

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO EM SUPERFÍCIES DE
GEOMETRIA COMPLEXA UTILIZANDO O MÉTODO DE MONTE CARLO

por

Felipe Roque Tasoniero

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2017



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

SIMULAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO EM SUPERFÍCIES DE
GEOMETRIA COMPLEXA UTILIZANDO O MÉTODO DE MONTE CARLO

por

Felipe Roque Tasoniero

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof^a. Dr.^a Thamy Cristina Hayashi
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Energia e Fenômenos de Transporte**

Orientador: Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França

Prof^a. Dr.^a Thamy Cristina Hayashi

MEng. Yuri Theodoro Barbosa de Lima

Porto Alegre, 19 de dezembro de 2017.

AGRADECIMENTOS;

Agradeço aos meus pais e a toda minha família pelo apoio que me deram em todos os momentos e ao Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann pela orientação e ensinamentos passados, os quais possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Também agradeço a todos meus amigos e colegas por todo incentivo que recebi durante esta jornada.

TASONIERO, F. R. “**Simulação da Transferência de Calor por Condução em Superfícies de Geometria Complexa Utilizando o Método de Monte Carlo**”. 2017. 22 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo simular a transferência de calor por condução em uma região bidimensional utilizando o Método de Monte Carlo, considerando condição de regime permanente. Simulou-se um problema de transferência de calor em um perfil de geometria quadrática com quatro espaços vazios em seu interior, utilizando temperaturas pré-definidas como condições de contorno. As simulações foram realizadas pelo Método de Monte Carlo, utilizando a técnica de passeios aleatórios flutuantes, e pelo Método de Elementos Finitos, onde para este último foi utilizado o software ANSYS Academic® para obter sua solução. Os resultados da simulação pelo Método de Monte Carlo mostraram que a progressão da convergência das temperaturas pontuais reduzia em relação ao aumento do número de partículas simuladas. Os resultados obtidos pelo Método de Monte Carlo foram comparados então aos obtidos pelo Método de Elementos Finitos, resultado em um erro de aproximadamente 1,0%. O tempo de processamento obtido pela simulação por Monte Carlo foi de aproximadamente 1,0 seg. enquanto que para a simulação por Elementos Finitos foi próximo de 10 seg. Concluiu-se então que o Método de Monte Carlo se mostrou eficaz em solucionar problemas de transferência de calor e também demonstrou sua viabilidade frente a outros métodos convencionais utilizados para solucionar problemas de transferência de calor.

PALAVRAS-CHAVE: (Transferência de Calor, Simulação, Método de Monte Carlo, Passeios Aleatórios)

TASONIERO, F. R. “**Simulation for Conduction Heat Transfer in Complex Geometry Surface Using Monte Carlo Method**”. 2017. 22 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ABSTRACT

This work has as the main goal heat conduction simulation in a two-dimensional region using the Monte Carlo Method, considering a steady-state condition. The heat transfer was simulated in a quadratic geometry surface with four empty spaces inside, using predefined temperatures as boundary conditions. The simulations were run using the Monte Carlo Method, by floating random walks, and using the Finite Elements Method, but for this last one the solution was obtained by ANSYS Academic® software. The results of the simulation by Monte Carlo Method shows that the progress of the punctual temperatures convergence was reduced when the simulated particles number was increased. The results obtained by using Monte Carlo Method was compared with the ones obtained by using Finite Elements Method, resulting an error of about 1,0%. The processing time for Monte Carlo simulation was about 1,0 sec. however for Finite Elements simulation was about 10 sec. It was concluded that the Monte Carlo Method proved efficient in solving heat transfer problems and its viability compared to other conventional methods used for solving heat transfer problems.

KEYWORDS: (Heat Transfer, Simulation, Monte Carlo Method, Random Walks)

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	1
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
4. MÉTODO DE MONTE CARLO E A TÉCNICA DE PASSEIOS ALEATÓRIOS	3
5. SIMULAÇÕES DE PERFIL DE GEOMETRIA QUADRÁTICA BIDIMENSIONAL	6
6. RESULTADOS	8
7. CONCLUSÕES	12
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	12
Apêndice I	14

1. INTRODUÇÃO

A condução de calor em sólidos possui numerosas aplicações em vários segmentos da ciência e engenharia e, devido a isto, há um considerável interesse na solução de problemas de condução de calor a fim de obter informações práticas e úteis [Oluwajobi, A. O. et al., 2008]. Cada vez mais se faz necessário a simulação deste tipo de problema devido sua capacidade de obter resultados como um laboratório experimental virtual. Para isso, existem atualmente diversos métodos numéricos capazes de solucionar problemas envolvendo a transferência de calor.

Métodos numéricos tradicionais como diferenças finitas e elementos finitos são bem desenvolvidos, contudo, esses métodos são baseados em sistema de malha discretizada, ou seja, são essencialmente limitados ao tratamento da geometria segundo Zin Cho, 2011. Porém, muitas vezes é necessário lidar com simulações em geometrias muito complexas, dificultando assim a geração de malhas bem estruturadas em sua região, bem como um aumento do tempo total de simulação.

O Método de Monte Carlo é um método estocástico conhecido pela sua capacidade de solucionar equações diferenciais e integrais com um número elevado de dimensões, bem como inversão de matrizes e solução de autovalores [H. Kalos, M. et al., 1986]. Seu fundamento se dá pela geração e utilização de números aleatórios a partir de uma dada função densidade de probabilidade para solucionar problemas de caráter tanto estocásticos quanto determinísticos.

A utilização deste método na solução de problemas envolvendo a transferência de calor já é conhecida [Taschetto, M. P., 2007], porém simulações envolvendo geração de números aleatórios em grande quantidade sempre foram um problema devido a limitação física dos sistemas computacionais. Entretanto, com o advento dos sistemas de hardware atuais, estes problemas foram reduzindo e novas pesquisas envolvendo métodos numéricos e estocásticos têm sido desenvolvidas.

Segundo Zin Cho, 2011, a vantagem do Método de Monte Carlo em relação aos métodos numéricos convencionais é a não necessidade de se determinar uma malha para a superfície, facilitando então o tratamento de problemas com geometrias muito complexas e em princípio não impõe nenhuma restrição em relação a posições no domínio.

A técnica de simulação utilizada no presente trabalho para se determinar as temperaturas pontuais é conhecida como passeios aleatórios flutuantes, onde o algoritmo simula o movimento aleatório de uma partícula computacional dentro da região simulada. Segundo Chatterjee et al., 2006, uma das vantagens desta técnica é que cada passeio aleatório é independente dos outros, ou seja, a técnica é trivialmente paralelizável, reduzindo assim o tempo de processamento computacional.

Segundo Oluwajobi et al., 2008 e Talebi et al., 2016, a comparação da simulação do problema utilizando o Método de Monte Carlo e utilizando o Método de Diferenças Finitas mostrou concordância dentro de uma diferença relativa de 1,0%, ademais foi possível analisar as vantagens e desvantagens do Método de Monte Carlo frente aos métodos numéricos já conhecidos, como por exemplo o tempo de processamento computacional e a exatidão dos resultados.

2. OBJETIVO

O trabalho proposto tem como objetivo analisar a transferência de calor por condução em regime permanente em uma superfície com geometria complexa em duas dimensões utilizando o método numérico de Monte Carlo através da técnica de passeios aleatórios flutuantes.

Os resultados obtidos por este método serão comparados aos obtidos pelo método de Elementos Finitos, a fim de se determinar a capacidade do método proposto em solucionar problemas de transferência de calor de maneira alternativa a outros métodos.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O fenômeno de transferência de calor ocorre devido a uma diferença de temperatura em um meio, ou seja, este fenômeno é considerado como energia térmica em trânsito segundo Incropera et al., 2008. Há, no entanto, diferentes modos de transferência de calor, sendo um deles a condução. A condução de calor ocorre devido a um gradiente de temperatura em um meio estacionário (sólido ou líquido), sendo que o calor transferido ocorre na direção do gradiente negativo de temperatura. A equação que governa este fenômeno é conhecida como Lei de Fourier, a qual indica que o fluxo térmico é a taxa de transferência de calor normal a uma superfície isotérmica por unidade de área.

Um ponto importante sobre a Lei de Fourier é que através dela é possível definir a condutividade térmica k em $[W/(m^2 \cdot ^\circ C)]$, de um material. Outras propriedades também relevantes para a análise da transferência de calor são a densidade ρ em $[kg/m^3]$, e o calor específico c_p em $[J/(kg \cdot K)]$.

Quando se realiza a análise de condução do calor, um dos objetivos é determinar o campo de temperaturas no meio. Para isso, a resolução da forma apropriada da equação do calor se faz necessária. A equação da difusão do calor em coordenadas cartesianas para uma superfície bidimensional tem a seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

onde T indica a temperatura em $[^\circ C]$, \dot{q} é a taxa de geração de calor por unidade de volume em $[W/m^3]$, t é a variável tempo em $[seg.]$, e x e y são as variáveis espaciais. Vários, então, são os métodos para solucionar este tipo de problema. Dentre os métodos numéricos mais usuais podemos citar o Método de Diferenças Finitas, o Método de Volumes Finitos e o Método de Elementos Finitos. Conhecendo-se as condições iniciais e de contorno do meio, é possível obter a solução da Equação 3.1. As condições de contorno para a análise de transferência de calor podem ser de três tipos: a primeira, conhecida como condição de primeira espécie ou Condição de Dirichlet, corresponde a um contorno com temperatura definida, a segunda, conhecida como condição de segunda espécie ou como Condição de Neumann, corresponde a condição de um fluxo térmico no contorno, e a terceira, conhecida como condição de terceira espécie ou Condição de Cauchy, corresponde a condição de convecção na superfície [Hecke, M. B., 2010].

Contudo, apesar da extensiva utilização de métodos numéricos determinísticos para solucionar problemas de condução do calor, é possível também obter soluções aproximadas fazendo-se uso de métodos numéricos estocásticos. Um dos métodos estocásticos capaz de solucionar problemas de transferência de calor entre outros, é conhecido como Método de Monte Carlo.

Segundo Oluwajobi et al., 2008, a aplicação do Método de Monte Carlo a um dado problema não depende natureza estocástica do sistema a ser estudado, mas somente da habilidade do investigador em formular o problema de tal maneira que números aleatórios possam ser usados para se obter a solução. Na pesquisa de Oluwajobi et al., 2008, foram apresentados a utilização das técnicas de passeios aleatórios fixos e flutuantes utilizando o Método de Monte Carlo para solucionar o problema de transferência de calor. Como vantagem, a técnica de passeios aleatórios flutuantes é independente da geração de malhas para solucionar problemas de transferência de calor, porém, a limitação desta técnica se dá devido ao fato da necessidade da geração de um grande número de partículas computacionais para a solução do problema com certa precisão e também a capacidade de se obter o resultado de somente um determinado ponto da superfície a cada simulação.

Partículas computacionais geram pontos de amostragem, através de sua propagação, pelas posições finais da trajetória que se encontra no contorno onde os valores de temperatura são dados pelas condições de contorno.

Em Oluwajobi et al., 2008, também foi utilizado, para efeito de comparação e validação, o Método de Diferenças Finitas aplicado ao mesmo problema. Os resultados obtidos por Oluwajobi et al., 2008, mostraram que a simulação utilizando a técnica de passeios aleatórios fixos pode se obter resultados muito próximos aos obtidos com a solução pelo Método de Diferenças Finitas. Também foi possível concluir que a técnica de passeios aleatórios flutuantes alcançou resultados muito próximos aos da técnica de passeios aleatórios fixos, porém na última mencionada foi necessário a geração de muitos passos computacionais, o que ocasionou o aumento do tempo de simulação.

Já na pesquisa realizada por Talebi et al., 2016, também foram utilizadas as técnicas de passeios aleatórios fixos e flutuantes para a solução da transferência de calor. Contudo, uma técnica nova, porém similar as outras duas, foi apresentada. Esta técnica denominada de passeios aleatórios semi-flutuantes consistia em utilizar características das outras duas técnicas de passeios aleatórios mostradas anteriormente. Sua vantagem se deu pela não necessidade da geração de malha na região simulada e pela precisão dos resultados obtidos, porém o tempo necessário de simulação para se obter tal precisão foi maior em comparação as outras duas técnicas. Em Talebi et al., 2016, foram feitas simulações em superfícies com geometrias e condições de contorno diferentes das utilizadas por Oluwajobi, A. O. et al., 2008.

Os resultados obtidos na presente pesquisa através da utilização da técnica de passeios aleatórios flutuantes foram comparados aos obtidos pelo Método de Diferenças Finitas e também aos obtidos pelas outras duas técnicas de passeios aleatórios. Como conclusão, o tempo de processamento para a solução da transferência de calor bidimensional em regime permanente utilizando o Método de Monte Carlo por passeios aleatórios flutuantes se mostrou bem abaixo do tempo para a solução utilizando o Método de Diferenças Finitas, porém sua desvantagem se deu devido ao fato de que a simulação pelo Método de Monte Carlo consegue obter o resultado para apenas um ponto da superfície a cada simulação, já que pelo Método de Diferenças Finitas é possível obter o campo de temperaturas para todos os pontos de uma malha na superfície com apenas uma simulação.

4. MÉTODO DE MONTE CARLO E A TÉCNICA DE PASSEIOS ALEATÓRIOS FLUTUANTES

A seguir é apresentada a metodologia para a análise da transferência de calor por condução utilizando o Método de Monte Carlo. Para esta análise será utilizada a técnica de passeios aleatórios flutuantes e para efeito de validação, os resultados obtidos por esta técnica serão comparados aos obtidos pela simulação utilizando o Método de Elementos Finitos utilizando o pacote Mechanical APDL do software ANSYS Academic® [ANSYS Inc., 2013]. A seguir serão apresentados os métodos utilizados para a simulação da transferência de calor por condução em regime permanente em uma superfície bidimensional.

O Método de Monte Carlo tem como fundamento a geração e utilização de números aleatórios através de uma determinada função densidade de probabilidade para se obter a solução de problemas tanto de natureza estocástica quanto determinística segundo [Kalos, M. H., 1986]. Na literatura atual, já se faz uso de técnicas computacionais avançadas para se obter números com elevado grau de aleatoriedade, como por exemplo o gerador de números aleatórios MCNP5 [Brown, F. B. Et al., 2002], porém para o presente trabalho serão utilizadas apenas rotinas computacionais já existentes para se obter números pseudo-aleatórios. Um dos geradores computacionais de números pseudo-aleatórios mais conhecidos é o Mersenne Twister [Matsumoto, M. et al., 1998].

A técnica de passeios aleatórios flutuantes utiliza números aleatórios para sua simulação, ou seja, estes números serão utilizados de maneira a garantir tal aleatoriedade a cada passeio flutuante. As vantagens de sua aplicação se dão basicamente pela facilidade de implementação da técnica e da não necessidade de geração de uma malha na superfície. Pode-se então dizer que esta técnica possui vantagens em aplicações onde se faz necessário obter apenas a temperatura em um ponto de uma superfície e/ou quando a geometria da superfície é considerada complexa. Suponha então uma superfície bidimensional em que seja necessário obter a temperatura em um dado ponto nesta superfície como mostrado a Figura 4.1.

Para o problema de condução de calor em regime permanente sem geração de calor em uma superfície plana bidimensional, a equação que governa este problema é denominada de Equação de Laplace, a qual possui a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

A base para a técnica de passeios aleatórios flutuantes pode ser deduzida pela solução exata da temperatura para uma região circular bidimensional e homogênea de raio r centrada no ponto (x, y) . Cumpre observar que a Equação 4.2 é invariante sob rotação do sistema de coordenadas, ou seja, a dinâmica do processo é localmente isotrópica. Portanto, no ponto (x, y) , a temperatura pode ser representada em termos aproximados pela distribuição de temperatura $T(r, \omega)$ no contorno de um círculo isotrópico de raio r pelas seguintes equações:

$$T(x, y) = \int_0^{2\pi} T(r, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.2)$$

$$dF = d\omega / 2\pi \quad (4.3)$$

onde ω é a coordenada angular do círculo indicado na Figura 4.1, sendo $0 \leq \omega \leq 2\pi$, e dF é sua função densidade de probabilidade. Pode-se definir a função densidade de probabilidade como uma função que descreve a probabilidade de uma determinada variável aleatória ter um determinado valor. Como $dF/d\omega = 1/2\pi$ é uma constante, isso indica que a probabilidade de dF é independente de ω , ou seja, pode-se dizer que o passeio aleatório de uma dada partícula computacional situada no centro de um círculo em um ponto (x, y) terá a mesma probabilidade de atingir qualquer ponto na circunferência deste círculo, i.e., uma propriedade de propagação da partícula computacional, compatível com a Equação 4.2.

Mais especificamente, os sítios de amostragem são gerados utilizando um raio em torno de um ponto da trajetória definido pela distância mínima deste ponto ao contorno e, para a direção, um ângulo aleatório de uma distribuição homogênea. O novo ponto de partida é definido por um ponto na circunferência pelo ângulo aleatório.

Este procedimento, de definir um raio (distância mínima ao contorno) e o ângulo aleatório, é repetido até um determinado ponto, a uma distância mínima do contorno, no qual a trajetória dessa partícula computacional irá terminar. A repetição deste procedimento com um conjunto de N partículas que definem o tamanho da amostragem determinam a importância de cada valor de temperatura num ponto do contorno para uma temperatura numa coordenada qualquer no interior do domínio de interesse.

A simulação utilizando a técnica de passeios aleatórios flutuantes pode ser agora descrita. Para uma dada partícula computacional situada em um determinado ponto (x, y) na superfície, esta partícula irá armazenar a posição inicial como sua origem. A partícula computacional então se moverá pela superfície e cada novo passo para esta partícula será dado pelas seguintes equações:

$$x_{i+1} = x_i + r_i \cos(\omega_i) \quad (4.4)$$

$$y_{i+1} = y_i + r_i \sin(\omega_i) \quad (4.5)$$

Como mostra a Figura 4.1, o ponto (x_{i+1}, y_{i+1}) está situado em um círculo a um ângulo de ω_i em relação ao eixo horizontal. Note que ω_i é dado por uma distribuição homogênea no intervalo de 0 a 2π .

O círculo possui seu centro a uma distância r_i do ponto (x_i, y_i) , onde o valor de seu raio r_i é considerado como a menor distância entre seu centro e o ponto no contorno da superfície,

como já mencionado anteriormente, e o ângulo é dado dentro do intervalo entre $0 \leq \omega_i \leq 2\pi$. O valor do ângulo para cada passeio que a partícula realiza é obtido através da seguinte equação:

$$\omega_i = 2\pi\rho \quad (4.6)$$

onde ρ é o número aleatório gerado dentro do seguinte intervalo $0 \leq \rho \leq 1$.

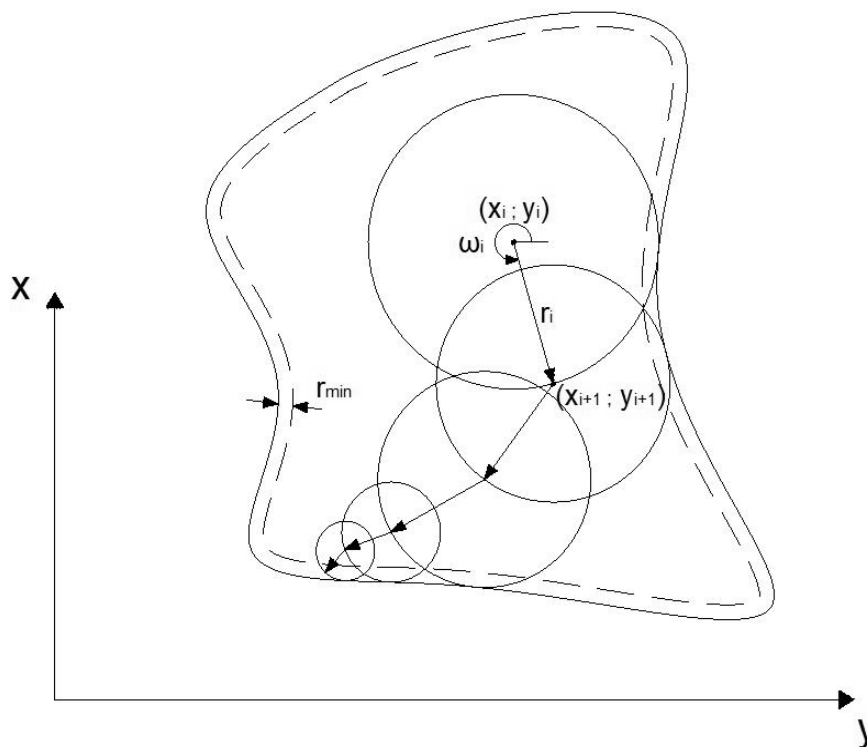


Figura 4.1 – Passeio aleatório flutuante da partícula computacional

A cada novo passo a partícula irá armazenar a nova posição como sua posição inicial e assim as novas posições serão geradas de forma análoga, sendo que a cada passo um círculo será criado com um raio que terá um determinado valor em relação a distância do centro do círculo até o ponto mais próximo do contorno. Todos os passeios aleatórios são independentes uns dos outros, pois cada novo passo será dado como se fosse seu primeiro.

É possível perceber então que, devido ao fato de que o círculo gerado a cada passo sempre tangenciará um ponto do contorno e este círculo tenderá a reduzir seu raio de acordo com a aproximação da partícula computacional em relação ao contorno, a solução da Equação 4.2 se dará pela média ponderada das temperaturas em pontos no contorno, onde distâncias da trajetória total mais curtas tem probabilidade maior para serem utilizadas num passeio aleatório. Conseqüentemente pontos no contorno mais próximos têm maior influência na temperatura da posição de interesse (x, y) .

O passeio aleatório realizado pela partícula computacional será realizado até que esta atinja um ponto do contorno da superfície. Contudo, como a distância percorrida pela partícula poderá variar a cada passo, se faz necessário o uso de um critério de parada para que se evite que a partícula, ao se aproximar do contorno, tenha dificuldades em encontrá-lo, aumentando assim o tempo de simulação. Para a técnica de passeios aleatórios flutuantes é possível adotar, por exemplo, um dos seguintes critérios de parada:

- 1) Quando o raio r_i for menor que um valor pré estabelecido r_{min} , a solução para a equação da transferência de calor em 1-dimensão, ou seja, à direção normal ao contorno, pode ser usada para se determinar a probabilidade da partícula de ser "absorvida" ou de refletir no contorno.
- 2) Quando o raio r_i for menor que um valor pré estabelecido r_{min} , a forma de diferenças finitas da equação da condução do calor no contorno pode ser usada para se determinar a probabilidade da partícula de ser "absorvida" ou de refletir no contorno.
- 3) Quando uma partícula se move para uma posição angular menor que um valor pré-determinado $\pm\Delta\omega$ da posição onde o círculo tangencia o ponto mais próximo do contorno, então o passeio aleatório pode ser interrompido e a condição de contorno normal a este ponto pode ser gravada.

Para o problema proposto neste texto será utilizado como critério de parada uma distância r_{min} em relação ao contorno da superfície. Quando então a partícula computacional atingir a região compreendida entre r_{min} e o contorno, faz-se a verificação para as condições de contorno pré-determinadas para o ponto no qual a partícula se encontra. A partícula pode ser então "absorvida" ou refletida no ponto em questão dependendo do tipo de condição de contorno caracterizada neste ponto.

Se a condição de contorno seja de primeira ordem, ou seja, o contorno possui uma temperatura definida, é dito que a partícula é "absorvida" e o valor da temperatura neste ponto é armazenado. Já para o caso da condição de contorno ser de segunda ordem com fluxo de calor nulo, ou seja, uma superfície isolada, a partícula é então refletida neste ponto. Para as demais condições de contorno existentes, se faz necessário a utilização da equação de condução do calor na forma de diferenças finitas para se obter a probabilidade de ocorrer absorção ou reflexão da partícula no contorno segundo Talebi et al., 2016.

No caso em que a partícula é absorvida e o valor da temperatura é armazenado, uma nova partícula computacional é criada ponto de origem, o qual se deseja obter a solução para a temperatura, e todo o processo de passeios aleatórios flutuantes é executado novamente até que esta partícula atinja um novo ponto no contorno da superfície. Esse processo é realizado dependendo do número de partículas estipuladas para a simulação.

Após todas as partículas computacionais serem simuladas, o valor total da temperatura no ponto de origem da simulação poderá ser obtido utilizando-se a média dos valores obtidos para cada partícula computacional, de acordo com a seguinte equação:

$$T_f = \frac{1}{N} \sum T_p \quad (4.6)$$

onde T_p é a temperatura adimensional, na posição final da trajetória, armazenada para cada partícula computacional ao atingir o contorno da superfície, N é o número de partículas simuladas e T_f é a média das temperaturas adimensionais armazenadas. Quando N tende a infinito, esta equação apresenta um resultado compatível ao obtido utilizando o Método de Diferenças Finitas [Talebi, S. et al., 2016].

5. SIMULAÇÃO DE PERFIL DE GEOMETRIA QUADRÁTICA BIDIMENSIONAL

No seguinte problema, será realizada a análise da transferência de calor por condução, em regime permanente numa superfície bidimensional e sem geração de calor, aplicando-se para isso o Método de Monte Carlo.

A superfície a ser analisada possui geometria quadrada, e no seu interior encontram-se quatro regiões vazias de geometria também de seção quadrada. Como exposto na Figura 5.1 e na Figura 5.2, as medidas adotadas neste problema são adimensionais. As dimensões da geometria simulada se deu em relação a origem do sistema de eixos (x, y) de acordo com a Figura 5.1. Escolheu-se este tipo de geometria devido ao fato desta não ser considerada uma superfície de geometria simples.

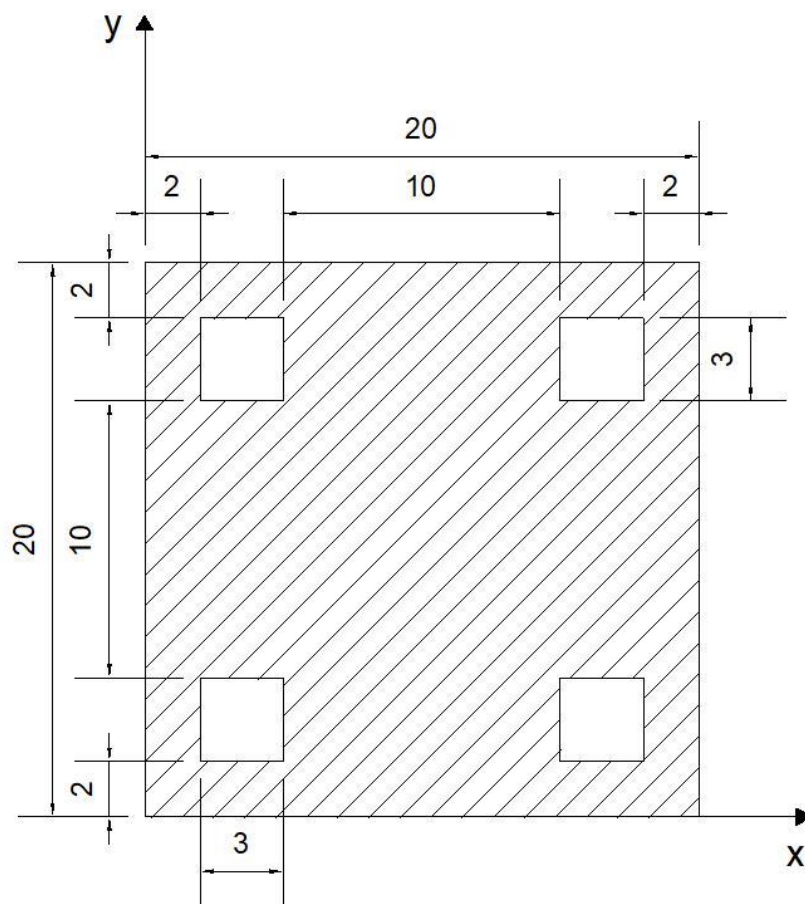


Figura 5.1 – Caracterização da geometria utilizada para simulação do problema

Fez-se então necessário a definição das condições de contorno para esta superfície. Como pode ser visto na Figura 5.2, foram utilizados temperaturas prescritas em seus contornos, tanto na região externa quanto no interior das quatro regiões vazias internas. Os pontos, nas coordenadas (x, y) , que serão analisados nesta superfície também se encontram indicados na Figura 5.2. Para cada ponto, serão realizadas simulações com as seguintes quantidades de partículas computacionais geradas:

- 1) 500 partículas;
- 2) 1.000 partículas;
- 3) 2.000 partículas;
- 4) 5.000 partículas;
- 5) 10.000 partículas;
- 6) 50.000 partículas;

Essa variação do número de partículas computacionais será feita para que se possa observar a convergência dos resultados. Também serão realizadas 05 simulações para cada número de partículas computacionais, a fim de se observar o desvio padrão da população amostral. Para as simulações pelo Método de Monte Carlo será utilizado como critério de parada uma distância de $r_{min} = 0,25$ em relação aos contornos. A partícula computacional ao atingir o ponto compreendido entre o contorno e r_{min} deverá encerrar seu movimento e armazenar o valor da condição de contorno estipulada para aquele ponto.

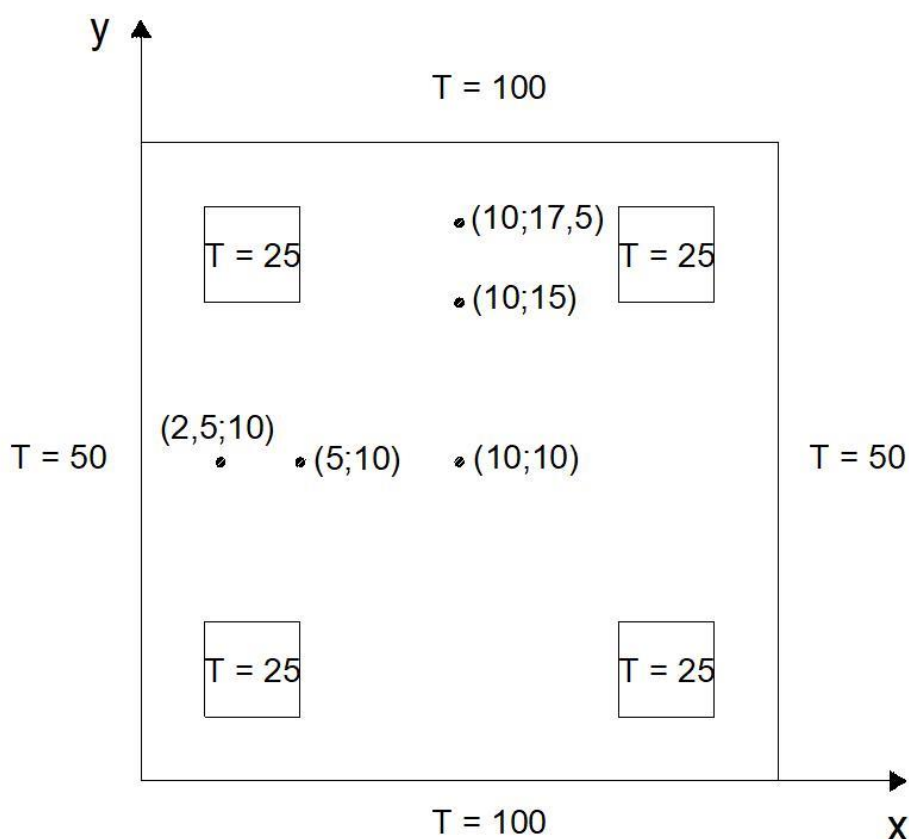


Figura 5.2 – Condições de contorno e pontos a serem simulados

A mesma geometria será utilizada na simulação através do Método de Elementos Finitos para efeitos de comparação e validação dos resultados. Essa simulação será feita utilizando o pacote Mechanical APDL do software ANSYS Academic® devido ao fato de ser uma ferramenta consolidada capaz de solucionar problemas de condução do calor utilizando métodos numéricos determinísticos, como é o caso do Método de Elementos Finitos [ANSYS Inc., 2013].

Serão feitas também 03 simulações pelo Método de Elementos Finitos com quantidades diferentes de elementos nas malhas geradas para que se possa verificar o critério de qualidade de malha.

6. RESULTADOS

Os resultados obtidos na simulação utilizando o Método de Monte Carlo podem ser vistos na Tabela 6.1 a seguir. Para cada ponto da superfície indicado na Figura 5.2, foram utilizados 06 (seis) quantidades diferentes de partículas computacionais, e para cada uma delas foram realizadas 05 (cinco) simulações.

Tabela 6.1 – Resultados das simulações para cada ponto indicado na superfície

PONTO	N° PARTÍCULAS	TEMPERATURA					MÉDIA	DESVIO
		Exec. 1	Exec. 2	Exec. 3	Exec. 4	Exec. 5		
(10;10)	500	42.65	42.25	41.85	42.65	41.75	42.23	0.43
	1000	43.05	42.47	42.60	40.08	40.57	41.75	1.33
	2000	41.63	42.12	43.35	41.63	43.18	42.38	0.83
	5000	42.44	42.68	42.49	42.22	42.27	42.42	0.18
	10000	42.53	42.54	42.90	42.65	42.42	42.61	0.18
	50000	42.42	42.48	42.38	42.40	42.44	42.42	0.04
(5;10)	500	39.70	39.00	40.60	38.00	38.80	39.22	0.98
	1000	38.60	40.20	40.95	38.95	40.57	39.85	1.03
	2000	40.03	39.60	40.38	39.90	38.75	39.73	0.62
	5000	40.23	40.08	39.93	39.69	39.80	39.95	0.22
	10000	40.08	40.15	39.94	39.71	39.45	39.87	0.29
	50000	39.83	39.69	39.79	39.71	39.84	39.77	0.07
(10;15)	500	52.00	48.15	53.55	49.65	50.45	50.76	2.09
	1000	51.70	50.15	51.22	50.20	51.20	50.89	0.69
	2000	52.02	51.28	51.40	50.50	51.11	51.26	0.55
	5000	51.17	50.62	50.68	50.73	50.60	50.76	0.23
	10000	50.96	51.62	51.34	51.47	51.20	51.32	0.25
	50000	51.21	51.06	51.23	51.17	51.44	51.22	0.14
(2,5;10)	500	43.00	42.65	41.80	42.80	43.65	42.78	0.67
	1000	42.55	42.30	43.30	42.40	42.67	42.64	0.39
	2000	42.95	43.52	43.75	42.87	42.82	43.18	0.42
	5000	42.46	42.36	42.21	42.69	42.61	42.47	0.19
	10000	42.52	42.66	42.70	42.63	42.46	42.59	0.10
	50000	42.55	42.60	42.70	42.59	42.51	42.59	0.07
(10;17,5)	500	68.65	69.40	69.50	72.60	69.15	69.86	1.57
	1000	66.80	71.00	68.75	70.02	70.35	69.38	1.66
	2000	70.02	70.65	70.11	70.27	70.77	70.36	0.33
	5000	69.93	69.62	69.74	70.07	69.99	69.87	0.19
	10000	69.85	69.57	70.47	69.45	70.96	70.06	0.64
	50000	70.15	70.13	70.06	70.19	70.18	70.14	0.05

Analisando os dados obtidos, foi possível perceber que, com o aumento do número de partículas geradas, os valores para as temperaturas nos pontos simulados tendem a convergir. Outro ponto interessante a ser observado é que, para um mesmo ponto analisado na superfície, é possível obter valores iguais de temperatura média para números diferentes de partículas simuladas. Contudo, através dos resultados do desvio padrão obtidos sobre as amostras para um mesmo número de partículas, é possível observar que com o aumento do número de partículas a dispersão em torno da média populacional e do valor esperado diminuem.

O resultado para o campo de temperaturas obtido pelo Método de Elementos Finitos utilizando o pacote Mechanical APDL do software Ansys Academic® pode ser visto na Figura 6.1. O número de nós utilizados na simulação por Elementos Finitos foi de 23268 nós como descrito na Figura 6.2. A escolha desta malha se deu através da realização do teste de qualidade de malha. Os resultados obtidos pela simulação das outras malhas podem ser vistos no Apêndice I.

Foi possível então analisar a temperatura em cada nó nas coordenadas correspondentes aos pontos simulados pelo Método de Monte Carlo. Na Tabela 6.2 estão indicados os valores obtidos pela simulação por Elementos Finitos referentes aos pontos do problema proposto. Já Figura 6.3 é possível ver a comparação dos valores das temperaturas obtidas utilizando-se os dois métodos.

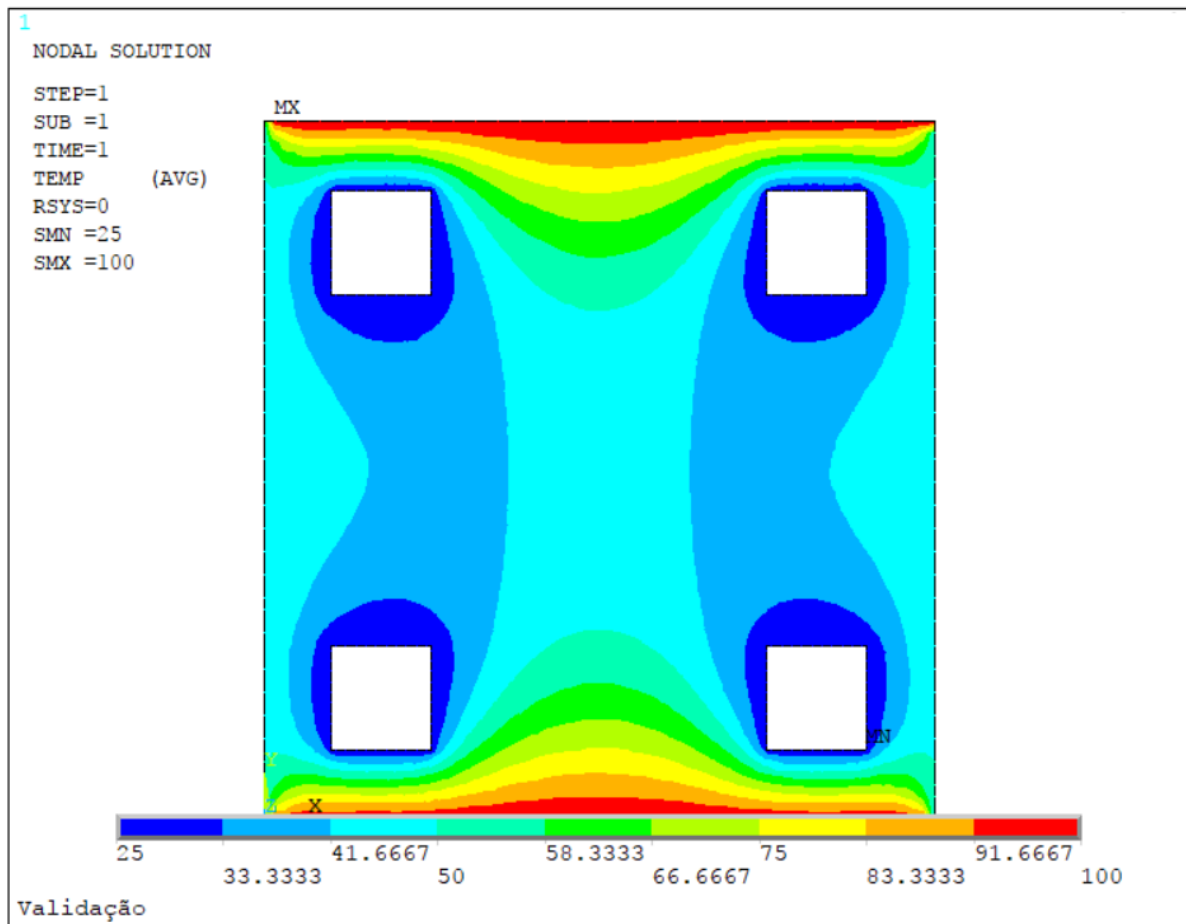


Figura 6.1 – Campo de temperaturas gerado pelo Software ANSYS Academic® utilizando o Método de Elementos Finitos.

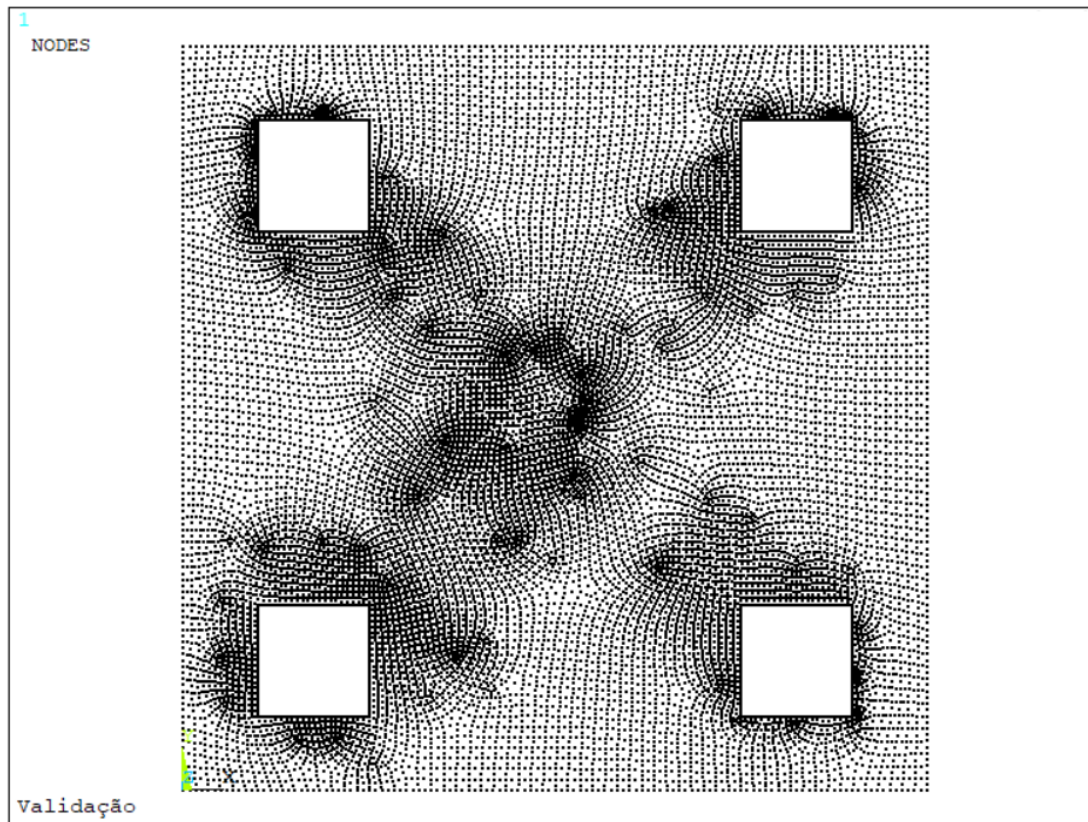


Figura 6.2 – Malha com 23268 nós gerada na superfície utilizando o software ANSYS Academic®.

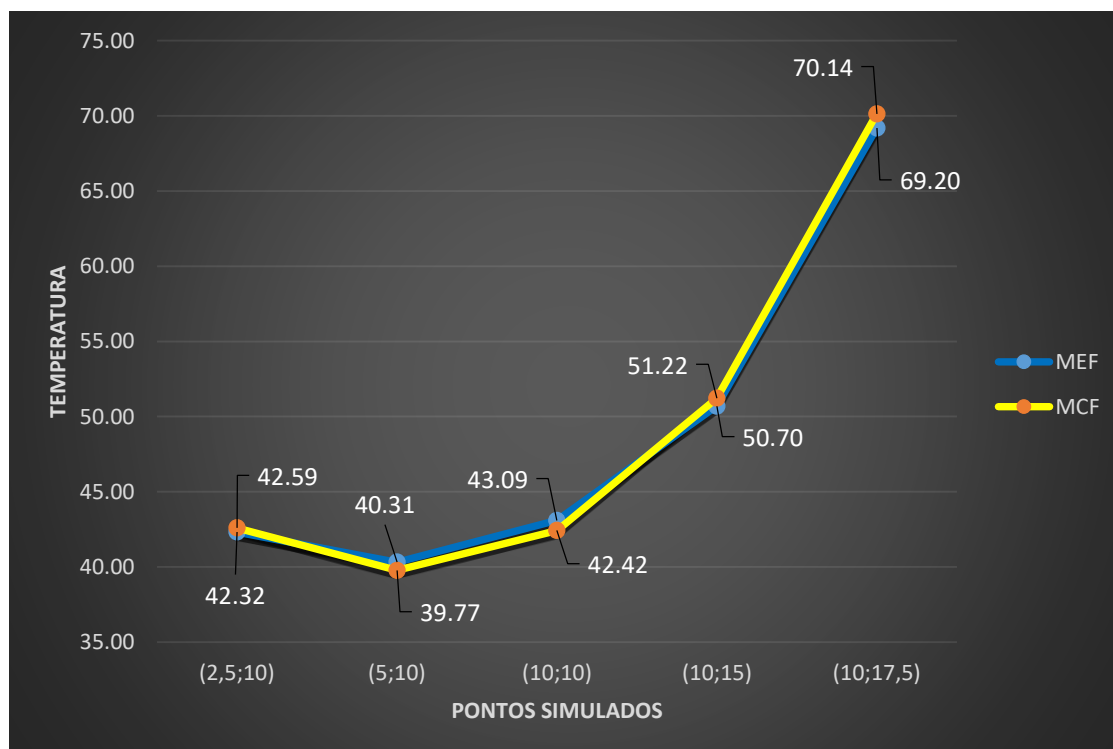


Figura 6.3 – Comparação das temperaturas, nos pontos simulados, pelo MEF (Método de Elementos Finitos) e MMC (Método de Monte Carlo).

7. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho consistiu em simular a transferência de calor por condução em regime permanente através da obtenção da temperatura em regiões de uma superfície em duas dimensões fazendo-se uso do Método de Monte Carlo. Para a simulação do problema, utilizou-se a técnica de passeios aleatórios flutuantes, capaz de simular o movimento de uma partícula computacional dentro de uma determinada região, e com isso, obter os valores em pontos aleatórios das condições de contorno necessárias para determinar as temperaturas nos pontos de interesse.

A simulação do problema proposto utilizando o Método de Monte Carlo comportou-se como esperado. Os resultados obtidos comprovaram a convergência das soluções ao se aumentar o número de partículas geradas pela simulação. Com isso foi possível compará-los aos resultados obtidos pelo Método de Elementos Finitos, sendo possível verificar que os valores obtidos por ambos os métodos tiveram um erro de aproximadamente 1,0%, comprovando assim a eficácia do Método de Monte Carlo em solucionar problemas de transferência de calor por condução e demonstrando sua viabilidade frente a outros métodos numéricos.

Nesta simulação em duas dimensões, o software ANSYS Academic® gerou o campo de temperatura em 23268 pontos numa execução sequencial e um tempo computacional de aproximadamente 10 seg utilizando um notebook com as seguintes configurações: Processador Core i7-6700HQ de 2.60 GHz, 16 GB de Memória RAM e 128 GB de Memória SSD. O tempo necessário para gerar os resultados nos mesmos 23268 pontos pela implementação do Método de Monte Carlo seria de aproximadamente 6 horas. Para dimensões baixas e problemas com geometria considerada, o Método de Elementos Finitos pelo software ANSYS Academic® mostrou melhor desempenho computacional.

Da comparação das realizações pelo Método de Monte Carlo com diversos números de partículas mostrou que mesmo com uma amostragem baixa obteve-se um valor próximo ao esperado, porém em duas dimensões a convergência progride relativamente lenta com o aumento do número de partículas.

Simulações futuras devem mostrar o comportamento da simulação do Método de Monte Carlo em função da complexidade da geometria e para problemas em três dimensões.

Para trabalhos futuros é pertinente a realização de análises utilizando diferentes condições de contorno, como por exemplo, convecção e radiação, bem como outros fatores que influenciam na transferência de calor como a utilização de propriedades de diferentes materiais e geração de energia interna na superfície.

Outro ponto interessante para ser abordado seria a implementação do Método de Monte Carlo para solucionar problemas de transferência de calor em superfícies tridimensionais, devido a sua alta capacidade de solucionar problemas com elevado número de dimensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS Inc., “**ANSYS Mechanical APDL Modeling and Meshing Guide**”, ANSYS Release 15.0, 2013.

Brown, F. B., Yasunobu, N. “**The MNCP5 Random Number Generator**”, American Nuclear Society, 2002.

Chatterjee, K. “**A Parallelized 3D Floating Random-Walk Algorithm for the Solution of the Nonlinear Poisson-Boltzmann Equation**”, Progress in Electromagnetics Research, vol. 57, pp. 237-252, 2006.

Hecke, M. B. “**Transferência de Calor – Chaminé com Variação de Temperatura Interna e Externa**”, Método dos Elementos Finitos Aplicados à Engenharia de Estruturas, 2010

Incropera, F. P., Dewitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S. **“Fundamentos da Transferência de Calor e Massa”**, LTC, Brasil, 6º ed., 2008

Kalos, M. H., Whitlock, P. A. **“Monte Carlo Methods, Volume I: Basics”**, John Wiley and Sons, 1986.

Matsumoto, M., Nishimura, T. **“Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator”**, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulations: Special Issue on Uniform Random Number Generation, 1998.

Oluwajobi, A. O., Jeje, A. B. **“Application of Monte Carlo Method to Steady State Heat Conduction Problems”**, African Research Review, vol 2(4), pp. 31-53, 2008.

Talebi, S., Gharehbash, K., Jalali, H. R. **“Study on random walk and its application to solution of heat conduction equation by Monte Carlo”**, Progress in Nuclear Energy, vol. 96, pp. 18-35, 2017.

Taschetto, M. P. **“Aplicação do Método de Galerkin ao Problema de Condução Estocástica do Calor”**, 2007, 107f. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica – Universidade Federal de Santa Catarina.

Zin Cho, N. **“Particle Transport in Monte Carlo Method for Heat Conduction Problems”**, Heat Conduction – Basic Research, 2011.

APÊNDICE I

A seguir são apresentados os resultados obtidos pela simulação através do Método de Elementos Finitos, para malhas com número de nós correspondentes indicados, utilizando o pacote Mechanical APDL do software ANSYS Academic® [ANSYS Inc., 2013]. As temperaturas indicadas na Tabela A.1 correspondem aos pontos mais próximos dos valores indicados na primeira coluna desta tabela.

Tabela A.1 – Temperaturas nos pontos simulados do problema em relação ao número de nós das malhas.

PONTOS	MALHA COM 390 NÓS	MALHA COM 1184 NÓS	MALHA COM 4204 NÓS	MALHA COM 23268 NÓS
	TEMPERATURA	TEMPERATURA	TEMPERATURA	TEMPERATURA
2,5;10	42.33	42.56	42.79	42.32
5;10	40.16	40.15	40.29	40.31
10;10	42.71	42.90	43.01	43.09
10;15	55.46	53.46	51.62	50.70
10;17,5	69.04	68.62	69.59	69.20

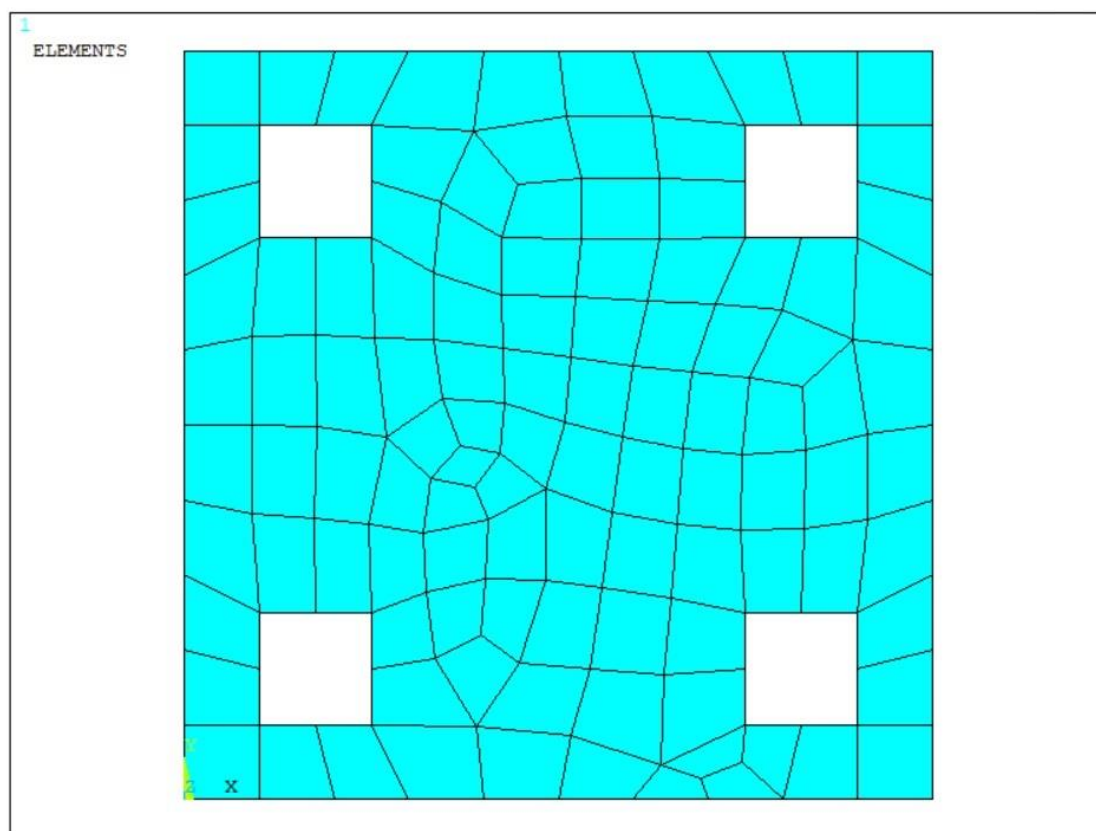


Figura A.1 – Malha com 390 nós.

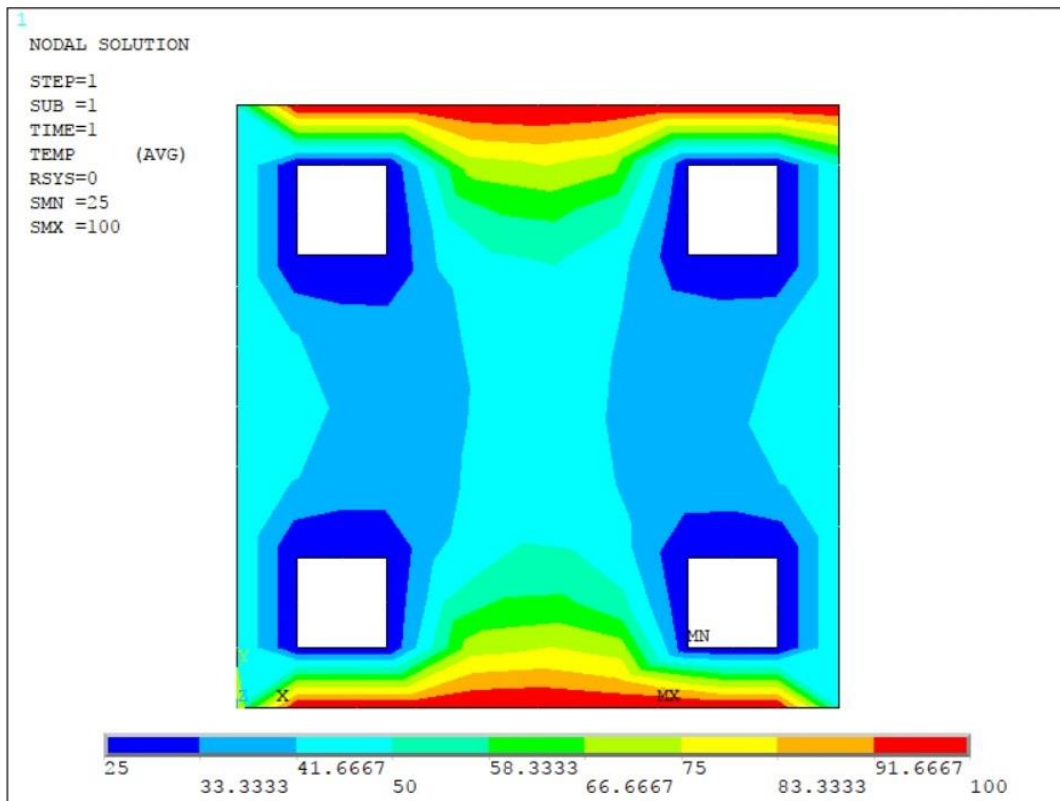


Figura A.2 – Campo de temperatura para malha com 390 nós.

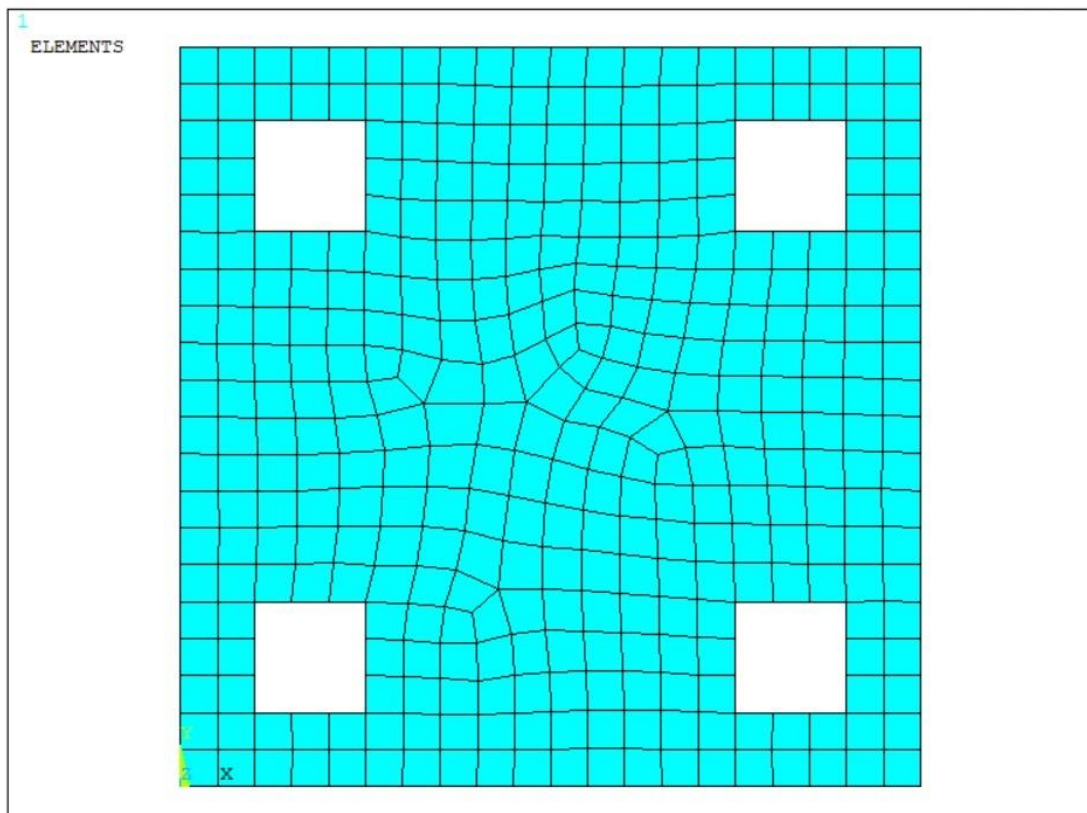


Figura A.3 – Malha com 1184 nós.

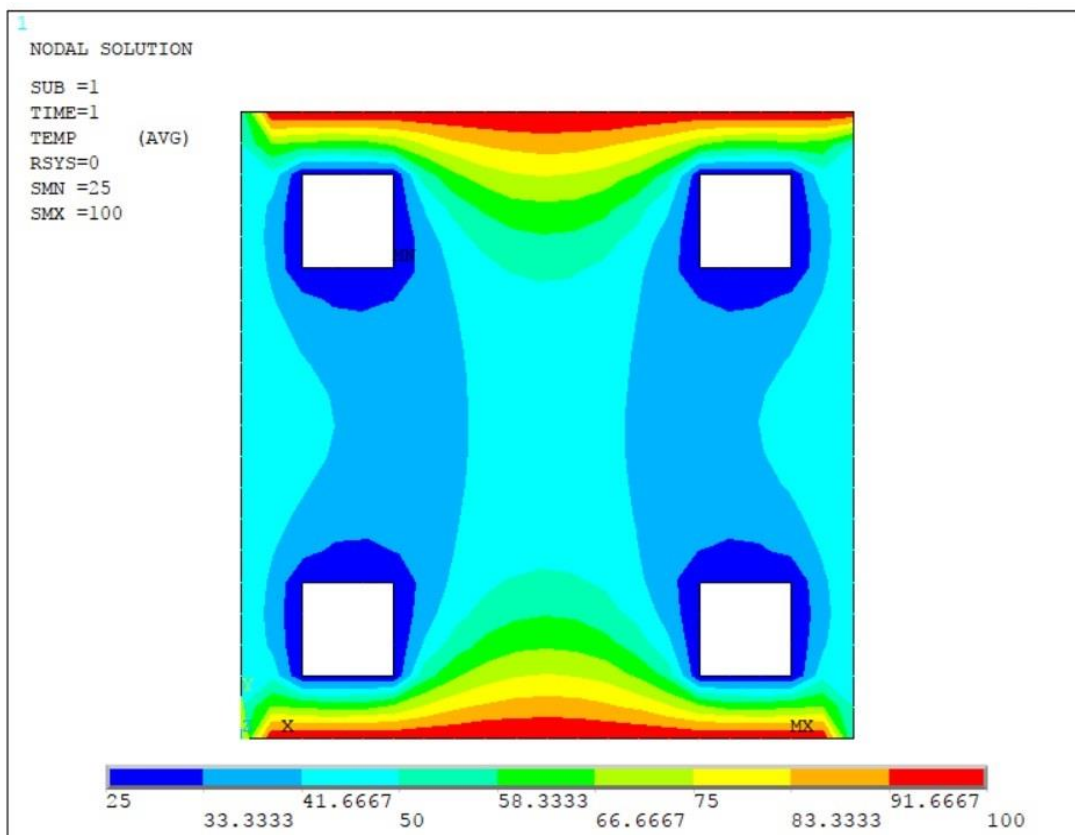


Figura A.4 – Campo de temperatura para malha com 1184 nós.

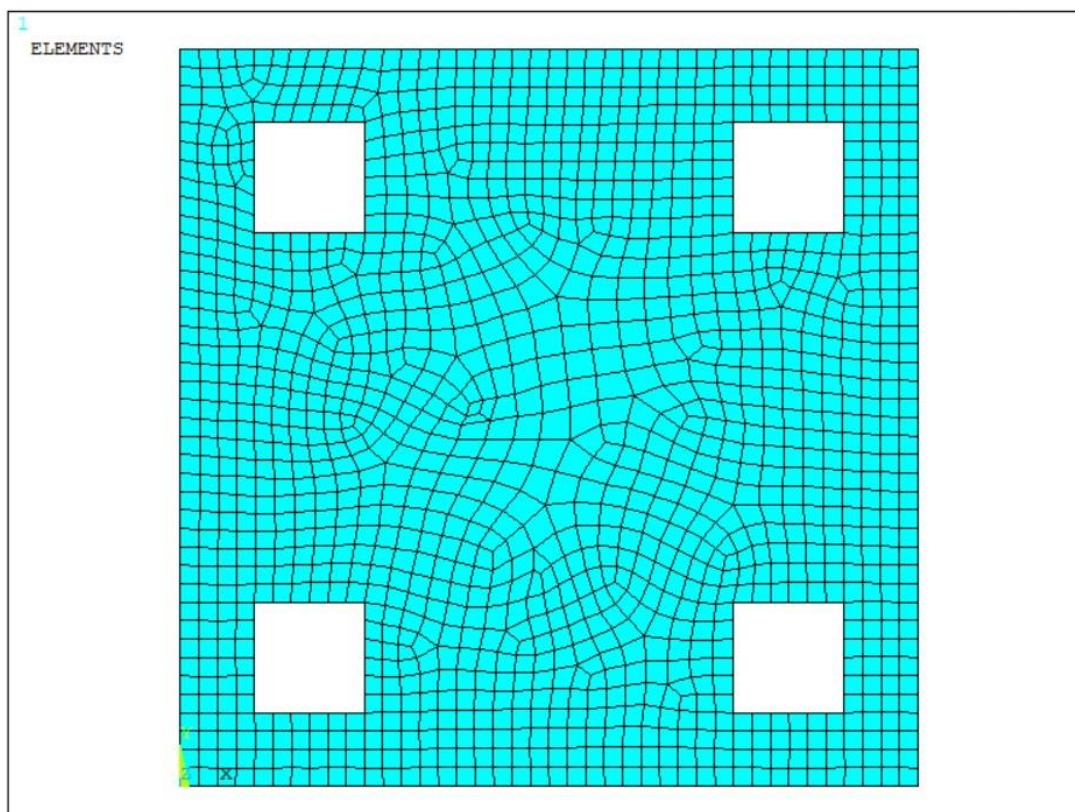


Figura A.5 – Malha com 4204 nós.

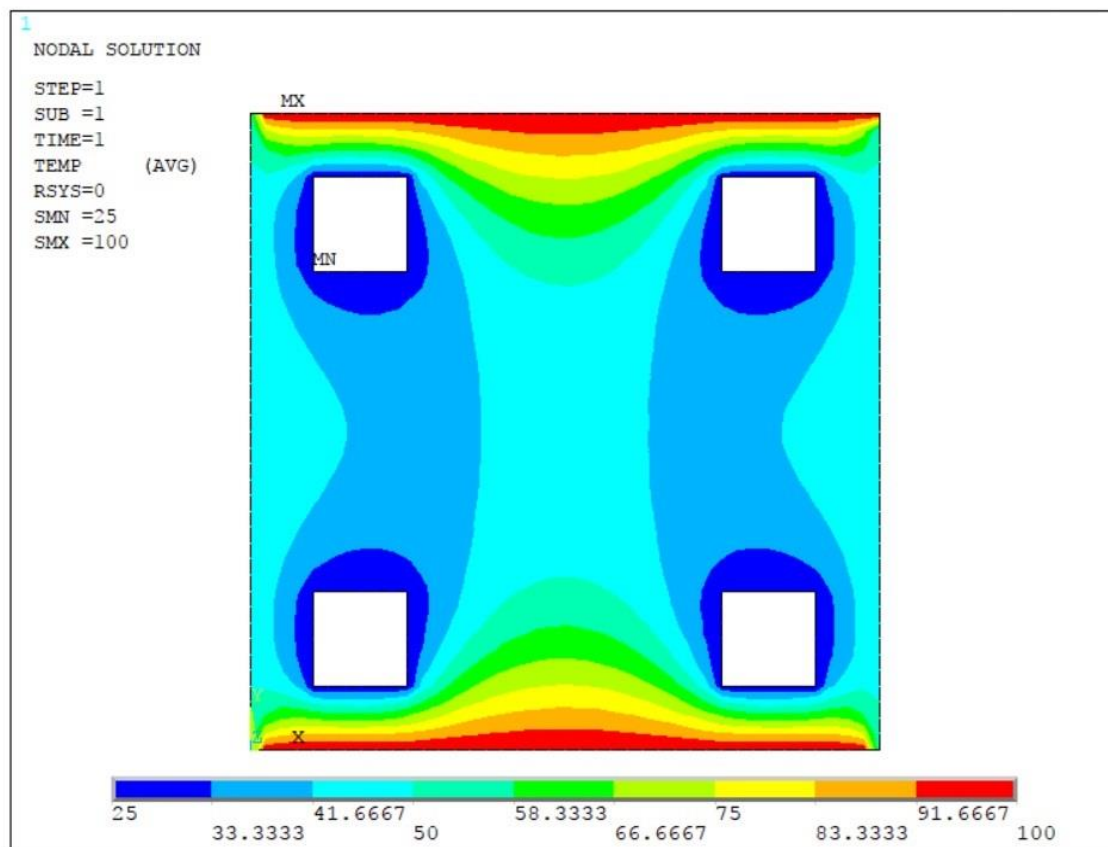


Figura A.6 – Campo de temperatura para malha com 4204 nós.