UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÉRIE B: TRABALHO DE APOIO DIDÁTICO

PROPOSTAS DE ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Projetos de ensino desenvolvidos pelos alunos da disciplina MAT 1195 - Ensino-Aprendizagem da Matemática Elementar IV no semestre letivo 99/1.

Organização: Elisabete Zardo Búrigo

Série B, nº 52
Porto Alegre, dezembro de 1999

APRESENTAÇÃO

Este caderno divulga algumas propostas de ensino de Probabilidade no Ensino Médio desenvolvidas pelos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática - Noturno na disciplina MAT 1195 – Ensino-Aprendizagem da Matemática Elementar IV, no primeiro bimestre letivo de 1999.

Após um momento inicial da vivência de resolução de problemas pelos alunos e discussão sobre os processos cognitivos envolvidos, foram enunciados os conceitos e fatos matemáticos considerados mais relevantes pela turma para a aprendizagem da Probabilidade no Ensino Médio.

A crítica do tratamento do tema Probabilidade nos livros-texto de Matemática para alunos no Ensino Médio, em geral limitado aos problemas padronizados com moedas, dados e cartas, motivou a pesquisa de experiências de ensino divulgadas em periódicos e sites eletrônicos.

Algumas das propostas apresentadas neste caderno foram adaptadas das experiências pesquisadas e outras foram elaboradas desde o início pelos alunos.

As propostas procuraram contemplar a variação dos contextos para o cálculo de probabilidades, a possibilidade da experimentação ou simulação para testagem de hipóteses e o uso de estratégias de enumeração e divisão de um problema em casos precedendo e preparando o uso de estratégias multiplicativas.

Dentre os temas trabalhados, destacam-se os conceitos de acaso, variável aleatória, probabilidade, amostra e espaço amostral, princípio multiplicativo, eventos independentes e probabilidade condicional, esperança, distribuição binomial de probabilidades.

Os trabalhos aparecem ordenados segundo uma possível abordagem dos conceitos.

Com este caderno, os alunos colocam à disposição dos colegas e professores algumas alternativas interessantes de planejamento do ensino de Probabilidade.

Boa leitura!

Elisabete Búrigo

ESPAÇO AMOSTRAL E PROBABILIDADE CONDICIONAL

Angélica Modrzejewski
Cristiano Fleck da Silveira

Este trabalho tem como proposta desenvolver o conceito de espaço amostral e de evento.

Visa, também, possibilitar o desenvolvimento de estratégias para que sejam feitas estimativas em relação às possibilidades de resolução de uma dada situação.

Para que este trabalho obtenha sucesso fundamentamo-lo nos objetivos a seguir apresentados.

E para que estes objetivos sejam alcançados organizamos as atividades que seguem descritas no presente plano de aula.

OBJETIVOS:

Que os alunos sejam capazes de:

* Analisar e enunciar os eventos possíveis.

* Realizar estimativa das probabilidades dos resultados, bem como detectar a dependência/independência dos eventos enunciados.

ATIVIDADES COMO PROPOSTA DE TRABALHO

ATIVIDADE DE ABERTURA[1]:

Será aplicado , individualmente, um teste de Quantificação de Probabilidade[2], baseado no roteiro (anexo 1).

Para esta atividade, enquanto os alunos estiverem respondendo as questões os professores estarão circulando entre a turma e observando o trabalho que estiver sendo feito, com o objetivo de buscar justificativas para as respostas dadas e esclarecer possíveis dúvidas, bem como buscando que o trabalho seja o mais claro possível para uma verdadeira avaliação dos níveis em que os alunos se encontram.

Esta testagem servirá para organizar os grupos para a próxima atividade e para ser ponto de partida da avaliação. Os alunos serão agrupados de acordo com os níveis em que encontram-se, formando grupos de até 4 (quatro) elementos.

ATIVIDADE INICIAL:

Os alunos, já organizados em grupos, receberão uma ficha para coletar os dados dos demais colegas da turma. Estes dados constam na ficha em anexo (anexo 2).

Em seguida cada grupo deverá organizar os dados coletados de maneira a obter todas as possibilidades de combinações entre os dados (quantificando uma a uma).

A elaboração dos eventos possíveis (intersecções entre os dados coletados) será feita através da solicitação de que seja dada a quantidade de alunos Masculino, Loitro, olhos claros, +1,60. Como provavelmente não será possível obter este resultado com os dados na forma como foram organizados, será necessário que os grupos organizem uma ficha para coletar os dados de modo que possibilite a organização de todos os eventos possíveis.

---

[1] Ver justificativa junto ao item avaliação.

[2] Ver Método Clínico (bibliografia).

Após os dados organizados e combinados os alunos (cada grupo) apresentará à turma seus resultados obtidos através de cartazes e/ou outros recursos visuais disponíveis —para fim de comparação dos resultados e unificação dos mesmos.

Como os alunos poderão comparar os resultados que encontraram com os dos outros grupos, será possível que todos os grupos tenham todos os eventos possíveis.

ATIVIDADE CENTRAL:

Apresentar-se-á à turma uma urna contendo todos os nomes dos alunos e serão feitas as seguintes situações:

— Agora retiraremos desta urna um nome , respondam qual a probabilidade e possibilidade de que seja : Masculino, Moreno, olhos Escuros, +1,60? Justifique.

— Agora, coloco o 1°. nome na urna novamente, retiro um outro nome, qual a probabilidade e possibilidade de que seja : Feminino, Loira, olhos Claros, -1,60?

— Contando com a urna como iniciamos , com todos os nomes, retiro um outro nome, qual a probabilidade e possibilidade de que seja: Masculino, Loiro, olhos Claros, -1,60?

— Sendo que nesta urna estejam todos os nomes, retirando um, qual a probabilidade e possibilidade de que seja: Feminino, Morena, olhos Escuros, +1,60?

— Agora, vamos observar a probabilidade de retirarmos da urna um aluno Masculino, Moreno, olhos Claros, -1,60?

— Agora, sem devolver o primeiro resultado à urna, vamos verificar novamente esta probabilidade.

(Vamos repetir isto 3 vezes e imaginar o que pode acontecer até nós obtermos o evento favorável.)

Partindo das anotações feitas pelos alunos , na etapa anterior, os grupos deverão comparar os resultados obtidos com o fim de concluir que quando alteramos o espaço amostral as possibilidades e probabilidades se alteram também.

Estas próximas questões servirão para nortear o trabalho a respeito de dependência/independência dos eventos.

— Agora, sabendo que eu retirei da urna um elemento Masculino, qual a probabilidade de ser loiro?

— Ao saber que retirei um elemento com mais de 1,60 metros, qual a probabilidade de que seja Feminino? Qual a probabilidade de que seja Masculino?

Outras questões variando sobre os mesmos aspectos serão feitas, respeitando o objetivo proposto para a atividade.

ATIVIDADE DE FECHAMENTO:

No final, agregar-se-á os resultados das outras turmas para trabalhar a dependência/independência de eventos e para comparar resultados.

Perguntas, como as que seguem, serão feitas para nortear a tarefa:

— Qual a possibilidade de ser Masculino sendo um elemento da turma A?

— Qual a possibilidade de ser Loiro(a) sendo um elemento da turma B?

— Qual a possibilidade de ter +1,60 m sendo das turmas A+B?

OBS.:

*OS EVENTOS INDICADOS NO PLANO SÃO EXEMPLOS, BEM COMO OS DADOS A SEREM COLETADOS, QUE PODEM VARIAR DE ACORDO COM A REALIDADE EM QUE SERÁ APLICADO.

*OS DADOS SERÃO ESTIPULADOS DE MODO QUE POSSAM SER INTERSECCIONADOS, SE NÃO HOUVER ALUNOS "LOIROS" ESTA CARACTERÍSTICA NÃO SERÁ CONSIDERADA.

AVALIAÇÃO:

Visto que a avaliação deve levar em conta o desenvolvimento e crescimento cognitivo do educando, bem como considerar e valorizar os processos por ele construído para obter seus resultados, organizamos a avaliação como uma observação do desenvolvimento do educando observando os esquemas e processos elaborados por ele e de seus registros feitos ao longo do trabalho.

Por isso fizemos, no início do trabalho a testagem, para podermos observar com mais clareza o quanto o educando desenvolveu-se através do trabalho, não nos fixando no resultado final.

Durante o desenvolvimento das atividades de aula, serão coletados dados do desempenho, participação na construção dos resultados, disponibilidade a questionar e sanar dúvidas, individualmente. Também, através dos registros das atividades que serão entregues e que servirão para observar o desenvolvimento do trabalho.

Estas comparações entre início e fim, assim como a observação dos registros e desempenho durante o trabalho servirá para verificar se os objetivos propostos foram ou não atingidos ou o quanto foram atingidos. Servirá também para nortear a programação das atividades posteriores referentes ao estudo que está sendo feito, para que parta-se de onde os educandos encontram-se em busca de uma verdadeira aprendizagem.

BIBLIOGRAFIA:

* NTCM — Norma 10 —Estatística

* Carraher, Terezinha Nunes. O método clínico usando os exames de Piaget. 5ª.edição.São Paulo. Ed. Cortez. 1998.

* Barbel Inhelder e Jean Piaget. Da lógica da criança à lógica do adolescente: ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais. São Paulo, Pioneira, 1976.

- Ministério de Educação e Cultura— LDB: LEI Nº 9394/96

ANEXO 1

Imagine um jogo de cartas em que , para ganhar, você tem que tirar uma carta com um X de um conjunto de cartas marcadas com X e com #.

Se você pudesse ver as cartas qual dos dois montes você escolheria para tentar a sorte? Justifique sempre suas respostas.

	Grupo 1	**Grupo 2**
1]	X X X X	X X X
2]	X X X	# # #
3]	X X #	X X #
4]	X #	X X # #
5]	X # #	X # # #
6]	X # #	X X # # # #
7]	# # # #	# # # # #
8]	X X #	X X X # #
9]	X # #	X X #
10]	X X X	X X X X #

ANEXO 2:

FICHA DE COLETA DE DADOS:

CARACTERÍSTICAS:	QUANTIDADES :
Masculino	
Feminino	
Cabelo claro (Loiro)	
Cabelo escuro (Moreno)	
Olhos Claros	
Olhos Escuros	
+1,60 metros	
-1,60 metros	

ÁRVORE DE POSSIBILIDADES E PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Eduardo Brandão Fornari

Objetivo : Descrever os resultados possíveis de um acontecimento e a partir da árvore de possibilidades enunciar o princípio fundamental da contagem.

Atividades :

a- Princípio Fundamental da Contagem

Iniciaria propondo uma atividade a ser desenvolvida pelos alunos, onde eles teriam de usar necessariamente a árvore de possibilidades, pois para enunciar o princípio fundamental da contagem, um acontecimento é realizado através de duas ou mais etapas e então a árvore facilita a resolução dos problemas de contagem. Pois facilita visualizar de quantas maneiras pode ocorrer um evento e também visualizar todas as possibilidades de cada etapa. Com a intenção dos alunos deduzirem o número de possibilidades em cada etapa e então concluírem (sozinhos ou c/ ajuda do professor) que o número total de possibilidades de um acontecimento (ou evento) ocorrer é a multiplicação das possibilidades de cada etapa.

A atividade é a seguinte:

Quatro pilotos (Schumacher, Hakkinen, Coulthard e Irvine) disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?

Daria aos alunos 48 papéis, no formato de retângulo, com o nome dos quatro pilotos, sendo: 12 papéis com o nome Schumacher, 12 papéis com o nome Hakkinen, 12 papéis com o nome Coulthard e 12 papéis com o nome Irvine e deixaria os alunos verificarem quais seriam as possibilidades no 1° lugar, 2° lugar e 3° lugar. Isso, para ver se os alunos têm idéia de que para o 1° lugar tem 4 possibilidades, para o 2° lugar deve-se levar em conta o 1° lugar para determinar de quantas maneiras pode ocorrer esse evento e de quantas maneiras ocorre o 3° lugar levando em conta que o 1° e 2° lugares já estão definidos.

Durante esse processo, observaria quais alunos conseguem montar a árvore e que cada etapa (1°,2°,3°) vai definir uma ordem de chegada diferente das demais. Caso os alunos não conseguissem montar a árvore e chegar a uma ordem de chegada, ajudaria com perguntas que os levassem a montar a árvore e chegar à ordem de chegada.

Seriam dados papéis com o nome dos pilotos e seria dito que o número de papéis é suficiente para fazer essa atividade. Os alunos teriam de montar a árvore necessariamente, visto que se quiserem usar para cada ordem de chegada três papéis com nomes de pilotos diferentes vão faltar papéis. Então, os alunos teriam de montar a árvore de possibilidades e faria perguntas como:

- existe quantas possibilidades de um piloto chegar no 1° lugar ?
- caso um piloto já tenha chegado em 1° lugar, sobram quantas possibilidades para o 2° lugar ?
- se um piloto chegou em 1° lugar e outro em 2° lugar, sobram quantas possibilidades para o 3° lugar ?

Neste caso, verificando de quantas maneiras poderá ocorrer essa ordem de chegada.

Caso os alunos não tiverem observado que se o número de possibilidades de cada etapa for multiplicado entre si daria o número total de possibilidades da ordem de chegada, faria perguntas como:
- quantas posssibilidades tem na 1° etapa ?
- quantas possibilidades tem na 2° etapa ?
- quantas possibilidades tem na 3° etapa ?
e então os induzirem a multiplicar as possibilidades de cada etapa.

A partir de então o professor junto com os alunos começam a enunciar o princípio fundamental da contagem, onde através de um método algébrico mostra como determinar o número de possibilidades de ocorrer um evento sem precisar descrever todas essas possibilidades.

Esse método algébrico é multiplicar o número de possibilidades de cada etapa.

p1.p2.....pn é o número total de possibilidades de um evento ocorrer.

Sendo, p1 - número de possibilidades da 1° etapa
p2 - número de possibilidades da 2° etapa
: : : :
pn - número de possibilidades da n-ésima etapa

Após a determinação desses conceitos faria uma outra atividade, mas com menos etapas. Para observar se todos ou a maioria, já têm para si os conceitos de árvore e princípio da contagem.

Atividade: (FAAP-SP) Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um saguão onde há 5 elevadores. Um visitante deve ir ao 5° andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras poderá fazê-lo ?

Observaria se os alunos conseguem montar a árvore, o número de possibilidades de cada etapa e calcularem o total de possibilidades desse evento ocorrer.

b- Calculando as possibilidades de um evento ocorrer sem usar a árvore.

Nesse item, os alunos já conhecedores do princípio fundamental da contagem e da árvore de possibilidades não precisariam utilizar a árvore, pois para alguns exercícios sua representação seria muito grande.

Por isso, nesses exercícios seria proposta somente a utilização do princípio fundamental da contagem.

Atividade 1 - (FGV-SP): Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes.
Uma pessoa deseja uma saladas, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido ?

Atividade 2 - (FEI-MAUÁ): Num carro com 5 lugares e mais o lugar do motorista viajam 6 pessoas, das quais 3 sabem dirigir. De quantas maneiras se podem dispor essas 6 pessoas em viagem ?

Nestas duas atividades, o objetivo seria verificar se os alunos levam em conta o número de possibilidades de cada etapa e usam o princípio fundamental da contagem para determinar o número de possibilidades, sem precisar fazer a árvore.

Já esta atividade seria para calcular as possibilidades deste evento ocorrer, utilizando material concreto (tabuleiro de xadrez e os peões) ou utilizar ocomputador como material de apoio.

Atividade 3 - De quantas maneiras diferentes é possível colocar 8 peões iguais num tabuleiro de xadrez de modo que cada peão fique sozinho na sua linha ou coluna?

Avaliação : Observar se os alunos compreenderam como montar a árvore de possibilidades e o princípio fundamental da contagem e também se ao se depararem com algum exercício envolvendo contagem, eles vêem que se o número de possibilidades de cada etapa for multiplicado entre si, se chega ao total de possibilidades de um evento ocorrer.

Os procedimentos avaliativos seriam: provas, trabalhos em grupos e trabalhos individuais.

Fontes : - GIOVANNI. José Ruy, BONJORNO. José Roberto e GIOVANNI Jr. José Ruy. "Matemática Fundamental 2° Grau Volume Único" . FTD. São Paulo. 1994.

- SILVA. Jorge Daniel e FERNANDES. Valter dos Santos. "Matemática". IBEP. São Paulo.

- TIZZIOTTI. José Guilherme e SCHOR. Damian "Matemática Segundo Grau Volume II". Editora Ática. São Paulo. 1980.

Retirando deles idéias de definição, exemplos e exercícios.

PLANO DE AULA SOBRE INTRODUÇÃO DE PROBABILIDADE

Magnus C. Nehme

CONTEÚDOS : CONCEITO DE PROPORCINALIDADE, EVENTOS, ESPAÇO AMOSTRAL.

PÚBLICO ALVO : ALUNOS DO ENSINO MÉDIO.

TEMPO PREVISTO : 50 MINUTOS
5 minutos para colocar ordem na sala
5 minutos para formar os grupos
20 minutos para responder o questionário
10 minutos para apresentação
10 minutos para conclusão do prof.

OBJETIVO DA ATIVIDADE : Pretendemos fazer com que os alunos , através de debates em grupo, elaborem um conceito de probabilidade , trabalhem a idéia de evento e espaço amostral.

METODOLOGIA : Dividiremos a turma em grupos de estudo entregando aos mesmos um texto de introdução, um questionário e finalmente a apresentação das conclusões para toda a turma com a orientação do professor.

MATERIAL UTILIZADO : Folha orientando o trabalho, texto e questionário.

AVALIAÇÃO : Na apresentação das conclusões para o grupo o professor terá completa noção do grau de assimilação que os alunos tiveram do tema enfocado.

BIBLIOGRAFIA :
Análise Combinatória e Probabilidade - Augusto César Morgado João Bosco de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandes - SEGRAG - BH
Fundamentos de Matemática Elementar - Samuel Hazzan - Atual Editora - SP/ 98
Matemática - Manoel Paiva - Editora Moderna - SP /97
Matemática para o segundo Grau - Gentil Marcondes - Editora Ática - SP/ 97
Material de aula da Prof. Luiza Macedo . PA / 99

TEXTO : Política Chinesa de um só filho.

Com o intuito de reduzir o aumento da população a China tem instituído uma política que limita a família a um filho. Esta política tem sido impopular no meio rural chinês, que tem sugerido revisar a política de limite familiar a um filho.(Para melhor esclarecer este tema leia o artigo tirado do New York Times escrito por Nicholas D. Kristof em 1990). Supondo que você está no meio deste governo e considerando a possibilidade de mudar a política para um sistema que possibilite a cada família tentar a gravidez até nascer um menino , debata com seus colegas sobre as duas questões abaixo baseadas na nova política de um filho homem.

1- Qual deverá ser a média do número de crianças por família ?
2- Qual será a razão de nascimentos de meninos para o nascimento de meninas?

COMPOSIÇÃO DO GRUPO

Cada grupo será composto de seis alunos , sendo um coordenador, um redator, um orador e dois pesquisadores.

Função do coordenador : Coordenar o grupo na escolha do redator, orador e dos pesquisadores. Controlar o tempo de trabalho. Controlar a disciplina do grupo, ser o interlocutor entre o professor e o grupo.

Função do redator : Fazer o trabalho escrito a ser entregue no fim da aula , com o nome do grupo, nome dos integrantes, respostas do questionário e exemplos.

Função do orador : Apresentar para os colegas as conclusões do grupo.

Função dos pesquisadores: Auxiliar na elaboração das respostas do questionário, baseados na simulação do tamanho das famílias a ser elaborada pelo grupo.

Simulação : Com o auxilio de uma moeda, onde a cara representa o nascimento de uma menina e a coroa representa o nascimento de um menino, o grupo deverá simular a formação do número de integrantes de 50 famílias, simulando o nascimento do menino no primeiro, segundo, terceiro ,quarto ou quinto filho.

NOME DO GRUPO :
NOME DOS COMPONENTES : COORDENADOR :
REDATOR :
ORADOR :
DEBATEDOR :
DEBATEDOR :

QUESTIONÁRIO

1- Na opinião do grupo como a simulação pode nos fornecer dados para chegarmos a solução das duas questões do texto ?

2- Com base na simulação, qual seriam as respostas das questões do texto ?

3- Qual é a probabilidade da família ter um menino no primeiro nascimento ?

4 - Qual é a probabilidade da família ter um menino no segundo nascimento ?

5- Qual é a probabilidade da família ter um menino no terceiro nascimento ?

6- Qual é a probabilidade da família ter um menino no quarto nascimento ?

7- Qual é a probabilidade da família ter um menino após o quarto nascimento?

8- Com base na simulação elabore um gráfico do número de famílias com um, dois, três, quatro ou mais filhos.

9- Baseados neste trabalho, vocês podem ter uma idéia do que seria evento, em probabilidade?

10 - Baseados neste trabalho, vocês poderiam definir o que seria espaço amostral em probabilidade ?

SIMULAÇÃO MONTE CARLO

Thays Sagebin Bordini
Letícia Marino Bulbotka

1. CONTEÚDO: Ensino Médio

2. OBJETIVOS:
   Os objetivos desta aula são:
- introduzir a probabilidade geométrica;
- trabalhar o conceito de aleatório / acaso;
- fazer com que o aluno tome consciência e reflita sobre a influência do tamanho da amostra na precisão do cálculo da probabilidade.

3. TEMPO PREVISTO: 100 MINUTOS

4. METODOLOGIA
   Para atender os objetivos propostos desta aula será utilizada a seguinte metodologia:
- trabalho em duplas;
- orientações gerais da professora;
- supervisão das duplas durante a atividade.

5. MATERIAL
- ALUNO:
  Solicitar que cada aluno traga os seguintes materiais:
  - ⇨ xerox de uma folha do catálogo telefônico;
  - ⇨ calculadora (de preferência científica);
  - ⇨ 01 folha milimetrada;
  - ⇨ compasso;
  - ⇨ régua.
- PROFESSORA:
  A professora deverá trazer para a aula os seguintes materiais:
  - ⇨ cartaz milimetrado com desenho da circunferência e do quadrado de lado 2 unidades num referencial cartesiano;
  - ⇨ material sobressalente:
    - — folhas milimetradas;
    - — calculadora;
    - — compasso;
    - — régua;
    - — xerox de páginas de catálogo telefônico.

6. PRÉ-REQUISITOS
   Já devem ter sido trabalhado com os alunos os conceitos introdutórios do estudo da probabilidade (evento, espaço amostral, ...).

7. ESTRATÉGIA: simulação / experimentação

8. ATIVIDADE

- Entregar as instruções do experimento para os alunos.
- Leitura e explicação para o grande grupo da atividade.
- Fazer um exemplo no quadro para o grande grupo.
- Se necessário, entregar o material sobressalente para as duplas que não possuírem o material solicitado ou que esteja incompleto.
- Deixá-los trabalhar à vontade.
- Supervisionar os grupos.
- Chamar a atenção da turma da razão do desprezo dos três primeiros dígitos.
- Quando os alunos acabarem a atividade, solicitar que metade das duplas exponha seus resultados, enquanto a professora vai localizando no cartaz os pontos obtidos.
- Cada dupla deve fornecer o resultado final do seu experimento. Este será anotado no quadro| negro ao lado do cartaz..
- Calcula-se então a probabilidade com os dados de metade da turma e compara-se este resultado com os anteriormente obtidos pelas duplas.
- O restante das duplas fornece seus pontos e probabilidades calculadas.
- Logo após, conta-se todos os resultados obtidos pelas duplas (favoráveis e total de pontos levantados) e calcula-se então a probabilidade com a amostra total.
- Após a conclusão da atividade pelos alunos, a professora deve discutir o conceito de espaço amostral: | |qual é o espaço amostral do experimento?|
  | |onde ele está representado no gráfico?|
- Observando o gráfico do quadro que contém a representação de todos os pontos levantados pela turma questionar:
- | |caso dobrássemos o número de pontos onde eles se localizariam?|
- | |e se dobrássemos novamente?|

Com isso eles perceberão que o limite é o quadrado.

- Seguindo o mesmo raciocínio, mas ressaltando os eventos favoráveis, os alunos poderão perceber que os pontos favoráveis estarão sempre localizados no interior, e no máximo, na borda da circunferência.
- Então, após esta abstração, sabendo que o quadrado representa o espaço amostral e a circunferência representa os eventos favoráveis, questionar à turma como eles poderiam calcular a probabilidade de um número estar dentro da circunferência.
- Com a professora sempre discutindo com os alunos, estabelecer a razão entre as áreas das figuras.

$$\text{Prob(evento)} = \frac{\text{área da circunferência}}{\text{área do quadrado}}$$

$$\text{Área da circunferência} = \pi R^2 = \pi(1)^2 = \pi$$

$$\text{Área do quadrado} = (2R)^2 = (2.1)^2 = 4$$

$$\text{Prob(evento)} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Prob(evento)} = 0{,}7853981634$$

- Solicitar que as duplas entreguem um relatório que contenha:
  - ⇨ a folha milimetrada com os pontos marcados;
  - ⇨ a folha com os cálculos;
  - ⇨ as conclusões da dupla.

9. AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado individualmente e em grupo, no seu desenvolvimento e desempenho nos seguintes aspectos:

- exposição das conclusões da dupla;

- entrega do relatório;
- supervisão da professora durante a atividade.

10. CRITÉRIOS A SEREM OBSERVADOS DURANTE A ATIVIDADE
- Verificar se ambos os componentes dos grupos estão participando da atividade.
- Verificar se o grupo está coletando corretamente os dados.

11. COMENTÁRIO SOBRE O ARTIGO NUMBERS, PLEASE!

Utilizamos o artigo de BRUNNER por pensarmos ser uma proposta de experimento diferente das tradicionalmente usadas numa aula de probabilidade.

Consideramos interessante a atividade proposta pela autora porque trabalha a probabilidade geometricamente e também porque explora o conceito de aleatório.

Outro aspecto a ser ressaltado é que a metodologia e estratégia utilizadas são trabalho em grupo e experimentação / simulação.

O trabalho em grupo é positivo pois proporciona aos alunos troca de idéias e cooperação. Já a simulação, permite que os alunos sejam atuantes, despertando maior interesse e entusiasmo, e também possibilita a manipulação de dados reais.

BIBLIOGRAFIA

BRUNNER, Regina Baron. Numbers, Please! The Telephone Directory and Probability. The Mathmatics Teacher. Vol. 90, n.º 9. dezembro de 1997.

Escola ____

Nome ______________________________ Turma ___ Data __________

ATIVIDADE

DETERMINAÇÃO DOS VALORES EXPERIMENTAIS

— Construa na folha milimetrada uma circunferência de raio 1 unidade, inscrita num quadrado de lado 2 unidades. O centro da circunferência será a origem dos eixos cartesianos x e y.

1. Escolha ao acaso 20 números de telefone, desprezando os três primeiros dígitos.
2. Agrupe os números em pares.
3. Rescreva os quatro últimos dígitos na forma decimal seguindo as seguintes instruções:
   - Se o 1º dígito for PAR, então o n.º decimal é POSITIVO, se o º dígito for ÍMPAR, então o n.º decimal é NEGATIVO.
   - O º dígito determina o sinal do número decimal e os três últimos dígitos determinam a parte decimal do número, na forma **0,abc**.

   Por exemplo, os números escolhidos foram:

   395-1234 e 398-4179

   então os dígitos considerados serão:

   1234 e 4179

   e os números decimais formados serão:

   - 0,234 e +0,179
4. Considere os dois números formados no item anterior como par ordenado de um ponto, por exemplo: (-0,234; +0,179).
5. Marque os pontos no referencial cartesiano construído inicialmente.
6. Como a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 1$, verifique se os pontos marcados localizam-se dentro, sobre ou fora da circunferência.
7. Qual a probabilidade de os pontos criados localizarem-se dentro ou sobre a circunferência, obedecendo a seguinte inequação:

$$x^2 + y^2 < 1?$$

$$p = \frac{n^{o} \text{ de pontos que satisfazem a inequação}}{\text{n}^{o} \text{ total de pontos}} = \_\_\_\_\_\_$$

$$p = \_\_\_\_\_\_$$

LANÇANDO MOEDAS:PLANO DE ENSINO SOBRE PROBABILIDADE

Karin Ritter Jelinek

Resumo do texto "Lançando Moedas":

O texto analisado sugere uma atividade para se trabalhar com a proporcionalidade, aplicando-a em alunos do nível pré-algébrico. Tal atividade parte de experimentações feitas pelos alunos, chegando a mencionar funções racionais (modelar a função dada como problema) através de aplicações matemáticas que não são comuns.

Em um piso quadriculado, de quadrados de 9 polegadas de lado, são lançados discos dos mais variados tamanhos, divididos em categorias. Nestes lançamentos, são registrados os números de discos que tocam as linhas de rejunte e os que não tocam (ditos ganhadores). O objetivo dos alunos na experiência é determinar o tamanho do disco necessário para que a probabilidade de ganho seja de 45%, ou seja, para que 45% deles não toquem as linhas de rejunte.

Após se dividir a turma em vários grupos, cada um com um diâmetro, as etapas de experimentação serão as seguintes:

* lançar os discos (no mínimo 10 de cada vez);
* ver os perdedores e ganhadores;
* anotar os resultados.

Segundo os autores, os resultados serão melhores quando houver uma maior variação do tamanho dos discos de grupo para grupo, e os lançamentos forem no mínimo de 100. Pode-se, inclusive, dar de tarefa para casa que os alunos façam mais lançamentos e registrem os resultados.

Ao retorno dos grupos para troca de registros, todos os dados devem ser registrados em uma grande tabela que contenha as amostras em colunas, como por exemplo:

Tipos discos (material)	Diâmetro	(nº de ganhadores) / (nº de lançamentos)	Probabilidade %

Buscando uma solução algébrica, o texto sugere que se trabalhe com gráficos, colocando o uso da calculadora gráfica como um importante caminho a se seguir. Os autores orientam e dão os passos necessários para o uso da Texas Instruments-82 e a Texas Instruments-85, mas colocam que outras calculadoras também trabalham bem. Outra alternativa, é fazer uso de papel e lápis, traçando um gráfico plano e marcando os pontos à mão. É conveniente usar a coordenada y para as estimativas e a coordenada x para os diâmetros, estimando assim o diâmetro desejado.

Segundo os autores, através da calculadora é possível modelar a situação para uma equação quadrática que contorna os dados.

Resolvendo o problema proposto inicialmente sobre o diâmetro que deveria ter o disco para que a probabilidade de que não tocasse as linhas fosse 45%, os alunos chegariam a conclusão que seria aproximadamente 2,95 polegadas ou 75mm, podendo se fazer novos lançamentos com essa medida, para se confirmar ou se convencer de tal solução.

No final, os autores discutem ainda sobre a possibilidade de se resolver o problema por métodos algébricos-geoméricos.

Objetivos:

A atividade tem por objetivo geral introduzir a noção de probabilidade. Dar-se-á ênfase à questão das estimativas e à relação medida – chance de tal evento ocorrer.

Atividade:

A proposta desta atividade é semelhante à sugestão dada pela revista, salvo algumas modificações.

De início, colocaria para os alunos o problema que juntos teríamos que solucionar: descobrir o diâmetro de um disco, para que este, quando lançado em um piso quadriculado de 20 cm, tenha 45% de chance de não tocar os rejuntes do piso. Dito isso, uma discussão inicial seria estimar que valores de diâmetro esse disco poderia assumir, "será que quanto maior o diâmetro maior a chance de não tocar? Ou vice-versa?". Chegando-se em um consenso, é necessário construir-se discos de papelão com possíveis valores que o grupo acredite serem prováveis de acerto (para cada medida o ideal são 10 discos).

O passo seguinte é organizar a turma em grupos de alunos, onde cada grupo ficará responsável pela experimentação de uma medida, fazendo no mínimo 100 lançamentos com os 10 discos (podem ser feitos um maior número de lançamentos, mas usa-se o 100 para facilitar a visualização da porcentagem), contando sempre o número de discos que não tocaram as linhas de rejunte e anotando os dados.

Após os 100 lançamentos se faz uma contagem geral do número de discos que não tocaram as linhas, registrando numa tabela grande (conforme sugerida pelos autores do texto), que deve estar fixada na sala de aula, para que os dados sejam compartilhados também com os outros grupos. Preenchida a tabela com diversos dados de tamanhos, é chegada a hora de uma análise dos resultados obtidos, verificar se as estimativas se comprovaram ou se resultaram dados bastante desviados da probabilidade de 45%.

Neste ponto, dependendo do resultado a que se tenha chegado há um caminho a se seguir. Se os alunos fizeram boas estimativas e os dados foram bastante próximos ao desejado, convém que, mais uma vez se façam estimativas e novamente se confeccione discos com valores que facilitem uma aproximação do valor desejado. Caso ao analisar a tabela se verifique que os valores estimados pelos alunos não foram "bons" e não auxiliaram na resolução do problema, deve-se novamente levantar discussões – de comparação da área (diâmetro do disco) em comparação a área do quadrado – e estimar valores convenientes para que ocorra o evento. Nos dois casos, quanto mais lançamentos forem feitos, mais próximo do valor real os alunos chegarão, ou seja, mais preciso será o resultado levantado por eles.

Para finalizar tal trabalho, o ideal seria se fazer uma discussão com os alunos sobre o tema trabalhado, relembrando vários questionamentos anteriores e que surgiram no desenvolver do trabalho. Cabe colocar também alguns exemplos de como podemos encontrar a probabilidade em nosso dia a dia e da importância que esta tem nos mais diversos estudos científicos.

Avaliação:

Será feita a partir de uma observação constante do trabalho que os grupos forem desenvolvendo, ou seja, no momento da experimentação, dos registros e das colocações que forem apresentadas na discussão.

Ao final da atividade, espero que os alunos tenham compreendido o que significa o conceito Probabilidade, consigam trabalhar com estimativas, montar e analisar relações para que ocorra um determinado evento.

Fonte: Revista The Mathematics Teacher. Mako Haruta, Mark Flaherty, Jean McGivney e Raymond McGivney. Vol. 89, nº 8, Novembro de 1996.

PLANO DE ENSINO: INTUIÇÃO E PROBABILIDADE

Maira Leandra Alves

Intuição e probabilidade[2]

Num país, 10% da população é portadora de um vírus. Um teste para detectar ou não a presença do vírus dá 90% de acertos quando aplicados a portadores e dá 80% de acertos quando aplicado a não portadores.

Qual o percentual de pessoas realmente portadoras do vírus dentre aquelas que o teste classificou como portadoras?

$$\text{POP}\begin{cases} \to 0{,}1\ P \begin{cases} \to 0{,}9\ P\ \text{(positivo)} \\ \to 0{,}1\ FN\ \text{(falso negativo)} \end{cases} \\ \to 0{,}9\ N \begin{cases} \to 0{,}8\ N\ \text{(negativo)} \\ \to 0{,}2\ FP\ \text{(falso positivo)} \end{cases} \end{cases}$$

Sendo I o número de indivíduos temos:

$$0{,}9 \times 0{,}1I + 0{,}9 \times 0{,}2I = 0{,}27I$$

Destes, $0{,}09I$ são portadores.

Assim o número real de portadores é de $0{,}09I \div 0{,}27I$ que é aproximadamente 33,3% das pessoas que o teste classificou como portadoras.

Sendo assim uma pessoa classificada como portadora tem uma grande possibilidade de ser um "falso-positivo".

No entanto, a indicação da ausência do vírus foi de $0{,}73I$ e, dentre esses, $0{,}72I$ não são portadores, o que dá $0{,}72I \div 0{,}73I = 0{,}986$, ou seja, 98,6% de não portadores dentre os classificados como portadores.

Justificativa

Este exemplo retrata o dia a dia da medicina atual mostrando que a confiabilidade de exames feitos para detectar alguma doenças não e tão boa assim. Com esse exemplo procurarei estimular o interesse na investigação de outras informações que aparentemente são muito confiáveis.

Objetivos

1 - Dar ênfase ao desenvolvimento do cálculo das probabilidades e ao conceito de probabilidade condicional.
2 - Atualmente o cálculo de probabilidades está inserido no nosso dia a dia, este trabalho visa mostrar aos adolescentes do ensino médio a importância deste estudo, pois não calculamos apenas as probabilidades de ganharmos em algum tipo de loteria ou passarmos no vestibular dependendo da escola onde se concluiu o ensino médio ou no chute, mas mostrar a importância na medicina, por exemplo. Mostrar a preocupação dos médicos quanto à chance de contrairmos, dependendo do nosso estado físico, doenças letais; ou a chance de também desenvolvermos o câncer tendo um histórico favorável da doença na família; ou ainda mostrar a chance de um exame dar resultado errado (exemplo trabalhado).

Atividade

Aula 1

Solicitar material à biblioteca para uma breve pesquisa histórica sobre o surgimento do estudo de probabilidade, tarefa essa a ser feita pelos alunos que estarão divididos em grupos. E no final da aula deverá ser apresentada pelos grupos a turma.

Cada grupo deverá se ater a um dos personagem: Cardano, os irmão Jacques, Bernoulli, Pascal, Fermat e Laplace.

Exemplo:

"Cardano que foi viciado no jogo. Jogava diariamente xadrez, por mais de 40 anos e dados por mais de 25 anos. Apesar de que no século XVI o jogo era passatempo, mas como se jogava sempre a dinheiro, iniciou-se nesta atividade ainda quando estudante universitário para promover sua manutenção.

Cardano escreveu um manual intitulado O Livro dos Jogos de Azar, que não considerava digno de publicação.

Na parte técnica do livro discutiu a eqüiprobabilidade, esperança (o montante correto da aposta a ser feita por um jogador que tem probabilidade p de ganhar a importância s), estabeleceu a lei de $p_n = p^n$, que dá a probabilidade de que um evento de probabilidade p ocorra independentemente n sucessivas vezes. É também verdade que Cardano ensinava a trapacear neste livro[3,4].

Aula 2

Mantendo os grupos da aula anterior, solicitar que descubram quais as probabilidades que cercam seu dia a dia, investigar em jornais e revistas e no próprios acontecimentos diários.

Nesta aula apresentarei exemplos (dois em anexo) para que saibam o que procurar.

O trabalho deverá ser desenvolvido em 2 ou 3 aulas, e no tema escolhido pelos grupos deverão ser trabalhados os cálculos de probabilidade e o conceito de probabilidade condicional. Cada grupo terá uma aula para apresentar o seu trabalho, explicando como chegaram aos resultados, cada grupo deverá também desenvolver uma atividade para avaliar o entendimento da turma quanto ao trabalho desenvolvido pelo grupo.

A avaliação será feita a partir das observações feitas no desenvolvimento do trabalho e principalmente pelas atividades feitas pelos grupos. Nessas atividades espero encontrar as informações sobre as dificuldades que os alunos tinham e ainda tem sobre o assunto, essa atividade passara pela minha avaliação antes de colocada a turma, assim avalio cada grupo e depois a turma.

Bibliografia

[1]JONES, Kevin S. *The Birthday Probem Again?*, in: Mathematics Teacher. National Council of Teacher of Matehematics, USA: maio 1993.Vol. 86, n. 5, , p. 373-374.

[2]AGOSTINO, Raul F. W.. *Intuição e Probabilidade,* in: Revista do Professor de Matemática.
São Paulo: SBM 1995. N. 27, p. 25-26

[3]BERGAMINI, D. *As Matemáticas.* Livraria José Olympio Editora S. A.: Rio de Janeiro: 1964.

[4]HAZZAN, S. Fundamentos de Matemática: Combinatória e Probabilidade. 6 ed. São Paulo: Atual, 1993.

Observação

Para o uso prático deste exemplo, apresentarei o seguinte material: um número x de ovos de chocolate brancos e pretos (x deverá ser correspondente ao número de alunos em sala de aula). 90% desses ovos foram embalados com papel de cor escura caracterizando ovos de chocolate preto e, os 10% restantes com embalagem de cor clara caracterizando chocolate branco. Mas 10% dos chocolates brancos foram embalados por engano com papel de cor escura e, 20% dos chocolates pretos foram embalados por engano com papel de cor clara.

Os ovos serão distribuídos entre os alunos e será levantada a seguinte questão:
- *Qual o percentual de alunos, que receberam ovos embalados com papel claro, que realmente estavam com chocolate branco? E para os alunos que realmente receberam chocolate preto?*
- *Qual a chance de um aluno receber 2 ovos de chocolate branco? E preto?*

Teremos alguns problemas com essa amostragem, por exemplo, se o número de alunos da turma for pequeno, teremos problemas com os percentuais menores. Mas talvez esses problemas os forcem à construção de um modelo mais perfeito.

À medida que os grupos forem aperfeiçoando o modelo poderei avaliá-los, pois cada melhoria que fizerem, acredito, será um pequeno indício de compreensão do problema. Com isso começariam a construir o cálculos aditivos e multiplicativos e uma pequena idéia de probabilidade condicional que será reforçada com o trabalho seguinte.

PLANO DE AULA: PROBABILIDADE DEPENDENTE

Delzia Rozalia F. Tavares
Luciana Escobar

"O diagrama de árvore é um esquema usado para enumerar todos os resultados possíveis de uma seqüência de experimentos onde cada um pode ocorrer em um numero finito de maneiras "(espaço amostral finito).

Em nosso problema foi utilizado o teorema da multiplicação para calcular probabilidade de ocorrência de cada resultado representados por cada ramo da árvore.

O produto das probabilidades de cada ramo do caminho da árvore nos leva à resposta (a probabilidade).

Quando existe mais de um caminho que nos leve à resposta, teremos a soma das probabilidades destes caminhos, que nos dará a probabilidade desejada.

Agora vamos expor um exemplo semelhante a idéia exposta pelo artigo da revista (ver bibliografia).

A idéia do artigo é muito interessante, mas o experimento não pode ser feito, pois os meios usados para tal experimento pode levar a morte. É um experimento que esta fora de nossa realidade.

Por isso, resolvemos ilustrar este experimento com algo mais concreto.

INTRODUÇÃO

Geralmente usamos alguns tópicos da matemática e não conseguimos relacioná-los com nossa vida cotidiana. Às vezes não entendemos sua utilização.

Em nosso trabalho, mostraremos exemplos de problemas que estão mais próximos de nossa realidade. Estes problemas estão ligados a um ramo da matemática que se chama "PROBABILIDADE DEPENDENTE" .

Usaremos como base, uma análise feita sobre um artigo retirado, da revista "THE MATHEMATICS TEACHER" e alguns livros didáticos.

Através da análise e experimentação, esperamos que o aluno chegue ao processo de contagem das possibilidades, descrevendo os casos possíveis envolvidos em cada problema e percebendo a relação de dependência que existe no exemplo esponto e que podemos perceber através da árvore quando vamos fazer a probabilidade.

OBJETIVO

Desenvolver o raciocínio e o pensamento lógico, tendo em vista a familiarização do aluno com problemas que envolvem experimentação, levando-o ao conhecimento de contagem das possibilidades do experimento, o cálculo das probabilidades e relação de dependência entre os eventos através da utilização do diagrama de árvores que auxilia o aluno a chegar a todas as possibilidades possíveis e a resolução final.

ATIVIDADES

Para entendermos o problema retirado da revista, iniciaremos nossas atividades com um problema mais simples.

Problema 1:

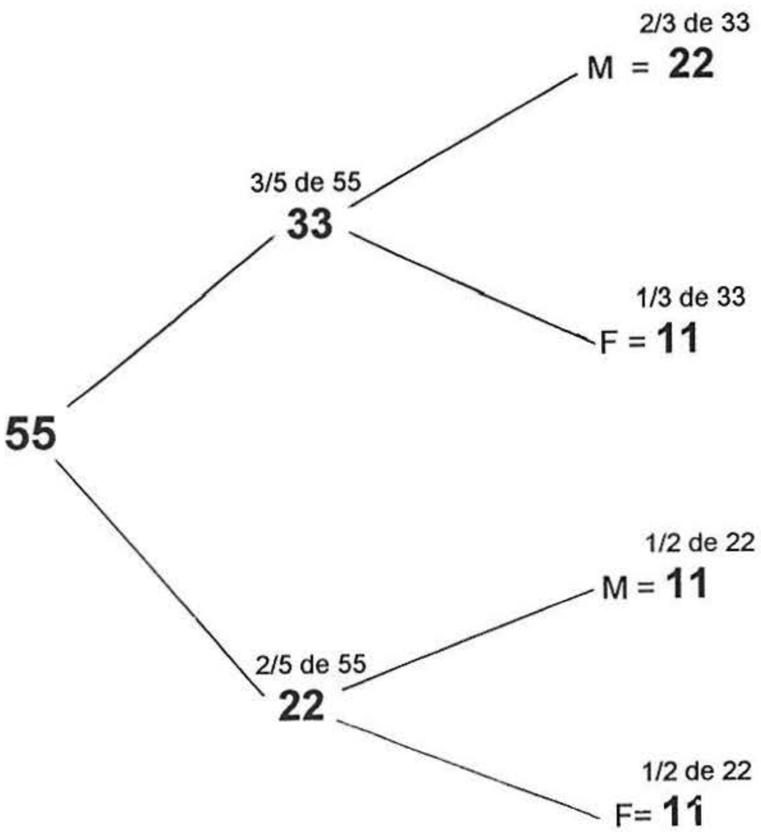
Em uma escola de 1 grau, existem duas turmas de 5^{as} séries (5^a série A e 5^a série B). As duas turmas juntas possuem 55 alunos. Sabendo que 3/5 dos alunos freqüentam a 5^a série A, destes, 1/3 são meninos e 2/3 são meninas. Enquanto que 2/5 dos alunos freqüentam a 5^a série B, destes 1/2 são meninos e 1/2 são meninas.

Uma das professoras das turmas quer sortear um aluno para ser representante das turmas em um seminário.

Qual a probabilidade de que este aluno sorteado seja do sexo masculino?

Resolução:

Para saber qual a probabilidade do aluno sorteado ser do sexo masculino, precisamos fazer a árvore de possibilidades. Vejamos:



A probabilidade de sortear um aluno do sexo masculino é :

(3/5 . 2/3) + (2/5 . 1/2) = 2/5 + 1/5 = 3/5

Agora vamos expor um exemplo semelhante à idéia exposta pelo artigo da revista.

A idéia do artigo é muito interessante, mas o experimento não pode ser feito, pois os meios usados para tal experimento podem levar à morte. É um experimento que está fora de nossa realidade.

Por isso, resolvemos ilustrar este experimento com algo mais concreto.

Problema 2:

Encheram-se 6 copos com água, em um deles colocou-se sal, ao ser misturado com água, temos uma mistura incolor. Pede-se para os alunos virarem de costas, afim de fazer o reordenamento dos copos. No momento em que os alunos voltarem às suas posições iniciais, pede-se para um aluno tirar um copo e beber a água. Pergunta-se:

Qual a probabilidade de ser retirado o copo que contém água salgada?

OBS.: No momento em se retira a água salgada o experimento termina.

A probabilidade de ser retirado o copo com água pura nas 5 primeiras tentativas é :

5/6 . 4/5 . 3/4 . 2/3 . 1/2 = 1/6

A probabilidade de ser retirado o copo com água salgada é:

1/6 + (5/6 . 1/5) + (4/6 . 1/4) + (3/6 . 1/3) + (2/6 . 1/2) =
1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 5/6

Se retirarmos o copo com água salgada nas tentativas:

T1 = 1/6

T2 = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/2

T3 = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/3

T4 = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3

T5 = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6=5/6

Podemos observar que conforme aumenta o número de tentativas, aumenta a probabilidade de ser retirado o copo com água salgada.

A interpretação que os alunos podem ter deste problema:

Os alunos vendo os seis copos à sua frente precisam responder as questões:

Na primeira tentativa:

a) Qual é a probabilidade de ser retirado o copo com água salgada?

O aluno poderá enxergar da seguinte forma: a probabilidade é de 1/6, pois temos 6 copos com água e em um há água salgada.

b) E a probabilidade de ser retirado o copo com água pura?

Seguindo o mesmo raciocínio, o aluno dirá que é 5/6, pois temos 5 copos com águia pura e um com água salgada.

Na segunda tentativa:

Sem retirar o segundo copo, perguntamos:

a) Qual é a probabilidade de ser retirado o copo com água salgada na segunda etapa?

O aluno poderá enxergar da seguinte forma:

A probabilidade será de 1/5, pois temos 5 copos com água pura e um com água salgada.

Nesse caso, o aluno está cometendo um erro, porque no experimento, há uma relação de dependência que o aluno não faz. Ele deveria ver da seguinte forma:

1/5 . 5/6 = 1/6

b) E a probabilidade de ser retirado o copo com água pura na segunda etapa?

Seguindo o mesmo raciocínio, o aluno dirá que será de 4/5, pois temos 5 copos com água pura e um com água salgada.

Mais uma vez, o aluno não consegue fazer a relação de dependência que existe no experimento, pois cada vez que se retira um copo com água pura, fica sempre a possibilidade de se obter na próxima tentativa a água salgada. Por isso, precisamos fazer sempre esta relação com todas as tentativas anteriores, já que no problema existe a relação de dependência, onde um acontecimento depende do outro.

Usando esta relação, obteremos como resposta à pergunta b :

4/5 . 5/6 = 4/6 = 2/3

c) Qual a probabilidade de ser retirado o copo com sal na segunda etapa?

1/5 . 5/6

Se a turma a qual está sendo aplicada este experimento, não conseguir ver esta relação de dependência, vai acabar chegando a uma resposta errada.

Por isso nós como futuros professores precisamos fazer com que nosso aluno possa ver este tipo de relação que existe na probabilidade.

Uma maneira clara de ver isto, é usando a árvore de possibilidades.

Usaremos :

A = água pura
S = água salgada
T = tentativa

1 T	A---> 1/6 S---> 5/6		2 T	S---> (1/5 . 5/6) + 1/6 = 2/6 A---> 5/6 . 4/5 = 4/6 = 2/3

3 T
A---> 3/4 . 4/5 . 5/6 =3/6 = 1/2
S---> (1/4 . 4/6) + (1/5 . 5/6) + 1/6 = 3/6

4 T
A---> 2/3 . 3/4 . 4/5 . 5/6 = 2/6 = 1/3
S--->(1/3 . 3/6) + (1/4 . 4/6) + (1/5 . 5/6) +1/6 = 4/6 = 2/3

5 T
A---> 1/2 . 2/3 . 3/4 . 4/5 . 5/6 = 1/6
S---> (1/2 . 2/6)+(1/3 . 3/6)+(1/4 . 4/6)+(1/5 . 5/6)+1/6 = 5/6

Caso seja uma turma "ideal", que domina bem probabilidade, talvez consiga enxergar esta relação de dependência de imediato, mas sabemos que há muitos adolescentes que possuem grande dificuldades nesta área. Até mesmo universitários têm dificuldades. Nós acreditamos que este tipo de problema aplicado em uma turma de 2º grau, a maioria dos alunos não irão enxergar esta relação de dependência.

Acreditamos também que a construção do diagrama de árvores ajuda muito na compreensão na relação de dependência que existe entre as etapas para se obter a probabilidade correta.

CONCLUSÃO:

Para trabalharmos com probabilidades, é sempre importante fazer o experimento a fim de que o aluno consiga ver as possibilidades que pode ter.

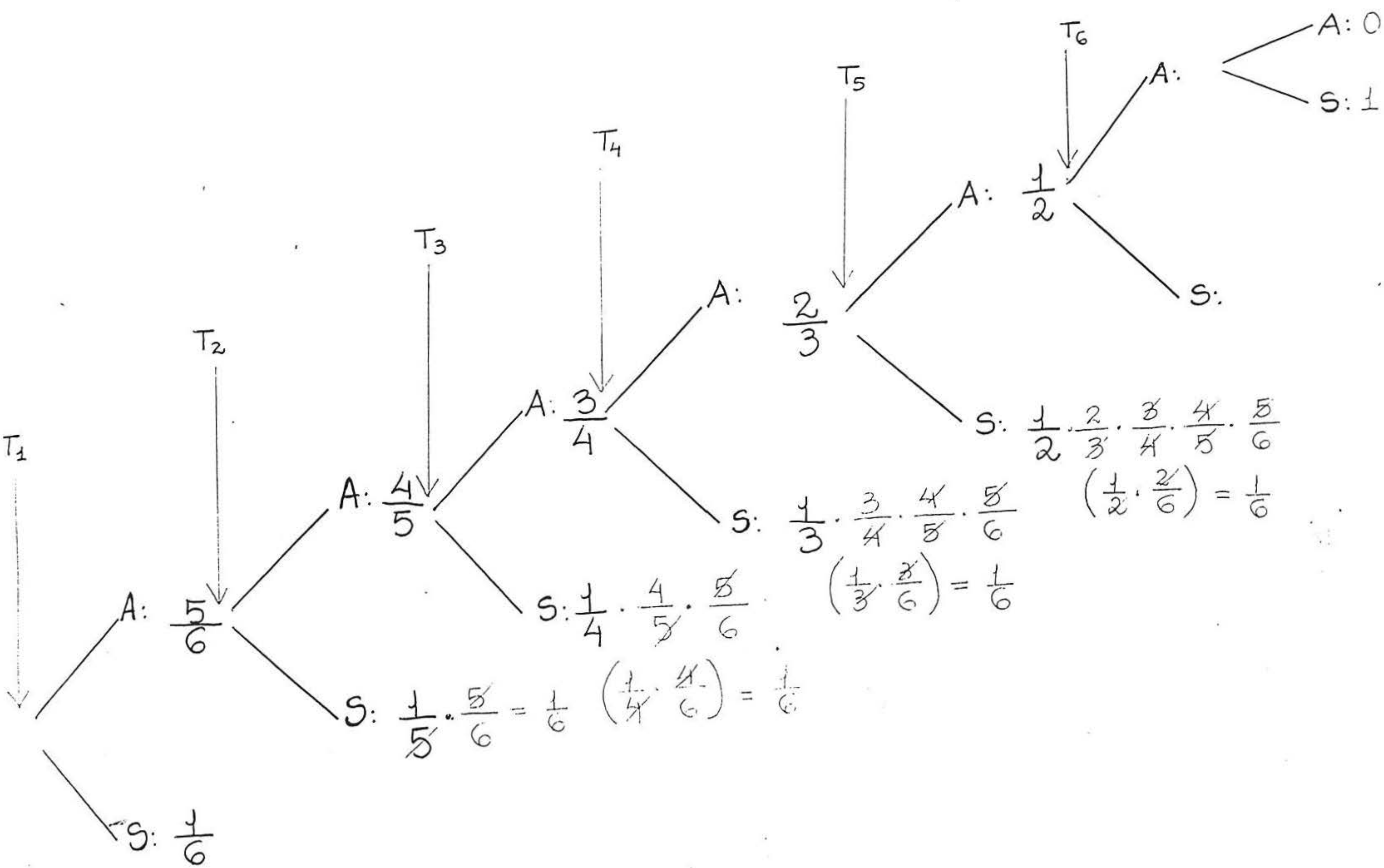
Mas nem sempre é possível fazer o experimento, como foi o caso do artigo retirado da revista, pois se tratava da possibilidade de duas pessoas morrerem. Trazendo este experimento para nossa realidade, é impróprio para ser aplicado na sala de aula, mas fazendo algumas modificações, seria possível aplicá-lo em sala de aula.

Para nós professores que procuramos sempre trazer a realidade para a sala de aula, o ideal é fazer experimentos que tenham um verdadeiro significado para o aluno.

Sabemos que existem vários tipos de probabilidades, e é sempre possível concretizar situações e tornar nossas aulas mais agradáveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar , ed. Atual. 1993.
LIPSCHUTZ, Seymour. Coleção Schaum , ed. Mcgraw - Hill do Brasil, Ltda., 1972.
Revista THE MATHEMATICS TEACHER, March, 1995, vol. 88, number 03, pág. 192



T1
T2
T3
T4
T5
T6
A: 5/6
S: 1/6
A: 4/5
S: 1/5 · 5/6 = 1/6 (1/4 · 4/6) = 1/6
A: 3/4
S: 1/4 · 4/5 · 5/6
A: 2/3
S: 1/3 · 3/4 · 4/5 · 5/6 (1/3 · 3/6) = 1/6
A: 1/2
S: 1/2 · 2/3 · 3/4 · 4/5 · 5/6 (1/2 · 2/6) = 1/6
A:
S:
A: 0
S: 1

ESPERANÇA MATEMÁTICA EM PROBABILIDADE

Ana Paula Vieira Minatto
Regis Roberto Rheingantz Padilha

INTRODUÇÃO

O ensino de probabilidades causa ainda muitos problemas aos estudantes quanto ao entendimento do que está envolvido no cálculo das possibilidades de determinado fato ocorrer a favor ou contra, nota-se que muitos deles não conseguem compreender o que realmente se passa e que variáveis estão envolvidas. Além da complexidade deste tema, temos ainda muitas características numéricas envolvidas em uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta, que são parâmetros das distribuições. Nosso trabalho visa levar aos estudantes uma idéia sobre um destes parâmetros, chamado de "Esperança Matemática" (ou média) de uma variável aleatória. Utilizaremos para mostrar este tema um jogo da televisão americana, chamado RODA DA FORTUNA , que foi extraído do artigo " Expected Value and the Wheel of Fortune Game " , escrito por Ernest Woordward and Marilyn Woordward, publicada na revista Mathematics Teacher, Vol 87, Nr 1 (January 1994).

OBJETIVO

O principal objetivo deste trabalho é o de levar ao conhecimento dos alunos a idéia de "esperança matemática", não apenas como um conceito a mais, mas principalmente que relacionado a ele estão envolvidas algumas noções de probabilidade e que através dela podemos concluir algo sobre as possibilidades em se ganhar ou perder na Roda da Fortuna. Antes, porém, eles terão que construir a sua própria roda, sendo que para a construção poderão apenas utilizar régua e compasso, fazendo a divisão da circunferência em vinte e quatro partes iguais, trabalhando também este conteúdo.

Ao final das atividades práticas, terão que analisar os resultados obtidos e tentar organizá-los de forma a se obter uma fórmula geral com a finalidade de validar o experimento.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Será destinada em média metade de uma aula para a construção do material a ser utilizado para o experimento, pediremos que se dividam em grupos de , no máximo, quatro pessoas, onde deverão construir sua roda da fortuna dividindo a circunferência em vinte e quatro partes iguais, construídas da seguinte manejra, três partes para "perder tudo", oito para " R$ 100,00", cinco para "R$ 200,00", quatro para " R$ 500,00", três para "R$ 1.000,00" e uma para "R$ 5.000.

Após construírem a roda, durante a outra metade da aula, passaremos a rever o conceito de probabilidade, que nesta altura já deve ter sido trabalhado, logo em seguida introduzindo a idéia de "esperança matemática" através de exemplos, com outros jogos mais simples, tentando fazer com que consigam descobrir que a esperança é na verdade um número real e também uma média aritmética ponderada de uma variável aleatória discreta.

Depois de expor o conceito, passaremos às questões, onde tentaremos fazer com que se chegue a um resultado mais abrangente e conclusivo e que através destas conclusões consigam obter uma "lei " (fórmula) mais geral, onde se possa concluir algo, não deixando de orientá-los para que anotem todos os resultados que obtiverem, a fim de compararem com as conclusões do experimento.

- De acordo com a divisão da roda, qual a probabilidade de que ao girarmos a roleta, se possa ganhar R$ 100,00 ? Porquê?
- E de ganhar R$ 200,00?
- E de ganhar R$ 500,00?
- E de ganhar R$ 1 .000,00?
- E de ganhar R$ 5.000,00? -
- E de perder tudo?

Ao término das respostas destas questões, pediremos que façam o experimento de girar a roleta quarenta vezes cada grupo, anotando cada valor obtido, mesmo que tenha ganho ou perdido todo o valor já ganho, para posterior utilização. Após concluída esta tarefa, estaria finalizada a primeira aula.

Na aula seguinte, pediremos que formem os mesmos grupos e que tenham à mão os resultados obtidos e as respostas das questões da aula anterior , a seguir deverão fazer um comparativo entre as respostas, a fim de verificar se realmente ocorreram os fatos na proporção da teoria; caso não ocorra a igualdade nos casos, um argumento válido é que a quantidade de experimentos pode não ser suficientemente representativo, fazendo-se necessário uma maior quantidade.

Quando partirem para as conclusões sobre a esperança matemática em se ganhar neste jogo, temos que explicar para eles que esta esperança está relacionada com a probabilidade de cada evento e o seu respectivo valor, a partir daí, solicitar a eles que tentem montar uma relação envolvendo todas as probabilidades de acontecer cada evento. Tentaremos fazer com que cheguem ao resultado da fórmula da esperança matemática, antes porém, que possam descobrir em qual valor será apropriado parar, tendo em vista, a partir deste valor, a esperança ficar menor que zero, ou seja, em média o valor que se possa ganhar será menor que o valor já ganho. O objetivo é que consigam chegar no seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
E &= 3/24*(-X) + 8/24*100 + 5/24*200 + 4/24*500 + 3/24*1.000 + 1/24*5.000 = \\
&= 3/24*(-X) + 1/24*800 + 1/24*1.000 + 1/24*2.000 + 1/24*3.000 + 1/24*5.000 = \\
&= 3/24*(-X) + 1/24*(800 + 1.000 + 2.000 + 3.000 + 5.000) = \\
&= 3/24*(-X) + 1/24*(11.800) = 1/24*(-3X + 11.800), \text{ ou seja}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i * P(x_i)$$

O que parece bastante complicado, mas não se deve levar em conta só o resultado obtido por eles, mas sim, os caminhos que os levaram a obter algo diferente ou semelhante deste resultado. O que eles devem se dar conta realmente, ao ver este resultado é que quando atingirmos x > 3.900 (tendo em vista, o fato de que o menor valor é R $ 100,00, ou seja, qualquer valor que se possa tirar na roleta somado ao 3.900 será maior que 3,933,33), a esperança será negativa, significando que a partir daí, as.perdas tendem a superar o montante dos ganhos.

AVALIAÇÃO

Após serem obtidas algumas conclusões. e os alunos terem respondido as questões levantadas para serem solucionadas no decorrer das aulas, elaboraremos um teste levando-se em conta o entendimento dos alunos sobre o conceito de esperança matemática, envolvendo outras questões sobre este assunto, como por exemplo calcular a esperança; ou seja como no exemplo da seguradora, que determina o valor do prêmio pago em caso de sinistro com o automóvel e cobra uma taxa de um determinado valor, sabendo-se a probabilidade de que um carro sofra um acidente pede-se que se ache quanto uma seguradora espera receber por carro segurado, envolvendo também jogo de dados. etc.

CONCLUSÃO

Como podemos concluir; a obtenção do conceito de esperança matemática em termos de uma fórmula genérica não é fácil de se obter. Mas acreditamos que com uma correta orientação e com a ajuda da roda os alunos conseguirão algo bem parecido com ela.

Apesar de que o principal objetivo deste trabalho não é de deduzir uma fórmula e sim de enunciar um novo conceito; oportunizando ao aluno esse conhecimento, bem como, aprendê-lo de forma descontraída sem se ater a definições e fórmulas; e se ao final conseguirem obter algo parecido. obtido êxito no nosso objetivo .

Achamos bastante interessante ensinar este conceito para os alunos envolvendo probabilidade. Apesar de ser um assunto desconhecido pelos alunos, ele está embutido em muitos resultados relacionados com probabilidade

BIBLIOGRAFIA

- " Expected Value and the Wheel of Fortune Game" . Ernest Woodward and Marilyn Woodward; Mathematics Teacher; Vol. 87; Nr 1 (,January 19941.
- MORETTIN; Luiz Gonzaga - Estatística Básica - Probabilidade (4a Edição 19861

INDEPENDÊNCIA E DEPENDÊNCIA DE EVENTOS: PROBABILIDADE CONDICIONAL

Alex Juvenal

Simone Telechi

I. Dados de identificação.

II. Conteúdo do Plano: Probabilidades independente e dependente

III. Conceitos envolvidos:

Independência e dependência de eventos, espaço amostral, esperança.

IV. Princípio: Multiplicativo.

V. Público alvo: Alunos do ensino médio

VI. Tempo previsto: 2 horas/aula.

VII. Objetivo principal:

Ao realizar o experimento, desejamos que os alunos compreendam que eventos com reposição são independentes e que eventos sem reposição são dependentes. No entanto, têm probabilidades diferentes.

VIII. Demais objetivos:

- Reiterar o aprendizado de frações (significado que tem o numerador e o denominador da fração para a resolução do problema);
- Modelar matematicamente os exercícios propostos de forma a "calcular" a probabilidade do evento com reposição e do evento sem reposição;

IX. Metodologia:

Aula expositiva e realização de experimento ao grupo; os alunos trabalharão individualmente;

X. Material utilizado para a realização do experimento:

Grãos de feijão e de milho, 8 compartimentos para serem colocados os grãos e uma caixa de sapatos.

(1 b) Da caixa com as oito bolinhas retira-se uma bolinha; sem devolvê-la à caixa retira-se uma outra bolinha. Pergunta: Qual é a probabilidade de ter saído bolinha amarela na primeira vez e bolinha amarela na segunda vez ? ? ?

Vamos analisar o seguinte: a probabilidade de ter saído bolinha amarela da primeira vez é de três amarelinhas em oito no total, ou seja 3/8.

Da segunda vez ficaremos com um universo de 7 bolinhas pois não houve reposição na caixa da bolinha retirada, portanto, se considerarmos que foi retirada uma bolinha amarela da primeira vez, sobrariam 2 bolinhas amarelas num universo de 7 bolinhas ou seja, 2/7.

Então a resposta à pergunta é que a probabilidade de ter saído bolinha amarela em ambos os eventos é (3/8).(2/7) que é igual a 6/56 ou 3/28. Desta forma temos um **evento dependente** pois a retirada da primeira bolinha influenciou na probabilidade da segunda retirada pois aquela não foi reposta na caixa antes de acontecer o segundo evento.

Depois de serem introduzidas noções básicas de probabilidade e enfatizar a diferença entre evento com reposição e evento sem reposição, os livros textos discutem a concepção de valor esperado com uma questão típica:

Um jogo consiste em jogar 6 vezes um dadinho com as seguintes regras: se o número que sair em cima for par, você deve pagar tantos dólares quanto for o número que saiu. Se o número for ímpar, você receberá tantos dólares quanto for o número que der em cima. Se você jogar este jogo apenas uma vez, qual o número de dólares que você espera ganhar ou perder ???

Para calcular a resposta, o valor de cada resultado possível é multiplicado pela probabilidade de acontecer o resultado.

Resultado:	1	2	3	4	5	6	
N.º de dólares:	+1	-2	+3	-4	+5	-6	
Probabilidade:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
Produto:	+1/6	-2/6	+3/6	-4/6	+5/6	-6/6	valor esperado é –3/6 (soma dos produtos).

Conforme os dados da tabela acima, o valor esperado é –3/6 de um dólar que corresponde à proporção de perder $0,50 cada vez que jogar o jogo.

Podemos fazer uma analogia aos experimentos (1 a) e (1b) para revisar as questões considerando valores esperados:

(1 a') Consideremos o mesmo universo de oito bolinhas sendo 3 amarelas e cinco azuis. Retira-se ao acaso uma bolinha da caixa. Repõe-se a bolinha e retira-se novamente. Qual a cor da bolinha que espera-se tirar após a reposição ???

Tabela do n.º esperado de bolinhas amarelas quando retira-se duas vezes <u>com reposição</u>:

Resultado:	••	••	••	••
N.º de amarelas:	2	1	1	0
Probabilidade:	(3/8).(3/8)	(3/8).(5/8)	(5/8).(3/8)	(5/8).(5/8)
Produto:	18/64	15/64	15/64	0

Valor esperado: ¾ (resultado da soma dos produtos) Espera-se tirar as 3 bolinhas amarelas.

Vamos analisar este resultado esperado para confirmarmos que faz sentido mas não está correto:

A probabilidade nas duas vezes com reposição é a mesma, 3/8. Então esperamos que a probabilidade de retirar bolinha amarela nas duas vezes seja 2.(3/8) que é igual a 3/4. Generalizando este raciocínio temos que o valor esperado de tirar *n* bolinhas, de quaisquer uma das cores, com reposição, *n* entre 0 e 8, é de *n*.(3/8).

Para o experimento sem reposição já fica mais complicado pois o valor esperado de retirar bolinha amarela dependerá da cor da bolinha que foi retirada da primeira vez. Mas faremos uma tabela de todos os possíveis resultados presentes no problema.

Tabela do n.º esperado de bolinhas amarelas quando retira-se duas vezes <u>sem reposição</u>:

Resultado:	••	••	••	••
N.º de amarelas:	2	1	1	0
Probabilidade:	(3/8).(2/7)	(3/8).(5/7)	(5/8).(3/7)	(5/8).(4/7)
Produto:	12/56	15/56	15/56	0

Valor esperado: ¾ (resultado da soma dos produtos) Espera-se tirar as 3 bolinhas amarelas mesmo sendo sem reposição.

Surpreendentemente o valor esperado sem reposição é o mesmo que com reposição. Poderá ser uma coincidência ??

Para entendermos vamos generalizar o problema assumindo que a caixa contém Y bolinhas amarelas e B bolinhas azuis para um total de Y+B bolinhas na caixa. Generalizando, também, o valor esperado de retirar bolinha amarela da primeira vez temos Y/Y+B.

Vamos analisar a tabela abaixo:

Tabela do n.º esperado de bolinhas amarelas quando retira-se duas vezes (caso generalizado) <u>sem reposição</u>:

Resultado:	••	••	••	••
N.º de amarelas:	2	1	1	0
Probabilidade:	(Y/Y+B)(Y-1/Y+B-1)	(Y/Y+B)(B/Y+B-1)	(Y/Y+B)(Y/Y+B-1)	(Y/Y+B)(B-1/Y+B-1)
Produto:	2(Y/Y+B)(Y-1/Y+B-1)	1(Y/Y+B)(B/Y+B-1)	1(Y/Y+B)(Y/Y+B-1)	0
Valor esperado:	2(Y/Y+B)			

Para *n* bolinhas temos que o valor esperado será *n*.(Y/Y+B).

Este valor esperado será o mesmo para o evento com reposição.

Na tentativa de explicar este paradoxo o autor sugere aos estudantes que eles imaginassem que todas as bolinhas fossem colocadas em uma poderosa máquina e fossem trituradas em partículas muito pequenas e então fossem colocadas de volta na caixa. Retira-se da caixa uma quantia de partículas equivalente a uma bolinha. Esta quantia irá conter partículas azuis e amarelas. As partículas amarelas estarão bem perto da probabilidade de constituir 3/8 do total de partículas removidas. Sem reposição da 1ª retirada, a próxima vez que for retirada uma mesma quantia a probabilidade de retirar amarelas também estará muito próxima de 3/8 de amarelas no total. Chegará um momento em que não serão mais retiradas partículas amarelas, mas, enquanto estas "existirem", a probabilidade se aproximará de 3/8.

A partícula metafórica ajuda a explicar porque o valor esperado volta a ser representado por uma função linear; quer dizer que, se representássemos no plano cartesiano, a reta representaria a proporção em função do todo, "diminuindo" a quantidade de partículas amarelinhas, que é a cor em questão, em relação ao todo : isto só acontece porque o valor esperado nada mais é do que uma <u>proporção.</u>

PRIMEIRO: AULA EXPERIMENTAL

Colocaremos feijões dentro de 5 compartimentos e grãos de milho dentro de 3 compartimentos e estes dentro da caixa de sapatos; faremos o experimento extraído da revista: evento1a e evento 1b.

SEGUNDO: AULA EXPOSITIVA COM EXPLICAÇÃO DE 1 EXEMPLO E A EXPLICAÇÃO DO EXPERIMENTO DA REVISTA QUE CONSTA ESTE TRABALHO

(para que os alunos tenham um registro escrito no caderno, ou como desejarem)

Exemplo 1: Vamos examinar a diferença entre extrair uma peça de um lote, ao acaso, com e sem reposição.

Suponhamos um lote com a seguinte composição: 80 peças, sendo 20 peças vermelhas

Trata-se de um experimento aleatório donde extrairemos 2 peças ao acaso, sendo:

Evento A: "a 1ª peça é vermelha" (com reposição)

Evento B: "a 2ª peça é vermelha" (sem reposição)

Probabilidade de A: P(A)=20/80

Probabilidade de B: P(B)=19/79

A probabilidade do evento B é calculada a partir da composição do lote no momento da extração da segunda peça, isto é, levando em conta qual a cor da peça que foi extraída da primeira vez. No exemplo acima teremos P(B/A)=19/79, ou seja, sempre que você calcular P(B/A) estará calculando P(B) em relação ao espaço amostral reduzido A, em vez de calcular em relação ao espaço amostral S.

Definição de espaço amostral:

" Espaço Amostral de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento."

Definição de eventos independentes:

"Dois eventos A e B são ditos independentes quando a ocorrência de um deles não modifica a probabilidade de ocorrência do outro"

"Este exemplo mostra a necessidade de se introduzir o conceito de probabilidade condicional, se A e B são eventos associados a um mesmo experimento aleatório, denotaremos por P(B/A) a probabilidade do evento B quando A já tiver ocorrido."

Distribuição Binomial das Probabilidades

Jorge Cunha

Introdução

Esta atividade tem como base o artigo "*Plinko, Probability, and Pascal*", publicado no periódico The Mathematics Teacher, que apresenta o jogo *Plinko* como uma possibilidade interessante de deduzir a distribuição binomial das probabilidades.

A atividade usará dois períodos consecutivos de 50 minutos e pode ser aplicada em alunos do ensino médio, preferencialmente, que já tenham ou estejam trabalhando com Combinatória, Binômio de Newton e Triângulo de Pascal.

Atividades:

A partir do jogo *Plinko*, a proposta feita aos alunos é a descoberta/justificativa da posição ideal de lançamento do disco com a possibilidade de ganhar mais dinheiro.

O jogo consiste numa tabela com pinos dispostos em colunas alternadas conforme a figura:

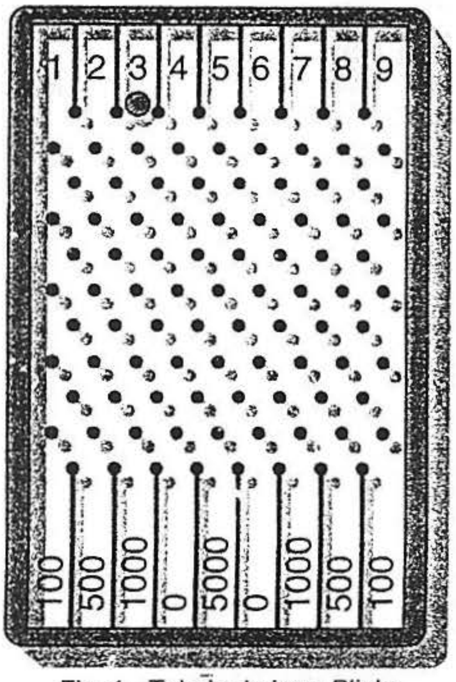


Fig. 1 - Tabela do jogo *Plinko*

A seguir é proposto o estudo de um caso mais particular (lançamento da comuna central) a partir do experimento com material concreto ou através da simulação com o software Galton, disponível para download no site indicado na bibliografia.

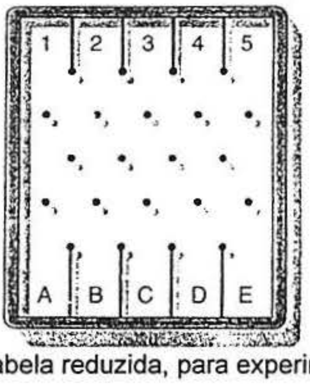


Fig. 2 - Tabela reduzida, para experimentação

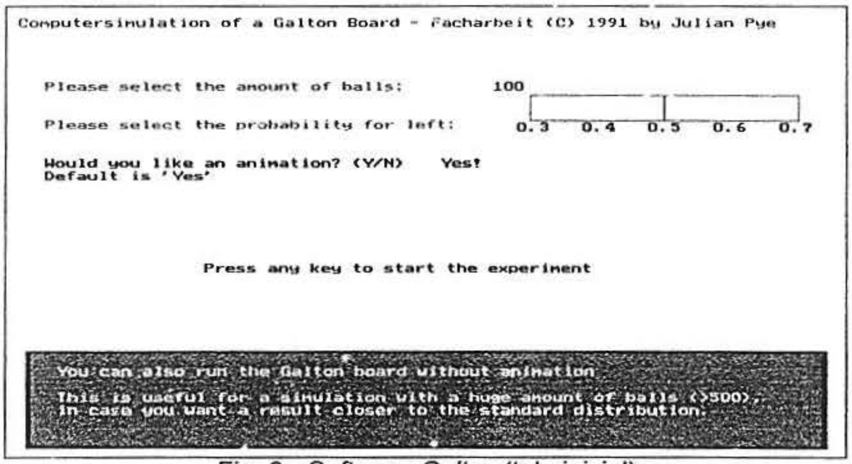


Fig. 3 - Software *Galton* (tela inicial)

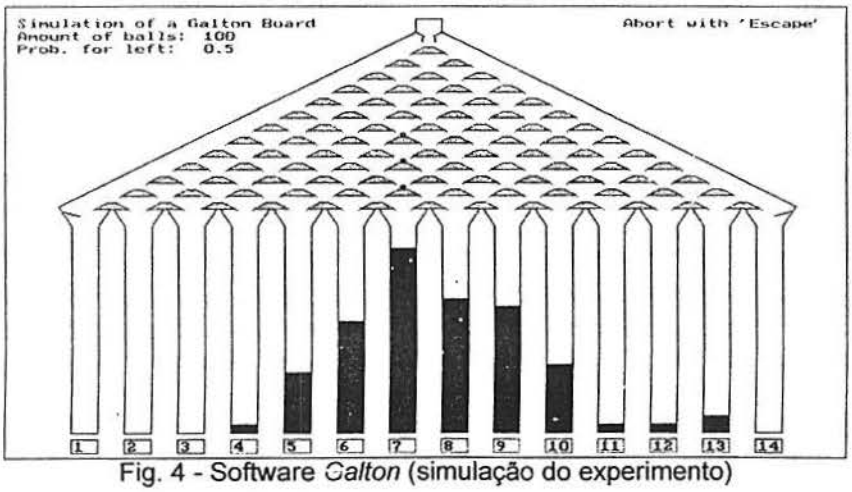


Fig. 4 - Software *Galton* (simulação do experimento)

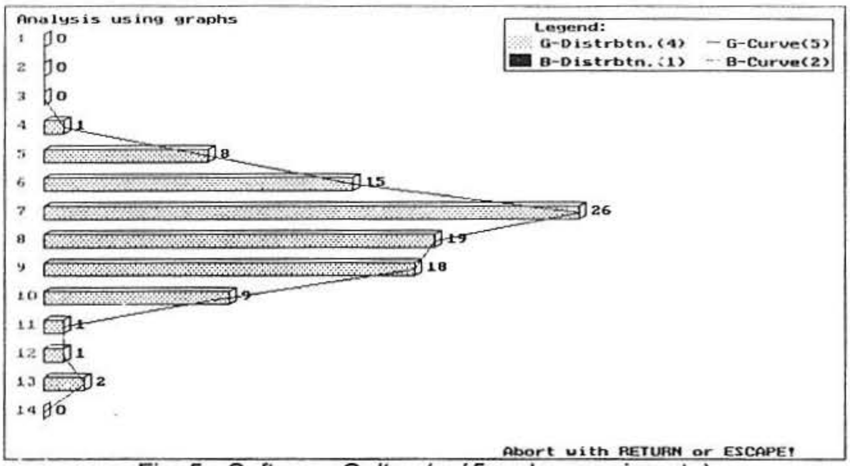


Fig. 5 - Software *Galton* (gráfico do experimento)

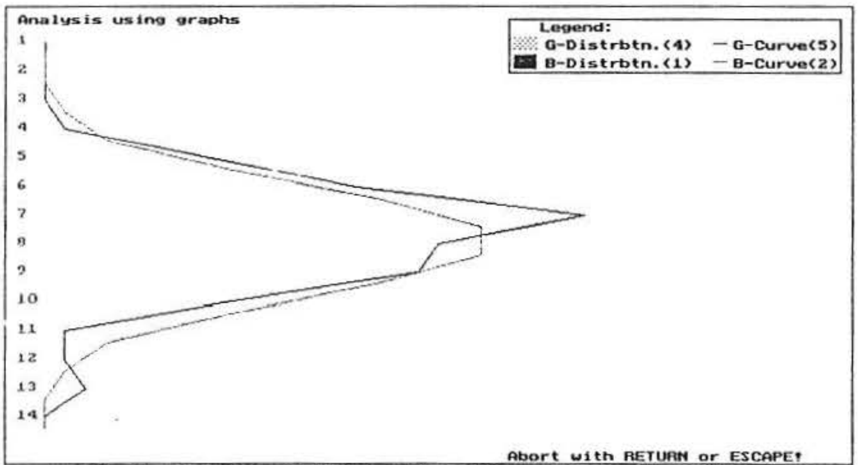


Fig. 6 - Software *Galton* (gráfico simulação x probabilidade)

Motivados por perguntas do tipo:

De quantas maneiras o disco pode cair em A? Em B? Em C? Em D? Em E?

Quais são estas possibilidades?

Como podemos representar tais possibilidade?

Quantos movimentos para a direita são necessários para que o disco caia em B? E para a esquerda? E para que o disco caia em outra "casa"?

Qual é o total de possibilidades?

Do que depende este total de possobilidades?

Alguém consegue generalizar este processo?

A partir do uso do material concreto podem ser experimentadas várias possibilidades que aliadas as respostas destas perguntas e outras que venham a surgir, bem como a posterior montagem da árvore de possibilidade permitirá a determinação de conceitos como espaço amostral e a possibilidade do disco cair em cada uma das "casas" (a partir do lançamento da coluna central).

EEEE-A	DDDD-E
EEED-B	DDDE-D
EEDE-B	DDED-D
EDEE-B	DEDD-D
EEDD-C	DDEE-C
EDDE-C	DEED-C
EDED-C	DEDE-C
EDDD-D	DEEE-B

A	B	C	D	E
1	4	6	4	1

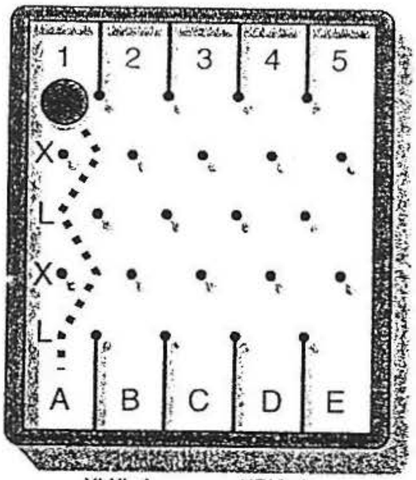
A partir da listagem destas possibilidades, é possível estabelecer de que forma o incremento de uma linha altera o total de possibilidades, esperando-se que os alunos possam generalizar que o espaço amostral será do tipo 2^n e a distribuição das possibilidades reproduz os coeficientes do binômio de Newton, para o caso particular de a=b=1.

Bibliografia:

- The Mathematics Teacher, Vol. 88 Nº 4, abril 1995, 282-285.
- http://mathematikos.psico.ufrgs.br, site mantido pelos profs Marcus Basso e Débora Maçada.

Comentários a respeito do artigo:

O artigo explora ainda casos mais genéricos.
Estes casos não foram incluídos nesta atividade por apresentarem maior complexidade e conseqüente necessidade de maior disponibilidade de tempo para aplicação como atividade.
Esta generalização consiste em deslocar o lançamento para uma coluna diferente da central, caso em que a lateral do tabuleiro funciona como se fosse um espelho refletindo os coeficintes binomiais para dentro do tabuleiro, mas sendo descontados nas respectivas colunas, conforme se vê no exemplo a seguir:



XLXL-A
XLXR-B

XRLL-A
XRLR-B
XRRL-B
XRRR-C

A	B	C	D	E
2	3	1	0	0

Fig. 7 - Lançamento a partir da primeira coluna do tabuleiro

Utilizando duas colunas (X,Y) como apoio pode-se verificar a impossibilidade de algumas "trajetórias" que devem, portanto, ser descontadas.

EEEE-X	DDDD-C
EEED-Y	DDDE-B
EEDE-Y	DDED-B
EDEE-Y	DEDD-B
EEDD-A	DDEE-A
EDDE-A	DEED-A
EDED-A	DEDE-A
EDDD-B	DEEE-Y

X	Y	A	B	C
1	4	6	4	1
		-4	-1	
		2	3	1

Jorge Cunha 1524/95-0