Fábio Sperotto Bemfica

Dinâmica Quântica de Sistemas Não-Comutativos

Porto Alegre, RS

Setembro de 2009

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física

Dinâmica Quântica de Sistemas Não-Comutativos*

Fábio Sperotto Bemfica

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr. Horacio Oscar Girotti e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, RS - Setembro de 2009

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Dedicatória

Aos meus pais.
À Raquel.

Agradecimentos

- ao Professor Horacio Oscar Girotti por todo o apoio e dedicação.

Resumo

Este trabalho está dedicado a estudar a consistência global da dinâmica quântica de sistemas não-comutativos. Nosso ponto de partida é a teoria de sistemas vinculados, dado que esta provê uma descrição unificada da dinâmica clássica e quântica para os modelos a serem investigados. Analisamos o problema relacionado com a existência da série de Born e unitariedade e focamos, na seqüência, na formulação funcional da dinâmica quântica dos sistemas não-comutativos. A compatibilidade entre as abordagens funcional e operatorial é substanciada de forma geral. Subseqüentemente, a transformada de Weyl generalizada de índice α é usada para implementar a definição via "time-slicing" da integral de caminho no espaço de fase, o que nos permite calcular o correspondente propagador de Feynman. Como esperado, esta representação para o propagador de Feynman não é única, mas rotulada pelo parâmetro real α. Provamos que as contribuições dependentes de α desaparecem no limite quando o "slice" de tempo tende a zero, tal qual é requerido pela consistência da formulação. Esta prova é intrincada pois o Hamiltoniano envolve, necessariamente, produtos de operadores não comutantes. A anti-simetria da matriz que parametriza a não-comutatividade joga um papel fundamental no mecanismo de cancelamento dos termos dependentes de α.

Por fim, estudamos a implementação do processo formulado por Batalin, Fradkin e Tyutin (BFT), o qual permite transformar esses sistemas em uma teoria de calibre Abeliana exibindo apenas vínculos de primeira classe. A adequação da imersão BFT, como aplicada neste trabalho, é verificada demonstrando que existe um mapeamento isomórfico que conecta o modelo de segunda classe com o setor invariante de calibre da teoria de calibre. Como é sabido, a quantização funcional de uma teoria de calibre exige a eliminação da liberdade de calibre. Então, temos a nossa disposição um conjunto infinito de descrições alternativas para a mecânica quântica não-comutativa, uma para cada calibre. Estudamos as características relevantes deste infinito conjunto de correspondências. A quantização funcional da teoria de calibre é explicitamente realizada para dois calibres diferentes e os resultados comparados com o correspondente ao sistema de segunda classe. Dentro do quadro operatorial, a teoria de calibre é quantizada utilizando-se o método de Dirac.
Palavras-chave: Mecânica quântica não-comutativa; Consistência; Resultados independente de modelo; Integral funcional; Teoria de calibre
PACS Nos.: 03.65.-w, 03.65.Db, 11.10.Nx

Abstract

This work is concerned with the global consistency of the quantum dynamics of non-commutative systems. Our point of departure is the theory of constrained systems, since it provides a unified description of the classical and quantum dynamics for the models under investigation. We then analise the problem concerned with the sufficient conditions for the existence of the Born series and unitarity and turn, afterwards, into studying the functional quantization of non-commutative systems. The compatibility between the operator and the functional approaches is established in full generality. Subsequently, the generalized Weyl transform of index α is used to implement the time-slice definition of the phase space path integral yielding the Feynman kernel in the case of noncommutative quantum mechanics. As expected, this representation for the Feynman kernel is not unique but labeled by the real parameter α. We succeed in proving that the α-dependent contributions disappear at the limit where the time slice goes to zero. This proof of consistency turns out to be intricate because the Hamiltonian necessarily involves products of noncommuting operators. The antisymmetry of the matrix parameterizing the non-commutativity plays a key role in the cancelation mechanism of the α-dependent terms.

Finally, we study the embedding procedure formulated by Batalin, Fradkin and Tyutin (BFT) which enables one to transform these noncommutative systems into an Abelian gauge theory exhibiting only first class constraints. The appropriateness of the BFT embedding, as implemented in this work, is verified by showing that there exists a one to one mapping linking the second class model with the gauge invariant sector of the gauge theory. As is known, the functional quantization of a gauge theory calls for the elimination of its gauge freedom. Then, we have at our disposal an infinite set of alternative descriptions for noncommutative quantum mechanics, one for each gauge. We study the relevant features of this infinite set of correspondences. The functional quantization of the gauge theory is explicitly performed for two different gauges and the results compared with that corresponding to the second class system. Within the operator framework the gauge theory is quantized by using Dirac's method.
Keywords: Non-commutative quantum mechanics; Consistency; Model independent results; Functional approach; Gauge theory
PACS Nos.: 03.65.-w, 03.65.Db, 11.10.Nx

Sumário

1 Introdução

Historicamente, a noção de coordenadas espaciais não-comutativas foi sugerida por Heisenberg ao propor a existência de uma relação de incerteza não nula entre as coordenadas espaciais, o que, para ele, seria uma maneira de eliminar as singularidades que aparecem na teoria quântica-relativística de campos. A idéia de Heisenberg não parou por aí e, seguindo a seqüência Peierls $\rightarrow$ Pauli $\rightarrow$ Oppenheimer $\rightarrow$ Snyder[1], levou este último a escrever o primeiro artigo sobre o assunto em 1947 [2]. Porém, talvez devido ao sucesso da teoria de renormalização, essa proposta foi esquecida até recentemente, quando reaparece através das teorias de cordas e da gravitação quântica.

Muitos autores têm estudado efeitos causados por um espaço-tempo não-comutativo sob pontos de vista matemático e físico. Isso implica em promover as coordenadas do espaço-tempo (x^i e x^0) ao nível de operadores hermiteanos (Q^i e Q^0) obedecendo as relações de comutação

$$[Q^\mu, Q^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

onde $\mu, \nu = 0 \ldots d-1$, d é a dimensão do espaço-tempo e $\Theta^{\mu\nu}$ é uma matriz antisimétrica real e constante com unidades de área. Na Ref. [3], foi proposta uma teoria de Yang-Mills imersa em um torus não-comutativo. A presença do tensor constante $\Theta^{\mu\nu}$ implica na violação da simetria de Lorentz enquanto que causalidade requer $\Theta^{0i} = 0$. No entanto Connes et al. [4] provaram que ela surge como um limite definido da teoria de cordas

[1] Para maiores detalhes históricos veja [1] e referências dentro desta.

quando na presença de um do campo magnético de fundo. A teoria de Yang-Mills supersimétrica não-comutativa (NCSYM) também foi extraída por Seiberg & Witten [5] partindo de uma super corda aberta na presença de um campo magnético.

Dessa maneira, a teoria de cordas impulsionou o desenvolvimento das teorias de campos formuladas em variedades do espaço-tempo não-comutativas. Através de cálculos explícitos de laços para casos onde $\Theta^{0i} = 0$ (não-comutatividade espacial), foi mostrado que a teoria ϕ^4 até dois laços [6, 7] e a Eletrodinâmica Quântica não-comutativa (NC-QED) até um laço [8–10] são renormalizáveis. Já no caso $\Theta^{0i} \neq 0$, viu-se que a teoria não é unitária [11, 12] nem causal, não se apresentando atraente como uma teoria física. Um aspecto peculiar das teorias de campos não-comutativas é a aparição de um mecanismo de conversão parcial de divergências ultravioletas em infravermelhas (mecanismo UV/IR). Neste caso, após as divergências ultravioletas terem sido eliminadas através do processo de renormalização, ainda restam as mencionadas divergências infravermelhas cuja origem não obedece a uma potencial ausência de massa. Os efeitos da introdução de supersimetria em teorias de calibre Abelianas (NCSQED) e não-Abelianas (NCSYM) foram, na aproximação de um laço, estudadas nas Refs. [13–16], onde foi demonstrado que a presença da supersimetria leva ao desaparecimento das divergências UV/IR não-integráveis. De fato, até o presente momento, a versão não-comutativa do modelo de Wess-Zumino é a única teoria de campos não-comutativa em $(1 + 3)$-dimensões cuja consistência foi provada a todas as ordens da teoria de perturbações [17]. Mais detalhes em assuntos relacionados podem ser encontrados nos artigos de revisão [18–22].

O reaparecimento de modelos envolvendo variedades do espaço-tempo não-comutativas também foi impulsionado pelo fato de serem de grande interesse para a formulação da teoria quântica da gravitação (QG). A idéia é que a comutatividade do espaço-tempo é perdida na escala de Planck [23] $\left(\lambda_P = (G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-33} cm\right)$. Isso leva a uma relação de comutação tal qual a da Eq. (1.1), sendo $\Theta^{\mu\nu}$, neste caso, uma matriz constante da ordem do quadrado do comprimento de Planck. Essa relação impõe possíveis limitações na precisão da localização de eventos no espaço-tempo, o que de fato deve ser uma característica de uma teoria quântica da gravitação. Mesmo no âmbito da teoria da gravitação de Einstein, quando combinada com o princípio de incerteza de Heisenberg, somos levados a concluir que o espaço-tempo ordinário [2] perde qualquer significado operacional em escalas muito pequenas. Para tanto, basta pensarmos no caso de uma medição das coordenadas espaço-temporais: quanto maior a precisão nas medidas do espaço-tempo (Δx^μ) maior será a incerteza na medição dos momenta canonicamente conjugados (Δp_μ), que estão, por sua vez, presentes na estrutura do tensor energia-momentum ($T_{\mu\nu}$). Após levar em conta a equação de Einstein da Relatividade Geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, \eta_{\mu\nu} \;=\; 8\pi\, T_{\mu\nu}\,, \tag{1.2}$$

em coordenadas naturais ($\hbar = G = c = 1$), concluímos que $\Delta x^\mu \to 0$ provocará, inevitavelmente, um campo gravitacional de grande intensidade. Quando o campo gravitacional se torna tão forte a ponto de gerar um buraco negro, a operação de medida das coordenadas do espaço-tempo perde seu significado. Em [23] é investigado como restringir localidade de maneira a prevenir a formação de buracos negros no curso de uma medida, ou seja, os Δx^μ são restringidos de modo a não serem simultaneamente muito pequenos.

Por outro lado, a mecânica quântica não-comutativa (MQNC) também tem sido alvo de extensivas pesquisas [24–27]. Neste contexto, estamos interessados em encontrar conseqüências fenomenológicas da presença de um espaço não-comutativo. O principal resultado, no caso de sistemas de partícula única, é o de que a modificação da álgebra simultânea obedecida pelos operadores de posição básicos age como uma fonte de novas interações que podem ou não preservar as simetrias originais. Um exemplo é o trabalho de Chaichian et al. [24], onde, para pequenos valores de Θ^{ij}, a não-comutatividade atua, no caso do átomo de Hidrogênio, como uma nova interação, introduzindo correções ao "Lamb Shift" (desvio de Lamb) e selecionando uma direção preferencial (desvio de Lamb polarizado) devido à quebra de simetria introduzida pela não-comutatividade. Também

[2] Usaremos eventualmente o termo ordinário para se referir a espaços cujas coordenadas espaciais comutam.

em [27] é estudado o caso de um Oscilador Harmônico bi-dimensional: um modelo exatamente solúvel. Na Ref. [28] os autores trabalham sobre os efeitos da não-comutatividade no caso de sistemas quânticos de muitas partículas: o gás de elétrons.

Como já apontamos, a não-comutatividade introduz modificações na teoria quântica de campos (TQC). O mesmo acontece no caso da MQNC. No entanto, é importante ressaltar que enquanto a não-comutatividade, no caso da TQC, torna os parâmetros da teoria não-comutativos, no caso da mecânica quântica (MQ) ela destrói a comutatividade a tempos iguais dos observáveis posição. A proposta central desta tese é a de demonstrar que a MQNC é, de fato, uma teoria quântica consistente.

Neste trabalho estaremos interessados em sistemas quânticos cuja dinâmica é descrita pelo Hamiltoniano auto-adjunto $H(P, Q)$ função das coordenadas Cartesianas $Q^l, l = 1, \ldots, N$ e dos seus momenta canônicos conjugados $P^j, j = 1, \ldots, N$.[3] No entanto, diferente do caso usual, impomos as regras de comutação não-canônicas para coordenadas e momenta

$$\left[Q^l, Q^j\right] = -2i\hbar\theta^{lj}, \tag{1.3a}$$

$$\left[Q^l, P^j\right] = i\,\hbar\,\delta^{lj}, \tag{1.3b}$$

$$\left[P^l, P^j\right] = 0. \tag{1.3c}$$

A característica essencial é, claramente, que os operadores de coordenadas não comutam entre si. A não-comutatividade das coordenadas é parametrizada pela matriz $N \times N$ constante, real e anti-simétrica $\|\theta\|$[4].

No entanto, a questão relativa a MQNC ser uma teoria consistente ainda está em aberto. A resposta para tal questão só pode ser encontrada a partir de desenvolvimentos independentes de modelo. Este trabalho está dedicado a apresentar alguns destes

[3] Graus de liberdade internos tais como spin, isospin, etc., não trazem maiores dificuldades e são, portanto, desconsiderados

[4] Observe que a dimensão de θ^{lk} no sistema cgs é $d[\theta] = \mathrm{g}^{-1}$ s.

desenvolvimentos.

Primeiro trataremos da implementação da transição clássica-quântica para sistemas não-comutativos. Neste caso, a teoria de sistemas vinculados nos fornece as ferramentas apropriadas para este fim. Verificamos, seguidamente, que a não comutatividade sempre leva a interações não-locais. Este é o nosso Capítulo 2.

Unitariedade está no coração de qualquer teoria quântica, já que assegura conservação de probabilidade. Para sistemas não-comutativos, uma investigação sistemática é apresentada no Capítulo 3 [29].

No Capítulo 4 tomamos, uma vez mais, vantagem da correspondência entre modelos não-comutativos e sistemas vinculados para formular a dinâmica quântica não-comutativa em termos de integrais de caminho. Verificamos também, nesse caso, a compatibilidade das abordagens funcional e operatorial [30].

O problema da unicidade da representação funcional, quando as mencionadas integrais estão definidas através do procedimento de "time-slicing", é estudado no Capítulo 5 [31]. No início apresentamos os passos necessários para implementar a definição via "time-slicing" da integral do espaço de fase que leva ao propagador de Feynman ($\mathcal{K}(x_f, t_f; x_{in}, t_{in})$). Neste contexto, a transformada de Weyl generalizada joga um papel relevante. Conforme já reconhecido [32–35], $\mathcal{K}(x_f, t_f; x_{in}, t_{in})$ não possui uma representação única em termos de integrais de caminho canônicas. Esta falta de unicidade se torna particularmente crítica para Hamiltonianos envolvendo produtos de operadores não-comutantes, que é uma característica inevitável do Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de um sistema não-comutativo (veja Eq. (2.9)). Demonstramos que a anti-simetria de $\|\theta\|$ é suficiente para restabelecer a unicidade.

No Capítulo 6, nos dedicamos a estudar a MQNC como uma teoria de calibre [36]. Neste capítulo, se discutem os resultados decorrentes da aplicação do processo de imersão de Batalin, Fradkin e Tyutin (BFT) [37–39] ao sistema de segunda classe que dá origem a MQNC [40]. O resultado é uma teoria de calibre Abeliana cujo setor invariante de calibre é mapeado isomorficamente no modelo de segunda classe que está na origem da MQNC. Logo após, formulamos a quantização funcional das teorias de segunda e primeira classe. A teoria de calibre obtida é quantizada em diferentes calibres e os resultados são comparados com os provenientes da teoria de segunda classe. Finalmente, utilizamos o método desenvolvido por Dirac [41] para implementar a quantização operatorial da extensão BFT da mecânica quântica não-comutativa. Os resultados deste processo estão de acordo com os obtidos com a quantização operatorial do modelo inicial de segunda classe.

Conclusões e considerações finais estão no Capítulo 7.

2 Transição clássica-quântica para sistemas não-comutativos

Para começar, notamos que a contrapartida clássica de um sistema quântico envolvendo coordenadas não-comutativas deve corresponder a um sistema vinculado[1]. De fato, a álgebra especificada na Eq.(1.3a) não poderia ter sido abstraída de uma álgebra de colchetes de Poisson, simplesmente porque o colchete de Poisson de duas coordenadas é identicamente nulo.

No entanto, o problema de encontrar um sistema vinculado que seja mapeado numa teoria não-comutativa verificando a Eq. (1.3) já foi resolvido [40]. Sua dinâmica clássica é descrita pelo Lagrangeano[2][3]

$$L = a\, v_j\, \dot{q}^j - h_0(q^j, a v_j) + a^2\, \dot{v}^i\, \theta_{ij}\, v^j\,, \tag{2.1}$$

onde índices repetidos são somados de 1 até N. A estrutura vincular desse sistema reduz-se aos vínculos primários de segunda classe

$$G_i \equiv p_i - a\, v_i \approx 0\,, \tag{2.2a}$$

$$T_i \equiv \pi_i - a^2\, \theta_{ij} v^j \approx 0\,, \tag{2.2b}$$

[1] Afora uma vasta literatura existente, mencionamos as Refs. [27, 41–45]

[2] Em geral, denotaremos "q-numbers" por letras maiúsculas e "c-numbers" por letras minúsculas.

[3] A expressão na Eq. (2.1) defere da correspondente expressão encontrada na Ref. [40] pela presença de constante a, a qual foi introduzida de forma a homogeneizar as dimensões das diferentes quantidades presentes em L. Em particular, as dimensões de a são gs^{-1}.

onde p^i (π^i) é o momentum canonicamente conjugado à coordenada generalizada q^i (v^i), e o sinal de igualdade fraca ($\approx$) está sendo usado no sentido de Dirac [41]. No que diz respeito ao Hamiltoniano canônico, encontramos

$$h(p, q) \;=\; h_0(p, q)\,. \tag{2.3}$$

A matriz dos vínculos, mais conhecida como matriz de Faddeev-Popov, torna a ser unimodular e constante. Então, o resultado obtido para os colchetes de Dirac (DB) é:

$$[q^j, q^k]_{DB} = -2\theta^{lk}, \tag{2.4a}$$

$$[q^j, p^k]_{DB} = \delta^{jk}, \tag{2.4b}$$

$$[p^j, p^k]_{DB} = 0. \tag{2.4c}$$

Não precisamos computar explicitamente os DB's envolvendo v's e/ou π's dado que, pela definição [27, 41–45], dentro da álgebra dos DB's os vínculos atuam como identidades fortes e, portanto, podem ser utilizados para eliminar da formulação as variáveis v e π em favor de q e p [4]. No entanto, q e p não são as variáveis canônicas independentes que parametrizam o espaço de fase reduzido pois seus DB's diferem dos correspondentes colchetes de Poisson (PB)[27, 41–45]. A construção das variáveis canônicas do espaço de fase reduzido, (x , k), em termos de q e p é simples. De fato, é de fácil verificação que

$$x^j \;\equiv\; q^j \;-\; \theta^{jl}\, p^l\,, \tag{2.5a}$$

$$k^j \;\equiv\; p^j \tag{2.5b}$$

e (2.4) leva a $[\xi^j, \xi^l]_{DB} \;=\; [\xi^j, \xi^l]_{PB}$, para ξ tanto x quanto k. O que resta a ser feito para apagar quaisquer traços dos vínculos é reescrever o Hamiltoniano na Eq. (2.3) em termos

[4]Voltaremos ao assunto no Capítulo 6.1 e mostraremos explicitamente esses DB nas Eqs. (6.7), (6.8) e (6.9)

das variáveis x e k, ou seja,

$$h\,(p,q)\;\equiv\;h\left(k_{\,j},x^{j}+\theta^{jk}k^{k}\right)\;. \tag{2.6}$$

Pode ser verificado que as equações de movimento Hamiltonianas para as variáveis físicas possuem a forma canônica.

Desejamos quantizar o modelo descrito acima. Dentro do formalismo operatorial tal quantização é implementada promovendo q e p a operadores auto-adjuntos, Q e P, respectivamente. A regra de correspondência clássica-quântica demanda que os operadores verifiquem a álgebra de comutadores extraída dos correspondentes DB's. Além disto, a inexistência de ambigüidade de ordenamento garante que o operador Hamiltoniano $H(P,Q)$ pode ser abstraído de $h(p,q)$, dado na Eq.(2.3), mediante as substituições $q\rightarrow Q$ e $p\rightarrow P$. É claro que o sistema não-comutativo (1.3) é a versão quantizada de um sistema clássico vinculado definido na Eq.(2.1).

O procedimento de quantização também requer que encontremos uma realização da álgebra (1.3) em termos de matrizes, i.e., de uma representação. O fato de as coordenadas não comutarem entre si não possibilita a existência de um conjunto comum de auto-vetores dos Q's. No entanto, os operadores auto-adjuntos X e K, que surgem da transição clássica-quântica $x\longrightarrow X$, $k\longrightarrow K$, obedecem, por definição, a álgebra extraída dos correspondentes PB's, i.e.,

$$\left[X^{l},X^{j}\right]\;=\;0\,, \tag{2.7a}$$

$$\left[X^{l},K^{j}\right]=i\,\hbar\,\delta^{lj}\,, \tag{2.7b}$$

$$\left[K^{l},K^{j}\right]=0\,. \tag{2.7c}$$

Portanto, os autovetores comuns dos X's ($|\,\vec{x}\,\rangle\equiv\left|\,x^{1},\ldots,x^{l},\ldots,x^{N}\,\right\rangle$) formam uma base no espaço de estados, a qual pode ser utilizada para representar a álgebra (1.3).

Para um Hamiltoniano

$$H(P,Q) = \frac{P^l P^l}{2M} + V(Q) \tag{2.8}$$

e, portanto,

$$H(K^l, X^l \,+\, \theta^{lj}\, K^j) = \frac{K^l K^l}{2M} + V(X^l + \theta^{lk}\, K^k)\,, \tag{2.9}$$

foi mostrado [22,25,26] que a evolução temporal do sistema, na representação de Schrödinger, é descrita pela equação de onda

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_x^2 \Psi(x,t) + V(x) \star \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}\,, \tag{2.10}$$

onde ∇_x^2 designa o Laplaciano N-dimensional, M é uma constante com dimensões de massa enquanto $\star$ denota o produto de Grönewold-Moyal [46–48], o qual emerge no cálculo do elemento de matriz $\langle \vec{x}|\, V\left(X^l + \theta^{lj}\, K^j\right) |\, \Psi(t)\,\rangle$ tal qual se detalha a continuação.

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{x}|\, V\left(X^l + \theta^{lj}\, K^j\right) |\, \Psi(t)\,\rangle \\
&= \langle \vec{x}| \int \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi\hbar)^{N/2}}\, V\left(\vec{k}\right)\, e^{\frac{i}{\hbar} k_l (X^l + \theta^{lj} K^j)}\, |\, \Psi(t)\,\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi\hbar)^{N/2}}\, V\left(\vec{k}\right)\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[\exp\left(k^l \theta^{lj} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \Psi(\vec{x},t)\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi\hbar)^{N/2}}\, V\left(\vec{k}\right)\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}\cdot\vec{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{l_1}\cdots k^{l_n}}{n!} \theta^{l_1 j_1} \cdots \theta^{l_n j_n} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{j_n}} \Psi(\vec{x},t)\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi\hbar)^{N/2}}\, V\left(\vec{k}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{l_n}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \theta^{l_1 j_1} \cdots \theta^{l_n j_n} \\
&\times \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{j_n}} \Psi(\vec{x},t)\right) \\
&= \left[\int \frac{\mathrm{d}^N k}{(2\pi\hbar)^{N/2}}\, V\left(\vec{k}\right)\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] e^{-i\hbar\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^l} \theta^{lj} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^j}\right)} \Psi(\vec{x},t) \\
&= V(\vec{x}) \left[\exp\left(-i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^l}\, \theta^{lj}\, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^j}\right)\right] \Psi(\vec{x},t) \equiv V(\vec{x}) \star \Psi(\vec{x},t)\,.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Para passar da segunda para a terceira linha na Eq. (2.11) usamos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorf juntamente com o fato de que $k^l\theta^{lj}k^j = 0$. Além disso, $\Psi(\vec{x},t) \equiv \langle\, \vec{x} \,|\, \Psi(t) \,\rangle$, onde $|\, \Psi \,\rangle$ é solução da equação de Schrödinger dependente do tempo $i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\, \Psi(t) \,\rangle = H\,|\, \Psi(t) \,\rangle$. Nas Refs. [24–27], a Eq.(2.10) foi resolvida para alguns modelos específicos.

O lado direita da Eq. (2.11) mostra claramente a natureza não-local da teoria. Assim, como dito na Introdução, a versão quantizada de sistemas não-comutativos envolve, inevitavelmente, interações não-locais.

3 Série de Born e Unitariedade na mecânica quântica não-comutativa

Unitariedade é de maior importância para a consistência de uma teoria quântica. Não mais podemos afirmar que o caráter auto-adjunto do Hamiltoniano assegure a unitariedade do operador espalhamento S, quando em presença de uma interação não-local. Para elucidar este assunto, adotaremos uma estratégia que envolve dois estágios. Primeiro, provaremos que, sob certas restrições impostas ao potencial (V), existe uma expansão em série (série de Born) para os elementos do operador transição T ($S \equiv I - 2\pi i T$). No caso $V = gU$, sendo g uma constante de acoplamento adimensional, a série de Born se torna uma série de potência em g. Então, unitariedade será provada ordem a ordem em g [31].

3.1 A série de Born na mecânica quântica não-comutativa

Vamos retornar, por um tempo, à mecânica quântica comutativa e considerar um sistema cuja dinâmica é descrita pelo operador Hamiltoniano auto-adjunto

$$H = H_0 + V(X) , \tag{3.1}$$

onde $H_0 \equiv K^l K^l / 2M$ é o Hamiltoniano livre. Note que $H = H^\dagger$ força $V = V^\dagger$ já que a parte cinética H_0 é, por construção, auto-adjunta. Por inspeção segue que H_0 não possui estados ligados e seu espectro contínuo é caracterizado por $E > 0$. Assumimos que o mesmo se aplica ao espectro contínuo de H apesar de que este operador pode também possuir estados ligados.

Para o caso de espalhamento de partículas, a equação de Lippman-Schwinger nos diz que

$$\left| \vec{k}+ \right\rangle = \left| \vec{k} \right\rangle + G_0^{(+)}(\vec{k})\, V \left| \vec{k}+ \right\rangle , \tag{3.2}$$

onde $\left| \vec{k} \right\rangle$ é o estado de partícula livre com momentum $\vec{k}$ e $\left| \vec{k}+ \right\rangle$ é o correspondente estado de espalhamento. O que iremos mostrar daqui pra frente poderia ser feito, sem modificação na validade das provas, para os casos onde outros números quânticos como spin e momentum angular estão presentes, já que estas componentes não sentem modificações provenientes da não-comutatividade. A função de Green livre $G_0^{(+)}(\vec{k})$ é, por definição,

$$G_0^{(+)}(k) \equiv \frac{1}{E(k) - H_0 + i\epsilon} . \tag{3.3}$$

Aqui $k \equiv |\vec{k}|$ e $E(k) \equiv \hbar^2 k^2/2m$. Lembramos que

$$H_0 \left| \vec{k} \right\rangle = E(k) \left| \vec{k} \right\rangle , \tag{3.4}$$

e

$$H \left| \vec{k}+ \right\rangle = E(k) \left| \vec{k}+ \right\rangle . \tag{3.5}$$

Iterando a Eq. (3.2) obtemos a série infinita

$$\left| \vec{k}+ \right\rangle = \left| \vec{k} \right\rangle + G_0^{(+)}(k)\, V \left| \vec{k} \right\rangle + G_0^{(+)}(k)\, V\, G_0^{(+)}(k)\, V \left| \vec{k} \right\rangle + \cdots . \tag{3.6}$$

Para o sistema em consideração todos os observáveis podem ser obtidos a partir do operador $T(W)$ definido pela equação integral

$$T(W) \,=\, V \,+\, V\, [W \,-\, H_0]^{-1}\, T(W)\,. \tag{3.7}$$

Em particular, os elementos da matriz S ficam dados pela expressão

$$S(\vec{k}', \vec{k}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) - 2\pi i \left\langle \vec{k}' \middle| T(E(k) + i\epsilon) \middle| \vec{k} \right\rangle \,, \tag{3.8}$$

onde $\epsilon \to +0$. Ao iterar o lado direito da Eq.(3.7) se obtém a série de Born para o operador T, isto é,

$$T(W) \,=\, V \,+\, V\, [W \,-\, H_0]^{-1}\, V \,+\, V\, [W \,-\, H_0]^{-1}\, V\, [W \,-\, H_0]^{-1}\, V \,+\, \cdots\,. \tag{3.9}$$

O problema de determinar as condições necessárias e suficientes para a convergência da série de Born foi solucionado por Weinberg [49]. Ele introduziu o problema de autovalores auxiliar

$$[W \,-\, H_0]^{-1}\, V\, |\psi_\nu(W)\rangle \,=\, \eta_\nu(W)\, |\psi_\nu(W)\rangle\,. \tag{3.10}$$

Como o operador $[W \,-\, H_0]^{-1}\, V$ não é Hermiteano, os autovalores $\eta(W)$ podem ser complexos, enquanto que os auto-estados $|\psi_\nu(W)\rangle$ são, por definição, normalizáveis. W é mantido negativo ou complexo, sendo permitido sua aproximação do eixo real positivo no final dos cálculos. Das Eqs. (3.9) e (3.10) obtém-se

$$T(W)\, |\psi_\nu(W)\rangle \,=\, \left[\sum_{n=0}^{\infty} \eta_\nu^n(W)\right] V\, |\psi_\nu(W)\rangle\,. \tag{3.11}$$

Weinberg [49] demonstrou que

$$|\eta_\nu(W)| \,<\, 1\,, \qquad \forall\, \nu\,, \tag{3.12}$$

é condição necessária e suficiente para assegurar a convergência da série de Born.

Queremos, agora, resolver o problema análogo para a mecânica quântica não-comutativa. A diferença essencial do caso anterior é que em vez de $V = V(X)$ temos $V = V(X^l + \theta^{lj} K_j)$. Como ponto de partida começamos invocando (3.10) para tornar a Eq. (3.12) como

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\langle \vec{k}\,|\,[W \,-\, H_0]^{-1}\, V\,|\psi_\nu(W)\rangle\right|}{|\langle \vec{k}\,|\psi_\nu(W)\rangle|} &= \frac{1}{\left|W - \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2M}\right|} \frac{\left|\left\langle \vec{k}\right| V\,|\,\psi_\nu(W)\,\rangle\right|}{\left|\langle\, \vec{k}\,|\,\psi_\nu(W)\,\rangle\right|} \\
&= \frac{1}{\left|W - \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2M}\right|} \frac{1}{\left|\langle\, \vec{k}\,|\,\psi_\nu(W)\,\rangle\right|} \left|\int d^N k' \left\langle \vec{k}\right| V \left|\vec{k}'\right\rangle \langle\, \vec{k}'\,|\,\psi_\nu(W)\,\rangle\right| \\
&< 1\,, \qquad \forall\, \nu\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Vamos nos concentrar na integral de momentum linear no lado direito da Eq.(3.13). Como

$$\left|\int d^N k' \left\langle \vec{k}\right| V \left|\vec{k}'\right\rangle \langle\, \vec{k}'\,|\,\psi_\nu(W)\,\rangle\right| \leq \int d^N k' \left|\left\langle \vec{k}\right| V \left|\vec{k}'\right\rangle \langle\, \vec{k}'\,|\,\psi_\nu(W)\,\rangle\right|\,, \tag{3.14}$$

concluímos que

$$\frac{1}{\left|W - \frac{\vec{k}^2}{2M}\right|} \frac{1}{\left|\langle\, \vec{k}\,|\,\psi_\nu(W)\,\rangle\right|} \int \mathrm{d}^N k' \left|\left\langle \vec{k}\right| V \left|\vec{k}'\right\rangle\right| \left|\langle\, \vec{k}'\,|\,|\psi_\nu(W)\,\rangle\right| < 1 \qquad \forall\, \nu \tag{3.15}$$

é uma condição suficiente apesar de não necessária para a convergência da série de Born. Em outras palavras, (3.15) seleciona um subconjunto de potenciais para os quais a série de Born certamente converge.

Para continuar, precisamos conhecer $\left|\left\langle \vec{k}\right| V \left|\vec{k}'\right\rangle\right|$. Pelo resultado obtido na Eq. (2.11), começamos analisando

$$\left\langle \vec{k} \right| V(X^l + \theta^{lj}\,K^j) \left| \vec{k}\,' \right\rangle \;=\; \int d^N x\, \phi^\star_{\vec{k}}(\vec{x}) \, \left[V(\vec{x}) \star \phi_{\vec{k}\,'}(\vec{x}) \right]$$
$$= \int d^N x\, \phi^\star_{\vec{k}}(\vec{x}) \star V(\vec{x}) \star \phi_{\vec{k}\,'}(\vec{x})$$
$$= \int d^N x\, V(\vec{x}) \, \left[\phi_{\vec{k}\,'}(\vec{x}) \star \phi^\star_{\vec{k}}(\vec{x}) \right] \,, \tag{3.16}$$

onde usamos a propriedade cíclica do produto de Grönewold-Moyal [46, 47] bem como

$$\int \mathrm{d}^N x\, \Phi(x) \star \Psi(x) = \int \mathrm{d}^N x\, \Phi(x)\, \Psi(x) \tag{3.17}$$

e, por fim,

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{N}{2}}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\,\vec{k}\cdot\vec{x}} \,, \tag{3.18}$$

que é a auto-função do momentum linear $\vec{K}$ correspondente ao autovalor $\vec{k}$. Relembrando a Eq.(2.11) obtemos

$$\phi_{\vec{k}\,'}(\vec{x}) \star \phi^\star_{\vec{k}}(\vec{x}) \;=\; \phi_{\vec{k}\,'}(\vec{x}) \left[\exp\left(-i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^l}\, \theta^{lj}\, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^j} \right) \right] \phi^\star_{\vec{k}}(\vec{x})$$
$$= e^{-i\,\vec{k}\,'\wedge\vec{k}}\, \phi_{\vec{k}\,'}(\vec{x})\, \phi^\star_{\vec{k}}(\vec{x}) \,, \tag{3.19}$$

onde

$$\vec{k}\,' \,\wedge\, \vec{k} \,\equiv\, \frac{1}{\hbar} k'^l\, \theta^{lj}\, k^j \,. \tag{3.20}$$

Claramente, as Eqs. (3.19) e (3.16) conduzem a relação

$$\langle \vec{k} \,|\, V(X^l + \theta^{lj}\,K^j)\, |\vec{k}\,'\rangle \;=\; e^{-\,i\,\vec{k}\,'\wedge\vec{k}}\, \langle \vec{k} \,|\, V(X^l)\, |\vec{k}\,'\rangle \tag{3.21}$$

e, como conseqüência,

$$\left|\langle\vec{k}\,|\,V(X^l + \theta^{lj}\,K^j)\,|\vec{k}\,'\rangle\right| \;=\; \left|\langle\vec{k}\,|\,V(X)\,|\vec{k}\,'\rangle\right|. \tag{3.22}$$

Este resultado conecta o regime comutativo com o não-comutativo. Portanto, se $V(X)$ verifica a Eq. (3.15), $V(X^l + \theta^{lj}\,K^j)$ também o verifica, ou seja, para a sub-classe restrita de potenciais que satisfazem a Eq. (3.15) a convergência da série de Born é obtida para ambas versões, comutativa e não-comutativa, do modelo.

3.2 Unitariedade na mecânica quântica não-comutativa

Partindo da Eq. (3.7) e utilizando a Eq. (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} T(\vec{k}',\vec{k}) \;&\equiv\; \left\langle \vec{k}'\middle| V \middle| \vec{k}\right\rangle + \left\langle \vec{k}'\middle| V\, G_0^{(+)}(k) T \middle| \vec{k}\right\rangle \\ &=\; \left\langle \vec{k}'\middle| V \middle| \vec{k}\right\rangle + \left\langle \vec{k}'\middle| V\, G_0^{(+)}(k)\, V \middle| \vec{k}\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \vec{k}'\middle| V\, G_0^{(+)}(k)\, V\, G_0^{(+)}(k) V \middle| \vec{k}\right\rangle + \cdots . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Definindo-se

$$T^{(n)}(\vec{k}',\vec{k}) \equiv \left\langle \vec{k}'\middle| \overbrace{V\, G_0^{(+)}(k)\, V \cdots V\, G_0^{(+)}(k)\, V}^{n \text{ fatores } V;\; (n-1) \text{ fatores } G_0^{(+)}(k)} \middle| \vec{k}\right\rangle , \tag{3.24}$$

sendo n um número inteiro positivo, reescrevemos a série na Eq. (3.23)

$$T(\vec{k}',\vec{k}) = T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) + T^{(2)}(\vec{k}',\vec{k}) + \cdots . \tag{3.25}$$

A amplitude de espalhamento $f(\vec{k}\,'\,,\,\vec{k})$ é dada em termos da matriz T pela relação

$$f(\vec{k}\,', \vec{k}) \equiv -\frac{4\pi^2 M}{\hbar^2}\, T(\vec{k}\,', \vec{k})\,, \tag{3.26}$$

e, sendo assim, faz sentido introduzir

$$f^{(n)}(\vec{k}\,', \vec{k}) \equiv -\frac{4\pi^2 M}{\hbar^2}\, T^{(n)}(\vec{k}', \vec{k})\,. \tag{3.27}$$

Pelo teorema ótico podemos calcular a seção de choque total $\sigma(k)$ de duas formas

$$\sigma(k) = \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \left| f(\vec{k}', \vec{k}) \right|^2 = \frac{4\pi}{k}\, \Im f(\vec{k}, \vec{k})\,, \tag{3.28}$$

onde $\mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'}$ é o elemento de ângulo sólido centrado ao redor de $\vec{k}'$. A segunda igualdade na Eq. (3.28) é conhecida como condição de unitariedade. Nossa proposta aqui é verificar unitariedade utilizando a representação de T pela série de Born. Assumiremos que o potencial V contém uma constante de acoplamento adimensional (g) que nos permite escrever $V = g\,U$. Então, a série de Born na Eq. (3.9) se torna uma série de potência em g. Logo, a Eq. (3.28) toma a forma

$$\frac{4\,\pi}{k}\, \Im\, f^{(n)}(\vec{k}\,, \vec{k}) = \int d\Omega_{\vec{k}\,'} \sum_{j=1}^{n-1} f^{(j)^\star}(\vec{k}'\,, \vec{k})\, f^{(n-j)}(\vec{k}'\,, \vec{k})\,. \tag{3.29}$$

Vamos primeiro analisar as contribuições à amplitude de espalhamento para $n = 1$. Claramente, o lado direito em (3.29) não contém termos de ordem g^1. Então, nenhum termo de ordem g^1 deve surgir em $\Im\, f^{(1)}(\vec{k}\,, \vec{k})$. Sabemos que este é o caso para a versão comutativa da teoria, já que a hermiticidade de V assegura $\Im\,\langle \vec{k}\,|\, V(X^l)\,|\vec{k}\rangle = 0$. Para o caso não-comutativo, observamos que para $\vec{k}\,' = \vec{k}$ o expoente no lado direito de (3.21) some e, portanto, $\Im\,\langle \vec{k}\,|\, V(X^l + \theta^{lj}\, K^j)\,|\vec{k}\rangle = \Im\,\langle \vec{k}\,|\, V(X^l)\,|\vec{k}\rangle = 0$, como requerido.

Visando verificar a Eq. (3.29) com um n arbitrário, enunciamos o seguinte Lema: Para $m \geq 1$ e $p \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
&\Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} \\
&= \Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(m+1)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p-1)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} \\
&- \frac{M k \pi}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \left[T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k}) + T^{(p)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(m)}(\vec{k}', \vec{k}) \right] , \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

cuja prova se encontra no Apêndice B. Então, considere

$$
\begin{aligned}
\Im T^{(n)}(\vec{k}, \vec{k}) &= \Im \left\langle \vec{k} \right| \overbrace{V G_0^{(+)}(k) V \cdots V G_0^{(+)}(k) V}^{n \text{ fatores } V;\, (n-1) \text{ fatores } G} \left| \vec{k} \right\rangle \\
&\overset{Eq.\ (A.9)}{=} \Im \left\langle \vec{k} \right| V \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{\left| \vec{k}' \right\rangle \left\langle \vec{k}' \right|}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} \overbrace{V G_0^{(+)}(k) V \cdots V}^{(n-1) \text{ fatores } V;\, (n-2) \text{ fatores } G} \left| \vec{k} \right\rangle \\
&= \Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(1)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(n-1)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} . \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Seguidamente aplicamos (3.30) para $m = 1$ e $p = n - 1$

$$
\begin{aligned}
\Im T^{(n)}(\vec{k}, \vec{k}) &= \Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(2)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(n-2)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} \\
&- \frac{M k \pi}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \left[T^{(1)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(n-1)}(\vec{k}', \vec{k}) + T^{(n-1)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) \right] . \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Não é difícil estender esse procedimento $(n - 2)$ vezes e obter

$$\begin{aligned}
\Im T^{(n)}(\vec{k},\vec{k}) &= \Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} \\
&\quad - \frac{Mk\pi}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \sum_{j=1}^{n-2} \left[T^{(j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-j)}(\vec{k}',\vec{k}) + T^{(n-j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(j)}(\vec{k}',\vec{k}) \right] \\
&\overset{Eq.\ (A.7)}{=} \Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} - i\epsilon} \\
&\quad - \frac{4\pi M}{\hbar^2} \Im i \int \mathrm{d}^N k' \, \delta(k'^2 - k^2) T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) \\
&\quad - \frac{Mk\pi}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \sum_{j=1}^{n-2} \left[T^{(j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-j)}(\vec{k}',\vec{k}) + T^{(n-j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(j)}(\vec{k}',\vec{k}) \right] .
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Usando a relação (A.9) temos que o primeiro termo na segunda igualdade na equação acima pode ser escrito

$$\begin{aligned}
&\Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} - i\epsilon} \\
&= \Im \left\langle \vec{k} \right| \overbrace{V G_0^{(+)\dagger}(k) V \cdots G_0^{(+)\dagger}(k) V}^{(n-1)\text{ fatores } V;\ (n-2) \text{ fatores } G_0^{(+)\dagger}} \overbrace{\left(\int \mathrm{d}^N k' \frac{\left| \vec{k}' \right\rangle \left\langle \vec{k}' \right|}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} - i\epsilon} \right)}^{G_0^{(+)\dagger}(k)} V \left| \vec{k} \right\rangle \\
&= \Im \left\langle \vec{k} \right| \overbrace{V G_0^{(+)\dagger}(k) V \cdots G_0^{(+)\dagger}(k) V}^{n \text{ fatores } V;\ (n-1) \text{ fatores } G_0^{(+)\dagger}} \left| \vec{k} \right\rangle = \Im T^{(n)*}(\vec{k}',\vec{k}) \, .
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Por outro lado, usando (A.8)

$$\begin{aligned}
&- \frac{4\pi M}{\hbar^2} \Im i \int \mathrm{d}^N k' \, \delta(k'^2 - k^2) T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) \\
&= - \frac{4\pi M}{\hbar^2} \Im \frac{i}{2k} \int_0^\infty \mathrm{d}k' \, k'^2 \delta(k' - k) \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) \\
&= - \frac{Mk\pi}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \left[T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) + T^{(1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-1)}(\vec{k}',\vec{k}) \right] .
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Conseqüentemente, a Eq. (3.32) pode ser reformulada como

$$
\begin{aligned}
& \Im T^{(n)}(\vec{k},\vec{k}) = \Im T^{(n)*}(\vec{k},\vec{k}) \\
& -\frac{Mk\pi}{\hbar^2}\int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'}\left[T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) + T^{(1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-1)}(\vec{k}',\vec{k})\right] \\
& -\frac{Mk\pi}{\hbar^2}\int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'}\sum_{j=1}^{n-2}\left[T^{(j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-j)}(\vec{k}',\vec{k}) + T^{(n-j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(j)}(\vec{k}',\vec{k})\right] \\
= \; & \Im T^{(n)*}(\vec{k},\vec{k}) - \frac{Mk\pi}{\hbar^2}\int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'}\left[T^{(n-1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(1)}(\vec{k}',\vec{k}) + T^{(1)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-1)}(\vec{k}',\vec{k})\right] \\
& -\frac{Mk\pi}{\hbar^2}\int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'}\left[\sum_{j=1}^{n-2}T^{(j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-j)}(\vec{k}',\vec{k}) + \sum_{j=2}^{n-1}T^{(j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-j)}(\vec{k}',\vec{k})\right] \\
= \; & \Im T^{(n)*}(\vec{k},\vec{k}) - \frac{2Mk\pi}{\hbar^2}\int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'}\sum_{j=1}^{(n-1)}T^{(j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-j)}(\vec{k}',\vec{k})\,. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Usando o fato de que $\Im T^{(n)^\star}(\vec{k},\vec{k}) \;=\; -\,\Im T^{(n)}(\vec{k},\vec{k})$, chegamos à

$$
\Im T^{(n)}(\vec{k},\vec{k}) \;= -\frac{Mk\pi}{\hbar^2}\int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'}\sum_{j=1}^{(n-1)}T^{(j)*}(\vec{k}',\vec{k})T^{(n-j)}(\vec{k}',\vec{k})\,. \qquad (3.37)
$$

Esta última equação reproduz a Eq. (3.29) em termos de elementos da matriz T o que conclui a prova da unitariedade. A demonstração que acabamos de apresentar se aplica igualmente aos casos comutativo e não-comutativo.

4 A formulação funcional da dinâmica quântica não-comutativa

Neste Capítulo desenvolvemos a formulação funcional da dinâmica quântica de sistemas não-comutativos. Para atingir este objetivo usaremos a equivalência descrita no Capítulo 2, já que a formulação funcional da dinâmica de sistemas vinculados é bem conhecida. De fato, já temos todos os ingredientes que entram na integral do espaço de fase que define a funcional geradora da funções de Green ($Z[J,S]$) a qual é dada pela expressão [42]

$$
\begin{aligned}
Z[J,S] &= \mathcal{C} \int [\mathcal{D}q] \int [\mathcal{D}v] \int [\mathcal{D}p] \int [\mathcal{D}\pi] \left\{ \prod_{j=1}^{N} \delta[p^j - a v^j] \right\} \\
\times & \left\{ \prod_{j=1}^{N} \delta[\pi^j - a^2 \theta^{jk} v^k] \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_f} dt \left[p^j \, \dot{q}^j + \pi^j \, \dot{v}^j - h(p,q) \right.\right. \\
+ & \left.\left. q^j \, J^j + p^j \, S^j \right] \right\} . \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Aqui, J e S são fontes externas para q e p, respectivamente, enquanto $\mathcal{C}$ é uma constante de normalização a ser escolhida tal que $Z[J=0, S=0] = 1$. Após integrar em π e v, encontramos

$$Z[J,S] = \mathcal{C} \int [\mathcal{D}q] \int [\mathcal{D}p]$$
$$\times \; \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_f} dt \left[p^j \, \dot{q}^j \, - \, p^j \, \theta^{jk} \dot{p}^k \, - \, h(p,q) \, + q^j \, J^j \, + \, p^j \, S^j \right] \right\} . \tag{4.2}$$

Os graus de liberdade redundantes foram eliminados, permitindo expressar $Z[J,S]$ como uma integral no espaço de fase sobre variáveis independentes. Porém este não é o fim da história já que q e p não são variáveis canônicas do espaço de fase reduzido. Por outro lado, uma prova da existência de $Z[J,S]$ escrita como uma integral sobre variáveis canônicas independentes $(x,\, k)$ foi obtida por Fradkin e Vilkovisky[42]. Aqui, encontramos tal expressão ao realizarmos a transformação não-canônica (2.5) que nos permite escrever a Eq. (4.2) como

$$Z[J,S|x_f,t_f;x_{in},t_{in}] \, = \, \mathcal{C} \int [\mathcal{D}x] \int [\mathcal{D}k]$$
$$\times \; \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_f} dt \left[k^j \, \dot{x}^j \, - \, h(k^j, x^j + \theta^{jl} k^l) \, + x^j \, V^j \, + \, k^j \, U^j \right] \right\} , \tag{4.3}$$

onde

$$V^j \, \equiv \, J^j \, , \tag{4.4a}$$
$$U^j \, \equiv \, S^j \, - \, \theta^{j\,k} \, J^k \, . \tag{4.4b}$$

Observa-se que a dependência de Z nos valores de contorno de x e t foi explicitada.

O que falta ser elucidado é se a integral de caminho e a formulação operatorial levam a descrições equivalentes para a dinâmica quântica. Vamos substanciar esta prova de equivalência reconstruindo as relações de comutação na Eq. (1.3) a partir da abordagem funcional. Como as relações de comutação não são modificadas pela interação, podemos tomar, sem perda de generalidade, $h(k^j, x^j + \theta^{jl} k^l)$ igual ao Hamiltoniano livre, ou seja,

$$h(k^j, x^j + \theta^{jl} k^l) \;=\; \frac{1}{2M}\, k^j k^j \,. \tag{4.5}$$

A integral de caminho na Eq. (4.3) pode agora ser carregada explicitamente

$$\begin{aligned} Z[J,K|x_f=0,t_f;x_{in}=0,t_{in}] \;=\; \mathcal{C}'\, (\det\Omega)^{-\frac{1}{2}} \,\exp\left\{ \frac{iM}{2\hbar} \int_{t_{in}}^{t_f} dt\, U^j(t) U^j(t) \right. \\ \left. \frac{-i}{2\hbar} \int_{t_{in}}^{t_f} dt \int_{t_{in}}^{t_f} dt' \left[V^j(t) - M\dot{U}^j(t)\right] \Delta_F^{jl}(t,t') \left[V^j(t') - M\dot{U}^j(t')\right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $\Omega^{jl}(t,t')$ é o operador local

$$\Omega^{jl}(t,t') \;=\; -\, M\, \delta^{jl}\, \frac{d^2\delta(t-t')}{dt^2} \,, \tag{4.7}$$

cuja correspondente função de Green ($\Delta_F^{jl}(t,t')$) é

$$\Delta_F^{jl}(t,t') \;=\; \delta^{jl}\, \Delta_F(t,t') \,, \tag{4.8}$$

com

$$\begin{aligned} \Delta_F(t,t') \quad &= \quad \frac{1}{M(t_f - t_{in})} \left[\theta(t-t')\,(t'-t_{in})\,(t_f - t)\right. \\ &+ \quad \left.\theta(t'-t)\,(t - t_{in})\,(t_f - t')\right] \,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Também, $\mathcal{C}'$ e $\det\Omega$ são constantes.

Denotaremos por $W[J,S|x_f,t_f;x_{in},t_{in}]$,

$$W[J,S|x_f,t_f;x_{in},t_{in}] \;\equiv\; \ln Z[J,S|x_f,t_f;x_{in},t_{in}] \,, \tag{4.10}$$

a funcional geradora de funções de Green conectadas e normalizadas e por $\mathcal{T}$ o operador de ordenamento cronológico. Então, após alguma álgebra, as seguintes funções de Green de dois pontos são obtidas

$$\langle E_0, t_f| \mathcal{T}\left(Q^l(t)Q^j(t')\right)|E_0, t_{in}\rangle \equiv \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left.\frac{\delta^2 W[J,S|x_f=0,t_f;x_{in}=0,t_{in}]}{\delta J^l(t)\delta J^j(t')}\right|_{J=S=0}$$

$$= i\hbar\delta^{lj}\,\Delta_F(t,t') + i\hbar\,\theta^{lj}\,\frac{(t-t')}{(t_f-t_{in})} - i\hbar\,\theta^{lj}\,\epsilon(t-t')$$

$$- i\hbar\,M\,\left(\theta^2\right)^{lj}\,\delta(t-t') + i\hbar\,M\,\left(\theta^2\right)^{lj}\,\frac{1}{(t_f-t_{in})}\,, \tag{4.11a}$$

$$\langle E_0, t_f| \mathcal{T}\left(Q^l(t)P^j(t')\right)|E_0, t_{in}\rangle \equiv \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left.\frac{\delta^2 W[J,S|x_f=0,t_f;x_{in}=0,t_{in}]}{\delta J^l(t)\delta S^j(t')}\right|_{J=S=0}$$

$$= i\,\hbar\,\delta^{lj}\,M\,\frac{d\Delta_F(t,t')}{dt'} - i\hbar\,M\;\theta^{lj}\,\delta(t-t') + i\hbar\,M^2\,\theta^{lj}\,\frac{d^2\Delta_F(t,t')}{dt\,dt'}\,, \tag{4.11b}$$

$$\langle E_0, t_f| \mathcal{T}\left(P^l(t)P^j(t')\right)|E_0, t_{in}\rangle \equiv \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left.\frac{\delta^2 W[J,S|x_f=0,t_f;x_{in}=0,t_{in}]}{\delta S^l(t)\delta S^j(t')}\right|_{J=S=0}$$

$$= -\,i\hbar\delta^{lj}\,M\,\delta(t-t') + i\hbar M^2\delta^{lj}\,\frac{d^2\Delta_F(t,t')}{dt\,dt'}\,, \tag{4.11c}$$

onde $|\,E_0, t\,\rangle$ é o autovetor de energia do estado fundamental na representação de Heisenberg, $\epsilon(t)$ é a função sinal e $t_{in} \leq (t,t') \leq t_f$. Agora, o comutador de quaisquer dois operadores, $A(t)$ e $B(t)$, digamos, pode ser expresso em termos de produtos cronológicos $(\mathcal{T}(A(t)B(t')))$ como segue

$$[A(t)\,,\,B(t)] = \mathcal{T}(A(t)B(t'))\Big|_{t=t'_+} - \mathcal{T}(A(t)B(t'))\Big|_{t=t'_-}\,, \tag{4.12}$$

que claramente sinaliza que as contribuições ao comutador surgem das descontinuidades do produto cronológico em $t = t'$. Então, o comutador a tempos iguais de dois operadores de coordenadas só obtém contribuições do termo do lado direito da Eq. (4.11a) contendo a função sinal, isto é,

$$\langle E_0, t_f|\left[Q^l(t)\,,\,Q^j(t)\right]|E_0, t_{in}\rangle = -\,2i\hbar\,\theta^{l\,j}\,. \tag{4.13}$$

A contribuição ao comutador a tempos iguais $\left[Q^l(t)\,,\,P^k(t)\right]$ surge a partir da descontinuidade em $t = t'$ mostrada no primeiro termo no lado direito da Eq. (4.11b) e, portanto,

$$\langle E_0, t_f|\left[Q^l(t)\,,\,P^j(t)\right]|E_0, t_{in}\rangle \;=\; i\hbar\,\delta^{lj}\,. \tag{4.14}$$

Finalmente, o fato de todos os termos no lado direto da Eq. (4.11c) serem contínuos em $t = t'$ conduz a

$$\langle E_0, t_f|\left[P^l(t)\,,\,P^j(t)\right]|E_0, t_{in}\rangle \;=\; 0\,. \tag{4.15}$$

É claro que os elementos de matriz dos comutadores básicos que surgem da abordagem funcional estão de acordo com as regras de comutação na Eq. (1.3). Concluímos, então, que as construções operatorial e funcional fornecem descrições equivalentes da dinâmica quântica para modelos não-comutativos.

5 O procedimento de time-slicing e a unicidade da formulação funcional da dinâmica quântica não-comutativa

Neste capítulo nos dedicaremos a estudar as conseqüências de utilizar o método de "time-slicing" para definir a integral de caminho correspondente ao elemento de matriz (propagador de Feynman)

$$\mathcal{K}_\theta(x_f, t_f; x_{in}, t_{in}) = \langle \vec{x}_f | \, e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_{in})H(P,Q)} | \, \vec{x}_{in} \rangle = \langle \vec{x}_f | \, e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_{in})H_\theta(K,X)} \, | \vec{x}_{in} \rangle \,, \qquad (5.1)$$

onde as Eqs. (2.8) e (2.9) foram levadas em conta.

A definição da integral no espaço de fase através do procedimento de "time-slicing" exige que comecemos por escrever [1]

$$\mathcal{K}_\theta(x_f, t_f; x_{in}, t_{in}) \; = \; \lim_{\substack{m\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int dx_1 \cdots dx_m \prod_{a=0}^{m} \mathcal{K}_\theta(x_{a+1}, t_{a+1}; x_a, t_a) \,, \qquad (5.2)$$

onde dx é a simplificação para $d^N x$. O intervalo de tempo $(t_f - t_{in})$ foi dividido em $m+1$ subintervalos de igual tamanho. O limite $m \to \infty$ $(\epsilon \to 0)$ deve ser entendido como $\max(t_{a+1} - t_a) \to 0$ enquanto $\sum_{a=0}^{m} (t_{a+1} - t_a) = t_f - t_{in} \equiv: T$. Normalmente, $\mathcal{K}_\theta(x_{a+1}, t_{a+1}; x_a, t_a)$ é referido como "short-time propagator". Então, lembramos que no

[1] Não confundir a constante a definida no capítulo 1 com a identificação do "slice" a em questão nesta seção.

esquema de ordenamento geral de Cohen [32, 50] o conjunto de todas as possíveis regras de correspondências são obtidas através das operações

$$a(\vec{k},\vec{x}) \quad \xrightarrow{f} \quad A_f(\vec{K},\vec{X}) \equiv \int dx\, dk\, a(\vec{k},\vec{x})\Delta_f\left(\vec{K}-\vec{k},\vec{X}-\vec{x}\right), \tag{5.3a}$$

$$A(\vec{K},\vec{X}) \quad \xrightarrow{\tilde{f}} \quad a_{\tilde{f}}(\vec{k},\vec{x}) \equiv (2\pi\hbar)^N\, Tr\left[A(\vec{K},\vec{X})\Delta_{\tilde{f}}\left(\vec{K}-\vec{k},\vec{X}-\vec{x}\right)\right], \tag{5.3b}$$

onde dk é a simplificação de $d^N k$,

$$\Delta_f\left(\vec{K}-\vec{k},\vec{X}-\vec{x}\right) \equiv (2\pi\hbar)^{-2N}\int d^N\gamma\, d^N z\, f(\gamma,z)\, e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\gamma^j(X^j-x^j)+z^j(K^j-k^j)\right]}, \tag{5.4}$$

e f é uma função tal que $f(\gamma,0) = f(0,z) = 1$. Generalizando o caso unidimensional mostrado por Cohen [32,50], onde aqui usamos $\hbar\vec{\theta} = \vec{\gamma}$, $\hbar\vec{\tau} = \vec{z}$, reescrevemos o propagador de Feynmann infinitesimal

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_\theta(x_{a+1},t_{a+1};x_a,t_a)\\
&= (2\pi\hbar)^{-N}\int dk\int d^N y\int \frac{d^N\gamma}{(2\pi\hbar)^N} f(\gamma_i, x_a^j - x_{a+1}^j)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\gamma_i\left[y^i-\frac{1}{2}\left(x_{a+1}^i+x_a^i\right)\right]\right\}\\
&\exp\left\{\frac{\mathrm{i}\epsilon}{\hbar}\left[k_a^j\frac{x_{a+1}^j-x_a^j}{\epsilon}-h_{\theta_{\tilde{f}}}\left(k_a,y\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

A transformada de Weyl generalizada de índice α consiste na escolha

$$f(\vec{\gamma},\vec{z}) = e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\alpha\vec{\gamma}\cdot\vec{z}}, \tag{5.6}$$

onde $\tilde{f} = f^{-1}$ e α é um parâmetro real tal que

$$-\frac{1}{2} \le \alpha \le +\frac{1}{2}. \tag{5.7}$$

Neste caso podemos integrar a Eq. (5.5) nas variáveis γ e y de forma que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_\theta(x_{a+1}, t_{a+1}; x_a, t_a) \\
&= (2\pi\hbar)^{-N} \int dk \, \exp\left\{\frac{\mathrm{i}\epsilon}{\hbar}\left[k_a^j \frac{x_{a+1}^j - x_a^j}{\epsilon} - h_{\theta_{-\alpha}}\left(k_a, x_{a,a+1}(\alpha)\right)\right]\right\} .
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Aqui,

$$x_{a,a+1}^j(\alpha) \equiv \left(\frac{1}{2}+\alpha\right) x_{a+1}^j + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right) x_a^j \,, \tag{5.9}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}
h_{\theta_{-\alpha}}(k,x) &\equiv (2\pi\hbar)^N \mathrm{tr}\left[H_\theta(K,X)\Delta_{-\alpha}\left(\vec{K}-\vec{k}, \vec{X}-\vec{x}\right)\right] \\
&= (2\pi\hbar)^N \int dy \, \langle \vec{y} | \, H_\theta(K,X)\Delta_{-\alpha}\left(\vec{K}-\vec{k}, \vec{X}-\vec{x}\right) | \, \vec{y} \rangle \\
&= \int dy \, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}\cdot\vec{y}} \left\langle \vec{x} - \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\vec{y} \right| H_\theta(K,X) \left| \vec{x} + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\vec{y} \right\rangle ,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

é a transformada de Weyl generalizada de índice α (GWTα) do operador $H_\theta(K,X)$. Esta é uma generalização da regra de correspondência de Weyl [51, 52]. Além do mais,

$$\Delta_\alpha\left(\vec{K}-\vec{k}, \vec{X}-\vec{x}\right) \equiv (2\pi\hbar)^{-2N} \int d^N\gamma \, d^N\tau \, e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\alpha\gamma^j\tau^j + \tau^j(K^j-k^j) + \gamma^j(X^j-x^j)\right]} . \tag{5.11}$$

É comum simbolizar a operação (5.10) como

$$H_\theta(K\,,\,X) \xrightarrow{-\alpha} h_{\theta_{-\alpha}}(k,x) \,. \tag{5.12}$$

Levando em conta o acima exposto, chegamos a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_\theta(x_f, t_f; x_{in}, t_{in}) \;&=\; \lim_{\substack{m\to\infty \\ \epsilon\to 0}} (2\pi\hbar)^{-N(m+1)} \\
\times \int \left(\prod_{a=1}^{m} dx_a\right) &\left(\prod_{a=0}^{m} dk_a\right) \exp\left\{\frac{\mathrm{i}\epsilon}{\hbar}\sum_{a=0}^{m}\left[k_a^i\,\frac{x_{a+1}^i - x_a^i}{\epsilon} \;-\; h_{\theta_{-\alpha}}\left(k_a, x_{a,a+1}(\alpha)\right)\right]\right\}\,,
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

que define a integral de caminho através do método de "time-slicing". Note que quando inserimos dentro da integral de caminho a GWTα devemos, correspondentemente, escolher os termos dependentes de posição no ponto $x^i_{a,a+1}(\alpha)$. Portanto, a dinâmica de um sistema mecânico quântico especificado por um certo operador Hamiltoniano não possui uma translação única para a linguagem de integrais de caminho. Isto é o oposto da ambigüidade de ordenamento operatorial que surge quando realizamos a quantização em acordo com a regra de correspondência clássica-quântica.

Obviamente, consistência requer que toda a dependência em α no lado direito da Eq. (5.13) desapareça após tomarmos o limite $\epsilon \to 0$. Pelo que sabemos, ninguém ainda obteve sucesso em fazer tal prova de forma geral. Em particular, e desde que o Hamiltoniano H_θ envolve produtos de operadores não-comutantes, a unicidade da representação da integral de caminho de $\mathcal{K}_\theta(x_f, t_f; x_{in}, t_{in})$ é, ainda, uma questão em aberto.

Para isso, começamos olhando para $h_{\theta_{-\alpha}}(k, x)$. A ausência do problema de ordenamento no primeiro monômio do termo medial na Eq. (2.9) implica que

$$
K^j K^j \xrightarrow{-\alpha} \left(k^j k^j\right)_{-\alpha} \;=\; k^j k^j\,,
\tag{5.14}
$$

a qual pode ser verificada utilizando a Eq. (5.10).

Já para

$$
V_\theta(K, X) \;\equiv\; V(X^j + \theta^{jl}\,K^l)
\tag{5.15}
$$

a situação fica longe de ser simples, pois necessariamente envolve produtos de operadores não comutantes. Iniciando pela Eq. (5.10) e considerando que

$$
\begin{aligned}
\langle\vec{y}|\, V\left(X^j+\theta^{jl}K^l\right)\Big|\,\vec{k}\,'\Big\rangle &= V(\vec{y})\star\langle\,\vec{y}\,|\,\vec{k}\,'\,\rangle \\
&= V(\vec{y})e^{-\mathrm{i}\hbar\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y^j}}\theta^{jl}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y^l}}}\langle\,\vec{y}\,|\,\vec{k}\,'\,\rangle\,, &\text{(5.16a)}\\
\langle\,\vec{y}\,|\,\vec{k}\,\rangle &\equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{N}{2}}}e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}y^jk^j}\,, &\text{(5.16b)}\\
\int dx\,\phi(\vec{x})\star\psi(\vec{x}) &= \int dx\,\phi(\vec{x})\,\psi(\vec{x})\,, &\text{(5.16c)}\\
\Big\langle\vec{k}'\Big|\,\Delta_{-\alpha}\left(\vec{K}-\vec{k},\vec{X}-\vec{x}\right)|\,\vec{y}\,\rangle &= \frac{(2\pi\hbar)^{\frac{-3}{2}N}}{\left(-\alpha-\frac{1}{2}\right)^N}e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{y}\cdot\left\{\frac{-1}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\vec{k}-\left[1-\frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\right]\vec{k}\right\}} \\
&\times\; e^{\frac{-\mathrm{i}}{\hbar\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\vec{x}\cdot(\vec{k}\,'-\vec{k})}\,, &\text{(5.16d)}\\
\frac{e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}k'^jy^j}}{(2\pi\hbar)^{\frac{N}{2}}}\star\Big\langle\vec{k}'\Big|\,\Delta_{-\alpha}\left(\vec{K}-\vec{k},\vec{X}-\vec{x}\right)|\,\vec{y}\,\rangle &= \frac{(2\pi\hbar)^{-2N}}{\left(-\alpha-\frac{1}{2}\right)^N}\,e^{\frac{-\mathrm{i}}{\hbar\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{k}'-\vec{k})} \\
&\times\; e^{\frac{-\mathrm{i}}{\hbar\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}k'^j\theta^{jl}k^l}\,, &\text{(5.16e)}
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
&V_\theta(K,X)\;\xrightarrow{-\alpha}\;v_{\theta_{-\alpha}}(k,x)\;=\;(2\pi\hbar)^N\int dy\;\langle\vec{y}|\,V\left(X^j+\theta^{jl}K^l\right)\Delta_{-\alpha}\left(\vec{K}-\vec{k},\vec{X}-\vec{x}\right)|\,\vec{y}\,\rangle\\
&=\;(2\pi\hbar)^N\int dy\int dk'\,V(\vec{y})\left[\frac{e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}k^iy^i}}{(2\pi\hbar)^{\frac{N}{2}}}\star\Big\langle\vec{k}'\Big|\,\Delta_{-\alpha}\left(\vec{K}-\vec{k},\vec{X}-\vec{x}\right)|\,\vec{y}\,\rangle\right]\\
&=\;\frac{(2\pi\hbar)^{-N}}{\left(-\alpha-\frac{1}{2}\right)^N}\int dy\,V(\vec{y})\,e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\int dk'\,e^{\frac{-\mathrm{i}}{\hbar\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}k'^j\,(x^j-y^j+\theta^{jl}k^l)}\\
&=\;V(x^j+\theta^{jl}k^l)\,e^{\frac{-\mathrm{i}}{\hbar\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}k^j\theta^{jl}k^l}\;=\;V(x^j+\theta^{jl}k^l)\,. \qquad\qquad \text{(5.17)}
\end{aligned}
$$

Este resultado é de suma importância pois mostra que o que seria uma dependência em α de $v_{\theta_\alpha}(k,x)$ é retirada pela anti-simetria da matriz $\|\theta\|$. Enfatizamos que este não é o caso para um $V(K,X)$ arbitrário, envolvendo produtos de operadores não comutantes K e X. Presentemente, onde K e X entram em V através da combinação $X^j+\theta^{jl}K^l$, com

$\theta^{jl} = -\theta^{lj}$, tal dependência não ocorre, isto sendo verdade para quaisquer forma funcional de $V(x)$.

Retornando com as Eqs. (5.17) and (5.14) em (5.13) encontramos

$$\mathcal{K}_\theta(x_f, t_f; x_{in}, t_{in}) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ \epsilon\to 0}} (2\pi\hbar)^{-N(m+1)}$$
$$\times \int \left(\prod_{a=1}^{m} dx_a\right)\left(\prod_{a=0}^{m} dk_a\right) e^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{a=0}^{m}\left[k_a^j \frac{x^j_{a+1}-x^j_a}{\epsilon} - \frac{\vec{k}_a^2}{2M} - V\left(x^j_{a,a+1}(\alpha)+\theta^{jl}k^l_a\right)\right]}, \quad (5.18)$$

que ainda contem termos dependentes de α.

Estamos interessados em provar independência em α de $\mathcal{K}_\theta(x_f, t_f; x_{in}, t_{in})$ sem impor restrições à forma funcional de $V(u)$, além de analiticidade em $\vec{u} = 0$. Para este fim, começamos por introduzir fontes externas para as coordenadas e momenta, J e Z, respectivamente. Isto nos permite escrever a Eq. (5.18) como

$$\mathcal{K}_\theta(x_f, t_f; x_{in}, t_{in}) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ \epsilon\to 0}} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{a=0}^{m} V(L_a^i)} W(J, Z, \epsilon, m)\Big|_{J=Z=0}, \quad (5.19)$$

onde

$$L_a^j \equiv \frac{\hbar}{i\epsilon}\left(\frac{\delta}{\delta J_a^j} + \theta^{jl}\frac{\delta}{\delta Z_a^l}\right) \quad (5.20)$$

e

$$W(J, Z, \epsilon, m) \equiv (2\pi\hbar)^{-N(m+1)}$$
$$\times \int \left(\prod_{a=1}^{m} dx_a\right)\left(\prod_{a=0}^{m} dk_a\right) e^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{a=0}^{m}\left[k_a^j \frac{x^j_{a+1}-x^j_a}{\epsilon} - \frac{\vec{k}_a^2}{2M} + J^j_a x^j_{a,a+1}(\alpha) + Z^j_a k^j_a\right]}. \quad (5.21)$$

Após carregar as integrais nas variáveis de momentum na Eq. (5.18) obtemos

$$W(J,Z,\epsilon,m) = (2\pi\hbar)^{-N(m+1)}\left(\frac{2M\pi\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\right)^{\frac{N}{2}(m+1)} \times \int\left(\prod_{a=1}^{m}dx_a\right) e^{\frac{\mathrm{i}M\epsilon}{2\hbar}\left[A+\frac{1}{\epsilon}\sum_{a=1}^{m}\mu_a^i x_a^i+\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{a,b=1}^{m}x_a^i D_{ab}x_b^i\right]}\,, \tag{5.22}$$

onde

$$A \equiv \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)x_f^i J_m^i + \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x_{in}^i J_0^i + \sum_{a=0}^{m}\vec{Z}_a^2 + \frac{2}{\epsilon}x_f^i Z_m^i - \frac{2}{\epsilon}x_{in}^i Z_0^i + \frac{\vec{x}_f^2+\vec{x}_{in}^2}{\epsilon^2}\,, \tag{5.23a}$$

$$\mu_a^i \equiv -\frac{2}{\epsilon}x_{in}^i\delta_{a,1} - \frac{2}{\epsilon}x_f^i\delta_{a,m} + 2\left(Z_{a-1}^i - Z_a^i\right) + \frac{2\epsilon}{M}\left[\frac{1}{2}\left(J_{a-1}^i + J_a^i\right) + \alpha\left(J_{a-1}^i - J_a^i\right)\right], \quad a = 1,\cdots,m\,, \tag{5.23b}$$

$$D_{ab} \equiv 2\delta_{ab} - \left(\delta_{a+1,\,b} + \delta_{a,\,b+1}\right)\,, \quad a,b = 1\cdots,m\,. \tag{5.23c}$$

O determinante e a inversa da matriz $\|D\|$ podem ser computados diretamente e os resultados são:

$$\det(D_{ab}) = m+1\,, \tag{5.24a}$$

$$D_{ab}^{-1} = \frac{a(m-b+1)}{m+1}\,, \quad a \leq b\,. \tag{5.24b}$$

Isto nos permite calcular as integrais em x da Eq. (5.22) cujo resultado escrevemos[2]

$$W(J,Z,\epsilon,m) = \left(\frac{M}{2\pi\mathrm{i}\hbar T}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\Phi(J,K,\epsilon,m)} \tag{5.25}$$

onde

[2]Para maiores detalhes do cálculo de tais integrais ver a Ref. [53].

$$\Phi(J,Z,\epsilon,m) \equiv \frac{\mathrm{i}\epsilon}{\hbar}\left(\frac{MA}{2} - \frac{M}{8}\sum_{a,b=1}^{m}\mu_a^i D_{ab}^{-1}\mu_b^i\right) . \tag{5.26}$$

Inserimos, então, a Eq. (5.26) na Eq. (5.19). Após fazer isso, iremos encarar o problema de calcular a operação

$$\left[e^{-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{\hbar}\sum_{a=0}^{m} V(\vec{L}_a)}\right] e^{\Phi(J,Z,\epsilon,m)} = \left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{\hbar}\sum_{a=0}^{m} V(\vec{L}_a)\right)^r\right] e^{\Phi(J,Z,\epsilon,m)} . \tag{5.27}$$

A analiticidade de $V(u)$ em $\vec{u}=0$ implica que

$$V\left(\vec{L}_a\right) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\left.\frac{\partial^s V(u)}{\partial u^{i_1}\cdots\partial u^{i_s}}\right|_{u=0} L_a^{i_1}\cdots L_a^{i_s} . \tag{5.28}$$

Ademais,

$$L_{a_1}^{i_1}L_{a_2}^{i_2}\cdots L_{a_v}^{i_v}\, e^{\Phi} \tag{5.29}$$

é, desconsiderando os coeficientes que não dependem das correntes externas, a forma do termo genérico no lado direito da Eq. (5.27). Devido ao fato de que Φ é, no máximo, bilinear nas correntes externas, todos os monômios contendo três ou mais fatores L aplicados a Φ são identicamente nulos e, portanto, não contribuem para a Eq. (5.29). Em outras palavras, somente $L_a^i\Phi(J,Z,\epsilon,m)|_{J=Z=0}$ e $L_a^i L_b^j\Phi(J,Z,\epsilon,m)|_{J=Z=0}$ irão sobreviver na Eq. (5.29). O que resta a ser feito, neste caso, é mostrar que os recém mencionados monômios não dependem de α.

Para tal fim, usamos as Eqs. (5.23), (5.24) e (5.26) para encontrar

$$
\begin{aligned}
\frac{\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\frac{\delta\Phi}{\delta J_a^i} &= \delta_{a,m}\left[x_f^i + \frac{\epsilon}{T}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(x_f^i - x_{in}^i\right)\right] + \delta_{a,0}\left[x_{in}^i + \frac{\epsilon}{T}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left(x_f^i - x_{in}^i\right)\right] \\
&+ (1-\delta_{a,0}-\delta_{a,m})\left\{x_{in}^i\left(\frac{1}{2}+\frac{m-2a}{m+1}\right) + x_f^i\frac{a}{m+1} + \frac{\epsilon}{T}\left[x_f^i + \alpha\left(x_f^i - x_{in}^i\right)\right]\right\} \\
&-\epsilon\sum_{b,c=1}^{m}\left[Z_{b-1}^i - Z_b^i + \frac{\epsilon}{M}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)J_{b-1}^i + \frac{\epsilon}{M}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)J_b^i\right]D_{bc}^{-1} \\
&\times\left[\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\delta_{c,a+1} + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\delta_{c,a}\right], \qquad (5.30a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\frac{\delta\Phi}{\delta Z_a^i} &= MZ_a^i + \frac{M}{T}\left(x_f^i - x_{in}^i\right) \\
&-M\sum_{b,c=1}^{m}\left[Z_{b-1}^i - Z_b^i + \frac{\epsilon}{M}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)J_{b-1}^i + \frac{\epsilon}{M}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)J_b^i\right]D_{b,c}^{-1} \\
&\times\left(\delta_{c,a+1} - \delta_{c,a}\right). \qquad (5.30b)
\end{aligned}
$$

Portanto, de acordo com a Eq. (5.20),

$$
\begin{aligned}
L_a^i\Phi(J,Z,\epsilon,m)|_{J=Z=0} &= \delta_{a,m}x_f^i + \delta_{a,0}x_{in}^i + \frac{M}{T}\theta^{ij}\left(x_f^j - x_{in}^j\right) \\
&+ (1-\delta_{a,0}-\delta_{a,m})\left[x_{in}^i\left(\frac{1}{2}+\frac{m-2a}{m+1}\right) + x_f^i\frac{a}{m+1}\right] + \mathcal{O}(\epsilon), \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{O}(\epsilon)$ contém todos os termos desprezáveis quanto $\epsilon \to 0$. Sendo assim, nenhum termo dependente de α sobrevive neste limite.

Em seguida, consideramos $L_a^i L_b^j\Phi(J,Z,\epsilon,m)$. Primeiro obstrvamos que

$$
L_a^i L_b^j\Phi(J,Z,\epsilon,m) = \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\right)^2\left(\frac{\delta^2}{\delta J_a^i\delta J_b^j} + \theta^{ik}\theta^{jl}\frac{\delta^2}{\delta Z_a^k\delta Z_b^l} + \theta^{jl}\frac{\delta}{\delta J_a^i}\frac{\delta}{\delta Z_b^l} + \theta^{il}\frac{\delta}{\delta J_b^j}\frac{\delta}{\delta Z_a^l}\right)\Phi \qquad (5.32)
$$

e concentramo-nos no cálculo de cada termo no lado direito desta última equação. Omitimos os detalhes e referimos os resultados finais

$$\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\right)^2 \frac{\delta^2\Phi}{\delta J_a^i \delta J_b^j} = \delta^{ij}\frac{\mathrm{i}\hbar\epsilon}{M}\sum_{c,d=1}^{m} D^{-1}_{cd}\left[\frac{1}{4}\left(\delta_{c,a+1}\delta_{d,b+1}+\delta_{a,c}\delta_{d,b+1}+\delta_{a+1,c}\delta_{d,b}+\delta_{a,c}\delta_{b,d}\right)\right.$$

$$\left.+\alpha\left(\delta_{a+1,c}\delta_{b+1,d}-\delta_{a,c}\delta_{b,d}\right)+\alpha^2\left(\delta_{a+1,c}\delta_{b+1,d}-\delta_{a,c}\delta_{b+1,d}-\delta_{a+1,c}\delta_{b,d}+\delta_{ac}\delta_{bd}\right)\right]$$

$$= \delta^{ij}\frac{\mathrm{i}\hbar\epsilon}{M}\begin{cases} \frac{m}{m+1}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^2 , & a=b=0 \\ \frac{m}{m+1}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2 , & a=b=m \\ \frac{\epsilon}{T}\left\{\frac{1}{4}[4a(m-a)+m]+\alpha(m-2a)+m\alpha^2\right\} , & 0<a=b<m \\ \frac{\epsilon}{T}\left\{\frac{1}{4}[(4a+2)(m-b)+a+1]+\alpha(m-b-a)\right\} , & 0<a<b<m \\ \frac{\epsilon}{T}\left\{\frac{1}{4}[(4b+2)(m-a)+b+1]+\alpha(m-b-a)\right\} , & 0<b<a<m \end{cases}$$

$$= \delta^{ij}\frac{\mathrm{i}\hbar}{4MT}\begin{cases} \mathcal{O}(\epsilon)\,, & a=b=0\,,\, a=b=m \\ \epsilon^2[4a(m-a)+m]+\mathcal{O}(\epsilon)\,, & 0<a=b<m \\ \epsilon^2[(4a+2)(m-b)]+\mathcal{O}(\epsilon)\,, & 0<a<b<m \\ \epsilon^2[(4b+2)(m-a)]+\mathcal{O}(\epsilon)\,, & 0<b<a<m \end{cases} \quad , \tag{5.33}$$

$$\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\right)^2 \theta^{ik}\theta^{jl}\frac{\delta^2\Phi}{\delta Z_a^k \delta Z_b^l}$$
$$= \theta^{ik}\theta^{jk}\frac{M\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\sum_{c,d=1}^{m} D^{-1}_{cd}\left(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{a+1,c}\delta_{b+1,d}+\delta_{a,c}\delta_{d,b+1}+\delta_{a+1,c}\delta_{b,d}-\delta_{ac}\delta_{bd}\right)$$
$$= \theta^{ik}\theta^{jk}\frac{M\hbar}{\mathrm{i}T}\,, \quad \forall\, a,b=0\cdots m\,, \tag{5.34}$$

$$\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\right)^2\left(\theta^{jl}\frac{\delta}{\delta J_a^i}\frac{\delta}{\delta Z_b^l}\right)\Phi$$
$$= +\frac{\theta^{ij}\hbar}{\mathrm{i}}\sum_{c,d=1}^{m}\left[\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\delta_{a+1,c}+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\delta_{a,c}\right]D^{-1}_{cd}\left(\delta_{d,b+1}-\delta_{d,b}\right)\,, \tag{5.35}$$

e

$$\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\right)^2\left(\theta^{il}\frac{\delta}{\delta J_b^j}\frac{\delta}{\delta Z_a^l}\right)\Phi$$
$$= -\frac{\theta^{ij}\hbar}{\mathrm{i}}\sum_{c,d=1}^{m}\left[\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\delta_{b+1,c}+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\delta_{b,c}\right]D^{-1}_{cd}\left(\delta_{d,a+1}-\delta_{d,a}\right). \tag{5.36}$$

Observe que um termo como $\epsilon^2[4a(m-a)+m]$, que aparece no lado direito da Eq. (5.33), não é eliminado ao tomarmos $\epsilon \to 0$. Para exemplificar por que isso acontece tomamos, por exemplo, $a = m/2$ e encontramos

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ m\to\infty}} \epsilon^2\left[2m\left(m-\frac{m}{2}\right)+m\right] = T^2 \neq 0\,. \tag{5.37}$$

De forma similar, o segundo, terceiro e quarto termos no lado direito da Eq. (5.33) contém partes que sobrevivem no limite $\epsilon \to 0$. No entanto, todas essas contribuições independem de α. O mesmo se aplica no lado direito da Eq. (5.34), onde a presença da não-comutatividade deve ser notada. Já o lado direito das Eqs. (5.35) e (5.36), quando somados, nos levam a

$$\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}\epsilon}\right)^2\left(\theta^{jl}\frac{\delta}{\delta J_a^i}\frac{\delta}{\delta Z_b^l}+\theta^{il}\frac{\delta}{\delta J_b^j}\frac{\delta}{\delta Z_a^l}\right)\Phi = \mathrm{i}\hbar\sum_{c,d=1}^{m}D^{-1}_{c,d}\left(\delta_{a+1,c}\delta_{b,d}-\delta_{a,c}\delta_{d,b+1}\right)$$
$$= \begin{cases} 0\,, & a=b \\ \mathrm{i}\hbar\theta^{ij}\frac{m+1+a-b}{m+1}\,, & 0\le a<b\le m \\ -\mathrm{i}\hbar\theta^{ij}\frac{m+1+a-b}{m+1}\,, & 0\le b<a\le m \end{cases}, \tag{5.38}$$

que são claramente independentes de α. Isto completa a desejada prova relativa à independência de α de $\mathcal{K}_\theta(x_f,t_f;x_{in},t_{in})$.

É importante mencionar que, individualmente, as Eqs. (5.35) e (5.36) contém, entre outros, termos dependentes de α. No entanto, após essas contribuições serem adicionadas, os termos mencionados cancelam entre si. A anti-simetria de $\|\theta\|$ está, mais uma vez, na raiz do mecanismo de cancelamento.

6 Mecânica quântica como uma teoria de calibre

É sabido que após uma ampliação apropriada do espaço de fase de uma teoria de segunda classe podemos obter uma teoria de primeira classe (uma teoria de calibre) [37–39, 54]. Sendo assim, a formulação da teoria de calibre que resulta desse desenvolvimento em diferentes calibres fornece diferentes realizações do modelo inicial de segunda classe. Neste capítulo, vamos estender para uma teoria de calibre a teoria de segunda classe que dá origem à MQNC. Estudaremos em detalhes a equivalência entre as teorias de primeira e segunda classe, partindo da formulação clássica. Usaremos, para tal fim, os métodos de quantização funcional e operatorial.

6.1 Imersão BFT

Nossa estratégia de imersão está baseada naquela exposta nas Refs. [37–39, 54]. Para tornar o cálculo possível, usaremos a notação compacta

$$q^\mu \equiv \begin{cases} q^j,\ 1 \leq \mu \leq N \\ v^j,\ N+1 \leq \mu \leq 2N \end{cases}, \tag{6.1}$$

$$p_\mu \equiv \begin{cases} p_j,\ 1 \leq \mu \leq N \\ \pi_j,\ N+1 \leq \mu \leq 2N \end{cases}. \tag{6.2}$$

Claramente, p_μ é o momentum canonicamente conjugado à coordenada q^μ e obedece à álgebra canônica de colchetes de Poisson (PB) $[q^\mu\,,\,p_\nu]_{PB} = \delta^\mu_\nu$.

Para formular a dinâmica do sistema nessa notação começamos por introduzir a matriz singular $2N \times 2N$

$$||\Theta|| \equiv \left[\begin{array}{c|c} 0_N & a g_{\mu\,,\,\nu-N} \\ \hline 0_N & a^2\theta_{\mu-N\,,\nu-N} \end{array}\right] . \tag{6.3}$$

Daqui em diante, índices gregos repetidos são somados de 1 a $2N$. A métrica Euclideana do espaço $2N$-dimensional é descrita por $g_{\mu\nu}$. Neste ponto podemos já reescrever os vínculos em termos das novas quantidades, isto é,

$$\mathcal{T}^{(0)}_\mu \equiv p_\mu - \Theta_{\mu\nu} q^\nu = \begin{cases} G_i,\ 1 \leq \mu \leq N \\ \\ T_i,\ N+1 \leq \mu \leq 2N \end{cases} . \tag{6.4}$$

Desta forma, os elementos ($\Delta_{\mu\nu}$) da matriz de Faddeev-Popov ($\|\Delta\|$) são obtidos a partir de[1]

$$\Delta_{\mu\nu} \;\equiv\; [\mathcal{T}^{(0)}_\mu\,,\mathcal{T}^{(0)}_\nu]_{PB} \;=\; \Theta_{\nu\mu} - \Theta_{\mu\nu} \;=\; -\Delta_{\nu\mu} \tag{6.5}$$

ou, de forma mais explícita,

$$\|\Delta\| \;=\; \left[\begin{array}{c|c} 0_N & -a g_{\mu\,,\,\nu-N} \\ \hline a g_{\mu-N\,,\,\nu} & -2a^2\theta_{\mu-N\,,\,\nu-N} \end{array}\right] . \tag{6.6}$$

Neste ponto já temos em mãos todos os ingredientes necessários para calcular os colchetes de Dirac (DB) básicos. Conforme o procedimento padrão de cálculo de DB's obtemos

[1] Esclarecemos que $[]_{PB}$ designa o colchete de Poisson.

$$[q^\mu, q^\nu]_{DB} = (\Delta^{-1})^{\mu\nu} \Longrightarrow \begin{cases} [q^i, q^j]_{DB} = -2\theta^{ij} \\ [q^i, v^j]_{DB} = \frac{1}{a} g^{ij} \\ [v^i, v^j]_{DB} = 0 \end{cases} , \tag{6.7}$$

$$[q^\mu, p_\nu]_{DB} = \delta^\mu_\nu + (\Delta^{-1})^{\mu\alpha}\Theta_{\alpha\nu} \Longrightarrow \begin{cases} [q^i, p_j]_{DB} = \delta^i_j \\ [q^i, \pi^j]_{DB} = -a\theta^{ij} \\ [v^i, p_j]_{DB} = 0 \\ [v^i, \pi_j]_{DB} = 0 \end{cases} , \tag{6.8}$$

$$[p_\mu, p_\nu]_{DB} = \Theta_{\alpha\mu}(\Delta^{-1})^{\alpha\beta}\Theta_{\beta\nu} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} [p_i, p_j]_{DB} = 0 \\ [p_i, \pi_j]_{DB} = 0 \\ [\pi_i, \pi_j]_{DB} = 0 \end{cases} , \tag{6.9}$$

onde

$$\|\Delta\|^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} -2\theta_{\mu\,,\,\nu} & \frac{1}{a} g_{\mu\,,\,\nu-N} \\ \hline -\frac{1}{a} g_{\mu-N\,,\,\nu} & 0_N \end{array}\right] . \tag{6.10}$$

No contexto da álgebra de DB's, os vínculos atuam como identidades fortes e podem ser utilizados, por exemplo, para eliminar do espaço de fase as coordenadas v e π. Neste caso, para quaisquer duas funções das variáveis remanescentes, digamos $f(q,p)$ e $g(q,p)$, a regra de correspondência

$$[\hat{F}\,,\,\hat{G}] = i\,\hbar\,[f\,,\,g]_{DB}\Big|_{\substack{q \to \hat{Q} \\ p \to \hat{P}}} \tag{6.11}$$

nos fornece um método de quantização confiável. Naturalmente, uma prescrição de ordenamento suplementar deve ser necessária. Enfatizamos que esta regra, juntamente com as Eqs. (6.7)-(6.9), permitem reobter a álgebra de comutadores na Eq. (1.3) e, portanto, confirma a afirmação de que o Lagrangeano na Eq. (2.1) é a contrapartida clássica da mecânica quântica não-comutativa.

O próximo passo para obtermos a imersão BFT do sistema de segunda classe sob análise consiste em aumentar o espaço de fase original adicionando-se $2N$ novas coordenadas (u^μ) e seus correspondentes momenta canonicamente conjugados (s_μ)[2]. As quantidades de interesse são, todavia, as variáveis compostas

$$z^\mu \equiv -\frac{1}{2}u^\mu + \omega^{\mu\nu}s_\nu\,, \tag{6.12}$$

onde $\omega^{\mu\nu}$ é uma matriz real e constante $2N \times 2N$ que, por enquanto, permanece à nossa disposição. Já que as novas variáveis obedecem a uma álgebra de Poisson canônica, $[u^\mu\,,\, s_\nu]_{PB_\Lambda} = \delta^\mu_\nu$, obtemos[3]

$$[z^\mu\,,\, z^\nu]_{PB_\Lambda} = \omega^{\mu\nu}\,. \tag{6.13}$$

Para tanto, escolhemos, de agora em diante,

$$\omega^{\mu\nu} \equiv (\Delta^{-1})^{\mu\nu}\,. \tag{6.14}$$

Definida a matriz $||\omega||$, devemos procurar as extensões dos vínculos $(\mathcal{T}^{(0)}_\mu(q,p) \rightarrow \mathcal{T}_\mu(q,p,z))$, bem como do Hamiltoniano $(H^{(0)}(q,p) = h_0(q,p) \rightarrow \mathcal{H}(q,p,z))$, as quais devem verificar a álgebra de involução forte

[2] O espaço de fase definido pelos q's e p's será denotado Σ, enquanto Λ rotula o espaço de fase definido pelos u's e s's. O espaço de fase total, neste caso, será denotado $\Gamma \equiv \Sigma \oplus \Lambda$.

[3] O subscrito extra Λ especifica o espaço de fase onde o PB está sendo calculado. O mesmos será feito quando for o caso dos PB's serem tomados em Σ ou Γ.

$$[\mathcal{T}_\mu(q,p,z)\,,\,\mathcal{T}_\nu(q,p,z)]_{PB_\Gamma} \,=\, 0\,, \tag{6.15a}$$

$$[\mathcal{T}_\mu(q,p,z)\,,\,\mathcal{H}(q,p,z)]_{PB_\Gamma} \,=\, 0\,, \tag{6.15b}$$

juntamente com as condições de contorno $\mathcal{T}_\mu(q,p,z=0) \,=\, \mathcal{T}_\mu^{(0)}(q,p)$ e $\mathcal{H}(q,p,z=0) \,=\, H^{(0)}(q,p)$. Por definição, as Eqs. (6.15) especificam uma teoria de calibre Abeliana[4]. Em particular, estaremos interessados nas extensões que tenham a forma de uma desenvolvimento em série de potências das variáveis z's [37–39, 54]

$$\mathcal{T}_\mu(q,p,z) \,=\, \mathcal{T}_\mu^{(0)}(q,p) \,+\, \sum_{M=1}^{+\infty} \mathcal{T}_\mu^{(M)}(q,p,z)\,, \tag{6.16a}$$

$$\mathcal{H}(q,p,z) \,=\, H^{(0)}(q,p) \,+\, \sum_{M=1}^{+\infty} H^{(M)}(q,p,z)\,, \tag{6.16b}$$

onde

$$\mathcal{T}_\mu^{(M)}(q,p,z) \,=\, X^{(M)}_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_M}(q,p)\, z^{\alpha_1}\cdots z^{\alpha_M}\,, \tag{6.17}$$

e

$$H^{(M)}(q,p,z) \,=\, Y^{(M)}_{\alpha_1\cdots\alpha_M}(q,p)\, z^{\alpha_1}\cdots z^{\alpha_M}\,. \tag{6.18}$$

O que resta a ser feito é determinar os coeficientes X e Y da expansão acima.

Vamos nos concentrar primeiramente na Eq. (6.15a). Substituindo as Eqs. (6.17) e (6.16a) na Eq. (6.15a) e, logo, isolando termos da ordem de z^0, obtemos

$$\Delta_{\mu\nu} \,+\, X^{(1)}_{\mu\alpha}\,(\Delta^{-1})^{\alpha\beta}\, X^{(1)}_{\nu\beta} \,=\, 0 \tag{6.19}$$

[4]A possibilidade de se implementar um formalismo de imersão que leva a uma álgebra de involução fraca (não-Abeliana) foi investigada na Ref. [55]

levando em conta a Eq. (6.5). Claramente

$$X^{(1)}_{\mu\nu} \,=\, \Delta_{\mu\nu} \,=\, -\,\Delta_{\nu\mu} \tag{6.20}$$

é solução da Eq. (6.19). O ponto relevante a ser notado aqui é que a solução para $X^{(1)}_{\mu\nu}$ não depende de q e/ou p. Isso implica na relação

$$[\mathcal{T}^{(0)}_{\mu}(q,p)\,,\,\mathcal{T}^{(1)}_{\nu}(q,p,z)]_{PB_{\Sigma}} \,=\, 0\,, \tag{6.21}$$

que, combinada com a seguinte escolha de simetria

$$X^{(M)}_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_j\cdots\alpha_k\cdots\alpha_M}(q,p) \,=\, +\,X^{(M)}_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_k\cdots\alpha_j\cdots\alpha_M}(q,p)\,, \tag{6.22a}$$

$$X^{(M)}_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_j\cdots\alpha_k\cdots\alpha_M}(q,p) \,=\, -\,X^{(M)}_{\alpha_j\alpha_1\cdots\mu\cdots\alpha_k\cdots\alpha_M}(q,p)\,, \quad \forall\ \alpha_j\,, \tag{6.22b}$$

resulta em

$$X^{(M)}_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_j\cdots\alpha_k\cdots\alpha_M}(q,p) \,=\, 0 \Longrightarrow \mathcal{T}^{(M)}_{\mu}(q,p,z) \,=\, 0\,, \quad \forall\ M \geq 2\,. \tag{6.23}$$

Dessa maneira, a Eq. (6.16a) se reduz a

$$\mathcal{T}_{\mu}(q,p,z) \,=\, \mathcal{T}^{(0)}_{\mu}(q,p) \,+\, \mathcal{T}^{(1)}_{\mu}(q,p) \,=\, p_{\mu} - \Theta_{\mu\nu}q^{\nu} \,+\, \Delta_{\mu\nu}\,z^{\nu}\,, \tag{6.24}$$

onde a Eq. (6.4) foi considerada. Além disso, as Eqs. (6.3) e (6.10) nos permitem separar a Eq. (6.24) da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_{j}(q,p,z) \,=\, p_j \,-\, av_j \,-\, a\,g_{jk}\,z^{N+k}\,; \tag{6.25a}$$

$$\mathcal{T}_{N+j}(q,p,z) \,=\, \pi_j \,+\, az_j \,-\, a^2\,\theta_{jk}\,\left(v^k \,+\, 2z^{N+k}\right)\,. \tag{6.25b}$$

O problema de encontrar a extensão BFT para os vínculos está terminado.

O que resta a ser feito é encontra uma extensão para o Hamiltoniano. Como somente o termo $\mathcal{T}_\mu^{(1)}(q,p,z)$ é não-nulo, a relação de recorrência que surge da Eq. (6.15b) é simplificada. Para um M genérico encontramos

$$[\mathcal{T}_\mu^{(0)}(q,p)\,,\,H^{(M)}(q,p,z)]_{PB_\Sigma} + [\mathcal{T}_\mu^{(1)}(q,p,z)\,,\,H^{(M+1)}(q,p,z)]_{PB_\Lambda} = 0\,. \tag{6.26}$$

Relembrando, o Hamiltoniano $H^{(0)}(q,p)$ não é função de q^μ e p_ν para μ e ν no intervalo $[N+1, 2N]$ correspondente ao setor (v,π). Neste caso, vamos fazer a escolha (veja a Eq. (6.18))

$$Y^{(M)}_{\alpha_1\cdots\alpha_M}(q,p) = 0\,, \tag{6.27}$$

quando qualquer um dos seus subscritos tomam valor no intervalo $[N+1, 2N]$ e

$$Y^{(M)}_{i_1\cdots i_M}(q,p) = \frac{1}{M!}\frac{\partial^M H^{(0)}(q,p)}{\partial q^{i_1}\cdots\partial q^{i_M}}\,. \tag{6.28}$$

Se as Eqs. (6.27) e (6.28) corresponderem a solução da Eq. (6.26), a expressão para a extensão do Hamiltoniano é

$$\mathcal{H}(q,p,z) = H^{(0)}(q,p) + \sum_{M=1}^{+\infty} H^{(M)}(q,p,z) \equiv: H^{(0)}(q+z,p) \tag{6.29}$$

já que

$$H^{(M)}(q,p,z) = Y^{(M)}_{i_1\cdots i_M}(q,p)\,z^{i_1}\cdots z^{i_M} = \frac{1}{M!}\frac{\partial^M H^{(0)}(q,p)}{\partial q^{i_1}\cdots\partial q^{i_M}}\,z^{i_1}\cdots z^{i_M}\,, \tag{6.30}$$

conforme segue das Eqs. (6.16b), (6.18), (6.27) e (6.28). Assim, a extensão do Hamiltoniano é obtida carregando-se a translação $q^i \longrightarrow q^i + z^i$ no Hamiltoniano original $H^{(0)}(q,p)$. Devemos, no entanto, mostrar que as escolhas feitas neste parágrafo de fato obedecem à álgebra de involução. Para este fim seguiremos um procedimento de dois passos. Primeiro tomamos $\mu = i$ na Eq. (6.26), ou seja,

$$[\mathcal{T}_i^{(0)}(q,p)\,,\,H^{(M)}(q,p,z)]_{PB_\Sigma} + [\mathcal{T}_i^{(1)}(q,p,z)\,,\,H^{(M+1)}(q,p,z)]_{PB_\Lambda} = 0\,. \tag{6.31}$$

Devemos manter em mente que $\mathcal{T}_i^{(0)}(q,p)$ assim como $H^{(0)}(q,p)$ somente depende daqueles q^i's e p_i's para os quais $i \leq N$. Em vista da Eq. (6.30), o mesmo se aplica para $H^{(M)}(q,p,z)$. Vamos considerar o cálculo do primeiro termo no lado esquerdo da Eq. (6.31). Trazendo a forma explícita dada na Eq. (6.4) para $\mathcal{T}^0$ bem como para a matriz $||\Theta||$ na Eq. (6.3) encontramos

$$[\mathcal{T}_i^{(0)}(q,p)\,,\,H^{(M)}(q,p,z)]_{PB_\Sigma} = -\,\frac{\partial H^{(M)}(q,p,z)}{\partial q^i}\,. \tag{6.32}$$

O cálculo do segundo termo no lado esquerdo da Eq. (6.31) é mais complicado. Para começar tomamos $\mathcal{T}_i^{(1)}(q,p,z)$ diretamente da Eq. (6.24) e escrevemos

$$\Big[\mathcal{T}_i^{(1)}(q,p,z)\,,\,H^{(M+1)}(q,p,z)\Big]_{PB_\Lambda} = Y^{(M+1)}_{i_1\cdots i_{M+1}}(q,p)\,\Delta_{i\nu}\,[z^\nu\,,\,z^{i_1}\cdots z^{i_{M+1}}]\,, \tag{6.33}$$

levando em conta a Eq. (6.30). O cálculo explícito do lado direito desta última equação requer a aplicação reiterada da relação $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$. Isto gera uma soma de termos contendo PB's entre pares de variáveis z's, cujo valor é dado na Eq. (6.13). Ou seja,

$$\Delta_{i\nu}\,[z^\nu\,,\,z^{i_2}\cdots z^{i_{M+1}}]_{PB_\Lambda} = \delta_i^{\,i_1} z^{i_2}\cdots z^{i_{M+1}} + \cdots + z^{i_1}\cdots z^{i_M}\,\delta_i^{\,i_{M+1}}\,. \tag{6.34}$$

Observamos que $Y^{(M)}_{i_1\cdots i_M}(q,p)$ é simétrico sob mudança de quaisquer pares de índices. Isso simplifica muito a expressão que surge após inserirmos a Eq. (6.34) na Eq. (6.33). O que obtemos é a expressão

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{T}^{(1)}_i(q,p,z)\,,\,H^{(M+1)}(q,p,z)\right]_{PB_\Lambda} &= (M+1)Y^{(M+1)}_{ii_1\cdots i_M}(q,p)\,z^{i_1}\cdots z^{i_M}\\ = \frac{\partial Y^{(M)}_{i_1\cdots i_M}(q,p)}{\partial q^i}z^{i_1}\cdots z^{i_M} &= +\frac{\partial H^{(M)}(q,p,z)}{\partial q^i}\,. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Claramente, as Eqs. (6.32) e (6.35) asseguram a validade da Eq. (6.31). Resta agora testar o caso $\mu = N+i$ na Eq. (6.26). Neste caso

$$[\mathcal{T}^{(0)}_{N+i}(q,p)\,,\,H^{(M)}(q,p,z)]_{PB_\Sigma} + [\mathcal{T}^{(1)}_{N+i}(q,p,z)\,,\,H^{(M+1)}(q,p,z)]_{PB_\Lambda} = 0\,. \tag{6.36}$$

Ademais, as Eqs. (6.3) e (6.4) nos levam a

$$[\mathcal{T}^{(0)}_{N+i}(q,p)\,,\,H^{(M)}(q,p,z)]_{PB_\Sigma} = [\pi_i - a^2\theta_{ik}v^k\,,\,H^{(M)}(q,p,z)]_{PB_\Sigma} = 0\,, \tag{6.37}$$

já que $H^{(M)}(q,p,z)$ não dependem das variáveis pertencentes ao setor $N+1 \le \mu \le 2N$. Assim como para o desenvolvimento do segundo termo no lado esquerdo da Eq. (6.36), invocamos as Eqs. (6.24), (6.30) e (6.13) para obtermos

$$\begin{aligned}[\mathcal{T}^{(1)}_{N+i}(q,p,z)\,,\,H^{(M+1)}(q,p,z)]_{PB_\Lambda} &= Y^{M+1}_{i_1\cdots i_{M+1}}(q,p)\,\Delta_{N+i\;\nu}\left[z^\nu\,,\,z^{i_1}\cdots z^{i_{M+1}}\right]\\ = Y^{M+1}_{i_1\cdots i_{M+1}}(q,p)\left(\delta_{N+i}^{\;i_1}z^{i_2}\cdots z^{i_{M+1}} + \cdots + z^{i_1}\cdots z^{i_M}\,\delta_{N+i}^{\;i_{M+1}}\right) &= 0\,, \end{aligned} \tag{6.38}$$

pois os índices em cada símbolo de Kronecker pertencem a setores não sobrepostos. Assim, o lado esquerdo da Eq. (6.36) se anula identicamente. Isto confirma que as escolhas feitas nas Eqs. (6.27) e (6.28) são consistentes.

Encerramos esta seção esclarecendo que uma opção diferente para $\omega^{\mu\nu}$ conduz à uma extensão BFT que difere da obtida por nós por uma transformação canônica [37–39].

6.2 O setor invariante de calibre

Primeiramente vamos ver o que podemos concluir a partir da contagem dos graus de liberdade do modelo de segunda classe bem como da correspondente extensão BFT. O número de dimensões do espaço de fase da teoria de segunda classe é $d[\Sigma] = 4N$, enquanto que o número de variáveis independentes do espaço de fase é $4N - 2N = 2N$, sendo $2N$ o número de vínculos de segunda classe. Para a caso da teoria de calibre, o número de dimensões do seu espaço de fase é $d[\Gamma] = 8N$, enquanto que o número de variáveis independente desse espaço de fase é $8N - 4N = 4N$, onde $4N$ inclui os vínculos estendidos de primeira classe e as correspondentes condições de calibre (condições subsidiárias). Não é evidente que ambos os modelos descrevam a mesma realidade física. Para mostrar que este é de fato o caso começaremos construindo o espaço de fase que é definido pelos graus de liberdade independentes de calibre. Após, derivamos a algebra de PB's verificada por essas variáveis do espaço de fase. Outrossim, os vínculos e o Hamiltoniano serão reescritos em termos de variáveis invariantes de calibre. Veremos que através desse procedimento recuperamos univocamente a formulação Hamiltoniana do modelo de segunda classe.

Para começar, lembramos que o gerador de transformações de calibre infinitesimais (G) é dado pela expressão [42, 56]

$$G = \epsilon^{\mu} \mathcal{T}_{\mu} \,, \tag{6.39}$$

onde $\epsilon^{\mu}, \mu = 1, \cdots, 2N$ denota um conjunto de parâmetros infinitesimais independentes do tempo e $\mathcal{T}_{\mu}$ é especificado na Eq. (6.24). Então, sob transformação de calibre infinitesimais, os q's, p's e z's mudam, respectivamente, conforme as equações

$$\bar{\delta} q^{\mu} \;=\; [q^{\mu}, G]_{PB_{\Sigma}} \;=\; \epsilon^{\mu}\,, \tag{6.40a}$$

$$\bar{\delta} p_{\mu} \;=\; [p_{\mu}, G]_{PB_{\Sigma}} \;=\; \Theta_{\rho\mu}\epsilon^{\rho} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta} p_i \;=\; 0 \\ \\ \bar{\delta}\pi_i \;=\; a\epsilon_i - a^2\theta_{ik}\epsilon^{N+k} \end{array} \right. \,, \tag{6.40b}$$

$$\bar{\delta} z^{\mu} \;=\; [z^{\mu}, G]_{PB_{\Lambda}} \;=\; -\,\epsilon^{\mu}\,. \tag{6.40c}$$

Consequentemente, os objetos compostos Q^{μ} e P_{μ},

$$Q^{\mu} \;\equiv\; q^{\mu} \;+\; z^{\mu}\,, \tag{6.41a}$$

$$P_{\mu} \;\equiv\; p_{\mu} \;+\; z^{\nu}\Theta_{\nu\mu} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_i \;=\; p_i \\ \\ P_{N+i} \;=\; \pi_i + a z_i \;-\; a^2\theta_{ik}\, z^{N+k} \end{array} \right. \,, \tag{6.41b}$$

permanecem invariantes sob transformações de calibre. Assumimos que estas variáveis compostas servem para definir o espaço de fase físico. Para verificar isso, calculamos a álgebra de PB. Diretamente verificamos que

$$[Q^{\mu}\,,\,Q^{\nu}]_{PB_{\Gamma}} \;=\; \left(\Delta^{-1}\right)^{\mu\nu}\,, \tag{6.42a}$$

$$[Q^{\mu}\,,\,P_{\nu}]_{PB_{\Gamma}} \;=\; \delta^{\mu}_{\nu} \;+\; \left(\Delta^{-1}\right)^{\mu\alpha}\Theta_{\alpha\nu}\,, \tag{6.42b}$$

$$[P_{\mu}\,,\,P_{\nu}]_{PB_{\Gamma}} \;=\; \Theta_{\alpha\mu}\left(\Delta^{-1}\right)^{\alpha\beta}\Theta_{\beta\nu} \;=\; 0\,, \tag{6.42c}$$

que exatamente duplica a álgebra de DB das correspondentes variáveis que especificam o espaço de fase do sistema de segunda classe (veja as Eqs. (6.7)-(6.9)). Enfatizamos que a comparação está sendo feita entre colchetes de Poisson envolvendo quantidades invariantes de calibre pertencente ao sistema de primeira classe com colchetes de Dirac envolvendo as correspondentes contrapartidas no modelo de segunda classe.

Entretanto, estabelecer a equivalência entre a teoria de segunda classe original e sua extensão BFT demanda trabalho adicional. De fato, devemos investigar a forma assumida pelos vínculos de primeira classe e o Hamiltoniano, quando reescritos em termos das coordenadas do espaço de fase independente de calibre definidas na Eq. (6.41). Focamos primeiro os vínculos. As Eqs. (6.24), (6.5) e (6.41) conduzem a

$$\mathcal{T}_\mu(q,p,z) \,=\, P_\mu \,-\, \Theta_{\mu\nu}\, Q^\nu \,=\, \mathcal{T}^{(0)}_\mu(Q,P)\,, \tag{6.43}$$

de acordo com a Eq. (6.4). No caso do Hamiltoniano, as Eqs. (6.29) e (6.41) fornecem

$$\mathcal{H}(q,p,z) \,=\, H^{(0)}(Q,P)\,, \tag{6.44}$$

completando a desejada prova de equivalência. De fato, reconstruímos por completo a formulação Hamiltoniana da dinâmica do modelo inicial de segunda classe.

Deve-se notar, ainda, que a transição de q, p e z para Q e P implica em um processo de redução dimensional e, por isso, não pode ser interpretado como uma transformação canônica.

6.3 Quantização funcional e equivalência quântica

Nesta seção estudaremos a equivalência entre a versão quantizada do modelo de segunda classe com aquela associada à teoria de calibre obtida pela imersão BFT.

Vamos escrever a integral de caminho definida no espaço de fase que fornece a funcional geradora das funções de Green ($\mathcal{Z}$) para o caso do modelo de segunda classe [27, 42–44]

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \mathcal{N}\int\left[\mathcal{D}^{2N}q\right]\int\left[\mathcal{D}^{2N}p\right]\left(\prod_{\mu=1}^{2N}\delta\left[\mathcal{T}_{\mu}^{(0)}(q,p)\right]\right)\left(\prod_{t}\det\|\Delta\|\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f}dt\ \left[p_\mu\dot{q}^\mu\ -\ H^{(0)}(q,p)\right]\right\}\\
&= \mathcal{N}\int\left[\mathcal{D}^{2N}q\right]\int\left[\mathcal{D}^{2N}p\right]\left(\prod_{\mu=1}^{2N}\delta\left[\mathcal{T}_{\mu}^{(0)}(q,p)\right]\right)\\
&\times\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f}dt\left[p_\mu\dot{q}^\mu - H^{(0)}(q^i,p_i)\right]\right\}\\
&= \mathcal{N}\int\left[\mathcal{D}^{N}q\right]\int\left[\mathcal{D}^{N}p\right]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f}dt\left[p_i\dot{q}^i + \dot{p}_i\theta^{ij}p_j - H^{(0)}(q^i,p_i)\right]\right\}\ ,
\end{aligned} \tag{6.45}$$

onde, para passar do segundo para o terceiro termo da igualdade, levamos em conta o fato de que $\|\Delta\|$ é uma matriz constante (veja Eq. (6.6)). Além disso, para obtermos o último termo da igualdade, exploramos o fato de que $H^{(0)}$ não depende dos $q^\mu, p_\mu, \mu = N+1,\cdots,2N$, o que nos permite usar os vínculos para integrar o correspondente setor do espaço de fase.

Analogamente, para a teoria de calibre obtida pelo esquema BFT, temos que [27, 42–44]

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_\chi &= \mathcal{N}_\chi\int\left[\mathcal{D}^{2N}q\right]\int\left[\mathcal{D}^{2N}p\right]\int\left[\mathcal{D}^{2N}u\right]\int\left[\mathcal{D}^{2N}s\right]\\
&\times\ \left(\prod_{\mu=1}^{2N}\delta\left[\mathcal{T}_\mu(q,p,z)\right]\right)\left(\prod_{\mu=1}^{2N}\delta\left[\chi^\mu(q,p,z)\right]\right)\left(\prod_t\det\left[\mathcal{T}_\mu,\chi^\nu\right]_{PB_\Gamma}\right)\\
&\times\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f}dt\left[p_\mu\dot{q}^\mu + s_\mu\dot{u}^\mu - H^{(0)}(q^i+z^i,p_i)\right]\right\}\ .
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Aqui, $\mathcal{N}_\chi$ é uma constante de normalização enquanto que $\chi = \chi(q,p,z)$ denota um conjunto de funções arbitrariamente escolhidas. A questão agora é: o lado direito da Eq. (6.46) retorna aquele na Eq. (6.45), para qualquer χ? Vamos ilustrar a situação para dois calibres diferentes.

O primeiro calibre a ser analisado, comumente chamado calibre unitário, é especificado pelas condições subsidiárias

$$\chi^{\nu} \,=\, z^{\nu} \,\approx\, 0\,. \tag{6.47}$$

Então, as Eqs. (6.24), (6.47) e (6.13) conduzem ao resultado

$$\det\left[\mathcal{T}_{\mu}\,,\,\chi^{\nu}\right]_{PB_{\Gamma}} \,=\, \delta_{\mu}^{\;\nu} \Longrightarrow \left(\prod_{t} \det\left[T_{\mu}, \chi^{\nu}\right]_{PB_{\Gamma}}\right) \,=\, 1\,. \tag{6.48}$$

Notamos que os $\mathcal{T}$'s, χ's e H dependem das variáveis u e s somente através da combinação $z^{\mu} = -1/2u^{\mu} + (\Delta^{-1})^{\mu\nu}s_{\nu}$. Isto sugere a conveniência de realizar a mudança de variáveis de integração $u^{\mu} \to u'^{\mu} = z^{\mu}$, $s_{\mu} \to s'_{\mu} = s_{\mu}$. As integrais de caminho em s' desacoplam do restante e podem ser explicitamente calculadas. Concluímos então que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{z=0} \;\; &= \;\; \mathcal{N} \int \left[\mathcal{D}^{2N}q\right] \int \left[\mathcal{D}^{2N}p\right] \int \left[\mathcal{D}^{2N}z\right] \left(\prod_{\mu=1}^{2N} \delta\left[\mathcal{T}_{\mu}(q,p,z)\right]\right) \left(\prod_{\mu=1}^{2N} \delta\left[z\right]\right) \\
&\times \;\; \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f} dt \left[p_{\mu}\dot{q}^{\mu} + \frac{1}{2}z^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\dot{z}^{\nu} - H^{(0)}(q^i + z^i, p_i)\right]\right\}\,.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

A integração em z é feita diretamente e resulta em

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{z=0} \;\; &= \;\; \mathcal{N} \int \left[\mathcal{D}^{2N}q\right] \int \left[\mathcal{D}^{2N}p\right] \left(\prod_{\mu=1}^{2N} \delta\left[\mathcal{T}_{\mu}^{(0)}(q,p)\right]\right) \\
&\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f} dt \left[p_{\mu}\dot{q}^{\mu} \,-\, H^{(0)}(q^i, p_i)\right]\right\}\,.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Assim como no caso de sistemas de segunda classe, usamos os vínculos para integrar nas variáveis q^{μ}, p_{μ}, $\mu = N+1, \cdots, 2N$, o que nos leva de volta ao resultado obtido na Eq. (6.45), ou seja,

$$\mathcal{Z}_{z=0} \;=\; \mathcal{N}\int\left[\mathcal{D}^N q\right]\int\left[\mathcal{D}^N p\right]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f} dt\left[p_i\dot{q}^i+\dot{p}_i\theta^{ij}p_j-H^{(0)}(q^i,p_i)\right]\right\} \tag{6.51}$$

É evidente que o calibre unitário é o mais simples de se lidar pois as condições subsidiárias (6.47) explicitamente eliminam as variáveis responsáveis por trazer ao sistema a liberdade de calibre. É importante mencionar que nossa prova é independente de modelo. Isto se deve ao fato de que a extensão BFT do Hamiltoniano emerge da translação $q \longrightarrow q + z$.

O próximo calibre que iremos estudar é

$$\chi^{\nu} \,=\, q^{\nu} \,\approx\, 0\,. \tag{6.52}$$

Começando das Eqs. (6.24) e (6.52), obtemos novamente um determinante funcional de Faddeev-Popov que reduz-se a uma constante arbitrária não-nula, isto é,

$$\det\left[\mathcal{T}_{\mu}\,,\,\chi^{\nu}\right]_{PB_\Gamma} \,=\, -\,\delta_{\mu}^{\;\nu} \Longrightarrow \left(\prod_t \det\left[T_{\mu},\chi^{\nu}\right]_{PB_\Gamma}\right) \,=\, \text{constante} \neq 0\,. \tag{6.53}$$

Novamente, como no caso da Eq. (6.49), a mudança $u^{\mu} \rightarrow u'^{\mu} = z^{\mu}$, $s_{\mu} \rightarrow s'_{\mu} = s_{\mu}$ e a posterior integração nas variáveis s, no habilitam a escrever a Eq. (6.46) na forma

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{q=0} \;&=\; \mathcal{N}\int\left[\mathcal{D}^{2N} q\right]\int\left[\mathcal{D}^{2N} p\right]\int\left[\mathcal{D}^{2N} z\right]\\ &\times\;\left(\prod_{\mu=1}^{2N}\delta\left[p_{\mu}-\Theta_{\mu\nu}q^{\nu}\,+\,\Delta_{\mu\nu}\,z^{\nu}\right]\right)\left(\prod_{\mu=1}^{2N}\delta\left[q\right]\right)\\ &\times\;\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f} dt\left[p_{\mu}\dot{q}^{\mu}+\frac{1}{2}z^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\dot{z}^{\nu}-H^{(0)}(q^i+z^i,p_i)\right]\right\}\;,\end{aligned} \tag{6.54}$$

onde a Eq. (6.24) tem sido levada em consideração. As integrais nos q's e p's são facilitadas pela presença das deltas e, após carregá-las, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{q=0} &= \mathcal{N}\int\left[\mathcal{D}^{2N}z\right]\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f}dt\left[\frac{1}{2}z^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\dot{z}^{\nu}\,-\,H^{(0)}(z^i,az_{N+i})\right]\right\}\\
&= \mathcal{N}\int\left[\mathcal{D}^{2N}z\right]\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f}dt\left[\frac{a}{2}\,z_{N+i}\dot{z}^i\,-\,\frac{a}{2}\,z^i\dot{z}_{N+i}\right.\right.\\
&+\left.\left. a^2\dot{z}_{N+i}\theta^{ij}z_{N+j}\,-\,H^{(0)}(z^i,az_{N+i})\right]\right\}\,. \qquad (6.55)
\end{aligned}
$$

Se renomeamos as variáveis $az_{N+i} \to p_i$, $z^i \to q^i$ e negligenciamos os termos de superfície, o que obtemos é, novamente,

$$
\mathcal{Z}_{q=0} = \mathcal{N}\int\left[\mathcal{D}^{N}q\right]\int\left[\mathcal{D}^{N}p\right]\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f}dt\left[p_i\dot{q}^i + \dot{p}_i\theta^{ij}p_j\,-\,H^{(0)}(q^i,p_i)\right]\right\} \qquad (6.56)
$$

que coincide com a Eq. (6.45). Mais uma vez a prova de equivalência não impõe restrições na estrutura do Hamiltoniano.

Até este momento analisamos a equivalência quântica entre as teorias de primeira e de segunda classe para dois casos *extremos* da escolha de calibre. Primeiro, as condições foram escolhidas de forma a eliminar as variáveis que não estavam presentes no modelo de segunda classe. É natural, então, esperar que a teoria de calibre recaia na teoria de segunda classe. Já no segundo caso as condições de calibre fixaram em zero as variáveis básicas q, retirando também da jogada os seus correspondentes momenta canonicamente conjugados p, ao serem integrados. Todavia, as variáveis z^i e z_{N+i} desempenharam, respectivamente, os papéis de q e p, permitindo a reconstrução da teoria de segunda classe original.

6.4 Quantização operatorial

Nesta seção estaremos interessados em estudar a quantização da teoria de calibre dentro da abordagem operatorial, bem como suas relações com o que surge no modelo de segunda classe quando submetido ao mesmo esquema de quantização.

A teoria de calibre será quantizada usando-se o método desenvolvido por Dirac [41] que, diferentemente do método funcional, não requer a eliminação da liberdade de calibre. Os principais ingredientes são: i) os estados físicos ($|\,\Psi(t)\,\rangle$) devem obedecer

$$\hat{\mathcal{T}}_\mu(\hat{Q}^\mu, \hat{P}_\nu, \hat{Z}^\lambda)\,|\,\Psi\,\rangle = 0\,, \tag{6.57}$$

enquanto que ii) a dinâmica é controlada pela equação

$$\hat{H}^{(0)}(\hat{Q}^i + \hat{Z}^i, \hat{P}_i)\,|\,\Psi(t)\,\rangle \;=\; i\hbar \frac{d\,|\,\Psi(t)\,\rangle}{dt}\,. \tag{6.58}$$

Nesta abordagem, $\hat{\mathcal{T}}_\mu(\hat{Q}^\mu, \hat{P}_\nu, \hat{Z}^\lambda)$ e $\hat{H}^{(0)}(\hat{Q}^i + \hat{Z}^i, \hat{P}_i)$ são as contrapartidas quânticas das funções dadas nas Eqs. (6.24) e (6.29), respectivamente. É preciso lembrar que, dentro do método de quantização de Dirac, os operadores básicos verificam uma álgebra de comutadores a tempos iguais abstraída dos correspondentes PB's, ou seja,

$$[\hat{A}, \hat{B}] \;=\; i\,\hbar\,[a, b]_{PB_\Gamma}\Big|_{\substack{a \to \hat{A} \\ b \to \hat{B}}}\,, \tag{6.59}$$

onde a e b podem tanto ser q^i, v^i, p_i, π_i, u^μ ou s_μ, enquanto que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ podem denotar $\hat{Q}^i$, $\hat{V}^i$, $\hat{P}_i$, $\hat{\Pi}_i$, $\hat{U}^\mu$ ou $\hat{S}_\mu$.

Não é difícil convencer-se de que o que está acima implica que as Eqs. (6.29) e (6.30) devem ser escritas, no nível quântico,

$$\hat{H}^{(0)}(\hat{Q}^i + \hat{Z}^i, \hat{P}_i) \;=\; \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{M!} \frac{\partial^M \hat{H}^{(0)}(\hat{Q}^i, \hat{P}_i)}{\partial \hat{Q}^{i_1} \cdots \partial \hat{Q}^{i_M}} \hat{Z}^{i_1} \cdots \hat{Z}^{i_M}\,. \tag{6.60}$$

Enfatizamos que qualquer reordenamento no lado direito da Eq. (6.60) acrescentaria apenas produtos dos fatores anti-simétricos $i\hbar(\Delta^{(-1)})^{ij}$ (veja a Eq. (6.13)) os quais podem ser desconsiderados haja vista da simetria dos coeficientes operatoriais $\frac{\partial^M \hat{H}^{(0)}(\hat{Q}^i, \hat{P}_i)}{\partial \hat{Q}^{i_1} \cdots \partial \hat{Q}^{i_M}}$.

Retornamos a Eq. (6.57). Após isolar z^i na Eq. (6.24) e logo transferir o resultado ao nível quântico, obtemos

$$\hat{Z}^i \,|\, \Psi \,\rangle = \left(-a\theta^{ij}\hat{V}_j + 2\theta^{ij}\hat{P}_j - \frac{1}{a}\hat{\Pi}^i \right) |\, \Psi \,\rangle \;, \tag{6.61}$$

e, por isso,

$$\begin{aligned} \hat{Z}^{i_1} \cdots \hat{Z}^{i_M} \,|\, \Psi \,\rangle \;&=\; \left(-a\theta^{i_M j_M}\hat{V}_{j_M} + 2\theta^{i_M j_M}\hat{P}_{j_M} - \frac{1}{a}\hat{\Pi}^{i_M} \right) \\ &\times\;\; \cdots \left(-a\theta^{i_1 j_1}\hat{V}_{j_1} + 2\theta^{i_1 j_1}\hat{P}_{j_1} - \frac{1}{a}\hat{\Pi}^{i_1} \right) |\, \Psi \,\rangle \;. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Se substituirmos a Eq. (6.62) na Eq. (6.60) e o resultado desse processo na Eq. (6.58), podemos escrever

$$\hat{H}^{(0)} \left(\hat{Q}^i - a\theta^{ij}\hat{V}_j + 2\theta^{ij}\hat{P}_j - \frac{1}{a}\hat{\Pi}^i, \hat{P}_i \right) |\, \Psi(t) \,\rangle \;=\; i\hbar \frac{d \,|\, \Psi(t) \,\rangle}{dt} \;, \tag{6.63}$$

que não mais envolve as variáveis do espaço de fase $\hat{U}$ e $\hat{S}$. Observamos que a liberdade de calibre foi eliminada sem a necessidade de condições subsidiárias.

As novas variáveis

$$\hat{Q}'^{\,i} \;\equiv\; \hat{Q}^i - a\theta^{ij}\hat{V}_j + 2\theta^{ij}\hat{P}_j - \frac{1}{a}\hat{\Pi}^i \,, \tag{6.64a}$$

$$\hat{P}'_i \;\equiv\; \hat{P}_i \,, \tag{6.64b}$$

obedecem à álgebra de comutadores especificada na Eq. (1.3). Ademais, em termos destas variáveis, a Eq. (6.63) adquire a forma

$$\hat{H}^{(0)} \left(\hat{Q}'^{\,i}, \hat{P}'_i \right) |\, \Psi(t) \,\rangle \;=\; i\hbar \frac{d \,|\, \Psi(t) \,\rangle}{dt} \,, \tag{6.65}$$

que reproduz a evolução temporal do sistema de segunda classe quantizado. Novamente, a equivalência entre ambos sistemas fica estabelecida.

7 *Conclusões*

No intuito de obter resultados independentes de modelo em mecânica quântica não-comutativa, começamos por apresentar uma descrição unificada da dinâmica clássica e quântica de um sistema não-comutativo. A característica distinta é que a nível clássico lidamos com um sistema vinculado cuja quantização nos conduz às regras não-canônicas de comutação da Eq. (1.3), que atuam como informação inicial na formulação do problema. Não podemos afirmar que a correspondência clássica-quântica descrita no Capítulo 2 é única, dado que não podemos eliminar a possibilidade da existência de outros sistemas vinculados cujos DB's ainda são dados pela Eq. (2.4). No entanto, as variáveis físicas para este novo sistema podem, no máximo, diferir de x, k por uma transformação canônica, o que garante que a física permanece inalterada.

O fato de que a não-comutatividade não destrói a série de Born facilitou a prova da unitariedade do operador S, o que constitui um requerimento básico para a consistência da teoria quântica sob análise. Isto é a essência do Capítulo 3.

Os trabalhos realizados nas Refs. [27, 41–45], em conexão com sistemas vinculados, serviram como base para a implementação da formulação funcional da dinâmica quântica de sistemas não-comutativos. Foi possível substanciar a informação inicial da Eq. (1.3) a partir do formalismo funcional.

No Capítulo 5 a transformação de Weyl generalizada de índice α foi utilizada para implementar a definição de "time-slicing" da integral de caminho no espaço de fase. Como esperado, esta representação integral da dinâmica quântica não é única, mas parametrizada pelo índice α. Obviamente, a consistência demanda que todas as quantidades físicas devem ser únicas e, portanto, independentes de α.

Estudamos o propagador de Feynman para o caso da mecânica quântica não-comutativo. A potencial ausência de unicidade aparenta ser severa devido ao fato de o Hamiltoniano sob análise conter produtos de operadores não comutantes. De forma inesperada, a anti-simetria da matriz $\|\theta\|$, parametrizando a não-comutatividade, elimina o problema. De fato, por um lado, ela aniquila o que seria uma dependência em alfa na transformada de Weyl generalizada enquanto que, por outro lado, ela também toma conta da dependência em α que surge do ponto no "slice" no qual as coordenadas devem ser avaliadas. A prova acima é verdadeira para todo potencial $V(u)$ analítico em $\vec{u} = 0$. Note que esta prova conecta a formulação de "time-slicing" do Capítulo 5 com a formulação funcional obtida no Capítulo 4.

No Capítulo 6 nos dedicamos a formulação da mecânica quântica não-comutativa como uma teoria de calibre. A ferramenta utilizada para tal fim foi o procedimento de imersão BFT. As extensões dos vínculos e do Hamiltoniano deram origem a uma álgebra de involução que corresponde a uma teoria de calibre Abeliana. Obtivemos uma prova rigorosa da consistência desta sistemática a qual consistiu em demonstrar que o sistema de segunda classe inicial pode ser univocamente recuperado a partir do setor invariante de calibre da teoria estendida. Isto confirma a equivalência das formulações de primeira e segunda classe no nível clássico.

A quantização da extensão de calibre dentro da formulação funcional seguiu o procedimento padrão. No Capítulo 6 vimos que a flexibilidade oferecida pela escolha de calibre abre novas avenidas para cálculos explícitos. A funcional geradora de funções de Green foi calculada em dois calibres específicos. Em ambos os casos foi mostrado que o resultado coincide com o correspondente à funcional geradora de funções de Green do modelo de segunda classe. Além do mais, a equivalência entre as descrições tornou ser independente de modelo.

A quantização do modelo de primeira classe dentro da abordagem operatorial foi implementada fazendo uso do formalismo desenvolvido por Dirac [41]. A equivalência quântica entre o modelo de segunda classe e sua extensão BFT foi reobtida dentro deste esquema de quantização.

Resumindo: neste trabalho analisamos, sob vários ângulos, a consistência da MQNC. A conclusão essencial é que as modificações da mecânica quântica provenientes de um espaço não-comutativo não afetam a consistência da teoria. Acreditamos que ainda resta um amplo campo de aplicações da MQNC para ser explorado. Em particular, temos em mente a possibilidade de estudar os casos em que a não-comutatividade deixa de ser uma matriz constante para se transformar numa função matricial que depende do tempo ($||\,\theta(t)\,||$). É evidente que, na seqüência, podemos supor que $||\,\theta(t)\,||$ atua como um campo externo ou como uma variável que participa da dinâmica do sistema. Neste contexto, ressaltamos que num trabalho recente tem sido abordado o caso em que a não-comutatividade é uma função da posição [57].

APÊNDICE A – Relações Importantes

Para provar unitariedade utilizaremos algumas relações importantes que permitirão a realização dos cálculos que se seguem. Primeiro, vamos lembrar a representação

$$\Im \frac{1}{k'^2 - k^2 \mp i\epsilon} \equiv \pm\pi\delta(k'^2 - k^2)\,. \tag{A.1}$$

A expressão acima aparece dentro de integrais do tipo

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^N k'\, \Im \left(\frac{1}{k'^2 - k^2 \mp i\epsilon}\right) T^{(n)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k}) \\ &= \left\langle \vec{k} \right| \underbrace{V G_0^{(+)\dagger}(k) \cdots V}_{n \text{ fatores } V} \left[\int \mathrm{d}^N k'\, \Im \left(\frac{1}{k'^2 - k^2 \mp i\epsilon}\right) \left| \vec{k}' \right\rangle \left\langle \vec{k}' \right| \right] \underbrace{V G_0^{(+)}(k) \cdots V}_{p \text{ fatores } V} \left| \vec{k} \right\rangle . \end{aligned} \tag{A.2}$$

A utilidade de (A.1) é obvia já que permite escrever

$$\int \mathrm{d}^N k' \Im \left(\frac{1}{k'^2 - k^2 \mp i\epsilon}\right) \left| \vec{k}' \right\rangle \left\langle \vec{k}' \right| = \pm\pi \int \mathrm{d}^N k'\, \delta(k'^2 - k^2) \left| \vec{k}' \right\rangle \left\langle \vec{k}' \right| . \tag{A.3}$$

Daqui em diante usaremos sistematicamente a igualdade (A.3).

Vamos, também, reescrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{\hbar^2k^2}{2M}-\frac{\hbar^2k'^2}{2M}\pm i\epsilon} &= \left(\frac{-2M}{\hbar^2}\right)\frac{1}{k'^2-k^2\mp i\epsilon} \\
&= \left(\frac{-2M}{\hbar^2}\right)\left[R+i\Im\left(\frac{1}{k'^2-k^2\mp i\epsilon}\right)\right] \\
&= \left(\frac{-2M}{\hbar^2}\right)\left[R\pm i\pi\delta(k'^2-k^2)\right]\ , \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
R &\equiv \Re\left(\frac{1}{k'^2-k^2\mp i\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{k'^2-k^2\mp i\epsilon}\mp i\pi\delta(k'^2-k^2) \qquad \text{(A.5a)} \\
&= \frac{1}{k'^2-k^2\pm i\epsilon}\pm i\pi\delta(k'^2-k^2)\,. \qquad \text{(A.5b)}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{k'^2-k^2\mp i\epsilon}=\frac{1}{k'^2-k^2\pm i\epsilon}\pm 2i\pi\delta(k'^2-k^2)\,. \qquad \text{(A.6)}$$

Inserindo a Eq. (A.6) na Eq. (A.4) obtemos

$$\frac{1}{\frac{\hbar^2k^2}{2M}-\frac{\hbar^2k'^2}{2M}\pm i\epsilon}=\frac{1}{\frac{\hbar^2k^2}{2M}-\frac{\hbar^2k'^2}{2M}\mp i\epsilon}\mp\frac{4i\pi M}{\hbar^2}\delta(k'^2-k^2)\,. \qquad \text{(A.7)}$$

Lembramos que

$$\delta(k'^2-k^2)=\frac{1}{2k}\delta(k'-k),\qquad k'\geq 0\,, \qquad \text{(A.8)}$$

e

$$G_0^+(k)\equiv\frac{1}{E(k)-H_0+i\epsilon}=\int \mathrm{d}^Nk'\,\frac{\left|\vec{k}'\right\rangle\left\langle\vec{k}'\right|}{\frac{\hbar^2k^2}{2M}-\frac{\hbar^2k'^2}{2M}+i\epsilon}\,. \qquad \text{(A.9)}$$

APÊNDICE B – Lema

LEMA: Para $m \geq 1$ e $p \geq 2$

$$\Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} = \Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(m+1)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p-1)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon}$$
$$-\frac{Mk\pi}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \left[T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k}) + T^{(p)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(m)}(\vec{k}', \vec{k}) \right] . \tag{B.1}$$

Prova:

Começamos usando a relação (A.7) visando abrir a expressão

$$\Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon}$$
$$\overset{Eq.\ (A.7)}{=} \Im \int \mathrm{d}^N k' \, T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k}) \left(\frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} - i\epsilon} - \frac{4i\pi M}{\hbar^2} \delta(k'^2 - k^2) \right)$$
$$\overset{Eq.\ (A.9)}{=} \Im \left\langle \vec{k} \right| \overbrace{V G_0^{(+)\dagger}(k) V \cdots V}^{m \text{ fatores } V} \overbrace{\int \mathrm{d}^N k' \, \frac{\left| \vec{k}' \right\rangle \left\langle \vec{k}' \right|}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} - i\epsilon}}^{G_0^{(+)\dagger}(k)} \overbrace{V G_0^{(+)}(k) V \cdots V}^{p \text{ fatores } V} \left| \vec{k} \right\rangle$$
$$-\frac{4\pi M}{\hbar^2} \Im \left[i \int \mathrm{d}^N k' \, T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k}) \delta(k'^2 - k^2) \right]$$
$$\overset{Eq.\ (A.8)}{=} \Im \left\langle \vec{k} \right| \overbrace{V G_0^{(+)\dagger}(k) V \cdots V}^{m \text{ fatores } V;\ (m-1) \text{ fatores } G_0^{(+)\dagger}} \; G_0^{(+)\dagger}(k) \; \overbrace{V G_0^{(+)}(k) V \cdots V}^{p \text{ fatores } V;\ (p-1) \text{ fatores } G_0^{(+)\dagger}} \left| \vec{k} \right\rangle$$
$$-\frac{4\pi M}{\hbar^2} \Im \left[\frac{i}{2k} \int_0^\infty \mathrm{d}k' \, k'^2 \delta(k' - k) \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k}) \right] . \tag{B.2}$$

Note o surgimento de um novo fator $G_0^{(+)\dagger}(k)$ no primeiro termo da última igualdade na equação acima, o que nos permite formar um novo termo de ordem superior em V $T^{(m+1)}(\vec{k}', \vec{k})$, bastando, para isso, introduzir uma nova identidade em $\vec{k}'$ no lado direito do fator V que está à direita desse novo $G_0^{(+)\dagger}(k)$. Integrando o segundo termo da igualdade em k' e tomando a parte imaginária obtemos

$$
\begin{aligned}
&\Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} \\
&\overset{Eq.\ (A.9)}{=} \Im \left\langle \vec{k} \right| \overbrace{V G_0^{(+)\dagger}(k) V \cdots V}^{(m+1) \text{ fatores } V;\ m \text{ fatores } G_0^{(+)\dagger}} \int \frac{\mathrm{d}^N k' \left| \vec{k}' \right\rangle \left\langle \vec{k}' \right|}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} \overbrace{V G_0^{(+)}(k) V \cdots V}^{(p-1) \text{ fatores } V;\ (p-2) \text{ fatores } G_0^{(+)}} \left| \vec{k} \right\rangle \\
&\quad - \frac{M k \pi}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \left[T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k}) + T^{(p)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(m)}(\vec{k}', \vec{k}) \right] \\
&= \Im \int \mathrm{d}^N k' \, \frac{T^{(m+1)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p-1)}(\vec{k}', \vec{k})}{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + i\epsilon} \\
&\quad - \frac{M k \pi}{\hbar^2} \int \mathrm{d}\Omega_{\vec{k}'} \left[T^{(m)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(p)}(\vec{k}', \vec{k}) + T^{(p)*}(\vec{k}', \vec{k}) T^{(m)}(\vec{k}', \vec{k}) \right] \,,
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

o que prova o Lema.

Referências

1 JACKIW, R. Physical instances of noncommuting coordinates. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, Amsterdam, v. 108, p. 30–36, Apr. 2002. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0110057>.

2 SNYDER, H. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, New York, v. 71, n. 1, p. 38–41, Jan. 1947.

3 CONNES, A.; RIEFFEL, M. A. Yang-Mills for noncommutative two-tori. In: *Operator algebras and mathematical physics (Iowa City, Iowa, 1985).* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987, (Contemp. Math., v. 62). p. 237–266.

4 CONNES, A.; DOUGLAS, M. R.; SCHWARZ, A. Noncommutative geometry and matrix theory. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 02, 003 34p., Feb. 1998.

5 SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 09, 032 92p., Jan. 1999. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9908142>.

6 MICU, A.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative ϕ^4 theory at two loops. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 1, 025 44p., Jan. 2001. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0008057 and 999>.

7 AREF'EVA, Y.; BELOV, D. M.; KOSHELEV, A. S. Two-lopp diagrams in noncommutative ϕ_4^4 theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 476, n. 3/4, p. 431–436, Mar. 2000. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/>.

8 RIAD, I. F.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative QED and anomalous dipole moments. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 08, 045 21p., Sept. 2000.

9 HAYAKAWA, M. Perturbative analysis on infrared and ultraviolet aspects of noncommutative QED on $\mathcal{R}^4$. 1999. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9912167>.

10 MARTIN, C. P.; RUIZ, F. R. Paramagnetic dominance, the sign of the beta function and UV/IR mixing in noncommutative U(1). *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 597, n. 1/3, p. 197–227, Mar. 2001. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0007131>.

11 GOMIS, J.; MEHEN, T. Space-time noncommutative field theories and unitarity. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 591, n. 1/2, p. 265–276, Dec. 2000. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0005129>.

12 CHAICHIAN, M.; DEMICHEV, A.; PREŠNAJDER, P.; TUREANU, A. Space-time noncommutativity, discreteness of time and unitarity. *Eur. Phys. J. C*, Heidelberg, v. 20, n. 4, p. 767–772, May 2001. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0007156>.

13 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. On the finiteness of noncommutative supersymmetric QED_3 in the covariant superfield formulation. *Phys. Lett. B*, Amsterdan, v. 577, n. 1/2, p. 83–92, Dec. 2003.

14 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. Superfield covariant analysis of the divergence structure of noncommutative supersymmetric QED_4. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 69, n. 2, 025008 15p., Jan. 2004.

15 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. Towards a consistent noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory: superfield covariant analysis. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 70, n. 8, 085012 11p., Oct. 2004.

16 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. On the consistency of the three-dimensional noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 601, n. 1/2, p. 88–92, Nov. 2004.

17 GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. A consistent noncommutative field theory: The Wess-Zumino model. *Nucl. Phys. B*, v. 587, p. 299–310, 2000. Disponível em: <arXiv:hep-th/0005272>.

18 RIVELLES, V. O. Noncommutative supersymmetric field theories. *Braz. J. Phys.*, São Paulo, v. 31, n. 2, p. 255–262, June 2001.

19 DOUGLAS, M. R.; NEKRASOV, N. A. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, Melville, v. 73, n. 4, p. 977–1029, Oct. 2001.

20 SZABO, R. J. Quantum field theories on noncommutative spaces. *Phys.Rep.*, Amsterdam, v. 378, n. 4, p. 207–299, May 2003. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0109162>.

21 GOMES, M. Renormalization in noncommutative field theory. *São Paulo 2001, Particles and fields*, p. 251–290, Jan. 2001. Prepared for 11th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields, Campos do Jordão, Brazil, 14-27 Jan. 2001. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/ver>.

22 GIROTTI, H. O. Classical and quantum dynamics of constrained systems. Lectures given at 5th Summer School Jorge Andre Swieca, Particle and Fields, Campos do Jordao, Brazil, Jan 8-21, 1989.

23 DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J. E. The quantum structure of space-time at the planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.*, v. 172, p. 187–220, 1995. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0303037>.

24 CHAICHIAN, M.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TUREANU, A. Non-commutativity of space-time and the hydrogen atom spectrum. *Eur. Phys. J. C*, Heidelberg, v. 36, n. 2, p. 251–252, Aug. 2004.

25 GAMBOA, J.; LOEWE, M.; ROJAS, J. C. Noncommutative quantum mechanics. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 64, n. 6, 067901 3p., Sept. 2001. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0010220>.

26 GAMBOA, J.; LOEWE, M.; MENDEZ, F.; ROJAS, J. C. Noncommutative quantum mechanics: the two-dimensional central field. *Int. J. Mod. Phys. A*, Singapore, v. 17, n. 19, p. 2555–2566, July 2002. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0106125>.

27 GIROTTI, H. O. Noncommutative quantum mechanics. *Am. J. Phys.*, College Park, v. 72, n. 5, p. 608–612, May 2004.

28 BEMFICA, F. S.; GIROTTI, H. O. The noncommutative degenerate electron gas. *J. Phys.*, London, A38, n. 30, p. L539–L547, Jul. 2005. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0506191>.

29 BEMFICA, F. S.; GIROTTI, H. O. Born series and unitarity in noncommutative quantum mechanics. *Physical Review D (Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology)*, APS, v. 77, n. 2, p. 027704, Jan. 2008. Disponível em: <http://link.aps.org/abstract/PRD/v77/e027704>.

30 BEMFICA, F. S.; GIROTTI, H. O. On the quantum dynamics of non-commutative systems. *Brazilian Journal of Physics*, v. 38, n. 2, p. 227, June 2008. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/bjp/files/v38_227.pdf>.

31 BEMFICA, F. S.; GIROTTI, H. O. Noncommutative quantum mechanics: uniqueness of the functional description. October 2008. Disponível em: <http://lanl.arxiv.org/abs/0810.1224>.

32 COHEN, L. Generalized phase-space distribution functions. *J. Math. Phys.*, The American Institute of Physics, v. 7, n. 5, p. 781–786, May 1966. Disponível em: <http://link.aip.org/link/?JMAPAQ/7/781/1>.

33 COHEN, L. Hamiltonian operators via Feynman path integrals. *J. Math. Phys.*, v. 11, p. 3296–3297, 1970.

34 TESTA, F. J. Quantum operator ordering and the Feynman formulation. *J. Math. Phys.*, The American Institute of Physics, v. 11, n. 8, p. 1471–1474, Aug 1971. Disponível em: <http://link.aip.org/link/?JMAPAQ/12/1471/1>.

35 MAYES, L. W.; DOWKER, J. S. Hamiltonian orderings and functional integrals. *J. Math. Phys.*, The American Institute of Physics, v. 14, n. 4, p. 434–439, April 1973. Disponível em: <http://link.aip.org/link/?JMAPAQ/14/434/1>.

36 BEMFICA, F. S.; GIROTTI, H. O. Noncommutative quantum mechanics as a gauge theory. *Phys. Rev.*, D79, p. 125024, 2009. Disponível em: <http://lanl.arxiv.org/abs/0906.2161>.

37 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S. Operational quantization of dynamical systems subject to second class constraints. *Nuclear Physics B*, v. 279, n. 3–4, p. 514–528, Jan. 1987.

38 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S. Operator quantization of dynamical systems with irreducible first and second class constraints. *Phys. Lett.*, B180, p. 157–162, 1986.

39 BATALIN, I. A.; TYUTIN, I. V. Existence theorem for the effective gauge algebra in the generalized canonical formalism with abelian conversion of second class constraints. *Int. J. Mod. Phys.*, A6, p. 3255–3282, 1991.

40 DERIGLAZOV, A. A. Noncommutative version of an arbitrary nondegenerate mechanics. Disponível em: <hep-th/0208072>.

41 DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics.* [S.l.]: Dover Publications, 2001. 96 p.

42 FRADKIN, E. S.; VILKOVISKY, G. A. Quantization of relativistic systems with constraints. *Phys. Lett.*, B55, p. 224, 1975.

43 SUNDERMEYER, K. Constrained dynamics with applications to Yang-Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model. *Lect. Notes Phys.*, v. 169, p. 1–318, 1982.

44 GITMAN, D. M.; TYUTIN, I. V. *Quantization of Fields with Constraints.* [S.l.]: Springer-Verlag, 1990.

45 SUDARSHAN, E. G. C.; MUKUNDA, N. *Classical Mechanics: A Modern Perspective.* [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1974. 630 p.

46 GRÖNEWOLD, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, Amsterdan, v. 12, n. 7, p. 405–460, Oct. 1946.

47 MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, London, v. 45, n. 1, p. 99–124, Jan. 1949.

48 FILK, T. Divergencies in a field theory on quantum space. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 376, n. 1/3, p. 53–58, May 1996.

49 WEINBERG, S. Quasiparticles and the Born series. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 131, n. 1, p. 440–460, Jul 1963.

50 COHEN, L. Correspondence rules and path integrals. *J. Math. Phys.*, The American Institute of Physics, v. 17, n. 4, p. 597–598, April 1976. Disponível em: <http://link.aip.org/link/?JMAPAQ/17/597/1>.

51 WEYL, H. *Quantum Mechanics and Path Integrals.* Princeton: Dover, 1950.

52 MIZRAHI, M. M. The Weyl correspondence and path integrals. *J. Math. Phys.*, The American Institute of Physics, v. 16, n. 11, p. 2201–2206, Nov 1975. Disponível em: <http://link.aip.org/link/?JMAPAQ/16/2201/1>.

53 SIMõES, T. J. M. *Análise da formulação funcional da mecânica quântica não-relativística*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física., 1980. Biblioteca da Física. Coleção: TESES. Localização: ft03.65. S593a. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/>.

54 FLECK, M.; GIROTTI, H. O. Bft embedding of second-class systems. *Int. J. Mod. Phys.*, A14, p. 4287–4312, 1999.

55 BARCELOS-NETO, J.; OLIVEIRA, W. Gauging the nonlinear sigma-model through a non-abelian algebra. *Phys. Rev.*, D56, p. 2257–2264, 1997.

56 COSTA, M. E. V.; GIROTTI, H. O.; SIMOES, T. J. M. Dynamics of gauge systems and Dirac's conjecture. *Phys. Rev.*, D32, p. 405, 1985.

57 GOMES, M.; KUPRIYANOV, V. G. Position-dependent noncommutativity in quantum mechanics. *Phys. Rev.*, D79, p. 125011, 2009. Disponível em: <http://lanl.arxiv.org/abs/0902.3252>.