Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática

Geometrias Não Euclideanas

Marcos Sebastiani

Cadernos de Matemática e Estatística
Série B, n^o 04, JUL/90
Porto Alegre, julho de 1990

Geometrias Não Euclideanas

1. Introdução

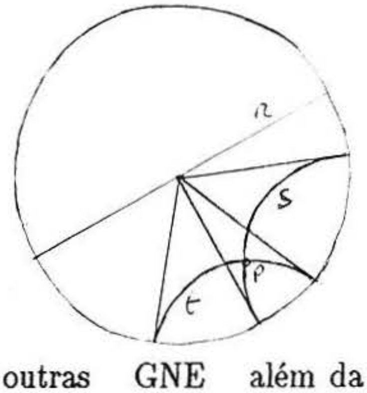
A Geometria Euclideana (GE) é aquela que estudamos no colégio e cuja axiomática foi elaborada primeiro por Euclides [1] e, na sua forma definitiva e rigorosa, por Hilbert [2]. Esta Geometria é o modelo geométrico natural do espaço físico na Física Clássica.

Chamamos de Geometria não euclideana (GNE) a qualquer Geometria que não segue esta axiomática. A Geometria hiperbólica de Bolyai-Lobatchevski (GBL) é uma das mais célebres GNE ; históricamente, a primeira a ser desenvolvida sistemáticamente. Ela nasceu da tentativa de demonstrar pelo absurdo, a partir dos outros postulados da GE, o "postulado da paralela", que estabelece a **unicidade** da paralela a uma reta r passando por um ponto $P \notin r$. A axiomática da GBL é a mesma que a da GE, salvo que nega-se em GBL, a unicidade da paralela. O que se acabou provando com a GBL é justamente o contrário: o postulado da paralela é independente dos outros postulados GE. Com efeito, podemos construir modelos para a GBL que mostram que esta é consistente (supondo, obviamente que a GE o é).

Um modelo para a GBL (plana) é o seguinte.

Fixamos um círculo Γ no plano euclídeo. Seja E o conjunto dos pontos interiores a Γ. Os "pontos" do modelo são os pontos de E e as "retas" são diâmetros de Γ e os arcos de círculo contidos em E e que cortam ortogonalmente Γ.

Na figura, s, t são paralelas a r passando por P: este modelo não verifica o postulado da paralela e de fato é um modelo de GBL plana.



Mas tem muitas outras GNE além da GBL: as geometrias finitas, a geometria projetiva real ou complexa, etc. Trataremos de dar alguma idéia delas **limitando-nos à dimensão 2**, para simplificar a exposição.

O autor baseou-se principalmente nas referenciais [3], [4], [5] e [6] para elaborar estas notas.

2. Postulados Básicos. Em Geometria trabalhamos com certos conceitos (pontos, retas, pertencer) que são considerados **primitivos**: eles são definidos pelas suas relações dadas pelos postulados. Para conceber estas relações devemos pensar nos diferentes modelos que apresentam-se para estas noções fundamentais. Temos um modelo típico tomando uma superfície: os "pontos" são os pontos da superfície e as "retas" são as geodésicas da superfície (linhas que realizam localmente a mínima distância entre seus pontos). Por exemplo, em uma esfera as "retas" são os círculos máximos. Este exemplo já mostra o que o seguinte axioma exclue alguns tipos de modelos.

Postulado 1.

Dois pontos diferentes pertencem à uma e só uma reta.

Para excluir casos triviais admitimos também o:

Postulado 2.

Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta e a cada reta pertencem pelo menos três pontos.

As expressões tais como: a reta r contém o ponto P, as retas r e s se cortam em P, os pontos A, B, C são colineares, tem um sentido claro. Notaremos AB a reta determinada por A e B, $r.s$ a intersecção das retas r e s.

Os axiomas 1, 2 são satisfeitos na GE, na GBL, nas superfícies completas de curvatura constante negativa, nas geometrias afins sobre um corpo k (não necessariamente comutativo). (GA_k) Esta última define-se assim: os "pontos" são os pares ordenados (x, y) $(x \in k, y \in k)$. As "retas" são os conjuntos de "pontos":

$$\{(a + tc, b + td) \ : t \in k\}$$

onde $a, b, c, d \in k$ e $(c, d) \neq (0, 0)$. A relação de pertencer é a evidente. Observemos que se k é finito, esta Geometria só contém um número finito de pontos. (Naturalmente, se $k = \mathbf{R}$ obtemos a GE).

As geometrias que queremos tratar e que satisfazem estes dois postulados são repartidas em três grupos, caracterizados pela introdução, respectivamente, dos postulados 3E, 3P, 3H:

Postulado 3E

Duas retas sempre se cortam. (geometrias elípticas)

Postulado 3P

Dados a reta r e o ponto $P \notin r$, existe uma única reta que contém P e não corta r. (geometrias parabólicas)

Postulado 3H

Dados a reta r e o ponto $P \notin r$, existem pelo menos duas retas que contém P e não cortam r. (geometrias hiperbólicas)

As GA_k, em particular a GE, são parabólicas. A GBL é hiperbólica.

Vamos mostrar como as geometrias parabólicas estão subordinadas às elípticas.

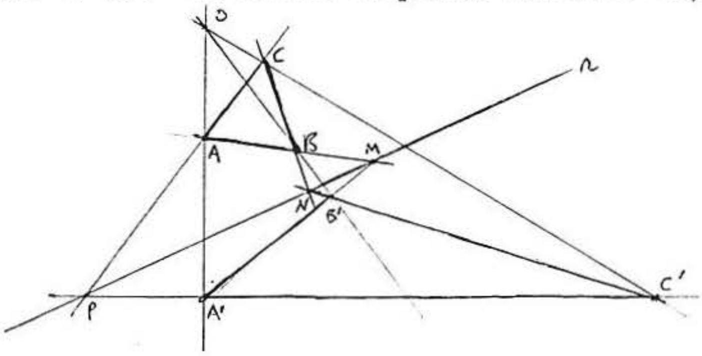
Em uma geometria parabólica definimos a relação de "paralelismo" da seguinte maneira: **a reta r é a paralela à reta s se r não corta s ou** $r = s$. Esta relação é de equivalência e as classes de equivalência são chamadas de **pontos impróprios**. Construimos então uma nova geometria cujos "pontos" são os pontos da antiga e os pontos impróprios.

Suas "retas" são as da antiga mais uma nova reta **(reta imprópria)** definida como o conjunto dos pontos impróprios. A relação de "pertencer"se define de maneira evidente. (Cada ponto impróprio pertence a cada reta da classe de equivalência que o determina, etc). Esta nova geometria é elíptica e a antiga fica mergulhada na nova. Esta última é chamada de **geometria projetiva** associada à geometria dada.

Em particular, cada GA_k define uma geometria projetiva (GP_k). Se $k = \mathbf{R}$, a geometria projetiva assim obtida é a Geometria Projetiva clássica (GP).

3. Geometrias elípticas.

Um teorema fundamental em GP é o teorema de Desargues (ou dos triângulos homológicos). Ele afirma (vide figura) que se as retas AA', BB', CC' são concorrentes (isto é, se cortam as três num mesmo ponto 0), então AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AC e $A'C'$ se cortam em pontos colineares M, N, P.



Este teorema não é válido em qualquer geometria elíptica. Vamos nos interessar em geometrias elípticas desarguesianas; quer dizer, que introduzimos este novo postulado (vide figura).

Postulado 4.

Sejam A, B, C três pontos não colineares e A', B', C' três pontos não colineares. Suponhamos que existe um ponto 0 tal que $A, A', 0$

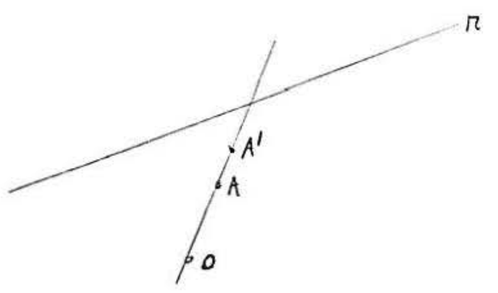
são colineares, $B, B', 0$ são colineares e $C, C', 0$ são colineares. Então existem três pontos colineares M, N, P tais que $M \in AB$, $M \in A'B'$, $N \in BC$, $N \in B'C'$, $P \in AC$, $P \in A'C'$.

Este postulado é satisfeito nas GP_k. Antes de verificar isto, vamos dar um enunciado equivalente ao Postulado 4.

Para toda geometria, é muito importante o grupo de seus automorfismos. Vamos chamar de **colineação** de uma geometria dada, toda correspondência bijetora do conjunto dos seus pontos sobre si mesmo tal que três pontos são colineares se e somente se as suas imagens são colineares. É claro que uma colineação também define uma correspondência bijetora do conjunto das retas sobre ele mesmo e que a relação de pertencer é conservada. Em particular a três retas concorrentes correspondem sempre três retas concorrentes. As colineações de uma geometria formam um grupo (não necessáriamente abeliano).

O postulado seguinte assegura a existência de muitas colineações.

Postulado 4'. **Dada uma reta r e três pontos colineares $0, A, A'$ (distintos e A, A' não contidos em r) existe uma colineação que deixa fixos 0 e cada ponto de r e que leva A em A'.**



Vamos demonstrar rápidamente a equivalência entre os postulados 4 e 4' (assumidos os postulados 1, 2, 3E) deixando a discussão detalhada ao leitor.

Admitimos primeiro o postulado 4' e vamos provar o 4.

Sejam $P = AC.A'C'$, $N = BC.B'C'$; seja $r = PN$.

Consideramos a colineação que deixa fixos 0 e cada ponto de r e leva C em C' (postulado 4').

(Vide figura no início deste parágrafo).

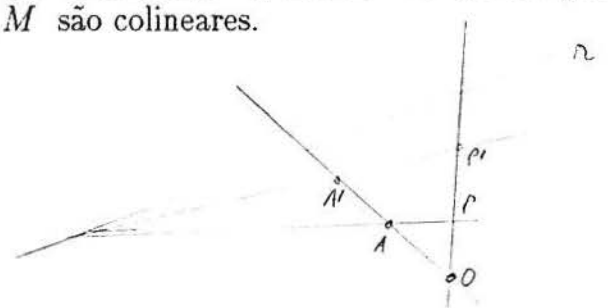
Seja A_1 a imagem de A. Então $A_1 \in 0A$ (porque $0A.r$ é fixo) e $A_1 \in PC'$ (porque $P \to P$, $C \to C'$ e, então $PC \to PC'$). Logo, $A_1 = 0A.PC' = A'$.

Da mesma maneira provamos que $B \to B'$. Seja $M = AB.r$. Então, como A, B, M são colineares, temos que A', B', M são colineares. Ou seja,

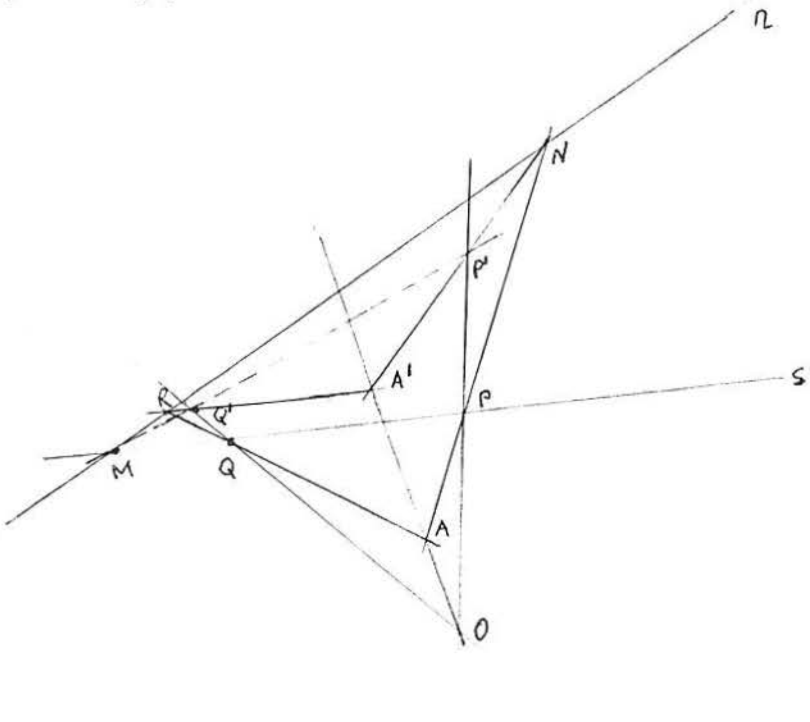
$AB.A'B' = M \in r$, o que prova o postulado 4.

Admitimos agora o postulado 4 e vamos provar o 4'.

Se $P \notin 0A$, a construção do correspondente P' é dada pela figura abaixo. A colineação definida no plano menos a reta $0A$ extende-se a esta reta imediatamente, pela condição de conservar a colinearidade dos pontos. Para provar que a correspondência $P \to P'$ é colineação, seja s reta por $P, M = s.r$. Devemos provar que todo ponto $Q \in PM$ vá em um ponto $Q' \in P'M$; ou seja, que P', Q', M são colineares.



Para tal, consideramos os triângulos APQ, $A'P'Q'$. Por hipótese, $0 \in AA'$, $0 \in PP'$, $0 \in QQ'$. Logo $N = AP.A'P'$, $R = AQ.A'Q'$ e $M' = PQ.P'Q'$ são colineares. Como $r = NR$, temos que $M' \in r$. Logo $M = M'$. Então $M \in P'Q'$ e $P'Q', M$ são colineares.



Vamos agora introduzir coordenadas, chamadas **coordenadas homogêneas**, nas GP_k o que, em particular, nos permitirá mostrar que elas satisfazem o postulado 4'. Para tal mergulhamos primeiro GA_k em k^3 pela inclusão $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2, 1)$. Por definição, as coordenadas homogêneas de $(x_1, x_2) \in GA_k \subset GP_k$ são $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda)$ para todo $\lambda \in k^\bullet$.

As coordenadas homogêneas de um ponto impróprio são $(u_1, u_2, 0)$ onde a reta de GA_k que une o ponto $(0,0)$ ao ponto (u_1, u_2) é paralela às retas deste ponto impróprio.

Vemos, então, que as coordenadas homogêneas estão determinadas a menos de fator de proporcionalidade a esquerda não nulo. O tríplice $(0,0,0)$ não representa ponto algum.

Notaremos x, y, z as coordenadas homogêneas em GP_k. A equação linear:

$$xa + yb + zc = 0 \quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

representa o conjunto de pontos de uma reta. Seja $L : k^3 \to k^3$ um isoformismo linear a esquerda. Então a correspondência T_L que leva o ponto de GP_k de coordenadas homogêneas (x, y, z) no ponto de coordenadas homogêneas (x', y', z') onde

$$(x', y', z') = L\ (x, y, z)$$

é uma colineação de GP_k. Nem todas as colineações podem ser obtidas desta maneira. Temos, por exemplo as transformações $T_\sigma\ (x,y,z) = (\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$ onde σ é um automorfismo de k.

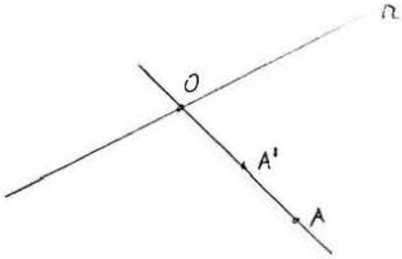
Sejam P ponto, r reta em GP_k, $P \notin r$. Utilizando as colineações do tipo T_L é facil mostrar que existe uma colineação T tal que $T(P)$ tem coordenadas $(0,0,1)$ e $T(r)$ é a reta imprópria, cuja equação é $z = 0$. (É mais fácil calcular $T_L^{-1} = T_{L^{-1}}$). Então, para provar o postulado 4' neste modelo, podemos supor que 0 têm coordenadas $(0,0,1)$ e r tem equação $z = 0$ (pelo menos, no caso $0 \notin r$). Sejam $(a_1,\ a_2, 1)$, $(a_1',\ a_2', 1)$ as coordenadas de A, A'. Como $0, A, A'$ são colineares, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha\ a_1 = a_1'$, $\alpha\ a_2 = a_2'$. Seja $L : k^3 \to k^3$, $L(x,y,z) = (x\alpha, y\alpha, z)$. Seja $\sigma : k \to k, \sigma(t) = \alpha\ t\alpha^{-1})$. Então $T_L^\circ\ T_\sigma$ satisfaz as condições do postulado 4'. (O caso $0 \in r$ é ainda mais fácil ou se reduz ao caso $0 \notin r$).

4. O corpo das coordenadas. Continuamos trabalhando, neste parágrafo, numa geometria elíptica desarguesiana (postulados 1, 2, 3E, 4). Pelas considerações do parágrafo precedente, temos que, dados três pontos colineares $0, A, A'$ e uma reta r $(A \notin r$, $(A' \notin r)$ existe uma **única** colineação tal que todo ponto de r fica fixo, 0 fica fixo, e se P, P' são correspondentes, então $0, P, P'$ são colineares. Uma tal colineação será chamada de **dilatação** do centro 0 e

eixo r. Por exemplo, as homotetias de centro 0 em GA_k extendem-se a dilatações de GP_k de centro 0 e eixo a reta imprópria. As translações de GA_k extendem-se a dilatações de GP_k de centro a direção da translação e de eixo a reta imprópria. Mais precisamente, as translações são as dilatações de eixo a reta imprópria e de centro pertencente a este eixo.

Seja $A = (0,0)$. Para determinar uma translação de GA_k basta dar a imagem $A' = (a_1, a_2)$ de A. Cada $\alpha \in k$ define um homomorfismo $T \to T$, onde T é o grupo das translações: à translação $A \to A'$ fazemos corresponder a translação $(0,0) \to (\alpha a_1\ \alpha a_2)$. Este homoformismo preserva os centros das translações.

Isto motiva a seguinte construção. Numa geometria elíptica desarguesiana qualquer **fixamos** uma reta r e consideramos as dilatações de eixo r e centro pertencente a r. Elas formam um grupo T. Com efeito, se $\tau_1 \in T$, $\tau_2 \in T$ então $\tau = \tau_1\ \tau_2$ é uma colineação que deixa cada ponto de r fixo. Sejam $A \notin r$, $A' = \tau(A)$, $A' \neq A$ (se $\tau = Id$, $\tau \in T$). Seja $0 = AA'.r$.



Seja $B \notin r$. Suponhamos $AA'.BB'=P \neq 0$ $(B' = \tau(B))$. Então $\tau(P) = P$. Logo $\tau_2(P) = \tau_1^{-1}(P)$ o que acarreta que $\tau_1^{-1} = \tau_2$. Ou seja $\tau = Id \in T$. Logo, se $\tau \neq Id$, τ é dilatação de eixo r e centro 0. Então, $\tau \in T$. Decorre daí que T é um grupo.

Consideramos agora o conjunto k de todos os homoformismos $T \to T$ que conservam os centros das dilatações. Definimos:

$0(\tau) = Id$ para todo $\tau \in T$,

$1(\tau) = \tau$ para todo $\tau \in T$,

$(\alpha + \beta)\ (\tau) = \alpha(\tau)^{\circ}\ \beta(\tau)$ se $\alpha, \beta \in k$

$(\alpha\beta)(\tau) = \alpha(\beta(\tau))$ se $\alpha, \beta \in k$, $\tau \in T$.

Com estas definições, k é um **corpo** (não necessariamente comutativo). Vejamos, por exemplo, que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, ou seja, que T é abeliano.

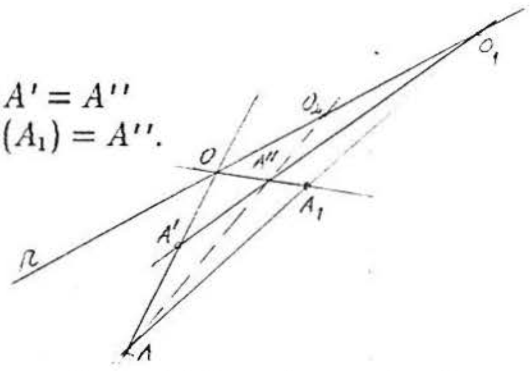
Sejam τ_1, $\tau_2 \in T$. Devemos provar $\tau_1\ \tau_2 = \tau_2\ \tau_1$.

Podemos supor que τ_1, τ_2 $\neq$ Id. Suponhamos que elas têm centros diferentes. Seja $A' = \tau_1(A)$, $A \notin r$. $0 = AA', r$ é o centro de τ_1. Seja $A'' = \tau_2(A')$. Então $0_1 = A'A''.r$ é o centro de τ_2. Seja $A_1 = 0A''.0_1A$.

Temos que:

$\tau_2\ \tau_1\ (A) = \tau_2 A' = A''$

$\tau_1\ \tau_2\ (A) = \tau_1(A_1) = A''$.



Decorre daí que $0_2 = AA''.r$ é o centro de $\tau_1\ \tau_2$ e de $\tau_2\ \tau_1$ e então, $\tau_1\ \tau_2 = \tau_2\ \tau_1$.

O caso que $\tau_1\ \tau_2$ têm o mesmo centro 0 pode-se reduzir ao anterior tomando $\tau_3 \neq Id$ com centro $0' \neq 0$ e provando que

$\tau_1\ \tau_2\ \tau_3 = \tau_2\ \tau_3\ \tau_1 = \tau_2\ \tau_1\ \tau_3$

porque $\tau_2\ \tau_3$ e τ_1 têm centros diferentes.

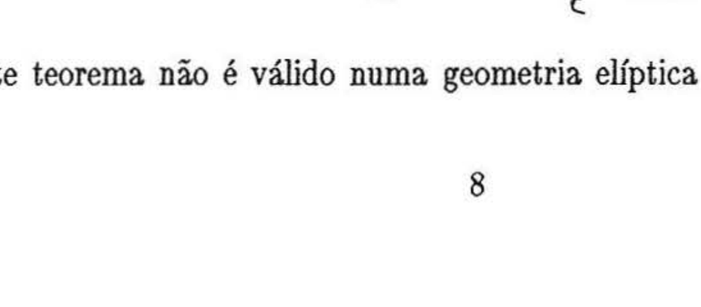
Escolhamos agora $\tau_1,\ \tau_2 \in T$ com **centros diferentes**. Pode-se provar que toda $\tau \in T$ se escreve de maneira única como

$$\tau = \alpha(\tau_1)^o\ \beta(\tau_2) \quad ,\alpha,\ \beta \in k$$

Fixando um ponto $0 \notin r$ (origem das coordenadas) podemos associar a cada ponto $P \notin r$ o par (α, β) sendo $\tau \in T$ tal que $\tau(0) = P$. Isto permite identificar o conjunto dos pontos que não pertencem a r com GA_k. Decorre daí que a geometria que estamos considerando é equivalente a GP_k. Temos, então, o:

TEOREMA. Toda geometria elíptica desarguesiana é equivalente a uma GP_k.

Além do teorema de Desargues, em GP temos outro teorema fundamental: o de Pappus. Este teorema afirma que se $ABCDEF$ é um hexágono tal que A, E, C são colineares e B, D, F também são colineares, então $M = AB.DE$, $N = BC.EF, P = CD.FA$ são colineares.



Este teorema não é válido numa geometria elíptica desarguesiana qualquer.

Mais precisamente temos:

TEOREMA. **O teorema de Pappus é válido em** GP_k **se e somente se** k **é comutativo.**

Vamos admitir que k é comutativo e demonstrar o teorema de Pappus. É fácil de ver que o fato de k ser comutativo equivale a que as dilatações de centro e eixo dados formam um grupo comutativo.

Sejam a, b retas, $A, E, C \in a$ e $B, D, F \in b$, $0 = a.b$. Seja $r = MP$. Devemos provar que $N \in r$. Sejam Δ_1, Δ_2 dilatações de centro 0 e eixo r tais que:

$\Delta_1(A) = E$, $\Delta_2(D) = F$.

Temos que $\Delta_1(B) = D$, $\Delta_2(C) = A$

Seja $\Delta = \Delta_1\Delta_2 = \Delta_2\Delta_1$. Então, $\Delta(B) = \Delta_2\Delta_1(B) = F$, $\Delta(C) = \Delta_1 \Delta_2(C) = E$. Como $\Delta \neq Id$, $N = BC.FE \in r$.

Observação Pela descrição em coordenadas homogêneas que vimos antes, GP_k têm um número finito de pontos se e somente se k é finito. Um teorema clássico de Wedderburn afirma que todo corpo finito é comutativo. Logo, toda geometria elíptica desarguesiana **finita** é pappusiana. Uma prova direta deste fato proporcionaria uma prova geométrica do teorema de Wedderburn.

5. Geometria Algébrica. Vimos no que precede que as GP_k com k comutativo são as geometrias elípticas desarguesianas e pappusianas. Nelas desenvolve-se a Geometria Algébrica Clássica (plana). O objeto de estudo são as **curvas algébricas**, conjuntos de pontos definidos por uma equação $P(x, y, z) = 0$ onde P é um polinômio homogêneo irredutível com coeficientes em k e x, y, z são as coordenadas homogêneas em GP_k definidas antes.

Se bem que o caso de um corpo comutativo qualquer seja importante (por exemplo $k = Q$ ou Z_p em teoria de números) habitualmente se trabalha com a hipótese de k algébricamente fechado. Geométricamente isto significa que toda reta e toda curva algébrica se intersectam.

6. Grupo de Colineações. Vamos explicar como é o grupo G das colineações de GP_k, no caso k comutativo (resultados são verdadeiros também se k não é comutativo, mas devem ser expressados com mais cuidado).

Se $\sigma : k \to k$ é um automorfismo, dizemos que uma aplicação $L : k^3 \to k^3$ é σ- linear se:

$$L(u + v) = L(u) + L(v) \quad e \quad L(\lambda u) = \sigma(\lambda)\ L(u)$$

para todos $u, v, \in k^3$, $\lambda \in k$.

Da mesma maneira que vimos antes para as lineares, também toda σ-linear inversível L induz uma colineação T_L.

TEOREMA. **Toda colineação T é da forma $T = T_L$, para alguma aplicação $L : k^3 \to k^3$ σ-linear inversível** $(\sigma \in Aut(k))$.

Vamos dar uma idéia da prova.

Se $u = (u_1, u_2, u_3) \in k^3$, $u \neq (0,0,0)$, notaremos $< u >$ o ponto de coordenadas homogêneas (u_1, u_2, u_3).

Sejam A, B, C, D pontos três a três não colineares e sejam A', B', C', D' respectivamente, as suas imagens por T.

Sejam $a, b, a', b' \in k^3$ tais que $A =< a >$, $B =< b >$, $B' =< b' >$, $A' =< a' >$.

Seja $P \in AB$, $P \neq B$. Então $P =< a + \lambda b >$, $\lambda \in k$.

Seja $P' = T(P) \in A'B'$. Então $P' =< a' + \lambda' b' >$, $\lambda' \in k$.

Pode-se provar que se a, b, a', b' são bem escolhidos, então $\lambda \to \lambda'$ é um **automorfismo** σ de k. Temos:

$$P =< a + \lambda b > \Rightarrow T(P) =< a' + \sigma(\lambda) b' >$$

Seja $C =< c >$, $c \in k^3$. Então $\{a, b, c\}$ é uma base de k^3. Decorre daí que

$$D =< d > \quad onde \quad d = a + \lambda b + \mu c \;, \; \lambda, \mu \in k, \; \lambda\mu \neq 0$$

Seja $E =< a + \lambda b > \in AB$. Então E, C, D são colineares. Logo $T(E) =< a' + \sigma(\lambda) b' >$, C', D' são colineares. Decorre daí que:

$D =< d' >$, $C =< c' >$, $d' = a' + \sigma(\lambda) b' + \mu' c'$

Seja $L_1 : k^3 \to k^3$, $L_1(u) = L_1(u_1, u_2, u_3) = (\sigma u_1, \sigma u_2, \sigma u_3)$.

Seja $L_2 : k^3 \to k^3$ **linear** tal que:

$L_2(a) = L_1^{-1}(a')$, $L_2(b) = L_1^{-1}(b')$, $L_2(c) = \mu^{-1}\, L_1^{-1}\,(\mu' c')$.

Os três vetores são não nulos e colineares com $L_1^{-1}(a')$, $L_1^{-1}(b')$, $L_1^{-1}(c')$ respectivamente.

Logo, L_2 é inversível. Então, $L = L_1 L_2 : k^3 \to k^3$ é σ-linear inversível. Além disso, $L(a) = a'$, $L(b) = b'$ e $L(\mu c) = \mu' c'$. Decorre daí que $T_L(C) = C'$ e que

$$L(d) = L(a) + \sigma(\lambda) L(b) + L(\mu c) = a' + \sigma(\lambda) b' + \mu' c' = d'$$

Logo $T_L(D) = D'$. Além disso, se $P \in AB$, $P = A + \tau B$, então como: $L(a + \tau b) = L(a) + \sigma(\tau) L(b) = a' + \sigma(\tau) b'$ temos que $T(P) = T_L(P)$.

Logo, $T^{-1}\, T_L$ é uma colineação que deixa fixo cada ponto de AB , C e D. Decorre daí que $T^{-1}\, T_L = Id$; ou seja, $T = T_L$.

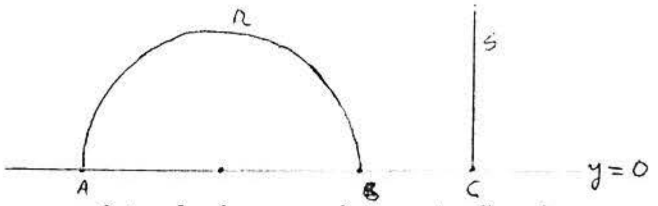
7. Geometrias Hiperbólicas. Únicamente vamos considerar, entre as geometrias que verificam os postulados 1, 2, 3H, a GBL.

A axiomática desta geometria é identicà à da GE, com a única diferença que o postulado 3P da GE é substituído pelo 3H. Naturalmente, esta mudança modifica substancialmente o conteúdo da geometria.

Pode-se mostrar que a axiomática da GBL , assim como a da GE, é **completa**, no sentido que dois modelos da GBL são equivalentes. Vamos considerar um destes modelos: o chamado **semiplano de Poincaré**. Depois veremos que é fácil estabelecer a equivalência diretamente deste modelo com aquele mencionado na introdução.

Consideremos no plano complexo $\mathbf{C}$ o semiplano $H = \{Im\ z > 0\}$. Os pontos de GBL são os pontos de H. As "retas" desta geometria são de dois tipos: as semiretas (euclideas) verticais contidas em H e com origem em $0x$ e os semicírculos euclideos contidos em H com centro em $0x$. A relação de pertencer é a evidente.

Os pontos de GBL e as retas de GBL serão chamados de pontos hiperbólicos e retas hiperbólicas. É muito fácil verificar que são satisfeitos os axiomas 1, 2, 3H, isto é, GBL é uma geometria hiperbólica.



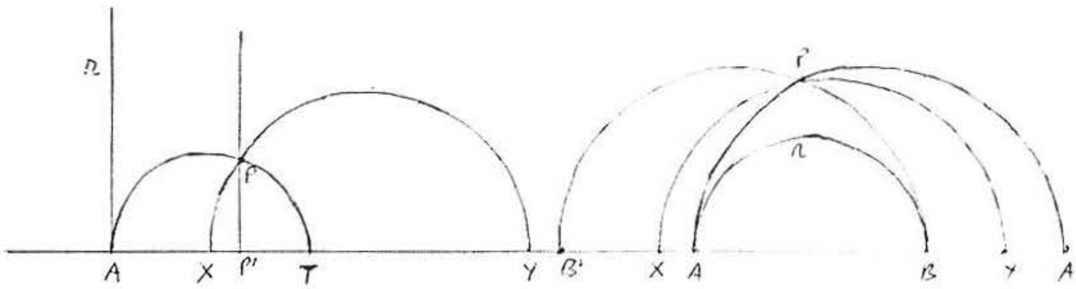
Por comodidade, vamos introduzir a seguinte notação. Agregamos a $0x$ um ponto P_∞ e chamamos $r_\infty = 0x \cup \{P_\infty\}$. As retas hiperbólicas r e s da figura diremos que elas tem **extremos** A, B e C, P_∞ respectivamente. (Observemos que os pontos de r_∞ **não** são pontos da GBL). Dados $R, S \in r_\infty$ quaisquer, a reta hiperbólica de extremos R, S (que existe e é única) será notada RS.

Consideremos agora o ponto hiperbólico P e a reta hiperbólica r , $P \notin r$. Vamos determinar todas retas hiperbólicas por P que não cortam r.

Consideremos primeiro o caso $r = A\,P_\infty$, $A = a \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Suponhamos $P = x + iy$. Então o conjunto das retas por P que não cortam r é o conjunto das retas XY $(X, Y \in r_\infty)$ que passam por P e tais que $X = u \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ onde $a \leq u \leq x$. Os casos extremos $(u = a, u = x)$ são chamadas de **paralelas** a r por P.

Consideremos agora o caso $r = AB$, $A = a \in \mathbf{R}$, $B = b \in \mathbf{R}$. Sejam $A', B' \in r_\infty$ tais que $P \in AA'$, $P \in BB'$. Seja, por exemplo $B' \neq P_\infty$. Então o conjunto das retas por P que não cortam r é o conjunto das retas XY por P (onde $X, Y \in r_\infty$) tais que X pertence aquele "segmento" de r_∞ de extremos AB' que não contém B. (Deixamos ao leitor o cuidado de explicitar a noção de "segmento de r_∞").

As retas hiperbólicas AA' , BB' são chamadas de **paralelas** a r por P.



8. <u>Congruências.</u> Na GE existe o conceito de figuras **congruentes** ("iguais"). Temos transformações do conjunto de pontos da GE : translações, rotações, reflexões, anti-translações, chamadas **congruências**, que formam um grupo G e dois conjuntos F, F' de pontos são congruentes se e somente se existe $T \in G$ tal que $T(F) = F'$.

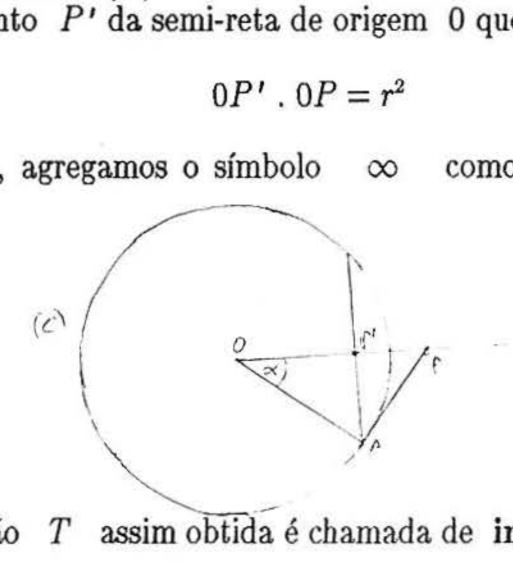
Também em GBL existe a noção de congruência. Antes de entrar neste assunto vamos fazer um pequeno parêntese nas transformações da GE. Além das congruências, já mencionadas, temos na GE as **homotetias**. Elas geram, junto com as congruências, o grupo das **semelhanças**.

Outras transformações importantes da GE são as **inversões**. Vamos supor escolhida uma unidade de medida em GE (o que faremos independe desta escolha). Se A, B são pontos, $\overline{AB}$ notará o comprimento do segmento.

Seja dado um círculo (C) de centro 0 e raio r. A cada ponto P fazemos corresponder o ponto P' da semi-reta de origem 0 que contém P tal que:

$$0P' \,.\, 0P = r^2$$

Por convenção, agregamos o símbolo ∞ como novo ponto e definimos: $0' = \infty$, $\infty' = 0$



A transformação T assim obtida é chamada de **inversão** (respeito de (C)).

É claro que $T^2 = Id$. O conjunto (C) é o conjunto dos pontos fixos de T. A figura acima mostra uma construção de T. Com efeito:

$$Cos \ \alpha = \frac{\overline{0A}}{\overline{0P}} = \frac{\overline{0P'}}{\overline{0A}}$$

Logo,

$$\overline{0P} \, . \, \overline{0P'} = \overline{0A} \, . \, \overline{0A} = r^2$$

Identificando os pontos de GE com os números complexos, vamos estabelecer a equação da inversão. Suponhamos que $0 = \omega \in \mathbf{C}$.

Sejam $P = z$, $P' = z'$, $z, z' \in \mathbf{C}$. Então:

a) $z' - \omega = \lambda \, (z - \omega)$, $\lambda \in \mathbf{R}^+$

b) $|z - \omega| \, |z' - \omega| = r^2$

Logo,

$$\lambda = \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = \frac{r^2}{|z - \omega|^2} = \frac{r^2}{(z - \omega)(\overline{z} - \overline{\omega})}$$

Então,

$$z' = \omega + \lambda(z - \omega) = \omega + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{\omega}} = \frac{\omega\overline{z} + r^2 - |\omega|^2}{\overline{z} - \overline{\omega}}$$

Consideremos o grupo de transformações em GE gerado pelas semelhanças e as inversões. Os elementos deste grupo são chamados de **homografias**.

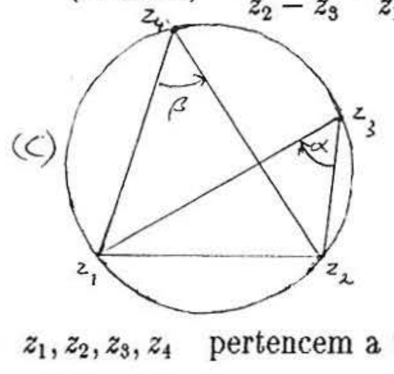
Decorre do cálculo anterior que o grupo das homografias é gerado pelas transformações:

$$z \ \rightarrow \ \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

(onde $-\frac{d}{c} \rightarrow \infty$ e $\infty \rightarrow \frac{a}{c}$) e a conjugação $z \rightarrow \overline{z}$.

Sejam $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ distintos. Definimos a **razão dupla**:

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$$



Suponhamos que z_1, z_2, z_3, z_4 pertencem a um círculo (C). O argumento do primeiro fator acima é α e o do segundo é β. Pela propriedade de arco capaz, $\alpha+\beta=0$ ou π. Logo (z_1,z_2,z_3,z_4) é real. É fácil ver que também (z_1,z_2,z_3,z_4) é real quando z_1,z_2,z_3,z_4 são colineares e que também vale a recíproca, ou seja: (z_1,z_2,z_3,z_4) **é real se e somente se** z_1,z_2,z_3,z_4 **são colineares ou pertencem a um mesmo círculo.**

É óbvio que:

$$(\overline{z_1},\overline{z_2},\overline{z_3},\overline{z_4})=\overline{(z_1,z_2,z_3,z_4)}$$

Um cálculo direto mostra que $z\to\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ deixa invariante a razão dupla. Em resumo: as homografias transformam quatro pontos colineares ou pertencentes a um mesmo círculo em quatro pontos colineares ou pertencentes a um mesmo círculo. Logo, as homografias transformam toda reta em um reta ou um círculo e todo círculo em uma reta ou um círculo.

Por exemplo, a inversão respeito do círculo (C) de centro 0 transforma toda reta por 0 em reta por 0, todo círculo por 0 em reta, toda reta que não contém 0 em círculo e todo círculo que não contém 0 em círculo.

Voltando a GBL, consideremos as homografias que deixam invariante H: translação paralelas a $0x$, reflexões de eixo perpendicular a $0x$, homotetias com centro em $0x$, inversões com círculo fixo centrado em $0x$, e suas composições.

Estas transformações constituem o grupo GH de congruências de GBL: dois subconjuntos de H são congruentes se existe um elemento de GH que leva um sobre o outro.

Este grupo GH é gerado pela transformação $z\to -\overline{z}$ e pelas transformações:

$$z\to\frac{az+b}{cz+d}\quad,a,b,c,d\in\mathbf{R},\quad ad-bc>0$$

Uma propriedade muito importante das homografias é que elas **preservam os ângulos** entre retas e círculos. (Isto pode ser provado diretamente de maneira geométrica ou usando fato que as funções analíticas preservam ângulos). Decorre daí que também é preservada a ortogonalidade entre retas e círculos. Em particular, as transformações de GH levam retas hiperbólicas em retas hiperbólicas.

Da mesma maneira que em GE existe uma noção de distância de maneira que as congruências são bijeções que preservam a distância, também em GBL se pode introduzir uma distância hiperbólica com análoga propriedade respeito de GH. Com esta métrica hiperbólica, H é isométrico a uma superfície completa de curvatura constante negativa. Então podemos dizer que a GBL é a geometria sobre uma superfície de curvatura constante negativa.

Observemos, finalmente, que H é equivalente ao modelo construído na introdução pela correspondência:

$$z \to \frac{-iz+i}{z+i}$$

que estabelece uma bijeção entre o disco unidade e H.

ABREVIAÇÕES

GE = Geometria Euclídea.
GBL = Geometria de Bolyai-Lobatchevski.
GNE = Geometria Não Euclídea.
GA_k = Geometria Afim sobre o corpo k.
GP_k = Geometria Projetiva sobre o corpo k.
GP = Geometria Projetiva Clássica.

Referências Bibliográficas

1. ELEMENTOS de Euclides. São Paulo: Cultura, 1944. 324p. (Série Científica)
2. HILBERT. Grundlagen der Geometrie.
3. VALES, Julio - Manuscritos preliminares do seu livro de Geometria.
4. ROCHA, Luis Fernando Carvalho da. Introdução à Geometria Hiperbólica Plana. Rio de Janeiro: IMPA, 1987. 252p. (Colóquio Brasileiro de Matemática, 16. Poços de Caldas, jul. 1987).
5. HARTSHORNE, R. Algebraic Geometry. New York: Springer Verlag, 1977.
6. ARTIN, Emil. Geometric Algebra. New York: Interscience, 1957. 214p. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 3)

Nota: A referência [3] contém material muito interessante e pode ser obtido diretamente com o autor no seu endereço:
Canelones 2326 - Montevideo - Uruguay

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série B: Trabalho de Apoio Didático

1. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89.
2. Jaime B. Ripoll - Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções de Uma Variável Real - OUT/89.
3. Edmund R. Puczylowski - Dimension of Modular Lattices - JUN/90.
4. Marcos Sebastiani - Geometrias Não Euclidianas - JUL/90.
5. Sandra R. C. Pizzatto - Cálculo Numérico - MAR/91.
6. Vera Clotilde G. Carneiro - Elementos de Cálculo para Biologia - AGO/91.
7. Elsa Mundstock - Iniciação ao SPSS/PC - SET/91.

Universidade Federal do Rio Grande Sul
Reitor: Professor Tuiskon Dick

Instituto de Matemática
Diretor: Professor Aron Taitelbaum
Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Coordenador: Professora Jandyra G. Fachel
Secretária: Rosaura Monteiro Pinheiro

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:
Série A: Trabalho de Pesquisa
Série B: Trabalho de Apoio Didático
Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS
Série D: Trabalho de Graduação
Série E: Dissertações de Mestrado
Série F: Trabalho de Divulgação
Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:
NAEC - Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Instituto de Matemática - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91.500 - Agronomia - POA/RS
Telefone: 36.11.59 ou 36.17.85 Ramal: 252