

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS EM SISTEMAS MECÂNICOS POR ANÁLISE DE
INTERVALO EM ELEMENTOS FINITOS

por

Matheus Rodrigues

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, 18 de dezembro de 2017.

QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS EM SISTEMAS MECÂNICOS POR ANÁLISE DE
INTERVALO EM ELEMENTOS FINITOS

por

Matheus Rodrigues

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof^a. Dr^a. Thamy Cristina Hayashi
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Rodrigo Rossi

Prof. Felipe Tempel Stumpf

Prof. Herbert Martins Gomes

Porto Alegre, 18 de dezembro de 2017.

“The saddest aspect of life right now is that science gathers knowledge faster than society gathers wisdom.”
Isaac Asimov

RODRIGUES, M. “**Quantificação de incertezas em sistemas mecânicos por análise de intervalo em elementos finitos**”. 2017. 15f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

RESUMO

Em um sistema mecânico real, parâmetros que o definem, como ações externas (forças, momentos, excitações), condições de contorno (apoios, velocidades e deslocamentos iniciais do sistema) ou mesmo características do próprio sistema (massa, rigidez, amortecimento) podem apresentar incertezas (variações) em seus valores nominais. Nem sempre estatísticas a respeito destas variações estão prontamente disponíveis. Valores médios e desvios padrão talvez sejam possíveis de serem avaliados, entretanto tipos de distribuição nem sempre são confirmadas principalmente devido à pequena quantidade de amostras. Neste trabalho será analisado o efeito dessas variações, assumindo apenas valores nominais e intervalos, no comportamento estrutural de um sistema mecânico, demonstrando que mesmo para uma pequena incerteza, pode-se gerar grandes diferenças de comportamento que o sistema está sujeito. O tratamento a ser seguido é o da anti-otimização para a obtenção dos resultados limites. Para validação do método, os resultados obtidos pela anti-otimização serão comparados com o Método de Monte Carlo.

PALAVRAS-CHAVE: quantificação de Incertezas, anti-otimização, Monte Carlo, otimização.

RODRIGUES, M. “**Uncertainty quantification in mechanical systems by finite element interval analysis**”. 2017. 15f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ABSTRACT

In a real mechanical system, parameters that define it, such as external actions (forces, moments, excitations), boundary conditions (supports, velocities and initial displacements of the system) or even system characteristics (mass, rigidity, damping) can present uncertainties (variations) in their nominal values. Statistics about these variants are not always readily available. Mean values and standard deviations may be possible to be evaluated, however distribution types are not always confirmed mainly due to the small amount of samples. In this paper we will analyze the effect of these variations, assuming only nominal values and intervals, in the structural behavior of a mechanical system, demonstrating that even for a small uncertainty, it is possible to generate large differences in behavior that the system is subject to. The treatment to be followed is that of anti-optimization in order to obtain the limit results. For the validation of the method, the results obtained by the anti-optimization will be compared with the Monte Carlo Method.

KEYWORDS: uncertainty quantification, anti-optimization, Monte Carlo, optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1– Modelo de propagação de incertezas.	3
Figura 5.1 – Geometria do exemplo da treliça de 72 barras.	8
Figura 5.2 – Tensões nas barras para os valores nominais das variáveis.	9
Figura 5.3 – Gráfico do erro da tensão em todas as barras da treliça.	10
Figura 5.4 – Comparação dos valores de saída para a tensão das barras 3 e 21 pelos métodos de elementos finitos por intervalo e MC.	11
Figura 5.5 - Comparação dos valores de reação para análise de intervalos e MC.	12
Figura 5.6 - Comparação dos valores de frequência para análise de intervalos e MC.	13
Figura A.1 – Geometria treliça de 15 barras do exemplo 2 de Pownuk (2002).	16
Figura A.2 – Geometria treliça de 69 barras do exemplo 1 de Pownuk (2002).	16

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Pseudo-código do algoritmo PSO.	5
Tabela 5.1 – Comparativo entre erros calculados para a treliça plana de 15 barras.	6
Tabela 5.2 - Comparativo entre erros calculados para a treliça plana de 69 barras.	7
Tabela 5.3 – Erros para a tensão nas 72 barras calculados pela Análise de Intervalo por meio do algoritmo PSO.	9
Tabela 5.4 – Comparativo entre erros dos limites máximos e mínimos de tensão para a Análise de Intervalo pelo algoritmo PSO (AI) e pelo método de MC.	10
Tabela 5.5 – Comparativo entre C.S. no caso nominal, pela análise de intervalo pelo algoritmo PSO e pelo método de MC.	11
Tabela 5.6 – Reações nos vínculos da estrutura da treliça.	12
Tabela 5.7 – Frequências naturais da estrutura calculadas pela análise de elementos finitos por intervalo pelo algoritmo PSO e pelo método de MC.	13
Tabela 5.8 – Tempo das simulações por AI e MC para tensões, reações e frequências naturais.	14

ÍNDICE	Pág.
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS.....	vi
LISTA DE TABELAS	vii
ÍNDICE	viii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação e Justificativa.....	1
1.2 Objetivos	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	2
3.1 Definições básicas sobre otimização e anti-otimização	2
3.2 Algoritmo de análise por intervalo	3
3.3 Otimização por enxame de partículas (PSO).....	4
4 ANÁLISE ESTRUTURAL	4
4.1 Análise Estática.....	5
4.2 Análise Modal.....	6
5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS	6
5.1 Exemplo de uma treliça plana de 15 barras.....	6
5.2 Exemplo de uma treliça plana de 69 barras.....	7
5.3 Análise de uma treliça espacial de 72 barras	7
6 CONCLUSÕES	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15
ANEXOS	16

1 INTRODUÇÃO

No projeto de um sistema mecânico, as análises estruturais são geralmente realizadas em relação a valores majorados ou minorados dos parâmetros nominais indicados por um engenheiro. Os valores reais desses parâmetros (condições de contorno, ações externas, propriedades do sistema, etc.) podem variar devido a diversos motivos, como variabilidade na fabricação, montagem inadequada, erros de medição, entre outros. Um método bastante utilizado para contabilizar o efeito dessas variações é o método probabilístico. Esse método define os parâmetros em relação a uma distribuição de probabilidade, com médias e variâncias conhecidas. Muitas vezes, entretanto, informações sobre as médias, as variâncias e, principalmente, sobre a distribuição de probabilidade são difíceis de serem obtidos.

Alternativamente ao método probabilístico foi desenvolvido um método capaz de contabilizar as variabilidades dos parâmetros sem a necessidade de se conhecer a distribuição de probabilidade das variáveis: o método de análise por intervalo. Nesse método a variável não possui mais uma média, uma variância e uma distribuição de probabilidade, mas sim um valor nominal e está definida em função de um valor inferior mínimo e um valor superior máximo que podem apresentar (intervalo), podendo assumir aleatoriamente qualquer valor dentro desse intervalo. No presente trabalho será utilizado o conceito de análise por intervalo aplicado a estruturas mecânicas com o auxílio de um algoritmo metaheurístico PSO (*Particle Swarm Optimization*).

Por meio do algoritmo PSO será realizada uma anti-otimização de uma função objetivo, utilizando o princípio do projeto de pior cenário possível (*worst case scenario*). Partindo de variáveis definidas em função de um intervalo conhecido, o algoritmo busca encontrar a combinação de valores que irá gerar o pior caso possível da variável investigada, não sendo necessariamente a combinação do maior ou do menor valor que as variáveis incertas podem assumir no intervalo. Para validar os resultados da anti-otimização obtidos pelo algoritmo PSO, os mesmos serão comparados com a utilização do Método de Monte Carlo e, quando possível, também comparados com resultados reportados na literatura.

1.1 Motivação e Justificativa

Com o aumento da complexidade dos sistemas mecânicos em geral, a incerteza envolvida nas partes constituintes destes sistemas toma cada vez mais importância. Métodos tradicionais probabilísticos necessitam de informações como distribuições, médias e desvios que nem sempre estão disponíveis ao projetista. Muitas vezes em situações em que um projeto vem a falhar a situação que gerou este evento é uma combinação rara de variáveis que são incertas e que levam o sistema à condição extrema não prevista. Nestas situações, métodos que trabalhem com os valores extremos são preferíveis àqueles métodos probabilísticos. Para que métodos probabilísticos de simulação possam dar resultados próximos àqueles de métodos baseados em análise por intervalo, em geral é necessária uma grande quantidade de simulações e, portanto, custo computacional muitas vezes proibitivo. Neste sentido, métodos que aliviem este esforço computacional serão sempre bem-vindos.

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo a anti-otimização de estruturas treliçadas para dadas variáveis iniciais incertas, definidas em função de intervalos (limites máximos e mínimos possíveis para as variáveis). Para isso será utilizado o algoritmo *Particle Swarm Optimization* desenvolvido em ambiente do *software* MATLAB (2000). Serão apresentados resultados de aplicação do método. Os resultados serão comparados com aqueles obtidos com simulações de Monte Carlo e/ou literatura para verificação. As estruturas a serem analisadas são inicialmente estruturas treliçadas simples e as variáveis de interesse são os erros relativos para os intervalos das variáveis de interesse (tensões, forças, deslocamento, frequências naturais).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise de intervalo na literatura indica diversos trabalhos desenvolvidos, baseados na expansão das equações de Elementos Finitos em Séries de Taylor e avaliando-se as variações de saída para variações presentes nos parâmetros da expansão. Isto em geral resulta em velocidade nas avaliações para os resultados de intervalo, entretanto, para grandes variabilidades, perde-se precisão dos resultados (intervalos mais estreitos que o esperado).

Chen e Yang [2000] apresentaram um estudo sobre o método de elementos finitos por intervalo aplicado a vigas. Em seu trabalho os autores apresentam o método dos elementos finitos para sistemas que possuem algumas características representadas por intervalos definidos. No trabalho são apresentados exemplos numéricos de estruturas sujeitas a parâmetros incertos, porém definidos em um intervalo para demonstrar a validade do método proposto, demonstrando que os parâmetros não-lineares possuem maior influência no resultado do que os parâmetros lineares. Concluem que o método de elementos finitos por intervalo é efetivo em prever a resposta estrutural de um sistema sujeito a pequenas incertezas em seus parâmetros de entrada.

Qui e Wang [2003] compararam a resposta dinâmica de estruturas definidas com parâmetros incertos. Em seu estudo eles comparam a variação das respostas de sistemas mecânicos submetidos a variáveis incertas, porém limitadas em um intervalo conhecido e variáveis definidas probabilisticamente em função de uma média e uma variância conhecidas e distribuição gaussiana. Apresentam exemplos numéricos comparativos desses dois métodos, concluindo que o método de análise de elementos finitos por intervalos, mesmo necessitando de menos informações em relação ao método probabilístico, apresenta um intervalo de soluções mais abrangente. Demonstram também que intervalo de soluções do método probabilístico é mais estreito que o intervalo de soluções do método de elementos finitos por intervalos, estando as soluções do primeiro contidas/dentro do intervalo de soluções do segundo.

Degrauwe *et al.* [2010] propuseram uma forma de melhorar a análise de elementos finitos por intervalos pelo método da Aritmética Afim. Segundo os autores, o uso da análise por intervalo é dificultado devido ao problema de dependência, o qual leva a uma superestimação das incertezas nos resultados. Eles demonstram que o método da Aritmética Afim é capaz de contornar esse problema e chegar a resultados mais precisos ao levar em consideração a relação entre as variáveis dependentes do problema. No estudo são mostradas aplicações em que algumas de suas variáveis possuem valores incertos, porém definidos em um intervalo. São realizadas comparações dos resultados obtidos pela análise por intervalo e pelo método da Aritmética Afim. Em seu estudo, concluem que ao utilizar o método da Aritmética Afim é possível chegar a resultados mais seguros e precisos se comparados ao método da análise por intervalos simples.

Qiu e Wang [2010] realizaram um estudo de anti-otimização estrutural com parâmetros de projeto com intervalos. Em seu trabalho os autores analisam a otimização de massa de diversos problemas simples de estruturas treliçadas onde algumas variáveis são incertas. Fazem um comparativo entre a otimização tradicional com os valores nominais e aquelas obtidas com a anti-otimização. Eles chegam à conclusão de que os resultados obtidos pela otimização não-probabilística com intervalos são mais confiáveis e abrangentes que aqueles obtidos com uma otimização probabilística tradicional, uma vez que esta última está contida na solução da primeira.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Definições básicas sobre otimização e anti-otimização

Problemas de otimização são caracterizados pela busca dos pontos de mínimo ou de máximo da função objetivo $f(x)$. Um problema de otimização pode ser posto matematicamente a partir da definição da função de n variáveis a ser minimizada e escrita conforme:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) \\ & \text{tal que } g(x) \leq 0 \quad \text{e } x \in [x_{\min}; x_{\max}] \end{aligned}$$

onde $f(x)$ é a função objetivo a ser otimizada, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ é um vetor que contém as variáveis de projeto a serem otimizadas. Por sua vez, $x_{\min} = \{x_{\min,1}, x_{\min,2}, \dots, x_{\min,n}\}^T$ e $x_{\max} = \{x_{\max,1}, x_{\max,2}, \dots, x_{\max,n}\}^T$ são vetores que definem os limites inferiores e superiores de cada variável. Estes podem ser contínuos, discretos ou uma mistura de ambos e $g(x) \leq 0$ uma função de restrição a ser cumprida.

A anti-otimização é um termo popularizado por Isaac Elishakoff e Ohsaki [2010] para uma abordagem de fatores de segurança em estruturas que ele descreve como pessimista, buscando respostas menos favoráveis, em combinação com técnicas de otimização, mas diferentemente de abordagens probabilísticas, sem informação sobre distribuições de probabilidade. Quando a anti-otimização é usada em projetos, o resultado é um problema de otimização de dois níveis. No laço externo otimiza-se as variáveis de projeto para obter o melhor projeto, enquanto que no laço interno faz-se a anti-otimização para a incerteza, buscando a pior condição para uma determinada restrição do projeto. Assim, o problema de anti-otimização pode ser posto como:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize}_{\mathbf{c}} g(x, \mathbf{c}) \\ & \text{tal que } h(\mathbf{c}) \in [c_{\min}; c_{\max}] \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde \mathbf{c} é um vetor de parâmetros incertos, mas limitados nos intervalos $[c_{\min}; c_{\max}]$ e $g(x, \mathbf{c})$ representa restrições de desigualdade de um problema de otimização.

3.2 Algoritmo de análise por intervalo

Seja um modelo de um sistema que possui entradas e parâmetros e fornece saídas correspondentes, como indicado na Figura 3.1.

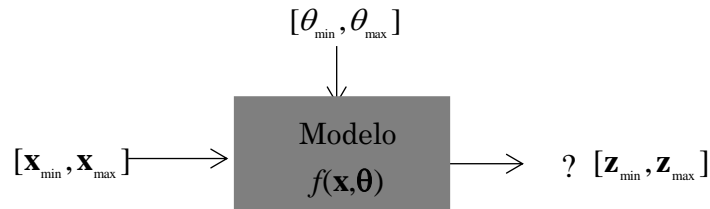


Figura 3.1– Modelo de propagação de incertezas.

A análise de intervalo permite responder à questão: dado um conjunto de variáveis de entrada e parâmetros definidos em intervalos para um dado sistema, quais são os respectivos intervalos das variáveis de saída? Isto pode ser pensado como encontrar a variabilidade da resposta do sistema (limites superiores e inferiores) para variabilidades das entradas e parâmetros. Também pode-se entender como a propagação da incerteza em termos de intervalos, uma vez que a incerteza das entradas e parâmetros será propagada através do sistema para as saídas. Isto a rigor é uma dupla otimização (minimização e maximização) em cada quadrante do hipervolume (2^{no} , com no o número de saídas do sistema) para encontrar os melhores valores que maximizam e minimizam as saídas e que atendem às restrições de intervalos pré-definidos das variáveis e parâmetros assim como do problema como um todo. Matematicamente isto é colocado como:

$$\begin{aligned} & \text{Encontre } x^1 \text{ e } \theta^1 \quad \text{para } \min \|z\|_2 \\ & \quad \text{e } x^2 \text{ e } \theta^2 \quad \text{para } \max \|z\|_2 \\ & \text{Sujeito a } x \in [x_{\min} \ x_{\max}] \\ & \quad \text{e } \theta \in [\theta_{\min} \ \theta_{\max}] \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3 Otimização por enxame de partículas (PSO)

Apresentado em 1995 por James Kennedy e Russell Elberhart, o algoritmo de otimização por enxame de partículas (*Particle Swarm Optimization* – PSO) surgiu como forma de resolver problemas de otimização de funções contínuas e não lineares. O objetivo do algoritmo, entretanto, era o de modelar o comportamento social observado em bandos de pássaros e cardumes de peixes que, mesmo apresentando grandes quantidades de indivíduos, possuem movimentos e ações sincronizadas. Por trás do PSO há uma teoria sócio-cognitiva simples: cada indivíduo (partícula) presente em uma população possui sua própria experiência e tem a capacidade de qualificar essa experiência. Os indivíduos da população, por serem sociais, também conhecem o comportamento de seus vizinhos. A aprendizagem individual de cada partícula (ou indivíduo) corresponde, em termos da teoria, à parcela cognitiva e a transmissão de experiências entre indivíduos corresponde à parcela social. Com base nisso, a tomada de decisão de um indivíduo qualquer é função de sua experiência individual e dos conhecimentos passados pelos seus vizinhos. O PSO, assim como outros métodos computacionais de inteligência coletiva, está baseado em uma população de indivíduos capazes de interagir mutuamente e com o ambiente em seu entorno.

No algoritmo PSO, cada indivíduo da população é definido como uma partícula. Cada partícula pode se movimentar livremente em um espaço determinado \mathbb{R}^n , sendo n a dimensão do espaço de busca. Em seguida são demonstradas algumas definições básicas sobre o algoritmo PSO: (a) Espaço de busca: é o espaço possível de soluções as quais as variáveis de projeto estão sujeitas dadas algumas restrições. (b) Variáveis de projeto: são as variáveis definidas na etapa de projeto, podendo assumir valores discretos ou em função de um intervalo conhecido, $x_i(t)$. (c) Restrições: são as condições de projeto as quais as variáveis estão sujeitas. (d) Função objetivo: é a função na qual a otimização (ou anti-otimização) é feita. É função das variáveis de projeto, $f(x_i(t))$.

Cada partícula possui uma posição e uma velocidade dentro desse espaço de busca. A movimentação das partículas é influenciada, em cada iteração, pela melhor posição local ($p_i(t)$) encontrada anteriormente pela partícula, assim como pela melhor posição global ($p_g(t)$) encontrada por qualquer partícula do espaço de busca. A melhor posição global do espaço de busca é atualizada conforme melhores posições são encontradas pelas outras partículas e essa nova posição influencia posteriormente a movimentação do enxame.

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1r_1(p_i(t) - x_i(t)) + c_2r_2(p_g(t) - x_i(t)) \quad (3.4)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)\Delta t \quad (3.5)$$

onde w é a inércia, $i=1,2,\dots,N$ indica o número de partículas do enxame; $t=1,2,\dots,t_{\max}$, indica as iterações; v_i significa a velocidade da partícula i -ésima x_i significa a posição da i -ésima partícula da população e $p_g(t)$ significa a melhor posição até então. As constantes positivas c_1 e c_2 são os pesos dos componentes cognitivos e social e que permitem mover as partículas em direção a $p_g(t)$. As variáveis r_1 e r_2 representam funções aleatórias entre $[0,1]$. A equação (3.4) representa a atualização da velocidade de cada partícula de acordo com as velocidades anteriores, e a Equação (3.5) representa a atualização de sua posição. Segundo Serapião [2009], o algoritmo PSO é iniciado atribuindo-se valores aleatórios para a posição e velocidade das partículas que compõem o enxame. As partículas então procuram a solução ótima, melhorando seu valor a cada nova iteração. O processo é repetido até que algum critério de parada seja atingido ou até que a variação da velocidade das partículas seja próxima de zero. O pseudocódigo do algoritmo PSO está indicado na Tabela 4.1.

4 ANÁLISE ESTRUTURAL

O objetivo principal da análise estrutural no processo de anti-otimização é avaliar os deslocamentos, campo de tensões, deformações e reações de apoio para as condições de contorno colocadas (saídas do sistema). Neste trabalho, as análises estruturais são elásticas isotrópicas e lineares.

4.1 Análise Estática

Assumiu-se um modelo em elementos finitos de treliças espaciais com 3 graus de liberdade por nó de barra. Basicamente o método parte das equações constitutivas e de compatibilidade, assumindo um campo de deslocamento para a barra. A partir da integração destas equações chega-se à matriz de rigidez no sistema local dos elementos a qual pode ser rotacionado posteriormente para o sistema global e adicionado à matriz de rigidez global num processo de montagem por grau de liberdade.

Tabela 4.1 – Pseudo-código do algoritmo PSO.

<p>Algoritmo PSO</p> <p>Inicia</p> <p>Para todas as partículas</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>Inicializa a posição de cada partícula aleatoriamente $x_i(t) \in [xmin: xmax]$</i></p> <p style="padding-left: 20px;"><i>Atribui uma velocidade inicial v_i igual para todas as partículas</i></p> <p>Fim</p> <p>Enquanto não atingir critério de parada, Execute</p> <p style="padding-left: 20px;">Incremente o tempo $t=t+1$</p> <p style="padding-left: 20px;">Calcule o valor da função objetivo para todas as partículas $f_i(x_i(t))$</p> <p style="padding-left: 20px;">Obtenha a posição da partícula $p_g(t)$ com melhor solução global $f_g(p_g(t))$</p> <p style="padding-left: 20px;">Atualize a velocidade de cada partícula pela Equação (3.4)</p> <p style="padding-left: 20px;">Atualize a posição de cada partícula pela Equação (3.5)</p> <p style="padding-left: 20px;">Guarde a melhor solução e informar para as outras partículas</p> <p>Fim</p> <p>Finaliza</p> <p>Mostre a melhor solução encontrada $p_g(t)$ e valor da função objetivo $f_g(p_g(t))$</p>

A matriz de rigidez no sistema global $[K_e]$ de um elemento é definida como [Ferreira, 2009]:

$$[K_e] = [T]^T [k] [T] \quad (4.1)$$

onde $[K_e]$ é a matriz de rigidez no sistema global do elemento, $[T]$ é a matriz de rotação, e $[k]$, a matriz de rigidez em coordenadas locais. Para a obtenção da matriz global $[K]$ procede-se à montagem (superposição) das $[K_e]$ utilizando-se a numeração dos graus de liberdades efetivos. Para a obtenção da matriz global $[K]$ procede-se à montagem (superposição) das $[K_e]$ utilizando-se a numeração dos graus de liberdades efetivos. De forma simplificada, a matriz de rigidez $[K_e]$ pode ser expressa por [Ferreira, 2009]:

$$[K_e] = \left(\frac{EA}{L} \right) \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ & C_y^2 & C_y C_z & -C_x C_y & -C_y^2 & -C_y C_z \\ & & C_z^2 & -C_x C_z & -C_y C_z & -C_z^2 \\ & & & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ & & & & C_y^2 & C_y C_z \\ & & & & & C_z^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde E é o módulo de elasticidade do elemento; A representa a área transversal; L , o comprimento do elemento; e C_x , C_y , e C_z são os cossenos diretores, que podem ser obtidos por: $C_x = (x_2 - x_1)/L$; $C_y = (y_2 - y_1)/L$; $C_z = (z_2 - z_1)/L$

O sistema de equações de equilíbrio resultante para a treliça 3D pode ser colocada como:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (4.3)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura, $\{d\}$ é o vetor de deslocamento nodal, e $\{F\}$, o vetor das forças externas aplicadas nos nós.

4.2 Análise Modal

A matriz de massa para o elemento é avaliada de acordo com a formulação consistente, e pode ser calculada a partir da mesma transformação. Utilizando a expressão da energia cinética associada ao elemento, obtém-se a matriz de massa consistente para o sistema global [Kwon e Bang, 2000]:

$$[M_e] = [T]^T [m] [T] \quad (4.4)$$

onde $[M_e]$ é a matriz consistente do elemento em coordenadas globais, $[T]$ é matriz de transformação, e $[m]$, a matriz de massa consistente em coordenadas locais.

A matriz global $[M]$ é obtida por montagem por grau de liberdade da mesma forma que $[K]$. As frequências naturais e modos de vibração do sistema são obtidos pela solução do problema de autovalores e autovetores:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\varphi\} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

onde ω representa a frequência de vibração (rad/s) e $\{\varphi\}$ é o vetor das formas naturais de vibração (modos).

5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 Exemplo de uma treliça plana de 15 barras

Neste exemplo, retirado de Pownuk [2012], será apresentada uma comparação entre o erro calculado pela Análise de Intervalo usando algoritmo PSO (AI), pelo Método de Monte Carlo (MC) e aquele indicado no exemplo, utilizando a análise por intervalo e *software* Ansys. O erro é calculado seguindo a fórmula (5.1):

$$Erro = \frac{(\bar{N} - N)}{N} \times 100\% \quad (5.1)$$

em que \bar{N} representa o valor da variável calculada com o limite superior do intervalo, N representa o valor da variável calculada com o limite inferior do intervalo e N representa o valor da variável calculada com o valor nominal. A treliça plana é formada por 15 barras, possuindo cada barra uma área de seção transversal de $A = 0,01 \text{ m}^2$, comprimento $L = 1 \text{ m}$ e módulo de elasticidade de $E = 210 \text{ GPa}$. São aplicadas três cargas incertas $P_i \in [\underline{P}_i, \bar{P}_i]$ $i = 1, \dots, 3$, todas com o valor nominal de 10 kN e 5% de variação. A geometria da treliça pode ser vista na Figura A.1 nos Anexos.

Os resultados das simulações podem ser vistos na Tabela 5.1 abaixo.

Tabela 5.1 – Comparativo entre erros calculados para a treliça plana de 15 barras.

Tensão AI (MPa)				Tensão MC (MPa)			Elementos Finitos por Intervalo (Pownuk 2012)
Elemento	Limite mínimo	Limite máximo	Erro AI	Limite mínimo	Limite máximo	Erro MC	Erro
5	8,48	15,78	60,18%	8,66	15,65	57,60%	60,18%
6	-62,00	-55,16	11,68%	-61,85	-55,29	11,19%	11,67%
8	-19,89	-14,42	31,88%	-19,77	-14,55	30,40%	31,87%
10	-62,00	-55,16	11,68%	-61,82	-55,27	11,18%	11,67%
11	8,48	15,78	60,18%	8,72	15,49	55,79%	60,18%

As barras indicadas são as que mais resultaram em maiores variações no cálculo das tensões. Os valores de erro encontrados pela análise de intervalo ficaram muito próximos dos

valores calculados no exemplo utilizando o método de elementos finitos por intervalo e o *software* de elementos finitos ANSYS para análise estrutural, ficando, inclusive, mais próximos que os erros calculados pelo Método de Monte Carlo. Neste exemplo, a análise por AI demorou cerca de 3,36 segundos enquanto que as simulações de Monte Carlo demoraram 6,66 segundos, o que equivale a ser 1,98 vezes mais rápido o resultado obtido por AI. Simulações realizadas em um computador com processador AMD FX-6100 de 3.3GHz.

5.2 Exemplo de uma treliça plana de 69 barras

Para esse exemplo foi analisada uma treliça plana formada por 69 barras. O comparativo foi novamente em função do erro calculado pela análise de intervalo utilizando o algoritmo PSO, pelo Método de Monte Carlo e pelo indicado no exemplo 1 de Pownuk [2012], cujas simulações foram feitas pelo *software* ANSYS. O erro foi calculado utilizando a mesma equação (5.1) descrita no exemplo anterior. As barras possuem uma área de seção transversal de $A = 0,01 \text{ m}^2$, comprimento $L = 1 \text{ m}$ e módulo de elasticidade de $E = 210 \text{ GPa}$. Assim como no exemplo anterior, são aplicadas três cargas incertas $P \in [\underline{P}, \bar{P}]$, cada uma com o valor central de 10 kN e 5% de variação no intervalo. A geometria utilizada no exemplo pode ser vista na Figura A.2 nos Anexos.

Na Tabela 5.2 abaixo estão demonstrados os resultados das simulações. Novamente os erros calculados pela análise de intervalo utilizando-se o algoritmo PSO ficaram mais próximos dos erros calculados no artigo do Pownuk [2012] se comparados aos valores calculados pelo Método de Monte Carlo.

Tabela 5.2 - Comparativo entre erros calculados para a treliça plana de 69 barras.

Elemento	Tensão AI (MPa)			Tensão MC (MPa)			(Pownuk 2012)
	Limite mínimo	Limite máximo	Erro AI	Limite mínimo	Limite máximo	Erro MC	Erro
17	-6,54	-1,73	116,37%	-6,47	-1,82	112,46%	119,63%
28	1,72	6,17	112,86%	1,76	6,12	110,49%	116,21%
43	1,72	6,17	112,86%	1,79	6,15	110,51%	109,39%
52	-6,54	-1,73	116,37%	-6,43	-1,83	111,35%	119,63%
69	-24,56	-7,82	103,44%	-24,19	-8,16	98,98%	107,05%

Neste exemplo, a análise por AI demorou cerca de 7,70 segundos enquanto que as simulações de MC demoraram 22,88 segundos, o que equivale a ser 2,97 vezes mais rápido o resultado obtido por AI. Simulações realizadas em um computador com processador AMD FX-6100 de 3.3GHz.

5.3 Análise de uma treliça espacial de 72 barras

Neste exemplo será apresentado uma análise de intervalo para a uma treliça espacial cuja geometria foi obtida do exemplo 5.2.2 de Sedeghati [2005] (Figura 5.1). A treliça é formada por 72 barras e 20 nós. Neste exemplo assumiu-se que a tensão limite do material é de $\sigma_{esc}=170 \text{ MPa}$, e uma carga nos três eixos coordenados dos quatro nós superiores de $P \in [\underline{P}, \bar{P}]$, com o valor central de 30 kN e variação de 5%. A estrutura é completamente apoiada nos quatro nós inferiores 17, 18, 19 e 20. Possui 4 massas concentradas no nós superiores 1, 2, 3 e 4, cada uma com $M \in [\underline{M}, \bar{M}]$ de valor nominal 2270 kg e variação de 2%. A treliça do exemplo possui módulo de elasticidade $E \in [\underline{E}, \bar{E}]$ com valor nominal de 69 GPa e variação no intervalo de 5%. Para as barras da treliça foi assumido uma massa específica de $\rho \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$ com valor central de 2770 kg/m^3 e uma variação percentual de 2%.

As áreas das seções transversais nominais são aquelas no artigo indicadas como ótimas por grupos de barras: $A_{1:4}=3,499 \times 10^{-4}$; $A_{5:12}=7,932 \times 10^{-4}$; $A_{13:18}=0,645 \times 10^{-4}$; $A_{19:22}=8,056 \times 10^{-4}$; $A_{23:30}=8,011 \times 10^{-4}$; $A_{31:36}=0,645 \times 10^{-4}$; $A_{37:40}=12,812 \times 10^{-4}$; $A_{41:48}=8,061 \times 10^{-4}$; $A_{49:54}=0,645 \times 10^{-4}$; $A_{55:58}=17,279 \times 10^{-4}$; $A_{59:66}=8,088 \times 10^{-4}$; $A_{67:72}=0,645 \times 10^{-4}$. Todas as medidas em m^2 . Os valores nominais das áreas das seções transversais estão contidos num intervalo $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$, cada um com variação percentual de 10% no intervalo.

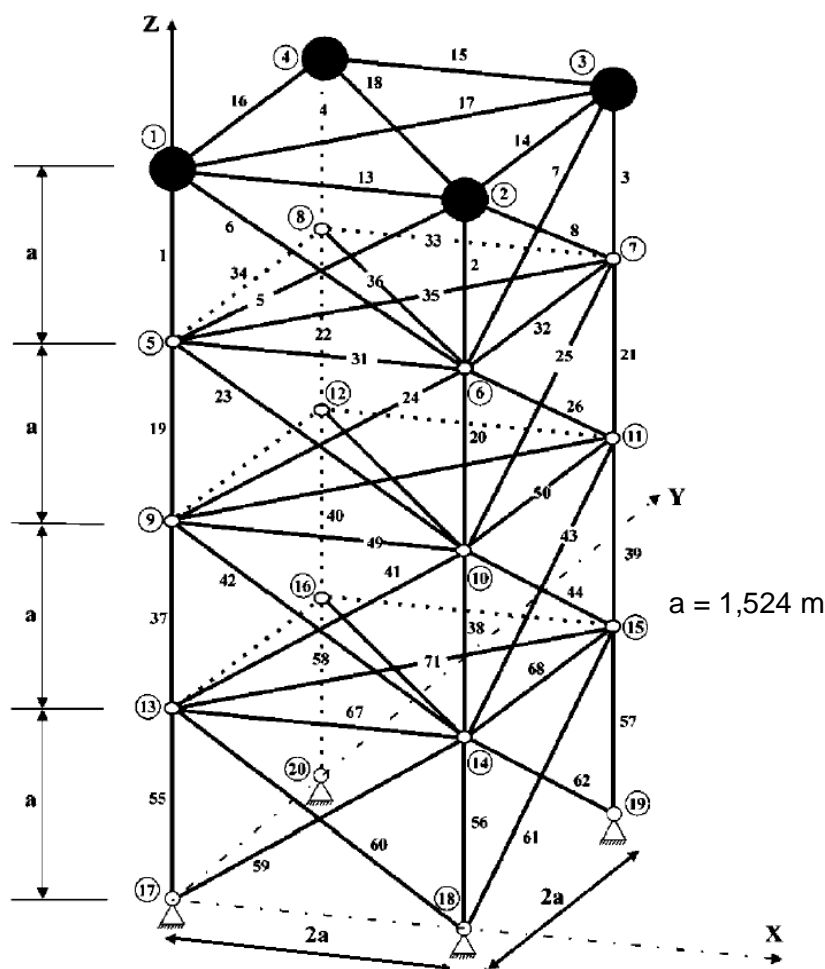


Figura 5.1 – Geometria do exemplo da treliça de 72 barras.

Pela análise de intervalo utilizando o algoritmo PSO foi calculado um intervalo de tensão $[\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ para cada barra, considerando-se os limites inferiores e superiores de cada variável incerta de entrada (E_i, ρ, A_i, M_i, P_i) definida no problema. Comparando esses limites inferiores e superiores de cada barra com o valor da tensão nominal (nesse caso calculado com o valor central de cada intervalo das propriedades), chega-se a equação do erro utilizada. A equação do erro para a tensão em cada barra é:

$$Erro_{\sigma} = \frac{(\bar{\sigma} - \underline{\sigma})}{\sigma_N} \times 100\% \quad (5.2)$$

onde $\bar{\sigma}$ é o valor superior do intervalo da tensão, $\underline{\sigma}$ é o valor inferior do intervalo da tensão (obtidos com a anti-otimização) e σ_N é o valor da tensão nominal da barra calculada. A figura 5.2 mostra a representação das tensões em cada barra da estrutura para os seus valores nominais.

Os erros calculados para as tensões de cada barra estão mostrados na tabela 5.3. Os valores mais críticos encontrados foram nas barras 31 e 34, nas quais o erro passou de 2000%.

Isso significa que mesmo pequenas variações nas variáveis de entrada (sendo a maior variação de 10% nas variáveis de áreas) resultam em grandes variações nas variáveis de saída (tensão).

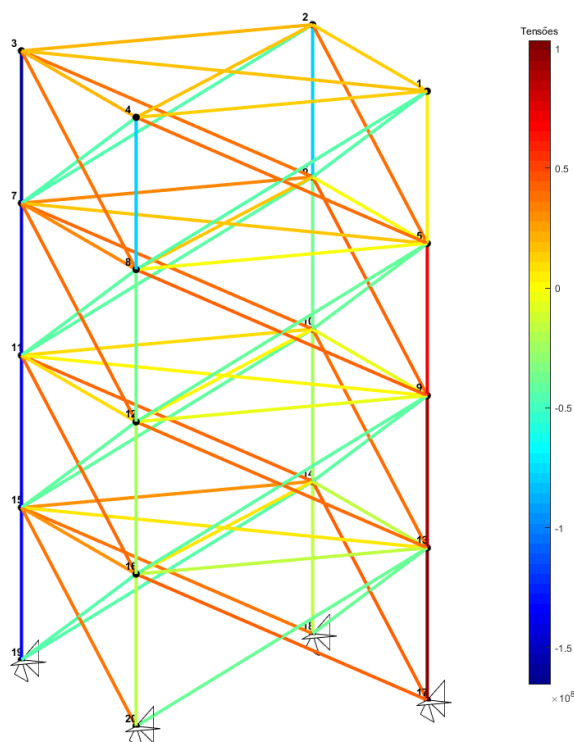


Figura 5.2 – Tensões nas barras para os valores nominais das variáveis.

Tabela 5.3 – Erros para a tensão nas 72 barras calculados pela Análise de Intervalo por meio do algoritmo PSO.

Elemento	Erro (%)	Elemento	Erro (%)	Elemento	Erro (%)	Elemento	Erro (%)
1	189,12	19	21,23	37	19,81	55	18,58
2	21,54	20	31,29	38	40,86	56	50,72
3	17,19	21	17,12	39	17,49	57	17,47
4	20,68	22	28,87	40	42,24	58	53,68
5	20,33	23	21,85	41	24,03	59	22,46
6	19,63	24	23,90	42	23,18	60	24,31
7	20,85	25	22,97	43	24,20	61	25,06
8	19,95	26	21,74	44	23,27	62	23,18
9	19,28	27	23,29	45	23,04	63	22,21
10	21,22	28	23,48	46	23,82	64	25,53
11	19,49	29	23,72	47	22,92	65	24,80
12	19,41	30	22,96	48	24,57	66	22,76
13	212,20	31	2552,34	49	449,50	67	95,19
14	155,16	32	74,82	50	221,19	68	56,81
15	166,23	33	82,28	51	228,28	69	53,95
16	215,52	34	2627,09	52	452,98	70	84,51
17	220,04	35	131,15	53	709,47	71	179,80
18	180,66	36	164,10	54	681,72	72	223,96

Após verificar os erros das tensões de todas as barras da treliça, foram escolhidos os principais valores para uma análise mais detalhada. Para a escolha dos valores considerou-se os maiores erros e sua distribuição na estrutura da treliça, segundo o gráfico da Figura 5.3 abaixo, de forma que tivesse barras representativas de cada região da treliça.

Erro Relativo da Tensão

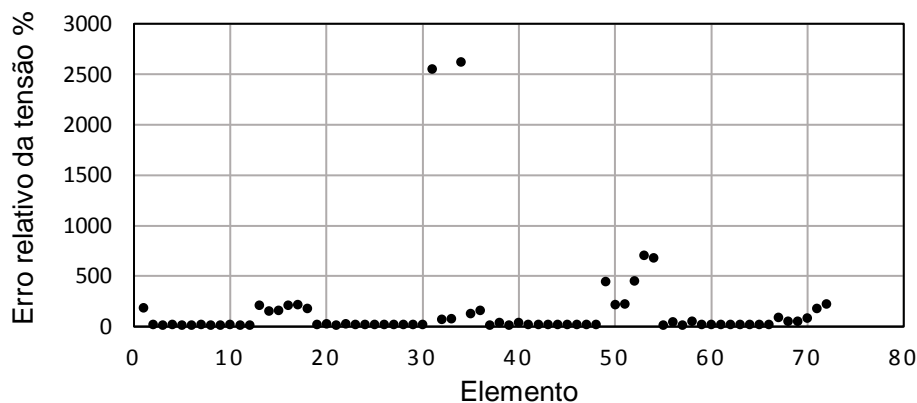


Figura 5.3 – Gráfico do erro da tensão em todos as barras da treliça.

Os elementos escolhidos para a análise mais detalhada foram as barras 1, 13, 31, 34, 54 e 72, como demonstrado na Tabela 5.4. Nesta tabela também constam os resultados máximos e mínimos obtidos de tensões nas barras pelo Método de Monte Carlo com 10000 simulações.

Tabela 5.4 – Comparativo entre erros dos limites máximos e mínimos de tensão para a Análise de Intervalo pelo algoritmo PSO (A.I) e pelo método de MC.

Elemento	Tensão mínima (MPa)		Tensão máxima (MPa)		Erro relativo percentual (%)	
	A.I	MC	A.I	MC	A.I	MC
1	0,36	2,67	9,45	6,83	189,12	86,50
13	-0,49	5,45	28,98	22,03	212,20	119,37
31	-13,10	-7,10	10,80	4,98	-2552,34	-1290,11
34	-13,97	-6,83	10,63	5,68	-2627,09	-1335,68
54	-5,63	-2,22	13,64	8,07	681,72	364,16
72	-0,70	3,06	15,56	11,43	223,96	115,35

Os erros relativos calculados para a tensão normal nas barras analisadas, principalmente os calculados pelo método de análise de elementos finitos por intervalo, mostram uma grande imprecisão do projeto das barras da treliça quando calculado utilizando-se os valores nominais. A variação no valor das propriedades e cargas da estrutura acaba gerando essa imprecisão no projeto que, por desprezar possibilidades de comportamentos estruturais, pode ocasionar uma falha catastrófica na mesma.

A Figura 5.4 abaixo mostra uma comparação dos valores de saída para a tensão entre as barras 3 e 21 pela análise de elementos finitos por intervalo e pelo Método de Monte Carlo.

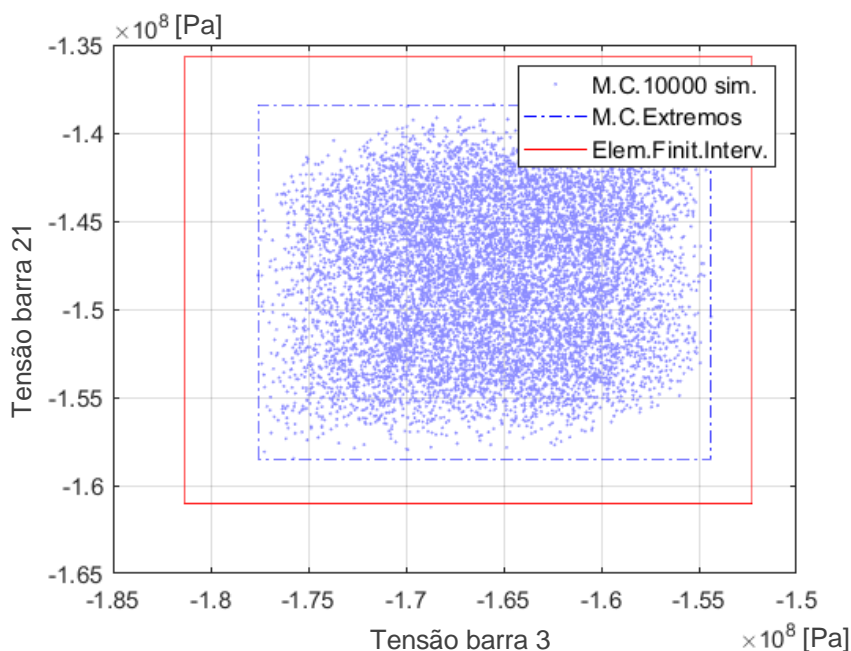


Figura 5.4 – Comparação dos valores de saída para a tensão das barras 3 e 21 pelos métodos de elementos finitos por intervalo e MC.

A linha vermelha na Figura 5.4 representa os limites de tensão da análise de elementos finitos por intervalo, a linha tracejada azul representa os limites de tensão calculados pelo Método de Monte Carlo e os pontos azuis representam as tensões encontradas com as 10000 simulações feitas pelo Método de Monte Carlo.

Como pode-se analisar na Figura 5.4, os valores calculados pela análise de elementos finitos por intervalos apresentam uma maior variação que os calculados pelo Método de Monte Carlo. Os valores da tensão encontrados pelo método de MC estão, inclusive, contidos dentro dos limites dos valores da análise de intervalo. Isso explica o fato do erro relativo percentual da análise de intervalo, mostrado na Tabela 5.4, ser aproximadamente duas vezes maior que o erro do método de Monte Carlo.

Posteriormente à avaliação dos erros nos cálculos da tensão, avaliou-se a segurança da estrutura frente às cargas $P \in [\underline{P}, \bar{P}]$ aplicadas nos nós superiores, cujo valor central é de 30kN. Como mostrado na Tabela 5.5, o maior valor encontrado para a tensão normal foi na barra 3. O valor calculado pelo algoritmo PSO foi de 181,36 MPa, enquanto o valor calculado pelo Método de Monte Carlo ficou um pouco abaixo: 177,58 MPa. A Tabela 5.5 também faz um comparativo entre os coeficientes de segurança (C.S.) calculados utilizando-se a tensão nominal (valores centrais, sem considerar o intervalo), a tensão máxima calculada pela Análise de Intervalo e a tensão máxima calculada pelo Método de Monte Carlo. A tensão de escoamento considerada foi de $\sigma_{esc}=170$ MPa.

Tabela 5.5 – Comparativo entre C.S. no caso nominal, pela análise de intervalo pelo algoritmo PSO e pelo método de MC.

Elemento	Tensão máxima Nominal (MPa)	Tensão máxima AI (MPa)	Tensão máxima MC (MPa)	C.S. Nominal	C.S. AI	C.S. MC
3	165,44	181,36	177,58	1,03	0,94	0,96
21	147,98	161,04	158,48	1,15	1,06	1,07
39	140,49	153,12	150,33	1,21	1,11	1,13
55	103,28	113,56	110,63	1,65	1,50	1,54
57	137,56	150,09	146,97	1,24	1,13	1,16

O coeficiente de segurança da barra 3, quando calculado com a tensão nominal, teve um valor de 1,03. Esse valor encontrado já apresenta pouca segurança, porém não significaria falha da barra da estrutura. Quando analisado em relação à tensão máxima calculada pela análise de intervalos (A.I), entretanto, o coeficiente de segurança apresentou valor de 0,94. Esse valor resultaria num escoamento da barra 3 e uma conseqüente falha da barra. O valor do coeficiente encontrado pelo Método de Monte Carlo para essa barra, mesmo sendo pouco superior ao da A.I ($0,96 > 0,94$), também resultaria em danos à estrutura da barra e portanto um projeto menos seguro. A Tabela 5.6 indica os valores das reações nos nós 17, 18, 19 e 20, para cada grau de liberdade x, y e z correspondente.

Tabela 5.6 – Reações nos vínculos da estrutura da treliça.

Nó	GDL	Reação nominal (kN)	Reação A.I (kN)		Reação MC (kN)		Erro PSO (%)	Erro MC (%)
			Limite mínimo	Limite máximo	Limite mínimo	Limite máximo		
17	x	-31,55	-34,65	-29,11	-33,03	-30,16	-17,55	-9,11
	y	-31,55	-34,46	-29,04	-33,06	-30,03	-17,17	-9,61
	z	-210,00	-221,85	-199,40	-215,83	-203,31	-10,69	-5,96
18	x	-28,45	-31,28	-26,09	-29,83	-26,89	-18,24	-10,33
	y	-27,69	-30,65	-24,80	-29,46	-25,97	-21,11	-12,62
	z	30,00	22,67	37,79	26,01	33,72	50,40	25,67
19	x	-32,31	-35,49	-29,49	-33,79	-30,99	-18,56	-8,67
	y	-32,31	-35,11	-29,66	-33,75	-30,96	-16,86	-8,64
	z	270,00	258,36	282,22	262,70	277,00	8,84	5,30
20	x	-27,69	-30,42	-24,96	-29,39	-26,13	-19,71	-11,77
	y	-28,45	-31,31	-25,79	-30,27	-27,07	-19,38	-11,24
	z	30,00	22,95	36,86	26,59	33,35	46,36	22,54

No caso das reações os erros relativos encontrados pela análise elementos finitos por intervalo não foram tão severos quanto os erros das tensões. Dependendo da segurança empregada no projeto de uma fundação, entretanto, um erro relativo de mais de 50%, encontrado no nó 18 e no grau de liberdade z, pode ser grande o suficiente para causar uma falha na fundação. A Figura 5.5 apresenta a comparação dos valores encontrados pela análise de elementos finitos por intervalo e pelo método de Monte Carlo para as reações nos nós 18 e 20 e grau de liberdade z.

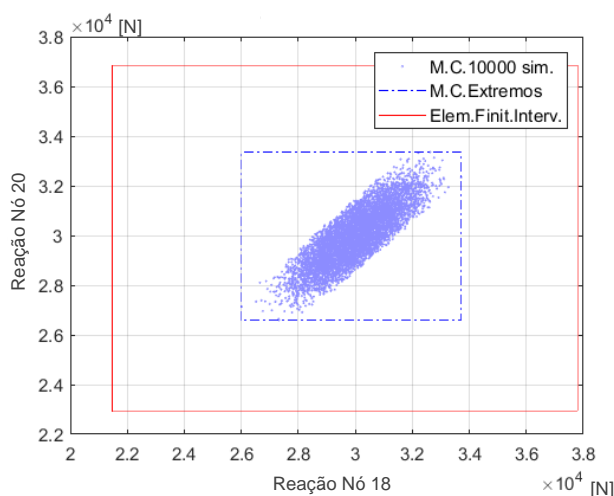


Figura 5.5 - Comparação dos valores de reação para análise de intervalos e MC.

Novamente os valores encontrados pelo método de MC ficaram contidos nos valores encontrados pela análise de elementos finitos por intervalo. Isso também pode ser constatado nos respectivos valores de erros relativos.

Com o objetivo de avaliar o comportamento dinâmico da estrutura, foram analisadas as primeiras 5 frequências naturais da mesma. Os valores calculados pela análise de elementos finitos por intervalo e pelo método de Monte Carlo estão expostos na Tabela 5.7. Os valores foram obtidos considerando-se a presença de massas concentradas nos nós 1, 2, 3 e 4, sendo todas de valor 2270 kg e variação de 2%.

Tabela 5.7 – Frequências naturais da estrutura calculadas pela análise de elementos finitos por intervalo pelo algoritmo PSO e pelo método de MC.

Freq. Nº	Nominal (Hz)	A.I (Hz)		MC (Hz)		Erro A.I (%)	Erro MC (%)
		Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior		
1	4,01	3,84	4,15	3,91	4,10	7,60	4,84
2	4,01	3,87	4,16	3,92	4,11	7,37	4,68
3	6,01	5,80	6,24	5,87	6,14	7,25	4,49
4	6,25	6,01	6,50	6,08	6,44	7,89	5,85
5	9,09	8,72	9,44	8,85	9,27	7,87	4,67

Dependendo das restrições em relação à frequência natural às quais a estrutura está sujeita, essa variação encontrada pelos dois métodos pode ocasionar o efeito de ressonância e possivelmente o colapso da estrutura. Um outro efeito que não foi detalhado nesse problema, mas que também poderia vir a ocorrer seria a alteração de um ou mais modos de vibração da estrutura, o que também poderia causar efeitos dinâmicos indesejados.

Na Figura 5.6 novamente é mostrada uma comparação entre os valores calculados para a frequência natural pela análise de elementos finitos por intervalo por meio do algoritmo PSO e pelo método de Monte Carlo.

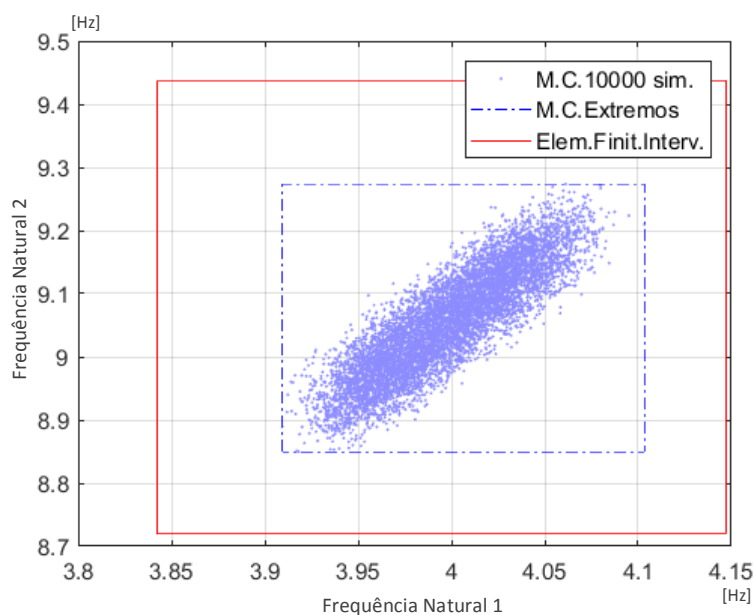


Figura 5.6 - Comparação dos valores de frequência para análise de intervalos e MC.

Novamente os valores calculados pelo método de Monte Carlo ficaram contidos nos limites encontrados pela análise de elementos finitos por intervalo. A diferença entre os erros relativos calculados pelos dois métodos foi ligeiramente menor que nos casos anteriores. Isto mostra que a análise de intervalo por elementos finitos é essencial e importante para obter valores mais precisos dos limites máximos e mínimos das variáveis de interesse do projeto. Por outro lado a análise pelas simulações de Monte Carlo, apesar de ser uma abordagem simples e mais fácil de imaginar, não resulta em valores precisos para estes limites quando comparado com a Análise de Intervalo. A Tabela 5.8 apresenta os tempos das simulações de tensão, reações e frequências para a AI e o método de MC.

Tabela 5.8 – Tempo das simulações por AI e MC para tensões, reações e frequências naturais.

Análise	AI (s)	MC (s)	Razão MC/AI
Tensões	28,87	46,39	1,61
Reações	12,98	46,25	3,56
Frequências	26,57	48,67	1,83

Como visto na Tabela 5.8, com simulações de Monte Carlo o custo computacional tende a ser maior do que se utilizado a Análise por Intervalos. As simulações foram realizadas em um computador com processador AMD FX-6100 de 3.3GHz.

6 CONCLUSÕES

De forma a aplicar o método de Análise de Elementos Finitos por Intervalos foi desenvolvido um algoritmo no *software* MATLAB: o algoritmo PSO (*Particle Swarm Optimization*). O PSO é responsável por realizar a anti-otimização da função objetivo, de forma a encontrar os menores e maiores valores possíveis para as variáveis de saída dados os intervalos das variáveis de entrada.

Primeiramente foram analisados dois exemplos numéricos de treliças planas encontrados na literatura, sendo o primeiro exemplo uma treliça plana de 15 barras e o segundo uma treliça plana de 69 barras. As duas treliças possuem as cargas definidas como um intervalo. A Análise de Elementos Finitos por Intervalos AI, por meio do algoritmo PSO, se mostrou bastante satisfatória nos cálculos nestes dois exemplos realizados frente aos resultados da literatura. Para esses dois exemplos também foi utilizado o Método de Monte Carlo para validação do algoritmo de otimização. Os resultados encontrados pelo algoritmo PSO se mostraram mais precisos que os resultados encontrados pelo Método de Monte Carlo.

Posteriormente como estudo principal foi analisada uma treliça espacial de 72 barras. Essa treliça possui suas variáveis de entrada (módulo de elasticidade, massa específica, áreas das seções transversas, cargas, etc.) definidas como intervalos. Como resultado foi analisado principalmente as tensões normais nas barras, as reações nos nós inferiores e as primeiras 5 frequências naturais. A estrutura foi analisada por AI e comparada com o Método de Monte Carlo. AI encontrou, em todos os casos analisados, erros relativos maiores que o Método de Monte Carlo. Também em todos os casos os resultados encontrados pelo Método de Monte Carlo ficaram contidos entre os limites inferior e superior da AI.

Um importante resultado foi na análise dos coeficientes de segurança para a tensão. Pelo valor nominal (cálculo sem considerar os intervalos, somente o valor central), por exemplo, todas as barras resultaram em coeficiente de segurança maior que 1. Especificamente uma das barras (barra3), que apresentava coeficiente de segurança maior do que 1, quando analisada, pelo Método de Monte Carlo e, principalmente, pela Análise de Elementos Finitos por Intervalo, resultou em coeficiente de segurança menor do que 1, o que dependendo da situação poderia causar algum dano à estrutura.

Em todas as análises o algoritmo PSO apresentou custo computacional menor que o Método de Monte Carlo. Conclui-se, portanto, que o algoritmo PSO se mostrou satisfatório em análises de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chen, S., Yang, X. "**Interval finite element method for beam structures**", Finite Elements in Analysis and Design, V.34, pp.75-88, 2000.

Degrauwe, D., Lombaert, G., De Roeck, G. "**Improving interval analysis in finite element calculations by means of affine arithmetic**", Computers and Structures, V.88, pp.247-254, 2010.

Elishakoff, I., Ohsaki, M. "**Optimization and Anti-Optimization of Structures Under Uncertainty**", Imperial College Press, 424p., 2010.

Ferreira, A.J.M., "**MATLAB codes for Finite Element Analysis**", G. M. L. Gladwell Editor, Springer, Solid Mechanics and its Applications, V.157, 2009.

MATLAB, "**MATrix LABORatory, R2012a**". The MathWorks Inc., Natick, MA, 2000. <www.mathworks.com/>. Acessado em 01/09/2017.

Kennedy, J., Eberhart, R., "**Particle Swarm Optimization**". Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. IV. pp. 1942–1948, 1995.

Kwon, Y. W., Bang, H., "**The finite element method using MATLAB**", 2nd Edition, CRC Press LLC, 2000.

Pownuk, A. "**Interval finite element**". Wikipedia: The free encyclopedia. 2012. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Interval_finite_element&oldid=521977843, (Acessado em 01/09/2017).

Qiu, Z., Wang, X. "**Comparison of dynamic response of structures with uncertain-but-bounded parameters using non-probabilistic interval analysis method and probabilistic approach**", International Journal of Solids and Structures, V. 40, pp.5423-5439, 2003.

Qiu, Z., Wang, X. "**Structural anti-optimization with interval design parameters**", Structural and Multidisciplinary Optimization, V.41, pp.397-406, 2010.

Sedeghati, R., "**Benchmark case studies in structural design optimization using the force method**", International Journal of Solids and Structures, V.42, pp.5848–5871, 2005.

Serapião, A., "**Fundamentos de otimização por inteligência de enxames: uma visão geral**", Revista Controle & Automação, V.20, pp.271-304, 2009.

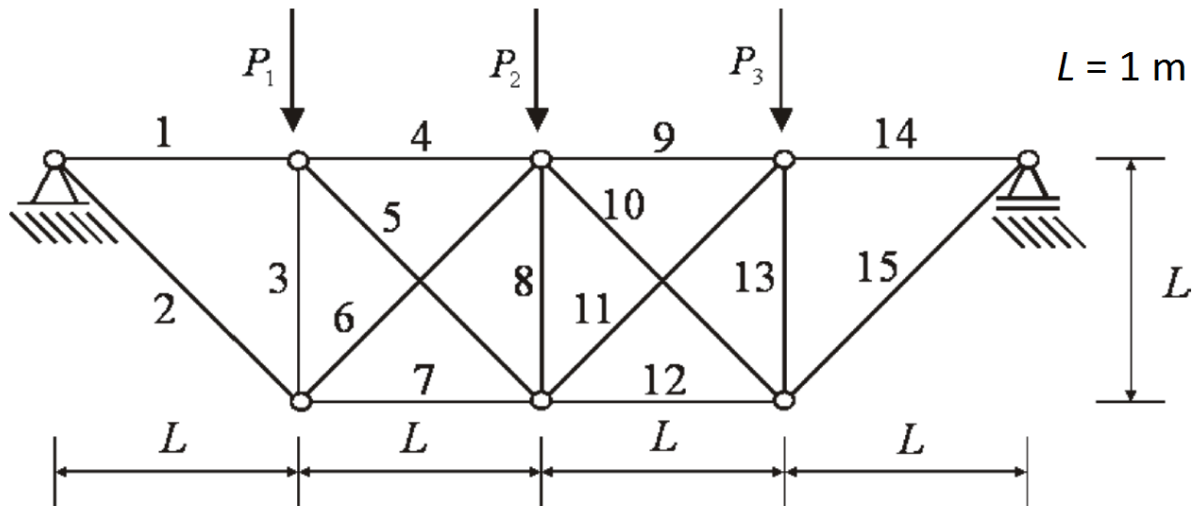


Figura A.1 – Geometria treliça de 15 barras do exemplo 2 de Pownuk (2002).

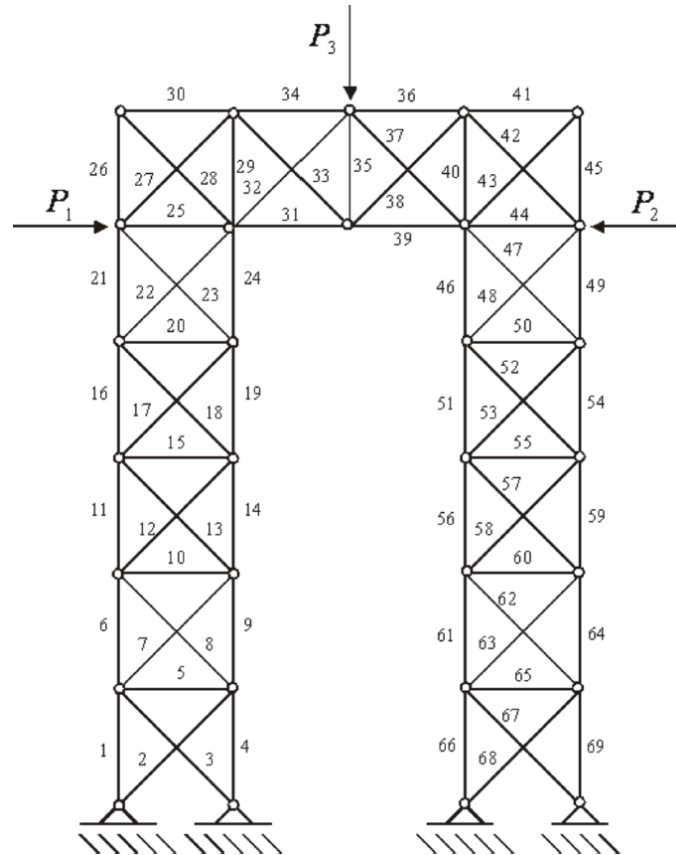


Figura A.2 – Geometria treliça de 69 barras do exemplo 1 de Pownuk (2002).