INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL VIA FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

Jaime Bruck Ripoll

-Trabalho de Apoio Didático-

Série B2/OUT/89

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL VIA FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

Jaime B. Ripoll

Introdução. Cálculo, disciplina obrigatória a qualquer curso de Graduação em Matemática e a muitos outros cursos tais como Engenharia, Física, Química etc, sofreu uma grande evolução nestes últimos tempos. O desenvolvimento de novas técnicas no ensino de matemática, aplicadas ao ensino de Cálculo, tornaram mais simples seu aprendizado, contribuindo para uma melhoria no ensino desta disciplina. No entanto, a crescente preocupação de tornar mais acessível seus conteúdos, tendo em vista, entre outros motivos, a crescente massificação do ensino universitário, levaram a certas simplificações conceituais as quais obscureceram idéias mais profundas e importantes do Cálculo. Tal fato pode ser visto em muitos livros frequentemente empregados como livros textos nos cursos de Cálculo. Como exemplo, menciono os livros *O Cálculo com Geometria Analítica* de L. Leithold, *Cálculo com Geometria Analítica* de E. W. Swokwski, *Calculo com Geometria Analítica* de G. F. Simmons.

Nestas notas examinamos algumas questões simples, mas fundamentais, da Teoria das Funções Reais de Uma Variável Real, e mostramos como as noções do Cálculo Diferencial surgem de maneira natural na tentativa de resolver estas questões. A novidade aqui, se é que existe alguma, não reside nos conteúdos matemáticos abordados, mas na maneira de abordá-los. Gostaria, através desta maneira de introduzir o Cálculo Diferencial, de tentar enfatizar uma certa atitude em relação ao ensino do Cálculo, ou mesmo ao ensino da Matemática de uma forma geral, que é a seguinte: a de apresentar a Matemática de uma forma viva e dinâmica, no sentido de que, por um lado, as teorias matemáticas tem como objetivo único o de resolver problemas formuláveis em linguagem matemática, e de que, por outro lado, os problemas que a mesma tenta solucionar não tem, em geral, uma reposta completa nas teorias matemáticas atuais e que cada caso muitas vezes exige soluções proprias. Por exemplo, consideremos a seguinte situação bastante típica do Cálculo Diferencial: o traçado do gráfico de uma dada função. Ao procurarmos determinar o gráfico de uma dada função via o Cálculo Diferencial, é claro que, para começar, tal função deve ser derivável. Isto em si já é um problema pois muitas vezes as funções com as quais lidamos não são nem mesmo contínuas. Mas ainda que uma tal função seja derivável, o procedimento usual é o de se determinar os pontos críticos desta, o que é feito calculando-se sua derivada e igualando-a a zero. Ocorre que, em geral, uma equação do tipo $f(x) = 0$ tem mais chance de não ser resolvida do que de ser resolvida. Por exemplo, se f é um polinômio, tal equação tem uma solução explícita, obtida através de uma fórmula geral que depende apenas do grau de f, se este grau for menor ou igual a 4. Se o grau de f for maior do que 4 esta provado que nem sempre existe uma tal fórmula (por meio de radicais) e o problema de determinarmos as raizes de $f(x) = 0$ pode ser extremamente complicado.

As questões da Teoria das Funções Reais de Uma Variável Real que escolhemos para introduzir noções do Cálculo Diferencial não foram as que originalmente ocasionaram o seu surgimento. Entretanto, são questões que, por um lado, através do Cálculo Diferencial tem um tratamento sistemático e que conduz à bons resultados. Por outro lado, são questões atuais, no sentido de que ainda são motivo de preocupação dos matemáticos, e que se formulam de maneira simples através da linguagem da Teoria dos Conjuntos (Teoria das Funções).

Função Real de Uma Variável Real (f.r.v.r.).

Uma função real de uma variável real (f.r.v.r) é uma função que esta definida em um subconjunto dos números reais e que toma valores nos números reais. Usamos a notação $f:A \longrightarrow R$ para indicar uma função real f definida no subconjunto A dos números reais. Escreveremos tambem $y = f(x)$, $x \in A$, para explicitar as variáveis usadas para descrever f.

Funções reais de uma variável real podem ter sua origem em muitos problemas que não são necessariamente da matemática, e podem surgir também a partir de problemas exclusivamente teóricos dentro da própria matemática. Não pretendemos nestas notas apresentar situações onde as funções aparecem, mas apenas estudar suas propriedades.

Dada uma função real $f:A \longrightarrow R$, desejamos em geral obter uma descrição desta função, o que consiste, na maioria das vezes, em responder questões do seguinte tipo:

a) Existem valores extremos de f ? Quais são eles ?

b) Qual o gráfico de f ?

c) Como é a variação de f comparada a outras funções?

Estas e muitas outras questões, dependendo, por exemplo, do fenômeno que uma dada função possa estar representando, surgem frequentemente e cabe em geral ao matemático tentar responde-las.

Nestas notas, vamos nos ater unicamente a questão do traçado do gráfico de uma f.r.v.r.. Muitas técnicas podem ser utilizadas na obtenção do gráfico (ou pelo menos o esboço deste) de uma f.r.v.r. Por exemplo, estudando-se propriedades de simetria, periodicidade, paridade das f.r.v.r. obtemos muitas vezes informações valiosas neste sentido. Da mesma forma, técnicas que nos permitem inferir sobre o gráfico de uma dada f.v.r.v. a partir do conhecimento do gráfico de uma outra f.r.v.r. são técnicas importantíssimas. É o caso de, por exemplo, conhecido os gráficos de f.r.v.r $y = f(x)$ e $y = g(x)$, construir os gráficos de $y = af(bx+c)+d$, $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = (f(x))^2$ etc.

Tais técnicas são importantíssimas e podem (na verdade devem) ser ensinadas nos cursos regulares de Cálculo. Nestas notas, por questões óbvias de tempo e espaço, nos ateremos unicamante as técnicas diretamente ligadas a teoria do Cálculo Diferencial.

É conveniente, para efeitos didáticos, dividirmos as f.r.v.r em duas classes:

Funções simples x funções não simples.

Uma função $y = f(x)$ é dita simples quando $f(x)$ é definida a partir de uma única expressão envolvendo composição, soma, multiplição, divisão, radiciação e subtração de funções elementares. Por funções elementares compreendemos as funções polinômiais, racionais, trigonométricas, logaritmicas, exponênciais e suas inversas. Qualquer outra função será chamada de função não simples.

Exemplos de funções simples:

a) $f(x) = \text{sen}(x^2 + e^{2^x})$

b) $f(x) = (\ln(\text{tg}x + \sqrt{x}-1))^{0,5}$

c) $f(x) = \arccos(3x-5)$

Exemplos de funções não simples:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in [-3,-1) \\ x+2 & \text{se } x \in [-1,o) \\ o & \text{se } x = o \\ \cos x & \text{se } x > o \end{cases}$$

b) Funções dadas na forma implícita $(F(x,y) = o)$ PODEM ser não simples.

Estaremos inicialmente interessados no estudo das funções simples.

A maneira mais direta para tentarmos traçar o gráfico de uma f.r.v.r consiste na construção de tabelas de dupla entrada, onde são atribuídos valores a variável independente x e, através da definição da função, são obtidos os respectivos valores da variável dependente y. Fica assim determinado um conjunto finito de pares ordenados que nos indica a forma aproximada do gráfico da função. Não podemos perder de vista entretanto à limitação de um tal método. Veja, por exemplo, que dado um número finito qualquer de pontos do plano existem infinitas funções polinômiais que passam por estes pontos.

Questões não triviais podem surgir na hora de confeccionarmos uma tabela de dupla entrada, questões estas que surgem no momento de escolhermos os valores a serem atribuídos a variável independente x. Uma entre elas é o da confecção de tabelas para valores próximos a valores que não estão no domínio da função. Abordaremos esta questão em detalhes no que se segue.

Domínio formal de uma função simples.

Dada uma função simples $y = f(x)$, o domínio formal de f, denotado por D(f), e o conjunto de valores de x que tornam com sentido a expressão que define f.

Exemplos.

a) $f(x) = \text{sen}(\ln(x) + \frac{1}{x-1})$ $D(f) = (0,1) \cup (1,+\infty)$

b) $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ $D(f) = R - \{0\}$.

Fronteira do domínio formal de uma função.

Seja $y = f(x)$ uma função simples e seja D(f) o domínio formal de f. Dizemos que um número real $a \notin D(f)$ esta na fronteira do domínio formal de f se, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in D(f)$ tal que $|a-x| < \epsilon$.

No caso da f dada no exemplo a acima, a fronteira do domínio formal de f é formada pelos pontos 0 e 1 e, no exemplo b, o ponto 0.

Na confecção de tabelas de dupla entrada de funções simples, torna-se indispensável o estudo da função para pontos próximos a pontos da fronteira do seu domínio formal. Por exemplo, se o número 0 (zero) é ponto da fronteira do domínio formal de uma função $y = f(x)$, certamente não podemos calcular f(0). No entanto, podemos calcular f para valores de x muito próximos de 0, digamos f(0,01), f(0,001), f(0,0001),..., f(0,0...01), etc (ou, eventualmente, os simétricos destes valores).

A necessidade de fazermos o estudo de uma f.r.v.r em pontos próximos a pontos da fronteira do seu domínio formal decorre de que, nestes pontos, o comportamento da f.r.v.r. é, "a priori", completamente imprevisível. Sendo um pouco mais preciso: dada uma função simples $y = f(x)$, se a é um ponto do domínio formal de f, então, quando calculamos f para valores de x próximos de a, uma única coisa pode acontecer, a saber, o valor de f(x) se aproxima de f(a) (isto é um fato que voltaremos a comentar mais tarde). No entanto, se a é um ponto da fronteira do domínio formal de f, quando x se aproxima arbitrariamente de a os seguintes casos podem ocorrer:

a) O valor de f(x) tende a um número real c

b) O valor de f(x) tende a infinito ($+\infty$ ou $-\infty$)

c) O valor de f(x) permanece oscilando, não tendendo a nenhum valor específico (incluindo $+\infty$ e $-\infty$)

Exemplos destas três situações ocorrem, respectivamente, com as funções

a) $$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

b) $$f(x) = \frac{1}{x}$$

c) $$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

sendo a = o nos três casos.

Pode-se observar que, para analizarmos o comportamento de uma dada função simples para pontos próximos a pontos da fronteira do seu domínio formal, precisamos necessariamente recorrer a um processo de *limite*, já que não podemos calcular diretamente o valor da função nos pontos da fronteira. Tal noção pode ser formalizada da seguinte forma:

Definição de Limites.

Seja $y = f(x)$ uma função simples e seja a um ponto da fronteira do domínio formal de f. Dizemos que *L é o limite lateral a direita da f em a*, e escrevemos simplificadamente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se f esta definida para valores de x próximos de a e maiores do que a, e se, para todo $\epsilon > o$, existe $\delta > o$ tal que $|f(x)-c| < \epsilon$ para todo x tal que $o < x-a < \delta$.

Dizemos que *L é o limite lateral a esquerda da f em a*, e escrevemos simplificadamente

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se f esta definida pra valores de x próximos de a e menores do que a, e, para todo $\epsilon > o$, existe $\delta > o$ tal que $|f(x)-c| < \epsilon$ para todo x tal que $o < a-x < \delta$.

Quando f tem limites laterais à esquerda e à direita em a, e quando tais limites tem o mesmo valor, digamos L, dizemos que *L é o limite da f em a*, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Limites no infinito

Para funções que estão definidas em intervalos do tipo $(a,+\infty)$ ou $(-\infty,a)$ é importante estudar-se também o que acontece com a função para valores arbitrariamente grandes (pequenos) da variável independente da função. Nestes casos também é necessário recorrer-se a um processo de limite, constituindo os chamados limites no infinito. Não trataremos com mais detalhes do que estes aqui a questão de limites no infinito. Desnecessário dizer que em cursos regulares de Cálculo tal tópico é importante e deve ser estudado cuidadosamente.

Observação. Dada uma função simples $y = f(x)$ e dado domínio de f, pode-se provar que $f(x)$ se aproxima de $f(a)$ a medida que x se aproxima de a, como já havíamos comentado antes. Assim, a noção de limite de uma função simples se estende para pontos do seu domínio formal. Para estes casos, temos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Recapitulando, dada uma função simples $y = f(x)$ e dado um ponto a do domínio formal ou da fronteira do domínio formal de f, temos:

$$(*)\ \lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} f(a) & \text{se a pertence ao domínio formal de f} \\ ? & \text{se a pertence a fronteira do domínio de f} \end{cases}$$

Na tabela abaixo listamos alguns limites fundamentais. A partir destes limites, e usando as propriedades dos limites (não mencionadas aqui), podemos calcular outros limites possivelmente mais complicados. Não vamos demonstrar nestas notas a validade de tais limites pois nós estenderíamos demais no assunto.

Do ponto de vista didático, é conveniente que o professor de cálculo trabalhe experimentalmente tais limites com os alunos, ou seja, obtendo, através de cálculos explícitos, os valores da função para valores da variável independente próximos dos pontos onde se quer calcular o limite.

LIMITES FUNDAMENTAIS

1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ 6) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$

7) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_1 x+b_0} = \frac{a_n}{b_n}$, se $b_n \neq 0$

Continuidade de uma função real de uma variável real.

A noção de limite introduzida para funções simples se estende de maneira análoga para f.r.v.r. quaisquer. No entanto, a situaçao (*) descrita na observação da página 8 não é mais necessariamente verdadeira. Isto é, dada uma f.r.v.r. $y = f(x)$ e dado um ponto a do domínio de f, pode ocorrer que $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. A função abaixo é um exemplo de tal situação.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x < 0 \\ 1 \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

Observa-se que $f(0) = 1$ mas que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. O gráfico de f mostra que f tem uma "descontinuidade" em $x = 0$. Isto sugere a seguinte definição.

Uma função real de uma variável real $y = f(x)$ é dita *contínua* em um ponto a do seu domínio se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Observação: Se f esta definida apenas para valores maiores ou iguais a a, teremos que substituir o limite acima pelo limite lateral a direita da f em a. Similarmente pelo limite lateral a esquerda se f esta definida apenas para valores menores ou iguais a a.

Diremos que $y = f(x)$ é uma *função contínua* se f for contínua em todos os pontos do seu domínio. O resultado seguinte já foi mencionado anteriormente com outras palavras:

Teorema. Toda função simples é uma função contínua.

A noção de continuidade é uma noção extremamente importante em matemática, aparecendo como hipótese em muitos teoremas fundamentais do Cálculo, tais como o Teorema do Valor Intermediário, Teorema sobre a Existência de Máximos e Mínimos e outros. Em cursos regulares de Cálculo, tais resultados devem ser trabalhados em detalhes e profundidade. Nosso intuito em introduzir a definição de continuidade aqui nestas notas certamente não é com o objetivo de chegar a tais resultados. A razão é a seguinte: nos cursos usuais de Cálculo, a noção de continuidade e uma das noções inciais dos programas, normalmente introduzida logo após a noção de limite. Entretanto, nesta etapa do desenvolvimento matemático do aluno, as f.r.v.r. que se dispõe para trabalhar são unicamente as elementares, que essencialmente são funções simples. Para estas funções, a noção de continuidade é completamente desnecessária (conforme Teorema acima) e, quando introduzida neste contexto, é no mínimo ridicula.

É claro que tendo sido introduzida a noção de continuidade, é indispensável que se dêem exemplos de coisas não contínuas. O que se faz então é "colar" duas ou mais funções simples de maneira "descontínua", e esta aí o contra-exemplo. Isto deve soar ao aluno (pelo menos comigo assim aconteceu) como um "truque" do professor. De fato, nesta etapa do desenvolvimento matemático do aluno pouca coisa pode ser feita a mais do que isso.

O que eu proponho então é uma certa "honestidade" do professor, no sentido de colocar a situação tal qual ela é: introduzindo as funções definidas por diversas expressões a partir das funções simples e depois então, em constatando através de exemplos os casos "patológicos" (descontínuos) que podem aparecer, introduzir, por esta razão, a noção de continuidade de uma f.r.v.r..

A análise comparativa entre funções como instrumento para o traçado local do gráfico de uma dada função a partir de um ponto do seu domínio.

Ao tentarmos esboçar o gráfico de uma dada função real de uma variável real, próximo a um dado ponto do seu domínio, podemos nos servir do conhecimento do gráfico de outras funções provavelmente mais simples, que já tem sua descrição estabelecida.

Consideremos a seguinte situação: seja $y = f(x)$ uma função de gráfico conhecido e a um ponto do domínio de f. Seja $y = g(x)$ uma função a ser analizada e que contém a em seu domínio. Suponhamos primeiro que $c=f(a)=g(a)$. Então, a questão que vamos procurar responder, num estudo comparativo entre f e g a partir de a, e se $f(x) > g(x)$ para $x>a$, x próximo de a, ou se $f(x) < g(x)$ para $x > a$, x próximo de a. Se a primeira situação ocorrer, concluiremos que o gráfico de g esta acima do gráfico de f a partir de a, para valores de x próximos de a. Na segunda situação, o gráfico de g estará abaixo do gráfico de f a partir de a, para x próximo de a.

O resultado seguinte mostra como podemos nos servir de limites para atacar situações como as introduzidas acima.

Teorema. Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funções reais de uma variável real e seja a um ponto do domínio de f e de g. Suponhamos que f e g são contínuas em a e que $c = f(a) = g(a)$. Suponhamos também que $f(x) > c$

para $x > a$ *e que exista o limite*

$$lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - c}{g(x) - c},$$

e seja L tal limite. Então:

a) se $L > 1$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > g(x)$ *se* $0 < x-a < \delta$

b) se $0 < L < 1$, *existe* $\delta > o$ *tal que* $f(x) < g(x)$ *se* $0 < x-a < \delta$

Prova.

Caso a. Como

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-c}{g(x)-c} = L > 1,$$

existe $\delta > o$ tal que

$$\frac{f(x)-c}{g(x)-c} > 1$$

se $o < x-a < \delta$. Como $f(x)-c > o$, devemos ter $g(x)-c > o$. Segue-se que $f(x)-c > g(x)-c$, donde $f(x) > g(x)$ se $o < x-a < \delta$, o que prova o teorema neste caso.

Caso b. Demonstração análoga.

Teorema. Sejam $y = f(x)$ *e* $y = g(x)$ *funções como no Teorema anterior. Suponha que* $f(x) > c$ *para* $x < a$ *e que exista o limite*

$$lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - c}{g(x) - c}$$

e seja L tal limite. Então,

a) se $L > 1$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > g(x)$ *para* $0 < a-x < \delta$

b) se $0 < L < 1$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < g(x)$ *para* $0 < a-x < \delta$.

Prova. Semelhante a prova do teorema anterior.

Quando quisermos aplicar os teorema acima em um ponto a do domínio de funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ no caso que tenhamos $f(a)$ - $g(a)$, nós devemos transladar a função f de tal modo que o ponto $(a, f(a))$ passe a coincidir com o ponto $(a,g(a))$. Isto consiste em introduzir uma nova função h dada por $h(x) = f(x) - f(a) + g(a)$. Podemos comparar agora, através dos Teoremas acima, a função g com a função h, já que a pertence ao domínio de ambas as funções e que $h(a) = g(a)$.

Exemplos

1) Consideremos as funções $f(x) = x+2$ e $g(x) = 2e^{x}$. Observe que $f(0) = g(0) = 2$. Vamos mostrar que o gráfico de $g(x)$ esta acima do gráfico de $f(x)$ para valores de x maiores do que 0 mais próximos de 0. De fato:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-2}{g(x)-2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{x}-2}{x+2-2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2(e^{x}-1)}{x} = 2 > 1.$$

É interessante observar que, neste caso, temos $f(x) > g(x)$ para todo $x > 0$. Entretanto, isto não é, de maneira alguma, um fato geral, como mostrara o exemplo seguinte.

2) Vamos verificar que a função $y = \ln x$ esta acima de $y = \sqrt{x} - 1$ a partir de x igual a 1. De fato: calculemos

$$c = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}-1}.$$

Façamos $x = y + 1$. Então, quando $x\to 1^+$, $y\to o^+$, de forma que

$$c = \lim_{y\to o^+}\frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y+1} - 1} = \lim_{y\to o^+}\frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y+1} -1}\times\frac{\sqrt{y+1} +1}{\sqrt{y+1} +1} =$$

$$\lim_{y\to o^+}\frac{\ln(y+1)}{y}\times(\sqrt{y+1} +1) = 2$$

Observamos que neste caso temos $\ln x > \sqrt{x} - 1$ apenas para valores de x maiores do que 1 mas próximos de 1. Pode-se provar que existe $x_0 > 1$ tal que $\ln x < \sqrt[4]{x} - 1$ para todo $x > x_0$.

Derivada de uma f.r.v.r.

A noção de derivada de uma f.r.v.r pode ser motivada atraves de considerações físicas, geométricas e, também, por considerações dentro da própria matemática. Nestas notas daremos uma motivação com razões puramente matemáticas, dentro da linha que estamos desenvolvendo nestas notas.

Em problemas anteriores, vimos a necessidade de calcularmos limites do tipo:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-c}{g(x)-c} \qquad \left(\text{ou } \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-c}{g(x)-c}\right)$$

Limites como este podem ser reduzidos a limites mais básicos, possivelmente mais elementares, através do seguinte procedimento:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-c}{g(x)-c} = \lim_{x \to a^+} \frac{\frac{f(x)-c}{x-a}}{\frac{g(x)-c}{x-a}} = \frac{\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-c}{x-a}}{\lim_{x \to a^+} \frac{g(x)-c}{x-a}}$$

desde que ambos os limites do denominador e numerador da última expressão a direita existam e que o do denominador seja não nulo.

Dada uma f.r.v.r $y = f(x)$ e dado um ponto a do domínio de f, o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

quando existe, é dito *a derivada a direita da f em a*, sendo denotado por $f'_+(a)$. O limite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

quando existe, é dito *a derivada a esquerda da f em a*, sendo denotado por $f'_-(a)$. Quando ambos o limites acima existem e quando $f'_+(a) = f'_-(a)$ dizemos que *f é derivável em a* sendo que $f'(a) \equiv f'_+(a)$ é dito *a derivada da f em a*. Neste caso, temos

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Decorre do que vimos antes que se $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são funções deriváveis em um ponto comum a de seus domínios e que se $c = f(a) = g(a)$, então:

$$(**) \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-c}{g(x)-c} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

desde que $g'(a) \neq 0$.

O conceito de derivada é o conceito mais importante do Cálculo Diferencial. Entretanto, da maneira como nós o introduzimos, que é uma maneira puramente formal, não fica aparente a importância deste conceito. Nesta altura, os argumentos a favor da derivada são que as derivadas das funções simples podem ser facilmente determinadas a partir das propriedades dos limites e dos limites fundamentais. A partir daí, tendo-se obtido algumas propriedades operatorias da derivação tais como as regras da soma, produto, quociente e a regra da cadeia, obtém-se uma maneira sistemática de resolvermos limites do tipo $\lim_{x \to a}(f(x)-c)/(g(x)-c)$ através da formula (**).

Cabe enfatizar, entretanto, que o conceito de derivada é um conceito muito mais amplo e que outras propriedades importantes do conceito de derivada relacionadas a Física, Geometria etc devem ser estudados em cursos regulares de Cálculo.

Tangentes e derivadas

É costume nos cursos regulares de Cálculo introduzir-se a noção de tangente ao gráfico de uma f.r.v.r através do limite de retas secantes ao gráfico da função. Nestas notas apresentamos uma outra maneira, talvez um pouco mais complicada se dada diretamente, mas que torna-se bem simples e natural a partir da prática desenvolvida na seção anterior.

Seja $y = f(x)$ uma f.r.v.r e seja a um ponto do domínio de f. Vamos definir tangente a direita ao gráfico de f em a. Para tal, consideremos o feixe de retas F passando pelo ponto $(a, f(a))$. Sejam

$S = \{ r \in F \mid r$ esta acima do gráfico de f para x maior do que a mas próximo de $a\}$

$T = \{ r \in F \mid r$ esta abaixo do gráfico de f para x maior do que a mas próximo de $a\}$.

Tomemos uma reta r de S. Se a função f tiver um bom comportamento em a (daqui a pouco veremos o que isto quer dizer), fazendo rotar r em torno do ponto (a,f(a)), haverá um momento em que r saira de S e entrara em T. A reta que corresponde a este momento de transição, a esta posição limite de mudança, digamos r_0, nos definiremos como *tangente a direita a f em a.*

Vamos obter uma descrição mais explicita de r_0. Para tal, primeiro notemos que toda reta r de F tem equação da forma

$$y = \alpha x + f(a) - \alpha a$$

para algum $\alpha \in R$, que é a declividade da reta. Definimos:

$$S' = \{ \alpha \in R \mid \text{a reta de equação } y = \alpha x + f(a) - \alpha a \text{ pertence a } S\}$$

$$T' = \{ \alpha \in R \mid \text{a reta de equação } y = \alpha x + f(a) - \alpha a \text{ pertence a } T\}$$

Então, o valor de α que corresponde a reta r_0, digamos α_0, e caracterizada pela condição:

para todo $\epsilon > 0$, existem $\alpha \in S'$ e $\alpha' \in T'$ tais que $|\alpha-\alpha_0|<\epsilon$ e $|\alpha'-\alpha_0|<\epsilon$.

Da mesma maneira, podemos definir *tangente a esquerda a f em a.* Quando existem e coincidem as tangentes à esquerda e a direita da f em a, então fica bem definida *a reta tangente a f em a.*

O resultado seguinte nos relaciona tangente a direita e derivada a direita.

Teorema. Seja $y = f(x)$ uma f.r.v.r. e seja a um ponto do domínio de f. Então f tem derivada a direita em a se e somente se f tem tangente a direita em a. Além disso, tendo f tangente a direita em a, vale a fórmula

$$\alpha_0 = f'_+(a)$$

onde $y = \alpha_o x + f(a) - \alpha_o a$ é a equação da tangente a direita da f em a.

Prova:

Suponhamos que f tenha derivada a direita em a. Seja $\alpha_o = f'_+(a)$. Vamos provar que a reta r_o de equação $y = \alpha_o x + f(a) - \alpha_o a$ é a equação da tangente a direita da f em a. Da definição de derivada a direita, temos:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha_o.$$

Seja $\epsilon > o$. Então existe $\delta > o$ tal que

$$-\epsilon/2 + \alpha_o < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \epsilon/2 + \alpha_o$$

se $o < x-a < \delta$. Como $x-a>o$, obtemos

$$(x-a)(\alpha_o-\epsilon/2) < f(x) - f(a) < (x-a)(\alpha_o + \epsilon/2)$$

donde

$$(\alpha_o-\epsilon/2)x + f(a)- (\alpha_o- \epsilon/2)a < f(x) < (\alpha_o+\epsilon/2)x + f(a) - (\alpha_o+\epsilon/2)a$$

se $o < x-a < \delta$.

Desta forma, tomando $\alpha = \alpha_o+\epsilon/2$ e $\alpha' = \alpha_o - \epsilon/2$, vemos, pelas desigualdades acima, que as retas de equações

$$y = \alpha x + f(a) - \alpha a$$

e

$$y = \alpha' x + f(a) - \alpha' a$$

pertencem a S e a T, respectivamente. Além disso, obtemos

$$|\alpha - \alpha_o| = \epsilon/2 < \epsilon$$

e

$$|\alpha' - \alpha_o| = \epsilon/2 < \epsilon$$

o que mostra que α_o satisfaz a condição para que a reta $y=\alpha_o x + f(a)-\alpha_o a$

seja de fato a equação da tangente a direita da f em a.

Reciprocamente, suponhamos que f tenha tangente a direita em a. Seja $y = \alpha_o x + f(a) - \alpha a$ a equação de tal tangente. Seja $\epsilon > 0$. Então existe α e α' tais que as retas $y = \alpha x + f(a) - \alpha a$ e $y = \alpha' x + f(a) - \alpha' a$ estão acima e abaixo do gráfico de f, respectivamente, para x suficientemente proximo de a, mas maior do que, sendo que $|\alpha - \alpha_o| < \epsilon$ e $|\alpha' - \alpha_o| < \epsilon$. Voltando agora pelas desigualdades obtidas acima, concluiremos que f é derivável em a a direita e que $f'_+(a) = \alpha_o$. □

Resultado análogo ao anterior vale para derivada a esquerda e tangente a esquerda. Juntando ambos, obtemos o seguinte:

Corolário. Seja $y = f(x)$ uma f.r.v.r. e seja a um ponto do domínio de f. Então f é derivável em a se e somente se f tem tangente em a. Além disso, se f tem tangente em a , vale a fórmula

$$\alpha_o = f'(a)$$

e $y = \alpha_o x + f(a) - \alpha_o a$ e a equação da reta tangente a f em a.

——//——

Jaime B. Ripoll
Universidade Federal do R. G. do Sul
Instituto de Matematica
Av. Bento Goncalves 9500
91500 - Porto Alegre - RS

Série B: Trabalho de Apoio Didático

01. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89.

02. Jaime B. Ripoll - Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções Reais de Uma Variável Real - OUT/89.