

ESQUEMA NUMÉRICO ADAPTATIVO DE PROPAGAÇÃO DE VAZÃO COM APROXIMAÇÃO INERCIAL

Alice César Fassoni-Andrade¹; Fernando Mainardi Fan¹; Walter Collischonn¹; Artur César Fassoni²; Rodrigo Cauduro Dias de Paiva¹

Resumo – O modelo de propagação de vazão unidimensional com aproximação inercial das equações de Saint Venant possui resultados comparáveis aos modelos que consideram as equações completas. No entanto, a solução explícita desse modelo está restrita à um passo de tempo pequeno para evitar instabilidade numérica. Para melhorar a estabilidade, outra solução numérica pode ser utilizada apenas em cenários que não ocorrem a inversão de fluxo, como em simulações com maré. Este artigo propõe e avalia um esquema adaptativo que supera a limitação do esquema anterior e permite resultados mais estáveis mesmo em situações com inversão de fluxo. O esquema foi avaliado em quatro situações de declividade do rio (normal, baixa, alta e muito alta) e em duas situações onde o rio está sujeito ao efeito de jusante (remanso e maré). Os resultados são discutidos em termos de estabilidade, vazão de pico, tempo de processamento, erro de conservação de volume e raiz do erro médio quadrático da vazão. O esquema permitiu resultados mais estáveis que a solução explícita do modelo inercial, porém com tempo de processamento maior apenas em situações de inversão de fluxo.

Palavras-Chave – Equações de Saint Venant, estabilidade numérica, tempo computacional.

ADAPTATIVE NUMERICAL SCHEME OF RIVER FLOOD ROUTING WITH AN INERTIAL APPROXIMATION

Abstract – The one-dimensional flow routing model with an inertial approximation of the Saint Venant equations has results comparable to the models that consider the complete equations. However, the explicit solution is restricted to a small time step to avoid numerical instability. Another numerical solution can be used to improve the stability only in scenarios that do not occur the flow inversion, as in simulations with tide. This paper proposes and evaluates an adaptive scheme that overcome the limitation of previous scheme and allows more stable even in situations with flow inversion. The scheme was evaluated in four situations of river slope (normal, low, high and very high) and in two situations where the river is subject to downstream effects (dam backwater and tides). The results are discussed in terms of stability, peak flow, processing time, volume conservation error and Root Mean Square Error. The scheme allowed results more stable than the explicit solution of the inertial model, but with longer processing time only in situations of inversion of flow.

Keywords – Saint Venant equations, numerical stability, computational time.

¹ Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

² Instituto de Matemática e Computação, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG.

* Autor Correspondente: alice.fassoni@ufrgs.br.

INTRODUÇÃO

A hidrodinâmica dos rios pode ser representada pela solução numérica das equações de Saint Venant (continuidade e quantidade de movimento – Eqs. 1 e 2) ou por simplificações dessas equações, resultando em formulações mais simples. O modelo tipo onda cinemática, o modelo Muskingum-Cunge e o modelo onda difusiva são alguns exemplos de modelos simplificados (Cunge, 1969; Fread, 1993; Chanson, 2004). No entanto, apesar do benefício numérico desses modelos, alguns processos não podem ser representados, como por exemplo, o modelo onda cinemática não representa rios submetidos ao remanso ou com efeitos das marés.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{B \cdot \partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x}}_{\text{inércia advectiva}} = -gA \frac{\partial h}{\partial x} + gAS_0 - gAS_f \quad (2)$$

Em que em que Q é a vazão, h é a profundidade, t é o tempo, B é a largura da seção transversal, x é a distância no sentido longitudinal, g é a aceleração da gravidade, A é a área da seção transversal, S_0 é a declividade do fundo do rio; S_f representa a perda de energia por atrito com o fundo, as margens e efeitos turbulentos.

O modelo inercial, ou inércia local, despreza o termo da inércia advectiva da equação da quantidade de movimento (Eq. 2, Bates *et al.*, 2010). As vantagens desse modelo é a simplicidade no código com resultados comparáveis aos modelos que consideram as equações completas de Saint Venant (Fan *et al.*, 2014). O modelo tem sido aplicado em modelos hidrológicos em pesquisas recentes (Dottori e Todini, 2011; Almeida e Bates, 2013; Coulthard *et al.*, 2013; Yamazaki *et al.*, 2013; Sampson *et al.*, 2015). No Brasil, o método Muskingum Cunge foi substituído pelo modelo inercial como módulo de propagação de vazões do modelo hidrológico MGB-IPH (Pontes *et al.*, 2015; Pontes *et al.*, 2017).

A formulação do modelo inercial apresentada por Bates *et al.* (2010) foi avaliada por Fan *et al.* (2014) para a representação do escoamento unidimensional em diferentes cenários de declividade de rio e efeitos de jusante, como remanso e maré. Os autores mostraram bons resultados do modelo mas observaram instabilidade numérica para valores altos (menores que 1) do número de Courant (condição de estabilidade em que $\sqrt{gh} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$). Fassoni-Andrade *et al.* (2017, submetido) repetiram as aplicações realizadas por Fan *et al.* (2014) testando novas formulações numéricas para melhorar o desempenho do modelo. Os autores observaram que um esquema específico apresentou vantagens em termos de estabilidade com exceção da situação em que o rio está sujeito ao efeito das maré. Esse esquema apresenta uma nova restrição para vazões negativas e por isso é instável em situações de inversão de fluxo, uma das principais aplicações da modelagem usando o modelo inercial.

No presente artigo, as aplicações realizadas por Fan *et al.* (2014) foram repetidas considerando um novo modelo que contorna a limitação do esquema proposto por Fassoni-Andrade *et al.* (2017, submetido) e adapta-se, temporariamente, ao esquema original (apresentado por Bates *et al.*, 2010) em situações de inversão de fluxo. Assim, o modelo adaptativo foi avaliado e comparado com o esquema original e com o esquema proposto por Fassoni-Andrade *et al.* (2017, submetido).

ESQUEMAS NÚMERICOS DO MODELO INERCIAL UNIDIMENCIONAL

Esquema original

Na formulação do modelo inercial apresentada por Bates *et al.* (2010) (Esquema original) as derivadas da equação da quantidade de movimento (Eq. 2) são aproximadas por um esquema numérico de diferenças finitas progressivo no espaço e no tempo. A equação da quantidade de movimento é reescrita conforme a equação 3 e a vazão no final do intervalo de tempo ($k+1$) pode ser explicitada.

$$\frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - Q_{i+\frac{1}{2}}^k}{\Delta t} + g \cdot B \cdot h_{i+\frac{1}{2}}^k \cdot \frac{y_{i+1}^k - y_i^k}{\Delta x} + g \cdot \frac{|Q_{i+\frac{1}{2}}^k| \cdot Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} \cdot n^2}{B \cdot \left(h_{i+\frac{1}{2}}^k\right) \cdot R^{4/3}} = 0 \quad (3)$$

Em que i e k são os índices no espaço e no tempo, respectivamente, y é o nível da superfície da água, n é o coeficiente de rugosidade de Manning, R é o raio hidráulico.

No esquema original, o raio hidráulico é aproximado pela profundidade ($R = h$) mas Fassoni-Andrade *et al.* (2017, submetido) mostraram que o a inclusão do cálculo do raio hidráulico sem simplificação melhorou os resultados sem aumentar o tempo computacional. Assim, o cálculo do raio hidráulico para uma seção transversal retangular ($R = B \cdot h / (2 \cdot h + B)$) foi considerado na equação 3. Mais detalhes da formulação do modelo inercial unidimensional em rios são descritos em Fan *et al.* (2014).

O esquema numérico está restrito ao tamanho do passo de tempo (Δt) e ao tamanho do subtrecho (Δx) para evitar instabilidade numérica. Assim, a escolha desses parâmetros deve respeitar a condição de Courant-Friedrichs-Levy, dada pela equação 4.

$$C = \sqrt{gh} \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{ onde } C \leq 1 \quad (4)$$

A profundidade (h) utilizada no cálculo de C (número de Courant) corresponde a maior profundidade encontrada no trecho do rio.

Esquema da parábola

O esquema proposto por Fassoni-Andrade *et al.* (2017, submetido), denominado esquema da parábola, também resolve a equação da quantidade de movimento por um esquema de diferenças finitas progressivo no espaço e no tempo. No entanto, o termo da força de atrito é calculado pela vazão no passo de tempo $k+1$ ($|Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}| Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}$), transformando a equação em um polinômio de segundo grau ($ax^2 + bx + c = 0$), conforme a equação 5.

$$\frac{g \cdot \Delta t \cdot n^2}{B \cdot \left(h_{i+\frac{1}{2}}^k\right) \cdot R^{4/3}} \cdot \left(Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}\right)^2 + Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} + \Delta t \cdot g \cdot B \cdot h_{i+\frac{1}{2}}^k \cdot \frac{y_{i+1}^k - y_i^k}{\Delta x} - Q_{i+\frac{1}{2}}^k = 0 \quad (5)$$

A vazão $Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}$ não é aproximada por uma solução numérica obtida por um método iterativo, mas é calculada diretamente pela fórmula de Bhaskara e a estimativa desejada é sempre a maior raiz dada por: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Fassoni-Andrade *et al.*, 2017, submetido). O esquema está restrito à uma nova condição de estabilidade, além da condição Courant-Friedrichs-Levy. Nesta restrição, o discriminante da fórmula de Bhaskara deve ser positivo ($b^2 - 4ac > 0$) para que a raiz não seja complexa, o que

sempre ocorre para uma vazão positiva, mas nem sempre para uma vazão negativa (os detalhes da explicação dessa restrição são descritos em Fassoni-Andrade *et al.*, 2017, submetido).

Esquema adaptativo

Para contornar a limitação do esquema da parábola (instabilidade para uma vazão negativa) propomos um modelo misto-adaptativo onde é adicionado um condicionante no código. Assim, se a vazão ($Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}$) calculada no esquema da parábola for negativa, a vazão é recalculada utilizando o esquema numérico original.

METODOLOGIA

Os seis cenários avaliados por Fassoni-Andrade *et al.* (2017, submetido) foram repetidos para as formulações dos esquemas original, parábola e adaptativo. Considerou-se no teste 1 um trecho real do rio São Francisco, localizado entre a UHE Três Marias e a cidade de Pirapora (MG) sem as contribuições laterais. Nos testes 2, 3 e 4 o mesmo trecho foi considerado, porém a declividade do rio foi alterada (declividade baixa, alta e altíssima, respectivamente). Já nos testes 5 e 6, considerou-se o trecho igual ao teste 1 mas com efeitos à jusante: remanso e maré. A Tabela 1 apresenta um resumo dos dados utilizados nas simulações dos seis testes. A discretização temporal (Δt) foi variada para avaliar o máximo número de Courant (no momento de maior profundidade) para o qual o método se mantém estável. Também avaliou-se, em cada simulação, a vazão de pico no último subtrecho do rio (Q_{pico}), o erro de conservação de volume (ErrVol), o tempo de processamento (Tempo) e o erro médio quadrático da vazão (*Root Mean Squared Error* -RMSE) calculado com base nos resultados de simulações realizadas no modelo hidrodinâmico HEC-RAS.

Tabela 1. Resumo dos parâmetros utilizados nos testes

	Teste 1 Trecho real	Teste 2 Decl. baixa	Teste 3 Decl. alta	Teste 4 Decl. altíssima	Teste 5 Remanso	Teste 6 Maré
Comprimento	135 km	135 km	135 km	135 km	135 km	135 km
Largura	300 m	300 m	300 m	300 m	300 m	300 m
Declividade	29,5 cm/km	5 cm/km	300 cm/km	10 m/km	29,5 cm/km	5 cm/km
Coef Manning	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
Δx	2 km	2 km	2 km	2 km	2 km	2 km
Δt	1, 2, 3 e 4 min	1, 2, 3 e 3,5 min	1, 2, 3 e 4 min	80, 120, 160 e 200 seg	80, 120, 150 e 180 seg	1, 2, 3 e 4 min
Condição de contorno à jusante	Decl. constante	Decl. constante	Decl. constante	Decl. constante	Remanso	Maré

RESULTADOS

Os resultados de todos os testes são apresentados na Figura 1. O esquema original apresentou estabilidade inferior ao esquema da parábola e ao esquema adaptativo nos testes 1 (Trecho real), 2 (Decl. baixa), 3 (Decl. alta) e 4 (Decl. altíssima). No teste 4, pior desempenho do esquema original, os resultados foram estáveis para um número de Courant inferior a 0,20 (passo de tempo de 0,80 segundos). Em contraste, os outros esquemas (parábola e adaptativo) permitiram atingir resultados estáveis com o dobro do passo de tempo neste teste (160 segundos, $C=0,40$). Já no teste 5 (barragem e remanso), a estabilidade dos esquemas parábola e adaptativo foi equivalente ao esquema original.

E no teste 6 (maré), o esquema adaptativo apresentou estabilidade semelhante ao original e o esquema da parábola não apresentou resultados estáveis em nenhum passo de tempo.

A diferença da vazão de pico, o erro de conservação de volume e o RMSE entre o esquema original e os outros esquemas pode ser considerada desprezível. Além disso, apesar do esquema original apresentar menor tempo de processamento, a diferença é muito pequena em relação aos outros esquemas para os testes de 1 a 5.

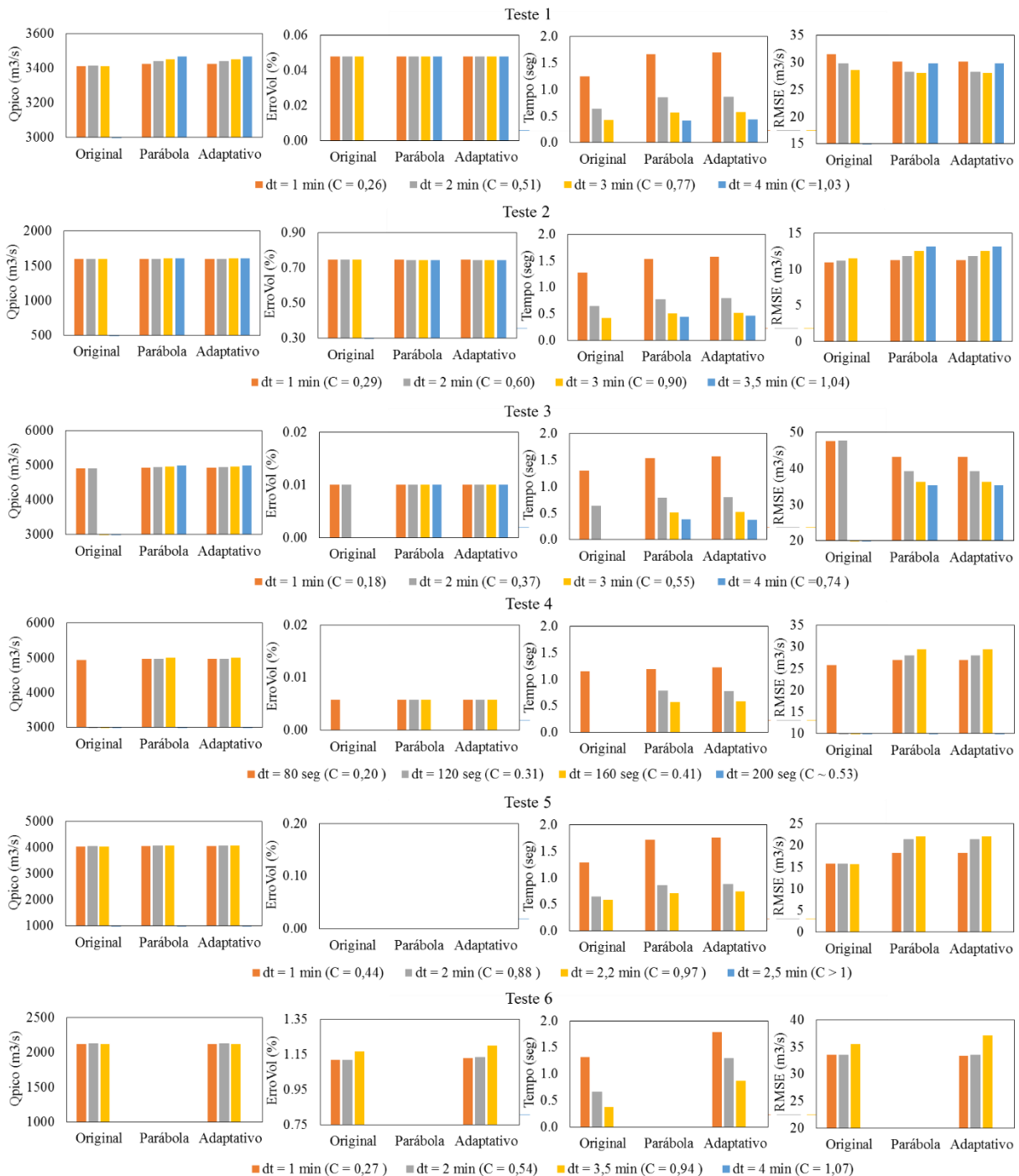


Figura 1. Resultado das métricas de simulações numéricas em 6 cenários diferentes.

O esquema adaptativo teve desempenho idêntico ao esquema da parábola nos testes de 1 a 4 com um aumento desprezível no tempo de processamento. Isso ocorre porque nas situações desses testes (sem inversão de fluxo) a solução numérica dos dois esquemas é idêntica. Já no teste 6 (maré), o esquema adaptativo apresentou desempenho semelhante ao original, demorando, em média, 36% a mais. Conclui-se disso que o condicionante adicionado no código do esquema adaptativo só aumenta o tempo de processamento no período que ocorre inversão de fluxo.

Assim, o esquema adaptativo se torna mais atrativo que os outros esquemas por ter maior estabilidade. O custo da sua utilização é o aumento do tempo de processamento apenas em situações onde ocorre uma vazão negativa. A maior estabilidade do esquema adaptativo, em relação ao esquema original, permite adotar um passo de tempo maior, reduzindo o tempo computacional. Entretanto, se na aplicação a vazão permanece muito tempo com valores negativos, o tempo computacional será maior devido ao condicionante no código. Assim, o aumento no tempo de processamento depende da aplicação.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, um modelo adaptativo com aproximação inercial unidimensional das equações de Saint Venant foi proposto e avaliado para superar a limitação em situações de vazão negativa do esquema numérico apresentado em Fassoni-Andrade *et al.* (2017, submetido). Assim, o novo esquema reconhece a possibilidade de inversão de fluxo, e adapte-se temporariamente para outro esquema, e depois retorna para o esquema original.

O esquema adaptativo é vantajoso em relação ao esquema original devido a maior estabilidade. No entanto, o custo adicional, apenas em situações com inversão de fluxo, é o aumento no tempo computacional e sua utilização como módulo de propagação de vazões em modelos hidrológicos poderá ser vantajosa dependendo da situação.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, G. A. M.; BATES, P. (2013). Applicability of the local inertial approximation of the shallow water equations to flood modeling. *Water Resources Research*, 49(8), pp.4833-4844.
- BATES, P. D.; HORRITT, M. S.; FEWTRELL, T. J (2010). A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modelling. *Journal of Hydrology*, 387(1), pp. 33-45. doi:10.1016/.2010.03.027.
- CHANSON, H (2004). *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction Butterworth-Heinemann*, 2nd edition, Oxford, UK, 630 p.
- COULTHARD, T. J.; NEAL, J. C.; BATES, P. D.; RAMIREZ, J.; ALMEIDA, G. A.; HANCOCK, G. R. (2013). Integrating the LISFLOOD-FP 2D hydrodynamic model with the CAESAR model: implications for modelling landscape evolution. *Earth Surface Processes and Landforms*, 38(15), 1897-1906.
- CUNGE, J. A. (1969). On the subject of a flood propagation computation method (Muskingum method). *Journal of Hydraulic Research*, 7(2), 205-230.
- DOTTORI, F.; TODINI, E. (2011). Developments of a flood inundation model based on the cellular automata approach: testing different methods to improve model performance. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, 36(7), 266-280.
- FAN, F. M., PONTES, P. R. M., PAIVA, R. C. D.; COLLISCHONN, W. (2014). Avaliação de um método de propagação de cheias em rios com aproximação inercial das equações de Saint-Venant. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 19(4), 137-147.

FASSONI-ANDRADE, A. C.; FAN, F. M.; COLLISCHONN, W; FASSONI, A. C; PAIVA, R. C. D (2017, submitted). Comparison of numerical schemes of river flood routing with an inertial approximation of the Saint Venant equations. *Brazilian Journal of Water Resources*.

FREAD D.L (1993). Flow Routing in Handbook of Hydrology, ed. by D.R. Maidment, McGraw-Hill Inc., New York, 10.1-10.36.

PONTES, P. R. M.; COLLISCHONN, W.; FAN, F.M.; PAIVA, R.C.D.; BUARQUE, D.C. (2015). Modelagem hidrológica e hidráulica de grande escala com propagação inercial de vazões. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 20(4).

PONTES, P. R. M., FAN, F. M., FLEISCHMANN, A. S., DE PAIVA, R. C. D., BUARQUE, D. C., SIQUEIRA, V. A; COLLISCHONN, W. (2017). MGB-IPH model for hydrological and hydraulic simulation of large floodplain river systems coupled with open source GIS. *Environmental Modelling & Software*, 94, pp. 1-20.

SAMPSON, C.C.; SMITH, A. M.; BATES, P. D., NEAL, J. C.; ALFIERI, L.; FREER, J. E (2015). A high-resolution global flood hazard model. *Water resources research*, 51(9), p. 7358-7381.

YAMAZAKI, D.; DE ALMEIDA, G. A. M.; BATES, P. D (2013). Improving computational efficiency in global river models by implementing the local inertial flow equation and a vector-based river network map. *Water Resour. Res.*, 49(11), pp. 7221-7235.