Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática

Construções por Meio de Régua e Compasso

Alvino Alves Sant 'Ana

Cadernos de Matemática e Estatística

Série C, n^o 13, ABR/89
Porto Alegre, setembro de 1990

Construções por Meio de Régua e Compasso
Alvino Alves Sant'Ana

Resumo: O objetivo da palestra é o de discutir a possibilidade ou impossibilidade de construir com o uso unicamente da régua sem marcas e do compasso, certas figuras geométricas.

Serão tratados, entre outros, os clássicos problemas da Quadratura do círculo, Duplicação do cubo e Trissecção de um ângulo.

Pretende-se mostrar como algumas idéias da álgebra moderna serviram para resolver antigos problemas da geometria.

Seja $E \subset R^2$ tal que E contém pelo menos dois pontos.

Definição 1:

i) Uma reta r do plano R^2, é dita uma reta em E, se r une dois pontos de E.

ii) uma circunferência c do plano R^2, é dita uma circunferência em E, se o seu centro pertence a E e c contém pelo menos um ponto de E.

Agora vamos definir as operações permitidas entre as retas e circunferências em E. Tais operações vão determinar os pontos de R^2 que poderemos construir por meio de régua e compasso.

Definição 2: Operações Elementares em E.

I) Intersecção de duas retas em E.

II) Intersecção de uma circunferência em E com uma reta em E.

III) Intersecção de duas circunferências em E.

Assim, os pontos construtíveis por meio de régua e compasso ficam determinados pela,

Definição 3: um ponto $A \in R^2$, diz-se construtível a partir de E numa etapa, se for possível determinar A através de uma das operações elementares em E.

Com o objetivo de caracterizar os pontos construtíveis a partir de E, introduziremos agora algumas notações:

$< E >= \{A \in R^2 : A$ é construtível a partir de E numa etapa$\}$

$0 = (0,0) \in R^2 \quad U = (1,0) \in R^2 \quad E_0 = \{0, U\}$

Definição 4: Definimos E_n por indução do seguinte modo:

i) $E_1 =< E_0 >$

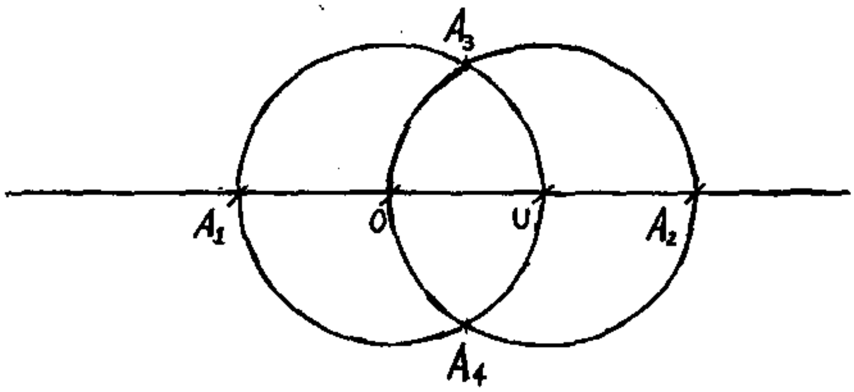
ii) $E_{n+1} =< E_n > \quad , \forall\, n \in N$

Finalmente, por definição, seja $E_\infty = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$

observemos, que na figura fica claro que

$E_1 = \{0, U, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ onde

$A_1 = (-1,0) \quad A_2 = (2,0) \quad A_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad A_4 = (\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$



Agora, com esta notação podemos definir os pontos construtíveis por meio de régua e compasso.

Definição 5: Um ponto $A \in R^2$ é dito ponto construtível se $A \in E_\infty$. Uma reta r (respec. uma circunferência c) do plano R^2 é dita construtível, se r (respec. c) está em E_∞.

Vamos agora demonstrar alguns resultados que precisaremos para dar uma resposta aos problemas clássicos. Inicialmente, determinaremos o subcorpo dos números construtíveis reais. As duas proposições a seguir, nos permitem esta construção:

Proposição 1:

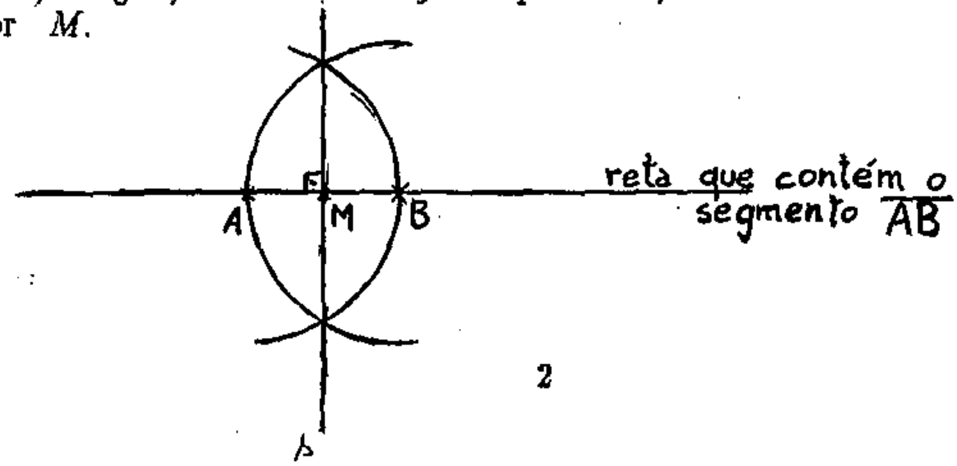
a) Dados dois pontos $A, B \in E_\infty$ e se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, então $M \in E_\infty$. Além disso, as retas perpendiculares a $\overline{AB}$ passando pelos pontos A, B e M são construtíveis.

b) Sejam $A \in E_\infty$ e r uma reta em E_∞ tal que $A \in r$. Se $B, C \in E_\infty$ então existe $X \in E_\infty$ tal que $X \in r$ e $|\overline{AX}| = |\overline{BC}|$

c) Seja r uma reta em E_∞. Seja $A \in E_\infty$ tal que $A \notin r$, então a reta $s \perp r$ passando por A é construtível.

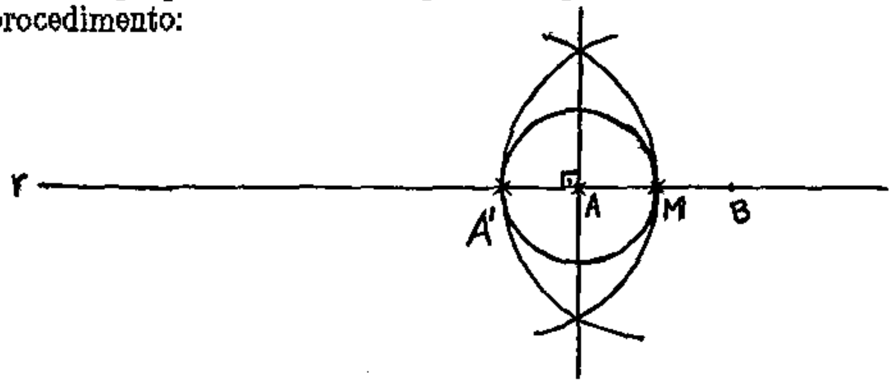
Demonstração:

a) a seguir, temos a construção do ponto M, e da reta $s \perp \overline{AB}$ passando por M.



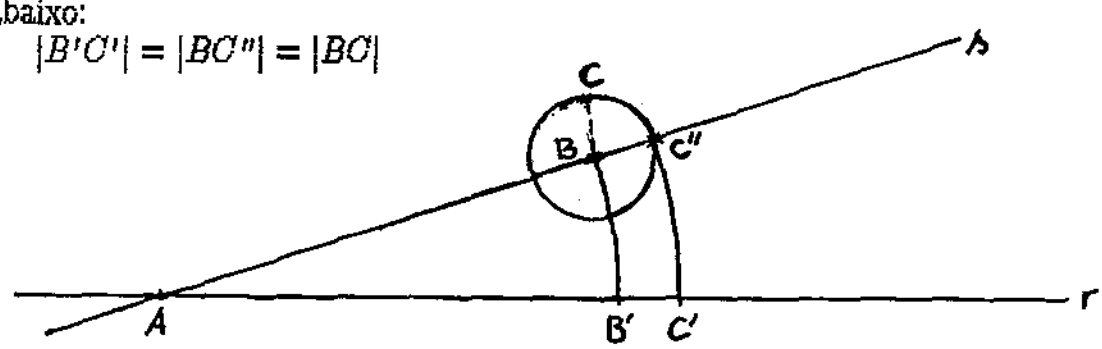
Para construir as retas perpendiculares a $\overline{AB}$ passando por A e B, procedemos do seguinte modo:

Consideramos a reta r que contém $\overline{AB}$ (a reta determinada por A e B) e construímos a circunferência c de centro A e raio $|\overline{AM}|$, determinando $A' = r \cap c$. Então A é o ponto médio de $\overline{A'M}$ e pelo processo anterior, a reta perpendicular a r passando por A é determinada. Analogamente, determinamos a reta perpendicular a r passando por B. O desenho abaixo, mostra este procedimento:



b) construindo circunferência de centro B e raio $|\overline{BC}|$ e depois tomando circunferências de centro em A, podemos supor que $A, B, C \in r$. Veja a figura abaixo:

$|B'C'| = |BC''| = |BC|$



Assim, podemos supor, sem perda de generalidade que os pontos $A, B, C \in r$. Temos (veja figura a seguir):

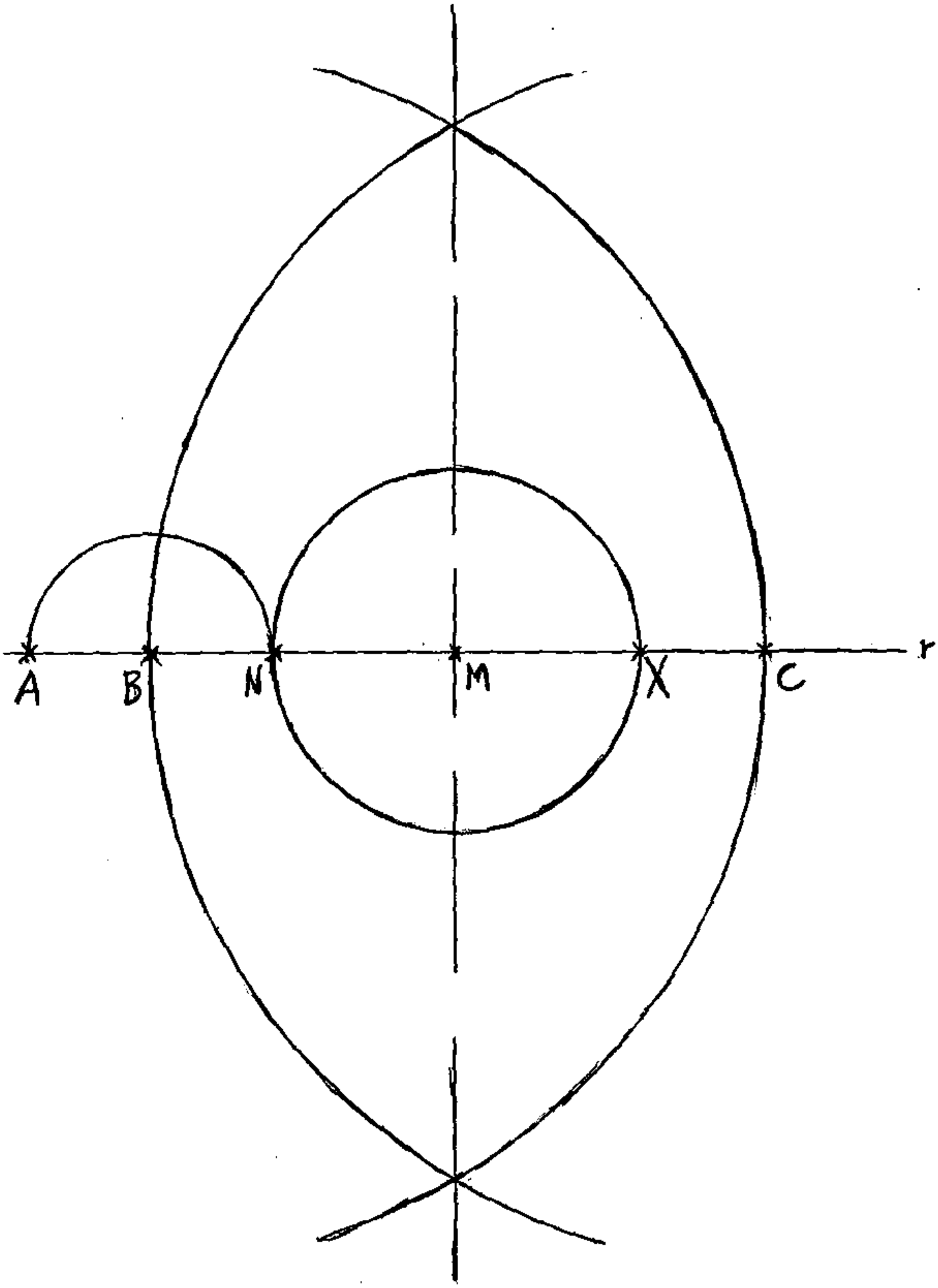
$|\overline{AX}| = |\overline{AB}| + |\overline{BN}| + |\overline{NX}|$

$|\overline{BC}| = |\overline{BN}| + |\overline{NX}| + |\overline{XC}|$. Logo para termos

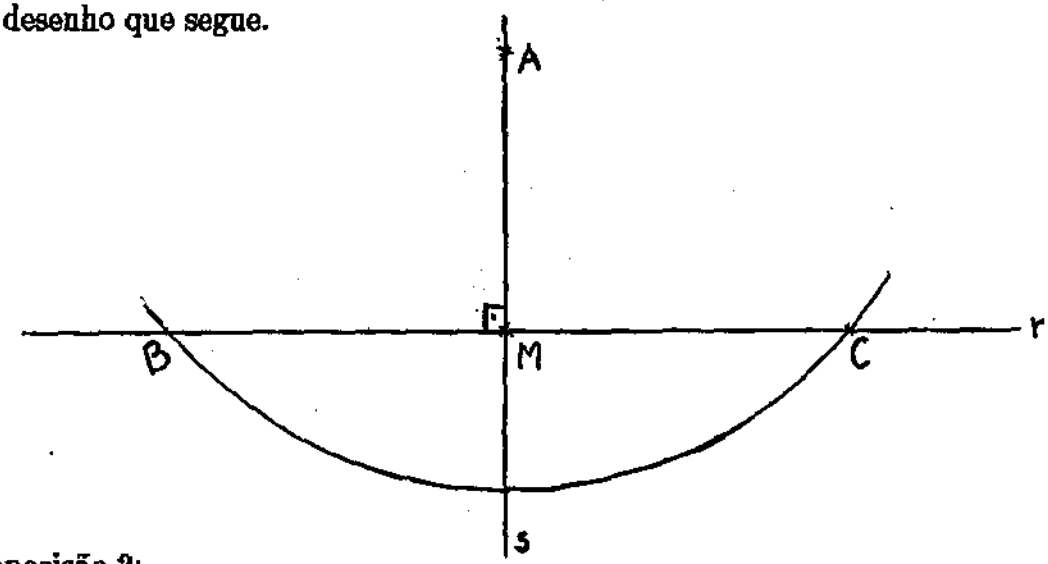
$|\overline{AX}| = |\overline{BC}|$ basta ver que $|\overline{AB}| = |\overline{XC}|$.

De fato: de $|\overline{AB}|=|\overline{BN}|$ segue que

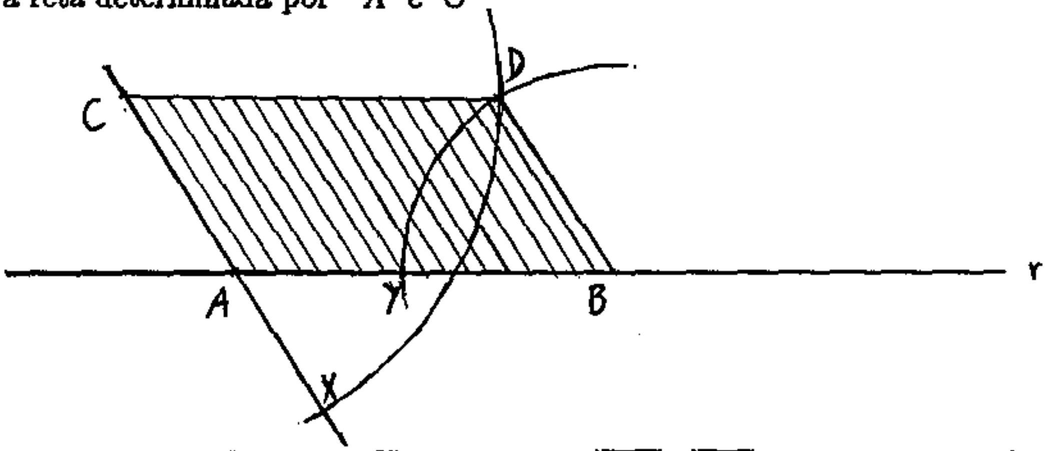
$|\overline{BN}|=|\overline{BM}|-|\overline{NM}|= |\overline{MC}|-|\overline{MX}|=|\overline{XC}|$. Logo obtemos $|\overline{AX}|=|\overline{BC}|$, com $X \in r$.


r
A
B
N
M
X
C

c) como r está em E_∞, existe $B \in r$ tal que $B \in E_\infty$. Seja C o ponto de intersecção entre r e a circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$. Então s é a reta perpendicular a $\overline{BC}$ por M. Veja o desenho que segue.



Proposição 2:
Sejam $A, B, C \in E_\infty$ não alinhados.
Então $\exists D \in E_\infty$ tal que A, B, C, D formam um paralelogramo.
Demonstração:
Sejam r a reta determinada por A e B
s a reta determinada por A e C



Pela proposição 1-b, existe $X \in s$ tal que $|\overline{CX}|=|\overline{AB}|$, existe $y \in r$ tal que $|\overline{BY}|=|\overline{CA}|$. Seja D o ponto determinado pela interseção das circunferências de centro C e raio $|\overline{CX}|$ e de centro B e raio $|\overline{BY}|$. Claramente $|\overline{CA}|=|\overline{DB}|$ e $|\overline{CD}|=|\overline{AB}|$, isto é, $ABCD$ é um paralelogramo

Definição 6:

Seja $\alpha \in R$. α é dito construtível se o ponto $(\alpha, 0) \in E_\infty$.

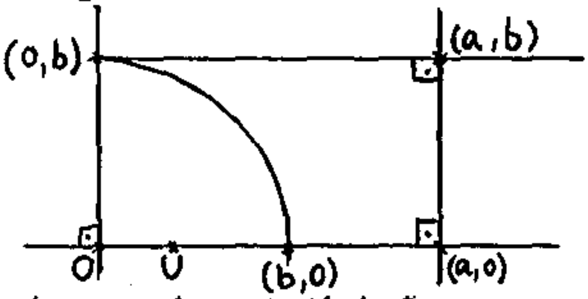
A proposição a seguir caracteriza os números reais construtíveis:

Proposição 3:

Um ponto $A = (a, b) \in R^2$ é construtível $\Leftrightarrow$ $a, b \in R$ são números construtíveis.

Demonstração:

O resultado segue imediatamente do desenho abaixo:



Assim os números reais construtíveis são exatamente as coordenadas dos pontos construtíveis do plano R^2 .

TEOREMA 1:

Seja $C_R = \{x \in R/(x,0) \in E_\infty\}$. Então C_R é um corpo. Além disso, $Q \subset C_R$ e para qualquer $r \in C_R$, $r > 0$, $\sqrt{r} \in C_R$

Demonstração:

Para ver que C_R é um corpo, basta ver que:

i) α, $\beta \in C_R$ então $\alpha - \beta \in C_R$

ii) α, $\beta \in C_R$ então $\alpha.\beta \in C_R$

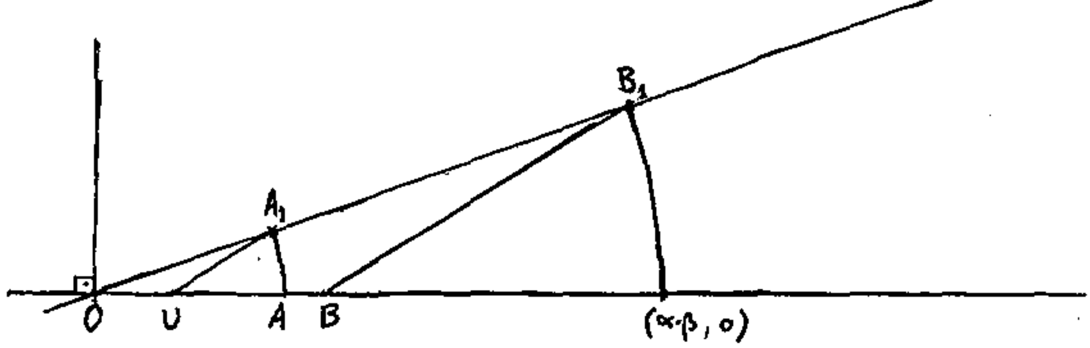
iii) $0 \neq \alpha \in C_R$ então $\frac{1}{\alpha} \in C_R$

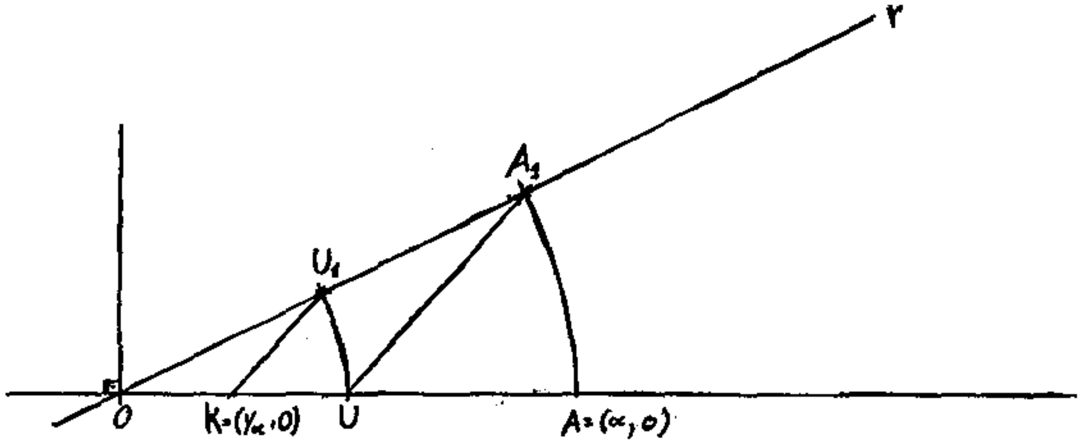
pela prop. 1-b) vale i) . Sejam $\alpha, \beta \in C_R$ e $A = (\alpha, 0)$, $B = (\beta, 0)$. Seja r uma reta construtível qualquer. Sejam A_1, $B_1 \in r$ tais que $|\overline{0A_1}| = |\overline{0A}| = \alpha$ e $\overline{BB_1} // \overline{UA_1}$. Por semelhança de triângulos temos:

$\frac{\alpha}{1} = \frac{|\overline{0B_1}|}{\beta}$ logo $|\overline{0B_1}| = \alpha.\beta$, portanto vale ii).

Seja $0 \neq \alpha \in C_R$ e $U_1 \in r$ tal que $|\overline{0U_1}| = |\overline{0U}| = 1$ e $K \in \overline{0U}$ tal que $\overline{KU_1} // \overline{UA_1}$.

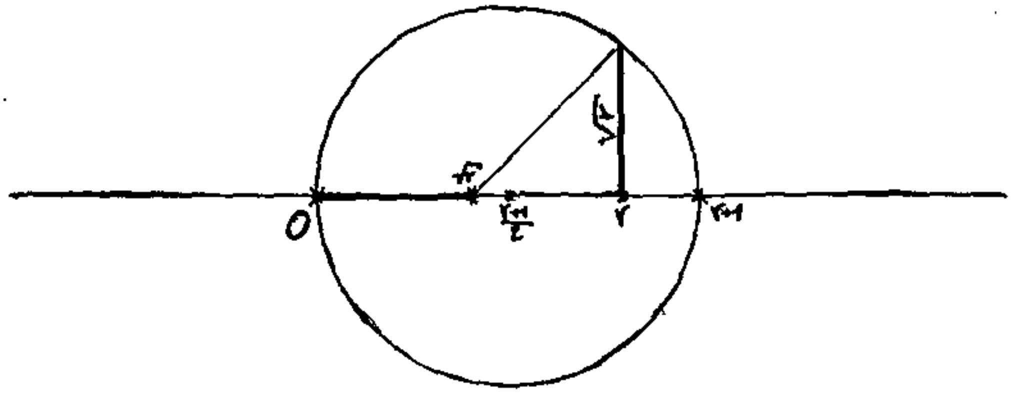
Por semelhança de triângulos, segue que $|\overline{OK}| = \frac{1}{\alpha}$.





Agora sabemos que 0 e $1 \in C_R$. Assim, construindo sucessivamente as circunferências de centro 1 e raio 1 , de centro 2 e raio 1, de centro 3 e raio 1, ..., de centro $n \in N$ e raio 1, ... obtemos que $N \subset C_R$. Analogamente, $Z \subset C_R$. Por iii) e ii) concluímos que $Q \subset C_R$.

Seja $r > 0$, $r \in C_R$. Temos pela figura abaixo que $\sqrt{r} \in C_R$:



Agora precisamos de certos conceitos da Álgebra. O leitor que sentir necessidade de maiores detalhes com respeito a estes conceitos e propriedades, pode consultar, por exemplo, [2] p. 88- 100.

i) $\alpha \in R$ diz-se algébrico, se existe $p(x) \in Q[x] \setminus \{0\}$ polinômio não nulo com coeficientes em Q , tal que $p(\alpha) = 0$. Neste caso, existe um polinômio mônico (que denotamos por $irr_\alpha(x)$) que é de mínimo grau entre os polinômios que se anulam em α.

ii) Uma extensão N de Q é dita algébrica se para qualquer $\alpha \in N$, α é algébrico.

iii) Dado α algébrico, existe um corpo $Q[\alpha] \supseteq Q$, tal que $Q[\alpha]$ é o menor corpo que contém Q e α. De modo semelhante, se A é um conjunto de números algébricos existe um corpo mínimo que contém Q e A, o qual denotaremos por $Q[A]$.

iv) Seja α algébrico e consideremos $irr_\alpha(x)$ o polinômio minimal de α sobre Q.

A dimensão de $Q[\alpha]$ sobre Q, denotada por $[Q[\alpha] : Q]$, é igual ao grau de $irr_\alpha(x)$.

v) Teorema do produto dos graus.

Seja M extensão de N tal que $[M : N] < \infty$.

Seja E extensão de N tal que $M \supset E \supset N$.

Então $[M : N] = [M : E].[E : N]$

Com estes conceitos e com o teorema 2 a seguir, resolveremos os três problemas clássicos enunciados na introdução (ver teor 3)

Teorema 2: C_R é uma extensão algébrica de Q , tal que para qualquer $\alpha \in C_R$, o grau do polinômio $irr_\alpha(x)$ é 2^t , para certo $t \in N$, isto é,

$[Q[\alpha]:Q]$ é potência de dois.

Seja $A=(u,v)\in E_n$. Dizemos que u e v são coordenadas de E_n, e denotaremos por A_n o conjunto de todas as coordenadas de E_n. Temos que $A_n\subset C_R$, $\forall n\in N$. Sejam $K_0=Q$, $K_1=Q[A_1]$, ..., $K_n=Q[A_n]$, ...

Como $A_0\subset A_1\subset ....\subset A_n\subset ....\subset C_R$ e $Q\subset C_R$, temos $Q=K_0\subset K_1\subset ...\subset K_n\subset ...\subset C_R$. Também $\alpha\in A_n$, então $\alpha\in K_n$.

Logo definindo $K_\infty=U_{n=0}^{\infty}K_n$ temos $K_\infty=C_R$.

<u>Dem. do Teor. 2</u>: basta provar que $\forall\alpha\in C_R$, tem-se $[Q[\alpha]:Q]=2^r$ com $r\in N$. De fato $\alpha\in C_R=U_{n=0}^{\infty}K_n$, e então $\exists n\in N$ tal que $\alpha\in K_n$. Como $[Q[\alpha]:Q]$ divide $[K_n:Q]$, pelo teorema do produto dos graus, basta ver que $[K_n:Q]=2^s$ com $s\in N$. Mostremos que $[K_n:Q]=2^s$, $s\in N$ por indução sobre n.

Para $n=0$, temos $K_0=Q$ e o teorema é válido, $[K_0:Q]=1=2^0$. (Note ainda que para $n=1$, temos $K_1=Q[\sqrt{3}]$ e $[K_1:Q]=2$ pois $irr_{\sqrt{3}}(x)=x^2-3$ e o teorema é válido).

Suponhamos por indução que $[K_i:Q]=2^{t_i}$ com $t_i\in N$ $\forall 0\leq i<n$. Como $K_{n-1}\subset K_n$ e $[K_n:Q]=[K_n:K_{n-1}]\,[K_{n-1}:Q]$, basta provar que $[K_n:K_{n-1}]$ é potência de dois.

Seja $L=K_n$ e $L_0=K_{n-1}$ $\therefore$ $L=L_0[A_n]$. Se $A_n=\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ temos então que $L=L_0[\alpha_1,...,\alpha_k]$. Sejam

$$L_0\subset L_1=L_0[\alpha_1]\subset ...\subset L_i=L_{i-1}[\alpha_i]\subset ...\subset L_k=L$$

Então é suficiente provar que $[L_i:L_{i-1}]$ é potência de dois. De fato, provemos que $[L_i:L_{i-1}]=1$ ou 2, $1\leq i\leq k$, $L_i=L_{i-1}[\alpha_i]$, $\alpha_i\in A_n$.

Assim existe $\beta_i\in A_n$ tal que $A_i=(\alpha_i,\beta_i)$ ou $B_i=(\beta_i,\alpha_i)$ está em E_n, isto é, $A_i\in E_n$ ou $B_i\in E_n$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $A_i\in E_n$.

Como $E_n=<E_{n-1}>$ temos que $A_i=(\alpha_i,\beta_i)$ é obtido por uma das três operações elementares em E_{n-1}, isto é:

a) A_i é determinado pela intersecção de duas retas em E_{n-1} ; ou

b) A_i é determinado pela intersecção de uma reta com uma circunferência em E_{n-1} ; ou

c) A_i é determinado pela intersecção de duas circunferências em E_{n-1}.

Mas nestes casos, α_i satisfaz uma equação de grau um (no caso a) ou uma equação de grau dois (nos casos b ou c) com coeficientes sobre o corpo $K_{n-1}=Q[A_{n-1}]$.

Como $K_{n-1}=L_0\subset L_{i-1}$ $1\leq i\leq k$ segue-se que α_i é raiz de um polinômio de grau um ou dois sobre o corpo L_{i-1} e portanto, $[L_i:L_{i-1}]=1$ ou 2.

Proposição 4:

a) Se n é ímpar ≥ 3 e p primo (positivo) então $\sqrt[n]{p} \notin C_R$

b) $u = \cos \frac{2\pi}{18} \notin C_R$

Demonstração:

a) Seja $\alpha = \sqrt[n]{p}$, então $irr_\alpha(x) = x^n - p$, de onde o grau de $irr_\alpha(x)$ é n. Pelo teorema 2, $\alpha \notin C_R$.

b) Seja $\theta = \frac{2\pi}{18}$ então $3\theta = \frac{2\pi}{6}$

Da trigonometria, temos que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Assim para $\theta = \frac{2\pi}{18}$, temos $\frac{1}{2} = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Logo $irr_{\cos\theta}(x) = 8x^3 - 6x - 1$ e assim o grau de $irr_{\cos\theta}(x)$ é 3 e pelo teorema 2, $\cos \frac{2\pi}{18} \notin C_R$.

Teorema 3:

a) Não existe $\alpha \in C_R$ tal que o volume do cubo de aresta α seja o dobro do volume do cubo de aresta 1.

b) Não existe $\alpha \in C_R$ tal que a área do quadrado de lado α seja igual a área do círculo de raio 1.

c) É impossível, com régua (sem marcas) e o compasso trissectar o ângulo de 60^o.

Demonstração:

a) Suponhamos que existe tal $\alpha \in C_R$. Então $\alpha^3 = 2$. Daí $irr_\alpha(x) = x^3 - 2$, de onde obtemos que o grau de $irr_\alpha(x)$ é 3, absurdo. Logo $\alpha \notin C_R$.

b) Suponhamos que existe tal $\alpha \in C_R$. Então $\alpha^2 = \pi$. Como α é algébrico, temos que π é algébrico, o que é um absurdo. Logo $\alpha \notin C_R$.

c) Se $3\theta = 60^o$ então $\theta = \frac{2\pi}{18}$ e portanto $\cos\theta \notin C_R$. Logo 60^o não pode ser trissectado.

Assim, resolvemos os três problemas clássicos da geometria, usando resultados da álgebra moderna. A seguir, caracterizamos os polígonos construtíveis, com régua e compasso, enunciando o teorema de Gauss, do qual omitiremos a demonstração.

Definição 7:

Um polígono em R^2 é dito construtível, se seus vértices são pontos construtíveis.

Proposição 5:

a) Todo polígono de 2^r lados é construtível, $r \in N$

b) Se um polígono regular de n lados é construtível então o polígono regular de $2n$ lados também é construtível.

c) Se p é primo ≥ 3 e um polígono de p lados é construtível, então existe $s \in N$ tal que $p = 2^{2^s} + 1$.

(Em particular o heptágono regular é não construtível)

Demonstração:

a) e b) decorrem do fato que o quadrado é construtível e é possível bissectar ângulos.

c) Seja $\theta = \frac{2\pi}{p}$. Então $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in E_\infty$ e pelo teorema do produto dos graus, temos $[Q[\alpha,\beta] : Q] = 2^m$ onde $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$ e $m \in N$. Fazendo $i = \sqrt{-1}$ (a unidade imaginária complexa) temos $[Q[\alpha,\beta,i] : Q] = 2^{m+1}$ com $Q[\alpha,\beta,i] \subset C$, já que $i \notin Q[\alpha,\beta]$ e $irr_i(x) = x^2 + 1$. Seja $\varsigma = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = \alpha + i\beta \in Q[\alpha,\beta,i]$ e daí segue que $Q[\varsigma] \subset Q[\alpha,\beta,i]$ e então pelo teorema do produto dos graus $[Q[\varsigma] : Q] = 2^r$. Mas, ς é raiz p-ésima da unidade e $x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1)$ de onde concluímos que $irr_\varsigma(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + ...x + 1$, já que este último polinômio é irredutível (ver [2] p 85). E então $p - 1 = 2^r$. Logo $p = 2^r + 1$. Para obter o resultado desejado, basta ver que $r = 2^s$ com $s \in N$. Suponhamos que $t > 1$ é um fator ímpar de r. Seja $r = tv$. Logo $p = 2^r + 1 = (2^v)^t + 1$ onde $1 < t$ é impar.

Então $p = (2^v + 1)[(2^v)^{t-1} - (2^v)^{t-2} + (2^v)^{t-3} - ... + 1]$ o que é um absurdo, pois p é primo.

Teorema 4 (de Gauss)

Um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, $n = 2^r.P_1 \cdots P_k$ onde $r \in N$ e $P_1, ..., P_k$ são primos da forma $P_i = 2^{2^{s_i}} + 1$ com $1 \leq i \leq k$ e $k, s_i \in N$.

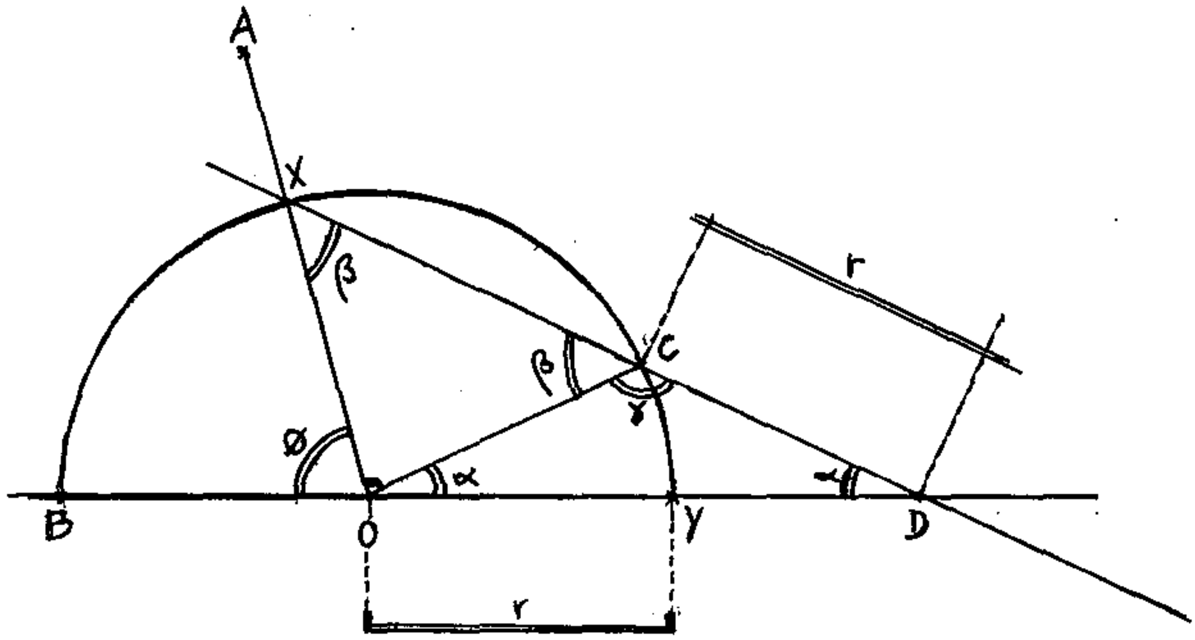
Observação:

Os números da forma $F_s = 2^{2^s} + 1$ são chamados de números de Fermat.

Agora, mostraremos que é possível a trissecção de um ângulo θ, com o uso da régua com marcas e compasso.

De acordo com o que provamos anteriormente, é fundamental que a régua, neste caso, tenha escala.

Seja $r \equiv$ unidade da escala da régua



Construímos uma semicircunferência de centro 0 e raio r, como na figura. Seja $\theta = \measuredangle A0B$. Consideremos os pontos X, Y tais que $\overline{|0X|} = \overline{|0Y|} = r$.

É possível marcar pontos C e D como na figura, tal que $|\overline{CD}| = r$; mantendo a "extremidade" da régua no ponto X, temos que a distância entre os pontos alinhados com X, um sobre a semicircunferência e o outro sobre $\overline{0Y}$, varia de 0 a $+\infty$. Assim, por continuidade, $\exists C, D$.

Temos pela figura que:
$\theta + (180 - 2\beta) + \alpha = 180$ então $\theta = 2\beta - \alpha$
$2\alpha + \gamma = 180 = \gamma + \beta$ então $\beta = 2\alpha$
logo $\theta = 4\alpha - \alpha = 3\alpha$, isto é $\alpha = \frac{\theta}{3}$

Recomendamos a bibliografia a seguir, principalmente ao leitor mais interessado, destacando [2] no qual nossa posição foi baseada.

BIBLIOGRAFIA

1. ARTIN, E. - "Galois Theory". University of Notre Dame (1971)
2. GONÇALVES, A. - "Introdução a Álgebra". IMPA (1979)
3. JACY MONTEIRO, L.H. - "Teoria de Galois". VII CBM (1969)
4. KAPLANSKI, I. - "Introdução a Teoria de Galois". IMPA (1966)
5. STEWART, I. - "Galois Theory". Chapman and Hall (1975)

AGRADECIMENTO: Desejo agradecer ao Professor Jaime Ripoll, o qual convidou-me a proferir esta palestra. Também desejo agradecer ao Professor Miguel Ferrero, quem orientou-me na preparação da mesma.

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

1. Marcos Sebastiani - Palestra Inaugural - MAR/88.
2. José Francisco Porto da Silveira - A Fatorial no Infinito - MAR/88.
3. Miguel A. Ferrero - Um problema em Aberto em Álgebra - MAI/88.
4. Willy G. Engel - Problemas da História da Matemática Antiga - JUN/88.
5. Cydara C. Ripoll - A Série $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ converge!!! - JUL/88.
6. Vera Clotilde Garcia Carneiro - O Caos - SET/88.
7. Ada Maria de S. Doering - A Conjectura de Fermat - SET/88.
8. Elsa Mundstock - Microinformática Aplicada as Áreas de Matemática e Estatística - SET/88.
9. Léa Fagundes - Psicologia Cognitiva e Educação Matemática - OUT/88.
10. Maria Luisa Souza - Breve Relato Sobre o Ensino de Matemática - OUT/88.
11. João Luis Becker - Teoria Axiomática da Utilidade Esperada - NOV/88.
12. Ary Tietböhl - Criação do Instituto de Matemática da UFRGS - MAR/89.
13. Alvino A. Sant'Ana - Construção por Meio de Régua e Compasso - ABR/89.
14. Oclide José Dotto - A Regra dos Sinais de Descartes - ABR/89.
15. Antônio Rodrigues - Reminiscências de um Diretor do Instituto de Matemática - MAI/89.
16. Antonio Vladimir Martins - Problemas dos 3 Corpos e a Solução Colinear de Euler - JUN/89.
17. Richard Aron - Aproximation of Continuons Functions - AGO/89.
18. Jorge Mujica - Álgebras de Funções Holomorfas em Espaços de Banach - SET/89.

Universidade Federal do Rio Grande Sul
Reitor: Professor Tuiskon Dick

Instituto de Matemática
Diretor: Professor Aron Taitelbaum
Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Coordenador: Professora Jandyra G. Fachel
Secretária: Rosaura Monteiro Pinheiro

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:
Série A: Trabalho de Pesquisa
Série B: Trabalho de Apoio Didático
Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS
Série D: Trabalho de Graduação
Série E: Dissertações de Mestrado
Série F: Trabalho de Divulgação
Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:
NAEC - Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Instituto de Matemática - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91.500 - Agronomia - POA/RS
Telefone: 36.11.59 ou 36.17.85 Ramal: 252