PALESTRA INAUGURAL

COLÓQUIO SBM/UFRGS

Marcos Sebastiani

Série C1/MAR/88

PALESTRA INAUGURAL

Prof. Marcos Sebastiani

Fui encarregado, pelo organizador do Colóquio, desta palestra inaugural, que deve ser como um convite para os colegas darem seu apoio ao desenvolvimento deste Colóquio.

Deveria abordar um campo extenso por demais para as minhas possibilidades, mas farei o possível.

Desejamos que este Colóquio ajude a renovar o interesse dos colegas em ampliar e aprofundar seus conhecimentos matemáticos e a romper o isolamento em que estão acostumados a trabalhar.

Nos cursos de graduação ensina-se Análise, Geometria, Álgebra. Claro que não vou falar extensivamente destas disciplinas, pois não possuo suficientes conhecimentos para tanto. Apenas vou indicar algumas linhas de pensamento dentro delas e alguma relação entre elas.

A maioria das noções básicas de Cálculo e Análise tem a sua origem na Mecânica; mais particularmente, na Mecânica Celeste. Após as observações de Tycho Brahe sobre o movimento de Marte, Kepler teve a intuição genial de compreender o movimento dos planetas e formulou as célebres Leis de Kepler; em particular, o fato de que os planetas descrevem uma elipse da qual o Sol ocupa um dos focos. Mas o espírito humano não se satisfaz com a descrição de um fenômeno: nós desejamos a explicação do mesmo. A explicação deve ser materialista e consiste em demonstrar matematicamente as leis que regem os fenômenos, a partir de princípios simples e universais.

Newton formulou os princípios básicos de Mecânica e a Lei de Gravitação Universal e, a partir deles, usando o cálculo diferencial e integral que ele mesmo e Leibnitz tinham criado, demonstrou matematicamente as Leis de Kepler.

Essencialmente, a demonstração consiste em resolver uma equação diferencial. O estudo das equações diferenciais, ordinárias e parciais, é talvez a parte mais importante e profunda da Matemática.

Uma equação diferencial ordinária é da forma:

$$F\ (t,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n)}\ ) = 0$$

onde $y = y\ (t)$ é a função incógnita. Também podemos considerar sistemas. Como já mostra o problema dos três corpos, nem sempre é possível resolver explicitamente uma equação diferencial. Neste caso, o que se faz é um estudo qualitativo: trata-se de saber como é o conjunto das soluções, se tem soluções limitadas, soluções periódicas, etc.

No caso de um sistema do tipo:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1\ (x_1,\ x_2\ )\ ,\quad \frac{dx_2}{dt} = f_2\ (x_1,\ x_2\ )\qquad ,\ f_1\ ,\ f_2 \in C^1(R^2)$$

a teoria de Poincaré-Bendixon dá informações gerais e muito valiosas sobre o comportamento do conjunto das soluçoẽs. Porem, nem sempre é possível obter o estudo qualitativo de um sistema aplicando diretamente teoria e é necessária uma pesquisa particular de cada caso.

Se considerarmos um sistema $n \times n$ em lugar de 2×2, a situação é muitissímo mais difícil e o estudo deste problema é o objeto da Teoria de Sistemas Dinâmicos.

O ensino da Geometria na Graduação não vai muito além do estudo feito pelos gregos das figuras da Geometria Elementar: retas, círculos, seções cônicas. Porém, a introdução de métodos algébricos, mediante a introdução de coordenadas cartesianas, permite uma abordagem mais sistemática, e leva naturalmente ao problema de estudar outras figuras.

As cônicas são curvas de grau 2, mas já problemas clássicos de Geometria Elementar levam a considerar curvas de grau superior, como a trisseção do angulo leva à trissectriz.

Um problema fundamental em Geometria é estudar a intersecção de figuras. Por exemplo, uma reta corta uma cônica "geralmente" em dois pontos. Se passamos ao campo complexo, se contamos duas vezes o ponto de contato de uma tangente, e se consideramos as intersecções no infinito, podemos dizer que sempre a reta corta a cônica em dois pontos.

O problema de intersecção de curvas planas tem uma resposta satisfatória no plano projetivo complexo: a intersecção de uma curva de grau p e outra de grau q consta de pq pontos, contados com as suas multiplicidades, a menos que esta intersecção seja outra curva.

Consideremos agora esta situação: temos uma curva C de grau p e, nela, pontos $A_1, \ldots ,A_k$ associados a inteiros positivos $m_1, \ldots ,m_k$. Perguntamos pelas curvas K de grau q que cortam C em A_1 com multiplicidade $\geq m_1$, A_2 com multiplicidade $\geq m_2$, etc. O que precede impõe a condição: $m_1 + \ldots + m_k \leq pq$. Se impormos condições adicionais a K podemos ter só um número finito de tais curvas e surge o problema de calcular este número. Caso muito particular deste tipo de problema é o problema de Apolônio. Outros problemas aparecem quando consideramos pontos singulares. Se p é um ponto singular da curva C a intersecção $C \cap \Sigma_\epsilon$ onde Σ_ϵ é uma esfera de raio ϵ de centro p é formada, para $\epsilon > 0$ pequeno, por um número finito de nós enlaçados em S^3. Tem sido objeto de estudos profundos o problema de relacionar os invariantes algébrico-geométricos da singularidade com a topologia desta configuração de nós.

Estes problemas aparecem também, e são bem mais difíceis, em dimensões superiores: para superfícies, variedades, em lugar de curvas.

Em Álgebra o problema básico é a resolução de equações. Por exemplo, resolver uma equação $X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ onde $a_j \in C$. Mas, do ponto de vista da Álgebra, entendemos por resolver: achar uma formúla que expresse as soluções a partir dos coeficientes realizando com estes, operações algébricas: soma, multiplicação, divisão, radiciação. Uma tal formúla geral inexiste se $n \geq 5$. A resposta ao problema da resolução " por radicais " vem dada pela Teoria de Galois em termos de estrutura de grupos finitos.

No caso anterior procuramos todas as soluções. Porém, um problema mais difícil é buscar as soluções que estão em um corpo dado. Por exemplo, a célebre equação de Fermat, consiste em resolver $X^n + Y^n = 1$ no campo dos números racionais. Deste ponto de vista, temos a Aritmética como parte da Álgebra.

Apesar da diversificação em múltiplas especialidades a Matemática tem, porém, uma profunda unidade estrutural. Isto é visivel em certos problemas de importância fundamental.

Consideremos, por exemplo, um polinômio p (x,y) com coeficientes racionais de grau n. Suponhamos, para simplificar, que a curva K defini-

da por $p = 0$ no plano projetivo complexo não tem singularidades.
Problema: a equação $p(x,y) = 0$ tem um número finito de soluções racionais ? Por exemplo, se $p(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ então tem infinitas enquanto que se $p(x,y) = x^3 + y^3 - 1$ então, só tem duas.

Consideremos $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, inteiro não negativo. Este g é um invariante algébrico-geométrico de K. De fato, g determina n e n é o número de interseções de K com uma reta. Mas g possue também uma interpretação analítica: K é uma superfície de Riemann compacta e g é a dimensão do espaço de diferenciais holomorfas de grau 1 em K.

De acordo a conjetura de Mordell, provada recentemente por Faltings, se $g \geq 2$ então a equação $p(x,y) = 0$ só tem um número finito de soluções racionais (condição suficiente).

Marcos Sebastiani
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Av. Bento Gonçalves, 9500
91 500 - Porto Alegre - RS
Brasil

Série C : Colóquio SBM/UFRGS

1. Marcos Sebastiani - <u>Palestra Inaugural</u> - MAR/88.