propostas *a posteriori* em [61] as seguintes expressões

$$M_{max} = 0.627 M_\odot \left( \frac{1 \text{ GeV}}{m_\chi} \right)^2, \quad (4.38)$$

$$R_{min} = 8.115 \text{ km} \left( \frac{1 \text{ GeV}}{m_\chi} \right)^2. \quad (4.39)$$

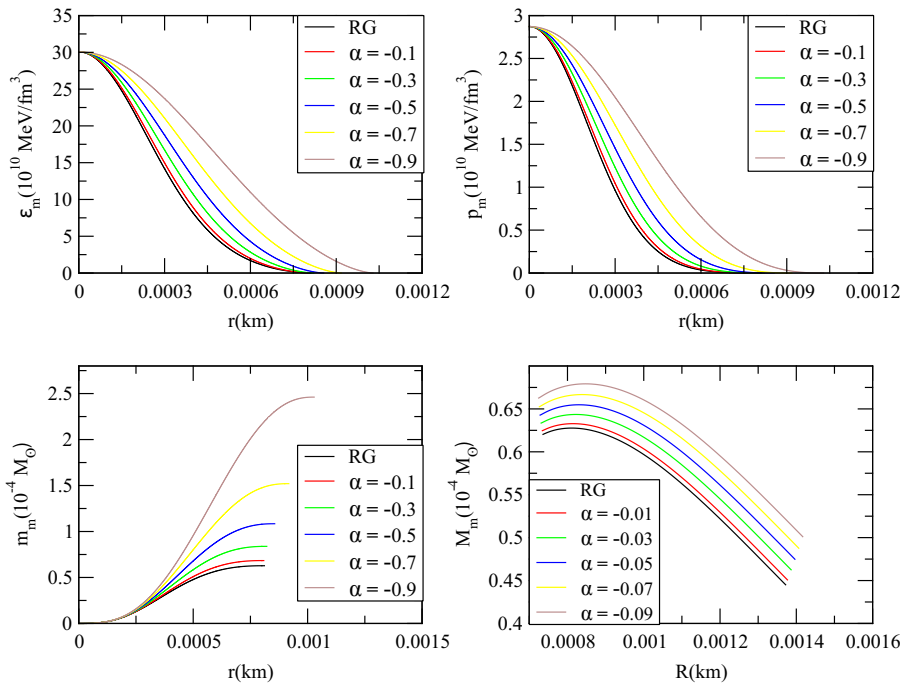
A partir das Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5 e das expressões (4.38) e (4.39) podemos evidenciar que no limite da RG, ou seja, quando os efeitos repulsivos da RG-pc são ignorados, os resultados estão em sintonia com o estudo feito em [61]. Tendo as equações (4.38) e (4.39) como inspiração podemos procurar por uma expressão empírica que seja capaz de reproduzir os resultados obtidos nas Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5 incluindo assim o formalismo pseudo-complexo. Segue que os resultados podem ser

expressos pelas seguinte equações

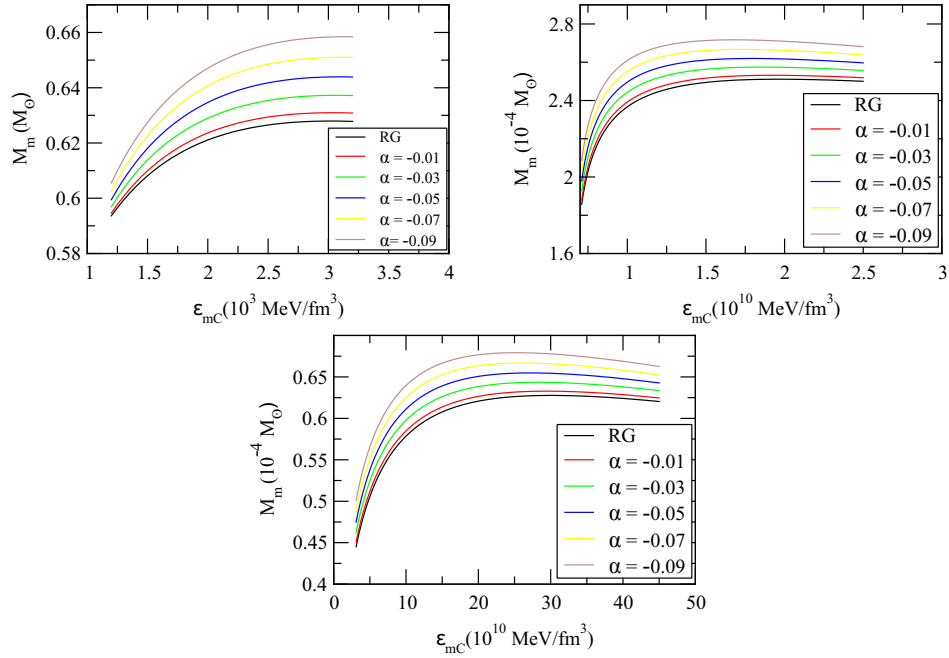
$$M_m = (\xi_1 - \xi_2) \left( \frac{1 \text{ GeV}}{m_\chi} \right)^2 + \xi_3 \left( \frac{1 \text{ GeV}}{m_\chi} \right) - \xi_4, \quad (4.40)$$

$$R = (\xi_5 - \xi_6) \left( \frac{1 \text{ GeV}}{m_\chi} \right)^2 + \xi_7 \left( \frac{1 \text{ GeV}}{m_\chi} \right) - \xi_8, \quad (4.41)$$

onde  $\xi_i$  representa uma constante real. As Tabelas 4.6 e 4.7 reúnem os valores obtidos para essas constantes para cada solução abordada.



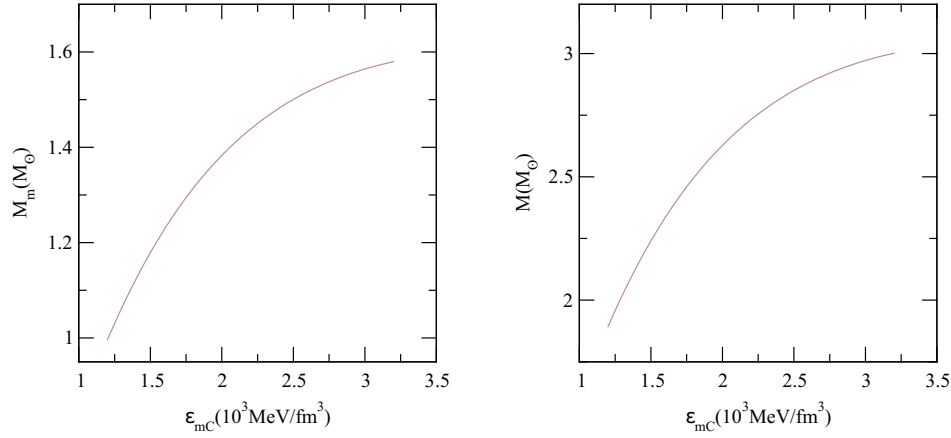
**Figura 4.4:** Perfis fermiônicos obtidos para a densidade de energia (acima à esquerda), pressão (acima à direita), função de massa (abaixo à esquerda) e massa total em função do raio total (abaixo à direita). Diferentes valores de  $\alpha$  foram adotados e a massa considerada para o férmion foi  $m_\chi = 100 \text{ GeV}$ .



**Figura 4.5:** *Massa fermiônica total em função da densidade de energia central para  $m_\chi = 1 \text{ GeV}$  (acima à esquerda),  $50 \text{ GeV}$  (acima à direita) e  $100 \text{ GeV}$  (abaixo).*

Solução	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$
RG	0.627	0	0	0
$\alpha = -0.1$	0.66	$6.75 \times 10^{-4}$	$6.80 \times 10^{-4}$	$4.33 \times 10^{-6}$
$\alpha = -0.3$	0.75	$2.48 \times 10^{-3}$	$2.49 \times 10^{-3}$	$1.59 \times 10^{-5}$
$\alpha = -0.5$	0.9	$5.32 \times 10^{-3}$	$5.36 \times 10^{-4}$	$3.50 \times 10^{-5}$
$\alpha = -0.7$	1.14	$1.09 \times 10^{-2}$	$1.09 \times 10^{-2}$	$7.01 \times 10^{-5}$
$\alpha = -0.9$	1.54	$2.61 \times 10^{-2}$	$2.63 \times 10^{-2}$	$1.68 \times 10^{-4}$

**Tabela 4.6:** *Valores das constantes  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  e  $\xi_4$  para as diferentes soluções abordadas.*



**Figura 4.6:** *Massa total fermiônica (à esquerda) e massa total (à direita) em função da densidade de energia central para  $\alpha = -0.9$  e  $m_\chi = 1$  GeV. Nos cálculos foi utilizada a variação de densidade de energia central presente na Tabela 4.2.*

Solução	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$
RG	8.11	0	0	0
$\alpha = -0.1$	7.92	$4.20 \times 10^{-4}$	$8.02 \times 10^{-4}$	0
$\alpha = -0.3$	7.83	$5.20 \times 10^{-3}$	$5.30 \times 10^{-3}$	$1.50 \times 10^{-5}$
$\alpha = -0.5$	7.96	$1.15 \times 10^{-2}$	$1.15 \times 10^{-2}$	$6.03 \times 10^{-5}$
$\alpha = -0.7$	8.28	$1.91 \times 10^{-2}$	$1.92 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-4}$
$\alpha = -0.9$	8.84	$3.36 \times 10^{-2}$	$3.38 \times 10^{-2}$	$2.00 \times 10^{-4}$

**Tabela 4.7:** *Valores das constantes  $\xi_5$ ,  $\xi_6$ ,  $\xi_7$  e  $\xi_8$  para as diferentes soluções abordadas.*

É oportuno salientar que para todos os valores admitidos para a constante de acoplamento no presente modelo existe uma massa máxima estável, logo a adesão da contribuição da energia escura não impede um colapso completo para configurações cuja massa se encontra acima desse limite [69].

## Considerações Finais

Apesar dos inúmeros testes bem sucedidos da Relatividade Geral, ainda carecemos de resultados que nos permitam avaliar até que ponto esse tratamento clássico é válido no regime de campos gravitacionais intensos. Objetos compactos constituem laboratórios excepcionais para procurar por resultados não contemplados pela Relatividade Geral. Neste trabalho estudamos as consequências que a inclusão, através do formalismo pseudo-complexo, de uma correção nas equações de campo associada a flutuações no vácuo pode contribuir para o nosso entendimento do colapso de corpos massivos. Nos concentramos em testar as equações de equilíbrio hidrostático modificadas em um contexto diferente de estrelas de nêutrons como apresentado em [3, 81]. Diante de um crescente interesse nas possíveis influências da matéria escura em objetos astrofísicos, um objeto compacto com matéria escura fermiônica foi considerado um ambiente adequado para aplicar a Relatividade Geral pseudo-complexa [61, 62, 63, 64, 65, 72].

O modelo examinado no Capítulo 4, apesar da simplicidade, nos permite destacar características gerais da Relatividade Geral pseudo-complexa como a possibilidade de objetos compactos de maior massa e compacidades vastamente superiores às previstas pela Relatividade Geral. Dentre os aprimoramentos ao modelo a serem buscados no futuro podemos destacar o estudo de equações de estado mais realistas, possivelmente com a inclusão de interações entre os férmions, além de uma análise para o exterior do objeto compacto. Modelos que apresentem aniquilação de matéria escura são particularmente importantes para predições testáveis, pois esse efeito pode alterar propriedades de estrelas de nêutrons como temperatura, momentum linear e momentum angular [62, 65]. Além da publicação que examina o objeto compacto composto de matéria escura fermiônica [67], o nosso grupo de pesquisa realizou outros trabalhos na área de objetos compactos desenvolvidos adotando a RG-pc que podem ser encontrados em [82, 83].

Nos encontramos em um momento oportuno para estudos teóricos de objetos compactos, pois além de novos dados referentes a ondas gravitacionais, medições astrofísicas na área de objetos compactos estão na iminência de um grande salto [84]. O experimento NICER, por exemplo, tem

---

como objetivo fornecer novas informações sobre o interior de estrelas de nêutrons assim como diminuir o erro presente em medições anteriores. É possível que nesse experimento já seja observada a influência de flutuações quânticas em parâmetros observáveis como massa, raio e compactidade [84]. Esses dados permitirão uma ampla análise dos diferentes modelos que visam descrever as condições extremas nas quais esses objetos se encontram. Esse cenário abre possibilidades de encontrar desvios com as predições da RG em um futuro próximo [85].

## Estruturas Matemáticas de Espaços Curvos

A Relatividade Geral é a teoria mais simples capaz de unir as ideias presentes na Relatividade Especial e na gravitação newtoniana. Nesse apêndice nos voltamos à tarefa de brevemente definir para o leitor não habituado algumas entidades matemáticas vitais na sua descrição. Para um estudo mais detalhado o leitor pode consultar, por exemplo, os seguintes textos [35, 37, 48, 49]. Conhecimentos prévios de álgebra tensorial serão assumidos. Vale a pena ressaltar que nesse capítulo não estamos levando em consideração o formalismo pseudo-complexo.

Nosso ponto de partida é a introdução do elemento de linha, que consiste na quantidade central da geometria Riemanniana. Intuitivamente ele nos fornece a noção de “distância quadrática infinitesimal” de maneira que um significado absoluto pode ser associado ao elemento de linha visto que a distância entre dois pontos é independente das coordenadas adotadas. O elemento de linha pode ser expresso através da seguinte forma quadrática

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.1})$$

onde  $g_{\mu\nu}$  representa as componentes do tensor de métrica  $\mathbf{g}$ , que são funções das coordenadas espaço-temporais. O tensor de métrica é um tensor covariante de segunda ordem simétrico (segue que em 4 dimensões apenas 10 componentes são independentes) e não-degenerado [49]. Segue que existe um único tensor contravariante de segunda ordem cujas componentes  $g^{\mu\nu}$  satisfazem [49]

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad (\text{A.2})$$

ou seja, se pensarmos em  $g_{\mu\nu}$  como uma matriz,  $g^{\mu\nu}$  representa a matriz inversa.

A partir do tensor de métrica podemos definir o símbolo de Christoffel de primeiro tipo

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right), \quad (\text{A.3})$$

e o de segundo tipo

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda} \right). \quad (\text{A.4})$$



Ambos são simétricos com relação aos índices  $\rho$  e  $\sigma$ ,

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \Gamma_{\alpha\sigma\rho}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\rho}. \quad (\text{A.6})$$

É válida ainda a seguinte relação

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} = \Gamma_{\alpha\beta\rho} + \Gamma_{\beta\alpha\rho} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\rho} + g_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\rho}. \quad (\text{A.7})$$

O símbolo de Christoffel de segundo tipo é um caso particular de uma quantidade mais geral, a conexão afim, presente em generalizações da geometria Riemanniana. Essa escolha de conexão possui duas importantes propriedades. Primeiramente a *torsão* do espaço-tempo,  $\mathcal{T}$  é nula

$$\mathcal{T}^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Temos ainda que a derivada covariante do tensor de métrica é nula

$$\nabla \mathbf{g} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Pode ser demonstrado ainda que é sempre possível escolher um sistema de coordenadas no qual todas as componentes dos símbolos de Christoffel anulam-se em um dado ponto.

Outra quantidade fundamental na descrição de um espaço-tempo curvo é o *tensor de curvatura*, que testa a natureza da geometria através da falha de derivadas covariantes em comutar. Apenas se todas as componentes do tensor de curvatura anulam-se a geometria é Euclideana. Para definir o tensor de curvatura considere a comutação de duas derivadas covariantes que atuam sobre um vetor covariante  $V_\alpha$

$$(\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma) V_\alpha = \mathcal{R}^\rho_{\alpha\beta\gamma} V_\rho. \quad (\text{A.10})$$

Os coeficientes  $\mathcal{R}^\rho_{\alpha\beta\gamma}$  definem as componentes do tensor de curvatura e são dadas por

$$\mathcal{R}^\rho_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} \Gamma^\rho_{\beta\delta} - \Gamma^\delta_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\gamma\delta}. \quad (\text{A.11})$$

O tensor de curvatura obedece as seguintes relações algébricas que expressaremos em termos de  $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} \mathcal{R}^\rho_{\beta\gamma\delta}$ ,

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{R}_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}. \quad (\text{A.13})$$

Temos ainda que a soma cíclica das componentes  $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  formada pela permutação de quaisquer 3 índices é nula. Por exemplo,

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \mathcal{R}_{\alpha\gamma\delta\beta} + \mathcal{R}_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0. \quad (\text{A.14})$$

O tensor de curvatura é fundamental na RG pois é a partir dele que construímos outras quantidades que nos proporcionam uma descrição completa da gravitação. Contraindo o tensor de curvatura definimos um outro tensor simétrico, denominado *tensor de Ricci*, cujas componentes são dadas por

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\alpha\nu\beta}. \quad (\text{A.15})$$

De (A.11) podemos escrever as componentes do tensor de Ricci como

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma}. \quad (\text{A.16})$$

Contraindo o tensor de Ricci obtemos o *escalar de curvatura de Ricci*:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\alpha\nu\beta}. \quad (\text{A.17})$$

Podemos definir ainda o tensor de Einstein, cujas componentes são definidas através de:

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}. \quad (\text{A.18})$$

O tensor de curvatura satisfaz ainda certas identidades diferenciais. À seguinte relação damos o nome de identidade de Bianchi

$$\nabla_{\gamma}\mathcal{R}^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + \nabla_{\beta}\mathcal{R}^{\mu}_{\nu\gamma\alpha} + \nabla_{\alpha}\mathcal{R}^{\mu}_{\nu\beta\gamma} \equiv 0. \quad (\text{A.19})$$

Diferenciando as propriedades (A.12) e (A.13) temos ainda

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\nabla_{\lambda}\mathcal{R}_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\nabla_{\lambda}\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}, \quad (\text{A.20})$$

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_{\lambda}\mathcal{R}_{\alpha\gamma\delta\beta} + \nabla_{\lambda}\mathcal{R}_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Pode ser demonstrado que as equações (A.19), (A.20) e (A.21) formam um conjunto completo de identidades algébricas para as derivadas covariantes do tensor de curvatura.

Um subcaso particularmente interessante para a Relatividade Geral pode ser obtido contraindo a identidade de Bianchi (A.19). Contraindo primeiramente os índices  $\mu$  e  $\alpha$  temos

$$\nabla_{\gamma}\mathcal{R}_{\nu\beta} - \nabla_{\beta}\mathcal{R}_{\nu\gamma} + \nabla_{\mu}\mathcal{R}^{\mu}_{\nu\beta\gamma} \equiv 0. \quad (\text{A.22})$$

Contraindo agora os índices  $\nu$  e  $\beta$

$$\nabla_{\gamma}\mathcal{R} - \nabla_{\beta}\mathcal{R}^{\beta}_{\gamma} - \nabla_{\mu}\mathcal{R}^{\mu}_{\gamma} \equiv 0. \quad (\text{A.23})$$

A equação acima pode ser reescrita como

$$\nabla_{\beta}\left(\mathcal{R}^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\alpha}\mathcal{R}\right) = 0. \quad (\text{A.24})$$

A expressão acima implica em

$$\nabla_{\beta} G^{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{A.25})$$

A identidade acima, juntamente com as equações de campo da RG implicam que o tensor de energia momentum deve satisfazer

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{A.26})$$

A equação (A.26) expressa a conservação covariante de energia e momentum.

## Derivação das Equações TOV na RG-pc

Nesse apêndice nos dedicaremos à derivação das equações de equilíbrio hidrostático na RG-pc dadas por (4.7) e (4.8), seguindo o procedimento proposto em [3]. Como mencionado no Capítulo 4 avaliaremos as equações de campo da RG-pc (4.3) frente ao elemento de linha de um objeto estático esfericamente simétrico

$$ds^2 = -e^{-\nu(r)} dt^2 + e^{\mu(r)} dr^2 + r^2(\sin^2(\theta)d\phi^2 + d\theta^2). \quad (\text{B.1})$$

Como visto no apêndice anterior o tensor de Einstein é composto pelo tensor de Ricci e pelo escalar de curvatura. Das equações (A.16) e (A.17) vemos que tais quantidades podem ser determinadas uma vez obtidos os símbolos de Christoffel. Calcular todos os símbolos, mesmo no caso de um elemento de linha relativamente simples como (B.1), pode ser uma tarefa extensa e tediosa. Felizmente existe uma forma mais simples de obter todos os símbolos não nulos, como apresentado em [3, 60]. As equações de Euler-Lagrange de linhas geodésicas na forma

$$\ddot{X}^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} \dot{X}^\nu \dot{X}^\lambda = 0; \quad \dot{X}^\alpha \equiv \frac{dX^\alpha}{ds}, \quad (\text{B.2})$$

nos fornecem todos os símbolos. Faremos a associação  $X^0 = t$ ,  $X^1 = r$ ,  $X^2 = \theta$  e  $X^3 = \phi$ . Logo ao calcularmos as equações de Euler-Lagrange para as linhas geodésicas, os símbolos de Christoffel podem ser identificados por comparação. As equações de Euler-Lagrange para o elemento de linha (B.1) podem ser obtidas através do seguinte princípio variacional [60]

$$\delta \int \left[ e^\nu (\dot{X}^0)^2 - e^\lambda \dot{r}^2 - r^2 (\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) \right] ds = 0. \quad (\text{B.3})$$

Do qual podemos identificar a seguinte lagrangeana

$$L = e^\nu (\dot{X}^0)^2 - e^\lambda \dot{r}^2 - r^2 (\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2). \quad (\text{B.4})$$

O próximo passo consiste na aplicação das equações de Euler-Lagrange, a saber

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial X^\alpha} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Para  $X^0$ , por exemplo, temos que:

$$\begin{aligned}\ddot{X}^0(2e^\nu) + 2\dot{X}^0\nu'e^\nu\dot{r} &= 0 \implies \\ \ddot{X}^0 + \dot{X}^0\dot{r}\nu' &= 0,\end{aligned}\tag{B.6}$$

onde a linha representa diferenciação com relação a  $r$ . Analogamente para  $r$  obtemos

$$\begin{aligned}-2\ddot{r}e^\lambda - 2\lambda'\dot{r}^2e^\lambda - \nu'e^\nu(\dot{X}^0)^2 + \lambda'e^\lambda\dot{r}^2 + 2r(\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) &= 0 \implies \\ \ddot{r} + \frac{1}{2}\lambda'\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\nu'e^{\nu-\lambda}(\dot{X}^0)^2 - re^{-\lambda}\dot{\theta}^2 - re^{-\lambda}\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 &= 0.\end{aligned}\tag{B.7}$$

Para  $\theta$  temos que

$$\begin{aligned}-2r^2\ddot{\theta} - 4\dot{\theta}r\dot{r} + 2r^2\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) &= 0 \implies \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) &= 0.\end{aligned}\tag{B.8}$$

Por fim para  $\phi$  segue que

$$\begin{aligned}-2r^2\sin^2(\theta)\ddot{\phi} - 4r\dot{r}\sin^2(\theta)\dot{\phi} - 4r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} &= 0 \implies \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\cot(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} &= 0.\end{aligned}\tag{B.9}$$

Agora obteremos os símbolos de Christoffel comparando os resultados acima com a equação geodésica. Segue que

$$\begin{aligned}\ddot{X}^0 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} \dot{X}^\nu \dot{X}^\lambda &= 0 \implies \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 01 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\nu'; \\ \ddot{X}^1 + \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} \dot{X}^\nu \dot{X}^\lambda &= 0 \implies \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda', \begin{Bmatrix} 1 \\ 00 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\nu'e^{\nu-\lambda}, \\ &\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -re^{-\lambda}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 33 \end{Bmatrix} = -re^{-\lambda}\sin^2(\theta); \\ \ddot{X}^2 + \begin{Bmatrix} 2 \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} \dot{X}^\nu \dot{X}^\lambda &= 0 \implies \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = -\sin(\theta)\cos(\theta); \\ \ddot{X}^3 + \begin{Bmatrix} 3 \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} \dot{X}^\nu \dot{X}^\lambda &= 0 \implies \begin{Bmatrix} 3 \\ 13 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix} = \cot(\theta).\end{aligned}$$

Com os símbolos de Christoffel estamos aptos a calcular as componentes do tensor de Ricci e obter o escalar de curvatura. As componentes do tensor de Ricci podem ser obtidas através da expressão [3]

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = - \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta\nu \end{Bmatrix}_{|\mu} + \begin{Bmatrix} \beta \\ \mu\nu \end{Bmatrix}_{|\beta} - \begin{Bmatrix} \beta \\ \tau\mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ \beta\nu \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta \\ \tau\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ \mu\nu \end{Bmatrix}.\tag{B.10}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{00} &= - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta 0 \end{matrix} \right\}_{|_0} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ 00 \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 00 \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \nu'' e^{\nu-\lambda} + \nu' (\nu' - \lambda') e^{\nu-\lambda} \right) - \nu' \left( \frac{1}{2} \nu' e^{\nu-\lambda} \right) + \frac{1}{2} \nu' e^{\nu-\lambda} \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{2} \lambda' + \frac{1}{2} \nu' \right) \\
 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu' \lambda' - \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} + \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\nu'^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} \right), \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{11} &= - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta 1 \end{matrix} \right\}_{|_1} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ 11 \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 11 \end{matrix} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \nu'' - \frac{1}{2} \lambda'' + \frac{2}{r^2} + \frac{\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2} - \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{1}{4} \lambda'^2 + \frac{1}{2} \lambda' \left( \frac{1}{2} \lambda' + \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \nu'' + \lambda'' - \frac{4}{r^2} - \lambda'' + \frac{4}{r^2} + \frac{1}{2} \nu'^2 + \frac{1}{2} \lambda'^2 - \frac{1}{2} \lambda'^2 - \frac{\nu' \lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} \right), \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{22} &= - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta 2 \end{matrix} \right\}_{|_2} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ 22 \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 22 \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sin^2(\theta)} - (re^{-\lambda})' + 2e^{-\lambda} - \cot^2(\theta) - re^{-\lambda} \left( \frac{2}{r} + \frac{\lambda' + \nu'}{2} \right) \\
 &= 1 - (re^{-\lambda})' - re^{-\lambda} \left( \frac{\lambda' + \nu'}{2} \right), \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{33} &= - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta 3 \end{matrix} \right\}_{|_3} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ 33 \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 33 \end{matrix} \right\} \\
 &= \sin^2(\theta) (-re^{-\lambda})' - \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 2\cos^2(\theta) + 2e^{-\lambda} \sin^2(\theta) \\
 &\quad - \sin(\theta) \cos(\theta) \cot(\theta) - re^{-\lambda} \sin^2(\theta) \left( \frac{\lambda' + \nu'}{2} + \frac{2}{r} \right) \\
 &= 1 + \sin^2(\theta) (-re^{-\lambda})' - \sin^2(\theta) re^{-\lambda} \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) - \cos^2(\theta) \\
 &= -\sin^2(\theta) \left[ (re^{-\lambda})' - 1 + re^{-\lambda} \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) \right]. \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

Observe que  $\mathcal{R}_{33} = \sin^2(\theta)\mathcal{R}_{22}$ . O escalar de Ricci por sua vez é dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= g^{00}\mathcal{R}_{00} + g^{11}\mathcal{R}_{11} + g^{22}\mathcal{R}_{22} + g^{33}\mathcal{R}_{33} \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} \left[ 1 - (re^{-\lambda})' - re^{-\lambda} \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \left[ -\sin^2(\theta) \left[ (re^{-\lambda})' - 1 + re^{-\lambda} \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) \right] \right].
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Simplificando a expressão acima temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= -e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \\
 &\quad + \frac{1 - (re^{-\lambda})'}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r} \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) + \frac{1 - (re^{-\lambda})'}{r^2} - \frac{1}{r}e^{-\lambda} \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) \\
 &= -e^{-\lambda} \left( \nu'' - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{2(\nu' - \lambda')}{r} + \frac{2}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2}.
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Com o tensor de Ricci e o escalar de curvatura determinados o próximo passo consiste em obter as componentes do tensor de Einstein na sua forma mista. Observe que como o tensor de métrica e o tensor de Ricci não possuem termos cruzados podemos escrever as componentes do tensor de Einstein como

$$G_{\mu}^{\mu} = \mathcal{R}_{\mu}^{\mu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}. \tag{B.17}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 G_0^0 &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_0^0 - \mathcal{R}_1^1 - \mathcal{R}_2^2 - \mathcal{R}_3^3) \\
 &= -\frac{1}{2} \left( e^{-\nu}\mathcal{R}_{00} + e^{-\lambda}\mathcal{R}_{11} + \frac{2}{r^2}\mathcal{R}_{22} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-\lambda}}{2} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{e^{-\lambda}}{2} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{r^2} \left( 1 - (re^{-\lambda})' - re^{-\lambda} \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) \right) \\
 &= e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right] - \frac{1}{r^2},
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
 G_1^1 &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \mathcal{R}_{11} + \frac{e^{-\nu}}{2} \mathcal{R}_{00} - \frac{1}{R^2} \mathcal{R}_{22} \\
 &= -\frac{e^{-\lambda}}{4} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) + \frac{e^{-\lambda}}{4} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} (r e^{-\lambda})' + \frac{e^{-\lambda}}{r} \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) \\
 &= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2},
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
 G_2^2 &= -\frac{e^{-\lambda}}{2} \mathcal{R}_{11} + \frac{e^{-\nu}}{2} \mathcal{R}_{00} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{4} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) + \frac{e^{-\lambda}}{4} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} \right) \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right).
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

Logo, visto que estamos considerando tanto  $\mathbf{T}$  quanto  $\mathbf{\Lambda}$  como fluidos perfeitos isotrópicos, as equações de campo (4.3) assumem a forma:

$$e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = -8\pi(\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda), \tag{B.21}$$

$$e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = 8\pi(p_m + p_\Lambda), \tag{B.22}$$

$$e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} \right] = 8\pi(p_m + p_\Lambda). \tag{B.23}$$

Agora vamos obter relações úteis para os coeficientes  $\lambda$  e  $\nu$ . Observe que:

$$\begin{aligned}
 e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} &= -8\pi(\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \implies \\
 e^{-\lambda} (1 - r\lambda') - 1 &= -8\pi r^2 (\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \implies \\
 \int_0^r \left[ (r^* e^{-\lambda})' - 1 \right] dr^* &= \int_0^r -8\pi r^{*2} (\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) dr^* \implies \\
 r e^{-\lambda} - r &= -2m_m + 2m_\Lambda \implies \\
 e^{-\lambda} &= 1 - \frac{2m_m}{r} + \frac{2m_\Lambda}{r},
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

onde as funções de massa são dadas por:

$$m_m = 4\pi \int_0^r r^{*2} \varepsilon_m dr^*, \tag{B.25}$$



$$m_\Lambda = -4\pi \int_0^r r^{*2} \varepsilon_\Lambda dr^*. \quad (\text{B.26})$$

Para o coeficiente temporal subtraímos (B.21) de (B.22):

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{\nu' + \lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] &= 8\pi (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \implies \\ e^{-\lambda} [\nu' + \lambda'] &= 8\pi r (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \implies \\ \nu' + \lambda' &= 8\pi r e^\lambda (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Integrando temos que:

$$\begin{aligned} \int \nu' dr &= - \int \lambda' dr + 8\pi \int r e^\lambda (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) dr \implies \\ \nu &= -\lambda + 8\pi \int r e^\lambda (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) dr \implies \\ e^\nu &= e^{-\lambda} e^{\frac{f+c}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Onde  $c$  é uma constante e  $f = 8\pi \int r e^\lambda (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) dr$ . Antes de derivarmos a TOV referente a esse modelo faremos alguns cálculos auxiliares. Primeiramente com o intuito de simplificar a notação considere

$$\mathcal{R}_{00} = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \alpha_0, \quad \mathcal{R}_{11} = -\frac{1}{2} \alpha_1, \quad \mathcal{R}_{22} = -\alpha_2, \quad \mathcal{R}_{33} = -\alpha_3 = -\alpha_2 \sin^2(\theta).$$

Nessa notação as componentes do tensor de Einstein são reescritas como:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -\frac{1}{2} \left( e^{-\nu} \mathcal{R}_{00} + e^{-\lambda} \mathcal{R}_{11} + \frac{2}{R^2} \mathcal{R}_{22} \right) \\ &= -\frac{1}{4} e^{-\lambda} \alpha_0 + \frac{1}{4} e^{-\lambda} \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r^2} = -8\pi (\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) = \beta_0, \\ G_1^1 &= \frac{1}{4} e^{-\lambda} \alpha_0 - \frac{1}{4} e^{-\lambda} \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r^2} = 8\pi (p_m + p_\Lambda) = \beta_1, \\ G_2^2 &= \frac{1}{4} e^{-\lambda} (\alpha_0 + \alpha_1) = 8\pi (p_m + p_\Lambda) = \beta_2. \end{aligned}$$

Obviamente das expressões acima  $\beta_1 = \beta_2$ , porém distinguimos momentaneamente apenas para ressaltar a possibilidade de se trabalhar com um fluido anisotrópico, onde a igualdade não seria verdadeira. Resolvendo para  $\alpha$  temos:

$$\frac{2\alpha_2}{r^2} = \beta_0 + \beta_1, \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda} (\alpha_0 - \alpha_1) = \beta_1 - \beta_0, \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{1}{4} e^{-\lambda} (\alpha_0 + \alpha_1) = \beta_2. \quad (\text{B.31})$$

Manipulando as duas últimas equações podemos reescrever o sistema como:

$$e^{-\lambda}\alpha_0 = 2\beta_2 + \beta_1 - \beta_0, \quad (\text{B.32})$$

$$e^{-\lambda}\alpha_1 = 2\beta_2 - \beta_1 + \beta_0, \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{2\alpha_2}{r^2} = \beta_0 + \beta_1. \quad (\text{B.34})$$

Visto que:

$$\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu' + \frac{2\nu'}{r} = \alpha_0, \quad (\text{B.35})$$

$$\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} = \alpha_1, \quad (\text{B.36})$$

$$e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right] - 1 = \alpha_2. \quad (\text{B.37})$$

Valendo-se das duas primeiras equações acima temos que:

$$\nu' + \lambda' = \frac{1}{2}r(\alpha_0 - \alpha_1) \implies \quad (\text{B.38})$$

$$\nu'' + \lambda'' = \frac{1}{2}[(\alpha_0 - \alpha_1) + r(\alpha'_0 - \alpha'_1)]. \quad (\text{B.39})$$

Eliminando  $\nu'$  e  $\nu''$  da equação para  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{r}{2}(\alpha'_0 - \alpha'_1) - \lambda'' + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) - \lambda' \right)^2 \\ &\quad - \frac{\lambda'}{2} \left( \frac{r}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) - \lambda' \right) - \frac{2\lambda'}{r} \\ &= -\lambda'' + \frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{r}{2}(\alpha'_0 - \alpha'_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{4}(\alpha_0 - \alpha_1)^2 + \lambda'^2 - \lambda'r(\alpha_0 - \alpha_1) \right) \\ &\quad - \frac{\lambda'r}{4}(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{\lambda'^2}{2} - \frac{2\lambda'}{r} \\ &= \left[ \frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{r}{2}(\alpha'_0 - \alpha'_1) - \frac{3}{4}\lambda'r(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{r^2}{8}(\alpha_0 - \alpha_1)^2 \right] \\ &\quad - \left( \lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

É útil notar que:

$$\begin{aligned} \frac{e^\lambda}{r}(re^{-\lambda})'' &= \frac{e^\lambda}{r} \left( e^{-\lambda} - \lambda're^{-\lambda} \right)' \\ &= \frac{e^\lambda}{r} \left( -\lambda'e^{-\lambda} - \lambda''re^{-\lambda} - \lambda'e^{-\lambda} + \lambda'^2re^{-\lambda} \right) \\ &= - \left( \lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

E como

$$\begin{aligned} (re^{-\lambda})' &= \alpha_2 + 1 - \frac{re^{-\lambda}}{2} \frac{1}{2} r (\alpha_0 - \alpha_1) \\ &= \alpha_2 + 1 - \frac{r^2 e^{-\lambda}}{4} (\alpha_0 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Temos que:

$$\begin{aligned} - \left( \lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} \right) &= \frac{e^\lambda}{r} (re^{-\lambda})'' \\ &= \frac{e^\lambda}{r} \left( \alpha_2 + 1 - \frac{r^2 e^{-\lambda}}{4} (\alpha_0 - \alpha_1) \right)'. \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Portanto:

$$- \left( \lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} \right) = \frac{e^\lambda}{r} \alpha'_2 - \frac{1}{2} (\alpha_0 - \alpha_1) - \frac{r}{4} (\alpha'_0 - \alpha'_1) + \frac{\lambda' r}{4} (\alpha_0 - \alpha_1). \quad (\text{B.44})$$

Unindo esses resultados:

$$\frac{e^\lambda}{r} \alpha'_2 + \frac{1}{4} r (\alpha'_0 - \alpha'_1) - \frac{\lambda' r}{2} (\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{r^2}{8} (\alpha_0 - \alpha_1)^2 = \alpha_1. \quad (\text{B.45})$$

Essa será a equação diferencial utilizada para chegar à TOV do modelo. Contudo antes de derivar a TOV propriamente dita precisamos de mais algumas relações. Note que:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} (\alpha_0 - \alpha_1) &= 16\pi (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \implies \\ \alpha_0 - \alpha_1 &= 16\pi e^\lambda (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \implies \\ \alpha'_0 - \alpha'_1 &= 16\pi e^\lambda (p'_m + p'_\Lambda + \varepsilon'_m + \varepsilon'_\Lambda) \\ &\quad + 16\pi \lambda' e^\lambda (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \implies \\ e^{-\lambda} (\alpha'_0 - \alpha'_1) &= 16\pi \left[ \lambda' (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) + (p'_m + p'_\Lambda + \varepsilon'_m + \varepsilon'_\Lambda) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Outra relação necessária é:

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha_2}{r^2} &= 8\pi (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda) \implies \\ \alpha_2 &= 4\pi r^2 (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda) \implies \\ \alpha'_2 &= 8\pi r (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda) + 4\pi r^2 (p'_m + p'_\Lambda - \varepsilon'_m - \varepsilon'_\Lambda) \implies \\ \frac{2\alpha'_2}{r^2} &= \frac{16\pi}{r} (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda) + 8\pi (p'_m + p'_\Lambda - \varepsilon'_m - \varepsilon'_\Lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

A derivação da TOV consiste em substituir:

$$e^{-\lambda}(\alpha_0 - \alpha_1) = 16\pi (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \quad (\text{B.48})$$

$$e^{-\lambda}(\alpha'_0 - \alpha'_1) = 16\pi \left[ \lambda' (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) + (p'_m + p'_\Lambda + \varepsilon'_m + \varepsilon'_\Lambda) \right] \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{2\alpha_2}{r^2} = 8\pi (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda) \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{2\alpha'_2}{r^2} = \frac{16\pi}{r} (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda) + 8\pi (p'_m + p'_\Lambda - \varepsilon'_m - \varepsilon'_\Lambda) \quad (\text{B.51})$$

$$e^{-\lambda}\alpha_1 = 8\pi (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda), \quad (\text{B.52})$$

na equação (B.45). Logo:

$$\begin{aligned} & 8\pi (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda) e^\lambda + 4\pi r (p'_m + p'_\Lambda - \varepsilon'_m - \varepsilon'_\Lambda) e^\lambda \\ & + 4\pi r \left[ \lambda' (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) + (p'_m + p'_\Lambda + \varepsilon'_m + \varepsilon'_\Lambda) \right] e^\lambda \\ & - 8\pi \lambda' r (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) e^\lambda \\ & + \frac{(16\pi)^2}{8} r^2 (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda)^2 e^{2\lambda} = 8\pi (p_m + p_\Lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_\Lambda) e^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Segundo:

$$\begin{aligned} & 4\pi r (p'_m + p'_\Lambda - \varepsilon'_m - \varepsilon'_\Lambda) + 4\pi r (p'_m + p'_\Lambda + \varepsilon'_m + \varepsilon'_\Lambda) \\ & = -4\pi r \lambda' (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) + 16\pi r \lambda' (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \\ & - \frac{(16\pi)^2}{32\pi r} r^2 (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda)^2 e^\lambda. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 2(p'_m + p'_\Lambda) & = \lambda' (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \\ & - \frac{(16\pi)^2 r e^\lambda}{32\pi} (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda)^2 \implies \\ p'_m + p'_\Lambda & = \frac{\lambda'}{2} (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) - 4\pi r e^\lambda (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} & = 1 - \frac{2m_m}{r} + \frac{2m_\Lambda}{r} \implies \\ -\lambda' e^{-\lambda} & = \frac{2m_m}{r^2} - \frac{2m_\Lambda}{r^2} + \frac{2m'_\Lambda}{r} - \frac{2m'_m}{r} \implies \\ \lambda' & = -\frac{e^\lambda}{r^2} (2m_m - 2m_\Lambda + 2rm'_\Lambda - 2rm'_m). \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Substituindo esse resultado em (B.54):

$$\begin{aligned} p'_m + p'_\Lambda & = -(p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) \\ & \frac{e^\lambda}{r^2} [m_m - m_\Lambda + rm'_\Lambda - rm'_m + 4\pi r^3 (p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda)]. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Utilizando o fato que  $m'_\Lambda = -4\pi r^2 \varepsilon_\Lambda$ ,  $m'_m = 4\pi r^2 \varepsilon_m$  e  $e^\lambda = \frac{r}{r-2m_m+2m_\Lambda}$  temos que:

$$p'_m + p'_\Lambda = -\frac{(p_m + p_\Lambda + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda)}{r(r - 2m_m + 2m_\Lambda)} [m_m - m_\Lambda + 4\pi r^3(p_m + p_\Lambda)]. \quad (\text{B.57})$$

Como é assumida que a única interação entre os fluidos é a gravitacional podemos finalmente escrever o sistema TOV:

$$\frac{dp_m}{dr} = -\frac{(\varepsilon_m + p_m)}{r(r - 2m_m + 2m_\Lambda)} [m_m - m_\Lambda + 4\pi r^3(p_m + p_\Lambda)], \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{dp_\Lambda}{dr} = -\frac{(\varepsilon_\Lambda + p_\Lambda)}{r(r - 2m_m + 2m_\Lambda)} [m_m - m_\Lambda + 4\pi r^3(p_m + p_\Lambda)]. \quad (\text{B.59})$$

Observe que do anulamento das variáveis relacionadas à energia escura nas expressões acima recuperamos a TOV usual da RG expressa por (4.1).

## Matéria Escura e o Modelo do Portal de Higgs

Nessa seção apresentaremos um possível mecanismo para o surgimento da matéria escura fermiônica que compõe o objeto compacto estudado no Capítulo 4. O modelo considera a matéria escura como uma extensão renormalizável do modelo padrão [66, 86]. O modelo adota a seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_S - g_\varphi S \bar{\chi} \chi + \mathcal{L}_I ; \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{L}_\chi = \bar{\chi} (i \not{\partial} - m_{\chi_0}) \chi ; \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S - V_S ; \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{L}_I = -\lambda_1 \Phi^\dagger \Phi S - \lambda_2 \Phi^\dagger \Phi S^2 , \quad (\text{C.4})$$

$$(\text{C.5})$$

onde  $\mathcal{L}_{SM}$  representa a densidade lagrangeana do modelo padrão,  $\Phi$  representa o Higgs e  $S$  é um campo escalar responsável pela conexão com o setor escuro. A matéria escura consiste em um singleto fermiônico denotado por  $\chi$ . O potencial  $V_S$  é dado por:

$$V_S = \frac{m_0^2}{2} S^2 + \frac{\lambda_3}{3!} S^3 + \frac{\lambda_4}{4!} S^4. \quad (\text{C.6})$$

A forma do potencial acima indica claramente a possibilidade de quebra espontânea de simetria no modelo, que é parametrizado introduzindo  $\langle S \rangle = x_0$ . Considerando quebra espontânea de simetria em ambos setores podemos expressar o campo de Higgs como

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 + h(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

e

$$S = x_0 + \varphi. \quad (\text{C.8})$$

Existe a possibilidade de que a interação entre o modelo padrão e o setor escuro ocorra apenas através do campo escalar bosônico de Higgs, logo o presente modelo pertence a uma classe de teorias conhecidas como *matéria escura via portal de Higgs*.

Escrevendo

$$\mathcal{V} = V_S + V \left( \Phi^\dagger \Phi \right), \quad (\text{C.9})$$

onde o potencial de Higgs do modelo padrão é dado por

$$V \left( \Phi^\dagger \Phi \right) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda \left( \Phi^\dagger \Phi \right)^2. \quad (\text{C.10})$$

Impondo que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial h} \right|_{v_0, x_0} = \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} \right|_{v_0, x_0} = 0, \quad (\text{C.11})$$

obtemos

$$m_0^2 = -\frac{\lambda_3}{2} x_0 - \frac{\lambda_4}{6} x_0^2 - \lambda_2 v_0^2 - \frac{\lambda_1 v_0^2}{2x_0}, \quad (\text{C.12})$$

assim como

$$\mu^2 = \lambda v_0^2 + x_0 (\lambda_1 + \lambda_2 x_0). \quad (\text{C.13})$$

Os estados escalares neutros são definidos por

$$H_0 = \frac{1}{2} (v_0 + h), \quad (\text{C.14})$$

juntamente com a equação (C.8). Além disso  $h$  e  $\varphi$  são misturados para produzir a matriz de massa dada por [86]

$$M_{hh}^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial h^2} \right|_{h=\varphi=0} = 2\lambda v_0^2, \quad (\text{C.15})$$

$$M_{ss}^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi^2} \right|_{h=\varphi=0} = \frac{\lambda_3 x_0}{2} + \frac{\lambda_4}{3} x_0^2 - \frac{\lambda_1 v_0^2}{2x_0}, \quad (\text{C.16})$$

$$M_{hs}^2 = M_{sh}^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi \partial h} \right|_{h=\varphi=0} = (\lambda_1 + 2\lambda_2 x_0) v_0. \quad (\text{C.17})$$

Os dois campos físicos de Higgs  $h_1$  e  $h_2$  correspondem a misturas dos campos  $\varphi$  e  $h$ . Os autoestados de massa são obtidos de

$$h_1 = \varphi \sin \theta + h \cos \theta, \quad (\text{C.18})$$

$$h_2 = \varphi \cos \theta - h \sin \theta. \quad (\text{C.19})$$

O ângulo de mistura é definido por

$$\tan \theta = \frac{y}{1 + \sqrt{1 + y^2}}, \quad (\text{C.20})$$

onde

$$y = \frac{2M_{hs}^2}{M_{hh}^2 - M_{ss}^2}. \quad (\text{C.21})$$

As massas correspondentes aos campos  $h_1$  e  $h_2$  são dadas por

$$m_{1,2}^2 = \frac{M_{hh}^2 + M_{ss}^2}{2} \pm \frac{M_{hh}^2 - M_{ss}^2}{2} \sqrt{1 + y^2}. \quad (\text{C.22})$$

Nessa formulação o Higgs é representado pelo campo  $h_1$  com massa de 125 GeV.

Para simular objeto compacto exótico do Capítulo 4 consideramos  $\theta = 0$  visando desacoplar o Higgs físico do Higgs escuro, desta maneira fechando o portal de Higgs. Essa escolha também desacopla a matéria escura da matéria ordinária e transforma o sistema do singlete fermiônico em um gás de férmions não interagente de *WIMPs*<sup>26</sup>. Existe uma interação residual do férmion com o Higgs escuro. Todavia após a quebra espontânea de simetria, o férmion adquire uma massa  $m_\chi = m_{\chi 0} + g_\varphi x_0$ , onde  $g_\varphi$  representa o acoplamento que mede a interação do férmion com as demais partículas. A massa  $m_\chi$  foi tratada como um parâmetro independente (uma vez observado que  $m_{\chi 0}$  é um parâmetro livre) e diferentes valores foram abordados para avaliar sua influência no objeto compacto resultante.

---

<sup>26</sup> Partículas massivas fracamente interagentes (Weakly Interacting Massive Particles, em inglês) são um conjunto de partículas hipotéticas que figuram entre os fortes candidatos a matéria escura.



## Limite para a Compacidade na RG

De maneira geral as equações de equilíbrio hidrostático devem ser resolvidas numericamente, todavia uma solução analítica é de particular interesse pois nos fornece um limite para a compacidade válido para qualquer estrela estática que satisfaz (4.1), independentemente da equação de estado adotada. A solução com densidade de energia uniforme é a responsável por estabelecer esse limite [54]. Trata-se de uma solução claramente idealizada porque para manter a densidade de energia uniforme o corpo deve ser incompressível. Qualquer solução que apresentar uma massa igual ou superior ao caso incompressível irá inevitavelmente sofrer o colapso gravitacional.

De (4.1) é fácil observar que uma densidade de energia uniforme  $\varepsilon_0$  implica em

$$m(r) = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_0 r^3, \quad (\text{D.1})$$

segue que na superfície onde  $r = R$  temos que

$$M = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_0 R^3. \quad (\text{D.2})$$

A equação de equilíbrio hidrostático nesse caso assume a forma

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4\pi r}{3} \frac{(p + \varepsilon_0)(3p + \varepsilon_0)}{\left(1 - \frac{8\pi\varepsilon_0}{3}r^2\right)}. \quad (\text{D.3})$$

Manipulando a equação acima segue que

$$\int_{p_C}^p \frac{dp^*}{(p^* + \varepsilon_0)(3p^* + \varepsilon_0)} = -\frac{4\pi}{3} \int_0^r \frac{r^* dr^*}{\left(1 - \frac{8\pi\varepsilon_0}{3}(r^*)^2\right)}, \quad (\text{D.4})$$

onde  $p_C$  denota a pressão central. Integrando o lado direito da expressão acima obtemos

$$-\frac{4\pi}{3} \int_0^r \frac{r^* dr^*}{\left(1 - \frac{8\pi\varepsilon_0}{3}(r^*)^2\right)} = \frac{1}{4\varepsilon_0} \ln \left(1 - \frac{8\pi\varepsilon_0}{3}r^2\right). \quad (\text{D.5})$$

E integrando o lado esquerdo temos que

$$\int_{p_C}^p \frac{dp^*}{(p^* + \varepsilon_0)(3p^* + \varepsilon_0)} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{3p + \varepsilon_0}{p + \varepsilon_0} \right) - \ln \left( \frac{3p_C + \varepsilon_0}{p_C + \varepsilon_0} \right) \right]. \quad (\text{D.6})$$

Igualando (D.5) e (D.6), após algumas manipulações obtemos

$$\frac{3p + \varepsilon_0}{p + \varepsilon_0} = \frac{3p_C + \varepsilon_0}{p_C + \varepsilon_0} \sqrt{1 - \frac{8\pi\varepsilon_0 r^2}{3}}. \quad (\text{D.7})$$

Expressando o argumento da raiz quadrada acima em termos de  $M$  temos que

$$\frac{3p + \varepsilon_0}{p + \varepsilon_0} = \frac{3p_C + \varepsilon_0}{p_C + \varepsilon_0} \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}. \quad (\text{D.8})$$

Com o objetivo de eliminar  $p_C$  substituímos  $r = R$  e  $p = 0$  na equação (D.8)

$$\frac{2M}{R} = 1 - \frac{(p_C + \varepsilon_0)^2}{(3p_C + \varepsilon_0)^2}. \quad (\text{D.9})$$

A equação (D.9) já seria suficiente para estabelecer o limite de compacidade, todavia como faltam poucas passagens para obter a solução final para o caso de densidade de energia uniforme primeiramente finalizaremos esse cálculo. Manipulando um pouco (D.9) obtemos

$$\frac{3p_C + \varepsilon_0}{p_C + \varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}. \quad (\text{D.10})$$

Segue que (D.8) pode ser reescrita como

$$\frac{3p + \varepsilon_0}{p + \varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}. \quad (\text{D.11})$$

Resolvendo a equação (D.11) obtemos facilmente

$$\frac{p}{\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}}. \quad (\text{D.12})$$

Essa é a solução da equação de equilíbrio hidrostático com densidade de energia uniforme na RG. Para obter o limite de massa voltamos para o caso  $r = 0$  na equação (D.12), ou seja,

$$\frac{2M}{R} = 1 - \frac{(p_C + \varepsilon_0)^2}{(3p_C + \varepsilon_0)^2}. \quad (\text{D.13})$$

Introduzindo um parâmetro  $\sigma = \frac{\varepsilon_0}{p_C}$  a equação acima pode ser escrita como

$$\frac{2M}{R} = 1 - \frac{(1 + \sigma)^2}{(3 + \sigma)^2}. \quad (\text{D.14})$$

A compacidade é máxima quando

$$f(\sigma) = \frac{1}{3 + \sigma} + \frac{\sigma}{3 + \sigma} \quad (\text{D.15})$$

atinge seu mínimo. Por inspeção é imediato notar que isso ocorre quando  $\sigma = 0$ . Logo

$$\frac{2M}{R} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \quad (\text{D.16})$$

A equação (D.16) estabelece o limite de compacidade na RG.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein. A generalization of the relativistic theory of gravitation. *Ann. Math. Second Ser.*, 46:578, 1945.
- [2] A. Einstein. A generalized theory of gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, 20:35, 1948.
- [3] P. O Hess, M. Schäfer, and W. Greiner. *Pseudo-Complex General Relativity*. FIAS Interdisciplinary Science Series. Springer, Switzerland, 2016.
- [4] M. Born. A suggestion for unifying quantum theory and relativity. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 165(921):291–303, 1938.
- [5] Max Born. Reciprocity theory of elementary particles. *Rev. Mod. Phys.*, 21:463–473, 1949.
- [6] Ali H. Chamseddine and Viatcheslav Mukhanov. Mimetic dark matter. *JHEP*, 11:135, 2013.
- [7] Eleftherios Papantonopoulos, editor. *Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances*. Springer, New York, 2015.
- [8] Peter O. Hess and Walter Greiner. Pseudo-complex General Relativity. *Int. J. Mod. Phys.*, E18:51–77, 2009.
- [9] F. Catoni, D. Boccaletti, R. Cannata, V. Catoni, E. Nichelatti, and P. Zampetti. *The Mathematics of Minkowski Space-Time: With an Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [10] Carlos Barcelo, Stefano Liberati, Sebastiano Sonego, and Matt Visser. Fate of gravitational collapse in semiclassical gravity. *Phys. Rev.*, D77:044032, 2008.
- [11] Matt Visser. Gravitational vacuum polarization. I: Energy conditions in the Hartle-Hawking vacuum. *Phys. Rev.*, D54:5103–5115, 1996.

- 
- [12] Matt Visser. Gravitational vacuum polarization. II: Energy conditions in the Boulware vacuum. *Phys. Rev.*, D54:5116–5122, 1996.
- [13] Matt Visser. Gravitational vacuum polarization. IV: Energy conditions in the Unruh vacuum. *Phys. Rev.*, D56:936–952, 1997.
- [14] P. F. Kelly and Robert B. Mann. Ghost properties of algebraically extended theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 3:705, 1986.
- [15] F. Antonuccio. Semi-complex analysis and mathematical physics, 1993. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9311032.pdf> ; Acessado em janeiro de 2018.
- [16] E. Grgin. *Structural Unification of Quantum Mechanics and Relativity*. Number v. 1 in Structural Unification of Quantum Mechanics and Relativity. AuthorHouse, Bloomington, 2007.
- [17] W. F. Chen. Quantum field theory and differential geometry. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 10:1350003, 2013.
- [18] S. W. Hawking and Thomas Hertog. Living with ghosts. *Phys. Rev.*, D65:103515, 2002.
- [19] Marek A. Abramowicz, Wlodek Kluzniak, and Jean-Pierre Lasota. No observational proof of the black hole event-horizon. *Astron. Astrophys.*, 396:L31–L34, 2002.
- [20] Andreas Eckart, Andreas Hüttemann, Claus Kiefer, Silke Britzen, Michal Zajaček, Claus Lämmerzahl, Manfred Stöckler, Monica Valencia-S, Vladimir Karas, and Macarena García-Marín. The Milky Way’s supermassive black hole: How good a case is it? *Found. Phys.*, 47(5):553–624, 2017.
- [21] A.S.T. Pires. *Geometria Diferencial Para Físicos*. Livraria da Física, São Paulo, 2015.
- [22] B. P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [23] Peter O. Hess. The black hole merger event GW150914 within a modified theory of General Relativity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 462(3):3026–3030, 2016.
- [24] Alex B. Nielsen and Ofek Birnholtz. Testing pseudo-complex general relativity with gravitational waves, 2017. Disponível em <https://arxiv.org/abs/1708.03334>; Acessado em janeiro de 2018.
- [25] Thomas Schönenbach, Gunther Caspar, Peter O. Hess, Thomas Boller, Andreas Müller, Mirko Schäfer, and Walter Greiner. Experimental tests of pseudo-complex general relativity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, (4):2999–3009, 2013.

- 
- [26] I.M. Yaglom. *A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis*. Heidelberg Science Library. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [27] L. Sobrero. *Theorie der ebenen Elastizität unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen*. Hamburger mathematische Einzelschriften. B.G. Teubner, Leipzig, 1934.
- [28] Torsten Hertig, Jens Philip Höhmann, and Ralf Otte. Hypercomplex algebras and their application to the mathematical formulation of quantum theory, 2014. Disponível em <https://arxiv.org/abs/1406.1014> ; Acessado em janeiro de 2018.
- [29] Dwight E. Neuenschwander. *Emmy Noether's Wonderful Theorem*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2011.
- [30] Andrei Y. Khrennikov. *Contextual Approach to Quantum Formalism*. Fundamental Theories of Physics. Springer, Netherlands, 2009.
- [31] Joseph Hucks. Hyperbolic complex structures in physics. *J. Math. Phys.*, 34:5986–6008, 1993.
- [32] N Borota, Eduardo Flores, and Thomas Osler. Spacetime numbers the easy way. *Mathematics and Computer Education*, 34, 03 2000.
- [33] F. Catoni, D. Boccaletti, R. Cannata, V. Catoni, and P. Zampetti. *Geometry of Minkowski Space-Time*. SpringerBriefs in Physics. Springer, Heidelberg, 2011.
- [34] M.G. Scheffers. Sur la généralisation des fonctions analytiques. *C.R. Acad. Sc.*, 116:1114–1117, 1893.
- [35] M. Carmeli. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. World Scientific Publishing, Singapore, 2001.
- [36] Y. Baryshev and P. Teerikorpi. *Discovery of Cosmic Fractals*. World Scientific, Singapore, 2002.
- [37] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [38] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004.
- [39] Erast B. Gliner. Algebraic properties of the energy-momentum tensor and vacuum-like states of matter. *SOVIET PHYSICS JETP*, 22(2), Fev 1966.
- [40] Hans Reichenbach. *The Philosophy of Space and Time*. Dover, New York, 2015.
- [41] Irina G. Dymnikova. The algebraic structure of a cosmological term in spherically symmetric solutions. *Phys. Lett.*, B472:33–38, 2000.

- 
- [42] A.J. Kox and J. Eisenstaedt. *The Universe of General Relativity*. Einstein Studies. Birkhäuser Basel, Boston, 2005.
- [43] Jerome Martin. Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask). *Comptes Rendus Physique*, 13:566–665, 2012.
- [44] David Lovelock. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, 12:498–501, 1971.
- [45] David Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *J. Math. Phys.*, 13:874–876, 1972.
- [46] John W. Moffat. Generalized theory of gravitation. *Foundations of Physics*, 14(12):1217–1252, 1984.
- [47] J. W. Moffat. New theory of gravitation. *Phys. Rev. D*, 19:3554–3558, Jun 1979.
- [48] Y. Choquet-Bruhat. *General Relativity and the Einstein Equations*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [49] J. Stewart. *Advanced General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [50] J.L. Basdevant. *Variational Principles in Physics*. Lectures on Quantum Mechanics. Springer, New York, 2006.
- [51] C. Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Books On Physics. Dover Publications, New York, 1970.
- [52] Frederic P. Schuller, Mattias N. R. Wohlfarth, and Thomas W. Grimm. Pauli-Villars regularization and Born-Infeld kinematics. *Class. Quant. Grav.*, 20:4269–4284, 2003.
- [53] John R. Ray. Nonholonomic constraints. *American Journal of Physics*, 34:406–408, 1966.
- [54] N.K. Glendenning. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer, New York, 2000.
- [55] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley, Weinheim, 2008.
- [56] F. Weber. *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*. Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation. Taylor & Francis, Bristol, 1999.
- [57] Max Camenzind. *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer, Berlin, 2007.

- 
- [58] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55(4):374–381, 1939.
- [59] Daniele Malafarina and Pankaj S. Joshi. Compact objects from gravitational collapse: an analytical toy model. *The European Physical Journal C*, 75(12):596, Dec 2015.
- [60] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer. *Introduction to General Relativity*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, Tóquio, 1965.
- [61] Gaurav Narain, Jurgen Schaffner-Bielich, and Igor N. Mishustin. Compact stars made of fermionic dark matter. *Phys. Rev.*, D74:063003, 2006.
- [62] Gianfranco Bertone and Malcolm Fairbairn. Compact stars as dark matter probes. *Phys. Rev.*, D77:043515, 2008.
- [63] M. Cermeño, M. Ángeles Pérez-García, and Joseph Silk. Fermionic light dark matter particles and the new physics of neutron stars. *Publ. Astron. Soc. Austral.*, 34:e043, 2017.
- [64] Grigorios Panotopoulos and Ilídio Lopes. Dark matter effect on realistic equation of state in neutron stars. *Phys. Rev.*, D96(8):083004, 2017.
- [65] Z. Rezaei. Study of dark-matter admixed neutron stars using the equation of state from the rotational curves of galaxies. *Astrophys. J.*, 835(1):33, 2017.
- [66] Dimiter Hadjimichef. Massive dark photons in a Higgs portal model. *AIP Conf. Proc.*, 1693:050012, 2015.
- [67] D. Hadjimichef, M.V.T. Machado, F. Köpp, G.L. Volkmer, M. Razeira, and C.A.Z. Vasconcelos. A dark matter compact star in the framework of the pseudo-complex general relativity. *Astronomische Nachrichten*, 338(9-10):1079–1084, 2017.
- [68] H. E. S. Velten, R. F. vom Marttens, and W. Zimdahl. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. *Eur. Phys. J.*, C74(11):3160, 2014.
- [69] Cristian R. Ghezzi. Anisotropic dark energy stars. *Astrophys. Space Sci.*, 333:437–447, 2011.
- [70] Luca Amendola. Coupled quintessence. *Phys. Rev.*, D62:043511, 2000.
- [71] Luca Amendola and Domenico Tocchini-Valentini. Stationary dark energy: The present universe as a global attractor. *Phys. Rev.*, D64:043509, 2001.
- [72] Payel Mukhopadhyay and Jürgen Schaffner-Bielich. Quark stars admixed with dark matter. *Phys. Rev.*, D93(8):083009, 2016.



- [73] M. Srednicki. *Particle Physics and Cosmology: Dark Matter*. Current Physics - Sources and Comments. Elsevier Science, 1990.
- [74] Rouven Essig, Aaron Manalaysay, Jeremy Mardon, Peter Sorensen, and Tomer Volansky. First direct detection limits on sub-GeV dark matter from XENON10. *Phys. Rev. Lett.*, 109:021301, 2012.
- [75] Chris Kouvaris and Josef Pradler. Probing sub-GeV dark matter with conventional detectors. *Phys. Rev. Lett.*, 118(3):031803, 2017.
- [76] Pacific Northwest National Laboratory. CoGeNT dark matter experiment (2009). Disponível em <https://cogent.pnnl.gov/>; Acessado em dezembro de 2017.
- [77] G. Angloher et al. Results on light dark matter particles with a low-threshold CRESST-II detector. *Eur. Phys. J.*, C76(1):25, 2016.
- [78] F. Petricca et al. First results on low-mass dark matter from the CRESST-III experiment, 2017. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1711.07692.pdf>; Acessado em janeiro de 2018.
- [79] Sebastian Baum, Riccardo Catena, Jan Conrad, Katherine Freese, and Martin B. Krauss. Determining dark matter properties with a XENONnT/LZ signal and LHC-Run3 mono-jet searches, 2017. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1709.06051.pdf>; Acessado em janeiro de 2018.
- [80] K. Schertler, C. Greiner, J. Schaffner-Bielich, and M. H. Thoma. Quark phases in neutron stars and a 'third family' of compact stars as a signature for phase transitions. *Nucl. Phys.*, A677:463–490, 2000.
- [81] Isaac Rodríguez, Peter O Hess, Stefan Schramm, and Walter Greiner. Neutron stars within pseudo-complex general relativity. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 41(10):105201, 2014.
- [82] J. E. S. Costa, D. Hadjimichef, M. V. T. Machado, F. Köpp, G. L. Volkmer, M. Razeira, and C. A. Z. Vasconcellos. Equilibrium configurations of white dwarfs in the pseudo-complex general relativity. *Astronomische Nachrichten*, 338(9-10):1085–1089, 2017.
- [83] M. Razeira, D. Hadjimichef, M.V.T. Machado, F. Köpp, G.L. Volkmer, and C.A.Z. Vasconcellos. Effective field theory for neutron stars with wimps in the pc-gr formalism. *Astronomische Nachrichten*, 338(9-10):1073–1078, 2017.
- [84] Péter Pósfay, Gergely Gábor Barnaföldi, and Antal Jakovác. The effect of quantum fluctuations in compact star observables. 2017. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1710.05410.pdf>; Acessado em janeiro de 2018.

- 
- [85] Lijing Shao, Noah Sennett, Alessandra Buonanno, Michael Kramer, and Norbert Wex. Constraining nonperturbative strong-field effects in scalar-tensor gravity by combining pulsar timing and laser-interferometer gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. X*, 7:041025, Oct 2017.
- [86] Yeong Gyun Kim, Kang Young Lee, and Seodong Shin. Singlet fermionic dark matter. *JHEP*, 05:100, 2008.