

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

AVALIAÇÃO DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL COM ANÁLISE EM ELEMENTOS FINITOS  
DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

por

Vitor Tomedi Poletto

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2017.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

AVALIAÇÃO DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL COM ANÁLISE EM ELEMENTOS FINITOS  
DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

por

Vitor Tomedi Poletto

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof<sup>a</sup>. Thammy Cristina Hayashi  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Prof. Dr. Rodrigo Rossi

Prof. Dr. Felipe Tempel Stumpf

Porto Alegre, 18 de dezembro de 2017.

There is nothing noble in being superior to your fellow men.  
True nobility lies in being superior to your former self.  
***Ernest Hemingway***

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, à minha família pelo apoio e compreensão que permitiram que mais essa importante etapa da minha vida fosse concluída com sucesso.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Herbert Martins Gomes, por sua enorme dedicação e paciência em compartilhar seu conhecimento através de inúmeras recomendações e instruções que me guiaram durante todo o período de desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu amigo, Maurício Pertile, que acompanhou de perto toda a minha trajetória na graduação, pela paciência, auxílio e companheirismo. E aos demais colegas e amigos com quem tive a oportunidade de dividir bons momentos de ensinamento e aprendizado ao longo desta caminhada.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por prover diversas oportunidades que contribuíram de forma grandiosa para o meu desenvolvimento profissional.

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a minha formação como Engenheiro Mecânico.

POLETTO, V. T. **Avaliação de confiabilidade estrutural com análise em elementos finitos de estruturas treliçadas**. 2017. 15p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

## RESUMO

A incerteza de carregamentos e propriedades dos materiais está presente em qualquer projeto estrutural. As chances de falha nestes projetos devem ser avaliadas e quantificadas em função das consequências que possam vir a trazer em termos do uso e do sistema no qual o projeto mecânico faz parte. Muitos projetos mecânicos baseiam-se no método dos coeficientes de segurança para levar em conta isto e avaliar a confiabilidade estrutural final. A não inclusão da variabilidade e dos tipos de distribuição dos carregamentos e/ou propriedades estruturais pode levar a falsas expectativas a respeito da real segurança do projeto. Na literatura existem diversas aproximações para tratar este problema, algumas simplificadas baseadas na sensibilidade das variáveis aleatórias presentes e outras mais robustas baseadas em métodos de simulação, como Monte Carlo. Neste trabalho, os efeitos da variabilidade presente em projetos mecânicos foram estudados em termos de métodos simplificados e de simulação para a análise de confiabilidade com vista à avaliação da probabilidade de falha destes sistemas. Para situações onde a função de estado limite da estrutura foi caracterizada com comportamento não-linear, o método de análise de confiabilidade por gradientes implementado se mostrou menos preciso que aquele por simulação. Quanto aos comparativos com resultados da literatura, para projetos de estruturas treliçadas planas e espaciais, onde a confiabilidade dos sistemas foi avaliada através de análise em elementos finitos, se observou que o método por gradientes apresentou resultados acurados. Estes foram similares aos encontrados por simulação, para os quais, todavia, obtiveram-se custos computacionais muito maiores.

**PALAVRAS-CHAVE:** confiabilidade, elementos finitos, análise de incertezas, Monte Carlo, FORM.

POLETTI, V. T. **Structural reliability assessment with finite element analysis of truss structures**. 2017. 15p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

## **ABSTRACT**

The uncertainty of loading and material properties is present in any structural design. The chances of failure in these projects must be assessed and quantified in terms of the consequences they may bring related to the use and the system in which the mechanical design is part. Many mechanical designs are based on the safety coefficients approach to take this into account and to evaluate the final structural reliability. Non-inclusion of variability and types of distributions of the loadings and/or structural properties can lead to wrong assumptions regarding the actual safety of the design. In the literature, there are several approaches to address this problem, some are simplified and based on the sensitivity of the present random variables and others are more robust and based on simulation methods, like Monte Carlo. In this work, the effects of the variability present in mechanical designs were studied in terms of simplified and simulation methods for reliability analysis in order to assess the probability of failure of these systems. In situations where the structure's limit state function has been characterized as a non-linear behavior, the implemented reliability analysis method by gradient has shown to be less accurate than that by simulation. Regarding to the comparisons with benchmark results for projects of both planar and space truss structures where the reliability of the systems was assessed through finite element analysis, it has been observed that the gradient method displayed accurate results. These results were similar to those found by simulation, which resulted in much higher computational costs.

**KEYWORDS:** reliability, finite elements, uncertainty analysis, Monte Carlo, FORM.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Funções de densidade de probabilidade para ações e resistências. ....	2
Figura 4.2 – Algoritmo para cálculo da Confiabilidade e Probabilidade de falha por FORM. ....	3
Figura 4.3 – Fluxograma de funcionamento do programa de análise de confiabilidade. ....	5
Figura 5.1 – Resultado para FORM do exemplo do vaso esférico. ....	6
Figura 5.2 – Resultado para Simulação de Monte Carlo do exemplo do vaso esférico. ....	6
Figura 5.3 – Resultado para FORM do exemplo da treliça plana. ....	8
Figura 5.4 – Resultado para Simulação de Monte Carlo do exemplo da treliça plana. ....	8
Figura 5.5 – Resultado para FORM do exemplo do domo treliçado. ....	9
Figura 5.6 – Resultado para Simulação de Monte Carlo do exemplo do domo treliçado. ....	10
Figura 5.7 – Configuração estrutural da torre de linha de transmissão. ....	11
Figura 5.8 – Resultado para FORM do exemplo da torre de linha de transmissão. ....	12
Figura 5.9 – Resultado para Simulação de Monte Carlo do exemplo da torre de linha de transmissão. ....	12
Figura A1 – Corte de vaso esférico com pressão interna, propriedades e dimensões como variáveis aleatórias. ....	18
Figura A2 – Treliça plana com carregamentos, propriedades e seções transversais como variáveis aleatórias. ....	18
Figura A3 – Estrutura do domo treliçado espacial de 120 barras. ....	18
(onde, $a = 25,0$ m, $b = 13,88$ m, $c = 31,78$ m, $d = 3,0$ m, $e = 5,0$ m e $f = 7,0$ m). ....	18
Figura A4 – Valores nominais das tensões nas barras (Pa) para exemplo do Domo treliçado espacial de 120 barras. ....	19
Figura A5 – Valores nominais das tensões nas barras (Pa) para exemplo da torre de linha de transmissão de 244 barras. ....	19
Figura A6 – Carregamentos (N) utilizados para o problema da torre de linha de transmissão de 244 barras. ....	20

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Parâmetros das variáveis aleatórias básicas para o vaso esférico.....	6
Tabela 5.2 – Resultados para o exemplo do vaso esférico.....	7
Tabela 5.3 – Parâmetros das variáveis aleatórias básicas para a treliça plana. ....	7
Tabela 5.4 – Resultados para o exemplo da treliça plana de 9 barras.....	8
Tabela 5.5 – Resultados para o exemplo do domo treliçado espacial de 120 barras.....	10
Tabela 5.6 – Resultados para o exemplo da torre de linha de transmissão de 244 barras. ....	12



<b>ÍNDICE</b>	<b>Pág.</b>
AGRADECIMENTOS .....	iv
RESUMO .....	v
ABSTRACT .....	vi
LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
ÍNDICE .....	ix
1 INTRODUÇÃO .....	1
2 OBJETIVOS .....	1
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	1
4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	2
4.1 Confiabilidade estrutural .....	2
4.2 Formulação da análise de confiabilidade por FORM .....	3
4.3 Formulação da análise de confiabilidade por Simulação de Monte Carlo .....	4
4.4 Algoritmo de Análise de Confiabilidade .....	4
5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS .....	5
5.1 Metodologia .....	5
5.2 Vaso esférico sob pressão interna – <i>Benchmark</i> da literatura .....	5
5.3 Treliça plana de 9 barras – <i>Benchmark</i> da literatura .....	7
5.4 Domo treliçado espacial de 120 barras – <i>Benchmark</i> da literatura .....	9
5.5 Treliça espacial de 244 barras – Torre de linha de transmissão de energia .....	10
6 CONCLUSÕES .....	13
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	14
ANEXOS .....	16
APÊNDICES .....	18

## 1 INTRODUÇÃO

Todo projeto de engenharia está de alguma forma relacionado a incertezas as quais podem ter origem em diversas fontes como, por exemplo, processos de manufatura, propriedades dos materiais e condições ambientais de funcionamento. Estas incertezas podem levar a estrutura a experimentar condições diversas daquelas para as quais foi projetada inicialmente. Algumas vezes isto pode significar riscos à segurança da estrutura.

Uma forma de quantificar estes riscos é avaliar a probabilidade de falha do projeto, ou seja, quantificar as chances de que eventos não desejados venham a acontecer. Valores assumidos como adequados de probabilidade de falha para projetos podem variar bastante dependendo do tipo e importância do projeto, mas é consenso que devem ser pequenos ( $10^{-3}$  a  $10^{-6}$ ) e que jamais serão nulos, visto que o fator “custo do projeto” também deve ser levado em conta [ISO 2394, 2015].

Projetos mecânicos baseados em coeficientes de segurança para tensões e coeficientes de majoração para carregamentos é uma prática comumente difundida no meio industrial. O projeto desenvolvido com esta metodologia peca por não levar em conta as reais incertezas presentes referentes aos carregamentos, propriedades de materiais e modelagem estrutural. Desta forma, o nível de segurança conseguido utilizando este procedimento fica sendo não mais conhecido. Neste sentido este trabalho pretende avaliar a informação do real nível de segurança do projeto, propondo uma metodologia a ser seguida baseada na inclusão das variabilidades inerentes ao projeto e a avaliação da probabilidade de falha correspondente, utilizando métodos simplificados como o FORM e métodos mais robustos como o de simulação de Monte Carlo.

## 2 OBJETIVOS

Este trabalho propõe o estudo da avaliação de confiabilidade estrutural com análise de elementos finitos de estruturas treliçadas. Para o cálculo de confiabilidade, o seguinte estudo compreende métodos simplificados baseados em gradientes e métodos mais robustos baseados em simulação.

Como objetivos específicos deste trabalho, serão feitas as programações dos métodos de avaliação da confiabilidade, baseados em gradientes e baseados em simulação, em linguagem de programação MATLAB, com o intuito de que se consiga avaliar de forma consistente as probabilidades de falha das estruturas em questão.

## 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A dificuldade central na análise de confiabilidade é a integração da função de densidade de probabilidade multidimensional no campo de falha (Guo e Jeffers, 2015). Métodos de confiabilidade analíticos (ou seja, métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordem, ou FORM / SORM), idealizam a função de estado limite como linear ou quadrática e estimam a confiabilidade no ponto mais provável de falha, ou seja, o ponto no limite função de estado com a distância mais curta à origem no espaço normal padrão (Der Kiureghian, 2005). As técnicas baseadas em simulação (por exemplo, simulação de Monte Carlo clássica e avançada, ou Simulação de MC) são mais versáteis, particularmente para problemas que envolvem grande número de parâmetros e abrangem múltiplos domínios físicos (Zio, 2013).

A análise de confiabilidade de estruturas treliçadas é bastante empregada em estruturas civis de coberturas, torres de linhas de transmissão e galpões e pontes. Frangopol [1991] em seu trabalho analisou o problema de confiabilidade de estrutura treliçadas representativa de pontes onde há hiperestaticidade e suas implicações com o cálculo da confiabilidade. No trabalho, ressalta a importância de maiores informações acerca do correto comportamento estrutural e de carregamento para estes tipos de estruturas. De e Cornell [1991] analisaram a relação entre os fatores de majoração de cargas e minoração de resistência com a confiabilidade de estruturas. No seu trabalho a confiabilidade é tratada a nível de elemento

(barra) ou de estrutura como um todo (conjunto). No trabalho são propostos fatores que capturam e separam os efeitos determinísticos dos probabilísticos para o projeto das estruturas.

No estudo de El-Twain *et al.* [1991] é apresentada uma metodologia para avaliar a confiabilidade em problemas com funções de estado limite implícitas. São propostas funções quadráticas para representar as funções de estado limite implícitas (aquelas que não são conhecidas ou pré-determinadas) à semelhança de funções aproximadas. Os autores afirmam que é possível tratar assim o problema sem introduzir muitos erros. Trabalhos que avaliam a confiabilidade de torres de turbinas de geração eólica também podem ser encontrados na literatura, visto que este tema tem encontrado diversas aplicações com a implantação de parques de geração de energia eólica (Agarwal, 2008, Llado, M. G., 2015).

Aliado à análise de confiabilidade, trabalhos que relacionam a otimização com a confiabilidade como uma restrição extra do problema também têm sido foco de diversos autores e pesquisadores, como por exemplo, Ho-Huu *et al.* [2016], Poletto [2016].

## 4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 4.1 Confiabilidade estrutural

Na análise de confiabilidade estrutural, investiga-se a probabilidade do projeto não falhar sob uma dada ação externa. No contexto de funções de estado limite, a falha do projeto, genericamente falhando, ocorre quando o efeito das ações externas ( $S$ ) excede a resistência ( $R$ ), ou seja,  $g(R, S) = R - S < 0$ . A hipótese de que  $S$  exceda  $R$  corresponde à sobreposição das áreas entre  $f_S(S)$  and  $f_R(r)$ , isto é, a região de falha a qual representa quantitativamente a medida da probabilidade de falha (Figura 4.1) (Ang e Tang, 2006).

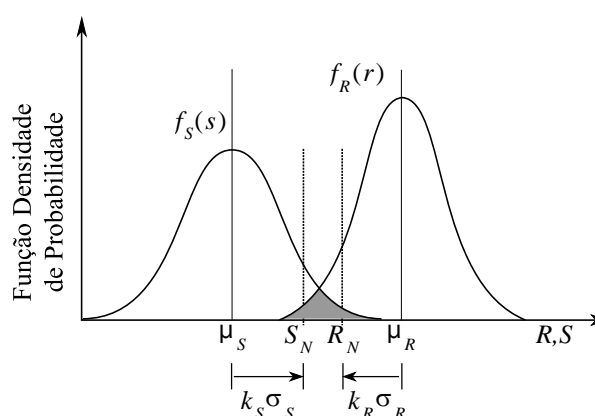


Figura 4.1 – Funções de densidade de probabilidade para ações e resistências.

Na Figura 4.1  $R_N$  e  $S_N$  designam seus respectivos valores nominais determinísticos, assim como  $\mu_S$  e  $\mu_R$  os respectivos valores médios e  $\sigma_S$  e  $\sigma_R$  os desvios-padrão,  $k_S$  e  $k_R$  representam os respectivos coeficientes parciais de majoração das ações e de minoração das resistências usualmente empregados como fatores definidores da segurança do projeto. Portanto, a confiabilidade pode ser avaliada em termos da probabilidade de falha pela Equação 3.1.

$$P_f = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^s f_R(r) dr \right] f_S(s) ds = \int_0^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds = P[g(\mathbf{X}) \leq 0], \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{X}$  representa o vetor de variáveis aleatórias estocásticas do problema de confiabilidade (neste caso,  $R$  e  $S$ ),  $g(\mathbf{X})$  é a função de estado limite que define a região de segurança, onde  $g(\mathbf{X}) > 0$  e a região de falha, onde  $g(\mathbf{X}) < 0$ , a hipersuperfície que separa a região de segurança da região de falha é a chamada função de estado limite  $g(\mathbf{X}) = 0$ ,  $f_S(S)$  é a função densidade de probabilidade das ações e  $F_R(r)$  é a função de probabilidade acumulada das resistências.

Assim, a probabilidade de falha está relacionada com a confiabilidade de um sistema pela relação  $P_f = 1 - C$ . Para funções de estado limite que possam ser linearizadas como indicado  $g(R, S) = R - S$ , um índice bastante utilizado para quantificar a confiabilidade é o índice de confiabilidade definido como (Ang e Tang, 2006):

$$\beta = \mu_{g(R,S)} / \sigma_{g(R,S)} = (\mu_R - \mu_S) / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = -\Phi^{-1}(P_f), \quad (3.2)$$

onde  $\Phi^{-1}(\cdot)$  é a inversa da função acumulada Normal padrão. Em geral, a avaliação da integral na Equação 3.1 para uma região arbitrária de falha pode não ser possível explicitamente. Portanto, métodos de aproximação são necessários como métodos de 1ª. Ordem (FORM) ou métodos de simulação, como Monte Carlo.

## 4.2 Formulação da análise de confiabilidade por FORM

De forma a resolver a equação 3.1 Rackwitz e Fiessler [1978] propuseram um algoritmo iterativo, de forma que há uma aproximação através da linearização da função de estado limite pelo seu gradiente. Ele também é conhecido como o algoritmo FORM (*First Order Reliability Method*). Resumidamente, ele pode ser descrito da seguinte forma:

**Passo 1:** Defina a função de estado limite do problema  $g(\mathbf{X}) = 0$ ;

**Passo 2:** Assuma valores iniciais do ponto de projeto no espaço real das variáveis aleatórias  $\mathbf{X}^* = (X_1, \dots, X_n)^T$  e avalie os correspondentes valores da função de estado limite;

**Passo 3:** Avalie as médias e desvios-padrão de uma distribuição Gaussiana equivalente para as variáveis aleatórias.  $\sigma_{X_i}^N = \phi(\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]) / f_{X_i}(x_i)$  e  $\mu_{X_i}^N = X_i - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]$ ;

**Passo 4:** Transforme as variáveis aleatórias do espaço real  $\mathbf{X}$  para o espaço Normal não correlacionado  $\mathbf{U}$ . Os valores das variáveis de projeto neste espaço serão avaliados como:  $U_i = X_i - \mu_{X_i}^N / \sigma_{X_i}^N$ ;

**Passo 5:** Avalie as sensibilidades  $(\partial g(\mathbf{X}) / \partial X_i)$  no ponto de projeto  $\mathbf{X}^*$ ;

**Passo 6:** Avalie as derivadas parciais  $(\partial g(\mathbf{X}) / \partial U_i)$  no espaço normal não correlacionado usando a regra da cadeia:  $\partial g(\mathbf{X}) / \partial U_i = (\partial g(\mathbf{X}) / \partial X_i) (\partial X_i / \partial U_i)$ ;

**Passo 7:** Avalie o novo valor das variáveis normais não correlacionadas no ponto  $\mathbf{U}^*$ , usando a expressão:  $U_{i,k+1}^* = [\nabla g(U_{i,k}^*)^T U_{i,k}^* - g(U_{i,k}^*)] / [\nabla g(U_{i,k}^*) / |\nabla g(U_{i,k}^*)|]$ ;

**Passo 8:** Avalie a distância da origem do sistema no espaço normal não correlacionado para este novo ponto de projeto na função de estado limite linearizada, assim como o índice de confiabilidade através de  $\beta = \|\mathbf{U}^*\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (U_i^*)^2}$ . A probabilidade de falha pode ser avaliada por  $P_f = \Phi(-\beta)$ ;

**Passo 9:** Verifique a convergência para o índice  $\beta$  com referência a uma determinada tolerância.

**Passo 10:** Avalie as variáveis aleatórias no espaço real para este novo ponto de projeto  $X_i = \mu_{X_i}^N + \sigma_{X_i}^N U_i^*$ ;

**Passo 11:** Avalie  $g(\mathbf{X})$  para as novas variáveis aleatórias e verifique o critério de convergência para, como por exemplo se  $\Delta g(\mathbf{X}) < \text{tolerância}$  e  $\Delta \mathbf{X} < \text{tolerância}$ ;

**Passo 12:** Se ambos os critérios são atendidos, pare as iterações, caso contrário, repita os passos 3 a 11.

Figura 4.2 – Algoritmo para cálculo da Confiabilidade e Probabilidade de falha por FORM.

### 4.3 Formulação da análise de confiabilidade por Simulação de Monte Carlo

O método de Simulação Direta de Monte Carlo pode ser usado para estimar a probabilidade de falha definida pela Equação 3.3. O método consiste em gerar amostras com as distribuições e correlações adequadas para as respectivas variáveis aleatórias e então alimentar a função de estado limite para obter os respectivos resultados, quando  $g(\mathbf{X}) \leq 0$  terá havido a falha e quando  $g(\mathbf{X}) > 0$  se estará no domínio da segurança. Uma estimativa da probabilidade de falha poderá ser obtida por (Gomes, 2016):

$$\hat{P}_f = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} I[g(X) \leq 0] , \quad (3.3)$$

onde  $ns$  é o número de ciclo de simulações efetuadas e  $I[.]$  é uma função indicadora que vale 1, caso  $g(\mathbf{X}) \leq 0$  e 0, no caso contrário.

À medida que  $ns$  aumenta, então a estimativa da probabilidade  $\hat{P}_f$  aproxima-se da verdadeira probabilidade de falha  $P_f$ . A acurácia da Equação 3.3 pode ser avaliada em termos da variância do estimador de  $\hat{P}_f$ . Para pequenas probabilidades de falha e/ou pequeno número de ciclos de simulação, a variância de  $\hat{P}_f$ , indicado por  $var(\hat{P}_f)$ , pode ser bastante grande. Portanto, pode ser que seja necessário um grande número de ciclos de simulação para que uma dada variância especificada seja atingida, para que se possa ter confiança no valor obtido pelo estimador  $\hat{P}_f$ . A variância do estimador da probabilidade de falha pode ser avaliada assumindo que cada ciclo de simulação constitua um processo de Bernoulli. Portanto, neste caso, o número de falhas em  $ns$  simulações pode ser considerada como tendo uma distribuição binomial. Então a variância, neste caso pode ser avaliada como:

$$var(\hat{P}_f) = \frac{(1-\hat{P}_f)\hat{P}_f}{ns} . \quad (3.4)$$

Assim é recomendado que a medida estatística da acurácia do estimador da probabilidade de falha obtida com simulações diretas de Monte Carlo seja avaliada de forma adimensional pelo coeficiente de variação:

$$cv(\hat{P}_f) = \frac{\sqrt{\frac{(1-\hat{P}_f)\hat{P}_f}{ns}}}{\hat{P}_f} = \frac{\sigma_{\hat{P}_f}}{\mu_{\hat{P}_f}} . \quad (3.5)$$

Quanto menor for o coeficiente de variação  $cv$  (valores em torno de 0,5-5% são aceitáveis), melhor será a acurácia da estimativa. Fica evidente que quando  $ns$  tende a infinito, então  $cv(\hat{P}_f)$  tende a zero.

### 4.4 Algoritmo de Análise de Confiabilidade

O objetivo principal da análise estrutural no processo de avaliação da confiabilidade é, levando em conta determinadas condições de contorno, avaliar os deslocamentos, tensões e reações com os quais será possível determinar, em conjunto com os critérios de parada dos métodos de confiabilidade empregados, quando ocorre um evento de falha na estrutura. Na Figura 4.3 é mostrado, em etapas resumidas, o funcionamento do programa (algoritmo) de análise de confiabilidade que utiliza ambos os métodos FORM e Simulação de Monte Carlo em conjunto com o algoritmo de análise estrutural para executar a avaliação. As diretrizes do algoritmo de análise estrutural utilizado se baseiam na teoria de elementos finitos para estruturas com elementos de barras simples, o qual foi adaptado para compatibilizar com a parametrização advinda de ambos os métodos de análise de confiabilidade empregados.

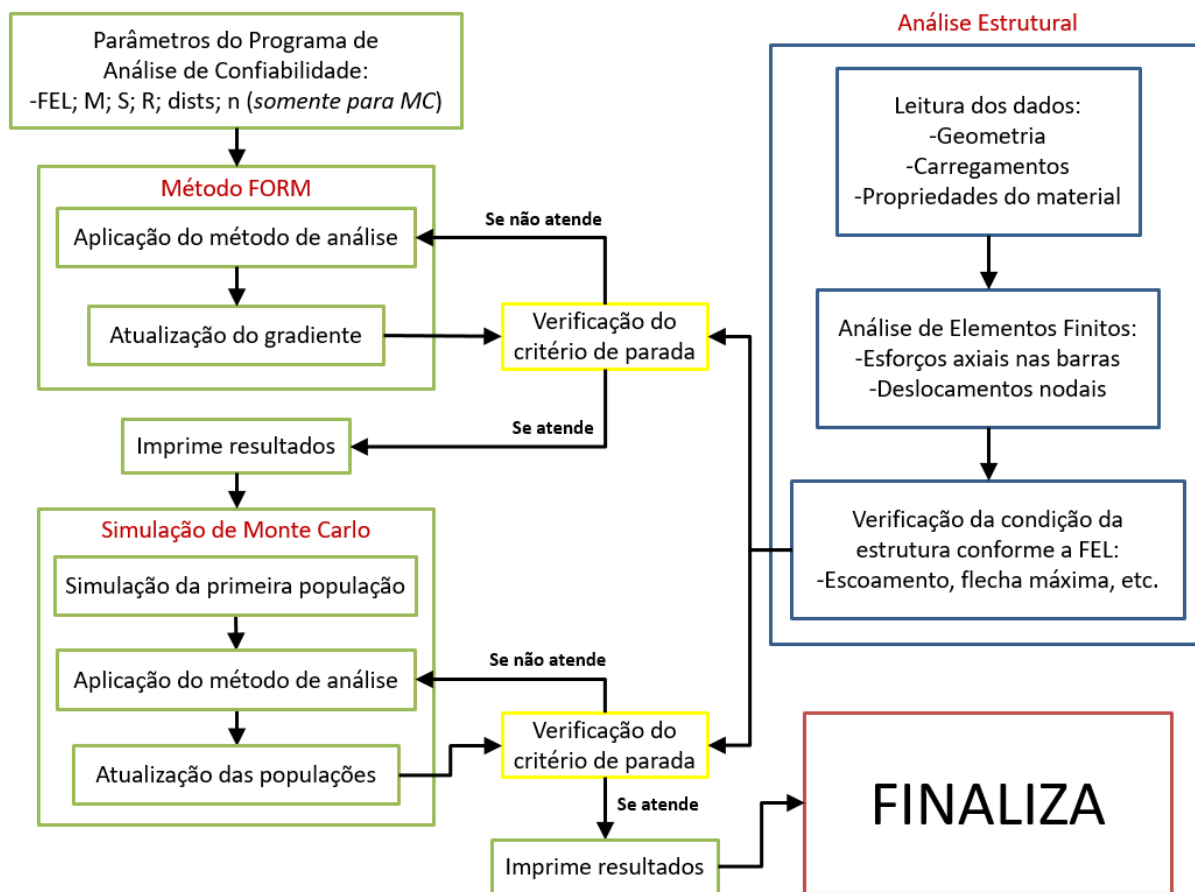


Figura 4.3 – Fluxograma de funcionamento do programa de análise de confiabilidade.

## 5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS

### 5.1 Metodologia

Nesse trabalho serão analisados, além de uma superfície esférica simples, três casos de estruturas treliçadas, dos quais dois já foram abordados por autores que utilizaram outros algoritmos e/ou métodos de análise de confiabilidade. Com isso, podem-se verificar os resultados do algoritmo de análise de confiabilidade por métodos FORM e Simulação de Monte Carlo utilizados neste trabalho e comparar sua acurácia com os demais.

No que diz respeito aos *benchmarks*, cada problema foi tratado similarmente aos trabalhos da literatura citados com exceção do algoritmo e/ou método de análise utilizado. Ou seja, a configuração estrutural e as condições de contorno correspondentes seguem os critérios presentes na literatura. O exemplo apresentado da estrutura treliçada de 244 barras, cuja configuração representa uma torre de transmissão, foi composto com base no trabalho de otimização de Faria [2014], mas apenas focando na análise de confiabilidade da estrutura, logo, os resultados desse caso são apenas comparados quanto aos métodos entre si.

### 5.2 Vaso esférico sob pressão interna – *Benchmark* da literatura

O exemplo aqui apresentado é um estudo de caso referente à resposta estrutural de um vaso esférico submetido à pressão interna. Na análise de confiabilidade por método de primeira ordem realizada por Lemaire [2009], para este caso da esfera, assume-se que o material é homogêneo e sem variabilidade espacial. A Figura A1 do Apêndice ilustra a esfera com suas características geométricas.

As variáveis aleatórias básicas e seus respectivos tipos de distribuições, valores médios e desvios-padrão utilizados no problema em questão estão definidas na Tabela 5.1. As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram o processo numérico dos resultados obtidos por FORM e por Monte Carlo.

Tabela 5.1 – Parâmetros das variáveis aleatórias básicas para o vaso esférico.

Variável Aleatória	Tipo de distribuição	Valor Médio	Desvio-Padrão
Pressão [ $p_0$ ]	Log-Normal	130 MPa	8 MPa
Raio interno [ $r_0$ ]	Log-Normal	50 mm	2,5 mm
Raio externo [ $r_1$ ]	Log-Normal	100 mm	5 mm
Tensão de escoamento [ $f_y$ ]	Log-Normal	300 MPa	20 MPa

Neste problema usa-se uma função de estado limite definida pela falha elastoplástica:

$$g = f_y - \sigma_{eq} = f_y - \frac{3p_0}{2} \frac{r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}. \quad (3.6)$$

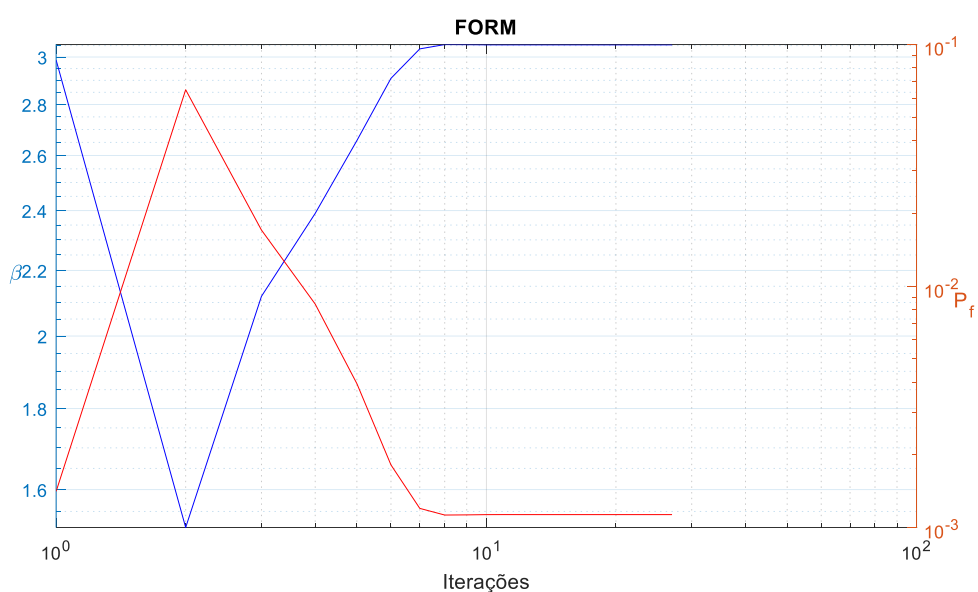


Figura 5.1 – Resultado para FORM do exemplo do vaso esférico.

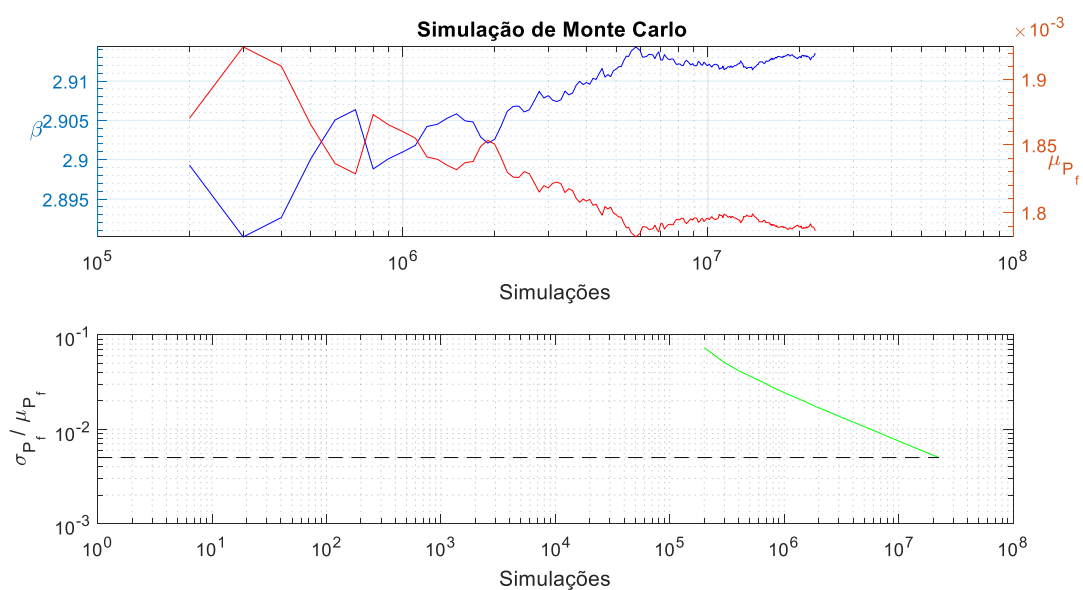


Figura 5.2 – Resultado para Simulação de Monte Carlo do exemplo do vaso esférico.

A Tabela 5.2 resume os resultados obtidos neste exemplo com a comparação entre os métodos FORM e Monte Carlo.

Tabela 5.2 – Resultados para o exemplo do vaso esférico.

	FORM	Monte Carlo	Lemaire [2009] FORM	Fórmula de Breitung	Simulação Direcional
<b>Iterações</b>	27	225	-	-	-
$\beta$	3,0536	2,9136	3,055	3,003	3,004
$P_f$	$1,1 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-3}$	$1,336 \times 10^{-3}$	$1,332 \times 10^{-3}$
<b>C.V.</b>	-	0,5%	-	-	-
<b>Chamadas</b>	135	$2,25 \times 10^7$	-	-	-
<b>Tempo [s]</b>	2,12	25,40	-	-	-

Neste caso, verifica-se que o método FORM implementado converge a um coeficiente de confiabilidade,  $\beta$ , próximo ao encontrado em literatura que utiliza o mesmo método de análise e também muito próximo aos resultados encontrados através dos demais métodos utilizados como *benchmark*. Quanto à simulação de Monte Carlo, nota-se que há uma pequena diferença em relação aos resultados dos métodos mais simples, isso provavelmente se deve ao fato da função de estado limite ter um comportamento não linear, comprometendo a acurácia de métodos por gradiente como FORM. De todos os resultados da Tabela 5.2, aquele tomado como referência deve ser o da Simulação de Monte Carlo, por sua robustez e baixo coeficiente de variação alcançado na análise do problema.

### 5.3 Treliça plana de 9 barras – *Benchmark* da literatura

Neste exemplo a probabilidade de falha de uma treliça plana de 9 barras sob a ação de cargas aleatórias, propriedades dos materiais e áreas das seções transversais é avaliada. O exemplo foi resolvido por métodos de primeira ordem para confiabilidade por Lemaire [2009]. Na Figura A2 do Apêndice a treliça é mostrada com as suas características geométricas.

As variáveis aleatórias básicas e seus respectivos tipos de distribuições, valores médios e desvios-padrão utilizados no problema em questão estão definidas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Parâmetros das variáveis aleatórias básicas para a treliça plana.

Variável Aleatória	Tipo de distribuição	Valor Médio	Desvio-Padrão
Carregamento [P]	Normal	3 MN	0,6 MN
Carregamento [Q]	Normal	2 MN	0,4 MN
Tensão de escoamento [ $f_y$ ]	Normal	200 MPa	30 MPa
Diâmetro das barras [d]	Normal	0,22 m	0,01 m

Neste problema usa-se uma função de estado limite definida por:

$$g = R_i - |N_i| \leq 0, \quad (3.7)$$

onde  $R_i$  e  $N_i$  são, respectivamente, a resistência da barra e a força normal na mesma barra. A resistência é definida pela força normal plástica:

$$R_i = f_{yi} \frac{\pi d_i^2}{4}, \quad (3.8)$$

onde os valores de  $f_y$  e  $d$  são idênticos em toda a estrutura.

Na Tabela 5.4 são resumidos os resultados obtidos com os respectivos parâmetros de número de iterações, índice de confiabilidade, probabilidade de falha, coeficiente de variação, número de chamadas de função e tempo total de processamento, ao lado de resultados obtidos por Lemaire [2009]. Na Figura 5.3 é indicada a convergência para o método FORM e na Figura 5.4, as simulações de Monte Carlo.



Tabela 5.4 – Resultados para o exemplo da treliça plana de 9 barras.

	FORM	Monte Carlo	Lemaire [2009] FORM	Fórmula de Breitung	Fórmula de Tvedt
Iterações	10	1423	-	-	-
$\beta$	1,9318	1,9210	1,8972	1,9157	1,9205
$P_f$	$2,67 \times 10^{-2}$	$2,67 \times 10^{-2}$	$2,89 \times 10^{-2}$	$2,77 \times 10^{-2}$	$2,74 \times 10^{-2}$
C.V.	-	0,5%	-	-	-
Chamadas	50	$1,423 \times 10^6$	-	-	-
Tempo [s]	0,86	374,60	-	-	-

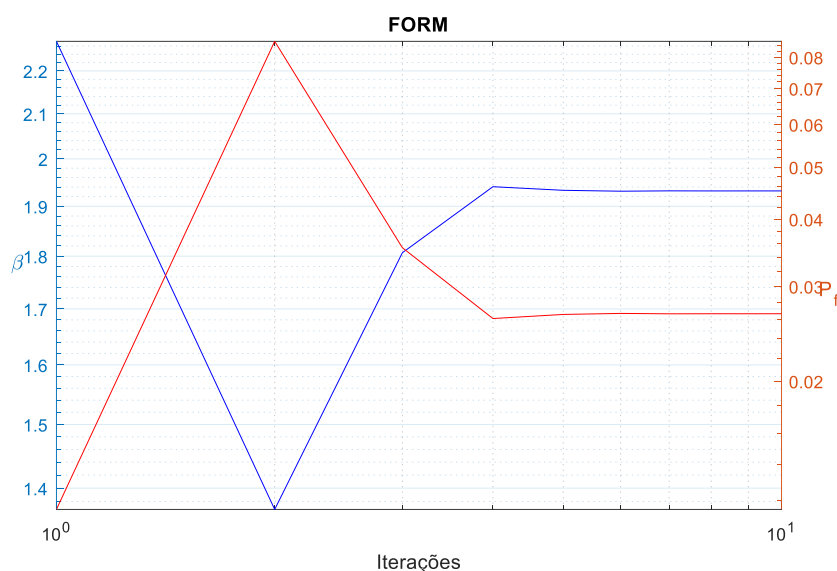


Figura 5.3 – Resultado para FORM do exemplo da treliça plana.

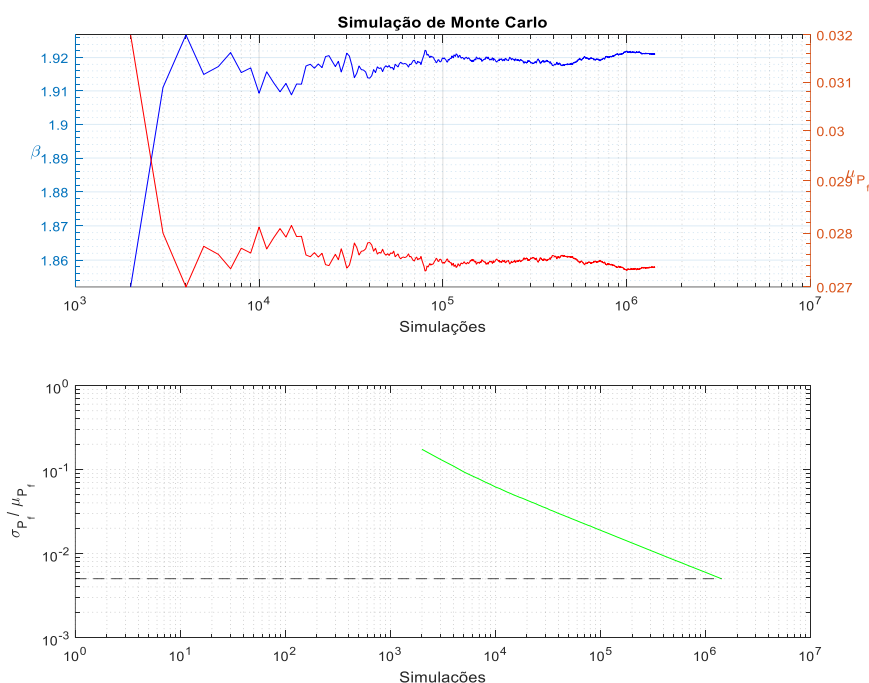


Figura 5.4 – Resultado para Simulação de Monte Carlo do exemplo da treliça plana.

Observa-se claramente através dos resultados apresentados na Tabela 5.4 que ambos os métodos de avaliação de confiabilidade (FORM e Simulação de Monte Carlo) se mostraram precisos na análise de confiabilidade para a treliça plana de 9 barras, uma vez que

convergir rapidamente a índices de confiabilidade similares entre si e também muito próximos àqueles encontrados na literatura. Mesmo assim, nota-se que a Simulação de Monte Carlo apresentou um custo computacional bem maior (alto número de iterações e chamadas à função) em relação ao método por gradiente, verificado pela diferença de tempo de execução da análise, o que se deve majoritariamente ao coeficiente de variação baixo (0,5%) estipulado como meta para a simulação.

#### 5.4 Domo treliçado espacial de 120 barras – *Benchmark* da literatura

Neste exemplo, a confiabilidade de um domo treliçado espacial de 120 barras é analisada utilizando os dois métodos aqui avaliados. A Figura A3 do Apêndice indica a geometria para este exemplo. A incerteza está presente como variáveis aleatórias Gaussianas das áreas das seções transversais com coeficiente de variação de 5%, áreas das seções transversais (7 grupos), Módulo de Elasticidade e as cargas aplicadas nos nós (três grupos), perfazendo um total de 11 variáveis aleatórias. Este mesmo problema foi resolvido por Ho-Huu *et al.* [2016] através da imposição de uma limitação no índice de confiabilidade,  $\beta = 3$ , e então foi feita a otimização do projeto da estrutura afim de se encontrar as melhores seções transversais (para cada um dos 7 grupos de barras) dentro dessas condições. Desta forma, neste exemplo, assumiu-se as áreas obtidas por Ho-Huu *et al.* [2016] com a otimização baseada em confiabilidade e partiu-se para o cálculo da confiabilidade do sistema esperando-se obter o mesmo resultado da restrição imposta pelos autores. As funções de estado limite são definidas em termos do limite de deslocamento de  $\pm 5\text{mm}$  em todos os nós das direções x, y e z. As tensões limites de escoamento e flambagem são definidas em termos do código AISC-ASD [1989] apresentado no apêndice. As funções de estado limite são então representadas por:

$$g_i = 1 - \frac{|\delta_{i,j}|}{\delta_{lim}} \geq 0 \quad i = 1, \dots, nn \text{ e } j = x, y, z, \quad (3.9)$$

$$g_k = 1 - \frac{|\sigma_k|}{\sigma_{lim}} \geq 0 \quad k = 1, \dots, nb, \quad (3.10)$$

onde  $nb$  indica o número de barras e  $nn$  indica o número de nós.

Na Figura 5.5 e Figura 5.6 são apresentados, respectivamente, os gráficos de convergência para o método FORM e para a Simulação de Monte Carlo. Na Tabela 5.5 são resumidos os resultados obtidos onde constam número de chamadas à função de estado limite, tempo gasto na análise, etc., juntamente com os resultados obtidos pelo autor Ho-Huu *et al.* [2016]. As tensões nominais nas barras são mostradas na Figura A4 do Apêndice.

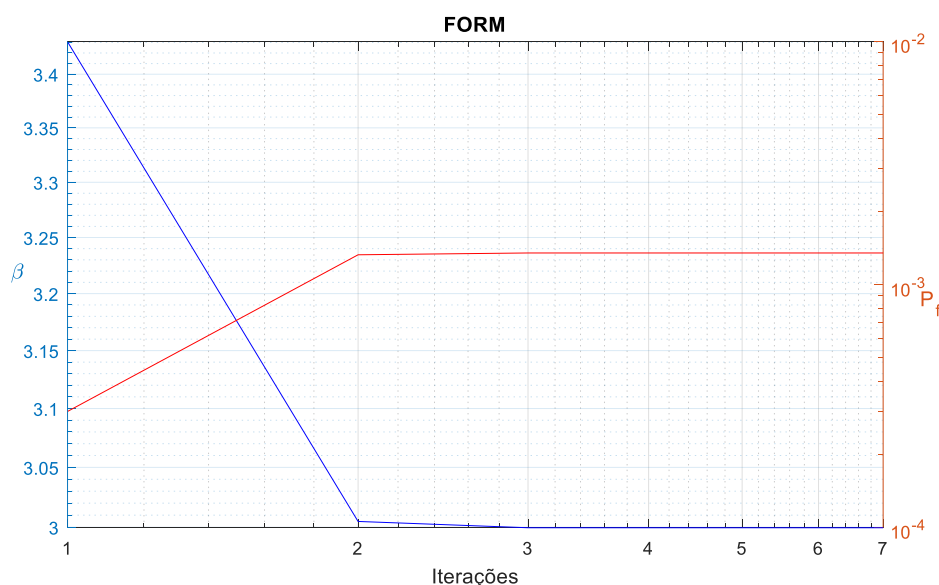


Figura 5.5 – Resultado para FORM do exemplo do domo treliçado.

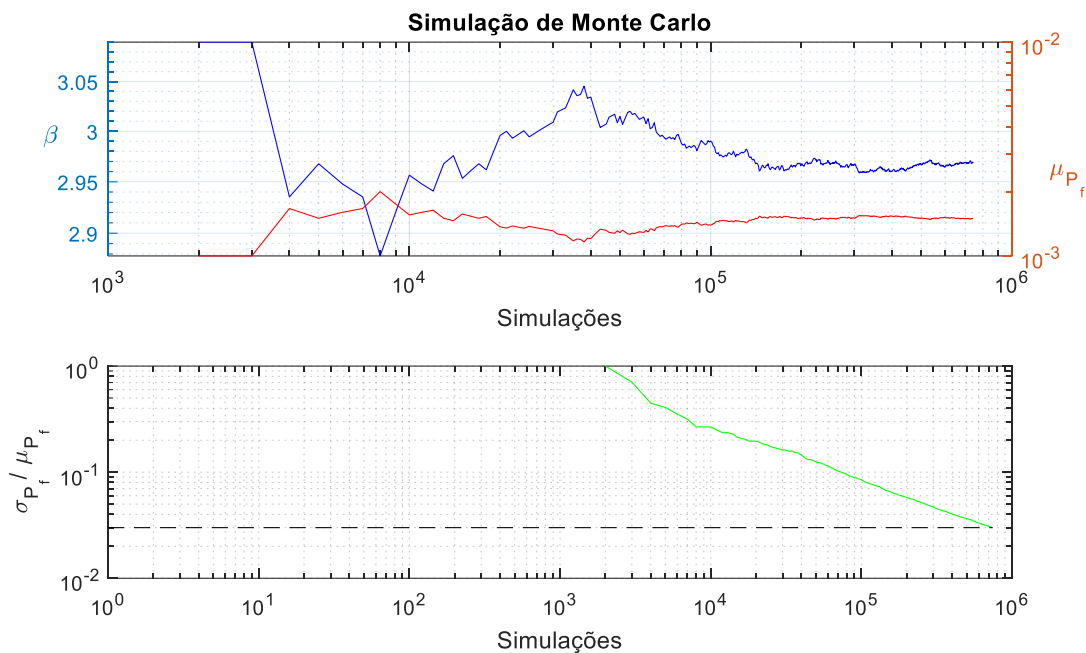


Figura 5.6 – Resultado para Simulação de Monte Carlo do exemplo do domo treliçado.

Tabela 5.5 – Resultados para o exemplo do domo treliçado espacial de 120 barras.

	FORM	Monte Carlo	Ho-Huu <i>et al.</i> [2016]
Iterações	7	743	-
$\beta$	2,9995	2,9686	3,000
$P_f$	$1,4 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,35 \times 10^{-3}$
C.V.	-	3%	-
Chamadas	84	$7,43 \times 10^5$	-
Tempo [s]	0,98	1276,09	-

Os resultados da análise de confiabilidade estrutural para o domo espacial treliçado, cujas áreas dos 7 grupos de elementos foram utilizadas como variáveis aleatórias de valor médio como aquelas encontradas pela otimização de projeto dos autores e com coeficientes de variação de 5%, se mostraram altamente satisfatórios e precisos. Pelo método FORM se atingiu uma semelhança imensa ao índice de confiabilidade meta,  $\beta = 3$ , do autor, enquanto pela Simulação de Monte Carlo a convergência se deu com diferenças de poucos centésimos.

Entretanto, um aumento no coeficiente de variação meta da Simulação de MC foi efetuado para 3%, uma vez que o custo computacional de processamento da análise se tornou muito elevado pelo fato da estrutura ser mais complexa e por sua função de estado limite ser definida em função de um certo deslocamento máximo em qualquer nó, em qualquer direção.

## 5.5 Treliça espacial de 244 barras – Torre de linha de transmissão de energia

Neste exemplo a confiabilidade de uma treliça espacial de 244 barras (torre de linha de transmissão de energia elétrica) é analisada frente à presença de incertezas nas áreas das seções transversais, cargas aplicadas e tensão limite de escoamento dos materiais. Este exemplo está baseado no trabalho de Faria [2014] onde foram utilizadas 6 ações (peso dos cabos e isoladores, vento x, vento y, vento 45° e ruptura dos cabos) na análise mais crítica. As tensões médias nas barras são mostradas na Figura A5 do Apêndice.

Na Figura 5.7 é representada a geometria e dimensões da estrutura que está sendo analisada. Neste trabalho adotou-se a tabela de perfis comerciais “L” ASTM-36 de cantoneiras (Tabela A2 do Anexo). Os elementos da estrutura foram divididos em 32 grupos de diferentes áreas de seção transversal para economizar tempo de processamento e para tornar o exemplo

fidedigno. Conforme mencionado, os grupos são: barras 01 à 04, 05 à 12, 13 à 24, 25 à 28, 29 à 36, 37 à 52, 53 à 60, 61 à 64, 65 à 88, 89 à 108, 109 à 110, 11 à 114, 115 à 122, 123 à 126, 127 à 134, 135 à 138, 139 à 146, 147 à 152, 153 à 156, 157 à 170, 171 à 174, 175 à 188, 189 à 201, 202 à 209, 210 à 213, 214 à 218, 219 à 222, 223 à 226, 227 à 228, 229 à 234, 235 à 239, 240 à 244. As suas respectivas áreas podem ser consultadas na Tabela A3 do Anexo.

Nos nós 17, 24 e 25 atuam forças verticais de valores  $P_1=9 \times 10^4$  N e  $P_2=P_3=4.5 \times 10^4$  N, afim de replicar o caso mais crítico verificado na otimização de Faria [2014]. Na Figura A6 do Apêndice são mostrados todos os outros carregamentos aplicados neste exemplo. A tensão de escoamento limite do material para o aço ASTM-A36 é 250 MPa. No total, foram então computadas 64 variáveis aleatórias (combinações de carregamentos, grupos de áreas e tensão de escoamento) com distribuição Normal e coeficiente de variação de 5%.

Na Figura 5.8 é mostrado o gráfico das iterações do método de 1ª ordem FORM para este exemplo. Na Figura 5.9 são mostrados os gráficos de simulações para o método de Monte Carlo e o comportamento do coeficiente de variação ao longo das simulações (critério de parada do método). O limite para a convergência da Simulação de Monte Carlo adotado foi de 3% no coeficiente de variação. Na Tabela 5.6 são resumidos os resultados para ambos os métodos neste caso analisado.

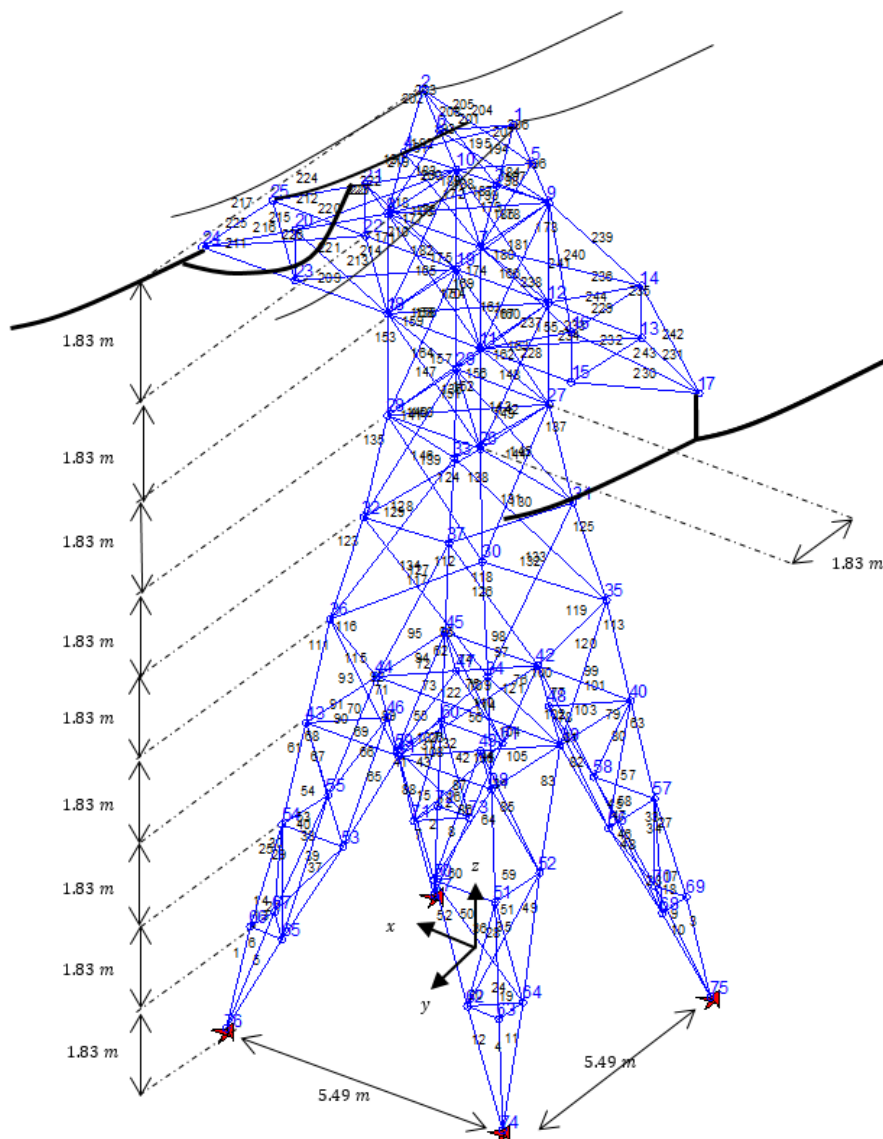


Figura 5.7 – Configuração estrutural da torre de linha de transmissão.

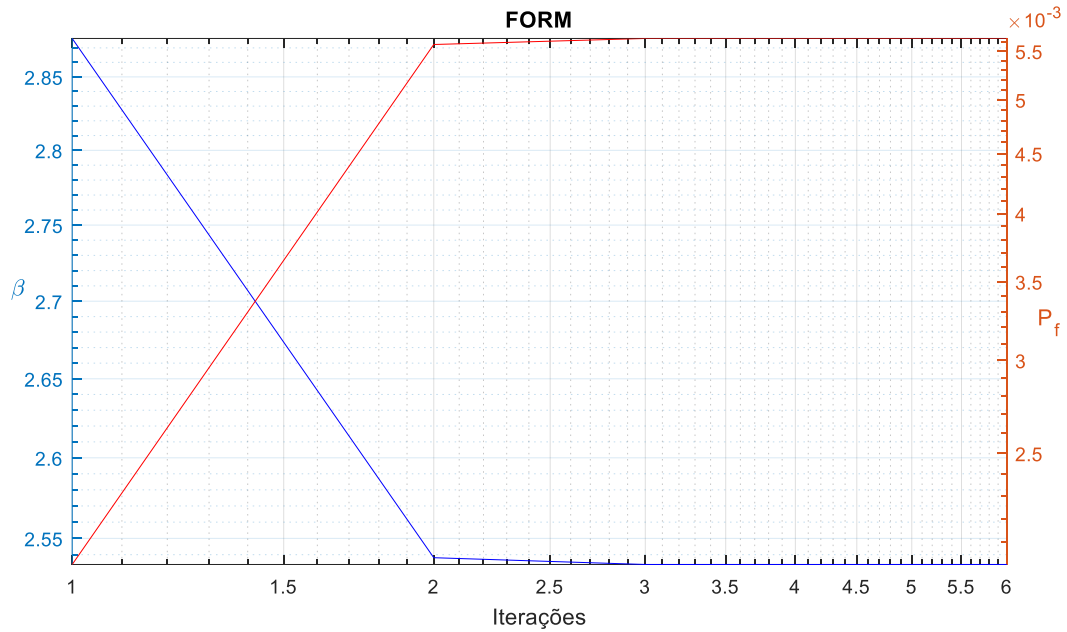


Figura 5.8 – Resultado para FORM do exemplo da torre de linha de transmissão.

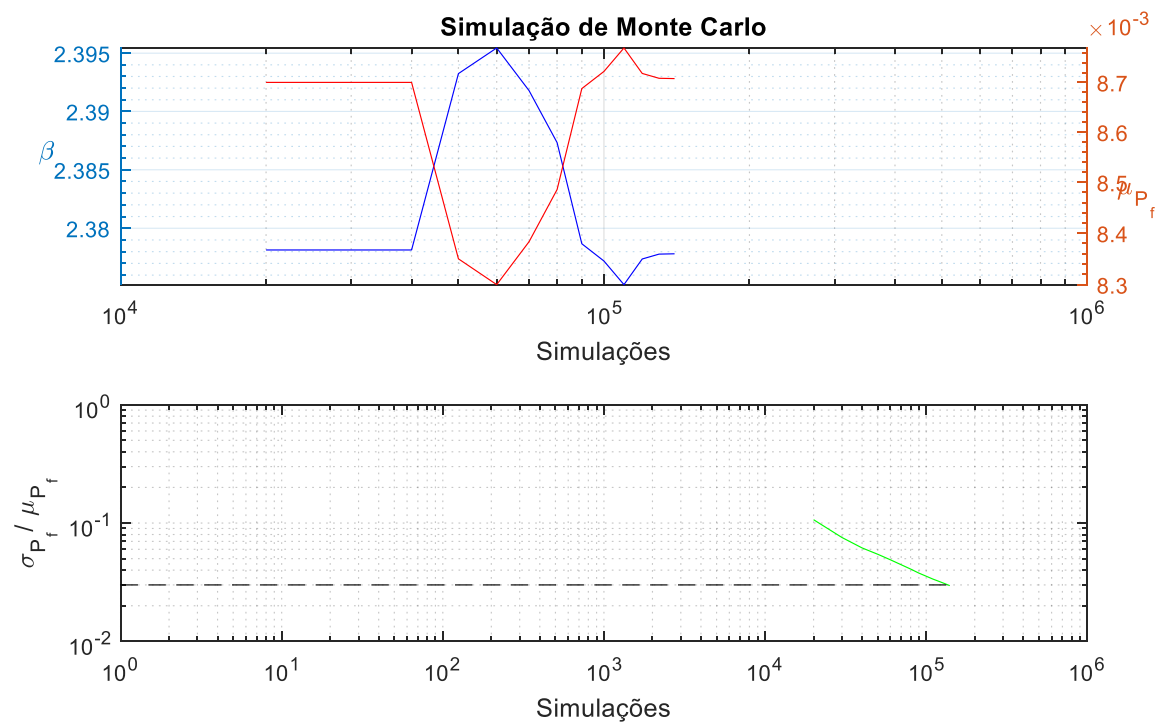


Figura 5.9 – Resultado para Simulação de Monte Carlo do exemplo da torre de linha de transmissão.

Tabela 5.6 – Resultados para o exemplo da torre de linha de transmissão de 244 barras.

	<b>FORM</b>	<b>Monte Carlo</b>
<b>Iterações</b>	6	14
$\beta$	2,5340	2,3778
$P_f$	$5,6 \times 10^{-3}$	$8,7 \times 10^{-3}$
<b>C.V.</b>	-	2,96%
<b>Chamadas</b>	390	$14,0 \times 10^4$
<b>Tempo [s]</b>	2,35	697,3

Assumindo o caso mais crítico de solicitações para a torre, se encontrou um índice de confiabilidade de 2,53 para o método FORM e 2,37 para Simulação de Monte Carlo, conforme a Tabela 5.6. A razoável semelhança entre os resultados nos passa a ideia de que o algoritmo foi bem sucedido na análise de confiabilidade por método FORM em comparação à Simulação MC (única e melhor referência neste caso), mesmo que normalmente métodos por gradiente tendam a ser menos precisos em casos de estruturas complexas com muitas variáveis aleatórias, que exigem um alto número de chamadas de função. Para a Simulação de Monte Carlo, o aumento do valor objetivo do coeficiente de variação para 3% foi efetuado tendo em vista que o alto custo computacional associado à análise de confiabilidade para um baixo CV não compensaria o tempo de processamento para um resultado comparativo satisfatoriamente similar.

## 6 CONCLUSÕES

Foi programado em MATLAB um algoritmo para a avaliação de confiabilidade de estruturas treliçadas com análise de elementos finitos através dos métodos de 1ª. Ordem (FORM) e de Simulação de Monte Carlo. O algoritmo desenvolvido, a fim de comparar e verificar a acurácia das soluções, foi aplicado com êxito em exemplos simples presentes na literatura (*benchmarks*). Além disso, como forma de testar o algoritmo em casos mais complexos envolvendo análise estrutural, implementou-se o algoritmo em problemas de avaliação de confiabilidade de estruturas treliçadas planas e tridimensionais.

Para o caso mais simples estudado, onde foi feita a análise de confiabilidade de um vaso esférico sob pressão interna cuja função de estado limite apresenta comportamento não-linear, se observou que o método por gradiente foi capaz de atingir resultados satisfatórios em comparação com a literatura, mas ainda apresentando uma leve diferença de precisão frente à Simulação de Monte Carlo, que pode ser considerada mais robusta e acurada. Isso comprova que os métodos de primeira ordem podem ter aplicação mais limitada dependendo da complexidade da função de estado limite do sistema.

Na aplicação da treliça plana, o processo de análise de ambos os métodos utilizados apresentou bom comportamento e resultados muito similares entre si e com os algoritmos e métodos empregados pelos autores citados, validando a eficácia do algoritmo de análise de confiabilidade para estruturas treliçadas simples com funções de estado limite lineares.

Na engenharia reversa do projeto do domo espacial, as áreas otimizadas foram assumidas como variáveis aleatórias com coeficiente de variação de 5% e então a restrição de confiabilidade estipulada pela literatura se tornou o objetivo alvo da análise deste trabalho. O sucesso da análise foi comprovado ao se verificar uma precisão em milésimos do resultado por método FORM em comparação ao índice de confiabilidade estipulado pelos autores na restrição da otimização. A Simulação de Monte Carlo diferiu do valor apenas em centésimos mas o alto tempo de processamento para realização da análise nos faz questionar o quanto vale o ganho de precisão de um resultado em relação ao seu custo computacional.

Por fim, ao aplicar-se o algoritmo na análise de uma torre de linha de transmissão, foi demonstrada a acurácia do mesmo. Este exemplo proposto utilizou 64 variáveis aleatórias entre seções transversais, carregamentos e solicitações, e tensão de escoamento, sendo de fato um desafio para o método de análise de confiabilidade por gradientes devido ao elevado número de chamadas à função de estado limite. Os resultados satisfatoriamente similares encontrados tanto pelo método FORM como pela Simulação de Monte Carlo para este caso reafirmam a eficácia do algoritmo implementado.

No geral, o método FORM se mostrou razoavelmente sofisticado em relação à Simulação de Monte Carlo devido à sua simplicidade e eficiência (alta acurácia e baixo custo computacional).

Para futuros trabalhos, seria de grande valia refinar ainda mais os algoritmos de análise de confiabilidade por FORM e Simulação de Monte Carlo, tanto no âmbito dos critérios de parada e tolerâncias para convergência do algoritmo como acréscimos de outros tipos de distribuição para as variáveis aleatórias. Além disso, um estudo com melhorias ou alternativas para o mecanismo de cálculo das derivadas do método FORM podem trazer resultados ainda

melhores do que os já obtidos. Por último, outra sugestão relevante seria o de implementar esses algoritmos de análise de confiabilidade em rotinas de otimização de projeto baseada em confiabilidade ou otimização de risco de estruturas treliçadas, podendo minimizar o custo estimado total associado às falhas do sistema.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agarwal, P., “**Structural Reliability of Offshore Wind Turbines**”, Ph.D. Thesis, Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin, US, 2008.
- AISC, “**American institute of steel construction. Manual of steel construction allowable stress design**”. Chicago: American I; 1989.
- Ang, H-S., Tang, W. H., “**Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**”, 2<sup>nd</sup> Edition, Wiley, 420p. 2006.
- De, R. S., Cornell, C. A. “**Factors in structural system reliability**”, Lecture notes in Engineering, Ed. Brebbia, C. A. and Orszag, S. A. Proceedings of the 4<sup>th</sup> IFIP, Germany, September 11-13, 1991.
- Der Kiureghian, A. “**First- and second-order reliability methods**”, Chapter 14, Engineering design reliability handbook, E. Nikolaidis, et al., eds., CRC Press, Boca Raton, 2005.
- Faria, L. S. “**Metaheurística da Evolução Diferencial para a Otimização Estrutural no Projeto de Torres de Linhas de Transmissão de Energia Elétrica**”. 15p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.
- Frangopol, D. M. “**Bridge loading. Reliability and redundancy: concepts and applications**”, Lecture notes in Engineering, Ed. Brebbia, C. A. and Orszag, S. A. Proceedings of the 4<sup>th</sup> IFIP, Germany, September 11-13, 1991.
- Gomes, H. M. “**Análise estocástica e confiabilidade de estruturas de concreto armado: Elementos finitos, Monte Carlo e Métodos de 1a. Ordem**”, 1a. Edição, Novas Edições Acadêmicas, ISBN: 978-3-330-75349-5, 2016.
- Guo, Q., Jeffers, A. E. “**Finite-Element Reliability Analysis of Structures Subjected to Fire**”, Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineers, 2015.
- Haldar, A., Mahadevan, S., “**Reliability Assessment using stochastic Finite Element Analysis**”, John Wiley & Sons, Inc., 328p. 2000.
- Hasofer, A. M., Lind, N. C., “**Exact and Invariant Second - Moment Code Format**”, Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE), Vol. 100, No EM1, pp 111 -121, February, 1974.
- Ho-Huu, V., Nguyen-Thoi, T., Le-Anh, L. Nguyen-Trang, T., “**An effective reliability-based improved constrained differential evolution for reliability-based design optimization of truss structures**”, Advances in Engineering Software 92 (2016) 48–56.
- ISO 2394, “**General Principles on reliability for structures**”, International Organization for Standardization, 4th. Edition, 111p. 2015.
- Lemaire, M., “**Structural Reliability**”, John Wiley & Sons, Inc., 500p, 2009.
- Llado, M. G., “**Structural reliability analysis and robust design of offshore wind turbine support structures**”, Ph.D. Thesis, NTNU- Trondheim, Norwegian University of Science and Technology, 2015.

Poletto, V. T., Gomes, H. M. "**Análise de risco estrutural através de otimizações de custo e de projeto baseado em confiabilidade**". In: XXVIII SIC, 12-16 de setembro de 2016.

Racwitz, R., Fiessler, B., "**Structural reliability under combined random load Sequences**", Computers & Structures, Vol. 9, pp. 489-494, 1978.

Zio, E. "**The Monte Carlo Simulation method for system reliability and risk analysis**", Springer series in reliability engineering, Springer, London, 2013.





Tabela A2 – Seções transversais (Perfil da Tabela) calculadas pelo DE em Faria [2014].

Seção Transversal	DE	Seção Transversal	DE
A <sub>1</sub>	34	A <sub>17</sub>	25
A <sub>2</sub>	21	A <sub>18</sub>	14
A <sub>3</sub>	9	A <sub>19</sub>	31
A <sub>4</sub>	26	A <sub>20</sub>	23
A <sub>5</sub>	18	A <sub>21</sub>	16
A <sub>6</sub>	23	A <sub>22</sub>	23
A <sub>7</sub>	6	A <sub>23</sub>	23
A <sub>8</sub>	49	A <sub>24</sub>	24
A <sub>9</sub>	19	A <sub>25</sub>	32
A <sub>10</sub>	14	A <sub>26</sub>	25
A <sub>11</sub>	58	A <sub>27</sub>	39
A <sub>12</sub>	28	A <sub>28</sub>	28
A <sub>13</sub>	25	A <sub>29</sub>	16
A <sub>14</sub>	29	A <sub>30</sub>	17
A <sub>15</sub>	23	A <sub>31</sub>	22
A <sub>16</sub>	18	A <sub>32</sub>	25

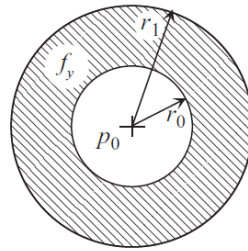


Figura A1 – Corte de vaso esférico com pressão interna, propriedades e dimensões como variáveis aleatórias.

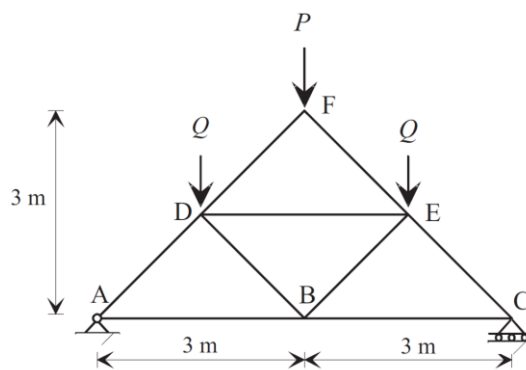


Figura A2 – Trelça plana com carregamentos, propriedades e seções transversais como variáveis aleatórias.

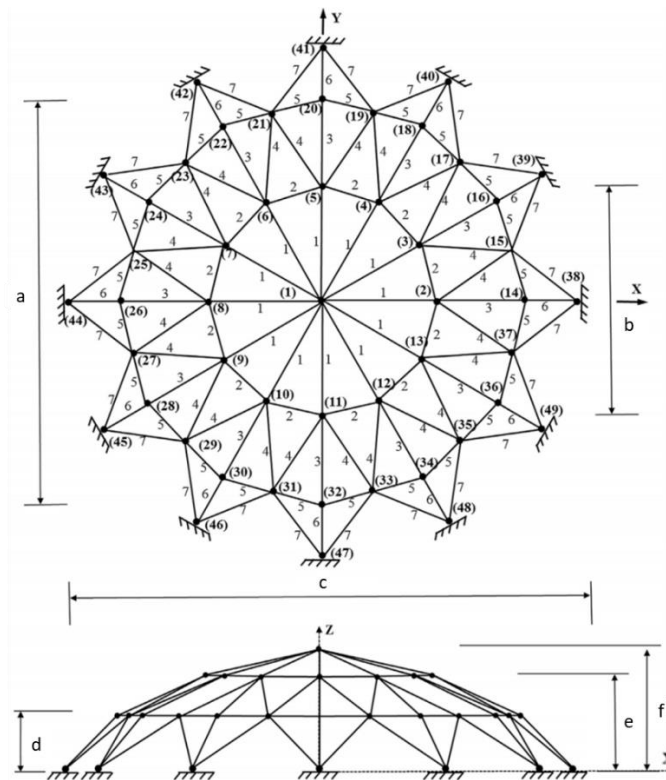


Figura A3 – Estrutura do domo treliçado espacial de 120 barras.  
(onde,  $a = 25,0$  m,  $b = 13,88$  m,  $c = 31,78$  m,  $d = 3,0$  m,  $e = 5,0$  m e  $f = 7,0$  m).

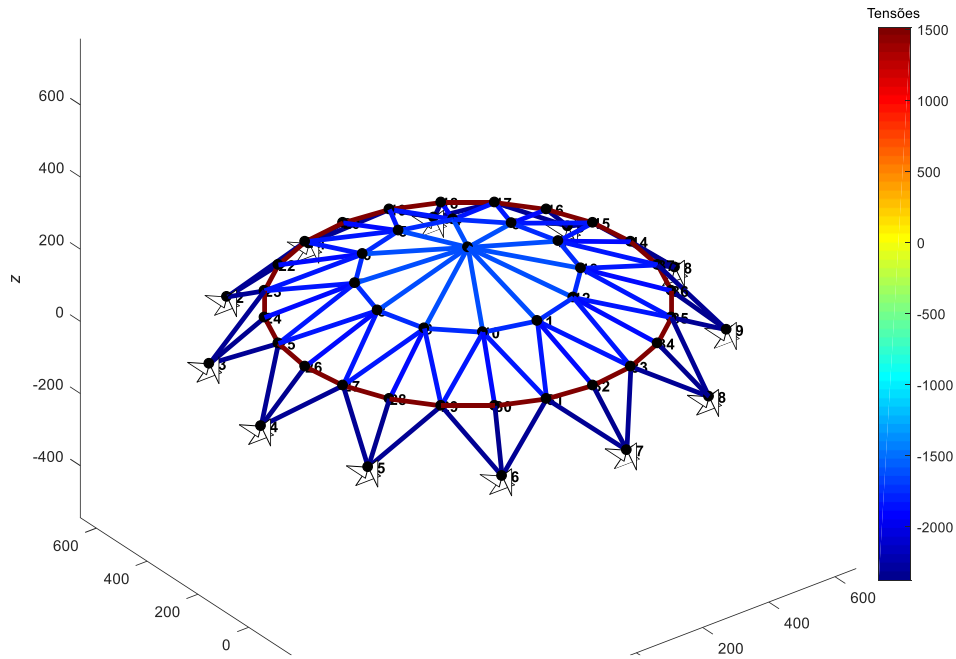


Figura A4 – Valores nominais das tensões nas barras (Pa) para exemplo do Domo treliçado espacial de 120 barras.

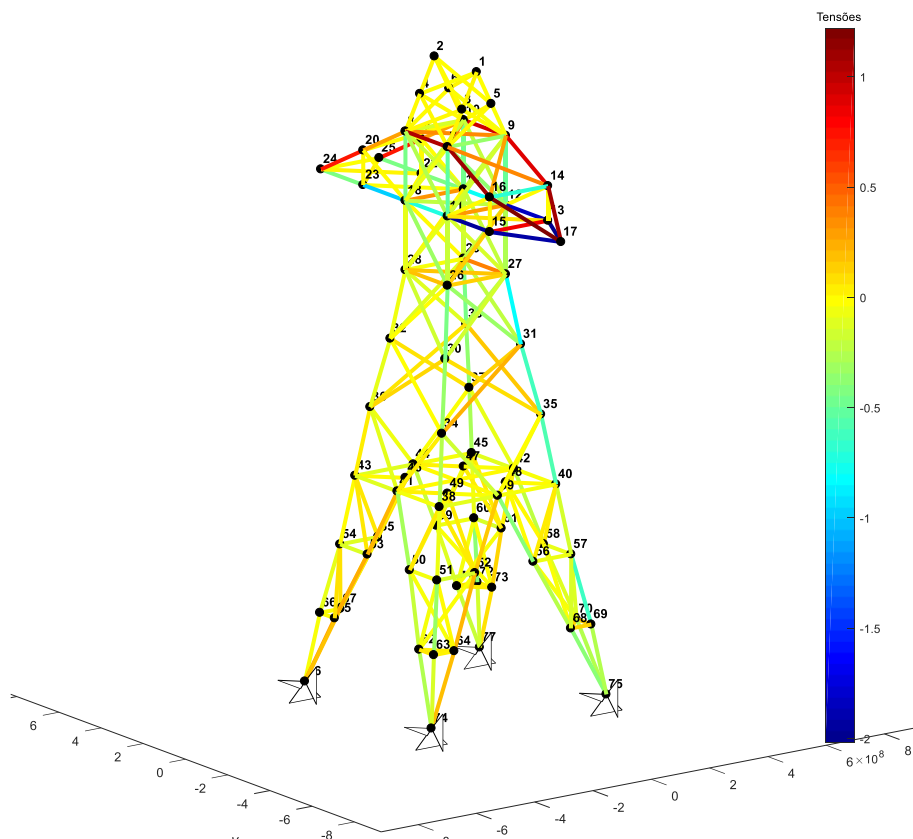


Figura A5 – Valores nominais das tensões nas barras (Pa) para exemplo da torre de linha de transmissão de 244 barras.

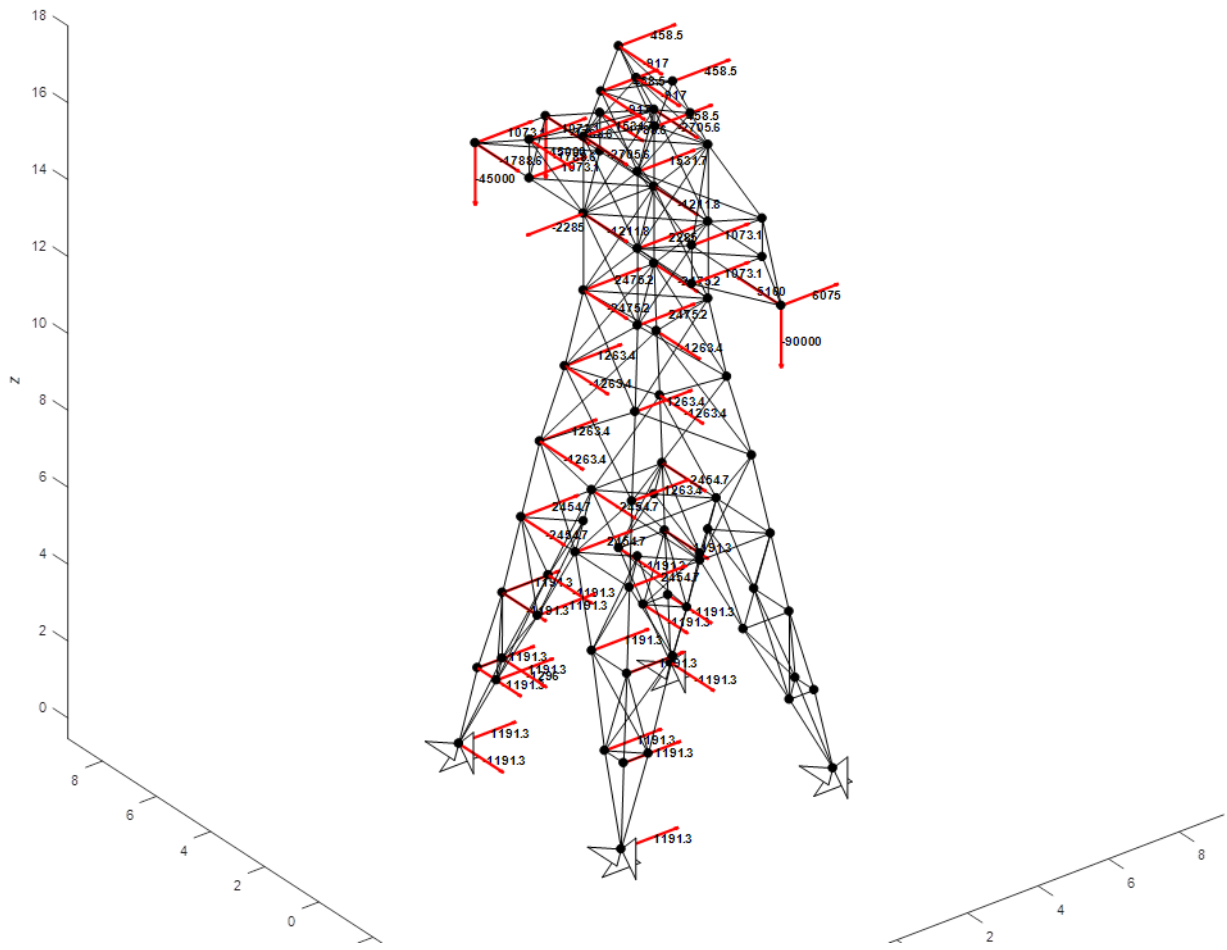


Figura A6 – Carregamentos (N) utilizados para o problema da torre de linha de transmissão de 244 barras.