UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÉRIE A: TRABALHO DE PESQUISA

MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA RESTRITA PARA ESTIMAÇÃO DE COMPONENTES DE VARIÂNCIA

DINARA WESTPHALEN XAVIER FERNANDEZ

SÉRIE A, Nº 33
PORTO ALEGRE, SETEMBRO DE 1993

ÍNDICE

Página

1. INTRODUÇÃO 1

2. O MODELO 3

3. OS ESTIMADORES 9

4. PROCEDIMENTO DE CÁLCULO 19

4.1. A TRANSFORMAÇÃO W 19

4.2. ALGORITMOS 27

5. O PROGRAMA 33

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 34

7. ANEXO 35

Agradecemos ao nosso bolsista
Ivo Gregório Lima Wagner
pelo trabalho de programação.

RESUMO

A estimação de componentes de variância e covariância por Máxima Verossimilhança Restrita (MVR) começou a ser desenvolvida por vários pesquisadores para específicos modelos balanceados de Análise de Variância e, mais tarde foi estendida para todo modelo balanceado de ANOVA.Foi colocado em sua forma mais geral para modelos não balanceados por PATTERSON e THOMPSON (1971). Esses autores dividiram a função de verossimilhança, sob condições de normalidade, em duas partes, de modo que a maximização da parte livre dos efeitos fixos fornecesse os estimadores de Máxima Verossimilhança (MV) para os componentes de variância e a outra fornecesse os estimadores para o efeito fixo.

O procedimento que descrevemos foi proposto por CORBEIL e SEARLE (1976) e é aplicável a modelos mistos não balanceados para qualquer mistura de efeitos fixos e aleatórios. Isto é conseguido pela adaptação da transformação utilizada por PATTERSON e THOMPSON (1971) e pela adaptação da transformação descrita por HEMMERLE e HARTLEY (1973), que simplifica grandemente o cálculo dos estimadores de MVR .

SUMMARY

The estimation of the variance-covariance components by Restricted Maximum Likelihood (REML) started to be developed by several researches to some balanced models of Analysis of Variance (ANOVA). Later on it was extended to all balanced models of ANOVA.

PATTERSON e THOMPSON (1971) presented it in a general form for unbalanced models. They decomposed the likelihood under normality in two parts, one being free of the fixed effects.

We described a procedure proposed by CORBEIL e SEARLE (1976), which applies to unbalanced mixed models for any mixture of fixed and random effects.

MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA RESTRITA PARA ESTIMAÇÃO DE COMPONENTES DE VARIÂNCIA

1. INTRODUÇÃO

Consideremos o modelo misto da análise de variância representado por um vetor de observações y tal que

$$y = X\mu + U\beta + e \qquad [1]$$

onde

μ é um vetor dos efeitos fixos;

β é um vetor dos efeitos aleatórios;

X e U as respectivas matrizes do delineamento e

e é um vetor de erros tendo variância σ^2.

As diferentes variâncias dos elementos de β e de e são os componentes de variância do modelo.

O procedimemento de MV de HARTLEY e RAO (1967) produz a estimação simultânea dos efeitos fixos e dos componentes de variância pela maximização de y em relação a cada elemento de μ e em relação a cada componente de variância.

Em contraste, CORBEIL e SEARLE (1976) desenvolveram estimadores (e suas variâncias para amostras grandes) que são livres dos efeitos fixos, no sentido de que a verossimilhança não contém μ; isto é, maximizaram a verossimilhança sobre um conjunto restrito de parâmetros. Esta é uma generalização do procedimento sugerido por THOMPSON (1962) que considerou o problema somente para dados balanceados e para modelos completamente casualizados. O procedimento aqui desenvolvido é aplicável para dados não balanceados gerais (incluindo, é claro, dados balanceados, os quais são, justamente, um caso especial), e é também aplicável a modelos mistos para qualquer mistura de efeitos fixos e aleatórios. Isto é conseguido pela adaptação da transformação utilizada por PATTERSON e THOMPSON (1971) que procedeu à partição da função de verosimilhança em duas partes,sendo uma delas inteiramente livre dos efeitos fixos e sua maximização resulta no que chamamos de estimadores de máxima verossimilhança restrita (MVR) para os componentes de variância. Foi feita uma adaptação da transformação descrita por HEMMERLE e HARTLEY (1973) que simplifica grandemente o cálculo dos estimadores de HARTLEY e RAO, auxilia o cálculo dos estimadores de MVR e também simplifica a dedução de suas variâncias para amostras grandes. Finalmente, maximizando a parte da verossimilhança não utilizada pelos estimadores de MVR, fornecemos a estimação dos efeitos fixos, baseados nos estimadores de MVR.

Os estimadores de MVR não são somente invariantes para os efeitos fixos do modelo, mas são também livres das estimativas dos efeitos fixos. Além disso, em muitos casos de dados balanceados (igual número de observações em subclasses) investigados, os estimadores de MVR são idênticos aos familiares estimadores de análise de variância (ANOVA) para tais dados. Os estimadores de MV de HARTLEY e RAO não possuem esta propriedade e ela é considerada em razão das propriedades ótimas dos estimadores de ANOVA para componentes de variância para dados balanceados.

2. O MODELO

Seja o modelo [1] caracterizado por

$$y = X\,\mu + U_1\,b_1 + U_2\,b_2 + \ldots + U_c\,b_c + e \qquad [2]$$

onde

y é um vetor de n obervações;

μ é um vetor de k constantes desconhecidas (efeitos fixos do modelo);

X é uma matriz de incidências n x k, de rank coluna completo, correspondente a μ e com $k < n$;

U_i é uma matriz do delineamento n x m_i associada com o i-ésimo fator aleatório, com $\sum_{i=1}^{c} m_i + k < n$;

b_i é um vetor de m_i variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas segundo $N(0;\sigma_i^2)$ com os b_i´s sendo mutuamente independentes;

e é um vetor de n variáveis aleatórias i.i.d. $N(0;\sigma^2)$ e independente dos b_i´s.

Portanto, y tem distribuição Normal multivariada com média $E(y) = X\,\mu$ e

$$\text{variância} \quad Var(y) = V = H.\sigma^2 \qquad [3]$$

onde

$$H = \sum_{i=1}^{c} \gamma_i\, U_i\, U_i' + I_n \qquad \text{para} \qquad \gamma_i = \sigma_i^2 / \sigma^2 \qquad [4]$$

pois

$$\begin{aligned} V(y) &= V(\,X\,\mu + U_1\, b_1 + \ldots U_c\, b_c + e\,) = \\ &= U_1\, V(b_1)\, U_1' + \ldots + U_c\, V(b_c)\, U_c' + V(e) = \\ &= U_1\, \sigma_1^2\, U_1' + \ldots + U_c\, \sigma_c^2\, U_c' + \sigma^2\, I = \\ &= \sigma^2 \left[U_1\, \sigma_1^2/\sigma^2\, U_1' + \ldots + U_c\, \sigma_c^2/\sigma^2\, U_c' + \sigma^2/\sigma^2\, I \right] = \\ &= \sigma^2 \left[U_1\, \gamma_1\, U_1' + \ldots + U_c\, \gamma_c\, U_c' + I \right] = \\ &= \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^{c} \gamma_i\, U_i\, U_i' + I \right] = \sigma^2\, H\,. \end{aligned}$$

μ é um vetor do número máximo de funções estimáveis linearmente independentes dos efeitos fixos. O mais simples desses vetores tem como seus elementos as médias populacionais de todas as células de efeitos fixos que contém dados. A correspondente X de [2] tem então uma forma simples.

Definimos y como sendo as observações

ordenadas tal que todas elas, dentro de cada célula dos fatores de efeitos fixos, seguem sequencialmente um e outro. Se existem k dessas células contendo dados, com a t-ésima delas tendo $n_t \neq 0$ observações, então

$$X = \begin{bmatrix} 1_{n_1} & & & \emptyset \\ & 1_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & 1_{n_k} \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^{k}{}^{+} 1_{n_t} \qquad [5]$$

onde 1_{n_t} é um vetor de n_t uns e Σ^+ representa uma soma direta de matrizes.

Uma ilustração é dada a seguir em termos de um exemplo numérico apresentado por BOWKER e LIEBERMAN (1968), que consiste de três observações em cada célula de uma classificação cruzada dupla com três linhas e duas colunas:

Um engenheiro de garantia de qualidade para um componente eletrônico industrial percebe, intuitivamente, que existe grande variabilidade entre os fornos utilizados por sua firma para testar a vida dos vários componentes. Para verificar se está ou não correto, ele escolheu um tipo de componente e obteve os dados apresentados na Tabela 1, para três temperaturas comumente utilizadas para testar a vida destes itens. O componente é acionado no forno até falhar. Dois fornos aleatoriamente escolhidos foram utilizados no experimento.

Tabela 1
Tempo dos componentes (em minutos)

Temperatura	Fornos	
	F1	F2
500° F	237	178
	254	179
	246	183*
550° F	208	146
	178	145
	187	141
600° F	192*	142
	186	125
	183	136

O modelo para y_{pqr}, r-ésima observação na p-ésima linha e q-ésima coluna é

$$y_{pqr} = \mu + \alpha_p + \beta_q + (\alpha\beta)_{pq} + e_{pqr}$$

para $p = 1,2,3$; $q = 1,2$ e $r = 1,2,3$ onde μ é a média geral; α_p é o efeito devido à p-ésima linha; β_q é o efeito devido à q-ésima coluna ; $(\alpha\beta)_{pq}$ é o efeito da interação e e_{pqr} é o termo erro associado à observação y_{pqr}.

HEMMERLE e HARTLEY (1973) adaptaram o exemplo para ilustrar dados não balanceados, com a retirada de duas observações (assinaladas com * na Tabela 1), de modo que o número de observações em cada célula aparece na Tabela 2.

Tabela 2

Número de observações em cada célula

	coluna 1	coluna 2	total
linha 1	3	2	5
linha 2	3	3	6
linha 3	2	3	5

Agora, $r = 1,2,\dots n_{pq}$ para $n_{pq} = 2$ ou 3.

Considerando dados desta natureza como sendo de um modelo misto com efeito de linha fixo, temos $n=16$ observações para o modelo [2], com $c=2$ fatores aleatórios nas colunas com $m_1=2$ níveis e interações com $m_2=6$ níveis.

A razão dos componentes de variância para esses fatores são, respectivamente, $\gamma_1 = \sigma^2_{\beta}/\sigma^2$ e $\gamma_2 = \sigma^2_{\alpha\beta}/\sigma^2$ de acordo com [4]. As células dos fatores de efeitos fixos estão nas linhas, que são três, e, assim, para X de [5], $k=3$ e os valores de n_t são $n_1=5$, $n_2=6$ e $n_3=5$.

Matricialmente, o modelo para os dados da Tabela 1 é:

$$
y = {}_{16}\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{113} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{213} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{311} \\ y_{312} \\ y_{321} \\ y_{322} \\ y_{323} \end{bmatrix}_{1} = {}_{16}\begin{bmatrix} 237 \\ 254 \\ 246 \\ 178 \\ 179 \\ 208 \\ 178 \\ 187 \\ 146 \\ 145 \\ 141 \\ 186 \\ 183 \\ 142 \\ 125 \\ 136 \end{bmatrix}_{1} = {}_{16}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3} {}_{3}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_{1} + {}_{16}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2} {}_{2}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{1} + {}_{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6} {}_{6}\begin{bmatrix} \alpha\beta_{11} \\ \alpha\beta_{12} \\ \alpha\beta_{21} \\ \alpha\beta_{22} \\ \alpha\beta_{31} \\ \alpha\beta_{32} \end{bmatrix}_{1} + {}_{16}\begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{113} \\ e_{121} \\ e_{122} \\ e_{211} \\ e_{212} \\ e_{213} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \\ e_{311} \\ e_{312} \\ e_{321} \\ e_{322} \\ e_{323} \end{bmatrix}_{1}
$$

Ou seja,

$$y = X\mu + U_1 b_1 + U_2 b_2 + e$$

para $c = 2$ $\quad m_1 = 2$ $\quad m_2 = 6$

e $\quad V(y) = H\sigma^2$, onde

$$H = \sum_{i=1} \gamma_i U_i U_i' + I_n = \gamma_1 U_1 U_1' + \gamma_2 U_2 U_2' + I_{16}$$

3. OS ESTIMADORES

Dada a função de verossimilhança para

$$y \sim N(X\mu, H\sigma^2),$$

$$L(y,\mu,\sigma^2,\gamma) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}\,|H|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\mu)'H^{-1}(y-X\mu)\right],$$

o logaritmo da função de verossimilhança é

$$\lambda = -\frac{1}{2}n\log_e 2\pi - \frac{1}{2}n\log_e\sigma^2 - \frac{1}{2}\log_e|H| -$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\mu)'H^{-1}(y - X\mu) \qquad [6]$$

Para reparti-la em duas partes, uma delas livre de μ, PATTERSON e THOMPSON (1971) sugerem a transformação singular $\begin{bmatrix} S \\ X'H^{-1} \end{bmatrix} y$ onde

$$S = I - X(X'X)^{-1}X' = \sum_{i=1}^{k}{}^{+}(I_{n_t} - n_t^{-1}J_{n_t}) \qquad [7]$$

é simétrica e idempotente, sendo J_{n_t} uma matriz de uns, $n_t \times n_t$.

Desde que SX é nula, pois

$$SX = [I - X(X'X)^{-1}X']X = X - X(X'X)^{-1}X'X = X - XI = X - X = \emptyset,$$

Sy tem distribuição $N(0;SHS\sigma^2)$ independentemente de $X'H^{-1}y$.

É claro que a distribuição de Sy é livre dos efeitos fixos μ e, portanto, sua função de verossimilhança forma a base de nossa dedução dos estimadores dos componentes de variância envolvidos em $H\sigma^2$. Entretanto, para evitar a singularidade de SHS surgida da forma de S mostrada em [7],utilizamos uma alternativa para S dela derivada pela retirada da n_1-ésima, $(n_1+ n_2)$-ésima,$(n_1+ n_2 + \ldots n_k)$-ésima, ..., $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$-ésima linhas. Tal matriz, notada por T, tem ordem $(n - k) \times n$ e é dada por

$$T = \sum_{i=1}^{k}{}^{+} \left[\left(I_{n_i-1} \mid 0_{n_i-1} \right) - n_i^{-1} J_{(n_i-1)\times n_i} \right] \qquad [8]$$

$$= \sum_{i=1}^{k}{}^{+} \left(I_{n_i} - n_i^{-1} J_{n_i-1} \mid -n_i^{-1} 1_{n_i-1} \right) \qquad [9]$$

onde 0_{n_i-1} é um vetor de zeros de ordem $n_i - 1$ e $J_{(n_i-1)}$ é uma matriz de ordem $(n_i - 1) \times n_i$ cujos elementos são uns.

A matriz T é facilmente reproduzida retirando a última linha de cada sub-matriz de S.

Para o exemplo que estamos considerando, temos: $n_1 = 5$, $n_2 = 6$ e $n_3 = 5$. Então:

$$X = {}_{16}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3} \quad ; \quad X'X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$X(X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix}
1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5
\end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix}
4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 5/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 5/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 5/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5
\end{bmatrix}$$

Por (9) :

$$T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & {}_4\Phi_6 & {}_4\Phi_5 \\ {}_5\Phi_5 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & {}_5\Phi_5 \\ {}_4\Phi_5 & {}_4\Phi_6 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 5/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 5/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 5/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

Para X de [5] é prontamente visto que

$$TX = \emptyset \tag{10}$$

e pela própria natureza de T, é fácil mostrar que

$$T'(TT')^{-1}T = S \tag{11}$$

como verificamos numericamente através dos dados.

A transformação agora utilizada é

$$z = \begin{bmatrix} T \\ X'H^{-1} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} Ty \\ X'H^{-1}y \end{bmatrix} \tag{12}$$

e com vistas em [10], sua distribuição é

$$z \sim N \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ X'H^{-1}X\,\mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} THT'\sigma^2 & 0 \\ 0 & X'H^{-1}X\,\sigma^2 \end{bmatrix} \right\} \tag{13}$$

Esta transformação é não singular porque X' e T de [5] e [8] têm, cada uma, "rank" linha completo e, de [10], as linhas de T são linearmente independentes das linhas de X'.

Consideremos agora o logaritmo da verossimilhança de z. Isto é, de [12] e [13], o logaritmo da verossimilhança de Ty e de $X'H^{-1}y$, os quais denotamos por λ_1 e λ_2, respectivamente:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}(n-k)\log_e 2\pi - \frac{1}{2}(n-k)\log_e \sigma^2$$

$$-\frac{1}{2}\log_e |THT'| - \frac{1}{2\sigma^2}\, y'T'(THT')^{-1}\,T\,y \qquad [14]$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}k\log_e 2\pi - \frac{1}{2}k\log_e \sigma^2 - \frac{1}{2}\log_e |X'H^{-1}X|$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(X'H^{-1}y - X'H^{-1}X\mu)'(X'H^{-1}X)^{-1}(X'H^{-1}y - X'H^{-1}X\mu)$$

$$= -\frac{1}{2}k\log_e 2\pi - \frac{1}{2}k\log_e \sigma^2 - \frac{1}{2}\log_e |X'H^{-1}X|$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\mu)'\,H^{-1}X\,(X'H^{-1}X)^{-1}X'H^{-1}(y - X\mu) \qquad [15]$$

Como λ_1 não envolve μ, os estimadores de σ^2 e dos γ_i´s, chamados estimadores de máxima verossimilhança restrita (MVR) são, seguindo o método de PATTERSON e THOMPSON (1971), os valores de σ^2 e γ_i´s que maximizam λ_1.

Derivando [14] vem:

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}(n-k) + \frac{1}{2\sigma^4}\, y'T'(THT')^{-1}T\,y \qquad [16]$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma_i} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[U_i'\;T'(THT')^{-1}T\;U_i\right] +$$

$$+\frac{1}{2\sigma^2}\, y'T'(THT')^{-1}T\;U_iU_i'\;T'(THT')^{-1}T\;y \qquad [17]$$

para $i = 1,2,\ldots,c$, onde tr(Q) é o traço da matriz Q.

Igualando [16] e [17] a zero, obtemos os estimadores de MVR. É claro que as equações resultantes não têm solução analítica e devem ser resolvidas numericamente. Um procedimento iterativo é atribuir valores iniciais para $\gamma' = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_c\}$ e então :

(i) resolver $\hat{\sigma}^2 = y'T'(THT')^{-1}Ty/(n-k)$ [18]

baseado em [16] e

(ii) utilizar os γ valores e $\hat{\sigma}^2$ de [18] para calcular os novos γ valores que fazem [17] aproximar-se de zero. A repetição de (i) e (ii), terminando em (i), é continuada até que o grau de acurácia desejado seja obtido.

Para ilustrar o processo, façamos γ_1=20,00 e γ_2=0,30 no nosso exemplo. Então:

$$H = \begin{bmatrix}
21.3 & 20.3 & 20.3 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\
20.3 & 21.3 & 20.3 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\
20.3 & 20.3 & 21.3 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 21.3 & 20.3 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 20.3 & 21.3 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 \\
20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 21.3 & 20.3 & 20.3 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\
20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 20.3 & 21.3 & 20.3 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\
20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 20.3 & 20.3 & 21.3 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 21.3 & 20.3 & 20.3 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20.3 & 21.3 & 20.3 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20.3 & 20.3 & 21.3 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 \\
20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 21.3 & 20.3 & 0 & 0 & 0 \\
20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20.3 & 21.3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 21.3 & 20.3 & 20.3 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 20.3 & 21.3 & 20.3 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 0 & 20.3 & 20.3 & 21.3
\end{bmatrix}$$

Com as matrizes y, T e H, obtemos por [18]

$$\hat{\sigma}^2 = y'T(THT')^{-1}T\ y\ /(16 - 3) = \frac{1029{,}0589}{13} = 79{,}1587$$

e calculamos os novos γ_1 e γ_2 através de

$$\mathrm{tr}\left[U_1'T'(THT')^{-1}T\ U_1\right] = y'T'(THT')^{-1}T\ U_1U_1'T'(THT')^{-1}T\ y\ /\ \hat{\sigma}^2$$

onde H contém γ_1 como incógnita e o valor inicial para $\gamma_2 = 0{,}30$ e

$$\mathrm{tr}\left[U_2'T'(THT')^{-1}T\ U_2\right] = y'T'(THT')^{-1}T\ U_2U_2'T'(THT')^{-1}T\ y\ /\ \hat{\sigma}^2$$

onde H contém γ_2 como incógnita e γ_1 encontrado na expressão anterior.

O processo é repetido até se chegar na precisão desejada. No caso, obteremos $\hat{\gamma}_1$=18,57; $\hat{\gamma}_2$=0,32 e $\hat{\sigma}^2$=78,84.

4. PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

Embora PATTERSON e THOMPSON (1971) tenham proposto um procedimento baseado no método iterativo de Fisher para $c=1$ e sugerido como utilizá-lo para $c > 1$, a técnica de Newton-Raphson é melhor adaptada a problemas de encontrar sucessivos valores para γ que zerem [17] e foi efetivamente aplicada por HEMMERLE e HARTLEY (1973) para equações similares ao método da máxima verossimilhança de HARTLEY e RAO (1967). Nós utilizamos sua aplicação aqui, o que simplifica a notação e procedimento de cálculo.

4.1. A TRANSFORMAÇÃO W

A técnica de Newton-Raphson, que é um procedimento iterativo numérico, para encontrar valores dos elementos de γ que zeram [17], utiliza a derivada parcial de segunda ordem para λ_1, em relação aos γ_i´s, ou seja:

$$\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j} = \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\left[\ U_i'T'(THT')^{-1}TU_j\ U_j'T'(THT')^{-1}TU_i\ \right] -$$

$$- y'\ T'(THT')^{-1}TU_i\ U_i'T'(THT')^{-1}TU_j\ U_j'T'(THT')^{-1}Ty/\sigma^2 \quad [19]$$

para $i,j = 1, 2, \ldots, c$.

Os produtos das matrizes em [17] e [19] são submatrizes da seguinte transformação **W** (matriz **W**) sugerida por HEMMERLE e HARTLEY (1973), cujo interesse se baseia no fato de que os cálculos iterativos podem ser efetuados utilizando quantidades que não dependem de n em nenhum passo:

$$W = \left\{ W_{ij} \right\}, \qquad \text{para } i,j = 1,2,\ldots,c+1$$

é

$$W = \begin{bmatrix} U' \\ y' \end{bmatrix} T'(THT')^{-1}T \begin{bmatrix} U & y \end{bmatrix} \qquad [20]$$

Então para $W_{i,c+1} \equiv w_i$ [17] e [19] ficam

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma_i} = -\frac{1}{2}\, tr(W_{ii}) + \frac{1}{2\sigma^2}\, w_i' w_i \qquad [21]$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = \frac{1}{2}\, tr\,(W_{ij} W_{ij}') - w_i' W_{ij} w_j / \sigma^2 \qquad [22]$$

para $i,j = 1, 2, \ldots, c$, e [17] fica

$$\hat{\sigma}^2 = W_{c+1,c+1} / (n - k) \qquad [23]$$

A transformação $\mathbf{W}$ para o exemplo que estamos considerando é:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & w_{1} \\ W_{21} & W_{22} & w_{2} \\ W_{31} & W_{32} & w_{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ y' \end{bmatrix} T'(THT')^{-1}T \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U'_1T'(THT')^{-1}T\,U_1 & U'_1T'(THT')^{-1}T\,U_2 & U'_1T'(THT')^{-1}Ty \\ U'_2T'(THT')^{-1}T\,U_1 & U'_2T'(THT')^{-1}T\,U_2 & U'_2T'(THT')^{-1}Ty \\ y'T'(THT')^{-1}T\,U_1 & y'T'(THT')^{-1}T\,U_2 & y'T'(THT')^{-1}Ty \end{bmatrix}$$

Então:

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma_1} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ (W_{11}) + \frac{1}{2\ \sigma^2}\ w'_1\ w_1$$

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma_2} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ (W_{22}) + \frac{1}{2\ \sigma^2}\ w'_2\ w_2$$

$$\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\gamma_1\partial\gamma_2} = \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ (W_{12}W'_{12}) - w'_1\ W_{12}\ w_2\ /\ \sigma^2 \qquad \text{e}$$

$$\hat{\sigma}^2 = W_{33}\ /\ (16 - 3)$$

Numericamente para $\gamma_1 = 18,57$ e $\gamma_2 = 0,34$, obtemos:

$$W = \left[\begin{array}{rr|rrrrrr|r}
0,027 & -0,027 & 0,008 & -0,008 & 0,009 & -0,009 & 0,008 & -0,008 & 1,448 \\
-0,027 & 0,027 & -0,008 & 0,008 & -0,009 & 0,009 & -0,008 & 0,008 & -1,448 \\
\hline
0,008 & -0,008 & 0,452 & -0,452 & -0,235 & 0,235 & -0,209 & 0,209 & 8,854 \\
-0,008 & 0,008 & -0,452 & 0,452 & 0,235 & -0,235 & 0,209 & -0,209 & -8,854 \\
0,009 & -0,009 & -0,235 & 0,235 & 0,479 & -0,479 & -0,235 & 0,235 & -5,026 \\
-0,009 & 0,009 & 0,235 & -0,235 & -0,479 & 0,479 & 0,235 & -0,235 & 5,026 \\
0,008 & -0,008 & -0,209 & 0,209 & -0,235 & 0,235 & 0,452 & -0,452 & -2,379 \\
-0,008 & 0,008 & 0,209 & -0,209 & 0,235 & -0,235 & -0,452 & 0,452 & 2,379 \\
\hline
1,448 & -1,448 & 8,854 & -8,854 & -5,026 & 5,026 & -2,379 & 2,379 & 1025,387
\end{array}\right]$$

e, portanto,

$\mathrm{tr}\ (W_{11}) = 0,053$; $\quad w'_1 w_1 = 4,192$; $\quad \mathrm{tr}\ (W_{22}) = 2,766$;

$w'_2 w_2 = 218,619$; $\quad \mathrm{tr}\ (W_{12}W'_{12}) = 0,001$; $\quad w'_1 W_{12} w_2 = 0,041$;

$W_{33} = 1025,387$; $\quad \hat{\sigma}^2 = 1025,387/13 = 78,87$

Os elementos de **W** de [21] a [23] exigem, de [20], calcular $(THT')^{-1}$, de ordem $n - k$ que é menor que n, ordem da matriz a ser invertida para máxima verossimilhança (H^{-1}). Para muitos conjuntos de dados, isto será exageradamente trabalhoso de calcular, mas a inversa pode ser reduzida a uma matriz de ordem $m_{\cdot} = \sum_{i=1}^{c} m_i$, número total de níveis dos efeitos aleatórios do modelo. Embora para muitos casos esta matriz seja também muito grande, será sempre menor do que $n - k$, frequentemente muito menor, e em muitos casos será tal que a inversa pode ser calculada. Para conseguir esta redução, note de [4] que

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_n + \mathbf{U}\ \mathbf{D}\ \mathbf{U}' \qquad [24]$$

para

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \cdots & \mathbf{U}_c \end{bmatrix} \qquad [25]$$

e

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{c}{}^{+} \gamma_i\ \mathbf{I}_{m_i} \qquad [26]$$

Então,

$$\mathbf{T}'(\mathbf{THT}')^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{S} - \mathbf{SUM}^{-1}\mathbf{U}'\mathbf{S} \qquad [27]$$

para $\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{U}'\ \mathbf{S}\ \mathbf{U}$, de ordem $m_{\cdot} = \sum_{i=1}^{c} m_i$ [28]

Para os dados do exemplo, como

$m_{\cdot} = \sum_{i=1}^{2} m_i = m_1 + m_2 = 2 + 6 = 8$ níveis de efeitos aleatórios:

$$
D = \sum_{c=1}^{2^{+}} \gamma_i \, I_{m_i} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & {}_2\phi_6 \\ {}_6\phi_2 & \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \gamma_1 & & & & & & & \phi \\ & \gamma_1 & & & & & & \\ & & \gamma_2 & & & & & \\ & & & \gamma_2 & & & & \\ & & & & \gamma_2 & & & \\ & & & & & \gamma_2 & & \\ & & & & & & \gamma_2 & \\ \phi & & & & & & & \gamma_2 \end{bmatrix}
$$

$$
M = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1/\gamma_1 + 3.9 & -3.9 & 1.2 & -1.2 & 1.5 & -1.5 & 1.2 & -1.2 \\ -3.9 & 1/\gamma_1 + 3.9 & -1.2 & 1.2 & -1.5 & 1.5 & -1.2 & 1.2 \\ 1.2 & -1.2 & 1/\gamma_2 + 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 1.2 & -1.2 & 1/\gamma_2 + 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & -1.5 & 0 & 0 & 1/\gamma_2 + 1.5 & -1.5 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1.5 & 0 & 0 & -1.5 & 1/\gamma_2 + 1.5 & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\gamma_2 + 1.2 & -1.2 \\ -1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & 1/\gamma + 1.2 \end{array}\right]
$$

Agora, definimos

$$W_o = \begin{bmatrix} U' \\ y' \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} U & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'SU & U'Sy \\ y'SU & y'Sy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{oo} & w_o \\ w_o' & w_o \end{bmatrix} \quad [29]$$

que, conforme [20] é W com H substituido por I. Então, ao utilizar [27]-[29] em [20], W fica

$$W = \begin{bmatrix} U' \\ y' \end{bmatrix} T'(THT')^{-1}T \begin{bmatrix} U & y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U' \\ y' \end{bmatrix} \left(S - S\,U\,M^{-1}U'S\right) \begin{bmatrix} U & y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U' \\ y' \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} U & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U' \\ y' \end{bmatrix} S\,U\,M^{-1}U'S \begin{bmatrix} U & y \end{bmatrix} =$$

$$= W_o - \begin{bmatrix} U' \\ y' \end{bmatrix} S\,U\,M^{-1}U'S \begin{bmatrix} U & y \end{bmatrix} = \quad [30]$$

$$= \begin{bmatrix} W_{oo} & w_o \\ w_o' & w_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U'S\,U\,M^{-1}U'S\,U & U'S\,U\,M^{-1}U'Sy \\ y'S\,U\,M^{-1}U'S\,U & y'S\,U\,M^{-1}U'Sy \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W_{oo} & w_o \\ w_o' & w_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{oo}M^{-1}W_{oo} & W_{oo}M^{-1}w_o \\ w_o'M^{-1}W_{oo} & w_o'M^{-1}w_o \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W_{oo} - W_{oo}M^{-1}W_{oo} & w_o - W_{oo}M^{-1}w_o \\ w_o' - w_o'M^{-1}W_{oo} & w_o - w_o'M^{-1}w_o \end{bmatrix} \quad [31]$$

No nosso exemplo:

$$
W_o = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
3,9 & -3,9 & 1,2 & -1,2 & 1,5 & -1,5 & 1,2 & -1,2 & 211,3 \\
-3,9 & 3,9 & -1,2 & 1,2 & -1,5 & 1,5 & -1,2 & 1,2 & -211,3 \\
1,2 & -1,2 & 1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80,6 \\
-1,2 & 1,2 & -1,2 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -80,6 \\
1,5 & -1,5 & 0 & 0 & 1,5 & -1,5 & 0 & 0 & 70,5 \\
-1,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1,5 & 1,5 & 0 & 0 & -70,5 \\
1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & -1,2 & 60,2 \\
-1,2 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2 & 1,2 & -60,2 \\
\hline
211,3 & -211,3 & 80,6 & -80,6 & 70,5 & -70,5 & 60,2 & -60,2 & 12533,5
\end{array}\right]
$$

e considerando $\gamma_1 = 18,57$ e $\gamma_2 = 0,34$, temos:

$$
M = \begin{bmatrix}
3,954 & -3,9 & 1,2 & -1,2 & 1,5 & -1,5 & 1,2 & -1,2 \\
-3,9 & 3,954 & -1,2 & 1,2 & -1,5 & 1,5 & -1,2 & 1,2 \\
1,2 & -1,2 & 4,141 & -1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1,2 & 1,2 & -1,2 & 4,141 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1,5 & -1,5 & 0 & 0 & 4,441 & -1,5 & 0 & 0 \\
-1,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1,5 & 4,441 & 0 & 0 \\
1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,141 & -1,2 \\
-1,2 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2 & 4,141
\end{bmatrix}
$$

4.2. ALGORITMOS

O cálculo de **W** [31] exige calcular [28] e [29].

Em [29]: para S de [7], o termo principal de [29] é

$$W_{00} = U'S\ U = U' \left[I - X(X'X)^{-1}X' \right] U =$$

$$= U'U - U'\ X(X'X)^{-1}X'U =$$

$$= U'U - U'X\ \text{diag}\left\{ 1/n_1,\ \ldots\ ,\ 1/n_k \right\}\ X'U \qquad [32]$$

onde **U'U** é a familiar "matriz dos coeficientes" para os efeitos aleatórios. Para o nosso exemplo:

$$U'U = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Em [32], uma típica sub-matriz de **U'X** é

$$U_i'X = \left\{ n_{i(j),t} \right\} \qquad [33]$$

para $j = 1, \ldots, m_i$; $t = 1, \ldots, k$; e m_ix k matriz cujos elementos típicos $n_{i(j),t}$ representa o número de observações no j-ésimo nível do i-ésimo fator de efeito aleatório e no t-ésimo sub-total das células dos fatores de efeitos fixos.

Para os dados da Tabela 1, temos que as linhas são consideradas fixas, com k=3 níveis. O primeiro fator aleatório, que corresponde às colunas, tem $m_1 = 2$ níveis e, por [33]:

$$U_1'X = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3&3&2 \\ 2&3&3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{1(1),1} & n_{1(1),2} & n_{1(1),3} \\ n_{1(2),1} & n_{1(2),2} & n_{1(2),3} \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ n_{1(j),t} \right\} \quad \text{para} \quad j=1,2 \text{ e } t=1,2,3.$$

O segundo fator aleatório são as interações, com $m_2 = 6$ níveis e em [33]

$$U_2'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{2(1),1} & n_{2(1),2} & n_{2(1),3} \\ n_{2(2),1} & n_{2(2),2} & n_{2(2),3} \\ n_{2(3),1} & n_{2(3),2} & n_{2(3),3} \\ n_{2(4),1} & n_{2(4),2} & n_{2(4),3} \\ n_{2(5),1} & n_{2(5),2} & n_{2(5),3} \\ n_{2(6),1} & n_{2(6),2} & n_{2(6),3} \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ n_{2(j),t} \right\} \quad \text{para } j=1,2,\ldots,6 \text{ e } t=1,2,3.$$

O segundo termo de [29] é

$$w_0 = U'Sy = \left\{ U_i'Sy \right\}, \quad m_i x1,$$

para $i = 1,\ldots,c$.

De [7], $Sy = x$ é o vetor y com cada observação substituida por seus desvios da média dos níveis dos fatores de efeitos fixos nos quais ele ocorre:

$$x = S\,y = y - \left[\sum_{t=1}^{k}{}^{+} n_t^{-1} J_{n_t}\right] y =$$

$$= y - \left\{ \bar{y}_t 1_{n_t} \right\} \quad \text{para } t=1,\dots,k.$$

Portanto,

$$w_o = \left\{ U_i' x \right\}, \qquad \text{para } i = 1,\dots,c \qquad [34]$$

é um vetor m_ix 1 de totais dos x´s, referente a cada nível do i-ésimo fator aleatório.

Para ilustrar x, utilizamos a notação familiar ponto e barra para totais e médias, isto é,

$$y_{1..} = \sum_{r=1}^{3} y_{11r} \qquad \text{e} \qquad \bar{y}_{11.} = \frac{{}_{1}Y}{3}. \text{ Então}$$

$$x = \left\{ y_{pqr} - \bar{y}_{p..} \right\} \quad \text{para } p=1,2,3;\ q=1,2 \text{ e } r=1,2,\dots,n_{pq}$$

e w_o de [34] é

$$
w_o = \begin{bmatrix}
y_{.1.} - (3\,\bar{y}_{1..} + 3\,y_{2..} + 2\,y_{3..}) \\
y_{.2.} - (2\,\bar{y}_{1..} + 3\,\bar{y}_{2..} + 3\,\bar{y}_{3..}) \\
y_{11.} - 3\,\bar{y}_{1..} \\
y_{12.} - 2\,\bar{y}_{1..} \\
y_{21.} - 3\,\bar{y}_{2..} \\
y_{22.} - 3\,\bar{y}_{2..} \\
y_{31.} - 2\,\bar{y}_{3..} \\
y_{32.} - 3\,\bar{y}_{3..}
\end{bmatrix}
$$

O termo final para [29] é

$$w_o = y'S\,y = x'x \qquad [35]$$

que é a soma de quadrados total dos x's , ou seja, a soma de quadrados dentro das células dos y's para as k células dos fatores fixos.

No exemplo é $w_o = \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{2} \sum_{r=1}^{n_{pq}} (y_{pqr} - \bar{y}_{p..})^2$.

Tendo calculado W_{oo} , w_o e w_o para W_o de [29], M^{-1} exigida para W em [31] vem de [28] e [29] como

$$M = D^{-1} + W_{oo} \qquad [36]$$

Então, a matriz e termos dos vetores de W são

$$W_{oo} - W_{oo}M^{-1}W_{oo} = D^{-1} - D^{-1}M^{-1}D^{-1}$$

e [37]

$$w_o - W_{oo}M^{-1}w_o = D^{-1}M^{-1}w_o,$$

o termo escalar $w_o - w_o' M^{-1}w_o$ permanece como está.

Como THOMPSON apontou, as vantagens do lado direito de [37] sobre o esquerdo, consistem na multiplicação de M^{-1} pela diagonal, em vez de matrizes simétricas. Com essas expressões, a implementação da técnica iterativa pode ser executada exatamente como HEMMERLE e HARTLEY (1973) sugeriram.

Primeiro, calcula-se W_{oo}, para os dados, utilizando [32]-[35]. Então, atribuimos um conjunto inicial de valores aos γ_i's, $i=1,...,c$, e utilizando-os em D de [26], obtém-se **M** de [36] e calcula-se M^{-1}. Então, utiliza-se M^{-1} em [37] e [31] para obter **W**. Os elementos de **W** são então utilizados em [21], [22] e [23] para obter, pelo procedimento de Newton-Raphson, soluções das equações formadas igualando [16] e [17] a zero. Para cada iteração, D de [26] altera e, portanto, **M** de [36] também troca; consequentemente, por [37] mudam os termos de **W**.

5. O PROGRAMA

Em FERNANDEZ (1990) foi desenvolvida uma rotina para o módulo CM do programa SOC para obter os estimadores de MVR no caso específico do Exemplo de 2. Essa rotina exigia digitar as matrizes y, U_1 e U_2, o que tornava o trabalho bastante cansativo dadas as dimensões das mesmas. Além disso, para cada situação, era necessário alterar as submatrizes de W.

Em vista dessas dificuldades, estendeu-se a rotina para toda situação em que ocorrem dois fatores com qualquer número de níveis, de modo que somente seja necessário entrar com a matriz de dados y. Para isso, foi desenvolvido o programa MVR.EXE, em linguagem TURBO BASIC.

O programa encontra-se no Anexo e os resultados de uma aplicação na Tabela 3.

Tabela 3.

Estimativas de MVR para o Exemplo de 2.

Iteração	σ^2	γ_1	γ_2
1	77,7747	17,5693	0,3520
2	79,078	18,4383	0,3398
3	78,9207	18,5532	0,3411
4	78,8613	18,5688	0,3417
5	78,8468	18,5722	0,3418
6	78,8434	18,5730	0,3419

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOWKER, A.H. & LIEBERMEN, G.J. Engineering Statistics Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.

CORBEIL, R.R. & SEARLE, S.R. Restricted maximum likelihood (REML) estimation of variance components in the mixed model. **Technometrics**, Riccmond, **18**: 31-38, 1976.

FERNANDEZ, D.W.X. Modelos de populações finitas e máxima verossimilhança restrita no problema de estimativas negativas para componentes de variância. Piracicaba, 1990 (Mestrado - Escola superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP). 118p.

HARTLEY, H.O. & RAO, J.N.K. Maximum-likelihood estimation for the mixed analysis of variance model. **Biometrika**, London, **54**: 93-108, 1967.

HEMMERLE, W.J. & HARTLEY, H.O. Computing maximum likelihood estimates for the mixed A.O.V. model using the **W** transformation. **Technometrics**, vol. 15, **4**: 819-831, 1973.

PATTERSON, H.D. & THOMPSON, R. Recovery of interblock information when block sizes are unequal. **Biometrika**. Cambridge, **58**: 545-554, 1971.

THOMPSON, W.A.Jr. The problem of negative estimates of variance components. **The Annals of Mathematical Statistics**, Baltimore, **33**: 273, 1962.

7. ANEXO

```
CLS
Print "                    UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL"
?"                         DEPARTAMENTO DE ESTATISTICA"
?

?
?"               ESTIMATIVAS DE COMPONENTES DE VARIANCIA
 ?"                        UTILIZANDO O METODO DA
 ?"                  MAXIMA VEROSSIMILHANCA RESTRITA"
 ?
 ?
 ?
 ?"                   DINARA WESTPHALEN XAVIER FERNANDEZ"
 ?
 ?
 ?
 ?"                  Programador : Ivo Gregorio Lima Wagner"
 ?
 ?
 ?
 ?
 ?
 ?"                                PORTO ALEGRE"
 ?"                         Rio Grande do Sul - Brasil"
 ?"                             Outubro  -  1992"
 st$ = input$(1)
 cls
 ?"                                 INSTRUCOES"
 ?"   Este programa serve para proceder  a analise de  dados pelo metodo da maxima"
 ?"verossimilhanca restrita, e necessita para funcionar de um computador da  linha"
 ?"PC - XT com o programa SOC e de um disquette de trabalho que devera ser mantido"
 ?"permanentemente no drive A."
 ?
 ?"   Devemos definir:
 ?"                    *O nome do programa de dados e dos dados;"
 ?"                    *Estimativa inicial de teta1 e de teta2;"
 ?"                    *O numero de tratamentos;"
 ?"                    *O numero de blocos;"
 ?"                    *O numero de repeticoes por tratamento;"
 st$=input$(1);cls
 ?"   Apos definida a estrutura, tem inicio a entrada de dados  que deve ser "
 ?"realizada via teclado.Para valores missing colocar (***) tres  asteriscos "
 ?"na sua posicao."
 ?
 ?"          Ex:  2 Blocos   2 Tratamentos  2 Repeticoes por tratamento"
 ?"
 ?"                    126       135"
 ?"                    167       ***
 ?
 ?"                    ***       176"
 ?"                    132       154"
 ?"   No exemplo acima os dados referentes ao BLOCO 1  TRATAMENTO 2  REPETICAO 2"
 ?"e ao BLOCO 2  TRATAMENTO 1   REPETICAO  1; sao valores missing , por isso ao"
 ?"inves dos valores , entramos com ***.

 ?"   A entrada de dados se da por um  bloco de cada vez e temos um indicador de"
 ?"posicao , na primeira linha da tela.
 ?
 ?"   Apos a entrada de nossos dados o programa ira criar no disquete do drive A"
 ?"tres arquivos com o nome escolhido e com extensoes .AUX , .DAT e .  (sem ext
 ?"ensao); que sao:"
 ?"                nome.DAT  <Matriz de dados e posicoes destes >
```

```
?"                nome.AUX   <Matriz de diversos valores uteis   >
?"                nome.      <Programa em linguagem SOC para o exemplo especifico>"
st$=input$(1):cls
?"   Apos a gravacao o programa saira para o DOS, onde iremos entrar  em  ambi-"
?"ente SOC e utilizar o programa gerado (nome.    ) para efetuar a analise."
?
?"Devemos proceder dessa forma :"
?"d:\cd SOC"
?"d:\SOC\      <entramos no subdiretorio SOC >"
?"d:\SOC\SOC   <chamamos o programa SOC seguido de ENTER >"
?
?"   O programa SOC sera carregado na memoria , entre com :"
?
?"d:\SOC>exec A:FORNOS."
?
?"Seguido de ENTER, e entao teremos iniciado a analise da maxima verossimilhan
?"ca restrita para os nossos dados."
st$=input$(1):cls


DIM D$(1000):DIM W$(1000):L=2:K=2
CLS

INPUT "Nome dos dados ";N$
if n$="" then
  n$="dados"
end if
PRINT
INPUT "Valor estimado de teta1 ";TETA1
print
input "Valor estimado de teta2 ";TETA2
print
INPUT "Numero de Blocos ";B$
PRINT
INPUT "Numero de tratamentos ";T$
PRINT
INPUT "Repeticoes por tratamentos ";R$
CLS
 FOR A=1 TO VAL (T$)
   FOR S=1 TO VAL (B$)
      C=C+7
      FOR F=1 TO VAL (R$)
         LOCATE 1,5:PRINT "TRATAMENTO ";A;"  BLOCO ";S;" REPETICAO ";F
         L=L+1
         LOCATE L,C
         D$(E) = STR$(A)+STR$(S)+STR$(F)
         INPUT W$(E)
         E=E+1
      NEXT F
      L=K
   NEXT S
   cls:L=K:C=0
 NEXT A

 INPUT "Deseja rever os dados (s/n) ";st$
 if st$="s" or st$="S" then
     cls:e=0:'l=3
     FOR A=1 TO VAL (T$)
        FOR S=1 TO VAL (B$)
            C=C+7:locate 2,c:? "B.";s
            FOR F=1 TO VAL (R$)
                LOCATE 1,10:PRINT "TRATAMENTO ";A;"
```

```
                L=L+1:locate l,1:?"R.";f;"õ"
                LOCATE L,C
                D$(E) = STR$(A)+STR$(S)+STR$(F)
                PRINT W$(E)
                E=E+1
            NEXT F
            L=K

        NEXT S
        st$=input$(1)
        cls:L=K:C=0
    NEXT A
 END IF

 INPUT "Deseja alterar algum dado (s/n) ";st$
 While st$="s" or st$="S"
     cls
     LOCATE 2,20:?"<< ROTINA DE ALTERACAO >>"
     LOCATE 4,10:?"Por favor entre com:"
     locate 6,15:input "Numero do tratamento ";A
     locate 7,15:input "Numero do bloco ";S
     locate 8,15:input "Numero da repeticao ";F
     S$=str$(a)+str$(s)+str$(f)
     for w=0 to (val(b$)+val(t$)+val(r$))
      if  S$=d$(w) then
           d=w
           ?
           ?"Valor antigo ";w$(d)
           input "Novo valor "; w$(d):x=1
      end if
     next w
     if x=0 then
       locate 20,20:?"<<< VALOR NAO ENCONTRADO >>>"
      end if
      x=0
     ?
     locate 24,10:input "Deseja alterar mais algum dado (s/n) ";st$
  wend
cls
Y$=""
X$=""
S=(VAL(B$)*VAL(R$)*VAL(T$))
e=0
LOCATE 10,20:?"<<< GRAVANDO OS DADOS... >>>"
OPEN "o",#1,"A:"+n$+".dat"
  FOR T=0 TO S-1
      if W$(T) <> "***"  then
          Y$=MID$(D$(T),2,1)
          W=VAL (B$):u=VAL(MID$(D$(T),4,1))
          X=VAL(MID$(D$(T),2,1))
          Z=(VAL(B$)*VAL(t$))-(((X-1)*2)+u)
          P$="":X$=""
          FOR I= 1 TO (VAL(B$)*VAL(t$)-(Z+1))
              P$=P$+"0       "
          NEXT I
          P$=P$+"1       "
          FOR I= 1 TO Z
              P$=P$+"0       "
          NEXT I
          G$=W$(T)
          FOR I=1 TO U-1
              X$=X$+"0       "
```

```
          NEXT I
          X$=X$+"1        "
          FOR I=1 TO W-U
              X$=X$+"0        "
          NEXT I
          PRINT #1,G$,Y$,X$,P$
          p = val (mid$(d$(t),2,1))
          n(p)=n(p)+1
      else
      e=e+1
      end if
   NEXT T
CLOSE

for z = 1 to val (t$)
    m(z)=n(z)+m(z-1)
next z
open "o",#1,"A:"+n$+".aux"
   Y(1)=VAL(T$)
   Y(2)=VAL(B$)
   Y(3)=VAL(B$)*VAL(T$)
   Y(4)=VAL(B$)*VAL(T$)*VAL(R$)-e
   Y(5)=VAL(R$)
   Y(6)=TETA1
   Y(7)=TETA2
   if val(t$)<7 then
      t$="7"
   end if
   FOR Z= 1 TO val(t$)
      PRINT #1,Y(Z),n(z),m(z)
   NEXT Z
close

FOR G = 1 TO VAL(B$)
    H$=RIGHT$(STR$(G),1)
    BB$ = BB$ + "O"+h$+"    "
NEXT G
I=y(1)*VAL(B$)
FOR G = 1 TO I
    H$=RIGHT$(STR$(G),1)
    BT$ = BT$ + "U"+H$+"    "
NEXT G
G$="Num  y  b   "+BB$+BT$+";"
S$= "arquivo m = abref (a:"+N$+".dat) y  b " +BB$+BT$+";"
F$="R = LEIA "+CHR$(34)+"A:AUXILIA"+CHR$(34)+";"
U$="Z = LEIA "+CHR$(34)+"A:MATRIZ"+CHR$(34)+";"
open "o",#1,"A:"+n$+"."
   PRINT #1,"GENESE A:MATRIZ"
   PRINT #1,G$
   PRINT #1,S$
   PRINT #1,"{"
   PRINT #1,"leiaf(m);"
   PRINT #1,"          }"
   PRINT #1,"GENESE A:AUXILIA"
   PRINT #1,"NUM Z  F  V;"
   S$= "arquivo m = abref (a:"+N$+".AUX) Z  F  V;"
   PRINT #1,S$
   PRINT #1,"{"
   PRINT #1, "LEIAF(M);"
   PRINT #1, "          }"
   PRINT #1, "cm"
   PRINT #1, "LIMPE;"
```

```
        PRINT #1,F$

        for s=1 to 8
            read d$
            print #1,d$
        next s

        FOR K = 1 TO Y(1)
            H$=RIGHT$(STR$(K),1)
            D$="H"+H$+"=R["+H$+",3];"
            A$="RT"+H$+"=R["+H$+",2];"
            D$=D$+A$
            PRINT #1,D$
        NEXT K
        PRINT #1,U$
        PRINT #1,"Y = Z[,1];"
        PRINT #1,"B = Z[,2];"

        A$ =""
        FOR K= 3 TO VAL (B$)+2
            A$=A$+STR$(K)+" "
        NEXT K
        D$="U1 = Z[,"+A$+"];"
        PRINT #1,D$

        A$ =""
        i=val(b$)+(val(b$)*y(1))+2
        FOR K= 3+VAL(B$) TO i
            A$=A$+STR$(K)+" "
        NEXT K
        D$="U2 = Z[,"+A$+"];"
        PRINT #1,D$
        PRINT #1,"x = delin(B);"
        PRINT #1,"s=ident(NO) -x*inv(x'x)*x';"

        A$ =""
        FOR K= 1 TO Y(1)
            H$=RIGHT$(STR$(K),1)
            A$=A$+"(H"+H$+"-(RT"+H$+"-1)):(H"+H$+"-1)   "
        NEXT K
        D$="T=S["+A$+",]:"
        PRINT #1,D$
        for s=1 to 42
            read d$
            print #1,d$
        next s
      close
      CLS
      LOCATE 10,20:?"<< DADOS GRAVADOS >>"
      LOCATE 12,20:?"    MUITO OBRIGADO   "
      ST$=INPUT$(1):CLS
end

DATA "TR = R[1,1];"
DATA "BL = R[2,1];"
DATA "P = R[3,1];"
DATA "NO = R[4,1];"
DATA "RPT = R[5,1];"
DATA "TETA1=R[6,1];"
DATA "TETA2=R[7,1];"
DATA "TETA0=R[6 7,1];"
DATA ""
```

```
DATA "inter=1;imprime inter;"
DATA "cond=1;"
DATA " enquanto (inter <=20 && cond >.0001){ "
DATA "          h=teta1*u1*u1' + teta2*u2*u2' +ident(no);"
DATA "          a=t'*inv(t*h*t')*t;"
DATA ""
DATA "w=[u1'*a*u1 u1'*a*u2 u1'*a*y,u2'*a*u1 u2'*a*u2 u2'*a*y,y'*a*u1 y'*a*u2 y'*a*y];"
DATA ""
DATA "den=(NO-TR);"
DATA ""
DATA "   sigma=inv(den)*w[(BL+P+1),(BL+P+1)];imprime sigma;"
DATA "   st1=(-0.5)*traco(w[1:BL,1:BL]) +(0.5*inv(sigma))*w[1:BL,(BL+P+1)]'*w[1:BL,(BL+P+1)];"
DATA ""
DATA "   st2=(-0.5)*traco(w[(BL+1):(P+BL),(BL+1):(BL+P)]) +(0.5*inv(sigma))*w[(BL+1):(P+BL),(BL+P+1)]'*w[(BL+1):(P+BL),(BL+P+1)];"
DATA ""
DATA "   v12=(0.5)*traco(w[1:BL,(BL+1):(BL+P)]*w[1:BL,(BL+1):(BL+P)]') -w[1:BL,(BL+P+1)]'*w[1:BL,(BL+1):(BL+P)]*w[(BL+1):(P+BL),(BL+
P+1)]*(inv(sigma));"
DATA ""
DATA "   v11=(0.5)*traco(w[1:BL,1:BL]*w[1:BL,1:BL]') -w[1:BL,(BL+P+1)]'*w[1:BL,1:BL]*w[1:BL,(BL+P+1)]*(inv(sigma));"
DATA ""
DATA "   v22=(0.5)*traco(w[(BL+1):(P+BL),(BL+1):(BL+P)]*w[(BL+1):(P+BL),(BL+1):(P+BL)]') -w[(BL+1):(P+BL),(BL+1+P)]'*w[(BL+1):(P+BL)
,(BL+1):(BL+P)]*w[(BL+1):(P+BL),(BL+P+1)]*(inv(sigma));"
DATA ""
DATA "    v=[ v11 v12,"
DATA "        v12 v22];"
DATA "     st=[st1,st2];"
DATA "          tetas=teta0 -inv(v)*st; "
DATA "       cond=sqrt(squad(tetas- teta0)*inv(squad(teta0)));"
DATA "   imprime tetas;"
DATA " teta0=tetas;"
DATA "teta1=teta0[1,];"
DATA "teta2=teta0[2,];"
DATA " inter=inter +1;"
DATA " imprime inter; "
DATA "}"
DATA "h=teta1*u1*u1' + teta2*u2*u2' +ident(NO);"
DATA ""
DATA "imprime sigma;"
DATA "fim;"
DATA ""
DATA ""
DATA ""
DATA ""
```

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série A: Trabalho de Pesquisa

1. Marcos Sebastiani Artecona - Transformation des Singularités - MAR/89

2. Jaime Bruck Ripoll - On a Theorem of R. Langevin about Curvature and Complex Singularities - MAR/89

3. Eduardo Cisneros, Miguel Ferrero e Maria Inés Gonzales - Prime Ideals of Skew Polynomial Rings and Skew Laurent Polynomial Rings - ABR/89

4. Oclide José Dotto - ε-Dilations - JUN/89

5. Jaime Bruck Ripoll - A Characterization of Helicoids - JUN/89

6. Mark Thompson e V. B. Moscatelli - Asymptotic Distribution of Liusternik-Schnirelman Eigenvalues for Elliptic Nonlinear Operators - JUL/89

7. Mark Thompson - The Formula of Weyl for Regions with a Self-Similar Fractal Boundary - JUL/89

8. Jaime Bruck Ripoll - A Note on Compact Surfaces with Non Zero Constant Mean Curvature - OUT/89

9. Jaime Bruck Ripoll - Compact ε-Convex Hypersurfaces - NOV/89

10. Jandyra Maria G. Fachel - Coeficientes de Correlação Tipo-Contigência - JAN/90

11. Jandyra Maria G. Fachel - The Probality of Ocurrence of Heywood Cases - JAN/90

12. Jandyra Maria G. Fachel - Heywood Cases in Unrestricted Factor Analysis - JAN/90

13. Julio Cesar R. Claeyssen e Tereza Tsukazan de Ruiz - Dynamical Solutions of Linear Matrix Diferential Equations - JAN/90

14. Maria T. Albanese - Behaviour of de Likelihood in Latent Analysis of Binary Data - ABR/91

15. Maria T. Albanese - Measuremente of the Latent Trait Analysis of Binary Data - ABR/91

16. Maria Teresinha Albanese - Adequacy of the Asymptotic Variance-Covariance Matrix Using Bootstrap Jackknife Techniques in Latent Trait Analysis of Binary Data - ABR/91

17. Maria Teresinha Albanese - Latent Variable Models for Binary Response - ABR/91

18. Mark Thompson - Kinematic Dynamo in Random Flows - DEZ/90

19. Jaime Bruck Ripoll e Marcos Sebastiani Artecona- The Generalized Map and Applications - AGO/91

20. Jaime Bruck Ripoll, Suzana Fornari e Katia Frensel - Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in the Complex Hyperbolic Space - AGO/91

21. Suzana Fornari e Jaime Bruck Ripoll - Stability of Compact Hypersurfaces with Constant Mean Curvature - JAN/92

22. Marcos Sebastiani Artecona - Une Généralisation de L'Inveriant de Malgrange - FEV/92

23. Cornelis Kraaikamp e Artur Lopes - The Theta Group and the Continued Fraction with Even Partial Quotients - MAR/92

24. Silvia Lopes - Amplitude Estimation in Multiple Frequency Spectrum - MAR/92

25. Silvia Lopes e Benjamin Kedem - Sinusoidal Frequency Modulated Spectrum Analysis - MAR/92

26. Silvia Lopes e Benjamin Kedem - Iteration of Mappings and Fixed Spectrum Analysis - MAR/92

27. Miguel Ferrero, Eduardo Cisneros e Maria Ines Gonzales - Ore Extensions and Jacobson Rings - MAI/92

28. Sara C. Carmona - An Asymptotic Problem for a Reaction-Diffusion Component - JUL/92

29. Luiz Fernando Carvalho da Rocha - Unique Ergodicity of Interval Exchange Maps - JUL/92

30. Sara C. Carmona - Wave Front Propagation for a Cauchy Problem With a Fast Component - OUT/92

31. Marcos Sebastiani Artecona e Iván Pan Pérez - Intersections Transverses dans l'Espace Projectif - OUT/92

32. Miguel Ferrero - Closed Bimodules over Prime Rings: Closed Submodules and Applications to Rings Extensions - DEZ/92

33. Dinara W. X. Fernandez - Método da Máxima Verossimilhança Restrita para Estimação de Componentes de Variância - SET/93

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRA CURRICULARES

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa

Série B: Trabalho de Apoio Didático

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

Série D: Trabalho de Graduação

Série F: Trabalho de Divulgação

Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRA CURRICULARES
INSTITUTO DE MATEMATICA - UFRGS
AV. BENTO GONÇALVES, 9500 - PRÉDIO 43111
CEP 91509 - 900 AGRONOMIA - POA/RS
FONE: 336 92 22 OU 339 13 55 OU 228 16 33
RAMAL 6197
FAX: 336 15 12