ESPERANÇAS DOS QUADRADOS MÉDIOS NA ANÁLISE DE VARIÂNCIA EM MODELOS COM POPULAÇÃO FINITA

Dinara W. Xavier Fernandez

Série G, n^0 02, JAN/90

ESPERANÇAS DOS QUADRADOS MEDIOS

NA ANALISE DE VARIANCIA EM MODELOS COM

POPULAÇÃO FINITA

Prof.ª Dinara Westphalen Xavier Fernandez

INDICE

Página

ESPERANÇAS DOS QUADRADOS MÉDIOS NA ANÁLISE DE VARIÂNCIA EM MODELOS COM POPULAÇÕES FINITAS

1. INTRODUÇÃO

Os estimadores dos componentes de variância obtidos pelo método da Análise de Variância, conhecido como **Método 1 de Henderson**, que consiste em igualar os quadrados médios observados (QM) com seus valores esperados E(QM), não raramente nos leva a estimativas negativas. Isto pode ocorrer em qualquer modelo (misto ou aleatório), e em qualquer classificação (hierárquica ou cruzada), o que é um fato por demais desagradável.

SEARLE (1971) enumera vários procedimentos alternativos quando encontramos uma estimativa negativa de um componente de variância, dentre eles:

(i) Aceitar a estimativa negativa, admitindo que o verdadeiro valor do componente de variância é zero (0). Embora possa parecer lógico, isto afeta as propriedades dos estimadores, tendo em vista que a estimação foi truncada.

(ii) Eliminar o parâmetro correspondente no modelo e reestruturar a análise de variância, obtendo uma ponderação dos quadrados médios restantes, e, com isso, obter novas estimativas dos componentes de variância restantes.

(iii) Considerar a obtenção de estimativas negativas como uma indicação da utilização de um modelo errôneo.

Na tentativa de contornar esse problema, surgiu o trabalho de HERBACH (1959), que usa estimadores de máxima verossimilhança que são não negativos, mas apresentam a desvantagem de serem truncados e viciados.

THOMPSON (1962) desenvolveu um algoritmo que resulta da maximização da função de verossimilhança dos quadrados médios, sujeita a um conjunto de restrições, que recebe a denominação de **Princípio da Máxima Verossimilhança Restritivo**. Esse procedimento também provoca um truncamento, e o estimador resultante é viciado.

RAO (1972) estendeu um novo método de estimação denominado MINQUE (*Minimun Norm Quadratic Unbiased Estimation*) ao problema da estimação de componentes de variância e de covariância. As estimativas obtidas, após uma modificação introduzida pelo autor, são não negativas.

LA MOTTE (1973) desenvolveu, dentro da classe dos estimadores quadráticos não viciados, as condições para obtermos estimativas não negativas de combinações lineares dos componentes de variância.

Através de HILL (1965) e TIAO e TAN (1965) surgiram os primeiros trabalhos utilizando a inferência bayesiana para obtenção dos componentes de variância, num modelo aleatório simples, em dados balanceados e não balanceados. Também BEZERRA (1976) estudou o problema da estimação dos componentes de variância dentro do contexto bayesiano, tendo por base o modelo aleatório em classificação simples balanceada. A grande vantagem prática do uso dos métodos bayesianos, é que as estimativas dos componentes de variância são sempre não negativas.

PEREIRA (1983) apresentou novas estimativas dos componentes de variância através do método dos momentos, quando determinamos uma estimativa negativa dos componentes de variância em modelos aleatórios, mistos e fixos de classificação hierárquica, bem como a expressão da estimativa da correlação negativa entre as variáveis, já que a presença de correlação negativa entre os elementos de uma mesma parcela (correlação intra-classe) pode ocasionar estimativas negativas de componentes de variância.

No aspecto da reconsideração do modelo, SEARLE e FAWCETT (1970) discutem o procedimento de adotar o modelo em termos de populações finitas, em vez de populações infinitas, o que nos leva a encontrar estimativas não negativas onde, anteriormente, sob a suposição de populações infinitas, eram negativas.

Em modelos de componentes de variância, os efeitos aleatórios são usualmente assumidos como provenientes de uma população infinita. Populações finitas têm também sido consideradas: BENNETT e FRANKLIN (1954), CORNFIELD e TUKEY (1956) e WILK e KEMPTHORNE (1956), discutem vários casos para dados balanceados. Entretanto, para dados não balanceados, a não ser o tratamento dado por Tukey para classificação simples, a única discussão sobre modelos de população finita surgiu com GAYLOR e HARTWELL (1969), que apresentaram com detalhes somente a classificação hierárquica tríplice.

A razão da utilização do modelo para população finita origina-se na seguinte situação envolvida no delineamento:

Quando trabalhamos com uma classificação hierárquica com dois fatores A e B, o modelo

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij},$$

onde:

y_{ij} é a observação da variável aleatória ($i = 1, \ldots, n_a$ classes com $j = 1, \ldots, n_b$ observações por classe);

μ é a média populacional;

α_i é o efeito (aleatório) do fator A;

β_{ij} é o efeito (aleatório) do fator B dentro de A,

e supondo que:

α_i tem média zero, variância σ_a^2 e são independentes;

β_{ij} tem média zero, variância σ_b^2 e são independentes;

α_i e β_{ij} são mutuamente independentes;

trata-se de um "modelo infinito".

Neste modelo, temos dois estágios de amostragem envolvidos: o primeiro, correspondente ao fator A, onde uma amostra aleatória de tamanho n_a ($i = 1, \ldots, n_a$) é considerada; o segundo, correspondente ao fator B, onde uma amostra aleatória de tamanho n_b ($j = 1, \ldots, n_b$) é associada a cada i.

É claro que a independência estatística entre as variáveis aleatórias está baseada numa suposição de população infinita. Entretanto, se de fato, a amostragem está sendo realizada sob um universo existente, então a população é necessariamnte finita. Como, na prática, a amostragem é sem reposição, surge numa dependência estatística de α_i e β_{ij}.

Mc HUGH (1968) mostra que a estimativa de um componente de variância negativo ocorre em situações em que a suposição de independência estatística entre as variáveis é falsa, ou seja, não podemos considerar que as populações são infinitas.

SEARLE e FAWCETT (1970) apresentam uma regra para converter as esperanças dos quadrados médios na análise de variância dos modelos infinitos, em esperanças para modelos finitos, que se aplica a dados balanceados e não balanceados, em classificação hierárquica e cruzada, bem como na mistura delas. Desde que as esperanças dos quadrados médios sob populações infinitas encontram-se disponíveis na literatura, a regra aqui desenvolvida permite a substituição de modelos de população infinita para finita.

2. MODELO GERAL

Consideremos um modelo com os fatores A, B, ..., K, representando N_θ o tamanho da população do θ-ésimo fator. Os efeitos são θ_i, para $i = 1, \ldots, N_\theta$, com θ tomando os valores A, B, ..., K. Como é costume (GAYLOR e HARTWELL, 1969), assume-se que a média de cada população é zero (0), assim:

$$\sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i^2}{N_\theta - 1} \qquad [1]$$

é definida como variância populacional.

Consequentemente,

$$\left[\sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i^2 + \sum_{i}^{N_\theta} \sum_{\neq i'}^{N_\theta} \theta_i\theta_{i'} = 0 \quad ,$$

isto é,

$$\sum_{i}^{N_\theta} \sum_{\neq i'}^{N_\theta} \theta_i\theta_{i'} = - \sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i^2$$

$$\therefore \quad \sum_{i}^{N_\theta} \sum_{\neq i'}^{N_\theta} \theta_i\theta_{i'} = - (N_\theta - 1)\ \sigma_\theta^2 \qquad [2]$$

Ao se obterem dados amostrais, admite-se que os efeitos das populações finitas (e erros) do modelo são obtidos aleatoriamente e sem reposição. Desta forma, a suposição de independência estatística entre os efeitos θ_i e $\theta_{i'}$, $i \neq i'$, fica prejudicada.

Se θ_r é um valor amostral do efeito θ, então, por [1]:

$$\text{Média } (\theta_r) = E(\theta_r) = \frac{\sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i}{N_\theta} = 0$$

e

$$\mathrm{Var}\ (\theta_r) = E(\theta_r^2) = \frac{\sum_{i=1}^{N_\theta} \theta_i^2}{N_\theta} = \frac{1}{N_\theta}\ (N_\theta - 1)\ \sigma_\theta^2 = \left[1 - \frac{1}{N_\theta}\right] \sigma_\theta^2$$

$$\therefore \qquad \mathrm{Var}\ (\theta_r) = (1 - N_\theta^{-1})\ \sigma_\theta^2 \qquad [3]$$

e, para dois valores amostrais, θ_r e θ_s:

$$\mathrm{COV}\ (\theta_r,\ \theta_s) = E(\theta_r \theta_s) = \frac{1}{N_\theta(N_\theta - 1)} \sum_{i}^{N_\theta} \sum_{\neq\ i'}^{N_\theta} \theta_i \theta_{i'}$$

$$= \frac{1}{N_\theta(N_\theta - 1)} \cdot - (N_\theta - 1)\ \sigma_\theta^2$$

$$\therefore \qquad \mathrm{COV}\ (\theta_r,\ \theta_s) = - \frac{\sigma_\theta^2}{N_\theta} \qquad [4]$$

Desde que os valores correspondentes a [3] e a [4] para populações infinitas são σ_θ^2 e 0, respectivamente, as esperanças dos quadrados médios em modelos de população finita não são as mesmas que as de população infinita.

Em cada caso, os valores esperados são funções lineares dos componentes de variância, cujos coeficientes dos componentes são determinados para modelos de populações finitas, de acordo com [3] e [4].

Suponha que y representa o vetor de observações, com vetor de médias u e matriz de covariâncias V. Então, qualquer soma de quadrados é uma forma quadrática em y, ou seja, $y'Qy$, e seu valor esperado é

$$E(y'Qy) = tr\ (QV) + \mu'Q\mu \qquad [5]$$

Assim, os quadrados médios da análise de variância com dados balanceados e seus análogos para dados desbalanceados são formas quadráticas das observações. Além disso, a soma das linhas de Q é zero, isto é, $Q1 = 0$, onde 1 é o vetor de uns; em modelos aleatórios, $\mu = \mu.1$ e, também, em [5] $\mu'Q\mu = \mu'Q1\mu = 0$. Portanto, se considerarmos somente a expressão original, denotando por M, [5] pode ser escrita como:

$$E(M) = E(y'Qy) = tr(QV).$$

Este resultado independe se o modelo é de população finita ou infinita. Aplica-se a ambos e podemos escrever

$$E_{\infty}(M) = tr(QV_{\infty}) \qquad e \qquad E_{F}(M) = tr(QV_{F}) \qquad [6]$$

para modelos população infinita e finita, respectivamente. Como Q é a mesma em ambos os casos, a única diferença entre as duas esperanças dos quadrados médios é o uso de V_F em lugar de V_{∞}. A natureza exata dessa diferença pode ser verificada ao olhar o modo como V_{∞} será alterado para V_F quando se trocar população infinita para finita. A alteração depende dos resultados [3] e [4]. Quaisquer que sejam eles, é indiferente para [6] se Q é proveniente de dados balanceados ou desbalanceados. Em cada caso,

[6] permanece, e assim a troca a ser feita para derivar V_F de V_∞ produzirá $E_F(M)$ de $E_\infty(M)$, tanto para dados balanceados como desbalanceados. A discussão e os resultados a seguir, portanto, aplicam-se igualmente para ambos os tipos de dados.

3. MODELOS HIERARQUICOS

É oportuno, no desenvolvimento do resultado geral, considerar três casos separadamente: modelos hierárquicos (consistindo unicamente de classificação hierárquica); modelos de classificação cruzada (sem classificação hierárquica); e modelos envolvendo combinações de classificação hierárquica e cruzada.

Para discutirmos modelos hierárquicos, consideraremos inicialmente um modelo hierárquico duplo com os fatores A e B dentro de A:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + e_{ijk} \quad .$$

A obtenção de V_F a partir de V_∞ leva em consideração o efeito de [3] e [4] nos vários elementos de V_∞.

Os elementos diagonais de V_∞ são:

$$V_{(ijk)} = \sigma^2_A + \sigma^2_B + \sigma^2_e \qquad [7]$$

e por [3] passam a ser elementos diagonais em V_F:

$$(1 - N_A^{-1})\ \sigma^2_A + (1 - N_B^{-1})\ \sigma^2_B + (1 - N_e^{-1})\ \sigma^2_e \qquad [8]$$

onde N_e é o tamanho da população de erros.

São também elementos de V_∞:

$$COV\ (y_{ijk}\ ,\ y_{ijk'}) = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 \quad , \qquad [9]$$

que é a covariância entre observações que estão na mesma sub-casela dos dados, mas têm diferentes termos de erro. No caso de população finita, esses erros terão covariância $-(\sigma_e^2/N_e)$, de acordo com [4]. Então, na correspondência de [9] para um modelo de população finita, as σ_s^2 podem ser trocadas exatamenta como foi feito em [7] e [8], mas surgirá ainda o termo $-(\sigma_e^2/N_e)$. Portanto, [9] ficará em V_F:

$$(1 - N_A^{-1})\ \sigma_A^2 + (1 - N_B^{-1})\ \sigma_B^2 - \frac{\sigma_e^2}{N_e} \qquad [10]$$

Similarmente, em V_∞ , a

$$COV\ (y_{ijk}\ ,\ y_{ij'k'}) = \sigma_A^2 \qquad [11]$$

é a covariância entre observações que estão no mesmo nível de A, mas em diferentes níveis de B. Portanto, no caso de populações finitas, essas covariâncias envolvem $-(\sigma_B^2/N_B)$, como em [4]. Logo, em V_F [11] fica:

$$(1 - N_A^{-1})\ \sigma_A^2 - N_B^{-1}\sigma_B^2 \qquad [12]$$

Também, pela mesma razão, os elementos de V_∞ que são zero, isto é,

$$COV\ (y_{ijk}\ ,\ y_{i'jk}) = 0 \quad , \qquad [13]$$

$i \neq i'$, tornam-se, em V_F:

$$- N_A^{-1} \sigma_A^2 \qquad [14]$$

Em [8], [10], [12] e [14], podemos ver que V_F tem $- N_A^{-1} \sigma_A^2$ em cada elemento. Portanto, V_F pode ser expressa por

$$V_F = (- N_A^{-1} \sigma_A^2)\, 11' + V_F^* \qquad [15]$$

Como já foi discutido, $Q1 = 0$; então, $QV_F = QV_F^*$. Assim, [6] torna-se

$$E_F(M) = tr(QV_F^*) \qquad [16]$$

Por [15], V_F^* é obtida adicionando-se $N_A^{-1}\sigma_A^2$ a cada elemento de V_F. Portanto, os elementos de V_F^* são:

$$COV\,(y_{ijk}\,,\, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} (\sigma_A^2 - \frac{\sigma_B^2}{N_B}) + (\sigma_B^2 - \frac{\sigma_e^2}{N_e}) + \sigma_e^2\,, & [17] \\ \qquad i=i',\ j=j',\ k=k' & \\ (\sigma_A^2 - \frac{\sigma_B^2}{N_B}) + (\sigma_B^2 - \frac{\sigma_e^2}{N_e})\,, & [18] \\ \qquad i=i',\ j=j' & \\ (\sigma_A^2 - \frac{\sigma_B^2}{N_B})\,, \qquad i=i' & [19] \\ \text{zero}, \qquad i \neq i' & [20] \end{cases}$$

Os elementos correspondentes para V_∞ são dados em [7], [9], [11] e [13]. Comparando os dois conjuntos de elementos, observa-se que V_F^* pode ser obtida de V_∞ se

$$\left.\begin{matrix} \sigma_A^2 \\ \\ \sigma_B^2 \\ \\ \sigma_e^2 \end{matrix}\right] \text{ de } V_\infty \text{ for substituido por } \begin{bmatrix} \sigma_A^2 - \dfrac{\sigma_B^2}{N_B} \\ \sigma_B^2 - \dfrac{\sigma_e^2}{N_e} \\ \sigma_e^2 \end{bmatrix} \qquad [21]$$

Portanto, como $E_\infty(M) = tr(QV_\infty)$ e $E_F(M) = tr(QV_F^*)$ como em [6] e [16], respectivamente, substituindo-se [21] em $E_\infty(M)$ obtém-se $E_F(M)$; isto é, colocando a substituição de [21] nas esperanças dos quadrados médios num modelo de população infinita, produziremos as correspondentes esperanças dos quadrados médios de um modelo de população finita.

Essa discussão, em termos de classificação hierárquica dupla, se estende a qualquer modelo hierárquico. Em geral, cada elemento diagonal de V_∞ é a soma de todos os componentes de variância do modelo

$$\sum_{\Theta=A}^{K} \sigma_\Theta^2$$

e, por [3] torna-se

$$\sum_{\Theta=A}^{K} (1 - N_\Theta^{-1})\, \sigma_\Theta^2$$

em V_F; [7] e [8] ilustram isso. Similarmente, em cada elemento diferente de zero da diagonal de V_∞ , está a soma de certas σ^2_θ's do modelo, que por [3] torna-se $(1-N_\theta^{-1})\sigma^2_\theta$ em V_F. Também os elementos que em V_∞ têm covariância zero, por [4] são diferentes de zero em V_F sob a forma $-(\sigma^2_\gamma/N_\gamma)$, chamada de covariância entre os dois níveis do fator hierarquizado dentro de cada sub-fator, cujas variâncias são os elementos de V_∞. Exemplos disso são vistos nas equações [10] e [12]. Finalmente, os elementos zero de V_∞ são covariâncias entre observações de diferentes níveis do fator A e assim, em V_F, devido a dependência, essas covariâncias são $-(\sigma^2_A/N_A)$, como exemplificado em [13] e [14]. É claro que observações em diferentes níveis do fator A estão também em diferentes níveis de todos os outros fatores, mas desde que as populações são definidas somente dentro de fatores dentro dos quais são hierárquicos (e em particular dentro de A), somente $-(\sigma^2_A/N_A)$ entra nessa covariância. Esta também é a razão pela qual o termo $-(\sigma^2_\gamma/N_\gamma)$ surge em cada um dos outros elementos de V_F.

A substituição indicada em [21] para classificação dupla hierárquica estende-se prontamente a cada classificação hierárquica de ordem k. Além disso, como visto, na substituição de

$$\sigma^2_A \quad \text{por} \quad \sigma^2_A - \frac{\sigma^2_B}{N_B}$$

em [21], B é o fator hierárquico dentro de A. Similarmente, na substituição de

$$\sigma^2_B \quad \text{por} \quad \sigma^2_B - \frac{\sigma^2_e}{N_e} \ ,$$

onde σ_e^2 é a variância do erro, o termo erro pode ser pensado como um "fator" hierárquico dentro de B, a sub-classificação máxima do modelo. Desta maneira, a troca [21] pode ser generalizada.

Seja $\gamma:\theta$ denotando o fator γ imediatamente hierárquico dentro de θ, e seja N_γ o tamanho da população γ dentro de cada nível do fator θ (para cada nível, o mesmo tamanho populacional). Por exemplo: numa classificação hierárquica dupla, onde B é hierárquico dentro de A e o "fator" erro é hierárquico dentro de B; o fator hierárquico imediatamente dentro de A é B (isto é, para γ:A, o fator γ é B e não o fator erro). Então temos a seguinte regra.

Regra: As esperanças dos quadrados médios em modelos de classificação hierárquica são obtidas a partir dos valores das populações infinitas pela substituição de σ_θ^2 por

$$\sigma_\theta^2 - \frac{\sigma_\gamma^2}{N_\gamma} \qquad [22]$$

onde σ_γ^2 é o componente de variância do fator $\gamma:\theta$ (γ imediatamente hierárquico dentro de θ).

Três exemplos da **regra** [22] estão mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 - Classificação hierárquica: substituições necessárias para obtenção das esperanças dos quadrados médios em modelos com populações finitas, a partir de populações infinitas.

SIMPLES A	DUPLA B dentro de A	TRÍPLICE B dentro de A, C dentro de B
σ^2_A por $\sigma^2_A - \frac{\sigma^2_e}{N_e}$	σ^2_A por $\sigma^2_A - \frac{\sigma^2_B}{N_B}$	σ^2_A por $\sigma^2_A - \frac{\sigma^2_B}{N_B}$
	σ^2_B por $\sigma^2_B - \frac{\sigma^2_e}{N_e}$	σ^2_B por $\sigma^2_B - \frac{\sigma^2_C}{N_C}$
		σ^2_C por $\sigma^2_C - \frac{\sigma^2_e}{N_e}$

Para ilustrar seu uso, apresentamos, na Tabela 2, o quadro da análise de variância usual de uma classificação simples para modelos de população infinita, e os seus correspondentes resultados para população finita.

Tabela 2 - Análise de variância.

Modelo: $y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$, $i = 1, \ldots, a$; $j = 1, \ldots, n$.

C. V.	G. L.	QM	E(QM)	
			POPULAÇÃO INFINITA	POPULAÇÃO FINITA
A	a-1	QMA	$\sigma_e^2 + n\sigma_A^2$	$\sigma_e^2 + n\left[\sigma_A^2 - \frac{\sigma_e^2}{N_e}\right]$
Erro	n-a	QME	σ_e^2	σ_e^2

Este caso de classificação simples nos transporta à discussão para modelos de população finita como alternativa de modelos de população infinita enfocada por Mc HUGH e MILKE (1968).

No caso de população infinita, o estimador não viesado usual para componentes de variância entre classes é o familiar

$$\hat{\sigma}^2_{A;\infty} = (QMA - QME)/n \qquad [23]$$

onde QMA e QME são os quadrados médios entre e dentro das classes, respectivamente, com n observações em cada classe. Para populações finitas, esses quadrados médios têm esperanças

$$E_F(QMA) = n\left(\sigma_A^2 - \frac{\sigma_e^2}{N_e}\right) + \sigma_e^2 \quad \text{e} \quad E_F(QME) = \sigma_e^2 \qquad [24]$$

e então:

$$E_F\left\{\hat{\sigma}^2_{A;\infty}\right\} = E_F\left\{\frac{QMA - QME}{n}\right\} = \frac{1}{n} E_F(QMA) - \frac{1}{n} E_F(QME)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sigma^2_e + n\left(\sigma^2_{A;\infty} - \frac{\sigma^2_e}{N_e}\right)\right] - \frac{1}{n}\sigma^2_e =$$

$$= \frac{1}{n}\sigma^2_e + \sigma^2_A - \frac{\sigma^2_e}{N_e} - \frac{1}{n}\sigma^2_e = \sigma^2_{A;F} - \frac{\sigma^2_e}{N_e},$$

onde $\sigma^2_{A;F}$ é o componente de variância entre classes para população finita; e, portanto, $E_F\left\{\hat{\sigma}^2_{A;\infty}\right\}$ pode ser negativa. Além disso, se $\hat{\sigma}^2_{A;\infty}$ é negativa, o estimador não viciado sugerido por [23] para o caso de população finita é:

$$\hat{\sigma}^2_{A;F} = \left[QMA - \left(1 - \frac{n}{N_e}\, QME\right)\right]/n = QME\left[\frac{QMA}{QME} - \left(1 - \frac{n}{N_e}\right)\right]/n =$$

$$= QME\left[F - \left(1 - \frac{n}{N_e}\right)\right]/n \qquad [25]$$

e será positivo se $N_e < n/(1-F)$, com $1-F$ sendo positivo pois $F < 1$ quando $\hat{\sigma}^2_{A;\infty}$ de [23] é negativo. Assim, quando um estimador para população infinita é negativo, o estimador para população finita será positivo desde que consideremos que a população é finita quando $N_e < \frac{n}{1-F}$. Como $n/(1-F)$ é próximo de n quando F (<1) é próximo de zero, usando $\hat{\sigma}^2_{A;F}$ em lugar de $\hat{\sigma}^2_{A;\infty}$ é pouco provável que se tenha muito ganho sempre que F está próximo de zero, especialmente se n é pequeno. Por outro lado, quando F é ligeiramente menor do que 1, $n/(1-F)$ é então apreciavelmente maior do que n, e a postulação sobre população finita para o termo aleatório precisa ser considerada a fim de se obter uma estimativa positiva para o componente de variância $\hat{\sigma}^2_{A;F}$ em vez de usar a negativa $\hat{\sigma}^2_{A;\infty}$. Neste sentido, podemos notar por [23] e [25] que:

$$\hat{\sigma}^2_{A;F} = \left[QMA - \left(1 - \frac{n}{N_e}\right)QME\right]/n = \left[QMA - \left(\frac{N_e - n}{N_e}\right)QME\right]/n =$$

$$= \left[QMA - \frac{N_e . QME - n . QME}{N_e}\right]/n = \frac{QMA}{n} - \frac{N_e . QME - n . QME}{n . N_e} =$$

$$= \frac{QMA}{n} - \frac{QME}{n} + \frac{QME}{N_e} = \left(\frac{QMA - QME}{n}\right) + \frac{QME}{N_e} =$$

$$= \hat{\sigma}^2_{A;\infty} + \frac{QME}{N_e}$$

A importância de [22] é que ela se aplica tanto a dados balanceados como a dados não balanceados. Por exemplo, numa classificação hierárquica com três níveis para dados desbalanceados, as esperanças dos quadrados médios são apresentadas por GAYLOR e HARTWELL (1969) e aqui reproduzidas na Tabela 3. Consideremos a população constituída por A classes, B sub-classes dentro de cada classe A, e C sub-sub-classes dentro de cada sub-classe B. O modelo é:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(ij)} + e_{l(ijk)}$$

com,

$$i = 1, \ldots, a; \; j = 1, \ldots, b_i; \; k = 1, \ldots, c_{ij}$$

e

$$l = 1, \ldots, n_{ijk} \text{ ou } \infty$$

e

$$\sum_{i=1}^{A} \alpha_i = \sum_{j=1}^{B} \beta_{j(i)} = \sum_{k=1}^{C} \gamma_{k(ij)} = 0.$$

Note que B e C aparecem nas esperanças dos quadrados médios e tanto podem ser finitos como infinitos. No último caso, a tabela se reduz aos resultados apresentados por ANDERSON e BANCROFT (1952). Ainda, se os dados forem balanceados, isto é, $b_i = b$, $c_{ij} = c$ e $n_{ijk} = n$, obtemos os resultados fornecidos por BENNETT e FRANKLIN (1954).

Tabela 3 - Esperança dos quadrados médios para modelos hierárquicos com dados desbalanceados em populações finitas ou infinitas.

C. V.	G. L.	COEFICIENTES DOS COMPONENTES DE VARIANCIAS NAS E(QMD)			
		σ_e^2	σ_c^2	σ_b^2	σ_a^2
A	$a-1$	1	$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^{c_{ij}} \left[n_{ijk}^2 - \frac{n_{ij.}^2}{c_{ij} C} \right] f_i$	$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \left[n_{ij.}^2 - \frac{n_{i..}^2}{b_i B} \right] f_i$	$\sum_i^a n_{i..} f_i$
B dentro de A	$\sum_i b_i - 1$	1	$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^{c_{ij}} \left[n_{ijk}^2 - \frac{n_{ij.}^2}{c_{ij} C} \right] f_{ij}$	$\sum_i^a \sum_j^{b_i} n_{ij.}^2 f_{ij}$	
C dentro de B	$\sum_i \sum_j c_{ij} - \sum_i b_i$	1	$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^{c_{ij}} n_{ijk}^2 f_{ijk}$		
Erro	$n - \sum_i \sum_j c_{ij}$	1			

onde:

$$f_i = \left[\frac{\frac{1}{n_{i..}} - \frac{1}{n_{...}}}{a-1}\right]; \quad f_{ij} = \frac{\left(\frac{1}{n_{ij.}} - \frac{1}{n_{i..}}\right)}{\left(\sum_i^a b_i - a\right)}; \quad f_{ijk} = \frac{\left(\frac{1}{n_{ijk}} - \frac{1}{n_{ij.}}\right)}{\left(\sum_i^a \sum_i^{b_i} c_{ij} - \sum_i^a b_i\right)};$$

Em geral, a regra [22] se aplica a qualquer classificação hierárquica com dados balanceados ou não. Na prática, σ_e^2 é conservado e em modelos nos quais somente algumas populações são finitas, tem infinitos N's para as outras populações.

4. MODELO DE CLASSIFICAÇÃO CRUZADA

4.1. Classificação Cruzada Dupla

Na classificação cruzada dupla com fatores A e B, os valores amostrados das populações dos dois efeitos principais, A_i e B_j, terão ambos propriedades similares e [3] e [4]. Além disso, definindo os efeitos da interação das populações de modo que:

$$\sum_{i=1}^{NA} (AB)_{ij} = 0, \text{para todo } j \qquad e \qquad \sum_{j=1}^{NB} (AB)_{ij} = 0, \text{para todo } i;$$

nos leva a definir:

$$\sigma_{AB}^2 = \sum_{i=1}^{NA} \sum_{j=1}^{NB} (AB)_{ij}^2 / (N_A - 1)(N_B - 1) \qquad [26]$$

Deste modo, através da estensão dos procedimentos [3] e [4], obtemos:

$$E\left[(AB)_{ij}\ (AB)_{i'j'}\right] = \begin{cases} \left[(N_A-1)(N_B-1)/N_A\ N_B\right]\ \sigma^2_{AB}, & \text{para } i=i' \text{ e } j=j' \\ \left[-(N_A-1)/N_A\ N_B\right]\ \sigma^2_{AB}, & \text{para } i=i' \text{ e } j\neq j' \\ \left[-(N_B-1)/N_A\ N_B\right]\ \sigma^2_{AB}, & \text{para } i\neq i' \text{ e } j=j' \\ \left[(1/N_A\ N_B)\right.\ \sigma^2_{AB}, & \text{para } i\neq i' \text{ e } j\neq j' \end{cases}$$

onde $(AB)_{ij}$ e $(AB)_{i'j'}$ são dois valores amostrais do efeito da interação.

Agora, o modelo é:

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + e_{ijk},$$

com $E(y_{ijk}) = \mu$ e A_i, B_i e e_{ijk} sendo amostras de populações finitas com propriedades similares a [3] e [4]; e $(AB)_{ij}$ com as propriedades indicadas em [27].

Para obter V_F de V_∞, consideremos inicialmente os elementos de V_∞:

$$\operatorname{COV}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2_A + \sigma^2_B + \sigma^2_{AB} + \sigma^2_e = \operatorname{Var}(y_{ijk}) = v_1, \\ \text{para } i=i',\ j=j' \text{ e } k=k' \\ \sigma^2_A + \sigma^2_B + \sigma^2_{AB} = v_2, \text{ para } k \neq k' \\ \sigma^2_A \qquad\qquad = v_3, \text{ para } j \neq j \\ \qquad \sigma^2_B \qquad = v_4, \text{ para } i \neq i' \\ 0 \qquad\qquad = v_5, \text{ para } i \neq i',\ j \neq j' \end{cases} \qquad [28]$$

Sob as condições de populações finitas, não é difícil mostrar que os elementos de V_F correspondentes a V_∞ podem ser escritos como:

$$f_1 = f_5 + f^*_1 \text{ com } f^*_1 = (\sigma^2_A - \sigma^2_{AB}/N_B) + (\sigma^2_B - \sigma^2_{AB}/N_A) + (\sigma^2_{AB} - \sigma^2_e/N_e) + \sigma^2_e,$$

$$f_2 = f_5 + f^*_2 \text{ com } f^*_2 = (\sigma^2_A - \sigma^2_{AB}/N_B) + (\sigma^2_B - \sigma^2_{AB}/N_A) + (\sigma^2_{AB} - \sigma^2_e/N_e),$$

$$f_3 = f_5 + f^*_3 \text{ com } f^*_3 = (\sigma^2_A - \sigma^2_{AB}/N_B),$$

$$f_4 = f_5 + f^*_4 \text{ com } f^*_4 = (\sigma^2_B - \sigma^2_{AB}/N_A),$$

$$f_5 = f_5 + f^*_5 \text{ com } f^*_5 = 0 \qquad [29]$$

onde:

$$f_5 = -\sigma^2_A N_A^{-1} - \sigma^2_B N_B^{-1} + \sigma^2_{AB} N_A^{-1} N_B^{-1}$$

Como f_5 participa de cada elemento de V_F, este pode ser escrito como $V_F = f_5\, 11' + V^*_F$ onde os f^*'s são os elementos de

V^*_F. Portanto, como $E_F(M)=tr(QV_F)$ com $Q1 = 0$, temos $E_F(M)=tr(QV^*_F)$, exatamente como em modelos hierárquicos.

Além disso, comparando [29] com [28] é evidente que os f^*'s são os v's com

$$\sigma^2_A \text{ substituido por } \sigma^2_A - \sigma^2_{AB}/N_B,$$

$$\sigma^2_B \text{ substituido por } \sigma^2_B - \sigma^2_{AB}/N_B,$$

$$\sigma^2_{AB} \text{ substituido por } \sigma^2_{AB} - \sigma^2_e/N_e,$$

e

$$\sigma^2_e \text{ substituido por } \sigma^2_e, \quad [30]$$

e assim $E_F(M)$ é $E_\infty(M)$.

Esses resultados estão mostrados na Tabela 4.

Tabela 4 - Classificação Cruzada: Substituições necessárias para obtenção das Esperanças dos Quadrados Médios em modelos com populações finitas a partir de populações infinitas.

SIMPLES A	DUPLA A e B	TRIPLA A, B e C
σ^2_A por $\sigma^2_A-\sigma^2_e/N_e$	σ^2_A por $\sigma^2_A-\sigma^2_{AB}/N_B$	σ^2_A por $\sigma^2_A-\sigma^2_{AB}/N_B-\sigma^2_{AC}/N_C+\sigma^2_{ABC}/N_BN_C$
	σ^2_B por $\sigma^2_B-\sigma^2_{AB}/N_A$	σ^2_B por $\sigma^2_B-\sigma^2_{AB}/N_A-\sigma^2_{BC}/N_C+\sigma^2_{ABC}/N_AN_C$
	σ^2_{AB} por $\sigma^2_{AB}-\sigma^2_e/N_e$	σ^2_C por $\sigma^2_C-\sigma^2_{AC}/N_A-\sigma^2_{BC}/N_B+\sigma^2_{ABC}/N_AN_B$
		σ^2_{AB} por $\sigma^2_{AB}-\sigma^2_{ABC}/N_C$
		σ^2_{AC} por $\sigma^2_{AC}-\sigma^2_{ABC}/N_B$
		σ^2_{BC} por $\sigma^2_{BC}-\sigma^2_{ABC}/N_A$
		σ^2_{ABC} por $\sigma^2_{ABC}-\sigma^2_e/N_e$

4.2. Classificação Cruzada Geral

O modelo de classificação cruzado tripla é obtido por uma natural extensão dos métodos usados nas equações [27]-[30] para o caso de classificação dupla. Os resultados estão mostrados na Tabela 4. Para obtê-los, todas três interações duplas dos fatores no modelo se comportam como [28] e o comportamento da interação tripla é semelhante, embora existam oito diferentes termos nas partes de [27] e não apenas quatro como mostrou-se aqui. É claro que a complexidade algébrica dos passos é maior do que o caso de classificação dupla. Apresentamos o resultado geral. É simples: numa classificação cruzada, de ordem r, com efeitos principais A, B, ..., R, substitui-se o componente erro por ele mesmo, como na classificação hierárquica; para o componente de interação de ordem mais elevada substitui-se:

$$\sigma^2_{AB...R} \qquad \text{por} \qquad \sigma^2_{AB...R} - \frac{\sigma^2_e}{N_e} \qquad [31]$$

e para qualquer outra interação ou componente de efeito principal $\sigma^2_{DE...L}$, onde DE...L é um subconjunto para cada 1, 2, ..., r-1 letras para A, B, ..., R, substitui-se

$$\sigma^2_{DE...L} \qquad \text{por} \qquad \sigma^2_{DE...L}\, \Pi\, (1 - g_\theta) \qquad [32]$$

onde θ pertence a todo efeito principal que cruza DE...L e g_θ é uma função operacional tal que multiplica σ^2 por g_θ acrescentando θ como subscrito de σ^2 e divide o resultado por N_θ. Por exemplo,

$$\sigma^2_A\, g_B = \sigma^2_{AB}/N_B \qquad \text{e} \qquad \sigma^2_{AB}\, g_C = \sigma^2_{ABC}/N_C.$$

Além disso, a multiplicação por g é simbólica (isto é, $g_A g_B = g_{AB}$), assim

$$\sigma^2_A\, g_B\, g_C = \sigma^2_{ABC}/N_B\, N_C \qquad \text{e} \qquad \sigma^2_A\, g_B\, g_C\, g_D = \sigma^2_{ABCD}/N_B\, N_C\, N_D.$$

Com g_Θ usado desta maneira, exemplos de [32] podem ser vistos na Tabela 4; isto é, numa classificação tripla cruzada, σ^2_A é substituido por:

$$\sigma^2_A \prod_{\Theta=B}^{C} (1-g_\Theta) = \sigma^2_A\, (1-g_B)\, (1-g_C) = (\sigma^2_A - \sigma^2_A\, g_B)\, (1-g_C) =$$

$$= \sigma^2_A - \sigma^2_A\, g_B - \sigma^2_A\, g_C + \sigma^2_A\, g_B\, g_C =$$

$$= \sigma^2_A - \sigma^2_{AB}/N_B - \sigma^2_{AC}/N_C + \sigma^2_{ABC}/N_B\, N_C$$

simultaneamente σ^2_{AB} é substituido por

$$\sigma^2_{AB}(1-g_C) = \sigma^2_{AB} - \sigma^2_{AB}\, g_C = \sigma^2_{AB} - \sigma^2_{ABC}/N_C$$

Os resultados da tabela 4 são para modelos que têm todas as interações possíveis entre eles. Quando um modelo não tem todas as interações que poderiam ser incluídas as esperanças dos quadrados médios para população finita são obtidos inicialmente encontrando seus valores em populações infinitas com todas as interações incluídas, depois fazendo as substituições acima e colocando as variâncias das interaçõs identicamente igual a zero.

5. COMBINAÇÃO DE CLASSIFICAÇÕES HIERÀRQUICA E CRUZADA

Agora estenderemos o resultado [32] de classificações cruzadas para modelos consistindo qualquer combinação de classificação hierárquica e cruzada. As regras [22] e [32], respectivamente, para classificações puramente hierárquica e cruzada, serão casos especiais para regras mais gerais.

Tomaremos como ponto inicial a classificação hierárquica.

Para γ hierárquico dentro de θ, seja $h_{\gamma:\theta}$ uma função operacional, semelhante a natureza de g_θ [32], mas tal que $h_{\gamma:\theta}$ multiplica somente

$$\sigma^2_\theta \qquad \text{e} \qquad \sigma^2_\theta \cdot h_{\gamma:\theta} = \sigma^2_\gamma / N_\gamma \tag{33}$$

Operacionalmente, o efeito de multiplicar σ^2_θ por $h_{\gamma:\theta}$ é acrescentar $\gamma:\theta$ ao subscrito de σ^2_θ e então "cancelar" os θ's porque θ ocorre à direita dos "dois pontos" em h e também em σ^2; o resultado, σ^2_γ, é dividido por N_γ, como em [33]. A vantagem desta notação, $h_{\gamma:\theta}$, será evidente na aplicação geral.

Para classificação hierárquica, a regra [22] pode ser escrita como a substituição de

$$\sigma^2_\theta \qquad \text{por} \qquad \sigma^2_\theta(1-h_{\gamma:\theta}) \tag{34}$$

onde γ é o fator imediatamente hierárquico dentro de θ. Isto também inclui a regra de trocar σ^2_e por ele mesmo porque $h_{\gamma:e} = 0$, desde que não existe fator hierárquico dentro do fator erro.

Para classificação cruzada, a regra [34] para a interação de ordem mais elevada é substituir:

$$\sigma^2_{AB\ldots R} \text{ por } \sigma^2_{AB\ldots R}(1-h_{e:AB\ldots R}) = \sigma^2_{AB\ldots R} - \frac{\sigma^2_e}{N_e} \qquad [35]$$

que é a [31]. A partir daí, σ^2_e vem da definição [33] na qual, é claro, e não é necessariamente o efeito principal mas pode ser, como aqui, uma interação.

Finalmente, o resultado geral [32] pode ser melhorado ao fazer o cálculo para classificação hierárquica efetuando sua multiplicação pela expressão $1 - h_{\gamma:\theta_{DE\ldots L}}$ para qualquer fator γ que é o fator imediatamente hierárquico dentro de $\theta_{DE\ldots L}$, onde $\theta_{DE\ldots L}$ é qualquer efeito principal D, E, ... ou L ou qualquer fator interação desses efeitos principais. Assim, para englobar todas as combinações das classificações hierárquicas ou cruzadas, incluindo o "fator" erro, generalizamos a regra seguinte.

Regra: Num modelo com fatores A, B, ..., R que tanto pode ser hierárquico quanto cruzado, substitui-se:

$$\sigma^2_{DE\ldots L} \text{ por } \sigma^2_{DE\ldots L}\, \Pi(1-g_\theta) \prod_\gamma \left(1-h_{\gamma:\theta_{DE\ldots L}}\right) \qquad [36]$$

onde θ pertence a todo efeito principal que cruza DE...L e γ é o fator hierárquico dentro de $\theta_{DE\ldots L}$.

Ao usar $\theta_{DE\ldots L}$ no subscrito de h, [36] estipula o termo erro como um fator hierárquico, como ilustrado em [35], e da mesma forma também prevê situações nas quais um fator precisa ser hierárquico dentro da interação de dois (ou mais) outros fatores. De qualquer modo, fatores hierárquicos são usualmente hierárquicos justamente dentro de fatores únicos e não interações deles, em cujo caso, com exceção de [31], o resultado geral [36] torna-se, substituir:

$$\sigma^2_{DE\ldots L} \text{ por } \sigma^2_{DE\ldots L}\ \Pi(1-g_\Theta)\ \prod_{\Theta=D}^{L}(1-h_{\gamma:\Theta}) \qquad [37]$$

onde Θ pertence a todo efeito principal que cruza DE...L.

Exemplos de [37] estão mostrados na tabela 5, nas três primeiras entradas. Assim:

σ^2_A é substituido por:

$$\sigma^2_A(1-g_B)(1-h_{P:A}) = (\sigma^2_A - \sigma^2_A\ g_B)(1-h_{P:A}) =$$

$$= \sigma^2_A - \sigma^2_{AB}/N_B - \sigma^2_P/N_P + \sigma^2_{PB}/N_P\ N_B,$$

σ^2_B é substituido por:

$$\sigma^2_B(1-g_A) = \sigma^2_B - \sigma^2_{AB}/N_A$$

e

σ^2_{AB} é substituido por:

$$\sigma^2_{AB}\ (1-h_{P:A}) = \sigma^2_{AB} - \sigma^2_{PB}/N_P.$$

Tabela 5 - Combinação de Classificações cruzadas e hierárquicas: substituições necessárias para obtenção das esperanças dos quadrados médios em modelos com populações finitas a partir de populações infinitas.

2 CRUZADOS E 1 HIERÁRQUICO
A e B CRUZADOS, e P HIERÁRQUICO DENTRO DE A
σ^2_A por $\sigma^2_A - \sigma^2_{AB}/N_B - \sigma^2_P/N_P + \sigma^2_{PB}/N_P\ N_B$
σ^2_B por $\sigma^2_B - \sigma^2_{AB}/N_A$
σ^2_{AB} por $\sigma^2_{AB} - \sigma^2_{PB}/N_P$
σ^2_P por $\sigma^2_P - \sigma^2_{PB}/N_B$
σ^2_{PB} por $\sigma^2_{PB} - \sigma^2_e/N_e$

2 CRUZADOS E 2 HIERÁRQUICO	
A e B CRUZADOS, e P DENTRO DE A e Q DENTRO DE B	A e B CRUZADOS, e P DENTRO DE Q DENTRO DE P
σ^2_A por $\sigma^2_A-\sigma^2_{AB}/N_B-\sigma^2_P/N_P+\sigma^2_{PB}/N_PN_B$	σ^2_A por $\sigma^2_A-\sigma^2_{AB}/N_B-\sigma^2_P/N_P+\sigma^2_{PB}/N_PN_B$
σ^2_B por $\sigma^2_B-\sigma^2_{AB}/N_A-\sigma^2_Q/N_Q+\sigma^2_{AQ}/N_AN_Q$	σ^2_B por $\sigma^2_B-\sigma^2_{AB}/N_A$
σ^2_{AB} por $\sigma^2_{AB}-\sigma^2_{AQ}/N_Q-\sigma^2_{PB}/N_P+\sigma^2_{PQ}/N_PN_Q$	σ^2_{AB} por $\sigma^2_{AB}-\sigma^2_{PB}/N_P$
σ^2_P por $\sigma^2_P-\sigma^2_{PB}/N_B$	σ^2_P por $\sigma^2_P-\sigma^2_{PB}/N_B-\sigma^2_Q/N_Q+\sigma^2_{QB}/N_QN_B$
σ^2_{PB} por $\sigma^2_{PB}-\sigma^2_{PQ}/N_Q$	σ^2_{PB} por $\sigma^2_{PB}-\sigma^2_{QB}/N_Q$
σ^2_Q por $\sigma^2_Q-\sigma^2_{AQ}/N_A$	σ^2_Q por $\sigma^2_Q-\sigma^2_{QB}/N_B$
σ^2_{AQ} por $\sigma^2_{AQ}-\sigma^2_{PQ}/N_P$	σ^2_{QB} por $\sigma^2_{QB}-\sigma^2_e/N_e$
σ^2_{PQ} por $\sigma^2_{PQ}-\sigma^2_e/N_e$	

A dedução dos outros resultados da tabela 5, segue de modo semelhante. É claro que quando não existem fatores hierárquicos, os termos h são zero e [36] e [37] se reduzem a [32] para modelos de classificação cruzada. Da mesma forma, quando não existem fatores cruzados, os termos g são zero e [36] e [37] se reduzem a [34] e consequentemente a [22] para modelos hierárquicos. Desta forma, [36] - e sua forma simplificada [37] - aplica-se a todos os modelos.

6. MODELOS MISTOS

A discussão precedente refere-se a modelos com efeitos aleatórios e às esperanças dos quadrados médios na análise de variância para dados balanceados e aos "quadrados médios" usados em análises de variância análogas para dados desbalanceados (HENDERSON'S [1953] Method 1), como discutido em SEARLE (1968). Nesses casos, não existem termos em μ nos quadrados médios. Similarmente, para modelos mistos o procedimento também se aplica ao quadrado médio que não contém termos de efeitos fixos.

Com dados balanceados, é suficiente que isto ocorra sempre em análise de variância para estimar componentes de variância, e assim essa regra para troca da esperança do quadrado médio de população infinita para população finita se aplica.

Com dados desbalanceados, a mesma situação aparece no Método das Constantes Ajustadas (HENDERSON'S [1953] Method 3), denominação motivada pelo fato de que algumas vezes os efeitos fixos em modelos de efeitos fixos são chamados de constantes. Este método não usa soma de quadrados da ANOVA, mas reduções nas somas de quadrados, devido ao ajustamento de constantes e os componentes de variância são estimados através do ato de igualar cada redução calculada ao seu valor esperado sob o modelo completo. SEARLE (1968) mostra que, neste método, sempre existem diferenças entre certos resíduos que não contém os efeitos fixos e assim são usados para estimar as variâncias não tendenciosamente. Para essas diferenças [35] também se aplica.

O procedimento geral [35] tem, portanto, aplicação ampla. Pode ser utilizado para dados balanceados e desbalanceados em modelos aleatórios ou mistos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, R.L. e BANCROFT, T.A. **Statistical Theory in Research.** McGraw-Hill, New York, 1952.

BENNETT, C.A. e FRANKLIN, N.L. **Statistical analysis in Chemistry and the Chemical Industry.** Wiley, New York, 1954.

BEZERRA, R.C.F. O problema de estimativas negativas. São Paulo, 1976. (Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística/USP).

CORNFIELD, J. e TUKEY, J.W. Average values of mean squares in factorials. **Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 27:** 907-49, 1956.

GAYLOR, D.W. e HARTWELL, T.D. Expected mean squares for nested classifications. **Biometrics**, Raleigh, 25: 427-30, 1969.

HENDERSON, C.R. Estimation of variance and covariance components. **Biometrics**, Raleigh, 9: 226-52, 1953.

HERBACH, L.H. Properties of Model II type analysis of variance tests. **Annals of Mathematical Statistics**, Baltimore, 30: 939-59, 1959.

HILL, B.M. Inference about variance components in the one-way model. **Journal of the American Statistical Association**, Baltimore, 60: 806-25, 1965.

LAMOTTE, L.R. On non-negative quadratic unbiased estimation of variance components. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, 68: 728-30, 1973.

Mc HUGH, R.B. e MIELKE, P.W. Jr. Negative variance estimates and statistical dependence in nested sampling. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, 63: 1000-3, 1968.

PEREIRA, C. Método para contornar o problema de estimativas negativas em componentes de variância. Piracicaba, 1983. (Mestrado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP).

PERES, C.A. e SALDIVA, C.D. , **Planejamento de Experimentos**. 5º SINAPE, SP., 1982.

RAO, C.R. Estimation of Variance and Covariance components in linear models. **Journal of The American Statistical Association**, Washington, 67: 112-15, 1972.

SEARLE, S.R. Another look at Henderson's methods of estimating variance components. **Biometrics**, Raleigh, 24: 749-88, 1968.

SEARLE, S.R. **Linear Models.** John Wiley, New York, 1971.

SEARLE, S.R. e FAWCETT, R.F. Expected mean square in variance components models having finite populations. **Biometrics,** Raleigh, 26: 243-54, 1970.

THOMPSON, W.A. JR. The problem of negative estimates of variance components. **Annals of Mathematical Statistics,** Baltimore, 33: 273-89, 1962.

TIAO, G.C. e TAN, W.Y. Bayesian analysis of random-effect models in the analysis of variance I. Posterior distribution of variance components. **Biometrika,** London, 52: 37-53, 1965.

WILK, M.B. e KEMPTHORNE, O. Some aspects of the analysis of factorial experiments in a completely randomized design. **Annals of Mathematical Statistics,** Baltimore, 27: 950-85, 1956.

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série G: Textos para Discussão

1. Carlos A. Crusius - Econometria e Verificabilidade de Teorias Econômicas - JAN/90.

2. Dinara W. Xavier Fernandez - Esperanças dos Quadrados Médios na Análise de Variância em Modelos com População Finita - JAN/90.

Universidade Federal do Rio Grande Sul
Reitor: Professor Tuiskon Dick

Instituto de Matemática
Diretor: Professor Aron Taitelbaum
Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Coordenador: Professor Jaime Bruck Ripoll
Secretária: Rosaura Monteiro Pinheiro

Os cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa
Série B: Trabalho de Apoio Didático
Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS
Série D: Trabalho de Graduação
Série E: Dissertações de Mestrado
Série F: Trabalho de Divulgação
Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Instituto de Matemática - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91.500 - Agronomia - POA/RS
Telefone: 36.11.59 ou 36.17.85 Ramal: 252