PROBLEMAS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA ANTIGA

COLÓQUIO SBM/UFRGS

Willy G. Engel

Série C4/JUN/88

Problemas da História da Matemática Antiga.

Willy Günter Engel

Escrever sobre a Matemática da Antiguidade implica em duas ordens de problemas: os problemas históricos e os problemas matemáticos propriamente ditos que surgiram durante o decurso de sua história. O objetivo precípuo deste ensaio é a consideração acerca do primeiro tipo de problemas, sem deixar entretanto de lado os segundos, de vez que somente estes, na medida em que foram reputados como relevantes pelos matemáticos das respectivas épocas - pois épocas diferentes nunca encaram como essenciais os mesmos problemas - emprestam colorido, forma e conteúdo à análise e à síntese como as que neste ensaio são apresentadas.

A rigor, deveriamos começar com as noções matemáticas do homem primitivo, ou seja, pré-histórico, que já lidava, embora apenas intuitiva e empiricamente, com números, grandezas e formas geométricas. O pouco espaço disponivel aqui nos leva a declinar deste empreendimento: nos limitamos, dentro deste contexto, a mencionar o cap. I de Boyer e a bibliografia citada por este[1].

Em ordem cronológica se seguem as primeiras assim chamadas "culturas superiores" pré-gregas, a saber, as orientais antigas: egípcia e babilônica ou mesopotâmica. O florescimento cultural egípcio atingiu o apogeu durante o "Médio Império" (~ - 2040 .... ~ - 1790)[2], "a época dos grandes textos matemáticos"[3], sendo de registrar que em comparação com a coetânia matemática babilônica, "a egípcia sempre permaneceu a mais primitiva"[4]. Isso estaria ligado "com o modo mais intuitivo da cultura egípcia e o cárater mais abstrato da babilônica, o que se reflete inclusive em sua matemática"[5].

Tal contraste nos faz meditar em Oswald Spengler, cujo "pensamento", como já foi dito em outro lugar, "se move nos vastos espaços da História universal"[6], e que na sua obra semi-esquecida "A Decadência do Ocidente"[7], célebre na época de seu aparecimento, logo ao término da Primeira Guerra, escrevia que toda cultura superior acabaria por criar a sua própria matemática[8]. Um tema explorado e discutido num pequeno livro de nossa autoria, e que diz respeito ao fato de que cada cultura traz consigo o seu próprio *a priori cultural*[9]: a índole peculiar a si mesma de cada cultura e, portanto, característica e exclusiva dela.

Os gregos consideravam os egípcios os seus grandes mestres no que tange a geometria, atribuindo a invenção da geometria egípcia à solução do problema das medidas dos campos após as famosas inundações do Nilo[10]. Atualmente se reconhece os "escribas" como os conhecedores egípcios da geometria[11], bem como de toda matemática restante que era utilizada para fins práticos: cálculo de áreas e volumes elementares (retângulo, triângulo, trapézio; cubo, paralelepípedo, tronco de pirâmide e pirâmede[12]), embora nem sempre egípcios e babilônios coincidissem em seus métodos e resultados. Por exemplo, quanto ao valor que corresponderia ao número π[13]: cada qual, já aqui com seu próprio *a priori cultural*. No que se refere à matemática babilônica, o mais relevante sem dúvida é a "algebra babilônica"; enquanto egípcios resolvem problemas algébricos de primeiro e segundo grau (à sua maneira, bem entendido), os babilônios chegam até a resolução do que hoje consideramos sistemas de equações lineares simultâneas e de problemas linear-quadráticos (mistos) e cúbicos [14], gravados todos estes conhecimentos na forma de "caractéres cuneiformes" sobre tijoletas de barro, que depois, em olarias, eram queimadas para secar e endurecer.

Não cabe aqui discutirmos em detalhe o sistema numérico decádico, aditivo e não posicional dos egípcios por um lado, e o sistema posicional sexagesimal combinado com o decimal dos babilônicos por outro [15].

A maioria dos "textos de problemas" - o aspecto sob o qual se apresenta a matemática babilônica - foi elaborada, aproximadamente, na mesma época em que a correspondente egípcia (Médio Império). As épocas posteriores da matemática babilônica são decadentes - como no caso egípcio - poucos e insignificantes textos foram escritos. Textos tardios, predominantemente no campo astronômico, são "caldeus", não babilônicos autênticos. Como se vê, tanto a matemática egípcia como a babilônica tiveram seu crescimento, florescimento e fim. Ou, como escreve poeticamente Spengler: "..... que ambas, de uma feita, nasceram numa grande hora da História e que então [ao surgir a matemática grega [16]; W.E.] já estavam extintas há muito tempo" [17]. Pelo menos 1000 anos antes de Pitágoras!.

A menção de Pitágoras nos leva à matemática grega. Esta não pode ter-se iniciado com o próprio Pitágoras, nem com o bem anterior Tales de Mileto, pois conhecimentos matemáticos elementares, práticos, mas manejados com grande habilidade, já eram indispensáveis para todos os relevantes empreendimentos comerciais e expedições militares (guerra de Tróia!) dos gregos, em épocas bastante anteriores a de Tales. O que se inicia com Tales (- 624? .... - 545?) pode chamar-se de "ma temática superior grega", que numa evolução de apenas quatro séculos (~ - 600 .... ~ - 200) atinge o apogeu, como sucedeu similarmente com as mais remotas egípcia e babilônica.

Considerar, entretanto, a matemática de Tales como "superior" pode, à primeira vista, parecer ridículo, a nós outros, do século XX.

Pois ele teria aprendido o pouco que sabia durante as suas extensas viagens ao Oriente, inclusive ao Egito: o cálculo da altura das pirâmides pelo comprimento de sua sombra, muitas sentenças que se relacionam com o círculo e suas relações de simetria (por exemplo que o círculo é dividido em partes iguais pelo seu diâmetro), bem como a questão da congruência de triângulos, a noção de que ângulos opostos pelo vértice são iguais, etc., e tudo ainda sem demonstração de teoremas!.

A este respeito escreve o historiador da matemática grega Árpád Szabó: "deve ter-se seguramente conhecido o conceito de <<ângulo>> já na época de TALES. A elaboração deste conceito parece ter sido uma nova conquista dos gregos"[18]. Se, entretanto, isto é assim, o original reconhecimento da importância do ângulo pelos gregos, conceito indispensável para toda a elaboração da geometria euclidiana, então fica mais uma vez demonstrado, não somente o que em outro lugar chamamos o "apriorismo cultural do conhecimento matemático"[19], mas ainda o então recém iniciado (na época de Tales) período de florescimento do que viria a ser, pouco depois, a "matemática superior grega". Está não poderia prescindir da tão importante noção de ângulo, um dos seus pressupostos fundamentais.

Depois de Tales aparece Anaximandro de Mileto (- 610? ....- 545?), cuja importância Burkert ressalta mais do que outros autores anteriores: "A geometria grega já antes dele [Pitágoras: posterior a Tales e Anaximandro: W.E.] estava no seu caminho, e não se pode chamar eo ipso de pitagórico cada vestígio do pensamento geométrico-matemático grego mais antigo"[20]. Ocorre que tradicionalmente se considerava ter a matemática grega se iniciado essencialmente com os "pitagóricos", mais do que com o próprio Pitágoras. Hoje se tem certeza que Pitágoras (- 571? .... - 500?) "nunca foi matemático ou físico no sentido do quarto século"[21] (antes de Cristo), quando (ver adiante) as "demonstrações" já estavam em pleno andamento. Em verdade, muita matemática foi elaborada por não-pitagóricos contemporâneos dos primeiros pitagóricos.Entre estes, pense-se sobretudo em Hipaso de Metaponto (- 520? .... - 480?), o primeiro pitagórico verdadeiramente matemático, discípulo direto de Pitágoras. Quanto ao "teorema de Pitágoras", a sua pretensa autoria não passa de um mito-conhecido empiricamente já pelos babilônios e demonstrado bem depois de Pitágoras, por quem e exatamente quando, não se sabe. O fato é que a demonstração, em roupagem geométrica (provida de figura com três quadrados desenhados) aparece nos "Elementos" de Euclides sem referência a Pitágoras.

Os gregos evidentemente não usavam ainda o termo de origem arábica "álgebra". Mas conforme o historiador dinamarquês H.G. Zeuthen (1839 .... 1920), muita matemática grega se constitui numa espécie de "álgebra geométrica": representa e demonstra fórmulas algébricas em "roupagem geométrica". Por exemplo, constata-se em Euclides, entre outras, a famosa fórmula que hoje representamos por $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, acompanhada da figura geométrica correspondente. As grandezas consideradas são sempre geométricas: distâncias, lados, segmentos, extensões; em vez de "o produto ab" diziam "o retângulo abrangido por a e b", e no lugar de a^2, diziam o "quadrado sobre a". A aplicação desta "álgebra geométrica" se estende a toda evolução posterior da matemática grega: "ARQUIMEDES e APOLÔNIO no 3º século são verdadeiros virtuoses com este instrumento".[22]

Entusiasmado pela sua própria descoberta, posterior a Zeuthen, da "álgebra babilônica", Otto Neugebauer associou-a à "álgebra geométrica" (Zeuthen) dos gregos, interpretando esta como "álgebra babilônica", suposta conhecida pelos gregos e "revestida de roupagem geométrica". Uma idéia à qual se uniram também o já mencionado O. Becker e van der Waerden[15], entre muitos outros: a álgebra babilônica "geometrizada" - embora curiosamente O. Becker confessasse que os gregos só reconheciam os egípcios, e não os babilônios (!) como seus grandes mestres geométricos.[23]

Mais recentemente apareceu uma opinião bem discrepante a respeito. Após um acurado exame desta questão, tipicamente histórica, Á. Szabó conclui: "Aquelas suposições que pretendiam conceber a <<álgebra geométrica dos pitagóricos>> como recepção ou desenvolvimento grego de pensamentos de origem babilônica, foram precipitadas. A relação desta espécie de conhecimentos com a <<ciência babilônica>> na realidade em parte alguma está provada. Pelo contrário! Antes se tem a impressão que a aí tratada "geometria das superfícies dos pitagóricos" foi uma conquista puramente grega"[24]. Estas são as últimas sentenças do livro de Szabó. A grandeza e a originalidade do gênio grego, portanto, continuariam de pé. Quem parece permanecer com razão é mesmo Spengler: a matemática grega é, em conteúdo e estilo, um "universo de números" original e autêntico, expressão do sentimento cósmico apolíneo", e se foi "influenciada" por matemáticas anteriores, aconteceu em escala irrelevante. E por falar em conteúdo e estilo da matemática grega: "figuras e corpos pequenos e manejáveis"[25], afins com a "plástica estatuária", a "coluna dórica", a "tragédia" e a "estática" gregas, que não são mais do que "símbolos euclidianos", outras maneiras de exprimir o mesmo sentimento cósmico[26].

Uma questão fundamental na história da matemática grega - denominada por Spengler de "apolínea", em oposição à "faústica" do Ocidente, diz respeito à origem da idéia da "demonstração" dos teoremas, uma idéia, excusado mencionar, que nada tem de evidente por si mesma, tanto é que nas duas grandes matemáticas orientais precedentes, "a demonstração" estava totalmente ausente. Consta que o primeiro a tentar a "quadratura do círculo" (o mais famoso "problema clássico" da matemática grega: construir um quadrado de área exatamente igual à de um círculo dado) teria sido Anaxágoras de Clazomenae (- 500? ... - 428?), sem sucesso, naturalmente. Entretanto, onde se constata pela primeira vez de maneira documentada o uso da "demonstração" na matemática grega e, portanto, em toda a matemática, é no não-pitagórico Hipócrates de Chios (~ - 440), que atuava em Atenas; dele provém o mais antigo livro de "Elementos" de geometria, infelizmente, entretanto fragmentário, impedindo assim o acompanhamento de todo o processo demonstrativo - tratava-se aí novamente, em essência, de uma tentativa de resolução da quadratura do círculo através de suas "lúnulas" (meniskoi), que Hipócrates construia sobre triângulos isósceles retângulos ou trapézios isósceles.[27]

Sucessores de Hipócrates foram os sofistas Antifon e Bryson, com soluções apenas aproximadas do problema.

Os "problemas clássicos" da matemática grega são considerados tradicionalmente três: o já mencionado da "quadratura do círculo", a "duplicação do cubo" e a "trissecção do ângulo".

O problema da duplicação do cubo, ainda chamado "délico"[23], também foi atacado por Hipócrates através de duas "médias proporcionais" entre os comprimentos a e b, o que hoje representamos na forma $a:x = x:y = y:b$, onde a primeira igualdade representa a primeira média proporcional e a segunda igualdade, a segunda média. Destas relações deduzimos (à nossa maneira![23]) com facilidade, se colocamos $b = 2a$, que $x^3 = 2a^3$, isto é, o cubo x^3 é o duplo do cubo a^3. Hoje escreveríamos mais simplesmente $x^3 = 2a^3 \Longrightarrow x = a\sqrt[3]{2}$, o que, entretanto, não é construível apenas com régua e compasso, aparecendo o "número irracional" $\sqrt[3]{2}$, não reconhecido como "número" pelos matemáticos gregos. Portanto, dentro deste contexto, o problema permanece sem solução satisfatória. Convém, ainda, mencionar a este respeito que para os gregos os "números" (arithmoi) correspondiam exclusivamente aos nossos "inteiros positivos" - os "naturais" - e que eles ainda lidavam com "razões de números" (logoi), hoje nossos "racionais fracionários", incorporadas na sua doutrina das proporções. Os gregos descobriram a "irracionalidade", não inventaram os "números irracionais".

Quanto ao problema da "trissecção do ângulo", devemos mencionar o sofista Hípias de Elis (~ - 420), que concebeu o que desde Dinostrato (~ - 350) foi chamado "quadratriz", a primeira figura gerada cinematicamente na matemática grega. Ela está relacionada com a quadratura do círculo, daí o nome, e permite aquela trissecção, embora novamente sem régua e compasso.

A resolução dos três problemas clássicos por régua e compasso mostrou-se em definitiva como aporética, mas isto só foi constatado na posterior matemática ocidental.

Todavia, no que se refere à exigência dos instrumentos clássicos, régua e compasso, tal imposição de forma exclusiva está apenas assegurada inteiramente para Aristóteles e nos "Elementos" de Euclides, o qual, entretanto, nunca os menciona explicitamente. Outros (Arquitas, Hípias, Dinostrato, Menecmo, Eudoxo, Nicódemos e Diocles) teriam resolvido, e sem maior "escândalo", os problemas clássicos por outras construções[30]. As curvas que permitem resolver tais problemas são chamadas hoje "transcendentes", baseadas em "funções transcendentes", não "algébricas".

Voltemos à origem da idéia fundamental de "demonstração" na matemática grega, uma idéia que na época do próprio Pitágoras nem de longe ainda desponteva. Há várias hipóteses a respeito, sendo as principais: 1º) Apelo para as "relações sociais" existentes no mundo grego da época: liberdade de expressão na democracia; direito de fazer uso da palavra, argumentando logicamente. 2º) Contradições entre os resultados obtidos pelas matemáticas orientais pré-gregas: egípcia e babilônica, por exemplo do valor do número π, mais exatamente: dos modos de calcular a área do círculo. A demonstração correta eliminaria as contradições. Opinião representada, entre outros, por O. Becker e van der Waerden. 3º) A hipótese da "reforma platônica", filosófica da matemática (Zeuthen, revisada por Otto Toeplitz[31]): inicialmente a matemática grega teria sido "empírica", tornando-se "teórica", isto é, "sistemático-dedutiva" sob o influxo do pensamento filosófico, teorético, de Platão. 4º) A hipótese da origem ainda filosófica, porém "eleática", representada por A. Szabó.

Não nos deteremos aqui para discutirmos detalhadamente o que cada hipótese tem a favor ou contra si. Em desfavor da terceira apenas mencionamos que a demonstração já se manifesta em Hipócrates, que evidentemente foi mais velho do que Platão. Acrescentamos, ainda, que os historiadores atribuem mais aos discípulos de Platão certas conquistas matemáticas do que a ele próprio: Platão foi mais um teórico, um idealizador por assim dizer "epistemológico", como diríamos hoje, do pensamento matemático, mas já posterior ao início das demonstrações. Nós nos inclinamos mais para a última (quarta) hipótese, devida a A. Szabó, a qual, entretanto, ao nosso ver, absolutamente não é inconciliável com a primeira, que forneceria "pressupostos" para a quarta.

Em que consistia então esta "filosofia eleática", para dar lugar, posteriormente, e inspiradas nela, às demonstrações matemáticas? Ela possui este nome porque seus principais representantes, Parmênides (~ - 500) e Zenão (~ 464), eram naturais de Elea, uma colônia grega no sul da Itália. Parmênides é o fundador do pensamento estritamente lógico dentro da filosofia grega e faz uso explícito e consciente do "método da demonstração indireta" para provar suas assertivas: partindo do pensamento como tal e rejeitando tudo o que está em contradição com ele, na qualidade de "não pensável". Por exemplo, o "não ser" não existe, pois quando se pensa algo, deve-se pensar em alguma coisa que existe. Pensar o "não ser" seria uma contradição. Um dos seus resultados é a "demonstração" da inexistência do "vazio" (identificando com o "não ser") e do movimento. Seu discípulo Zenão desenvolveu depois os seus famosos argumentos (paradoxos) contra a pluralidade das coisas e o movimento; na realidade, uma reformulação original das idéias de Parmênides. Entre os argumentos contra a existência (e, portanto, do absurdo) do movimento está o de "Aquiles e a tartaruga": o grande corredor grego jamais alcançaria a tartaruga, pois sempre que estivesse prestes a alcançá-la, ela já teria avançado um pouco mais. (Os paradoxos de Zenão, considerados "filosóficos", de per se já contém uma problemática puramente "matemática", amplamente estudada e discutida depois de Zenão).

A demonstração da inexistência do movimento é, pois, indireta, por levar a absurdo: aí estaria a origem, conforme A. Szabó, do que depois teria vindo a ser a "demonstração por absurdo" na matemática grega. Ela pode ser ilustrada em Euclides, e remontaria ao muito anterior quinto século A.C. (?): "a diagonal e o lado de um quadrado são linearmente incomensuráveis", conforme "Elementos", ao fim do Livro X[32]. Em síntese e simplificando (e sem reproduzir, obviamente, aqui a prolixa demonstração[33]): supondo que sejam comensuráveis, chega-se, dependendo do caminho demonstrativo, a dois resultados antitéticos: por um caminho, que o lado é ímpar (interpretado como "número no sentido grego, ver acima); por outro, que ele é par. Mas isto é impossível. Logo, diagonal e lado não são comensuráveis, mas incomensuráveis (Q.E.D): conforme uma razão que hoje representamos pelo número irracional $\sqrt{2}$, que, entretanto, não correspondia a uma maneira grega de pensar.

Todavia, contrariamente a Szabó, que nos parece neste ponto exagerar, as demonstrações matemáticas gregas mais maduras (por exemplo em Euclides) não devem ser qualificadas genericamente de antiempíricas, mas meramente, e nem todas, apenas de "não empíricas", pois "construções" abundam, certamente até mesmo de modo exagerdo, nos "Elementos": a figura frequentemente o salva, não a lógica[34]. O mérito principal do eminente filólogo clássico Arpád Szabó consiste, mais em ter mostrado a alta probabilidade da "origem eleática" da demonstração por absurdo e, por extensão, da demonstração em geral[35], devido ao seu caráter lógico, e não em contraposição necessária com a construtividade geométrica.

O matemático grego mais genial da época de Platão foi sem dúvida Eudoxo de Cnido (- 408? .... - 355?), que leva à culminação - *o coroamento da matemática grega*[36] - a "teoria das proporções", estendendo o tratamento só dos "números" (naturais, ver acima) a outras grandezas quaisquer (megethoi). Dentro de todo este contexto, Eudoxo (e depois Euclides) utiliza o seu famoso axioma, erroneamente atribuído a Arquimedes, a def. V.4 dos "Elementos": "As grandezas tem entre si razão, quando a grandeza menor, tomada certo número de vezes, pode vencer [ultrapassar; W.E.] a grandeza maior"[37]. No livro XII Euclides ainda desenvolve o famoso "método de exaustão", como depois foi chamado, também atribuído a Eudoxo, e que posteriormente foi utilizado por Arquimedes. A designação "método de exaustão" é considerada equívoca por Gerhard Kropp, que prefere trocá-la pela de "método de exclusão"; exclusão aliás muito mais rigorosa, do que a "exaustão" propriamente dita[38,39]: o círculo não seria exatamente "esgotado" (exaurido) pelos polígonos inscritos, pelo fato de o esgotamento ser suspenso após um número finito de passos, sendo mostrado "que a diferença é feita menor do que qualquer porção de área dada"[37]. <<Pois a dedução torna-se consequente pelo fato que para a verificação de igualdade de duas grandezas, os desvios para cima e para baixo são "excluídas" >>[38], lembrando que a área do círculo fica "comprimida"[40] entre as áreas de polígonos inscritos e circunscritos (precursor Bryson; ver acima). Neste aspecto, Eudoxo é muito mais "moderno" (cálculo com desigualdades!) e portanto "avançado" do que os próprios Euler (1707 .... 1783) e outros, anteriores a Cauchy (1789 ....1857), preludiando, embora longinquamente e ainda dentro do contexto do *a priori cultural apolíneo*, a nossa "epsilôntica" (cálculo com ϵ, δ), a avaliação de "restos" de séries, bem como o conceito moderno de limite[41]. "Em parte alguma ambas as matemáticas [a grega e a ocidental; W.E.] se aproximam tanto e [entretanto ; W.E.] em parte alguma se deixa sentir tão nitidamente o abismo intransponível das duas almas de que são expressão"[42].

Depois de Eudoxo, o mais digno de nota é Euclides de Alexandria (-365? .... -300?). Segundo van der Waerden, Euclides é "o maior mestre-escola que a História da Matemática conhece"[43]. "Quando pode orientar-se por um autor excelente, como TEETETO ou EUDOXO, ele mesmo é fora do comum, mas quando o seu paradigma não é tão elevado, ele também cai. EUCLIDES é acima de tudo um didata, não um gênio criador"[44].

Não examinaremos aqui a origem pitagórica da doutrina dos "números pares e ímpares" no IX Livro dos seus "Elementos"[45]. Tal doutrina nesta obra ilustraria o seu caráter "arcaico", um "enxerto" que destoaria de tal maneira com o que aparece antes nos "Elementos" - por não exibir relação com ele - documentando, assim, uma total falta de genialidade: a sua sorte estaria mais no fato de a obra ter resistido às vicissitudes do tempo .... Entretanto, e ousando aqui contrariar van der Waerden: se pelo menos o famoso "quinto postulado"[46] é do próprio Euclides(?), teria sido ele, realmente tão medíocre como pretende este autor?.

Com Euclides encerra-se o que no nosso entender constitui o "período clássico" (~ -400 .... ~ -300) da Matemática grega. O "período pós-clássico" (~ -300 ... ~ -200), representado pelos gênios de Arquimedes de Siracusa (~ -287 ... -212) e Apolônio de Perga (-262? ... -190?), secundados por outros, como Erastóstenes e Nicomedes, não pode ser tratado aqui em detalhe, de vez que a produção, se nos limitássemos apenas aos dois primeiros, foi tão significante, que não vislumbraríamos mais o término deste ensaio, cujo escopo não foi o de escrever uma história da matemática grega, mas apontar-lhe apenas alguns problemas, e nem mesmo todos o que nela se escondem.

"Após APOLÔNIO", escreve van der Waerden, "termina a grandeza da geometria grega"[47]. Os "primeiros epígonos" (~ -200 .... ~ -100), como Diocles e Zenodoro, não conseguem, "apesar de terem resolvido aqui e acolá um problema"[48] isolado, reconduzir a geometria grega ao seu antigo esplendor. Depois de ~ -100 se inicia o "período epigônico definitivo", da decadência da matemática grega: já antes Hipsicles (~ -180) e Hiparco (~ -130), conforme documentado[49], calculam com "graus sexagesimais", e evidentemente ainda o posterior Ptolomeu[50], quando os gregos autênticos Arquimedes e Apolônio ainda não o faziam: com Hipsicles talvez seja feita a primeira concessão à matemática oriental (de origem babilônica), resultante da amalgamação da cultura helênica com o Oriente, acelerada mediante a conquista de Alexandre.

Assim tocamos a questão da "orientalização" da matemática grega, visível em Hipsicles, Hiparco, Zenodoro, Ptolomeu e Diofanto, e ainda em Posidônio, Gêmino e Proclo[51]. Dentro deste contexto, Spengler admite o pressuposto de um grande território, "cujo centro de gravidade se encontra sobretudo nas escolas superiores pérsico-babilônicas como Edessa, Dschondisabur e Ktesifon"[52], onde teria nascido, a partir de Cristo, a "cultura arábico-mágica" (que aliás, não seria puramente "arábica"), portadora de um "sentimento cósmico", e consequentemente de um a priori cultural[53] totalmente distinto do "estático-plástico-euclidiano" da "apolínea" por um lado, e do dinâmico-contrapontístico" (Spengler) por outro, da "cultura faústica", com a sua "catedral gótica que anela a conquista do espaço e as fugas a várias vozes"[54]. Mas a cultura arábico-mágica, historicamente, encontra-se entre a "antiga-apolínea" e a "ocidental-faústica", "com sua álgebra, astrologia e alquimia, seus mosaicos e arabescos, seus califados e mesquitas, os sacramentos e livros sagrados da religião persa, judaica, cristã, "antiga tardia" e maniquéia"[55]. E como se trata de uma nova cultura: "Os árabes tiveram que recomeçar inteiramente pelo princípio com a álgebra, por um ponto de partida muito mais primitivo"[56]: Al-Khowarizmi, (~ 780 ?.... 850 ?), uma álgebra que van der Waerden apreciaria muito poder derivar da babilônica, mas confessa, com pesar, que isto não pode ser documentado[57]. Trata-se de um "abandono do inútil Euclides", como se expressava o mencionado algebrista árabe[58]. Tal ponto de partida muito mais rudimentar apenas confirma mais uma vez que cada nova cultura tem que "começar de novo" para elaborar o seu próprio "universo de números" (Spengler), o que, aliás, voltaria a suceder com a então ainda futura cultura faústica (que floresce a partir de ~ 1000) em torno de 1600.

Cabe perpassar aqui ainda alguns aspectos que tem sido considerados inerentes à decadência da matemática grega, já referida. Na tentativa de explicar tal decadência, são apresentadas: causas externas e causas internas. Entre as primeiras estariam fatores políticos, sociais e econômicos, enfatizados, embora não exclusivamente, por autores de orientação marxista[59]. Estes autores são qualificados de "externalistas". Quer dizer que nesta linha, as causas da decadência seriam "externas" à própria matemática. Para os "internalistas" (Zeuthen, O. Becker, van der Waerden e outros), embora também reconhecendo até certo ponto as causas externas, a prevalência caberia a fatores "intramatemáticos", relacionados[60] com a própria natureza intrínseca da matemática grega: especialmente dificuldades da álgebra geométrica[61] - quando uma certa área esta esgotada e não surgem novas perspectivas, forçosamente sobrevém uma decadência.

Em contraposição a estas duas correntes, Spengler não considerava a "causalidade" uma categoria filosófica muito apropriada para compreender a História: em lugar dela colocava o "destino"[62].

Com relação ao "destino" da matemática grega, van der Waerden escreve: "Diz-se, com efeito: << a cultura grega envelheceu e perdeu seu ímpeto>>" - a única passagem de van der Waerden em que as idéias de Spengler são lembradas, embora este não seja mencionado explicitamente. E continua o autor: "Muito correto, mas isto apenas é um esboço geral, não uma explicação"[63]. Aqui se separam radicalmente os espíritos: enquanto Spengler renuncia à causalidade em História, substituindo-a pelo "destino" (é destino das grandes culturas envelhecer), van der Waerden exige "causas explicativas", que entretanto o primeiro considerava mais adequadas para as ciências exatas, matematizáveis em alto grau. Uma das noções que a causalidade implica diretamente, é a de "influência". Sobre as "relações" entre as culturas, e portanto, sobre as "influências recíprocas entre elas, Spengler escreve: "Embora elas sejam o segundo e as próprias culturas o primeiro, o pensamento histórico moderno entretanto julga pelo contrário"[64].

Para os "causalistas" (não Spengler, bem entendido), a noção de influência "explicaria" por exemplo a origem babilônica da matemática grega (Neugebauer, van der Waerden[15]; o último resume Neugebauer com grande poder persuasivo em VDW), uma tese aliás criticada por A. Szabó (ver acima, e nota[24]). O curioso é que tal tese de Neugebauer e van der Waerden tenha sido aceita quase unanimemente durante tão largo tempo, tanto por historiadores "burgueses" como por historiadores marxistas da matemática grega. Mais curioso ainda é que em um livro bastante recente de van der Waerden[65] este, partindo de dois artigos de A. Seidenberg[66], se associa completamente ao último na tese segundo a qual "nos textos gregos, assim como nos [índicos; WE] Sulvasutras construções geométricas eram consideradas importantes para propósitos rituais, a saber, para a construção de altares de forma e tamanho dados", e lembrando a famosa "duplicação do cubo" dos gregos[67]. Para chegar à conclusão, já anunciada na sua Introdução, que as matemáticas babilônica, índica, grega e chinesa todas elas "possuem uma origem comum"[68], que ele julga encontrar na "Idade Neolítica" da Europa Central (entre -3000 e -2500): indo-europeus[69] ainda em época pré-histórica(!)[70], para depois se dispersarem tais conhecimentos em todas as direções: Grã Bretanha, Oriente Próximo, Índia e China[71]. A origem da matemática grega de repente não seria mais babilônica, mas tanto a matemática babilônica como a grega teriam, juntamente com outras matemáticas, uma origem comum! as "influências" agora se tornaram outras! a crer em van der Waerden, e dando prosseguimento consequente a suas idéias novíssimas, os indoeuropeus pré-históricos então teriam sido gênios matemáticos incomparáveis!. Os famosos "árias" (então ainda na Europa Central), tão caros aos nacionalsocialistas germânicos, cujos teóricos - e tanto quanto é do nosso conhecimento - entretanto nunca chegaram a exaltar, sob este aspecto, em tal grau a "superioridade racial dos povos nórdicos"..... Não nos deteremos mais aqui nestas tão estranhas teses novas de van der Waerden, cujo exame mais profundo exigiria, obviamente, um artigo em separado, e eventualmente tão longo quanto este. O impressionante em van der Waerden é a ligeireza com que ele salta, com o correr do tempo, de uma "influência" (a babilônica) para a outra (a indoeuropéia pré-histórica), parecendo esquecer completamente, ao contrário do que afirma[72], que em recantos os mais díspares deste planeta as mesmas descobertas e invenções têm sido realizadas com freqüência completamente independentes umas das outras, sem "influências" recíprocas![73].

Voltemos a Spengler. Segundo este, a mente humana, que conteria a tendência imanente para o pensamento matemático, revelaria o seu maior talento para o mesmo justamente nos períodos de "outono" (climax) das altas culturas e nos dos incipientes "invernos"[74].

Reelaborando Spengler e excluindo ainda os "períodos "decadentes", teríamos o seguinte quadro dos florescimentos das matemáticas: para a matemática antiga-apolínea (grega), o período ~ -600 .... ~ -200, para a arábico-mágica ~ 800? .... ~ 1100, para a ocidental-faústica ~ 1600 ...~2000. Isto sem considerarmos o que já citamos acerca dos períodos mais criadores das matemáticas egípcia e babilônica. Um estudo comparativo desta ordem, considerando tais evoluções como "homólogas", ou seja, historicamente "paralelas" (por exemplo, "homologia" entre Eudoxo e Cauchy!), e periodizando com mais minúcia, se constituiria no mais original da nossa contribuição. Mas isto terá que ficar para um próximo ensaio: procurando atualizar e estender o pensamento de Spengler.

"Um destino de catástrofe e de morte gravita, inexorável, sobre cada ciclo de civilização", escreve um detrator de Spengler[75]. Entretanto, um francês escreveu que hoje já sabemos que a nossa civilização é mortal. E um alemão, que absolutamente não era spengleriano, segundo o qual o espírito do Ocidente desaparecerá ainda neste século. Este é o destino que nos aguarda, mesmo na qualidade de matemáticos[76], embora a maioria deles, despreocupada, não tenha consciência disso, imersos e envolvidos como se encontram, e ainda empolgados, cada qual pela sua própria restrita especialidade.

Ao nosso ilustre colega e amigo Carlos Alberto Gianotti, pela sua imensa paciência de revisar este texto, aprimorando com competência, amor e dedicação o seu estilo. E, *last but not least*, a minha incansável esposa Élvia Schaeffer Engel, cuja relevante contribuição não deixou de se fazer sentir.

NOTAS

[1] BOYER, Carl B., História da Matemática, S.P. Edgard Blücher, 1974.

[2] Período mencionado em UdA I (ver nota [7] abaixo), tabela II, referente a épocas "correspondentes" da arte.

[3] VOGEL, Kurt, Vorgriechishe Mathematik I, Vorgeschichte und Ägypten. Hannover e Paderborn. Schroedel e Schöningh, 1958, p. 21. O autor considera "Médio Império" o período -2060 .... -1788. Observação: neste nosso ensaio números precedidos pelo sinal "menos" representarão anos Antes de Cristo.

[4] BECKER, Oskar, Das mathematische Denken der Antike, Göttingen. Vandenhoeck & Ruprecht, 1957, p.7.

[5] *Ibid.*

[6] VERMEIL, Edmond, Doctrinaires de la Révolution Allemande 1918-1938, Paris. Nouvelles Éditions Latines, 1948, p.71.

[7] Primeira edição do primeiro volume: 1918; do segundo volume: 1922. Baseamo-nos na edição alemã de 1950: SPENGLER, Oswald,

Der Untergang des Abendlandes I, 76. bis 81. Auflage, München. C.H. Beck, 1950, que designaremos por UdA I. O segundo volume (63. bis 68 Auflage) designaremos UdA II.

[8] UdA I, cap. I: Do sentido dos números.

[9] Engel, Willy G., Esbôço de uma sociologia cultural do conhecimento, S.P. Matese, 1966, p.30. O livro será designado abaixo por Esbôço.

[10] BECKER, Oskar, *op. cit.*, p.9.

[11] *Ibid.*

[12] BECKER, Oskar, *op. cit.*, p.9,10.

[13] BECKER, Oskar, *op. cit.*, p.10.

[14] BECKER, Oskar, *op. cit.*, p.9.

[15] NEUGEBAUER, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. Erster Band. Vorgriechische Mathematik, Berlin-Heidelberg - N.Y. Springer, 1969. VAN DER WAERDEN, B.L., Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, Babylonische und Griechische Mathematik, Basiléia. Birkhauser, 1956. Existe tradução inglesa: Science Awakening, N.Y. Science editions, 1963. Citaremos pela edição alemã, designando-a por VDW.

[16] Expressões entre colchetes são intercalações do autor: W.E.

[17] UdA I, p.84.

[18] SZABÓ, Árpád, Anfänge der griechischen Mathematik, München e Viena. Oldenbourg, 1969, p.9.

[19] Esbôço, Cap. IV.

[20] BURKERT, Walter, Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon, Nürnberg. Hans Carl, 1962, p. 397.

[21] KRAFFT, Fritz, Geschichte der Naturwissenschaft I. Die Bergründung einer Wissenschaft van der Natur durch die Griechen, Freiburg. Rombach, 1971, p.205. Pitágoras fundou em Crotona (sul da Itália) uma seita, dos "pitagóricos", cujos membros, convictos das " metempsicose" (transmigração das almas), se entregavam a ideais e práticas éticas e religiosas (vida ascética, vegetarianismo, etc.). Ver VDW, p.151-168, bem como do mesmo autor: Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft, Zürich e München. Artemis, 1979; e ainda BURKERT, Walter, *op. cit.*

[22] VDW, p.195.

[23] BECKER, O., *op. cit*, *p*.9.

[24] SZABÓ, Árpád, *op. cit.*, p.488.

[25] UdA I, p112, tradução já em Esbôço, p.58.

[26] Esbôço, p.58.

[27] BECKER, Oskar, *op. cit.*, p.15.

[28] Problema "délico", porque o deus Apolo teria exigido aos atenienses, como castigo, duplicar exatamente o volume do altar cúbico do mesmo deus em Delos, a fim de aplacar a ira daquela divindade, para conseguirem abater o flagelo da peste em Atenas. A "trissecção do ângulo": construir, só com régua e compasso, um ângulo cuja medida seja exatamente igual a um terço do ângulo dado.

[29] VDW, p. 195, 196.

[30] Artigo originalmente publicado em 1934: STEELE, Arthur Donald, Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik. Teil II und III. In Zur Geschichte der Griechischen Mathematik, ed. por Oskar Becker. Darmstadt. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1965, p. 146-202.

[31] TOEPLITZ, Otto, Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato, in "Zur Geschichte ..." (ver nota anterior), p. 45 - 75. O artigo original é de 1931.

[32] EUKLID, Die Elemente, Buch I-XIII, trad. e ed. por Clemens Thaer, Darmstadt. Wissenschaftliche Buchgesellschalft, 1975, p. 313, 314.

[33] SZABÓ, Árpád, *op. cit.*, p.284, 285.

[34] CABRERA, Emamuel S., Los Elementos de Euclides como exponente del "milagro griego", B. Aires. Librería del Colegio, 1949, p. 100 e seguintes.

[35] SZABÓ, Árpád, *op. cit.*, III Parte. E ainda CABRERA, Emannuel S., *op. cit.*, que preludia Szabó, por mencionar a "redução ao absurdo" em conexão com Zenão; p. 111, 112.

[36] DELACHET, André, A Análise Matemática, S.P. Difusão Européia do Livro, 1967, p.17.

[37] EUCLIDES, Elementos de Geometria, S.P. Edições Cultura, 1945, p.119. Trata-se de uma edição em Português, incompleta, dos "Elementos".

[38] KROPP, Gerhard, Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten, Heidelberg. Quelle & Meyer, 1969, p.40.

[39] KROPP, Gerhard, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Mannheim. Bibliographisches Institut, 1969, p.49.

[40] VDW, p.306.

[40a] EDWARDS, JR., C.H., The Historical Developmente of the Calculus, N.Y. - Heidelberg. Berlin. Springer, 1979, p.31.

[41] VDW, p.223, 367.

[42] UdA I, p.93.

[43] VDW, p.322.

[44] VDW, p.323.

[45] BECKER, Oskar, Die Lehre von Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente. In "Zur Geschichte ..." (ver nota [30]), p.125-145. O artigo original é de 1934. BURKERT, Walter, *op. cit.*, p.410, 411 critica Becker.

[46] O "quinto postulado" de Euclides tem, como se sabe, uma longa história, desembocando nas famosas "geometrias não euclidianas" (Gauss, Bolyai, Lobatschefskij) no século XIX.

[47] VDW, p.437.

[48] *Ibid.*

[49] BOYER, Carl B., *op. cit.*, p.86, 118; VDW, p. 82, 83, 84, 140; BECKER, Oskar, "Das math. Denken ..." (ver nota [4]), p.23.

[50] VDW, p.83, 342.

[51] Esbôço, p.58.

[52] UdA I, p.84. Dschondissabur também é designada por Jundi-Shapur, e Ktesifon em Português por Ctesifonte.

[53] UdA I, p.235-279, UdA II, p. 225-398 (Problemas da cultura arábica); resumidamente em Esbôço, p. 20,22.

[54] SCIACCA, Michele Frederico, La Filosofía, hoy. De los orígenes románticos de la filosofía contemporánea hasta los problemas actuales, Barcelona. Luís Miracle, 1947, p.75. Trata-se da parte de Sciacca, de uma ótima e sintética caracterização da "cultura faústica" segundo Spengler.

[55] UdA I, p.235.

[56] VDW, p.437.

[57] VDW, p.461.

[58] WUSSING, Hans, Mathematik in der Antike. Mathematik in der Periode der Sklavenhaltergesellsschaft, Aaachen. J.A. Meyer, 1962, p.214; VDW, p.437,439.

[59] WUSSING, Hans, *op. cit.*, p.212, onde o autor considera os fatores intramatemáticos relegados apenas a uma "importância secundária e terciária".

[60] VDW, p.439,440.

[61] VDW, p. 439, 440; BECKER, Oskar, *op. cit.* (nota[4]), p.23, 24, 25, EDWARDS Jr., C.H., *op. cit.*, p. 78-80.

[62] Esbôço, p.21.

[63] VDW, p.438.

[64] UDA II, p.62.

[65] VAN DER WAERDEN, B.L., Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Berlin-Heidelberg - N.Y. - Tokyo. Springer, 1983. Doravente será citada apenas ainda esta obra do famoso autor.

[66] 1963 e 1978, citações completas em VAN DER WAERDEN, B.L., *op. cit.* (ver nota[65]), p.10.

[67] *Id.*, p. 10, 11. Ver acima, nota[28].

[68] *Id.*, p. XI, 15.

[69] *Id.*, p.13, 14, 15.

[70] *Id.*, p. XI.

[71] *Ibid.*

[72] *Id.*, p.10.

[73] Dentro deste contexto, leia-se por exemplo KUHN, Thomas S., Energy Conservation as an Example of Simultaneous Discoveries, in Critical Problems in the History of Science, Madison. The University of

Wisconsin Press, 1959, p. 321-356. Reproduzido em Alemão in KUHN, Thomas S., Die Entstehung des Neuen. Studien zur Struktur der Wissenschaftsgeschichte, Frankfurt am Main. Suhrkamp, 1978, p. 125-168.

74 Esbôço, p.12: ".... a civilização sendo o remate inelutável da cultura". Os "invernos" são as "civilizações" (decadentes) das altas culturas de Spengler.

75 SCIACCA, Michele Frederico, *op. cit.*, *loc. cit.* Por "civilizações" o autor entende as culturas superiores de Spengler.

76 KLINE, Morris, Mathematics. The Loss of certainty, N.Y. Oxford University Press, 1982. O título do livro já fala por si mesmo. Ver especialmente o cap. XII: "Disasters", que ilustra a crise que já vem ocorrendo há algum tempo neste século e que certamente se acentuará cada vez mais no futuro, embora isto não chegue à consciência da generalidade dos nossos mestres-escola....

O autor: Willy Günter Engel (*1928)
Professor Adjunto no Instituto de Matemática da UFRGS.
Professor Titular na FAPCCA e na FAPA.
Professor Titular na PUCRS.

Endereço: Av Goethe, 89.
90.410 - POA - RS.
Brasil.

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

1. Marcos Sebastiani - Palestra Inaugural - MAR/88.
2. José Francisco Porto da Silveira - A Fatorial no Infinito - MAR/88.
3. Miguel A. Ferrero - Um Problema em Aberto em Álgebra - MAI/88.
4. Willy G. Engel - Problemas da História da Matemática Antiga - JUN/88.