

POTENCIAL DE APLICAÇÃO DE PASSO DE TEMPO LOCAL EM UM MODELO HIDRÁULICO UNIDIMENSIONAL

João Paulo Lyra Fialho Brêda¹, Rodrigo Cauduro Dias de Paiva² e Walter Collischonn³

Resumo – Dependendo da forma de discretização da rede de drenagem para modelagem do escoamento superficial de bacias hidrográficas pode haver uma grande variabilidade no tamanho dos trechos, componentes importantes para estabilidade e duração da simulação hidráulica de um canal. Procurando atender à condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), um passo de tempo global acaba restringido pelo passo de tempo calculado nos menores trechos da rede. Por outro lado, o passo de tempo local (LTS) resolve o sistema para cada trecho independentemente, considerando apenas sua posição no tempo em relação à sua vizinhança. Assim, foram feitos 4 experimentos para analisar o potencial de se aplicar o LTS em um modelo inercial com comprimentos de trecho variados para redução de seu tempo de simulação. Notou-se que o método reduz significativamente a duração da simulação (4 a 5 vezes menor) para o referido caso comparando com o passo de tempo global. No entanto o LTS se mostrou mais instável, o que provavelmente se atribui a má estimativa da variável de estado no tempo correto para o cálculo dos fluxos.

Palavras-Chave – Passo de Tempo Local, Modelo Inercial

POTENTIAL OF A LOCAL TIME STEP APPROACH ON AN UNIDIMENSIONAL HYDRAULIC MODEL

Abstract – The chosen method of river network discretization might result on a considerable variety of river reach lengths, which is an important component for hydraulic simulation stability and duration. Attending to the Courant-Friedrichs-Lewy condition, the global time step (GTS) ends up restricted by the time step calculated on small river reaches. On the other hand, the local time step (LTS) approach solves the equations system for each river reach individually, concerning its time position related to its neighborhood. It was performed four experiments in order to analyze the potential of the LTS approach for reducing the simulation time of the inertial model with different river reach lengths. It was observed that the method reduced significantly the simulation time (4 to 5 times lower) compared to the GTS approach concerning the presented model. However, the LTS approach appear to be more unstable than the GTS, which is probably due to a poor estimative of the state variable on the correct time for flow calculation.

Keywords – Local Time Step, Inertial Model

1. INTRODUÇÃO

Modelos Hidrológicos são ferramentas importantes para compreensão dos processos hidrológicos de uma bacia, como o escoamento superficial e sub superficial, infiltração, evaporação, entre outros. A modelagem do escoamento superficial é particularmente importante pois permite identificar variáveis como vazão ou nível em um canal, assim como as forças que atuam no escoamento.

O fluxo superficial da água é normalmente modelado por equações de conservação de massa e quantidade de movimento. Como em rios o escoamento assume uma direção predominante, essas equações podem ser simplificadas para uma dimensão, dando origem as equações de Saint Venant. Dependendo de como ocorre o fluxo, alguns termos da equação do momento têm pouca influência no escoamento (Moussa & Bocquillon, 1996) e podem ser desprezados, como os termos de inércia (modelo de onda difusiva), inércia e pressão (modelo de onda cinemática) ou o termo de inércia convectiva (modelo inercial).

A modelagem hidráulica do escoamento em uma bacia necessita que a rede de drenagem esteja discretizada, seja em uma grade regular, com trechos de mesmo tamanho, ou seguindo uma segmentação por confluências. A segmentação por confluências define trechos como o segmento entre duas confluências consecutivas ou o segmento entre uma confluência e uma nascente/exutório. Essa abordagem é utilizada em ferramentas computacionais como o ArcHydro (Maidment, 2002) e IPH – Hydro Tools (Siqueira et al., 2016) e é frequentemente encontrada na literatura (Pontes et al., 2015). No entanto, esse tipo de segmentação acarreta em uma variabilidade significativa no tamanho dos trechos da rede de drenagem (Brêda et al., 2017).

Para a modelagem hidráulica o tamanho dos trechos é importante, pois afeta o tempo de processamento e a estabilidade da simulação. Como teste de estabilidade, verifica-se normalmente se a simulação atende à condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), em que se observa a relação do passo de tempo (Δt), o comprimento do trecho e a celeridade do escoamento. Dessa forma, trechos curtos exigem passos de tempo igualmente pequenos para garantir a estabilidade da simulação. Ao propor o modelo inercial, Bates et al. (2010) sugeriram avaliar o Δt trecho a trecho a cada avanço no tempo e, em seguida, selecionar o Δt mais restritivo (menor) para a simulação no tempo seguinte. No entanto a alta variabilidade do tamanho dos trechos devido ao método de segmentação faz com que o passo de tempo, e conseqüentemente a duração da simulação, seja regido pelos trechos menores.

Como alternativa ao passo de tempo da simulação restringido pelo menor Δt (passo de tempo global – GTS), pode se aplicar um passo de tempo local (LTS). Essa técnica consiste em avançar temporalmente cada região independentemente, avaliando apenas o Δt da vizinhança.

Existem várias abordagens propostas na literatura para otimizar a resolução de sistemas de equações numéricas não permanentes através do LTS (Kleb et al., 1992, Zhang et al., 1994) incluindo aplicações na modelagem hidrodinâmica. Por exemplo, Dottori e Todini (2011) aplicaram o LTS seguindo a abordagem proposta por Zhang et al. (1992) em um modelo inercial bidimensional (modelo CA) semelhante ao LISFLOOD-FP (Hunter et al., 2005). Se tratando de modelos unidimensionais, Crossley et al. (2003) compararam os métodos de Zhang et al., (1994) e de Kleb et al. (1992) em um modelo hidrodinâmico; e Hodges (2014) apresentou uma nova abordagem do LTS para o transporte de massa.

O presente trabalho pretende avaliar o potencial de aplicação do LTS em um modelo inercial unidimensional considerando uma grade não estruturada. O método testado neste trabalho é baseado em Cavalcanti et al. (2015), que aplicou a técnica em um modelo bidimensional de transporte de massa com esquema de volumes finitos. O LTS aplicado no modelo inercial será comparado com o método tradicional descrito em Bates et al. (2010) que utiliza um passo de tempo global (GTS) variável. O teste é composto por 4 experimentos simplificados em que serão avaliados o tempo de simulação e a resposta dos métodos.

2. METODOLOGIA

2.1. Modelo Hidráulico

O modelo hidráulico utilizado para simular o escoamento é o modelo inercial (Bates et al., 2010). Esse modelo é obtido a partir das equações de Saint Venant (conservação da massa (1) e quantidade de movimento (2)), em que as forças de inércia convectiva da equação de momento são desconsideradas, originando o sistema abaixo:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} - S_o + S_f \right) = 0 \quad (2)$$

Em que Q é a vazão; A é a área da seção transversal; x e t representam a distância longitudinal e o tempo respectivamente; g é a gravidade; h é a profundidade e S_o e S_f representam a declividade do terreno e da linha de carga, respectivamente.

Adotando uma seção transversal retangular ($A = B \times h$), aproximando a perda de carga unitária (S_f) pela equação de escoamento permanente de Manning e assumindo condições de águas rasas (largura $B \gg h$ altura) em que o raio hidráulico se aproxima da profundidade, podemos fazer uma aproximação numérica, em que vazão e nível são isolados em duas equações:

$$Q_{i+1/2}^{t+1} = \frac{Q_{i+1/2}^t - \Delta t g A_i^t \frac{(y_i^t - y_{i+1}^t)}{\Delta x}}{1 + \frac{\Delta t g |Q_{i+1/2}^t| n^2}{4 A_i^t h_i^{t^3}}} \quad (3) \quad \left| \quad h_i^{t+1} = h_i^t - \frac{\Delta t}{\Delta x B_i} \left(Q_{i-\frac{1}{2}}^{t+1} - Q_{i+\frac{1}{2}}^{t+1} \right) \quad (4)$$

Em que os índices t e i representam o avanço temporal e espacial respectivamente (menor i , mais próximo o trecho está da foz e o $\frac{1}{2}$ representa o fluxo entre os trechos); Δt e Δx representam o incremento temporal e longitudinal; n é o coeficiente de rugosidade de Manning; e y é o nível da superfície d'água (profundidade mais cota do fundo). Maiores detalhes da formulação do esquema numérico em Fan et al., (2014).

2.2. Passo de Tempo Local (LTS)

O passo de tempo local apresentado aqui é baseado em Cavalcanti et al. (2015), em que a atualização do trecho depende apenas da posição no tempo de sua vizinhança. O método consiste em avaliar o tempo futuro de cada trecho (tempo atual + Δt_i) e atualizar o estado (volume $\propto h$) e os fluxos (vazão) daqueles em que o tempo futuro é menor que o de sua vizinhança. Dessa forma, cada trecho avança independentemente no tempo e o fluxo que entra ou sai ($Q \times \Delta t$) é guardado em uma

variável de memória nos seus vizinhos de montante (entra) e jusante (sai). Assim a variável de memória é usada para compor a equação da conservação de massa nos referidos trechos. Essa variável é necessária para que os fluxos não sejam recalculados e acabe havendo um erro no balanço de massa do sistema.

A Figura 1 representa bem esse processo. A altura de cada retângulo da figura representa o Δt específico do trecho, a linha superior do retângulo pintado indica o tempo em que o referido trecho se encontra (t_i) e a linha superior do retângulo não pintado indica o tempo futuro do trecho, ou seja, $t_i + \Delta t_i$. Observa-se que as retângulos que tem o limite superior mais baixo que os vizinhos vão sendo pintados, ou seja, as equações da continuidade e quantidade de movimento vão sendo resolvidas para aquele trecho e as variáveis de memória vão sendo guardadas nos vizinhos.

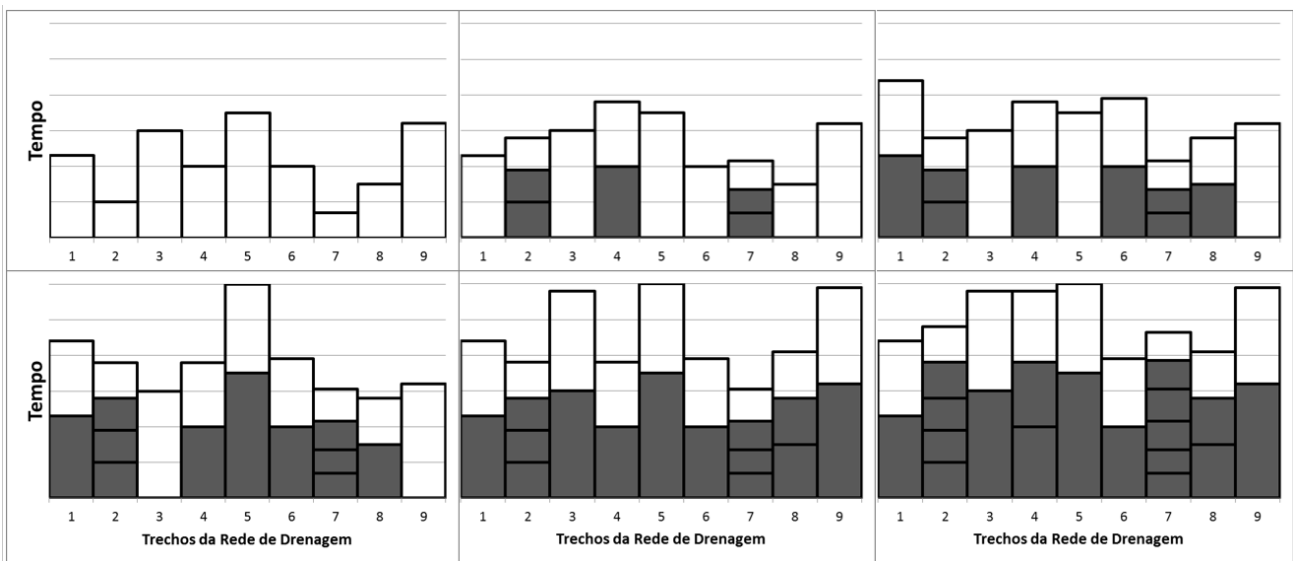


Figura 1 – Representação do LTS

Um detalhe que deve ser observado é que o fluxo (Q) depende da variável de estado (h) dos trechos vizinhos que, no entanto, estão em tempos diferentes. Esse problema é solucionado aproximando, através de uma derivada temporal, a variável de estado para o tempo correto. As equações abaixo demonstram como foi feito esse processo:

$$Q_{i+1/2}^t = f \left(h_i^{t_i} + h'_i(t - t_i), h_{i+1}^{t_{i+1}} + h'_{i+1}(t - t_{i+1}) \right) \quad (5)$$

$$h'_i = (h_i^{t_i} - h_i^{t_i - \Delta t_i}) / \Delta t_i \quad (6) \quad M_i = Q_{i+1/2}^t \times (t - t_i) \quad (7)$$

$$h_i^t = f(M_i, Q_{i-1/2}^t, Q_{i+1/2}^t) \quad (8)$$

Em que t é o tempo estudado e t_i é o tempo do trecho i ; M é a variável de memória e h'_i é a derivada numérica de h_i no tempo.

2.3. Experimentos

O modelo hidráulico utilizado em todos os experimentos manteve sua estrutura e a maioria dos parâmetros. Assumiu-se um canal com largura fixa de 100 m e coeficiente de rugosidade de Manning igual a 0,030. O canal tem 200 trechos com tamanhos variados de média de 1 km originados da seguinte equação baseada em uma distribuição log normal:

$$\Delta x(m) = 1000 \times \frac{\exp\left(\sqrt{\ln(E^2 + 1)} \varepsilon\right)}{\sqrt{E^2 + 1}} \quad (9)$$

Em que E é o erro relativo (assumiu-se erro de 1) e ε representa um número aleatório que segue a distribuição normal de média 0 e desvio padrão 1. A distribuição dos trechos pode ser vista na figura abaixo:

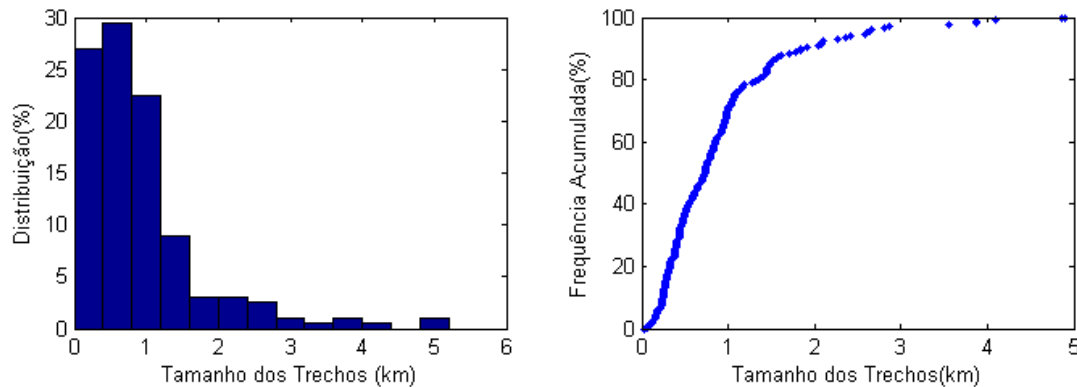


Figura 2– Histograma e gráfico de frequência acumulada do tamanho dos 200 trechos do canal

O hidrograma de entrada para os experimentos é baseado no hidrograma sintético apresentado em NERC (1975) *apud* Fan et al. (2014) e pode ser visualizado na Figura 4:

$$Q(t) = Q_{base} + (Q_{pico} - Q_{base}) \times \left[\frac{t}{t_p} \exp\left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \right]^\beta \quad (10)$$

Sendo adotado $Q_{base} = 500 \text{ m}^3/\text{s}$ e $Q_{pico} = 5000 \text{ m}^3/\text{s}$, t_p é o tempo de pico (= 48 horas) e β é um coeficiente relacionado a “abertura” do hidrograma (= 50).

Os experimentos apresentados aqui tentaram representar diferentes situações de escoamento modificando principalmente a declividade do canal e a condição de jusante. Os experimentos são descritos abaixo, assim como a figura representativa dos mesmos (Figura 3):

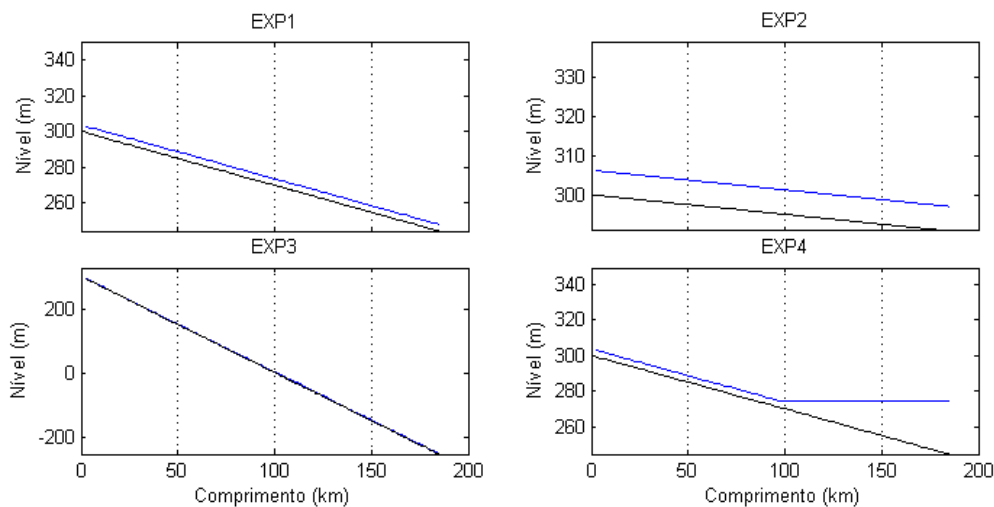


Figura 3– Perfil longitudinal do fundo do canal (preto) e dos níveis (azul) em cada um dos experimentos

- Experimento 1 (EXP1) – Canal com declividade média (30 cm/km) e condição de jusante dada pela declividade do fundo do canal.
- Experimento 2 (EXP2) – Canal com declividade baixa (5 cm/km) e condição de jusante dada pela declividade do fundo do canal.
- Experimento 3 (EXP3) – Canal com declividade alta (3 m/km) e condição de jusante dada pela declividade do fundo do canal.
- Experimento 4 (EXP4) – Canal com declividade média (30 cm/km) e condição de jusante fixa em um nível de 30 m.

Além disso foram testadas diferentes condições de estabilidade, para verificar em que situações o LTS seria aplicável e até onde sua aplicação seria vantajosa. Bates et al. (2010) indicam que os Δt dos trechos devem respeitar a seguinte condição:

$$\Delta t \leq \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{gh}} \quad (11)$$

Em que α seria um coeficiente condicionante de estabilidade que assumiria valores entre 0,2 e 0,7. Assim, foram testados os diferentes valores de α (0,3; 0,5; 0,7 e 0,9) em todos os experimentos, entendendo que, quanto maior os valores de α maior é a probabilidade de haver instabilidade na simulação.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A capacidade do LTS de representar bem o escoamento é mensurada a partir da comparação com o GTS, já que ambos simulam o mesmo modelo e o segundo tem o passo de tempo mais restritivo. A Figura 4 expõe os hidrogramas de entrada e de saída do canal nos 4 experimentos com um $\alpha = 0,3$. Observa-se que o LTS e o GTS produziram praticamente os mesmos resultados, apresentando uma diferença relativa média na vazão próxima de 0,2 %, o que comprova a capacidade do método quanto a simulação do escoamento.

Os passos de tempo médios de cada trecho não foram apresentados aqui pois assumem uma distribuição praticamente idêntica à distribuição dos trechos (Figura 2). Isso ocorre porque, atendendo a condição de Courant (equação 11), o passo de tempo é diretamente proporcional ao tamanho do trecho ($\Delta t \propto \Delta x$) e a profundidade (h) não varia significativamente de trecho a trecho. Já para o caso do EXP4, cuja profundidade varia consideravelmente entre trechos devido à condição de jusante, a distribuição ficou igualmente parecida devido à aleatoriedade do tamanho dos trechos.

Ciente de que os resultados do LTS foram acurados (semelhantes ao GTS) discute-se então em que condições de restrição CFL (equação 11), ou seja, para quais valores de α o método se mostrou estável e se houve ganho em relação ao tempo de simulação. A Figura 5 demonstra a duração das simulações dos 4 experimentos para os diferentes valores de α . Nos casos em que a barra está ausente, significa que o modelo ficou instável. Pode-se perceber que em todos os testes a abordagem GTS se mostrou estável enquanto, utilizando valores de $\alpha \geq 0,5$, o método do LTS causou instabilidade no modelo (exceto para o EXP1). Essa instabilidade é provavelmente causada pela estimativa falha da derivada temporal da variável de estado (h), já que essa é uma derivada numérica regressiva que considera apenas a diferença de h no passo de tempo atual e anterior. Sabendo que existem trechos

com Δt muito distintos próximos uns aos outros, um erro na estimativa da profundidade pode ser intensificado.

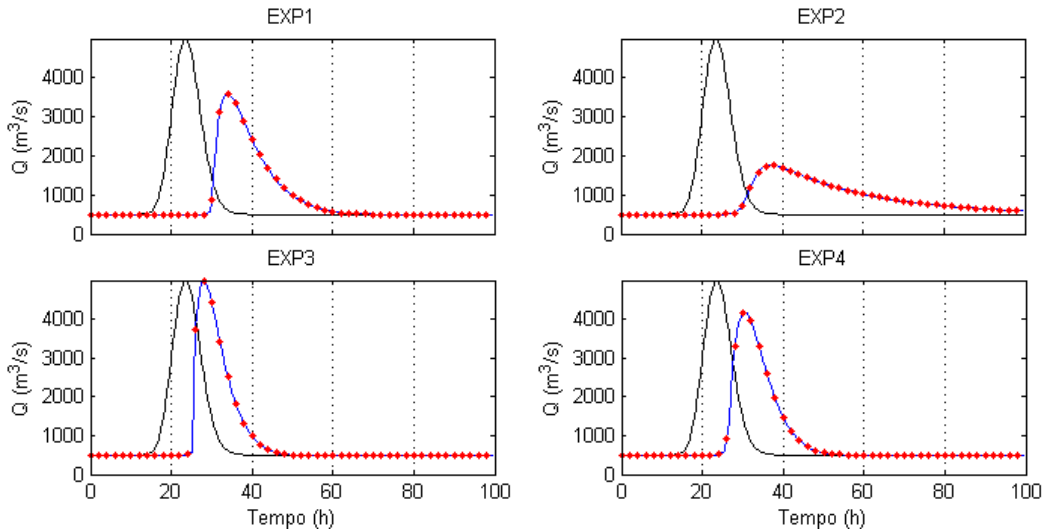


Figura 4– Hidrogramas de entrada (preto) e saída (vermelho – LTS, azul – GTS)

Já em relação ao tempo de processamento da simulação, nota-se na Figura 5 que o método LTS, quando estável ($\alpha = 0,3$), foi significativamente mais rápido. A duração da simulação usando a abordagem do LTS esteve abaixo dos 2 s para os 4 experimentos, apresentando uma redução média de 80 % no tempo de processamento se comparado com o GTS para um mesmo valor de α . Mesmo sendo instável para valores de $\alpha \geq 0,5$ (exceto EXP1), a duração da simulação com LTS de $\alpha = 0,3$ ainda foi menor que a duração do GTS com $\alpha = 0,9$ (menos restritivo = maior Δt).

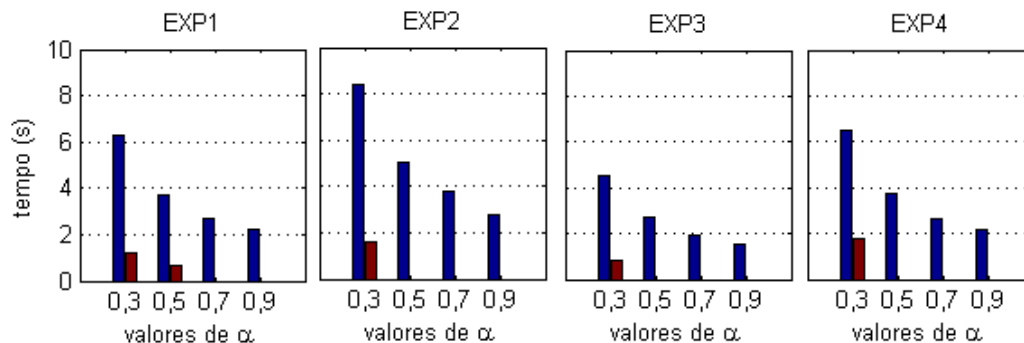


Figura 5– Tempo de simulação para os diferentes experimentos e valores de α (vermelho – LTS e azul – GTS)

4. CONCLUSÕES

Conclui-se que a abordagem do LTS reduz o tempo de processamento da simulação se comparado ao método de GTS variável de um modelo inercial com trechos de tamanho variados. No entanto, dependendo da restrição da condição de estabilidade CFL (valor de α), a abordagem do LTS, da maneira que foi implementada nesse trabalho, causa instabilidade na simulação. A instabilidade observada provavelmente é devido a estimativa da derivada da variável de estado e deve ser estudada em trabalhos futuros com a devida atenção. Esse foi um trabalho preliminar mostrando o potencial do método para aplicação em outros modelos como o MGB-IPH e o LISFLOOD-FP.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATES, P. D.; HORRITT, M. S.; FEWTRELL, T. J. A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modelling. *Journal of Hydrology*, v. 387, p. 33-45, 2010.
- BRÊDA, J. P. L. F.; SIQUEIRA, V. A.; FLEISCHMANN, A. S.; FAN, F. M.; RUHOFF, A. L. Extração de parâmetros físicos de bacias hidrográficas através de segmentação por trechos de mesmo comprimento com o IPH-Hydro Tools. *Anais In: XVIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto – SBSR*. Santos, 2017.
- CAVALCANTI, J.; DUMBSER, M.; MOTTA-MARQUES, D.; FRAGOSO JUNIOR, C.R. A conservative finite volume scheme with time-accurate local time stepping for scalar transport on unstructured grids. *Advances in Water Resources*, v. 86, p. 217–230. 2015
- CROSSLEY, A.J., WRIGHT, N.G., CHRIS, D., WHITLOW, C.D. Local time stepping for modeling open channel flows. *J. Hydraul. Eng.*, v. 129, n. 6, p. 455–462, 2003.
- DOTTORI, F., TODINI, E. Developments of a flood inundation model based on the cellular automata approach: Testing different methods to improve model performance. *Physics and Chemistry of the Earth*, v. 36, p. 266–280, 2011.
- FAN, F. M.; PONTES, P. R.; PAIVA, R. C.; COLLISCHONN, W. Avaliação de um método de propagação de cheias em rios com aproximação inercial das equações de Saint-Venant. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 19, n. 4, p. 137-147. Porto Alegre, Out/Dez 2014.
- HODGES, B. A new approach to the local time stepping problem for scalar transport. *Ocean Model*; v. 77, p. 1–19. 2014.
- HUNTER, N.M.; HORRITT, M.S.; BATES, P.D.; WILSON, M.D.; WERNER, M.G.F. An adaptive time step solution for raster-based storage cell modelling of floodplain inundation. *Adv. Water Res.*, v. 28, n. 9, p. 975–991. 2005
- KLEB, W.L.; BATINA, J.T. Temporal adaptive Euler/Navier–Stokes algorithm involving unstructured dynamic meshes. *AIAA J.* v. 30, n. 8, p. 1980–1985, 1992.
- MAIDMENT, D. Arc Hydro – GIS for Water Resources. ESRI Press, Redlands, CA. 2002.
- MOUSSA, R.; BOCQUILLON, C. Criteria for the choice of flood routing methods in natural channels. *Journal of Hydrology*, v. 186, p. 1–30. 1996
- PONTES, P. R.; COLLISCHONN, W.; FAN, F. M.; PAIVA, R. C.; BUARQUE, D. C. Modelagem hidrológica e hidráulica de grande escala com propagação inercial de vazões. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 20, n. 4, p. 888-904, 2015.
- SIQUEIRA, V. A.; FLEISCHMANN, A.S.; JARDIM, P.F.; FAN, F.M.; COLLISCHONN, W. IPH-Hydro Tools: uma ferramenta open source para determinação de informações topológicas em bacias hidrográficas integrada a um ambiente SIG. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 21, n. 1, p. 274-287, 2016.
- ZHANG, X.D.; TREPANIER, J.Y.; REGGIO, M.; CAMARERO, R. Time-accurate local time-stepping method based on flux updating. *AIAA J.*, v. 32, n. 9, p. 1926–1929. 1994