UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARIANA BRAUN AGUIAR

INTRODUZINDO A NOÇÃO DE PROPORCIONALIDADE VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE ACERCA DE ESQUEMAS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

PORTO ALEGRE
2017

Mariana Braun Aguiar

INTRODUZINDO A NOÇÃO DE PROPORCIONALIDADE VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE ACERCA DE ESQUEMAS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada junto ao Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

PORTO ALEGRE

2017

Mariana Braun Aguiar

INTRODUZINDO A NOÇÃO DE PROPORCIONALIDADE VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE ACERCA DE ESQUEMAS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada junto ao Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Aprovado em 10/07/2017

BANCA EXAMINADORA

____

Profª Dra. Débora da Silva Soares
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

____

Profª Dra. Fernanda Wanderer
Faculdade de Educação - UFRGS

____

Profª Dra. Maria Lucia Faria Moro
Universidade Federal do Paraná - UFPR

____

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Orientador – Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Ao meu amado Rafael.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu companheiro Rafael, por caminhar ao meu lado durante todo o caminho percorrido para chegar até aqui, preenchendo meu coração com muito amor e me fazendo seguir sempre com perseverança mesmo em momentos difíceis.

Agradeço aos meus pais, Alexandre e Ana Paula, pelo incentivo, pela criação impecável que me proporcionaram e que com certeza foi a grande responsável por ter podido chegar até aqui.

Agradeço às minhas irmãs, Gabriela e Ana Vitória, pela amizade verdadeira e pelos momentos de amor e aconchego.

Agradeço ao meu orientador, professor Marcus Basso, pela parceria que estabelecemos desde a graduação e que permaneceu durante o curso de Mestrado, tendo resultado na construção e execução desta pesquisa e em uma relação de amizade a qual atribuo muita importância em minha trajetória.

Agradeço aos demais professores que contribuíram para que chegasse até aqui, desde aqueles que me acompanharam na Educação Básica até aqueles que me ensinara tanto neste curso que concluo através desta pesquisa.

Finalmente, agradeço a todos aqueles que são ou já foram meus alunos, em especial àqueles que compuseram a unidade de pesquisa desta Dissertação, por me incentivarem a ser melhor a cada dia como pessoa e como professora, profissão que tanto me realiza.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo explorar os diferentes esquemas utilizados por estudantes do sétimo ano ao serem confrontados com problemas envolvendo razões e proporções, a fim de identificar e analisar quais são os conceitos relacionados à proporcionalidade mobilizados por alunos que ainda não estudaram este conteúdo em ambiente escolar. Para tanto, foi realizada uma coleta de dados em três turmas de sétimo ano de uma escola de ensino fundamental da rede municipal de Canoas – RS, na qual foi proposto, durante oito horas-aula, um total de quatorze problemas matemáticos envolvendo proporcionalidade, que puderam ser resolvidos em grupos de dois ou três alunos. O conjunto de dados coletados foi composto pelas resoluções escritas dos alunos e um diário de campo contendo anotações sobre a conduta (falas, ações) dos estudantes durante o trabalho com os problemas matemáticos. A análise dos dados foi baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, e permitiu identificar diversos esquemas que utilizaram estruturas aditivas para resolver problemas de proporcionalidade e que, ainda sim, se mostraram suficientes para levar os estudantes à resposta correta do problema. Também foi possível observar esquemas do campo conceitual multiplicativo, contendo indícios significativos da presença da proporcionalidade como um conceito-em-ação. Desta forma, a pesquisa aponta formas de explorar problemas de proporcionalidade diferentes daquelas que estabelecem relação direta deste conteúdo com a linguagem fracionária, como podemos observar em livros didáticos e documentos curriculares norteadores atuais.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Resolução de Problemas; Campos Conceituais.

ABSTRACT

The present research aims at exploring the different schemata mobilized by seventh year students when they are confronted with problems involving reasons and proportions to identify and analyze which are the mobilized concepts related to proportionality in students who have not studied this content in the school environment yet. For that, a data collection was carried out in three seventh year classes of a primary school of the municipal network of Canoas - RS, in which a total of fourteen mathematical problems involving proportionality were proposed during eight classroom hours, be solved in groups of two or three students. The set of data collected was composed of student's resolutions and a field diary containing notes about the behavior and the student's speeches during the work with the mathematical problems. Data analysis was based on Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields and allowed the identification of several schemata that used additive structures to solve proportionality problems and which, however, were sufficient to lead students to the correct answer to the problem. It was also possible to observe schemata of the multiplicative conceptual field, containing significant evidence of the presence of proportionality as a concept-in-action. In this way, the research points out ways of exploring proportionality problems different from those that establish direct relation of this content with the fractional language, as we can observe in didactic books and current guiding curricular documents.

Keywords: Proportionality; Problem Solving; Conceptual Fields.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

As tendências em Educação Matemática vêm, cada vez mais, abordando metodologias construtivistas que dão ênfase à construção de conceitos matemáticos por parte do estudante, propondo situações e problemas que produzam sentido às aprendizagens relacionadas ao conteúdo de matemática. Uma destas tendências é a metodologia de Resolução de Problemas, que busca lançar situações problema para discussão e resolução por parte dos estudantes, a partir da elaboração de estratégias e mobilização de conceitos matemáticos.

Em minha trajetória ligada à docência, iniciada em 2011, ano em que ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e comecei a atuar em uma escola com aulas de matemática para turmas de Ensino Integral, sempre procurei propor momentos de desafios matemáticos em sala de aula. Utilizava esta estratégia para que os alunos se sentissem instigados e motivados para resolver determinadas situações e desenvolver seu raciocínio e capacidade de resolução de problemas envolvendo matemática. Em várias destas situações, observei que conceitos matemáticos ainda não estudados acabavam sendo deduzidos e utilizados pelos alunos de forma espontânea, isto é, sem uma intervenção específica da professora no que se refere ao conceito ou noção matemática construída e utilizada na resolução, motivados pelo problema que lhes foi proposto.

Nesta pesquisa, a metodologia de Resolução de Problemas foi utilizada na tentativa de propor uma forma de introdução ao conteúdo de Razões e Proporções sem que se apresente a relação destes conteúdos com os números fracionários previamente. Desta forma, esperava-se detectar e analisar noções e conceitos matemáticos que os alunos mobilizam para resolver problemas relacionados à razões e proporções. Como expectativa, esperava-se que os alunos resolvessem os problemas sem necessariamente recorrer à linguagem fracionária, o que proporcionaria a construção do conceito de forma espontânea por parte dos estudantes.

1.1 JUSTIFICATIVA

O ensino de frações é um conteúdo que possui espaço reservado no currículo de matemática do Ensino Fundamental. Nesta etapa da Educação Básica, observa-se que o conteúdo de frações permeia a base curricular de forma a aprofundar o estudo do 5º ao 7º ano e decrescendo em ênfase nos anos subsequentes. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2015), constam as seguintes determinações acerca do ensino de frações:

Quadro 1: o estudo das frações no Ensino Fundamental segundo a BNCC.

ANO DO E.F.	O QUE SE ESPERA QUE SEJA ESTUDADO PELO ALUNO ACERCA DO CONTEÚDO DE FRAÇÕES
5º	• Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando a sua representação simbólica às ideias de parte de um todo e de divisão, e reconhecer frações equivalentes. • Comparar e ordenar números racionais positivos (representação fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
6º	• Comparar e ordenar números naturais e racionais positivos (representação fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. • Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos em suas diferentes representações (fracionárias, decimais, percentuais), envolvendo as operações de adição e subtração, de multiplicação e divisão com multiplicador e divisor naturais, inclusive com o uso de cálculo mental, de estimativas e da calculadora.
7º	• Compreender fração associada às ideias de partes de inteiros, quociente, razão e operador, identificando registros iguais ou equivalentes para significados diferentes; • Comparar e ordenar números inteiros e racionais positivos e negativos (representação fracionária, decimal, em forma de potências com expoente inteiro), relacionando a pontos na reta numérica; • Resolver e elaborar problemas, envolvendo adição e subtração de frações com denominadores diferentes, por meio da equivalência de frações.
8º	• Resolver e elaborar problemas, envolvendo operações com frações.
9º	- não constam informações sobre o tópico

Fonte: síntese realizada pela autora.

A partir do quadro acima, podemos observar que a Base Curricular Comum de Matemática indica, no 7º ano do Ensino Fundamental, que o aluno deve "compreender a fração associada às ideias de partes de inteiros, quociente, razão e operador, identificando registros iguais ou equivalentes para significados diferentes".

A partir de minhas vivências escolares, pude perceber, especialmente no que se refere à relação entre os conteúdos de frações e razões, que algumas destas relações não "soam" de forma espontânea ao aluno. De forma geral, não só o estudante adolescente, mas adultos a até mesmo professores, evitam o uso da fração para referir-se a uma quantidade, já que a quantidade não é compreendida de imediato como quando utilizamos conjuntos discretos. Sendo assim, penso que, se houver outra forma de trabalho com o conteúdo de razões e proporções, que não seja a relação direta com os números fracionários, esta forma teria potencial para desenvolver as habilidades necessárias para a compreensão destes conteúdos de forma significativa pelo estudante.

Desta forma, surge a ideia de proporcionar aos estudantes de 7º ano um momento de trabalho com resoluções de problemas que envolvam os conteúdos de razões e proporções, sem apresentar este conteúdo previamente, a fim de analisar que conceitos e esquemas os estudantes mobilizam para resolver estes problemas.

O objetivo foi o de analisar, de forma qualitativa e à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, que caminhos os estudantes elaboram para resolver cada um dos problemas propostos, levando em consideração que os alunos envolvidos ainda não haviam estudado o conteúdo de Razões e Proporções de forma específica. Algumas testagens iniciais com um grupo menor de alunos me levaram a crer que, no momento em que os alunos não são apresentados previamente ao conceito de razão como uma fração e, consequentemente, ao conteúdo de proporção como uma igualdade entre frações, eles mobilizaram outros conceitos de forma espontânea para resolver os problemas, indicando que o entendimento de uma razão como sendo uma fração se mostrou desnecessário para a aprendizagem do estudante. Desta forma, o desenvolvimento desta pesquisa se faz necessário para confirmar ou refutar os resultados encontrados no estudo preliminar. Consequentemente, o objetivo deste estudo foi o de apontar uma forma alternativa de trabalho com o conteúdo de razões e proporções, sem necessariamente relacionar tais noções às frações, como consta em livros didáticos e documentos curriculares norteadores atualmente.

1.2 QUESTÃO DE PESQUISA

A construção da questão a ser respondida nesta pesquisa constituiu um processo que envolveu hipóteses e verificações preliminares, o que me auxiliou a esclarecer o que, de fato, seria investigado em meu trabalho. Em um primeiro momento, no qual os objetivos desta pesquisa ainda estavam sendo formulados, minha hipótese acerca do ensino do conteúdo de razões e proporções era a de que os estudantes, quando expostos a problemas envolvendo o conteúdo de razões e proporções, usariam diretamente as frações para resolvê-los, ou seja, a exposição da relação de razões e proporções com o conteúdo de frações poderia ser omitida pelo professor, pois a mesma surgiria espontaneamente para os estudantes mediante a metodologia de Resolução de Problemas.

Considerando esta hipótese inicial, apliquei, a um grupo de quatro alunos, três problemas que envolviam raciocínios de proporcionalidade, para observar que resultados apareceriam e, assim, dar continuidade à pesquisa, pois estava encontrando dificuldades em elaborar um conjunto de problemas envolvendo proporcionalidade dos quais pudessem emergir conceitos relacionados às frações.

O que observei neste estudo preliminar é que a relação deste conteúdo com a fração não se fez necessária em nenhuma das resoluções dos alunos. As estratégias de resolução dos problemas foram variadas e observou-se a presença de raciocínios aditivos e multiplicativos sem mencionar a fração de forma explícita.

Para exemplificar os raciocínios observados neste estudo preliminar, descreverei a seguir um dos problemas propostos e a resolução apresentada por um dos alunos envolvidos. A situação-problema era a seguinte: “Uma torre tem 28 m de altura. Sob um determinado ângulo do sol, cada 4 metros de altura da torre projetam 3 metros de sombra no chão. Assim sendo, a medida do comprimento da sombra da torre será de quantos metros?” Para resolvê-la, o estudante apresentou um raciocínio aditivo simples, descrevendo que, se a torre tivesse 4 metros se altura, seriam projetados 3 metros de sombra; se tivesse 8 metros, seriam projetados 6 metros de sombra, e assim sucessivamente, até obter a resposta do problema ao mencionar que uma torre de 28 metros de altura deveria projetar 21 metros de sombra.

Neste momento, me deparei com conflitos em relação à questão que buscava responder em meu trabalho, pois observei que os resultados poderiam ser contrários às minhas expectativas. Em uma pesquisa, o fato de as expectativas do pesquisador não se aproximarem dos resultados obtidos não constitui um aspecto que relativiza as conclusões obtidas, porém meu objetivo seria, a partir de então, explorar os novos rumos que as primeiras experiências práticas poderiam proporcionar ao trabalho.

Com o resultado obtido nas primeiras testagens, o trabalho passou por uma reformulação da questão de pesquisa, momento em que decidi debruçar-me a investigar justamente as variadas estratégias que poderia observar quando propusesse problemas envolvendo proporcionalidade na introdução deste conteúdo.

Sendo assim, neste trabalho, busquei investigar, através de um Estudo de Caso, a seguinte questão: quais são e como são mobilizados os conceitos relacionados a razões e proporções mediante a metodologia de Resolução de problemas?

Ainda, para auxílio no processo de investigação, foram formuladas mais duas questões adicionais: “A metodologia Resolução de Problemas contribui para a compreensão dos conceitos relacionados a razões e proporções?” e “É necessário, para o estudo do conteúdo de razões e proporções, que o aluno compreenda a razão como uma fração e a proporção como uma igualdade entre frações?”

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é redigido buscando retratar detalhadamente toda a experiência vivida por mim, até que se chegasse neste produto final. Para isso, este texto é organizado em mais cinco capítulos, além do capítulo de introdução.

No Capítulo 2, busca-se situar o leitor na literatura que embasou a construção da proposta e as análises dos dados coletados para este trabalho. Portanto, haverá um aprofundamento acerca de Resolução de Problemas, a metodologia escolhida para o trabalho com os alunos, a qual será utilizada segundo a teoria de Zuffi e Onuchic (2007), e questões relacionadas ao Ensino de Matemática e processos cognitivos, as quais terão como principal representante a obra de Vergnaud (1993), envolvendo a Teoria de Campos Conceituais. Além disso, serão discutidas outras Dissertações e Teses com tema relacionado a esta pesquisa, apontando aproximações e distanciamentos identificados.

No capítulo 3, serão descritas as técnicas e procedimentos desenvolvidos neste trabalho. Desta forma, são discutidas ideias acerca de Estudo de Caso, que representa a metodologia presente na pesquisa e será baseada na obra de Yin

(2005). Além disso, também é apresentado o planejamento das atividades que foram desenvolvidas com os estudantes e que constituíram o conjunto de dados a ser analisado.

No capítulo 4, é realizada a descrição e análise dos dados coletados, relacionando a atividade prática desenvolvida com a teoria descrita no Capítulo 2.

No Capítulo 5, são descritas as considerações finais acerca de minha experiência vivida como docente e pesquisadora.

Por fim, nos Apêndices do trabalho, constam o modelo de termo de consentimento informado dos estudantes envolvidos na pesquisa e o termo de consentimento informado da escola na qual foi realizada a coleta de dados, bem como o produto didático gerado a partir da atividade prática realizada.

2. REVISÃO TEÓRICA

O presente capítulo irá apresentar a refletir sobre os aspectos teóricos que comporão este trabalho. Sendo assim, o capítulo será dividido em seções, as quais tratarão, de forma aprofundada, a metodologia de trabalho utilizada com os estudantes, a Resolução de problemas, bem como a teoria que será utilizada na análise dos dados coletados, os Campos Conceituais. Além disso, serão discutidos trabalhos acadêmicos relacionados ao tema central desta dissertação, de forma a destacar aproximações e principais diferenças observadas entre esta pesquisa e as demais.

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em uma breve retomada histórica referente ao tema Resolução de Problemas, é importante ressaltar que essa tendência em Educação Matemática teve início em 1944, com obras do autor George Polya, as quais continham contribuições acerca do processo de Resolução de Problemas e as estratégias envolvidas, sem voltar-se especificamente ao âmbito da Educação Matemática.

Com o passar do tempo, a discussão voltou-se para a Resolução de Problemas como um método de ensino e de aprendizagem, levando em consideração que o processo de Resolução de Problemas, a elaboração de estratégias e investigação poderiam constituir uma forma de desencadear a construção de conceitos matemáticos por parte de estudantes. A partir de 1990, então, a Resolução de Problemas passa a ser um dos temas mais discutidos pelos teóricos em Educação Matemática. (Zuffi e Onuchic, 2007).

> [...] os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo. (ONUCHIC, ALLEVATTO, 2011, p.79 e 80)

Neste trabalho, no entanto, é importante ressaltar que a escolha pelo uso de Resolução de Problemas deu-se pelo potencial que esta metodologia apresenta em atribuir autonomia ao estudante, no sentido de que ele deve expressar e manipular conceitos matemáticos que ainda não foram trabalhados de forma explícita pelo professor. Desta forma, é possível identificar que outros conceitos e processos matemáticos anteriores o estudante mobiliza para resolver problemas envolvendo proporção, o que constitui o principal objetivo desta pesquisa.

No que se refere às concepções consideradas para o desenvolvimento desta pesquisa, entende-se por problema, de forma geral, “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver” (Onuchic e Allevato, 2011, p.81). Ainda, Onuchic e Allevato (2011) ressaltam estes problemas devem ser apresentados aos estudantes antes do estudo dos conceitos matemáticos envolvidos, com o objetivo de que os alunos sintam a necessidade de mobilizar novas ideias matemáticas para a resolução dos problemas, o que também vai ao encontro do objetivo principal desta pesquisa.

Na implementação da metodologia de Resolução de Problemas, Onuchic destaca etapas importantes para potencializar a criação de um contexto que favoreça a troca de ideias e a construção de conceitos matemáticos por parte dos estudantes: formar grupos e entregar um problema aos grupos; observar e incentivar os alunos durante suas discussões e realização de processos de resolução; registrar os resultados observados no grande grupo na lousa; realizar uma plenária para discussão entre o grande grupo; analisar os resultados e buscar um consenso dentre os estudantes e, por fim, formalizar o conteúdo. (ONUCHIC, 1999)

No entanto, nesta pesquisa, cujo objetivo foi analisar os esquemas utilizados pelos estudantes para resolver os problemas propostos, optou-se por não realizar a formalização do conteúdo. A prática desenvolvida bastou-se na etapa da busca de um consenso por parte dos estudantes envolvidos, já que o foco da análise não será dado à metodologia adotada e suas reverberações, e sim nos esquemas mobilizados durante a resolução de cada problema.

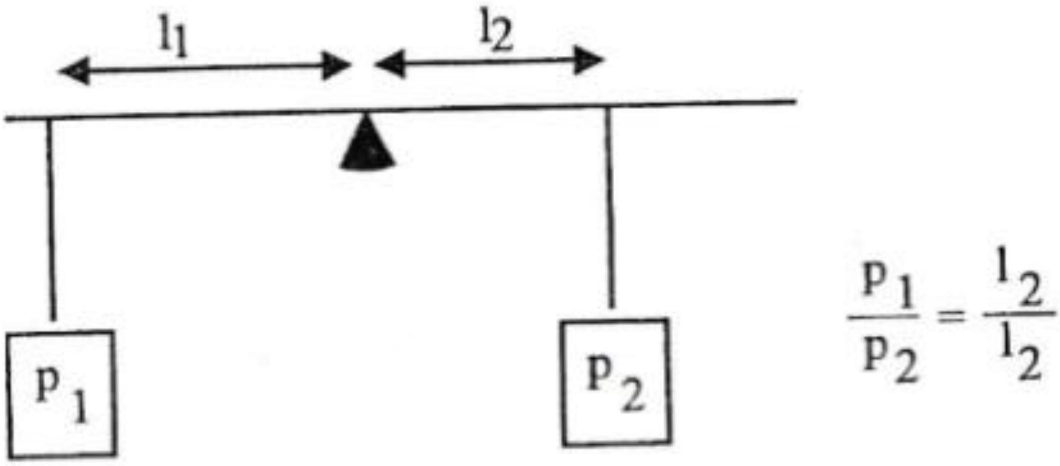
2.2 A AQUISIÇÃO DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE

Muitos pesquisadores dedicaram-se ao estudo da aquisição da ideia de proporcionalidade pela criança. Inhelder e Piaget (1955) foram pioneiros nesta área de estudo, descrevendo a aquisição do conceito de proporcionalidade como um processo composto por duas fases: primeiramente, a compreensão lógica da proporcionalidade e, depois, pelo desenvolvimento da capacidade de calcular seus aspectos métricos. Os autores ressaltavam que a criança, a partir dos seis anos de idade, vivia um processo contínuo de aumento de suas noções de proporcionalidade, avançando em níveis denominados estádios, atingindo a noção de proporcionalidade de forma completa somente aos doze anos ou mais.

Desta forma, Inhelder e Piaget (1955) utilizavam-se dos resultados de várias situações experimentais para descrever os chamados estádios de compreensão e, a partir destes resultados, afirmavam que a ideia de proporção propriamente dita se faria totalmente presente somente quando estruturada pelas operações formais, momento em que são possíveis as generalizações e questões similares.

Um exemplo dos problemas utilizados por Piaget para determinar os estádios de compreensão de proporcionalidade é o de equilíbrio de uma balança, conforme a imagem abaixo.

Figura 1: A Proporcionalidade no equilíbrio de uma balança



Fonte: Piaget et al (1955)

Piaget et al (1955) descreveu seis diferentes estádios definidos na aplicação deste problema à crianças de diferentes faixas etárias, os quais estão descritos no quadro a seguir.

Quadro 2: Progressão dos estádios no equilíbrio da balança segundo Piaget et al., 1951.

Estádio	Idade	Descrição do Estádio
IA	3 a 5 anos	A criança não assimila os dados do problema, possuindo apenas noções intuitivas de interação com o problema.
IB	5-6 até 7-8 anos	A criança identifica que o peso em cada lado da balança, bem como distância do peso ao centro da balança influenciam no seu equilíbrio.
IIA	7-8 até 9-10 anos	A criança é capaz de alterar o equilíbrio da balança

		fazendo aproximações, mas ainda não há coordenação absoluta dos efeitos da modificação dos pesos e das distâncias ao centro da balança.
IIB	9-10 até 11-12 anos	O equilíbrio passa a ser compreendido pela criança, de forma que quanto mais peso ela possui em um lado da balança, menos ela o afasta do centro da balança.
IIIA	12 a 13 anos	A criança compreende a lei do equilíbrio de que um peso determinado pode compensar uma distância de forma multiplicativa.
IIIB	13 a 14 anos	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{D_2}{D_1}$. A criança generaliza a lei do equilíbrio e resolve casos mais complexos.

Fonte: síntese elaborada pela autora.

A partir de 1970, repercutem as primeiras contestações à teoria dos estádios de Piaget, as quais questionam a ideia de um processo contínuo nos moldes apresentados, destacando estudos que mostravam sucesso precoce e insucesso tardio, ou seja, crianças de oito a dez anos de idade atingindo um nível de compreensão descrita para crianças de onze anos, bem como crianças de quinze anos que não apresentavam domínio esperado conforme o estádio em que se encontravam. As contestações surgiram principalmente no sentido de questionar a complexidade dos problemas que eram propostos para determinação dos estádios.

Fischbein (1978), a partir de experimentações diversas, defendeu que seria necessária uma espécie de treino antes da aplicação do raciocínio proporcional, pois se trata de um conceito que não surge espontaneamente, sem que antes o sujeito se depare com situações em que haja relação de proporcionalidade entre grandezas. Desta forma, os sujeitos poderiam generalizar esta ideia e poderiam aplicá-la em outros problemas nos quais identificariam uma estrutura comum. Somente assim, segundo Fischbein (1978), a partir de treinamentos, poderia então ser feita uma análise da aquisição do conceito de proporcionalidade e da forma como o sujeito o construiu e aplicou em problemas posteriores.

Siegler (1976), por sua vez, compõe um esquema de quatro regras que justificaram 80% das situações que propôs em suas experiências. Estas regras descrevem a tomada de decisões do sujeito conforme a etapa do desenvolvimento cognitivo em que se encontra, definindo problemas que o sujeito que se encontra em cada uma destas etapas é capaz de resolver.

Noelting (1982) é um dos poucos estudiosos da época que volta a defender a teoria dos estádios de Piaget e, a partir de uma experiência com sujeitos de seis a dezesseis anos e sua respectiva análise, expande a teoria e compõe nove estádios agrupados em três grandes períodos, denominados estádio simbólico, estádio intuitivo e estádio operatório. Aumentando a quantidade de subestádios, Noelting (1982) torna mais clara a observação da passagem de um estádio a outro.

No entanto, apesar do reforço à teoria Piagetiana dos estádios realizado por Noelting (1982), estudiosos questionaram o método de estudo baseado na aplicação e análise de apenas um problema de proporcionalidade, afirmando que seria necessária uma análise e categorização não somente da forma de resolução, mas dos efeitos que a complexidade dos problemas propostos poderia exercer sobre estas resoluções.

Karplus et al (1972), a partir de experimentos voltados à resolução de problemas matemáticos envolvendo proporcionalidade, analisou e agrupou em quatro principais categorias os processos utilizados pelos alunos para resolve-los: utilização incompleta ou equivocada dos dados do enunciado do problema; uma estratégia aditiva em termos de diferentes constantes; um conjunto de processos complementares (iterativos, gráficos ou que utilizam a proporcionalidade de forma parcial) e, por fim, o conjunto dos processos que fazem explicitamente referência à igualdade de duas relações. Ainda, notou-se que estas estratégias pareciam estar ligadas ao nível de dificuldade do problema proposto.

Em seu estudo, Karplus et al (1972) verificou que 60% dos alunos participantes aplicaram raciocínio proporcional correto no que tange questões que envolvem comparação entre igualdades simples, enquanto somente vinte por cento consegue aplicar raciocínios proporcionais face às questões que envolvem desigualdades e relações mais complexas.

Karplus et al (1972) também distingue, ao invés de estádios de compreensão, elementos cognitivos que justificam a aplicação do raciocínio proporcional: comparar ou construir igualdades de duas relações simples; comparar uma relação simples com uma outra relação mais complexa; comparar ou construir igualdades de duas relações complexas; comparar duas relações complexas desiguais. Além disso, Karplus (1972) recorre também ao campo da psicologia para justificar os diferentes domínios que os sujeitos apresentaram ao longo de seu estudo, descrevendo uma pesquisa que mostra que determinadas características cognitivas que um sujeito apresenta estão correlacionadas com o elemento comparação da igualdade de duas relações.

A partir de 1980, inicia-se um movimento de estudo voltado à aprendizagem escolar dos alunos. Desta forma, pesquisadores como Toruniare e Vergnaud voltaram suas pesquisas ao processo de escolha, por parte do aluno, da operação matemática adequada que leva à resolução de problemas envolvendo proporcionalidade, na busca de entender de que forma as diferentes classes de problemas poderiam influenciar nesta escolha.

Tourniaire (1986) desenvolveu um estudo com trezentos alunos entre os oito e onze anos de idade, no qual propôs problemas no quais era necessário encontrar uma quarta proporcional. O pesquisador ressaltou que, mesmo utilizando da adição iterativa na maioria das respostas encontradas, crianças de oito ou nove anos já respeitavam o raciocínio e a estrutura da proporcionalidade.

Vergnaud (1993) ressalta que, não somente as diferentes classes de problemas, mas o tipo de número que o problema envolve já influencia na escolha da operação matemática a ser feita pelo aluno. Outras noções que as crianças trazem, como a de que a multiplicação é constituída por uma adição iterativa, ou a de que quando multiplicamos um número ele aumenta, por exemplo, também interferem no processo de escolha do caminho a ser seguido na resolução de um problema, embora, na maioria das vezes, a estrutura da proporcionalidade esteja presente.

2.3 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

Para analisar as diferentes classes de problemas e as diferentes tomadas de decisões e estratégias adotadas pelo aluno, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1985, 1993, 2009) será o principal suporte teórico utilizado nesta Dissertação. O objetivo da descrição desta teoria é conceituar ideias acerca da construção do conhecimento a partir da proposição de situações-problema, bem como os processos cognitivos envolvidos nesta construção, a fim de que estes conceitos sejam utilizados na análise dos dados coletados nesta Pesquisa.

A TCC, embora não seja uma teoria especificamente escolar e voltada à didática, acaba sendo utilizada com frequência em pesquisas da área educacional por ser destinada a explicar a aprendizagem e o desenvolvimento de competências complexas.

A TCC considera que a aquisição dos conceitos está ligada a três aspectos principais: a análise e categorização dos diferentes problemas matemáticos (classes de situações problema); a descrição e análise dos diferentes conhecimentos envolvidos na resolução destes problemas, os chamados invariantes operatórios, e a representação simbólica empregada na resolução.

No que se refere à categorização dos diferentes problemas matemáticos, Vergnaud (1993) destaca duas classes: uma, em que o sujeito possui as competências necessárias para resolvê-las; outra, em que o sujeito não possui as competências necessárias para resolvê-las de imediato, precisando recorrer à exploração do problema, testagens, identificação de semelhanças com situações anteriores, entre outras estratégias preliminares para traçar o seu caminho até a resolução. Na prática que será analisada na dissertação, serão propostos aos alunos problemas que se enquadram no segundo tipo descrito pelo autor, o que exigirá dos estudantes um processo de investigação e mobilização e adaptação de seus conhecimentos anteriores para a sua resolução.

Inicialmente, é importante discutir o significado da expressão “conceito”, no sentido de destacar que conceito, no contexto da TCC, não é simplesmente sinônimo de definição, mas engloba também o sentido que a ideia adquire quando utilizada em situações-problema, bem como o conjunto das formas de linguagem que podem ser utilizadas para representar simbolicamente o conceito. Desta forma, conceituar um objeto matemático, por exemplo, não é apenas defini-lo, é também estabelecer relações, encontrar formas de utilizar e adaptar esta noção para auxiliar na resolução de problemas que a envolvam.

Simbolicamente, Vergnaud define conceito como uma terna C= (S, I, R), no qual S representa as situações que dão sentido ao conceito, I representa as invariantes que a definição traz consigo e R representa o conjunto de formas simbólicas que permitem sua representação.

Outro conceito central da TCC que será utilizado para análise dos dados coletados é o de esquema, que se define como a “organização invariante do comportamento para uma classe de situações” (VERGNAUD, 1993, p. 2). Dessa forma, o esquema se refere à organização da atividade do sujeito em dada situação, sendo composto por regras, antecipações, inferências e, especialmente, por conhecimentos que o organizam, os quais são denominados pelo autor por “conceito-em-ação” e “teorema-em-ação” ou, de forma global, “invariantes operatórios”.

Nestes esquemas, é possível identificar comportamentos que se automatizam progressivamente, conforme as condutas do sujeito o levam ao sucesso nos diferentes problemas a serem resolvidos. Além disso, também se identifica tomadas de decisões conscientes no esquema, as quais envolvem as variáveis específicas do problema, e não se generalizam e automatizam progressivamente, já que são particulares da situação proposta.

Vejamos um exemplo que auxilia na compreensão dos conceitos relacionados ao esquema apresentado no parágrafo anterior. Digamos que um estudante de sétimo ano do ensino fundamental se depara com o seguinte problema: Usando apenas os algarismos 0, 2, 3 e 4, quantos números diferentes de quatro algarismos podemos formar?

Para resolver esta questão, o indivíduo pode optar por listar todas as opções de números com quatro algarismos, modificando as posições dos números e observando que o algarismo 0 não pode ocupar a primeira posição. Esta sequência de decisões constitui um possível esquema para resolver o problema. Neste esquema, a ação do sujeito está apoiada nas noções de contagem básica, sem uso, por exemplo, do Princípio Multiplicativo. Porém, é bastante provável que, ao deparar-se com mais situações semelhantes e identificar sucesso no primeiro exemplo, o indivíduo automatize este esquema e deduza o princípio multiplicativo, a medida que este tipo de problema passe a compor a classe de situações em que o indivíduo já possui uma conduta automatizada.

Ainda em relação ao mesmo exemplo, poderia se optar diretamente pelo uso do Princípio Multiplicativo, apenas descontando a possibilidade em que o algarismo 0 ocupa a primeira posição. Desta forma, é observado no esquema que o indivíduo já possui o conceito de Princípio Multiplicativo – o principal invariante operatório observado - construído por situações anteriores, e apenas identificou uma outra situação em que este conceito pode ser aplicado.

Vergnaud (1993) destaca que a linguagem possui uma grande importância na TCC, pois representa de forma simbólica o pensamento e a conduta do sujeito no processo de resolução de um problema, bem como auxilia na identificação dos invariantes operatórios da situação (conceitos e teoremas envolvidos em um esquema). A partir da linguagem, se tem acesso ao esquema ou da combinação de esquemas utilizada pelo sujeito para lidar com diferentes situações e problemas.

> A solução de problemas muito novos é impossível sem a linguagem, sobretudo quando essa situação evoca conceitualizações novas e a transformação de certos elementos em objetos de pensamento bem identificados. (Vergnaud, 1993, p.24)

Ainda, é importante ressaltar a dificuldade existente no ato de tornar compreensível, através da linguagem, a tomada de decisões do sujeito que resolve um problema matemático. Em muitos casos, o ato de optar por uma estratégia ou outra durante a construção de um esquema não é facilmente explicado, muito menos é justificado em linguagem escrita. Na análise dos dados desta pesquisa, muitas vezes, haverá a necessidade de recorrer a anotações, rascunhos e expressões verbais utilizadas pelos alunos durante discussões acerca do problema, ou seja, indícios de preferências por determinadas ações observadas nos esquemas estabelecidos, na tentativa de compreender as tomadas de decisões observadas no trato com os novos conceitos a que os estudantes estarão sendo confrontados.

> "... os experts mais experimentados não são capazes de colocar em palavras uma boa parte dos conhecimentos que eles utilizam na ação e que são justamente significativas em suas expertises." (Vergnaud, 2009, p.31)

Com base nas definições abordadas até o momento, é possível definir Campo Conceitual segundo a teoria de Vergnaud. Para o autor, um Campo Conceitual é um conjunto de situações cujo tratamento apresenta invariantes operatórios específicos, isto é, situações problema cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em conexão estreita. Neste trabalho, interessará principalmente o campo conceitual das estruturas multiplicativas. Neste campo conceitual, as situações se estruturam com base em diferentes organizadores do pensamento, tais como: a correspondência direta e/ou inversa entre grandezas, relações de equivalência, replicações, busca por valor unitário de referência (razão), entre outras estruturas embasadas nas operações de multiplicação e divisão. Vergnaud (2009)

No entanto, com base na observação dos esquemas utilizados pelos estudantes durante a prática analisada nesta dissertação, foram identificados elementos relacionados ao campo aditivo, o que fez com que a descrição deste campo também fosse necessária neste trabalho.

Desta forma, o objetivo da utilização da TCC para análise dos dados desta dissertação é o de permitir que se identifique os esquemas utilizados pelos estudantes para resolver as situações problema propostas. Com isso, busca-se apresentar possibilidades de formas de organização da ação do estudante quando confrontado a problemas de proporcionalidade, para que o docente possa fazer uso dos indícios observados nestas ações ao introduzir este conteúdo em sua sala de aula.

2.3.1 Estruturas Aditivas

O Campo Conceitual Aditivo é constituído pelas situações cujo tratamento apresenta estruturas relacionadas tão somente à adição e à subtração. Embora estas duas operações – soma e subtração – sejam consideradas distintas, podemos observar uma relação comum em jogo, a qual é definitiva para a caracterização do Campo Conceitual Aditivo: a relação entre parte e todo.

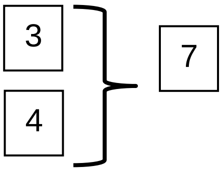
Dentre os conceitos importantes nos quais Vergnaud se baseia para descrever as categorias de problemas deste campo, está o de transformação, que envolve uma ação ocorrida a partir da situação dada, de forma direta ou indireta, causando aumento ou diminuição (Vergnaud, 1993). É importante ressaltar também que a expressão “relação” ou “estado relativo”, no contexto da TCC, adquire um significado relacionado à situação em que um determinado elemento do problema se encontra, isto é, se há uma situação de débito de R$5, utiliza-se a relação ou estado relativo “-5” para representa-la, por exemplo.

Ainda, é importante ressaltar que, ao lidar com estes problemas, os números podem expressar diferentes ideias. Desta forma, estaremos diante de duas interpretações: o número com significado de quantidade, cardinalidade de um conjunto (por isso não leva sinal positivo nem negativo) e o número com significado de transformação (ganhou ou perda, aumento ou diminuição), e, portanto, levam sinal positivo ou negativo.

Para identificar as seis categorias de relações aditivas e problemas correspondentes que compõem o campo conceitual aditivo segundo Vergnaud (2009), traremos exemplos que possibilitarão a identificação de esquemas envolvidos em cada uma delas. Nos esquemas realizados em cada exemplo, os valores inseridos em retângulos representam medidas, enquanto que os valores inseridos em círculos representam transformações ou estados relativos (relações).

Categoria 1 - A composição entre duas medidas totaliza em uma terceira medida;

Exemplo: Ana possui 3 canetas vermelhas e 4 canetas azuis. Quantas canetas Ana possui?



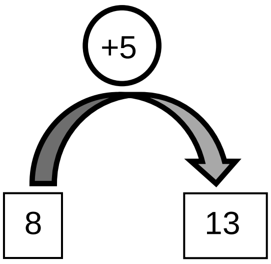
3+4=7

+ é a lei de composição que corresponde a adicionar duas medidas.

Categoria 2 – Uma transformação opera sobre uma medida, totalizando uma terceira medida.

Nesta categoria, uma medida inicial sofre uma alteração, seja somativa ou subtrativa, totalizando uma nova medida.

Exemplo: Rafael possuía 8 plantas em seu jardim. Ao visitar a floricultura, comprou mais 5 plantas para o seu jardim. Quantas plantas haverá no jardim de Rafael após esta compra?

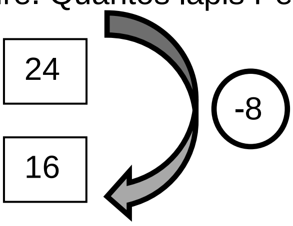


8+(+5)=13

+ corresponde à transformação que atua sobre uma medida, isto é, somar o número 8 ao número inteiro +5.

Categoria 3 – Uma relação une duas medidas;

Exemplo: Alexandre possui 24 lápis de cor. Pedro possui 8 lápis a menos que Alexandre. Quantos lápis Pedro possui?



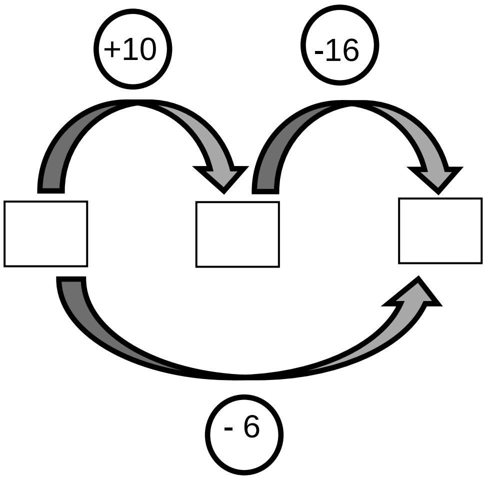
24+(-8)=16

Vergnaud ressalta que, nesta situação, não se trata de uma transformação, e sim de uma relação estática

Categoria 4 – Duas transformações se compõem e dão lugar a uma única transformação;

Nesta categoria, duas transformações sucessivas equivalem a uma única transformação. As transformações podem assumir a ideia de “ganhou” ou “perda”, e o mesmo acontece com a transformação resultante que sintetiza as transformações sucessivas.

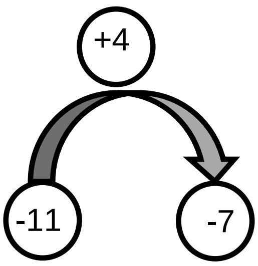
Exemplo: Em um jogo de cartas com seus amigos, Gabriela ganhou R$10,00 e perdeu R$16,00. Ao total, Gabriela perdeu R$6,00 no jogo.



$+10+(-16)= -6$

Categoria 5 – Uma transformação age sobre uma relação para dar lugar a uma relação;

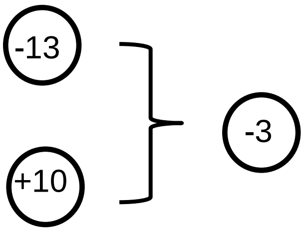
Exemplo: Arthur devia 11 figurinhas para Henrique. Arthur devolveu 7 figurinhas, portanto, agora, deve apenas 4 figurinhas para Henrique.



$-11+(+4)= -7$

Categoria 6 – Dois estados relativos (relações) compõem outro estado relativo.

Exemplo: Joaquim deve R$13 para Francisco, mas Francisco deve R$10 para Joaquim, então Joaquim deve R$3 para Francisco.



$$\boxed{-13+(+10)= -3}$$

2.3.2 Estruturas Multiplicativas

Considerando que o ponto central desta dissertação é constituído pela aquisição do conceito de proporcionalidade, faz-se importante um aprofundamento do Campo Conceitual multiplicativo, constituído por um conjunto de situações que se estruturam com base em diferentes organizadores do pensamento, tais como: a correspondência direta e/ou inversa entre grandezas, relações de equivalência, replicações, busca por valor unitário de referência (razão), e que trazem consigo relações operatórias de multiplicação e divisão. Além disso, Vergnaud (2009) destaca que os problemas propostos podem ser classificados como: problemas de isomorfismo entre medidas (coloca em jogo quatro quantidades em situação de proporcionalidade) e problemas de produto de medidas (envolve três quantidades, em que uma delas é o produto das outras duas).

É comum observar a multiplicação sendo considerada equivalente à soma de parcelas iguais, em especial na introdução destas noções nos anos iniciais. No entanto, esta ideia se mostra limitada quando comparamos os campos conceituais aditivo e multiplicativo. A soma e subtração envolvem grandezas de um mesmo tipo e invariantes conceituais parte/todo, isto é, situações em que conhecemos as partes e queremos descobrir o todo, ou conhecemos o todo e uma das partes e queremos descobrir a outra parte, o que indica relações ternárias (três medidas envolvidas). Já a multiplicação, por sua vez, é baseada na relação entre pares de valores medidos em grandezas distintas. Desta forma, o Campo Multiplicativo também envolve relações quaternárias (duas de um tipo e duas de outro) em seus problemas de isomorfismo entre medidas.

Para esclarecer da melhor forma possível as relações entre os quatro termos envolvidos em uma multiplicação e possibilitar a compreensão de outros conceitos de Vergnaud que se aplicam ao campo multiplicativo, serão utilizados como exemplos alguns dos problemas utilizados na prática desta Dissertação.

Nesta análise, será feito o uso de tabelas, pois, segundo Vergnaud (2009), a partir das tabelas é possível identificar de forma evidente os operadores envolvidos na situação de proporcionalidade entre duas variáveis diferentes.

Quadro 3: exemplo de problema envolvendo proporcionalidade A

Renata e Juliana fizeram um suco do sabor que mais gostam para dividir com a turma. Para isso, fizeram 18 litros de suco. Nestes 18 litros, 12 são de suco concentrado e 6 são de água, e os colegas acharam que o sabor ficou muito bom e quiseram fazer quantidades maiores do suco para vender no bar da escola, mas que tivesse o mesmo sabor. a) Vamos supor que os colegas desejam fazer 30 litros de suco. Quantos litros de suco concentrado e quantos litros de água vão precisar? b) Como podemos expressar a relação entre a quantidade de suco concentrado e de água nesta receita?

Acima, na situação de proporcionalidade entre os ingredientes de uma receita de suco, pode-se identificar a relação entre a grandeza “litros de mistura” e “litros de suco concentrado”. Analogamente, poderíamos também considerar a relação entre “litros de mistura” e “litros de água”, ou, ainda, “litros de suco concentrado” e “litros de água”.

Para resolver este problema, poderíamos lançar mão de duas maneiras diferentes: o uso do operador multiplicativo horizontal (entre os dois tipos de grandezas envolvidas) ou vertical (entre grandezas do mesmo tipo).

$\times \frac{2}{3}$

Litros de mistura	Litros de suco concentrado
18	12
30	?

$\times \frac{5}{3}$ $\times \frac{5}{3}$

$\times \frac{2}{3}$

No uso das multiplicações verticais na tabela, realiza-se uma multiplicação de forma adimensional, pois ($\times 5/3$) é apenas um operador. Já durante o uso das multiplicações horizontais, lançamos mão de um operador dimensional, que, segundo Vergnaud, “são funções que expressam a relação entre medidas de categorias diferentes” (1991, p. 203).

No problema discutido, o operador horizontal traz consigo o seguinte significado: ($\times 2/3$) litros de suco concentrado por litro de mistura. Por isso, é possível obter a informação que buscamos (litros de suco concentrado) a partir da informação conhecida (litros de mistura).

No entanto, problemas do campo multiplicativo também podem ser resolvidos via divisões, ou seja, as transformações inversas às transformações realizadas pelas multiplicações.

Quadro 4: exemplo de problema sobre proporcionalidade B.

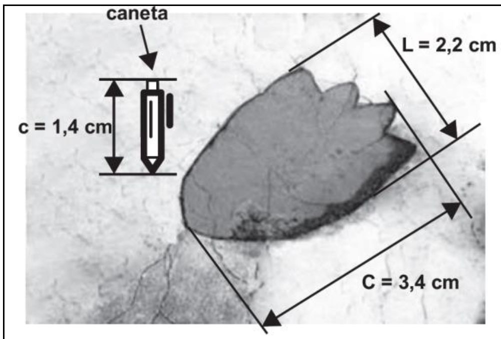
(SEAP1102/001-AgSegPenClasseI-V1 – 2012 ADAPTADO) – Uma torre tem 28 m de altura. Sob um determinado ângulo do sol, cada 4 metros de altura da torre projetam 3 metros de sombra no chão. Assim sendo, a medida do comprimento da sombra da torre será de quantos metros?

Neste problema, por exemplo, uma das formas possíveis de resolução é utilizar um operador vertical inverso ($\div 7$) dentre grandezas do mesmo tipo para, após, utilizar um operador vertical ($\times 7$) no outro par de grandezas do problema.

	Altura da torre (m)	Distância da sombra projetada (m)	
$\div 7$	4	3	$\times 7$
	28	?	

Quadro 5: exemplo de problema sobre proporcionalidade C.

(ENEM 2015) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados na figura. Quais são o comprimento e largura reais da pegada?



Já nesta situação, se faz necessário o uso do operador horizontal que leva as dimensões reais dos objetos às dimensões na fotografia. Desta forma, é possível obter o comprimento e, de forma análoga, a largura da pegada.

$\div 12$

Dimensões reais dos objetos (cm)	Dimensões dos objetos na fotografia (cm)
16,8	1,4
?	3,4

$\times 12$

É importante destacar que os operadores horizontais, os quais possuem dimensões e permitem a transformação entre uma coluna e outra da tabela, não são facilmente compreendidas pelos estudantes. No entanto, Vergnaud ressalta a importância de o professor não deixar de propor problemas que envolvam estas transformações, dando ênfase às noções mais evidentes para o aluno, como a de operador. (VERGNAUD, p. 207, 1993)

2.4 TRABALHOS RELACIONADOS

Nesta seção, serão descritos trabalhos com temática relacionada à desta dissertação, destacando as principais aproximações e diferenças encontradas e evidenciando os resultados obtidos nestas pesquisas.

No Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, ao qual a presente dissertação faz parte, foi identificado o trabalho de Aguiar (2014), que desenvolveu uma prática no formato de curso de formação continuada para professores dos anos iniciais. Neste curso, a autora tinha por objetivo investigar as concepções dos professores acerca das operações do Campo Multiplicativo à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. É possível, a partir do objetivo de pesquisa da autora, evidenciar uma aproximação considerável com este trabalho: propor problemas do campo multiplicativo para analisar as diferentes formas de resoluções.

No entanto, a partir dos dados coletados por Aguiar (2014), através do método de pesquisa-ação, a autora buscou identificar, juntamente com os professores participantes do curso de formação continuada, as dificuldades encontradas durante as atividades e propor formas de superá-las, buscando um aperfeiçoamento da prática pedagógica de cada participante. Neste sentido, identifica-se um distanciamento entre o trabalho de Aguiar (2014) e a presente pesquisa no que tange os processos metodológicos e o público alvo da atividade prática, pois o objetivo deste trabalho é o de identificar e analisar esquemas utilizados por estudantes na resolução de problemas de proporcionalidade.

Ao final de sua pesquisa, Aguiar (2014) constata, a partir das falas dos professores envolvidos, a restrição do trabalho com o Campo Multiplicativo à memorização da tabuada, evidenciando a necessidade de diferentes estratégias. Além disso, através dos dados coletados durante o curso de formação continuada, a autora identificou a limitação, por parte dos professores envolvidos, da noção de multiplicação como uma soma de parcelas iguais, o que restringe suas estratégias de ensino às ideias aditivas.

Expandindo a pesquisa de trabalhos de temática relacionada a esta dissertação, foi identificada a dissertação de Oliveira (2000), o qual teve como temática a resolução de problemas de proporções simples do Ensino Fundamental. Em sua pesquisa, Oliveira (2000) também utiliza como unidade de estudo alunos do sétimo ano que ainda não foram apresentados ao conceito de proporção, na busca de identificar as estratégias utilizadas pelos estudantes. Neste sentido, o objetivo da pesquisa de Oliveira (2000) é idêntico ao da presente dissertação, diferindo no momento em que a autora não utiliza a Teoria dos Campos Conceituais para analisar as estratégias identificadas.

Oliveira (2000) ressalta a importância deste tipo de prática, que coloca em evidência os conhecimentos prévios dos estudantes envolvidos, mostrando-os que são capazes de, a partir da sua própria estratégia, resolver problemas matemáticos, sem necessidade de uma intervenção prévia do professor no sentido de ensiná-los como fazer.

Na atividade prática desenvolvida, participaram 494 estudantes de sexto ao nono ano do ensino fundamental, pois Oliveira (2000) também tinha como objetivo comparar as resoluções dos alunos que ainda não haviam trabalhado o conceito de proporção na escola com as resoluções dos alunos que já haviam. As atividades propostas consistiam em 8 problemas envolvendo proporcionalidade, 4 envolvendo proporcionalidade direta e 4 envolvendo proporcionalidade inversa, os quais foram retirados de livros didáticos utilizados na escola naquele ano.

Em sua análise, Oliveira (2000) identifica 6 estratégias recorrentes no conjunto de resoluções analisado: **adições sucessivas/replicação** (baseia-se na soma, sucessivas vezes, da relação estabelecida entre as grandezas no problema, até que se encontre o valor solicitado), **tarefa total** (em problemas de proporcionalidade inversa, o aluno organiza sua estratégia em encontrar e todo, multiplicando grandezas de diferente natureza e, após, divide o resultado pela outra medida fornecida no problema), **valor unitário** (quando os alunos resolvem o problema através do estabelecimento de uma relação entre as grandezas, encontrando o valor unitário e aplicando, posteriormente, esse valor unitário à pergunta do problema.), **fator de proporcionalidade** (quando os alunos estabelecem um fator de proporcionalidade dentro da mesma grandeza, para, em seguida, aplicá-lo na outra grandeza), **"regra de três"** (algoritmo identificado em alunos que já haviam estudado o conteúdo de proporções) e **estratégia não identificada**.

Identificando uma diversidade de resoluções dentre os estudantes que ainda não haviam estudado o conteúdo, Oliveira (2000) ressalta que os resultados mostram que os alunos são capazes de manipularem os seus conhecimentos anteriores, no sentido de construírem novas ferramentas que possibilitem a resolução do problema. Segundo a autora, não houve uma uniformização das estratégias quando observadas as resoluções destes alunos, diferentemente do que foi identificado nas resoluções dos alunos que já haviam estudado proporcionalidade, nas quais o algoritmo da "regra de três" foi praticamente unânime.

A presente dissertação, assim como Oliveira (2000), também tem por objetivo analisar as resoluções dos estudantes, porém exclusivamente em um grupo de alunos que ainda não estudou este conteúdo em ambiente escolar e realizar uma análise específica dos esquemas mobilizados, aplicando conceitos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Em uma busca ao Banco de Teses e Dissertações da CAPES, foram identificados trabalhos da área da Psicologia com temática relacionada à desta dissertação. O trabalho de Batista (2002), desenvolvido no Programa de Pós Graduação em Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco, com ênfase em Psicologia Cognitiva, aborda a influência que os suportes de representação podem exercer sob a forma de resolução de problemas com estruturas multiplicativas, utilizando o estudo dos Campos Conceituais de Vergnaud como base teórica.

Sendo assim, Batista (2002) propõe, a um grupo de 60 crianças de 8 anos de idade, um conjunto de problemas de isomorfismo e análise combinatória e, separados em grupos, puderam fazer uso de três diferentes suportes de representação: lápis e papel; material concreto neutro (fichas) e material concreto definido (objetos).

A análise dos dados voltou-se a dois aspectos: desempenho dos alunos e estratégias adotadas em função dos diferentes suportes de representação. No que tange o desempenho dos alunos, a pesquisa permitiu concluir que as resoluções que fizeram uso de um suporte de representações concreto tiveram maior índice de sucesso quando comparadas às resoluções que fizeram uso de lápis e papel para desenvolvimento das estratégias. Além disso, foi possível perceber que, independentemente do suporte de representação, o índice de acertos em problemas de isomorfismo foi maior que o índice de acertos em problemas de combinatória, mostrando que a natureza do problema proposto influencia de forma significativa no índice de sucesso ou fracasso a ser observado.

De forma geral, Batista (2002) conclui que os dois fatores – natureza do problema e suporte de representações – influenciam no desempenho dos alunos e evidencia que o cenário que mostrou-se mais proveitoso em termos de desempenho foi o de problemas de isomorfismo resolvidos através de sistemas de representações concretos.

Em relação às estratégias, Batista (2002) observou que as adotadas em problemas de isomorfismo são diferentes e mais variadas quando comparadas às adotadas em problemas de combinatória. Além disso, foi detectado um índice significativamente maior de uso de estratégias inadequadas quando o suporte de representações disponível era o lápis e papel, o que permitiu concluir que o suporte de representações influenciou nas estratégias utilizadas pelos estudantes envolvidos.

Assim como a presente dissertação, o trabalho de Batista (2002) também buscou, através da proposição de problemas a estudantes que ainda não estudaram proporcionalidade, analisar as estratégias utilizadas por meio da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, no entanto, voltou-se ao estudo da forma como os suportes de representação influenciam nas estratégias utilizadas pelos estudantes.

O trabalho de Pereira (2015), desenvolvido no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual de Santa Catarina, também buscou analisar a forma como estudantes resolvem problemas matemáticos envolvendo estruturas multiplicativas. No entanto, seu foco foi em alunos do 9º ano do ensino fundamental, buscando identificar invariantes operatórios recorrentes nos esquemas utilizados pelos alunos. Para tanto, analisaram três situações de Campo Multiplicativa, as quais foram resolvidas por 88 estudantes do 9º ano de duas escolas diferentes.

É importante ressaltar que os sujeitos envolvidos na pesquisa de Pereira (2015) já haviam estudado o conteúdo de proporcionalidade na escola, o que explicita uma diferença significativa da presente pesquisa, já que os alunos envolvidos ainda não estudaram este conteúdo na escola.

Pereira (2015) coletou as resoluções dos alunos e, no caso dos esquemas envolvidos nas resoluções não terem ficado evidentes, convocou os alunos responsáveis para uma entrevista, a fim de esclarecer a estratégia seguida pelo aluno. Como resultados, Pereira (2015) pôde concluir que situações que são resolvidas através de multiplicações tem maior índice de acerto do que as questões que envolvem divisões. Além disso, a pesquisa também indicou que o invariante operatório mais evidente no conjunto de esquemas foi a utilização da ideia de inversibilidade entre as operações de multiplicação e divisão.

Outro resultado importante foi a observação de que, mesmo já possuindo contato prévio com a ideia de proporcionalidade, alguns dos alunos ainda vivem um processo de ruptura entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo, pois foi detectado o uso de adições repetidas em determinados esquemas.

Por fim, Pereira (2015) ressalta aspectos de sua pesquisa que, segundo a autora, limitaram a elaboração de conclusões mais abrangentes: o conjunto de apenas três problemas matemáticos e as semelhanças entre eles, o que acabou limitando também o conjunto de possibilidades de esquemas a serem observados e analisados.

Outro trabalho que mostrou temática relacionada à presente dissertação, é a tese de Guimarães (2004), apresentada na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, que trata dos processos cognitivos envolvidos na construção de estruturas multiplicativas. O objetivo central do estudo voltou-se para as relações existentes entre os níveis de construção da noção de multiplicação e os níveis de generalização e como estes intervêm no desempenho dos sujeitos em situações que envolvem resolução de problemas de estrutura multiplicativa, analisando o antes e o depois de os estudantes serem submetidos a situações lúdicas com o jogo de argolas. Dentro deste objetivo geral, a presente Dissertação irá deter-se em apresentar os resultados relativos à análise do antes e depois da utilização do jogo com os sujeitos envolvidos. Guimarães (2004) apoiou-se na Epistemologia Genética de Jean Piaget, cuja ideia central é de que o conhecimento se constrói a partir das trocas do sujeito com o meio. Diante de perturbações ou conflitos, o sujeito tende a reagir por meio e regulações contínuas, reorganizando suas estruturas cognitivas anteriores.

A prática analisada por Guimarães (2004) foi realizada com 30 estudantes, com idades entre 8 e 11 anos, de terceira e quarta séries do Ensino Fundamental, os quais foram selecionados a partir da Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa, sendo 10 crianças de cada nível de construção da noção de multiplicação.

Através dos processos de equilibração, abstração reflexiva e generalização construtiva, pode-se dar início à construção das estruturas multiplicativas a partir das estruturas aditivas, uma vez que a reconstrução de noções superiores às anteriores, construindo novas ideias a partir daquelas já concebidas, se faz a partir da abstração reflexiva e generalização construtiva.

> A equilibração ocorre quando o sujeito, frente à situação-problema desencadeada pelo desafio do jogo, necessita criar estratégias eficazes orientadas ao êxito. A abstração reflexiva, mecanismo que, no processo geral de equilibração, é responsável pela elaboração de novas formas em relação aos conteúdos, é favorecida nas situações de jogos, possibilitando aos sujeitos a criação de novas estratégias a partir das anteriores não-eficazes para aquele momento. A

> generalização também está implicitamente ligada às situações de jogo, na medida em que as estratégias construídas são aplicadas em diferentes situações e também reelaboradas em outras. Tem-se, assim, um processo geral de equilibração permeando a atividade lúdica, com seus componentes indissociáveis: abstração reflexiva e generalização. (GUIMARÃES, 2004, p.22)

Por ter desenvolvido sua Dissertação através do uso de jogos, Guimarães (2004) opta por utilizá-los novamente em sua tese, com o propósito de analisar que reformulações o estudante pode realizar em sua resolução de problemas escrita a partir do contato com o jogo, formulando, assim, sua questão se pesquisa: “Os sujeitos, após a oportunidade de criarem outras formas de representações via jogo de argolas que ensejam situações de resoluções de problemas de estrutura multiplicativa, apresentariam melhores desempenhos na resolução escrita dos problemas de estrutura multiplicativa?”

O jogo utilizado por Guimarães (2004) é bastante versátil, pois trata-se de um conjunto de materiais (hastes e argolas) que permitem que variados problemas possam ser resolvidos a partir da manipulação dos objetos, dentre eles, problemas do tipo: correspondência de um para muitos, correspondência de muitos para muitos, operações aritméticas, relações multiplicativas e processo inverso (divisão). A utilização de materiais concretos ao invés de algoritmos, segundo a autora, favorece a observação da estratégia utilizada pelo estudante, evidenciando o entendimento do sujeito sobre o problema proposto.

Após a análise dos dados, Guimarães (2004) conclui que a aplicação do jogo de argolas mostrou-se mais eficaz em sujeitos que se mostraram mais avançados na construção da noção de multiplicação nos testes anteriores, uma vez que estes alcançaram maior percentual de acertos na posterior de Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa, o que revela que estes sujeitos podem ter sido favorecidos pelas atividades lúdicas, via jogos de argolas, uma vez que as mesmas objetivaram desencadear processos que favorecessem a construção da noção de multiplicação por meio de situações-problema no decorrer das jogadas.

Sendo assim, o trabalho de Guimarães (2004) demonstra um aproximação à presente dissertação no momento em que se propõe a analisar resoluções e estratégias realizadas por estudantes. No entanto, o foco desta dissertação está na análise dos esquemas utilizados pelos estudantes e na forma (simbologia, linguagem) como são mobilizados os conceitos relacionados à proporcionalidade, enquanto que o trabalho de Guimarães (2004) analisa o papel do uso de materiais concretos, via jogo de argolas, exerce na forma de resolução dos sujeitos, através de uma comparação de resultados prévios e posteriores.

Quadro 6: resumo dos trabalhos relacionados a esta pesquisa.

Autor	**Questão de Pesquisa**	**Principal Referencial Teórico**	**Prática Desenvolvida**	**Resultados Obtidos**
Aguiar (2014)	Como conceitos do Campo Multiplicativo são abordados nos anos iniciais por professores de determinada escola?	Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.	Curso de formação continuada para professores dos anos iniciais	Quando se trata do Campo Multiplicativo das Operações, o grupo de professores pesquisado se mantém restrito ao estudo do algoritmo da multiplicação e memorização da tabuada.
Oliveira (2000)	Quais são as estratégias utilizadas por estudantes do Ensino Fundamental para resolver problemas de proporção simples?	KARPLUS (1972); TOURNIAIRE (1986).	Proposição de um conjunto de problemas de proporcionalidade simples a 494 estudantes de sexto ao nono ano do ensino fundamental.	Não houve uma uniformização das estratégias quando observadas as resoluções dos alunos que ainda não estudaram proporcionalidade na escola, tendo sido identificadas 6 estratégias diferentes, ao contrário do que foi identificado nas resoluções dos alunos que já haviam estudado proporcionalidade, nas quais o algoritmo da "regra de três" foi praticamente unânime.
Batista (2002)	Um tipo de suporte de representação desempenha algum papel no processo de resolução de problemas e, se efeito encontrado, ele influencia apenas no desempenho ou também no tipo de estratégia adotada pelo estudante?	Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.	Em grupos, foram propostos problemas de combinatória e isomorfismo a 60 crianças de 8 anos de idade, os quais puderam fazer uso de três diferentes suportes de representação: lápis e papel; material concreto neutro (fichas) e material concreto definido (objetos).	Foi detectado um índice significativamente maior de uso de estratégias inadequadas quando o suporte de representações disponível era o lápis e papel, o que permitiu concluir que o suporte de representações influenciou nas estratégias utilizadas pelos estudantes envolvidos.
Pereira	Quais os esquemas	Teoria dos Campos	Proposição de três situações de	Os resultados evidenciam que os alunos, ao

(2015)	utilizados por alunos, do 9º ano do Ensino Fundamental, ao resolverem situações-problema relacionadas à comparação multiplicativa?	Conceituais de Vergnaud	Campo Multiplicativo, as quais foram resolvidas por 88 estudantes do 9º ano de duas escolas diferentes. No caso de o esquema analisado não ter ficado evidente o bastante para a pesquisadora, foi realizada uma entrevista semiestruturada com o sujeito envolvido.	resolverem situações com a relação e o referido desconhecido, tem dificuldade em compreender as expressões linguísticas, principalmente nas situações em que a solução está atrelada ao conceito de divisão. Os esquemas mais utilizados foram o uso das operações de multiplicação e divisão.
Guimarães (2004)	Como os níveis de construção da noção de multiplicação e os níveis de generalização intervêm no desempenho dos sujeitos em situações que envolvem resolução de problemas de estrutura multiplicativa, antes e após serem submetidos a situações lúdicas com o jogo de argolas?	Epistemologia Genética de Jean Piaget	Foram realizados testes prévios, utilização de um jogo de argolas para resolução de problemas e testes posteriores com um grupo de 30 sujeitos, com idades entre 8 e 11 anos de idade.	Os resultados mostraram que, para estar de posse da construção da noção de multiplicação (Nível III), é preciso o Nível II de generalização. As situações lúdicas, via jogo de argolas, favoreceram a melhora do desempenho, principalmente nos sujeitos de níveis mais elevados dos processos cognitivos envolvidos na construção das estruturas multiplicativas.

Fonte: síntese da autora

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo 3, serão descritas as técnicas e procedimentos desenvolvidos neste trabalho. Desta forma, são discutidas ideias acerca de Estudo de Caso, que representa a metodologia presente na pesquisa e será baseada na obra de Yin (2005). Além disso, também é apresentado o planejamento das atividades que foram desenvolvidas com os estudantes e que constituíram o conjunto de dados a ser analisado.

3.1 METODOLOGIA DE PESQUISA: ESTUDO DE CASO

A metodologia escolhida para desenvolvimento desta pesquisa foi o Estudo de Caso. Historicamente, este método é alvo de críticas no ramo científico por não apresentar rigor suficiente quando comparado a outras metodologias, não lançar mão de técnicas específicas e por não permitir que se construam conclusões generalistas ao final do estudo. No entanto, o Estudo de Caso apresenta potencialidades interessantes, principalmente no momento em que o campo de pesquisa é voltado ao ramo educacional, que é o caso deste estudo.

Inicialmente, apresento e discuto algumas definições acerca desta metodologia, destacando de que forma os conceitos-chave destas definições poderão ser observados no Estudo de Caso sobre o qual versa esta Dissertação.

Segundo Shramm (1971),

> a essência de um estudo de caso, a principal tendência em todos os tipos de estudo de caso, é que ela tenta esclarecer uma decisão ou um conjunto de decisões: o motivo pelo qual foram tomadas, como foram implementadas e com quais resultados (Schramm, 1971)

Neste sentido, o pesquisador que opta pelo Estudo de Caso, busca analisar que efeitos podem ser observados quando o sujeito de pesquisa é colocado sob determinada situação, de que forma o sujeito age e por qual motivo. Neste estudo de caso, especificamente, busca-se analisar de que forma os estudantes do sétimo ano irão resolver problemas envolvendo razões e proporções, dado que este conteúdo ainda não terá sido trabalhado com os mesmos. Sendo assim, o objetivo é o de identificar os esquemas e a linguagem utilizados pelos estudantes na tentativa de resolução destes problemas. Desta forma, o foco desta pesquisa estará nas decisões, conforme Schramm (1971) destaca em sua definição para Estudo de Caso.

Uma outra definição, descrita por Yin (2005), destaca um aspecto importante, principalmente em pesquisas do campo educacional, que versa sobre a dificuldade que o pesquisador enfrenta em definir quais acontecimentos observados de fato compõem o fenômeno estudado e quais acontecimentos observados são apenas característicos do contexto do sujeito de pesquisa.

> um estudo de caso é um investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto de vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos (Yin, 2005, p. 32)

No que se refere ao Estudo de Caso desta Dissertação, utilizo um exemplo prático que auxilia a observarmos a dificuldade de distinguir acontecimentos que realmente compõem o fenômeno estudado daqueles que emergem do contexto de cada estudante participante. Digamos que um determinado estudante, durante a coleta de dados, utilizou frações para descrever razões encontradas nos problemas propostos, bem como utilizou a igualdade entre frações para resolver uma questão de proporcionalidade. Ao observar este acontecimento, o pesquisador enfrentará dificuldades para compreender o motivo pelo qual ocorreu esta associação do conteúdo de razões às frações: isto ocorreu de forma espontânea ou, em algum momento, em seu contexto, este estudante específico já tinha tido acesso, por outros meios, a essa forma de resolução para este tipo de problema matemático? Desta forma, assim como discute Yin (2005), os limites entre o fenômeno estudado e o contexto dos sujeitos de pesquisa não estão claramente definidos.

Por apresentar resultados diretamente ligados ao contexto e às vivências dos sujeitos da pesquisa, o Estudo de Caso lida com situações únicas, as quais não se reproduzem de forma igual quando outros sujeitos de pesquisa são envolvidos. Segundo Yin, “a investigação de estudo de caso enfrenta uma situação tecnicamente única em que haverá muito mais variáveis de interesse do que pontos de dados e, como resultado, baseia-se em várias fontes de evidências” (Yin, 2005, p.33). Sendo assim, a metodologia de Estudo de Caso compõe um processo de planejamento e conhecimento prévio dos sujeitos de pesquisa, a fim de que se possam definir as variáveis que serão consideradas e poderão influenciar nos resultados obtidos.

Por ser um método de pesquisa que leva em consideração muitas variáveis contextuais, é bastante comum que os resultados se apresentem contrários às expectativas iniciais do pesquisador. Neste caso, segundo Yin (2005, p.87), o pesquisador põe à prova sua capacidade de tolerância às descobertas contrárias, e deve considerar que as mudanças de curso da pesquisa são, na verdade, oportunidades importantes de aprofundamento. Em nosso caso, este processo ocorreu na fase inicial da pesquisa (já descrito na Introdução deste trabalho), momento em que um estudo piloto apontou evidências que divergiam das expectativas iniciais da pesquisadora, o que fez com que a questão de pesquisa pudesse ser previamente direcionada a aspectos que permitiriam maior aprofundamento na análise dos dados.

Em relação à caracterização do Caso a ser investigado nesta pesquisa, destaco alguns aspectos do contexto dos estudantes e das atividades que serão propostas. A unidade de pesquisa será constituída por um grupo de 80 alunos, de faixa etária de 12 a 14 anos, estudantes do sétimo ano de uma escola da rede municipal de Canoas (RS), localizada na zona periférica da cidade. A comunidade a qual a escola atende é de baixa renda, em sua maioria composta por comerciantes e trabalhadores autônomos.

Os alunos envolvidos na pesquisa constituem as três turmas de sétimo ano que a escola possui. Neste ano letivo, estudaram conceitos matemáticos relacionados à área e perímetro, números inteiros e porcentagem, apresentando, de forma geral, desempenho satisfatório nas avaliações realizadas e aceitação às atividades propostas pela professora. A situação investigada será constituída pela proposição de problemas matemáticos envolvendo proporcionalidade a estes alunos, para que possam ser analisadas as estratégias adotadas pelos estudantes na resolução destes problemas.

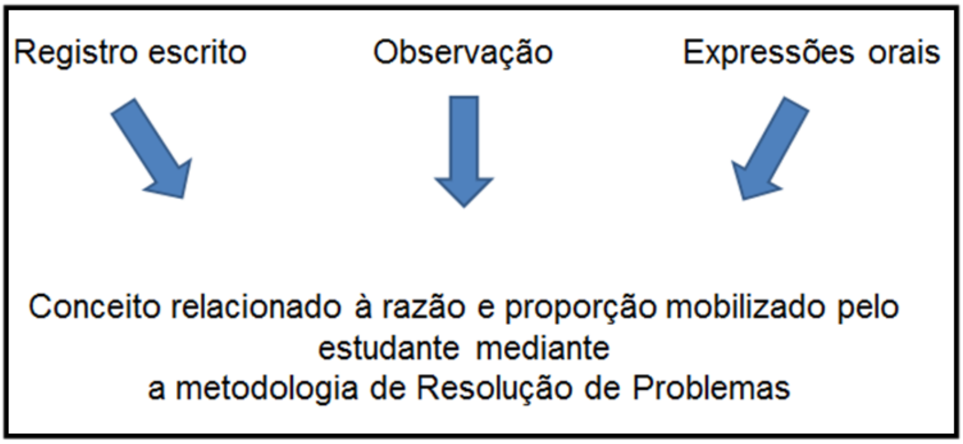
No que se refere à condução da pesquisa, Yin (2005, p. 109 - 136) destaca pontos importantes, os quais o pesquisador deve considerar durante a coleta de dados para um Estudo de Caso pertinente. Dentre os aspectos destacados pelo autor, está a importância da variedade das fontes de evidências, o que auxilia no momento da análise dos dados e construção das conclusões do estudo. Yin (2005, p.113) enumera seis tipos de fontes de evidências que podem ser consideradas:

documentação, registros, entrevistas, observação direta, observação participante e artefatos físicos. Nesta pesquisa, voltada ao campo educacional, especificamente ao Ensino de Matemática, foi possível fazer uso de registros dos alunos envolvidos e das observações direta e participante de forma combinada.

Para composição destas fontes de evidências, foram utilizados: registros dos estudantes, recolhidos a cada encontro e diário de classe da professora-pesquisadora, contendo registros e apontamentos sobre o desenvolvimento da atividade prática feitos durante a observação, bem como expressões orais utilizadas pelos estudantes durante a construção dos registros escritos;

No momento de análise de dados e elaboração das conclusões do estudo, Yin (2005, p. 127) destaca a importância de o pesquisador analisar de forma simultânea as fontes de evidências, evitando a construção de conclusões a partir de apenas uma fonte, pois as conclusões poderão não convergir entre si.

Figura 2: Esquema de convergência das fontes de evidência de pesquisa.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Na figura 2, busca-se ilustrar um caso de convergência das fontes de evidências que serão utilizadas para um mesmo conceito relacionado à razão e proporção mobilizado pelo estudante. Neste caso, constrói-se uma conclusão de pesquisa com relevância considerável. Por outro lado, se apenas uma fonte de evidência aponta para um determinado conceito mobilizado pelo estudante, é provável que o pesquisador não possua segurança suficiente para elaborar uma conclusão a partir deste apontamento. Sendo assim, na medida do possível, serão elaboradas conclusões de estudo a partir de convergências entre diferentes fontes de evidências para um mesmo fato, para que a resposta à pergunta de pesquisa esteja suficientemente apoiada às evidências coletadas durante o estudo. Ainda sim, a fonte de evidência em que se baseia a maior parte das conclusões desta pesquisa é o registro escrito de cada grupo.

3.2 ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES PRÁTICAS

O planejamento das atividades consiste na realização de 4 encontros de 2 horas/aula cada um, e o mesmo foi realizado em 3 turmas de sétimo ano em Ensino Fundamental, totalizando 24 horas/aula.

Em cada um dos encontros, foi proposto um conjunto de problemas matemáticos que necessitam de raciocínios relacionados proporcionalidade entre grandezas para serem resolvidos. Os alunos foram divididos em grupos de 2 ou 3 alunos para trabalharem juntos em todos os encontros da atividade a fim de solucionar os problemas, registrando seus raciocínios nas folhas entregues a cada grupo. Ao final de cada encontro, os grupos foram convidados a vir à frente da turma relatar para a turma e professora a forma como resolveram os problemas matemáticos. A partir dos relatos dos grupos, a professora expôs novamente as ideias observadas durante a atividade para que se chegasse, em grupo, a um consenso sobre cada problema proposto.

Como a proposição dos problemas aconteceu nos 4 encontros seguindo a ordem planejada, os problemas estão descritos apenas no relato das atividades, para que não constassem duas vezes neste trabalho.

4. RELATO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Os alunos participantes da pesquisa são alunos da professora/pesquisadora na disciplina de matemática na E.M.E.F. Pernambuco, estudantes do sétimo ano do ensino fundamental na época da coleta de dados. Antes do início da realização das atividades, a professora explicou o objetivo da pesquisa, o qual era analisar a forma como eles – os alunos – iriam resolver um conjunto de problemas matemáticos que seriam propostos, e que eles deveriam formar trios para incentivar a troca de ideias entre eles durante a realização das questões. De forma geral, as turmas demonstraram gostar da ideia de participar de uma pesquisa. Observando a aceitação da proposta nas turmas, foi combinado com cada uma das turmas envolvidas que os próximos quatro encontros com a professora (os quais teriam duas horas/aulas cada) seriam para a realização deste trabalho.

Foi realizada a aplicação das atividades com cada turma separadamente, mas, para organização e análise das informações obtidas, foram agrupadas as resoluções de cada problema proposto nas três turmas, compondo um conjunto único de dados.

4.1. PRIMEIRO ENCONTRO

Iniciei o encontro solicitando que os alunos formassem grupos, conforme já havia sido combinado anteriormente. Os alunos aproximaram suas classes, conforme pode ser observado na figura 1, e algumas orientações foram dadas aos grupos: eles deveriam escrever o máximo de informações nas folhas de problemas matemáticos que receberiam, contendo explicações mais claras possíveis acerca do processo que utilizaram para resolver o problema. Os alunos também foram informados que, ao final de cada um dos dois períodos de aula, haveria um momento dedicado ao compartilhamento de ideias com o grande grupo, no qual alguns grupos poderiam ir à frente explicar aos demais como resolveram cada um dos problemas.

Figura 3: turma 7A organizada em grupos e iniciando o trabalho.

Fonte: acervo pessoal.

Acerca da aquisição de conceitos e da categorização dos problemas propostos, podemos observar que a prática realizada com os alunos pertence, de modo geral, à segunda categoria de problemas proposta por Vergnaud (1993), isto é, aquela em que o sujeito não possui as competências necessárias para resolvê-los de imediato, precisando recorrer à exploração do problema, testagens, identificação de semelhanças com situações anteriores, entre outras estratégias preliminares para traçar o seu caminho até a resolução.

Foi proposto, então, o problema 1, descrito no quadro a seguir.

Quadro 7: problema 1.

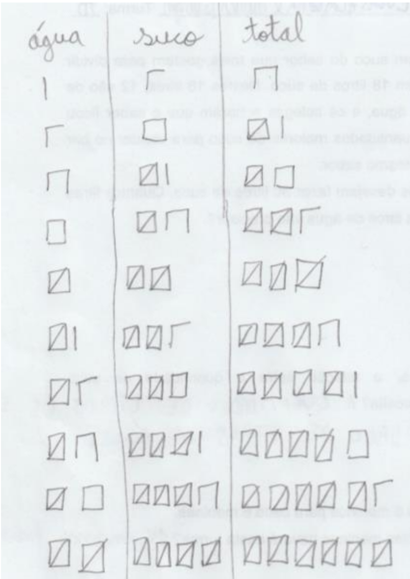
Problema 1: Renata e Juliana fizeram um suco do sabor que mais gostam para dividir com a turma. Para isso, fizeram 18 litros de suco. Nestes 18 litros, 12 são de suco concentrado e 6 são de água, e os colegas acharam que o sabor ficou muito bom e quiseram fazer quantidades maiores do suco para vender no bar da escola, mas que tivesse o mesmo sabor. a) Vamos supor que os colegas desejam fazer 30 litros de suco. Quantos litros de suco concentrado e quantos litros de água vão precisar? b) Como podemos expressar a relação entre a quantidade de suco concentrado e de água nesta receita?

No problema de número 1, dos 26 grupos que realizaram o problema, 22 fizeram a observação de que a receita tinha de respeitar a seguinte regra: na mistura, a quantidade de suco concentrado tinha que ser o dobro da quantidade de água. Foi identificado pelos alunos, dentro dos conceitos relacionados ao Campo Conceitual Multiplicativo, um operador horizontal que transforma uma quantidade de água em uma quantidade de suco correspondente. Os 22 grupos que identificaram este operador, conseguiram chegar à resposta correta. Porém, surgiram diferentes esquemas para decidirem, afinal, quais as quantidades de suco concentrado e de água deveriam ser utilizadas para gerar uma mistura de 30 litros.

Destes 22 grupos, 20 chegaram à conclusão realizando testes: escolhiam dois valores que, juntos, somavam 30 litros, e observavam se um valor correspondia ao dobro do outro, até que, por tentativa e erro, obtinham a resposta. Em relação a este tipo esquema, podemos observar conhecimentos organizadores de pensamento relacionados aos campos aditivos e multiplicativos simultaneamente: primeiramente, podemos perceber que os estudantes recorreram a uma composição de duas medidas que totaliza em uma terceira medida (categoria 1 de problemas do campo aditivo) e, logo após, verificaram se o operador vertical identificado ($\times 2$) era satisfeito entre as medidas encontradas.

Dois grupos montaram uma tabela para organizar as possibilidades de mistura, como mostra a figura 4, que contém a forma como um destes trios conseguiu concluir a questão.

Figura 4: registros do grupo 13 para a resolução da questão 1.

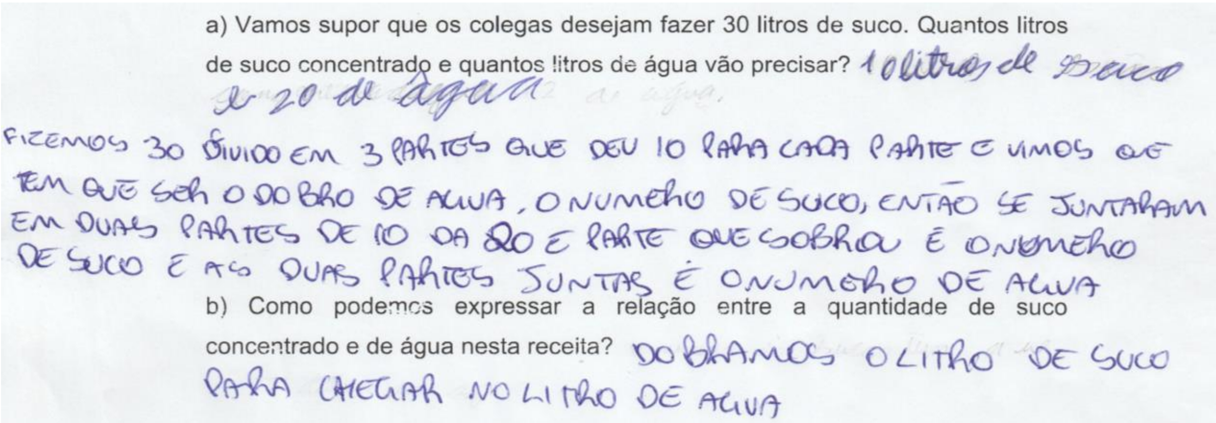


Fonte: acervo pessoal.

Na resolução acima, a qual apresenta um esquema organizado por uma estrutura que respeita o isomorfismo entre as medidas do problema, podemos identificar, através da tabela, o operador ($\times 2$) sendo utilizado entre as colunas “água” e “suco” e, após, a composição entre as medidas que dá o total da mistura.

Um dos quatro grupos que não chegou à resposta correta (figura 5), embora com um pequeno engano no percurso, utilizou um raciocínio coerente e próximo à ideia de fração: pensou em dividir os 30 litros em três partes iguais e distribuir estas partes de forma a respeitar a proporção entre os ingredientes conforme a mistura original.

Figura 5: resposta e justificativa do grupo 8 para a questão 1.


a) Vamos supor que os colegas desejam fazer 30 litros de suco. Quantos litros de suco concentrado e quantos litros de água vão precisar? 10 litros de suco e 20 de água

FIZEMOS 30 DIVIDO EM 3 PARTES QUE DEU 10 PARA CADA PARTE E VIMOS QUE TEM QUE SER O DOBRO DE AGUA, O NUMERO DE SUCO, ENTÃO SE JUNTARAM EM DUAS PARTES DE 10 DA 20 E PARTE QUE SOBRA É O NUMERO DE SUCO E AS DUAS PARTES JUNTAS É O NUMERO DE AGUA

b) Como podemos expressar a relação entre a quantidade de suco concentrado e de água nesta receita? DOBRAMOS O LITRO DE SUCO PARA CHEGAR NO LITRO DE AGUA

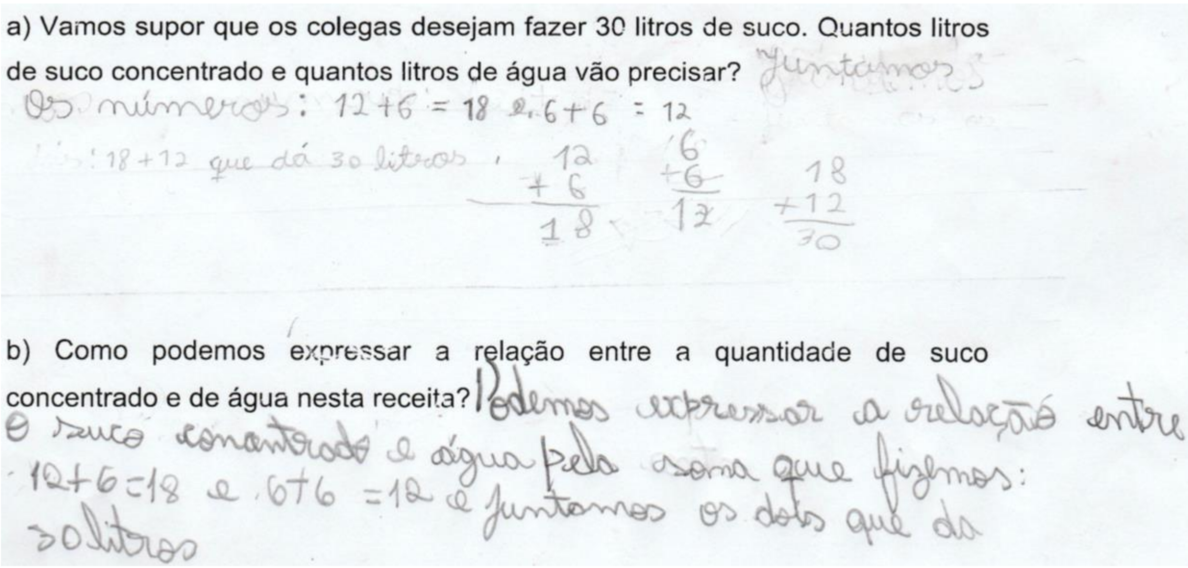
Fonte: acervo pessoal.

Na resolução acima, é possível observar que os estudantes identificaram uma relação entre o total de mistura e os dois ingredientes envolvidos (água e suco concentrado) no problema. Embora tenham cometido o equívoco de considerar que a mistura deveria conter o dobro da quantidade de água quando comparada à quantidade de suco e não ao contrário, foi possível perceber que identificaram um operador horizontal fracionário $\left(\times \frac{2}{3}\right)$, mesmo não utilizando uma linguagem fracionária para expressá-lo.

No âmbito escolar, é comum observarmos, em documentos regulamentadores do currículo e livros didáticos, a razão entre grandezas sendo expressa como um número fracionário. No entanto, a resolução utilizada por este grupo mostra que o número fracionário foi substituído por uma linguagem escrita que expressa a ideia de razão de forma suficiente, sem recorrer à linguagem fracionária. É possível que este fato deve fazer com que o leitor realize o seguinte questionamento: é mesmo necessário que se defina a ideia de razão através da linguagem fracionária, ou a linguagem escrita, além de mais natural para o estudante, não pode expressá-la de forma suficiente? Enquanto professora-pesquisadora, penso que a utilização da fração, neste caso, somente facilita na operacionalização, no desenvolvimento de esquemas como a “regra de três”, que muitas vezes são automatizados pelos estudantes sem a verdadeira compreensão dos conceitos e teoremas-em-ação envolvidos no esquema, o que não é suficiente para a aquisição de um conceito, segundo Vergnaud (1993).

Retornando às respostas dos alunos ao problema 1, outros três grupos apresentaram como resposta 18 litros de suco concentrado e 12 litros de água. Nos registros feitos por estes grupos, foi possível identificar a utilização de esquemas pertencentes ao campo conceitual aditivo, isto é, apresentavam uma estrutura que fazia uso exclusivamente de adições ou subtrações de um mesmo valor, sem levar em consideração a proporcionalidade entre as medidas. Os grupos partiam da receita que tinham no problema: 12 litros de suco e 6 litros de água e seguiam acrescentando 1 litro de água e 1 litro de suco concentrado, até que encontravam o total de 30 litros de mistura, como podemos observar na figura 6.

Figura 6: resposta e justificativa do grupo 1 para a questão 1.


a) Vamos supor que os colegas desejam fazer 30 litros de suco. Quantos litros de suco concentrado e quantos litros de água vão precisar? Juntamos os números: 12+6 = 18 e 6+6 = 12 : 18+12 que dá 30 litros

12 + 6 = 18; 6 + 6 = 12; 18 + 12 = 30

b) Como podemos expressar a relação entre a quantidade de suco concentrado e de água nesta receita? Podemos expressar a relação entre o suco concentrado e água pela soma que fizemos: 12+6=18 e 6+6=12 e juntamos os dois que da 30litros

Fonte: acervo pessoal.

Nas resoluções como acima, identificadas em três grupos de alunos, podemos perceber, conforme ressalta Vergnaud (1993), a limitação da ideia de considerar a multiplicação e a soma de parcelas iguais como equivalentes. Embora, em muitos problemas, essa ideia de equivalência possa não interferir nos resultados obtidos, neste caso, somar parcelas iguais de suco concentrado e de água à receita gerou um resposta equivocada ao problema, já que a relação entre estes ingredientes respeitava uma proporção diferente de 1:1.

No quadro a seguir, podemos observar um resumo acerca dos esquemas utilizados pelos alunos no primeiro problema proposto.

Quadro 8: resumo dos esquemas obtidos no problema 1.

Total de 26 grupos analisados	**22 grupos acertaram**	20 grupos estipulavam quantidades envolvidas na mistura que, somadas, totalizavam 30 litros e, após, verificavam se estas quantidades satisfaziam o operador horizontal identificado inicialmente.
		2 grupos elaboraram tabelas respeitando um operador horizontal entre as quantidades envolvidas e verificando se ambas, somadas, totalizavam o total desejado.
	4 grupos erraram	1 grupo considerou uma proporção inversa entre as quantidades envolvidas na mistura
		3 grupos utilizaram esquemas exclusivamente do campo aditivo, não respeitando as proporções entre os ingredientes

Fonte: síntese da autora.

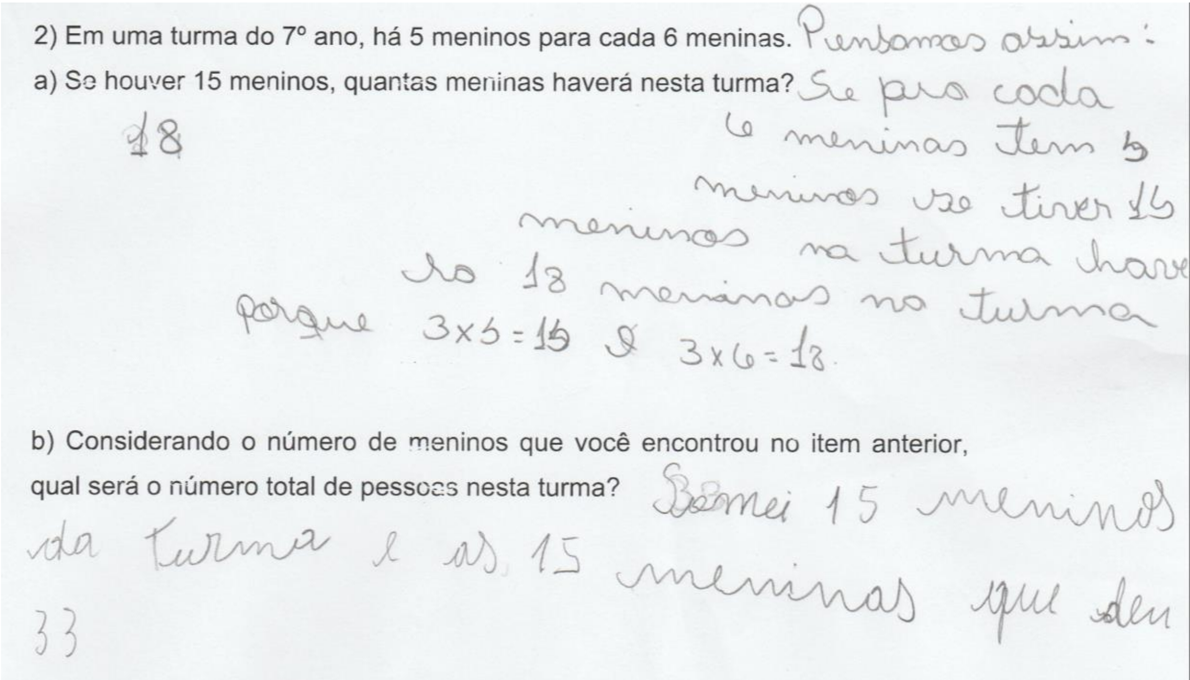
Logo após a discussão do problema 1, foi proposto o problema 2, o qual pode ser observado no quadro abaixo.

Quadro 9: problema 2

Problema 2: Em uma turma do 7º ano, há 5 meninos para cada 6 meninas. a) Se houver 15 meninos, quantas meninas haverá nesta turma? b) Considerando o número de meninos que você encontrou no item anterior, qual será o número total de pessoas nesta turma?

Nesta situação, 25 dos 26 grupos acertaram a resposta que era de 18 meninas na turma. Dos 25 grupos que acertaram, predominou o raciocínio multiplicativo, pois 17 deles registraram ter feito uma multiplicação por 3 para chegar à resposta adequada. De forma geral, os grupos justificaram a multiplicação por 3 por terem observado que o número de meninos também foi multiplicado por 3, conforme exemplo mostrado na figura a seguir.

Figura 7: resposta e justificativa do grupo 12 para a questão 2.


2) Em uma turma do 7º ano, há 5 meninos para cada 6 meninas. Pensamos assim:
a) Se houver 15 meninos, quantas meninas haverá nesta turma? Se pra cada 6 meninas tem 5 meninos se tiver 15 meninos na turma haverão 18 meninas na turma porque 3x5=15 e 3x6=18.
18

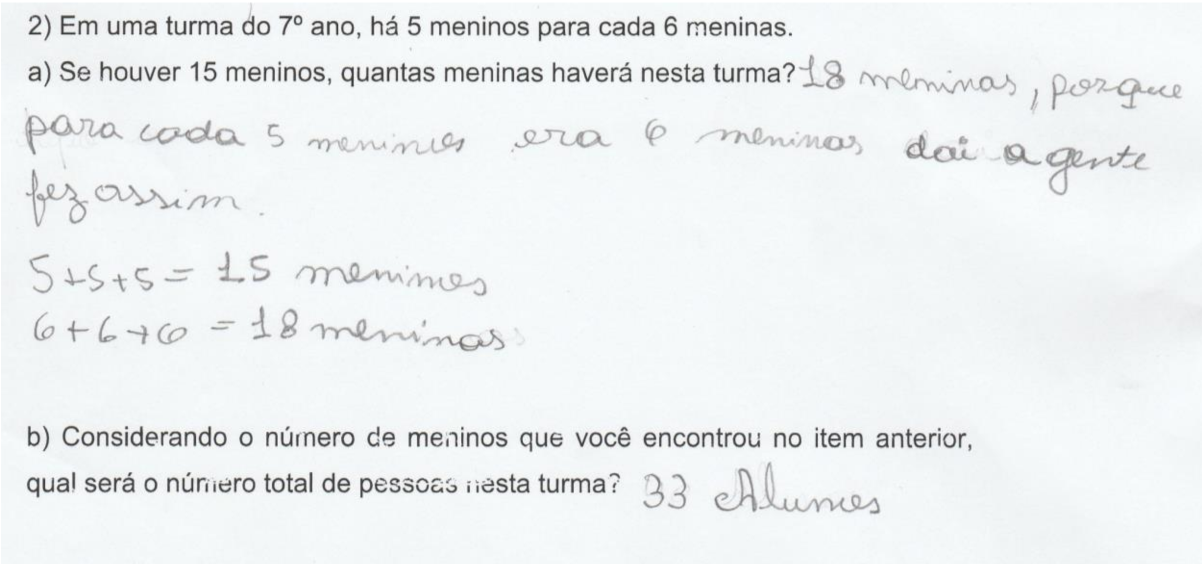
b) Considerando o número de meninos que você encontrou no item anterior, qual será o número total de pessoas nesta turma? Somei 15 meninos da turma e as 15 meninas que deu
33

Fonte: acervo pessoal.

Identificando os conceitos da TCC de Vergnaud neste tipo de resolução, o qual foi praticamente unânime no grupo de resoluções analisado, podemos observara percepção, por parte dos estudantes, de um operador vertical ($\times 3$) adimensional dentre a grandeza “número de meninos”, e, posteriormente, a aplicação deste mesmo operador vertical na grandeza “número de meninas”. Neste sentido, observa-se a ideia de proporcionalidade como sendo um conhecimento organizador do pensamento utilizado no esquema, pois houve a preocupação em manter a razão entre meninos e meninas descrita no enunciado do problema, mesmo, novamente, não sendo necessário que os estudantes recorressem à linguagem fracionária para expressá-la.

Os outros 8 grupos que chegaram à resposta correta justificaram seus raciocínios através de adições, isto é, explicaram ter somado 5+5+5 para obter 15 meninos e, por isso, deveriam somar 6+6+6 para encontrar o número de meninas, como podemos observar na imagem abaixo.

Figura 8: resposta e justificativa do grupo 22 para a questão 2.



2) Em uma turma do 7º ano, há 5 meninos para cada 6 meninas.

a) Se houver 15 meninos, quantas meninas haverá nesta turma? 18 meninas, porque para cada 5 meninos era 6 meninas daí a gente fez assim.

5+5+5 = 15 meninos

6+6+6 = 18 meninas

b) Considerando o número de meninos que você encontrou no item anterior, qual será o número total de pessoas nesta turma? 33 Alunos

Fonte: acervo pessoal.

Nestes grupos que fizeram uso de adições sucessivas de parcelas iguais, observa-se um tratamento através de operações matemáticas características de problemas do campo aditivo, na qual as situações envolvem uma adição de medidas que totaliza em uma outra medida. No entanto, destaco que o esquema mostrou-se suficiente e coerente para resolver o problema neste caso, pois, embora os alunos não tenham expressado, de forma escrita, um operador multiplicativo entre as grandezas do problema, a proporcionalidade entre as mesmas acabou sendo respeitada de forma multiplicativa. Neste sentido, mostra-se necessário que o professor não invalide ou refute estas estratégias dos alunos, mas, pelo contrário, utilize e expanda os raciocínios observados, na busca de que os estudantes alcancem esquemas que permitam resolver problemas mais complexos.

Um dos grupos indicou que a resposta eram 16 meninas sem demonstrar nenhuma resolução escrita em sua folha. Ao observar as discussões do grupo durante a resolução da questão, observei que realizaram um raciocínio aditivo, partindo de um grupo de 5 meninos e 6 meninas e acrescentando componentes da mesma forma (para cada menino, uma menina) até obter os 15 meninos, encontrando como resultado 16 meninas. Este tipo de esquema também foi identificado no problema anterior e indica tanto a limitação da ideia aditiva contida na estratégia utilizada como a ausência da proporcionalidade na organização do pensamento dos estudantes.

No item B da questão, todos os grupos, mesmo aquele grupo que indicou a resposta incorreta no item A, realizou um raciocínio coerente no item B: somou as grandezas “número de meninos” e “número de meninas” do grupo para obter o total, caracterizando de forma correta um problema da categoria 1 do campo aditivo.

Ainda no primeiro encontro, foi proposto o próximo problema, o qual pode ser observado no quadro abaixo.

Quadro 10: problema 3.

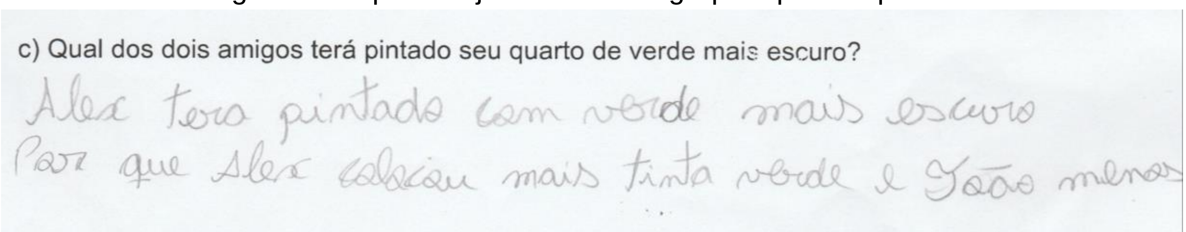
Problema 3: Dois amigos fizeram duas misturas de tinta verde para pintar seus respectivos quartos. Para cada 3 litros de mistura, João usou 1 litro de tinta branca e o restante de tinta verde. Já Alex, para cada 5 litros de mistura, usou 2 litros de tinta branca e o restante de tinta verde. a) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de João? b) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de Alex? c) Qual dos dois amigos terá pintado seu quarto de verde mais escuro?

O objetivo principal de propor este problema é expresso no item C, em que os estudantes devem comparar as razões entre as tintas branca a verde em misturas distintas. No entanto, os itens A e B são propostos anteriormente para que os alunos expressem com a linguagem de sua preferência, a relação que observarem entre as quantidades.

Em relação aos itens A e B, das 24 respostas recebidas, foi observada uma linguagem fracionária em apenas 3 respostas, sendo as outras 21 respostas através de linguagem escrita que descreve, resumidamente, quantos baldes de tinta branca são necessários para cada balde de tinta verde em cada mistura

Em relação ao item C, das 24 respostas recebidas, verificamos que 20 grupos escolheram o Alex, justificando que ele teria usado mais tinta verde, como por exemplo, podemos observar na figura abaixo.

Figura 9: resposta e justificativa do grupo 8 para a questão 3.


c) Qual dos dois amigos terá pintado seu quarto de verde mais escuro?

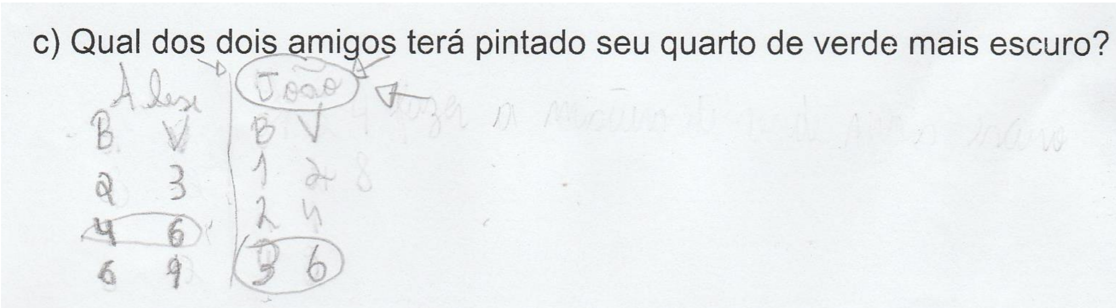
Alex tera pintado com verde mais escuro
Por que Alex colocou mais tinta verde e João menos

Fonte: acervo pessoal.

Nesta escolha, é possível perceber que os estudantes não levaram em consideração a quantidade de tinta branca nas receitas, considerando apenas a verde, pois é a tinta que colabora para que a mistura fique em tom de verde mais escuro.

Dentre as outras 4 respostas recebidas, foi possível perceber quatro tipos de esquemas diferentes. Um dos grupos construiu uma tabela (figura 10) comparando o uso das duas cores de tintas pelos dois personagens do problema, até verificar uma mistura que utilizasse a mesma quantidade de tinta verde. Encontrando estas misturas nas tabelas de cada um dos personagens, verificaram aquele que utilizou menos tinta branca, para identificar o personagem que pintou seu quarto de verde mais escuro.

Figura 10: resposta e justificativa do grupo 2 para a questão 3.

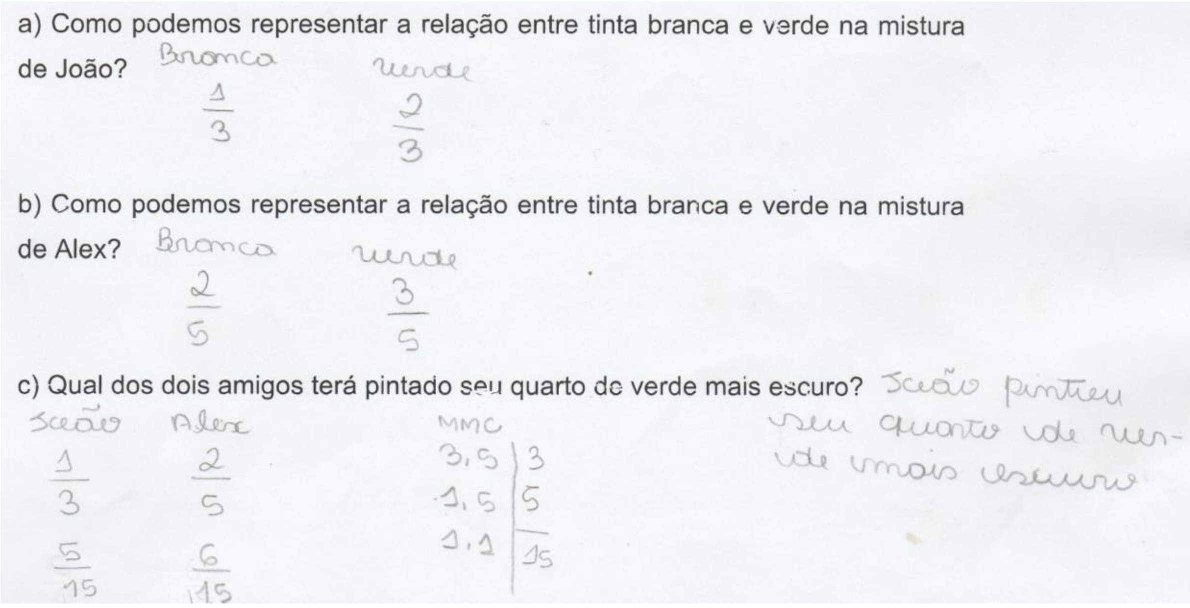


Fonte: acervo pessoal.

Observa-se, neste tipo de esquema, que o grupo organizou seu pensamento através da identificação do isomorfismo entre as medidas do problema e identificou, em ambas as misturas, um operador horizontal entre as grandezas “baldes de tinta branca” e “baldes de tinta verde” na tabela construída, manipulando as grandezas até encontrar razões que fossem capazes de justificar a escolha do grupo pela mistura de Alex ou João. Sendo assim, este esquema apresenta a busca pela razão entre grandezas do problema sem, no entanto, utilizar a tradicional linguagem fracionária para se referir a estas ideias.

O segundo grupo analisado foi um dos que utilizou a fração para representar as quantidades de tinta, como podemos observar na figura 9. Utilizando as frações obtidas relacionadas à tinta branca, encontraram frações equivalentes e que tivessem o mesmo denominador, a fim de encontrar aquele que utilizou menos tinta branca, assim como o grupo anterior. Também é possível identificar a utilização de um esquema guiado pela busca da razão entre grandezas.

Figura 11: resposta e justificativa do grupo 12 para a questão 3.



a) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de João?

Branca $\frac{1}{3}$ verde $\frac{2}{3}$

b) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de Alex?

Branca $\frac{2}{5}$ verde $\frac{3}{5}$

c) Qual dos dois amigos terá pintado seu quarto de verde mais escuro? João pintou seu quarto de verde mais escuro

João $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{15}$ Alex $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{15}$

MMC

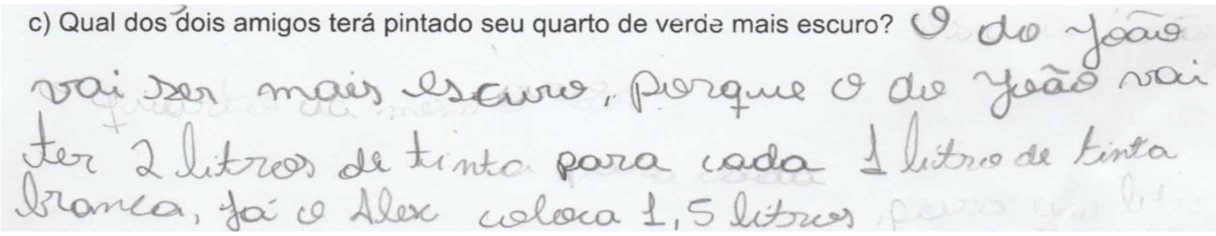
3, 5	3
1, 5	5
1, 1	15

Fonte: acervo pessoal.

O esquema apresentado pelo grupo mostra um domínio acerca do número fracionário, frações equivalentes e comparações entre frações. Neste caso, a utilização da linguagem fracionária na resolução surgiu de forma espontânea no grupo e, quando questionados verbalmente por mim a respeito de como tiveram esta ideia para a resolução, mencionaram que haviam feito desenhos de retângulos divididos em 3 e 5 partes para representar as partes de tinta verde e branca na mistura, o que os remeteu ao trabalho com representação gráfica de frações trabalhada no ano anterior.

Um outro grupo buscou verificar a quantidade de tinta verde utilizada para cada litro de tinta branca, concluindo que João seria o personagem a pintar seu quarto de verde mais escuro, como observa-se na figura 12.

Figura 12: resposta e justificativa do grupo 8 para a questão 3.



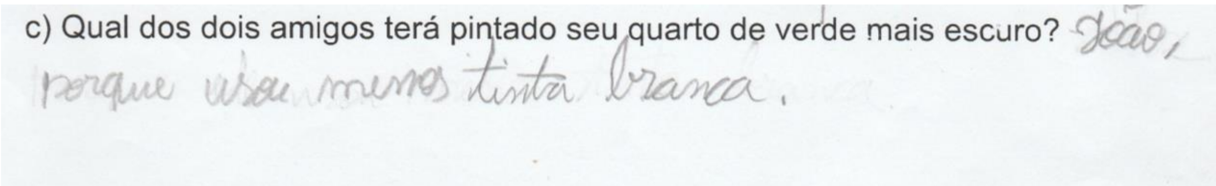
c) Qual dos dois amigos terá pintado seu quarto de verde mais escuro? O do João vai ser mais escuro, porque o do João vai ter 2 litros de tinta para cada 1 litro de tinta branca, já o Alex coloca 1,5 litros

Fonte: acervo pessoal.

Neste caso, este esquema utilizado pelos estudantes mostra a busca por um valor fixo unitário para a quantidade de tinta branca e a observação da quantidade correspondente de tinta verde. Desta forma, podemos observar que o grupo buscou comparar os operadores horizontais que identificou entre as quantidades de tinta branca e verde nas duas misturas para decidir qual delas teria mais concentração de tinta verde. Observamos, neste esquema, a noção de proporcionalidade presente e determinante para a obtenção do resultado.

Por fim, um dos grupos escolheu o João apenas justificando que ele teria usado menos tinta branca, sem desenvolver um esquema em linguagem escrita, como podemos observar na figura 13. Durante a aplicação dos problemas, também não foi possível identificar os raciocínios utilizados através de falas ou rascunhos dos alunos.

Figura 13: resposta do grupo 18 para a questão 3.


c) Qual dos dois amigos terá pintado seu quarto de verde mais escuro? João, porque usou menos tinta branca.

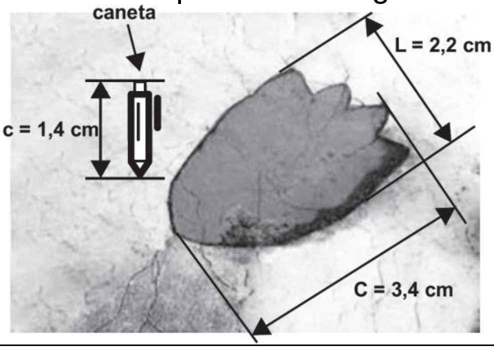
Fonte: acervo pessoal.

De acordo com o que observei nos materiais didáticos durante minha trajetória como professora, este problema de comparação entre razões geralmente é desenvolvido através de comparação entre frações, utilizando frações equivalentes até que se obtenha o mesmo denominador e se possa comparar o numerador, o que muitas vezes é automatizado pelo estudante sem compreensão do motivo pelo qual estas frações estão sendo comparadas. Apesar de poucas respostas corretas a este problema, naquelas em que observei sucesso na resolução, pude identificar esquemas com linguagens distintas da fracionária, mas que levaram à resposta correta de forma coerente e fazendo uso apenas de conhecimentos prévios dos estudantes.

A seguir, foi proposto o último problema do primeiro encontro, o qual pode ser observado no quadro a seguir.

Quadro 11: problema 4

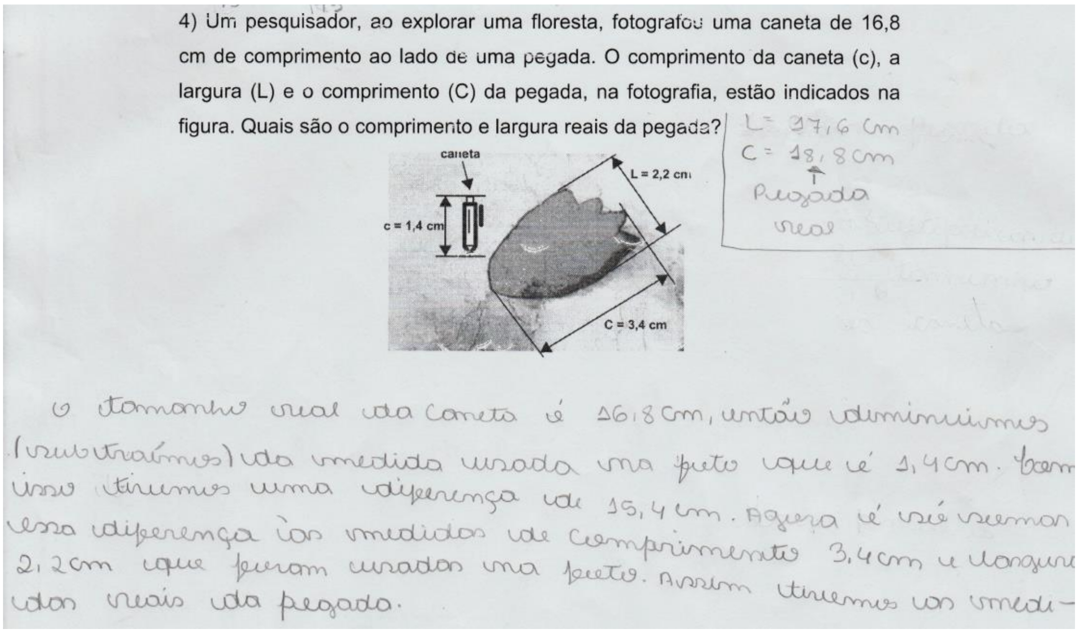
Problema 4 (ENEM 2015): Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados na figura. Quais são o comprimento e largura reais da pegada?



Este problema gerou bastante dificuldade e discussão entre os grupos. A questão foi proposta a 26 grupos e 18 apresentaram alguma resolução. Dentre as 18 respostas analisadas, pudemos classificar 14 como corretas e 4 como incorretas. No entanto, foram identificados conhecimentos organizadores de pensamento distintos.

Dentre as 4 respostas incorretas, foi identificada em 2 resoluções uma linha de raciocínio aditiva, a qual, apesar se equivocada, foi explicada e desenvolvida detalhadamente pelos grupos. Ambos observaram quantos centímetros a caneta diminuiu do seu tamanho real para o tamanho adquirido na fotografia e concluíram que as dimensões da pegada na fotografia deveriam aumentar este mesmo número de centímetros, conforme figuras 14 e 15.

Figura 14: resposta e justificativa do grupo 12 para a questão 4.



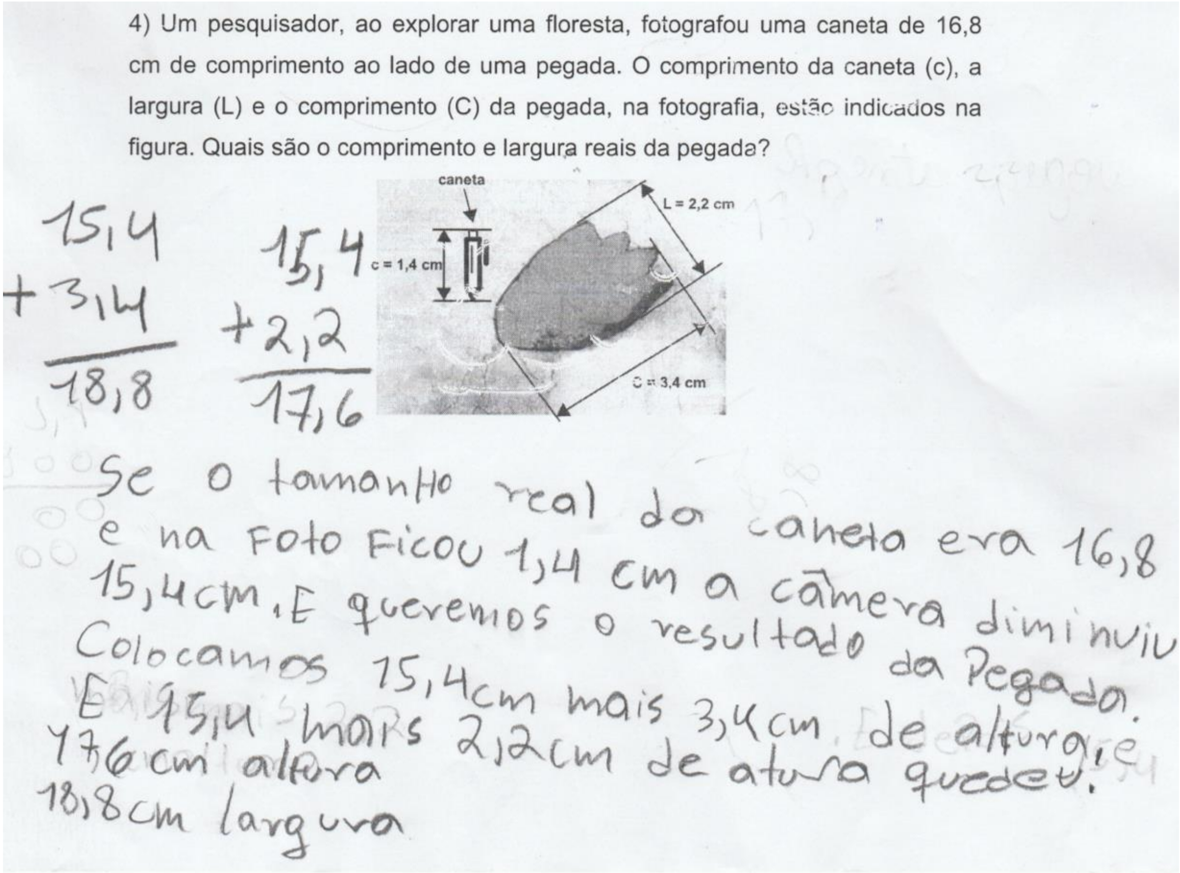
4) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados na figura. Quais são o comprimento e largura reais da pegada?

L = 17,6 cm
C = 18,8 cm
Pegada real

O tamanho real da caneta é 16,8 cm, então diminuímos (subtraímos) da medida usada na foto que é 1,4 cm. Com isso tivemos uma diferença de 15,4 cm. Agora é só somar essa diferença às medidas de comprimento 3,4 cm e largura 2,2 cm que foram usados na foto. Assim teremos as medidas reais da pegada.

Fonte: acervo pessoal.

Figura 15: resposta e justificativa do grupo 7 para a questão 4.


4) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados na figura. Quais são o comprimento e largura reais da pegada?

15,4
+3,4
18,8

15,4
+2,2
17,6

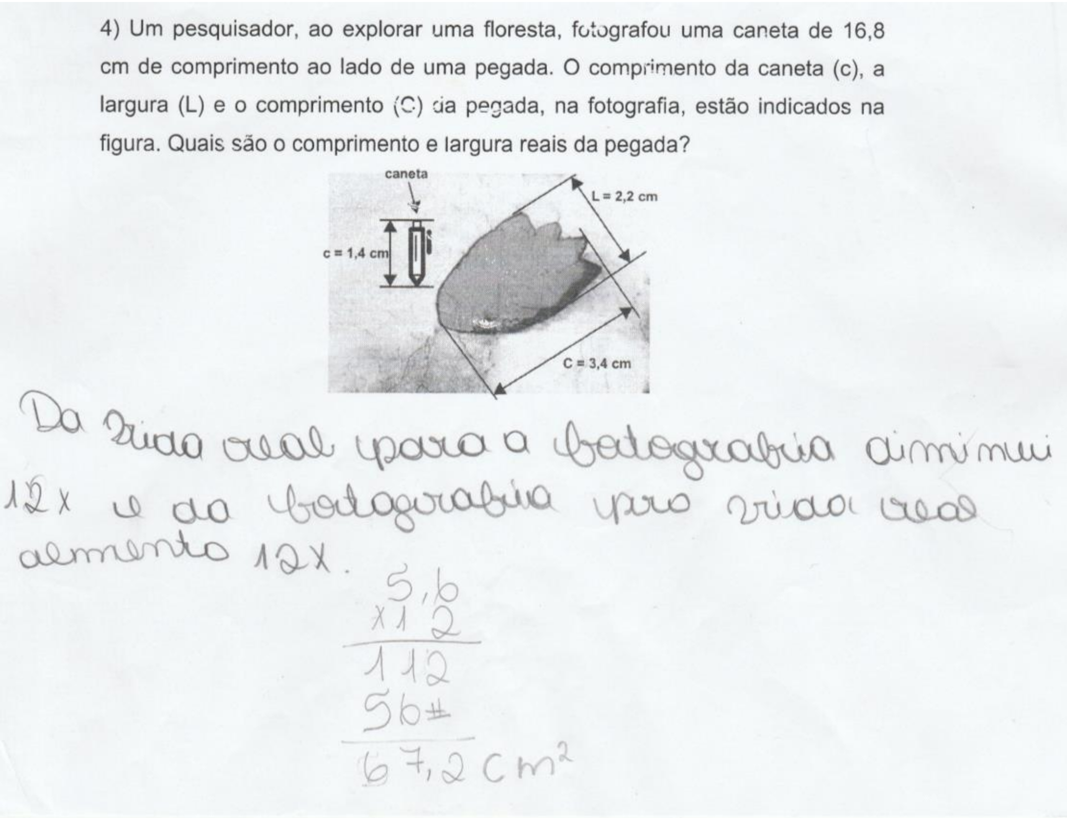
Se o tamanho real da caneta era 16,8
e na foto ficou 1,4 cm a câmera diminuiu
15,4cm. E queremos o resultado da pegada.
Colocamos 15,4cm mais 3,4cm de altura e
E 15,4 mais 2,2cm de atura que deu.
17,6 cm altura
18,8cm largura

Fonte: acervo pessoal.

Nas resoluções identificadas acima, observa-se a ausência da proporcionalidade como organizador do pensamento, ao passo que os estudantes consideram que deve ocorrer um aumento ou diminuição igual nas dimensões, independentes de elas serem originalmente iguais ou não. Esta noção leva os estudantes a realizarem somas e subtrações de um mesmo valor em ambas as grandezas, já que as dimensões reais da pegada, no seu entendimento, não irão interferir no quando ela deve diminuir em sua representação na fotografia.

Nas resoluções dos outros dois grupos que não apresentaram respostas corretas, foi identificado que os mesmos conseguiram concluir que a caneta diminuiu 12 vezes seu tamanho original em relação ao tamanho na fotografia, mas não deram seguimento ao raciocínio de forma correta, pois somaram largura e comprimento para então realizar a multiplicação por 12, conforme exemplo da figura 16.

Figura 16: resposta e justificativa do grupo 24 para a questão 4.


4) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados na figura. Quais são o comprimento e largura reais da pegada?

Da vida real para a fotografia diminui 12x e da fotografia pro vida real almento 12X.

$$\begin{array}{r} 5,6 \\ \times 12 \\ \hline 112 \\ 56+ \\ \hline 67,2\ cm^2 \end{array}$$

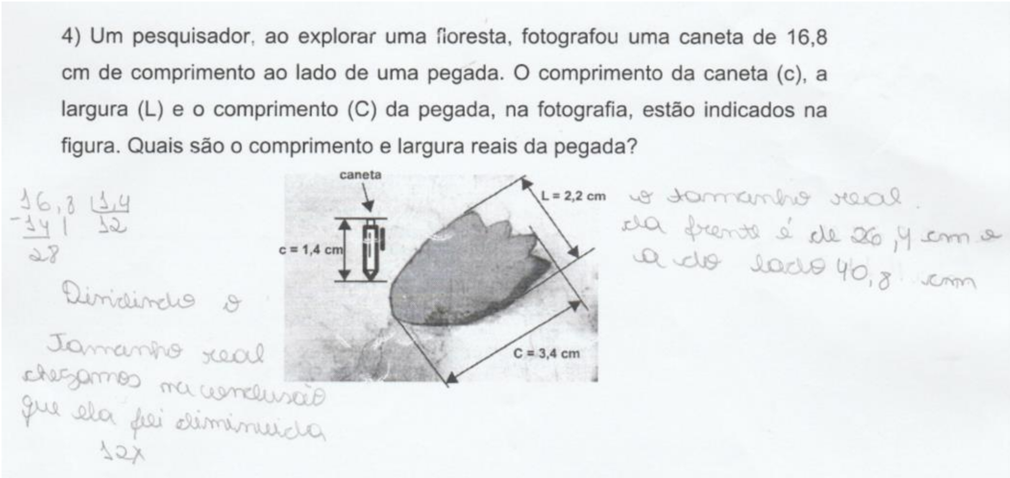
Fonte: acervo pessoal.

Foi identificada uma linha de raciocínio semelhante nas 14 respostas corretas: os grupos descobriram quantas vezes o tamanho da caneta foi diminuído e multiplicaram as dimensões da pegada por este resultado.

Nestas resoluções, é possível observar a presença da proporcionalidade como um organizador do pensamento que embasa os esquemas utilizados pelos grupos. Ainda, é possível identificar que, como primeiro passo das suas resoluções, os estudantes buscaram detectar um operador horizontal que leva as dimensões reais às dimensões da fotografia utilizando os dados do problema, utilizando o fato de que a dimensão real da caneta é de 16,8cm e o tamanho observado na fotografia é de 1,4cm.

No entanto, foi percebida uma diferença utilizada pelos grupos para dar seguimento ao esquema e descobrir quantas vezes o tamanho da caneta foi diminuído. Dos 14 grupos, 3 explicaram ter feito a divisão de 16,8cm por 1,4cm para obter o operador $(\div 12)$, isto é, fizeram uso da identificação de um operador inverso através da divisão, como podemos observar na figura 17.

Figura 17: resposta e justificativa do grupo 17 para a questão 4.



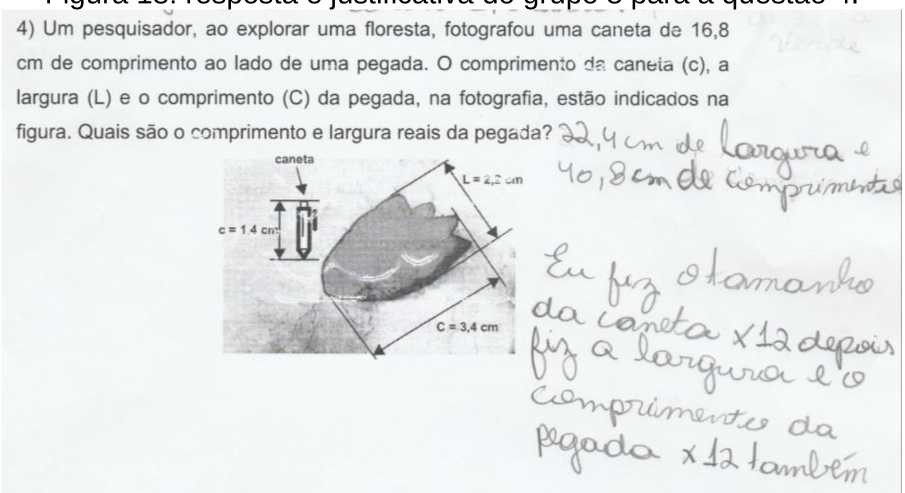
Fonte: acervo pessoal.

Os outros 11 grupos indicaram ter utilizado multiplicações do comprimento 1,4cm até obter o comprimento real de 16,8cm, o que indica que procuravam o operador horizontal multiplicativo que leva o comprimento na fotografia ao comprimento real.

Acredito que a maioria dos grupos optou por encontrar o operador horizontal através da multiplicação, pois, em geral, os alunos apresentam mais dificuldade no algoritmo da divisão, que foi agravada pelo fato de divisor e dividendo serem números decimais, fazendo com que optassem pelo processo inverso da divisão.

Nas resoluções presentes nas figuras 17 e 18, embora distintas, podemos identificar que a busca pela razão entre o comprimento na fotografia e o comprimento real organiza a ação dos estudantes nos esquemas.

Figura 18: resposta e justificativa do grupo 8 para a questão 4.



Fonte: acervo pessoal.

4.2 SEGUNDO ENCONTRO

O segundo encontro foi iniciado com a solicitação de que os alunos formassem grupos conforme já havia ocorrido no encontro anterior. Os alunos aproximaram suas classes e algumas orientações foram retomadas com os grupos: eles deveriam escrever o máximo de informações possíveis nas folhas de problemas matemáticos que receberiam, contendo explicações mais claras possíveis acerca do processo que utilizaram para resolver o problema. Além disso, também foi relembrado que, ao final de cada um dos dois períodos de aula, haveria um momento dedicado ao compartilhamento de ideias com o grande grupo, no qual alguns grupos poderiam ir à frente explicar aos demais como resolveram cada um dos problemas.

Desta forma, os estudantes começaram a trabalhar no primeiro problema proposto no encontro, problema 5, que pode ser observado no quadro abaixo

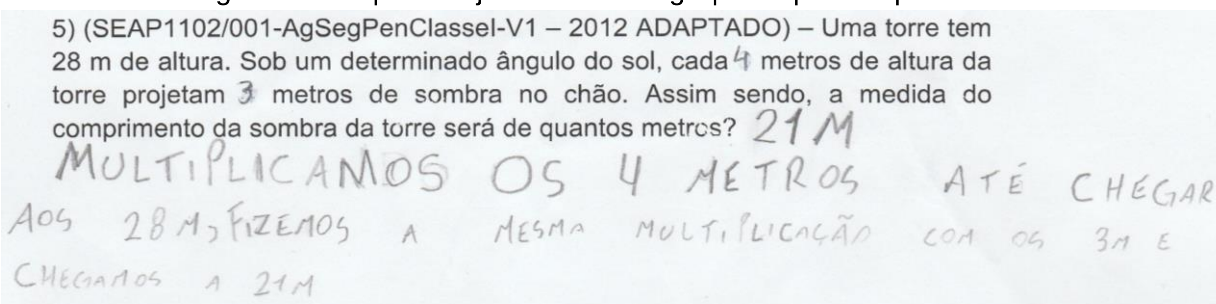
Quadro 12: problema 5

Problema 5: (SEAP1102/001-AgSegPenClasseI-V1 – 2012 ADAPTADO) – Uma torre tem 28 m de altura. Sob um determinado ângulo do sol, cada 4 metros de altura da torre projetam 3 metros de sombra no chão. Assim sendo, a medida do comprimento da sombra da torre será de quantos metros?

Foram recolhidas 26 respostas a este problema, das quais 24 foram classificadas como corretas e 2 como incorretas.

Ao analisar as respostas corretas, foram identificadas duas formas de resolução. Dos 24 grupos, 12 indicaram ter descoberto que a resposta seria 21m demonstrando a opção pela multiplicação ao invés da divisão para descobrir a informação procurada.

Figura 19: resposta e justificativa do grupo 25 para a questão 5.


5) (SEAP1102/001-AgSegPenClasseI-V1 – 2012 ADAPTADO) – Uma torre tem 28 m de altura. Sob um determinado ângulo do sol, cada 4 metros de altura da torre projetam 3 metros de sombra no chão. Assim sendo, a medida do comprimento da sombra da torre será de quantos metros? 21 M

MULTIPLICAMOS OS 4 METROS ATÉ CHEGAR AOS 28 M, FIZEMOS A MESMA MULTIPLICAÇÃO COM OS 3M E CHEGAMOS A 21M

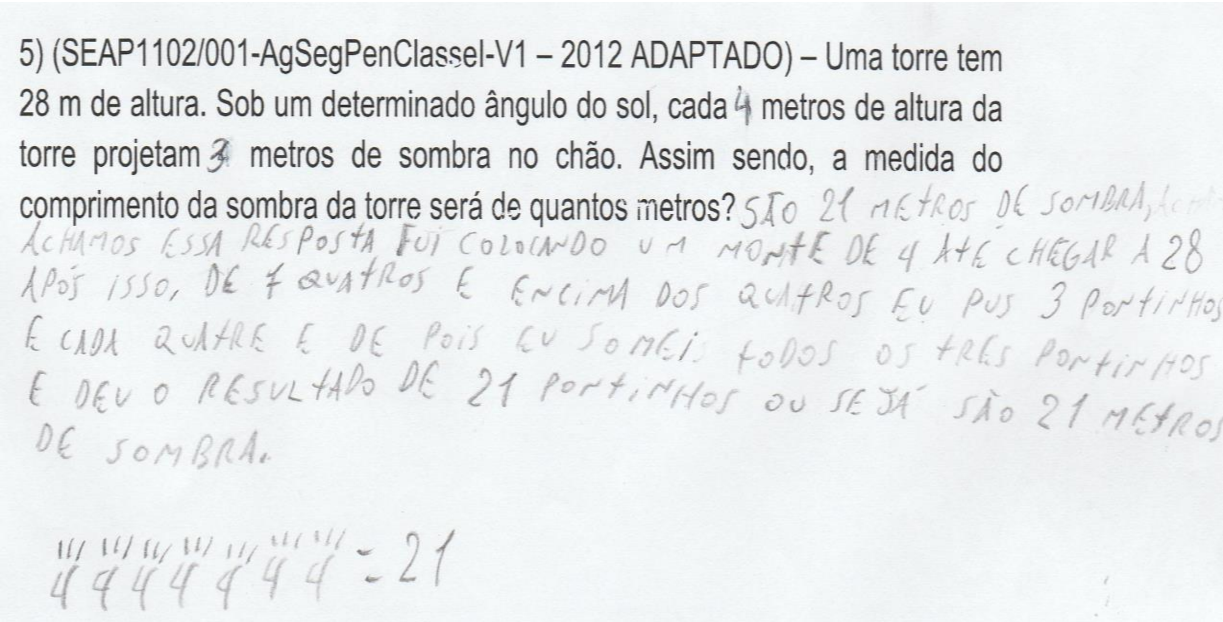
Fonte: acervo pessoal.

Em resoluções como a da figura 19, também podemos identificar que a noção de proporcionalidade entre as grandezas do problema se mostra presente como principal organizador do esquema apresentado, já que os grupos buscaram encontrar um operador vertical entre a altura do prédio e a altura da qual conhecem o comprimento da sombra projetada, para então aplicar este mesmo operador entre as medidas conhecidas que dizem respeito à sombra projetada.

É importante ressaltar que, novamente, assim como no problema 4, uma quantidade considerável de grupos optou pelo método de tentativa e erro, multiplicando os 4 metros de sombra sucessivas vezes até que se obtivesse os 28 metros procurados.

Também foi observada uma resolução que fazia uso de adições sucessivas, utilizando, inclusive, uma linguagem ainda mais simples, com ilustrações que representavam a repetição da unidade e o agrupamento de símbolos, conforme podemos observar na figura 20.

Figura 20: resposta e justificativa do grupo 18 para a questão 5.

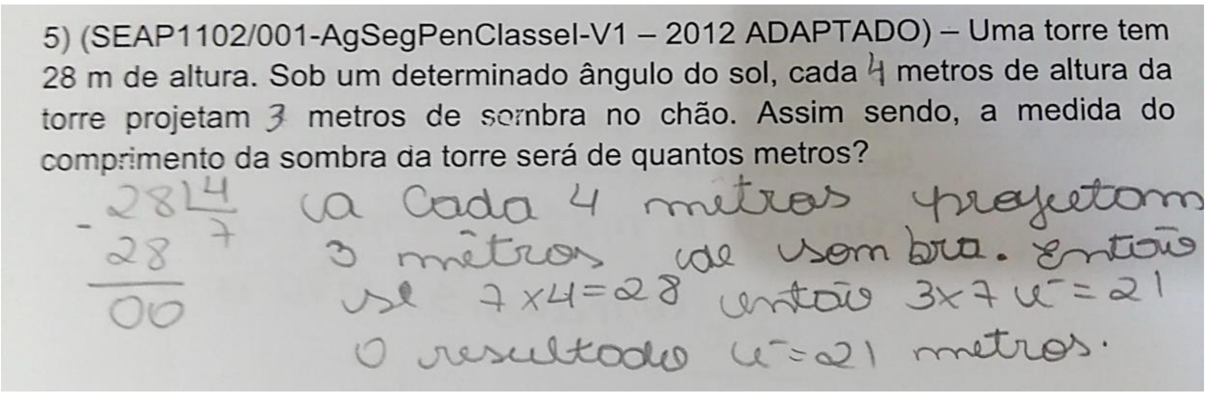

5) (SEAP1102/001-AgSegPenClassel-V1 – 2012 ADAPTADO) – Uma torre tem 28 m de altura. Sob um determinado ângulo do sol, cada 4 metros de altura da torre projetam 3 metros de sombra no chão. Assim sendo, a medida do comprimento da sombra da torre será de quantos metros? SÃO 21 METROS DE SOMBRA, ACH
ACHAMOS ESSA RESPOSTA FOI COLOCANDO UM MONTE DE 4 ATÉ CHEGAR A 28 APÓS ISSO, DE 7 QUATROS E ENCIMA DOS QUATROS EU PUS 3 PORTINHOS E CADA QUATRE E DE POIS EU SOMEI TODOS OS TRÊS PORTINHOS E DEU O RESULTADO DE 21 PORTINHOS OU SEJÁ SÃO 21 METROS DE SOMBRA.

4 4 4 4 4 4 4 = 21

Fonte: acervo pessoal.

Os demais 12 grupos que apresentaram resposta correta à questão optaram por fazer uso da divisão para encontrar o operador que buscavam, isto é, fazer uso das transformações inversas àquelas realizadas pelas multiplicações, como podemos observar na figura 21.

Figura 21: resposta e justificativa do grupo 20 para a questão 5.



5) (SEAP1102/001-AgSegPenClassel-V1 – 2012 ADAPTADO) – Uma torre tem 28 m de altura. Sob um determinado ângulo do sol, cada 4 metros de altura da torre projetam 3 metros de sombra no chão. Assim sendo, a medida do comprimento da sombra da torre será de quantos metros?

28 | 4
-28   7
00

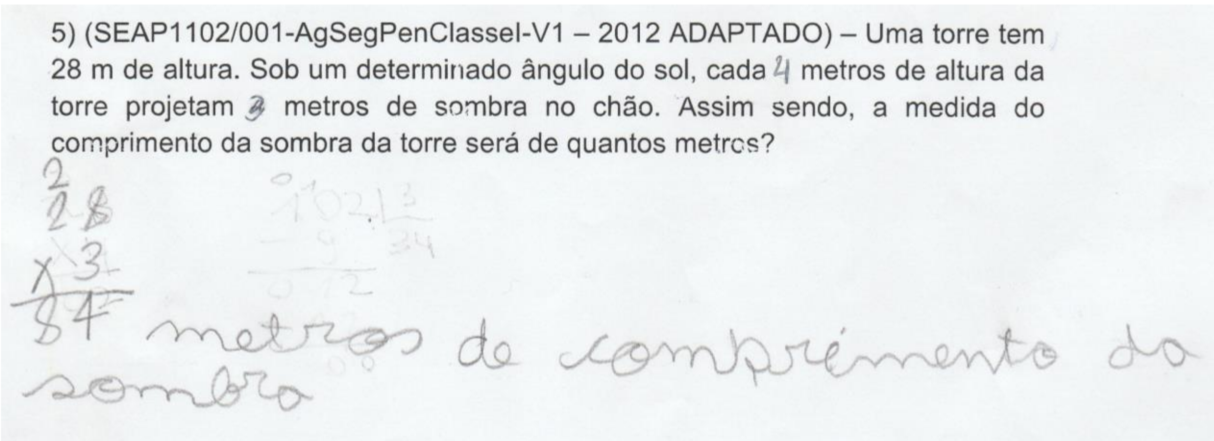
a cada 4 metros projetam 3 metros de sombra. então se 7x4=28 então 3x7 é=21
O resultado é=21 metros.

Fonte: acervo pessoal

No momento do compartilhamento das estratégias com os demais colegas, tanto representantes dos grupos que fizeram uso da multiplicação quanto os representantes dos grupos que fizeram uso da divisão, explicaram aos demais colegas que iniciaram a questão com a procura da informação de “quantas vezes os 4 metros caberiam nos 28 metros de altura da torre”. Desta forma, fica evidente que o objetivo dos grupos era o mesmo, embora a operação utilizada para alcançar tal objetivo tenha sido diferente.

Ao analisar as duas respostas incorretas, observou-se que os grupos não levaram em consideração que a projeção de 3 metros de sombra se dava a cada 4 metros de altura da torre, e apenas multiplicaram a altura da torre por 3, como podemos observar no exemplo contido na figura 22.

Figura 22: resposta do grupo 14 para a questão 5.



5) (SEAP1102/001-AgSegPenClassel-V1 – 2012 ADAPTADO) – Uma torre tem 28 m de altura. Sob um determinado ângulo do sol, cada 4 metros de altura da torre projetam 3 metros de sombra no chão. Assim sendo, a medida do comprimento da sombra da torre será de quantos metros?

2
28
x 3
84 metros de comprimento da sombra

Fonte: acervo pessoal.

Observa-se, em resoluções como a anterior, a utilização de um operador horizontal equivocado, pois não transforma corretamente, de acordo com os dados fornecidos na questão, a grandeza "altura da torre" na grandeza "distância da sombra projetada".

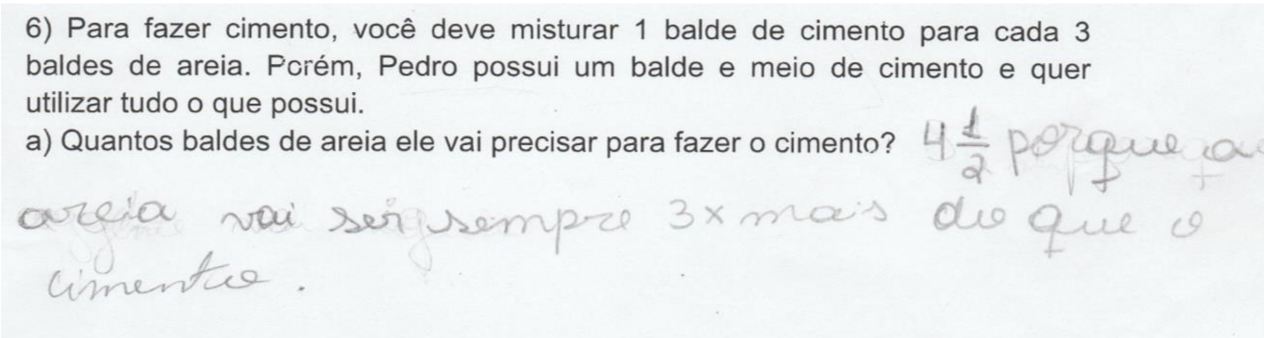
Em seguida, foi proposto aos alunos o segundo problema do encontro, o qual está presente no quadro abaixo.

Quadro 13: problema 6

Problema 6: Para fazer cimento, você deve misturar 1 balde de cimento para cada 3 baldes de areia. Porém, Pedro possui um balde e meio de cimento e quer utilizar tudo o que possui.
a) Quantos baldes de areia ele vai precisar para fazer o cimento?
b) Se,para cada balde de areia utilizado, é necessário meio balde de água, quantos baldes de água ele necessitará?
c) Como podemos relacionar a quantidade de baldes de cimento com a quantidade de baldes de água em uma receita para cimento?

Em relação ao item A da questão, das 26 resoluções, 24 respostas foram consideradas corretas e 2 incorretas. Ao analisar as 24 respostas corretas, foram encontradas formas de raciocínio distintas. Das 24 respostas analisadas, 8 delas demonstravam que os grupos tiveram a percepção de que a quantidade de areia deve ser o triplo da quantidade de cimento, realizando uma multiplicação da quantidade de cimento (1,5 balde) por 3, o que resultava em 4,5 baldes.

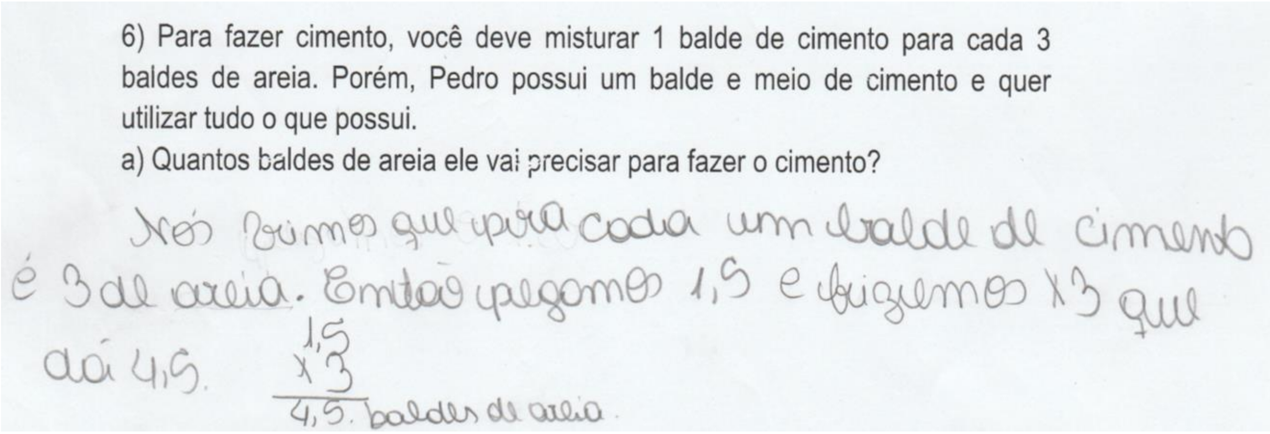
Figura 23: resposta e justificativa do grupo 16 para a questão 6.


6) Para fazer cimento, você deve misturar 1 balde de cimento para cada 3 baldes de areia. Porém, Pedro possui um balde e meio de cimento e quer utilizar tudo o que possui.
a) Quantos baldes de areia ele vai precisar para fazer o cimento? $4\frac{1}{2}$ porque a areia vai ser sempre 3x mais do que o cimento.

Fonte: acervo pessoal.

Na resolução acima (figura 23), por exemplo, o grupo fez uso de um número misto para expressas quantidade procurada. No entanto, alguns grupos fizeram uso do número decimal (figura 24) e ainda foram observados grupos que optaram pela linguagem escrita ("4 baldes e meio").

Figura 24: resposta e justificativa do grupo 24 para a questão 6.


6) Para fazer cimento, você deve misturar 1 balde de cimento para cada 3 baldes de areia. Porém, Pedro possui um balde e meio de cimento e quer utilizar tudo o que possui.
a) Quantos baldes de areia ele vai precisar para fazer o cimento?

Nós vimos que para cada um balde de cimento é 3 de areia. Então pegamos 1,5 e fizemos x3 que dá 4,5.

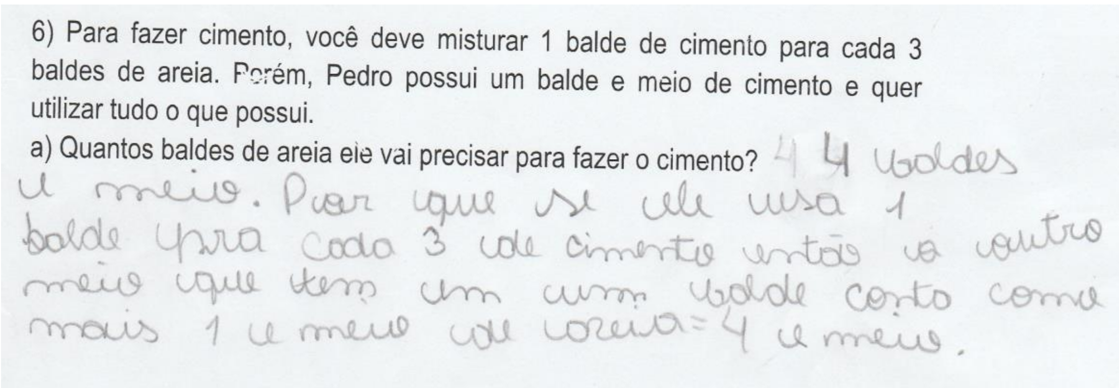
$$\begin{array}{r} 1,5 \\ \times 3 \\ \hline 4,5 \end{array}$$ baldes de areia.

Fonte: acervo pessoal.

Nestas 8 resoluções, foi possível perceber novamente a proporcionalidade como principal guia das estratégias dos estudantes, já que a primeira ação desenvolvida pelos estudantes foi a procura pelo operador horizontal que leva a quantidade de cimento à quantidade de areia correspondente. Além disso, nota-se a utilização da multiplicação como operação escolhida para encontrar a quarta proporcional que os estudantes buscavam.

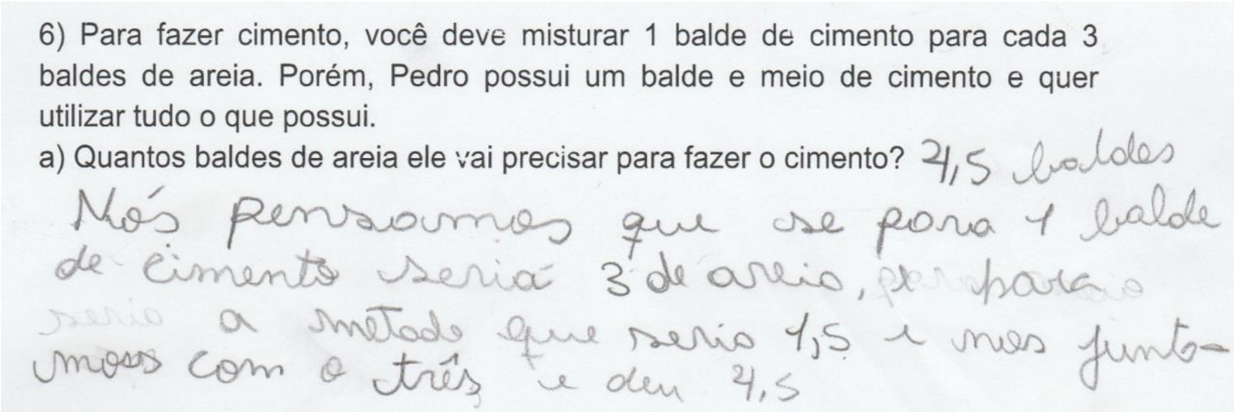
As outras 16 respostas corretas apresentaram um raciocínio que, embora respeitasse o isomorfismo entre as medidas do problema, foi operacionalizado através de adições, separando a quantidade de cimento em duas partes: a parte representada pelo balde cheio de cimento, que necessita de 3 baldes de areia, e a parte representada pela metade de balde de cimento, que precisaria de 1,5 baldes de areia. Ao final, os grupos somavam e obtinham 4,5 baldes de areia (figuras 25 e 26).

Figura 25: resposta e justificativa do grupo 16 para a questão 6.


6) Para fazer cimento, você deve misturar 1 balde de cimento para cada 3 baldes de areia. Porém, Pedro possui um balde e meio de cimento e quer utilizar tudo o que possui.
a) Quantos baldes de areia ele vai precisar para fazer o cimento? ~~4~~ 4 baldes e meio. Por que se ele usa 1 balde para cada 3 de cimento então o outro meio que tem um um balde certo come mais 1 e meio de areia = 4 e meio.

Fonte: acervo pessoal.

Figura 26: resposta e justificativa do grupo 5 para a questão 6.


6) Para fazer cimento, você deve misturar 1 balde de cimento para cada 3 baldes de areia. Porém, Pedro possui um balde e meio de cimento e quer utilizar tudo o que possui.

a) Quantos baldes de areia ele vai precisar para fazer o cimento? 4,5 baldes

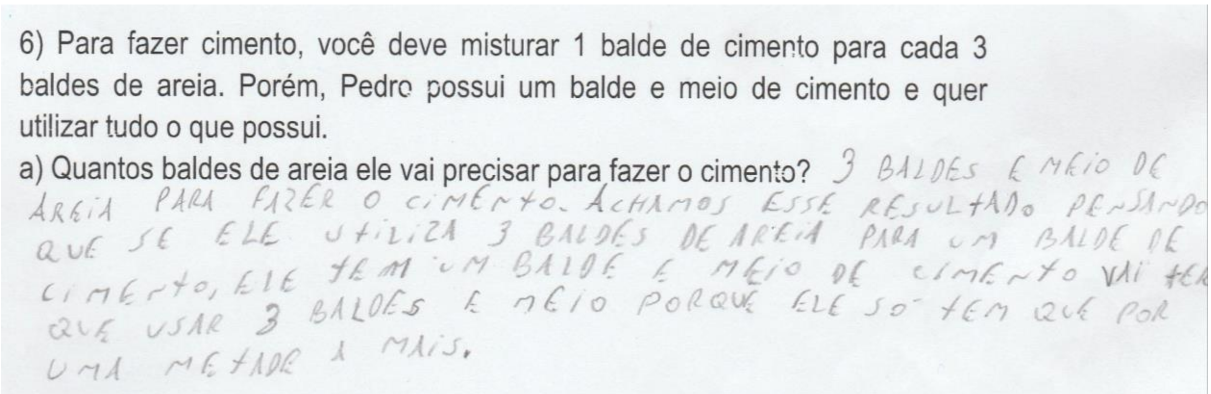
Nós pensamos que se para 1 balde de cimento seria 3 de areia, para seria a metade que seria 1,5 e nós juntamos com o três e deu 4,5

Fonte: acervo pessoal.

Nestas respostas que fizeram uso da adição para resolução, notamos que a separação da quantidade 1,5 como correspondente à soma 1+0,5 foi recorrente. Essa separação aconteceu de forma bastante intuitiva dentre os grupos e é uma estratégia que leva a resposta correta devido à distributividade da multiplicação em relação à soma que, embora não escrito, também podemos identificar com uma propriedade utilizada nas ações nestes esquemas.

As duas respostas incorretas apresentaram raciocínio aditivo simples, considerando que, se o personagem deve acrescentar meio balde de cimento, deve acrescentar também meio balde de areia à sua mistura, mostrando a ausência da noção de proporcionalidade entre os ingredientes no esquema, como podemos observar na figura 25.

Figura 27: resposta e justificativa do grupo 18 para a questão 6.

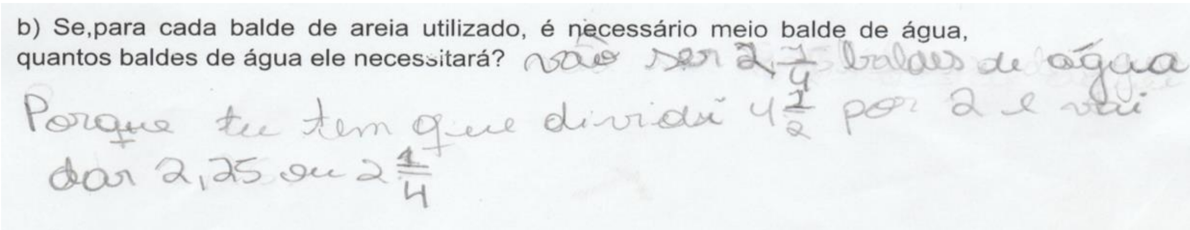

6) Para fazer cimento, você deve misturar 1 balde de cimento para cada 3 baldes de areia. Porém, Pedro possui um balde e meio de cimento e quer utilizar tudo o que possui.

a) Quantos baldes de areia ele vai precisar para fazer o cimento? 3 BALDES E MEIO DE AREIA PARA FAZER O CIMENTO. ACHAMOS ESSE RESULTADO PENSANDO QUE SE ELE UTILIZA 3 BALDES DE AREIA PARA UM BALDE DE CIMENTO, ELE TEM UM BALDE E MEIO DE CIMENTO VAI TER QUE USAR 3 BALDES E MEIO PORQUE ELE SÓ TEM QUE POR UMA METADE A MAIS.

Fonte: acervo pessoal.

Em relação ao item B da questão, destacamos que é inclusa uma nova grandeza no problema, o que caracteriza um problema de proporção entre três quantidades: cimento, areia e água. Neste item, foram identificadas 13 respostas corretas e 13 respostas incorretas. Observando as respostas corretas, 9 grupos perceberam que a quantidade de água é sempre a metade da quantidade de areia, então apenas realizaram a divisão da respostas do item A por 2, conforme figuras 28 e 29.

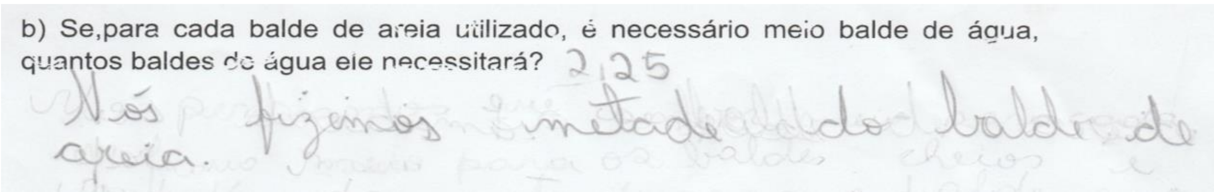
Figura 28: resposta e justificativa do grupo 16 para a questão 6.


b) Se,para cada balde de areia utilizado, é necessário meio balde de água, quantos baldes de água ele necessitará? vão ser $2\frac{1}{4}$ baldes de água

Porque tu tem que dividir $4\frac{1}{2}$ por 2 e vai dar 2,25 ou $2\frac{1}{4}$

Fonte: acervo pessoal.

Figura 29: resposta e justificativa do grupo 5 para a questão 6.


b) Se,para cada balde de areia utilizado, é necessário meio balde de água, quantos baldes de água ele necessitará? 2,25

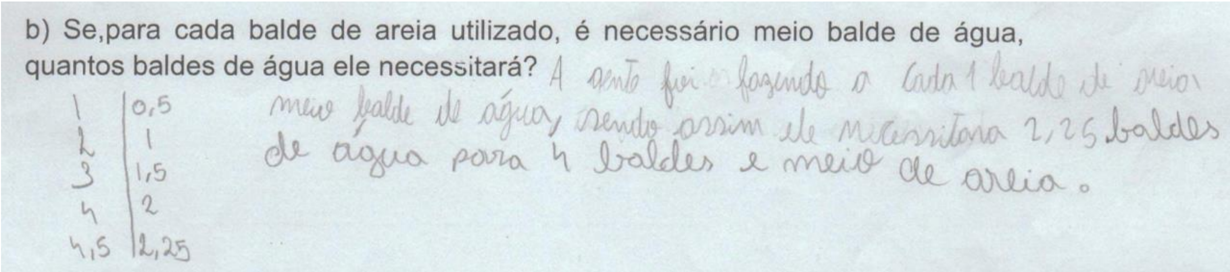
Nós fizemos metade do balde de areia.

Fonte: acervo pessoal.

Desta forma, os esquemas observados nestas 9 resoluções mostram que os estudantes identificaram um operador horizontal que relaciona as quantidades de areia e água na mistura através de uma divisão, novamente explicitando a presença da um organizador de pensamento bastante observado nos esquemas até o momento: a noção de proporcionalidade.

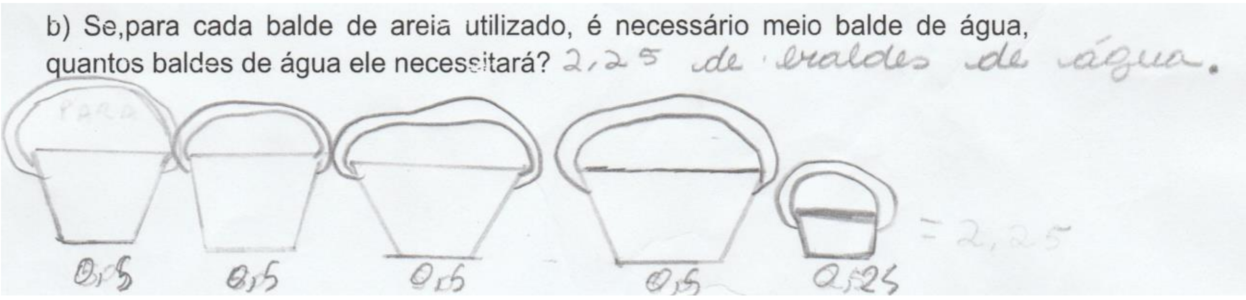
Os outros 4 grupos que apresentaram resolução correta, realizaram raciocínios multiplicativos, mas que foram operacionalizados através de adições, justificando que somaram meio balde de água para cada balde de areia utilizado, conforme figuras 30 e 31.

Figura 30: resposta e justificativa do grupo 2 para a questão 6.



Fonte: acervo pessoal.

Figura 31: resposta e justificativa do grupo 25 para a questão 6.



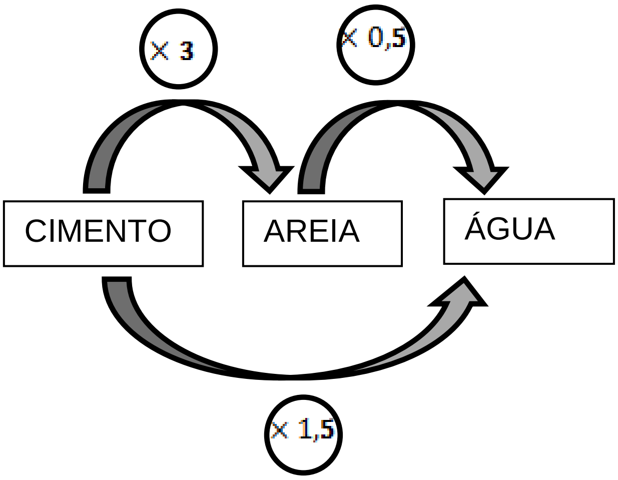
Fonte: acervo pessoal.

Embora fazendo uso de adições sucessivas, os alunos apresentaram esquemas que mostram coerência com relação à noção de proporcionalidade, adicionando quantidades de água de modo uniforme e de acordo com a adição de quantidades de areia, embora sem a identificação de um operador multiplicativo ou razão de proporcionalidade.

Os demais 13 grupos que apresentaram resolução incorreta para este item realizaram arredondamentos incorretos (para mais ou para menos) da quantidade de água necessária na receita descrita. Consideraram que tinham de incluir meio balde de água para cada balde de areia, porém, ao deparar-se com uma quantidade de 4,5 baldes de areia, não souberam como proceder para encontrar a metade de 0,5, optando por arredondamentos.

Esta estratégia mostra que, embora os grupos tenham mostrado coerência com relação à noção de proporcionalidade, quando aparecem situações em que precisam aplicar um operador inverso (divisão) em uma quantidade não inteira, acabam não respeitando a uniformidade da proporção por falta de requisitos relacionados à operação de divisão.

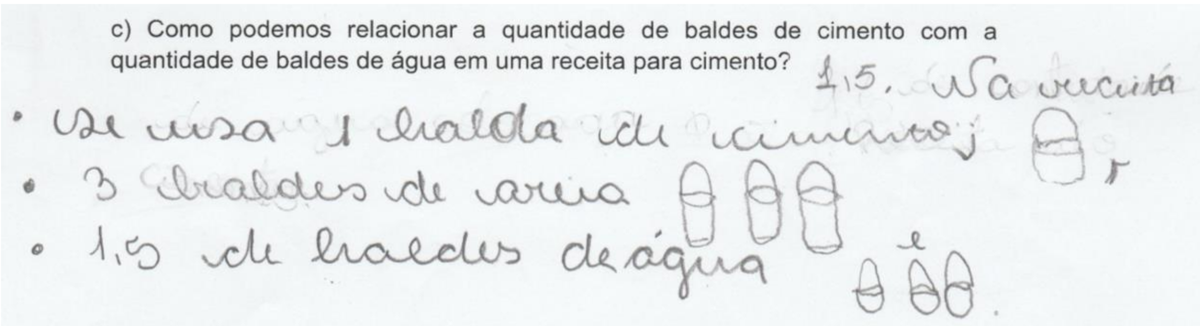
O item C deste problema é mais complexo que os demais, pois busca compor dois operadores horizontais apresentados em somente um operador horizontal, conforme esquema abaixo.



Observando as respostas do item C, que buscava uma forma de relacionar as três quantidades envolvidas no problema, foi observado que, das 26 respostas recolhidas, 5 estavam em branco, 9 estavam incorretas e 12 estavam corretas.

Analisando as respostas corretas, observou-se que os grupos utilizaram dos raciocínios dos itens anteriores para concluir a relação entre as quantidades de cimento e água na mistura, utilizando os dados relacionados à quantidade de areia também. Observaram que, para 1 balde de cimento são necessários 3 baldes de areia e, a partir do dado o item B, que relaciona as quantidade de areia e água, concluíram que é necessário 1 balde e meio de cimento para cada balde de água, como, por exemplo, nas imagens 32 e 33.

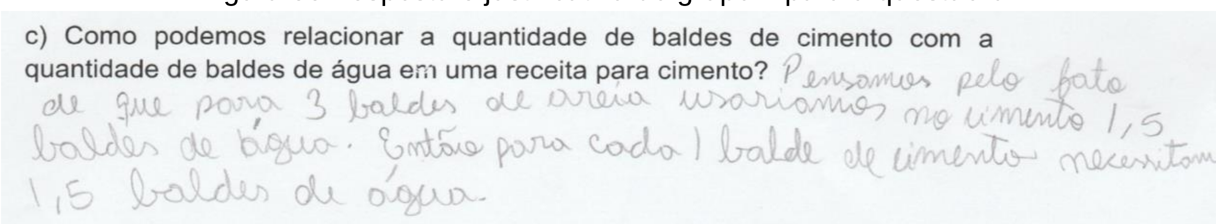
Figura 32: resposta e justificativa do grupo 21 para a questão 6.


c) Como podemos relacionar a quantidade de baldes de cimento com a quantidade de baldes de água em uma receita para cimento? 1,5. Na receitá

• se usa 1 balde de cimento; ,
• 3 baldes de areia
• 1,5 de baldes de água e .

Fonte: acervo pessoal.

Figura 33: resposta e justificativa do grupo 2 para a questão 6.


c) Como podemos relacionar a quantidade de baldes de cimento com a quantidade de baldes de água em uma receita para cimento? Pensamos pelo fato de que para 3 baldes de areia usaríamos no cimento 1,5 baldes de água. Então para cada 1 balde de cimento necessitam 1,5 baldes de água.

Fonte: acervo pessoal.

Nas resoluções das figuras 32 e 33, embora corretas, podemos identificar uma particularização por parte dos estudantes para a receita com as quantidades do problema, isto é, foram identificados métodos que faziam uso daquilo que já havia sido desenvolvido, e não uma forma geral de resolver o problema, compondo dois operadores para encontrar apenas um. Nas respostas incorretas, foram informadas quantidades sem uma justificativa, o que dificultou a análise das estratégias utilizadas pelos alunos.

Logo após a discussão do problema 6, foi entregue o problema 7 para os alunos resolverem, o qual pode ser observado no quadro abaixo.

Quadro 14: problema 7

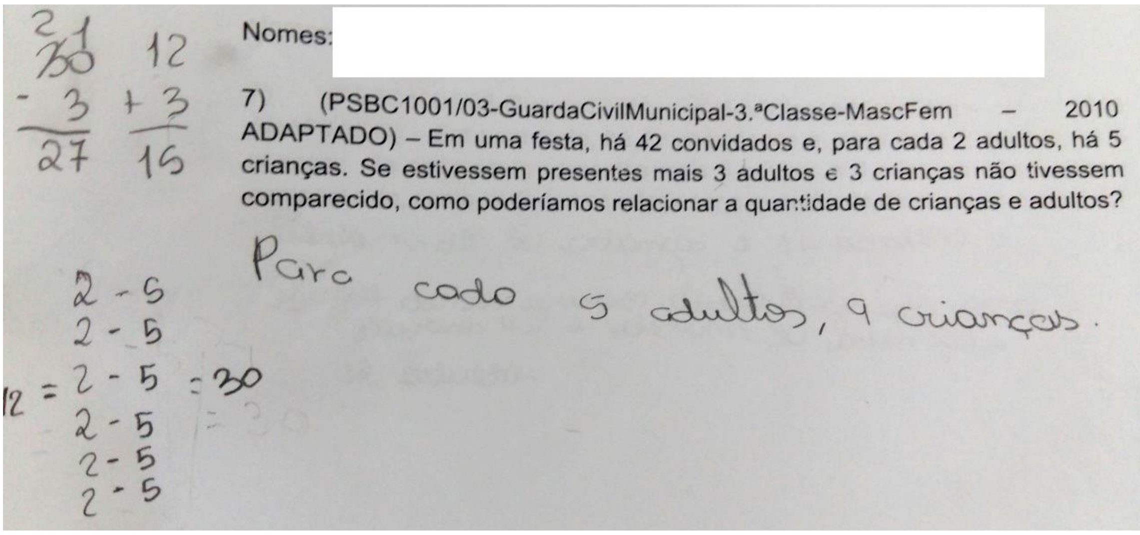
Problema 7: (PSBC1001/03-GuardaCivilMunicipal – 2010 ADAPTADO) – Em uma festa, há 42 convidados e, para cada 2 adultos, há 5 crianças. Se estivessem presentes mais 3 adultos e 3 crianças não tivessem comparecido, como poderíamos relacionar a quantidade de crianças e adultos?

Foram recebidas 24 resoluções para este problema, das quais 2 estavam em branco. Das 22 que apresentavam algum desenvolvimento, em 18 delas foram identificados raciocínios coerentes que possibilitavam que o grupo chegasse à resposta final correta.

Estes grupos conseguiram descobrir, a partir dos dados da questão, que os 42 convidados dividiam-se em 12 adultos e 30 crianças e, após a ausência de três adultos e o comparecimento de 3 crianças a mais, concluíram que o grupo de convidados em questão era, na verdade, de 27 crianças e 15 adultos. Ao final, dividindo crianças e adultos em um mesmo número de grupo, realizaram a relação final esperada de que, para cada 5 adultos, há 9 crianças.

De forma geral, para chegar a conclusão sobre as quantidades de crianças e adultos na festa, os estudantes fizeram uso de adições repetidas, crianças de 2 a 2 e adultos de 5 em 5, até que as quantidades, somadas, totalizassem 42, como podemos observar nas imagens 32 e 33. Porém, no esquema presente na imagem Y, na última vez em que foram expressar a relação entre a quantidade de crianças e adultos, fizeram a troca das palavras.

Figura 34: resolução do grupo 13 para o problema 7.

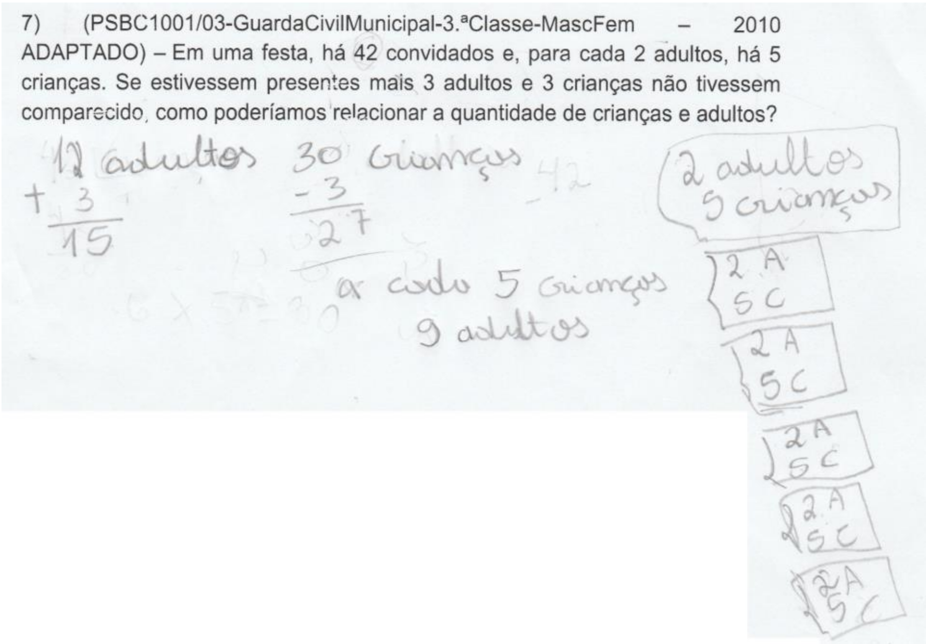

Nomes:

7) (PSBC1001/03-GuardaCivilMunicipal-3.ªClasse-MascFem – 2010 ADAPTADO) – Em uma festa, há 42 convidados e, para cada 2 adultos, há 5 crianças. Se estivessem presentes mais 3 adultos e 3 crianças não tivessem comparecido, como poderíamos relacionar a quantidade de crianças e adultos?

Para cada 5 adultos, 9 crianças.

Fonte: Acervo pessoal.

Figura 35: resposta e justificativa do grupo 5 para a questão 7.


7) (PSBC1001/03-GuardaCivilMunicipal-3.ªClasse-MascFem – 2010 ADAPTADO) – Em uma festa, há 42 convidados e, para cada 2 adultos, há 5 crianças. Se estivessem presentes mais 3 adultos e 3 crianças não tivessem comparecido, como poderíamos relacionar a quantidade de crianças e adultos?

12 adultos 30 crianças

a cada 5 crianças 9 adultos

2 adultos 5 crianças

Fonte: acervo pessoal.

Em ambas resoluções acima, podemos identificar uma linguagem que contém agrupamento de símbolos e quantidades, mostrando o uso de operações aditivos. Nestes esquemas, embora novamente as adições sucessivas tenham feito parte da operacionalização da estratégia, estas adições respeitaram a proporcionalidade existente entre as quantidades de crianças e adultos no problema, o que constituiu, portanto, um esquema coerente e suficiente para a resolução do problema.

Já no final do encontro, foi entregue aos estudantes o último problema a ser resolvido neste segundo encontro, o qual pode ser observado no quadro abaixo.

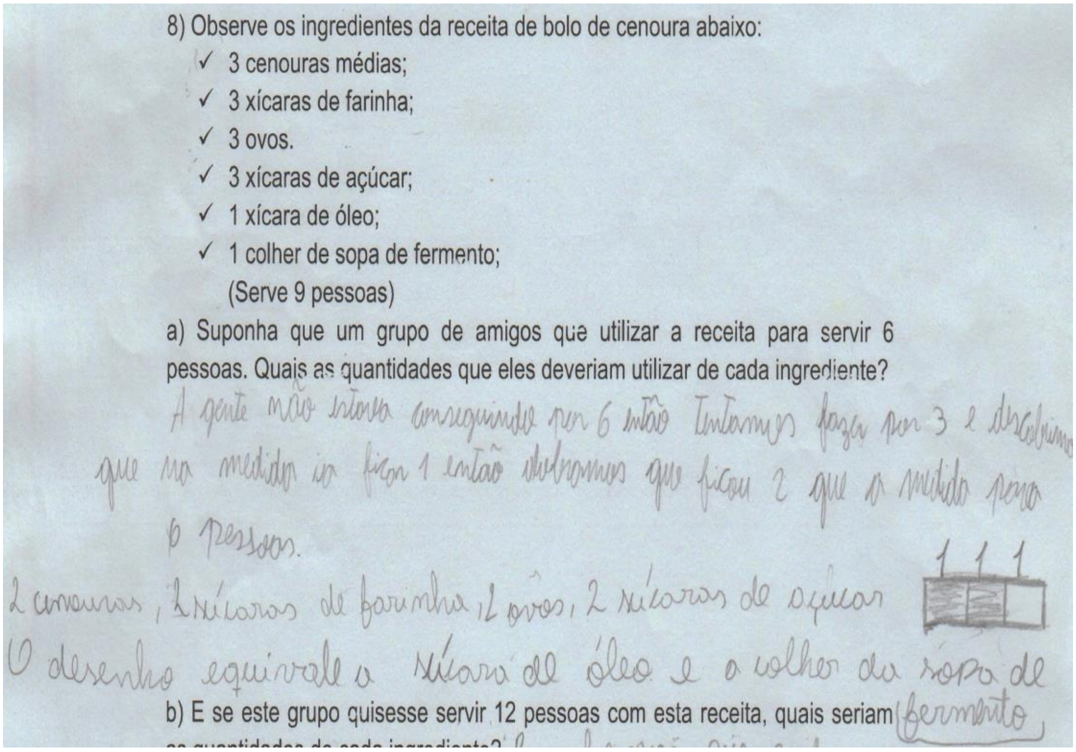
Quadro 15: problema 8

Problema 8: Observe os ingredientes da receita de bolo de cenoura abaixo: ✓ 3 cenouras médias; ✓ 3 xícaras de farinha; ✓ 3 ovos. ✓ 3 xícaras de açúcar; ✓ 1 xícara de óleo; ✓ 1 colher de sopa de fermento; (Serve 9 pessoas) a) Suponha que um grupo de amigos que utilizar a receita para servir 6 pessoas. Quais as quantidades que eles deveriam utilizar de cada ingrediente? b) E se este grupo quisesse servir 12 pessoas com esta receita, quais seriam as quantidades de cada ingrediente?

Foram recebidas 24 resoluções para este problema. Analisando as respostas ao item A, 23 grupos desenvolveram algum esquema para resolução do problema. Destes 23 grupos, 7 apresentaram a resposta totalmente correta e os outros 16 apresentaram pelo menos um dos ingredientes com quantidade inadequada.

Os 7 grupos que apresentaram resolução correta realizaram relações das quantidades com números fracionários ou com suas representações através de desenhos, conforme figuras 36 e 37.

Figura 36: resposta e justificativa do grupo 2 para a questão 8.



8) Observe os ingredientes da receita de bolo de cenoura abaixo:
- ✓ 3 cenouras médias;
- ✓ 3 xícaras de farinha;
- ✓ 3 ovos.
- ✓ 3 xícaras de açúcar;
- ✓ 1 xícara de óleo;
- ✓ 1 colher de sopa de fermento;

(Serve 9 pessoas)

a) Suponha que um grupo de amigos que utilizar a receita para servir 6 pessoas. Quais as quantidades que eles deveriam utilizar de cada ingrediente?

A gente não estava conseguindo por 6 então Tentamos fazer por 3 e descobrimos que na medida ia ficar 1 então descobrimos que ficou 2 que a medida para 6 pessoas.

2 cenouras, 2 xícaras de farinha, 2 ovos, 2 xícaras de açúcar

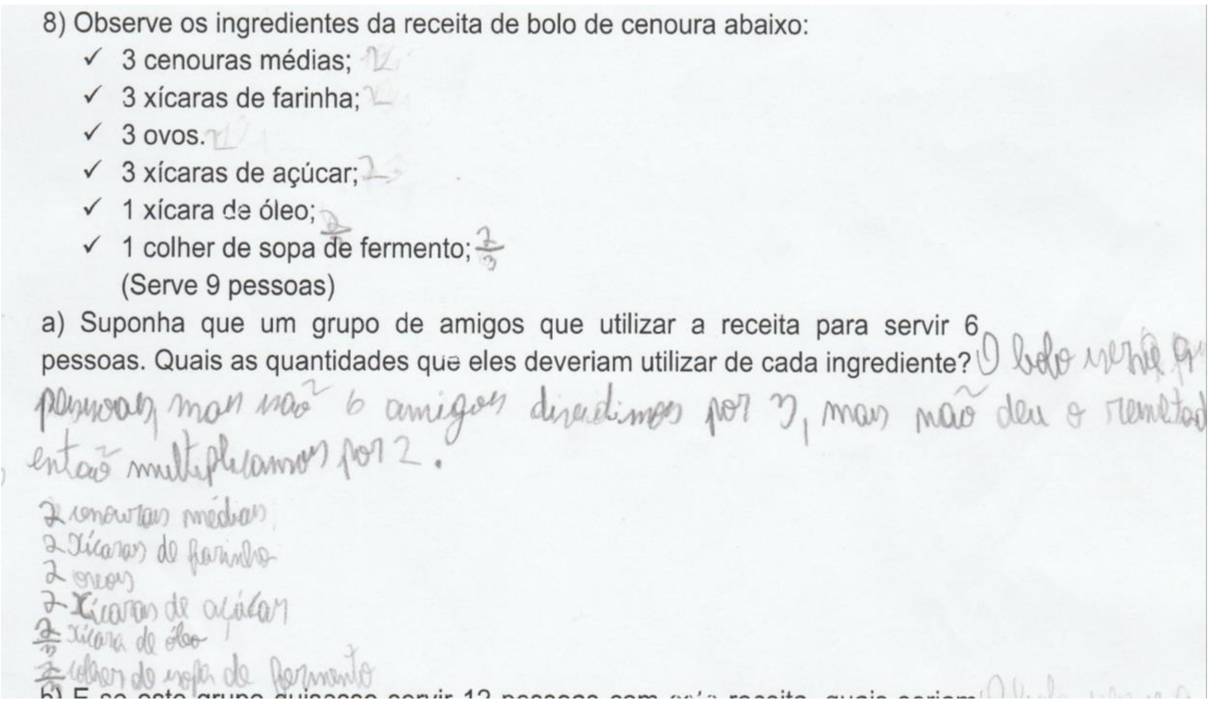
1 1 1

O desenho equivale a xícara de óleo e a colher da sopa de fermento

b) E se este grupo quisesse servir 12 pessoas com esta receita, quais seriam

Fonte: acervo pessoal.

Figura 37: resposta e justificativa do grupo 13 para a questão 8.


8) Observe os ingredientes da receita de bolo de cenoura abaixo:

- ✓ 3 cenouras médias; 2
- ✓ 3 xícaras de farinha; 2
- ✓ 3 ovos. 2
- ✓ 3 xícaras de açúcar; 2
- ✓ 1 xícara de óleo; $\frac{2}{3}$
- ✓ 1 colher de sopa de fermento; $\frac{2}{3}$

(Serve 9 pessoas)

a) Suponha que um grupo de amigos que utilizar a receita para servir 6 pessoas. Quais as quantidades que eles deveriam utilizar de cada ingrediente? O bolo serve 9 pessoas mas não 6 amigos dividimos por 3, mas não deu o resultado então multiplicamos por 2.

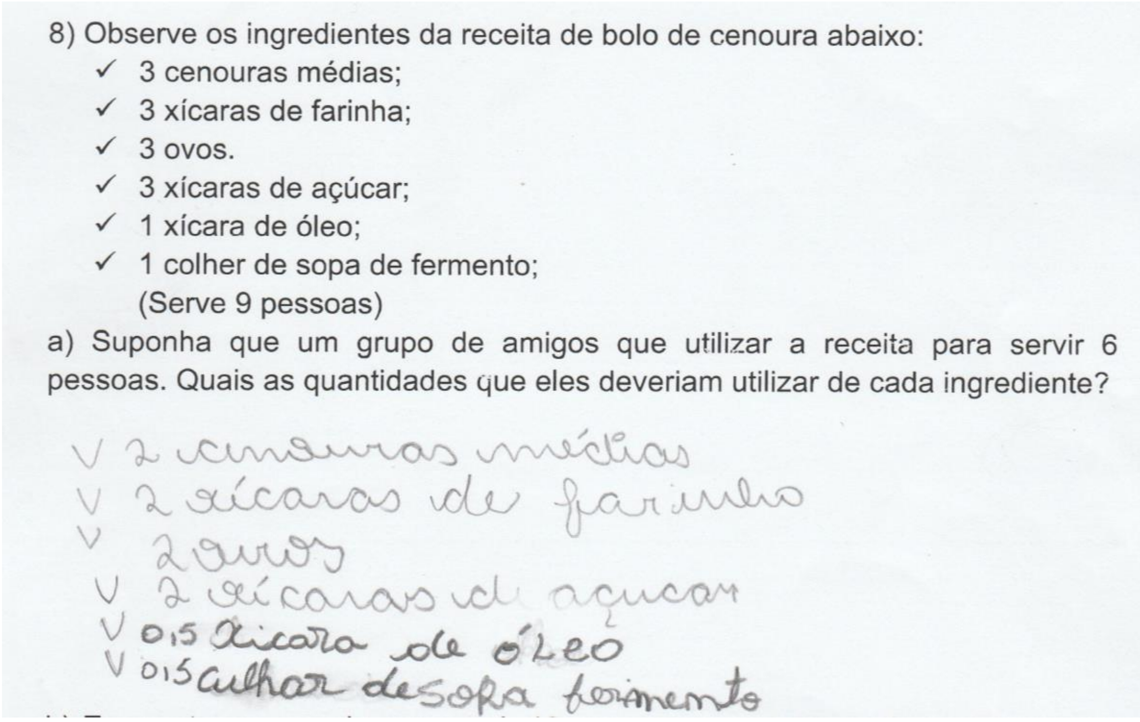
2 cenouras médias
2 xícaras de farinha
2 ovos
2 xícaras de açúcar
$\frac{2}{3}$ xícara de óleo
$\frac{2}{3}$ colher de sopa de fermento

Fonte: acervo pessoal.

Nas duas resoluções apresentadas acima, foi observada uma estratégia para identificar o operador que leva a quantidade de 9 pessoas da receita original à quantidade de 6 pessoas da receita adaptada, optando por dividir o 9 por 3 e depois multiplicar por 2, o que levava ao resultado de 6 pessoas. Embora sem o uso da linguagem fracionária para expressar o operador vertical $\left(\times \frac{2}{3}\right)$, os estudantes desenvolveram uma estratégia equivalente, compondo o operador vertical $(\times 2)$ com o operador vertical inverso $(\div 3)$, e que os levou ao mesmo resultado. De forma coerente com a proporcionalidade entre o número de pessoas, os alunos aplicaram esta mesma composição de operadores aos ingredientes da receita, demonstrando novamente a presença da noção de proporcionalidade entre os ingredientes como um conhecimento organizador do esquema apresentado.

Os 16 grupos que apresentaram resolução incorreta para este item cometeram erros semelhantes àqueles observados em problemas já analisados anteriormente: não respeitaram a mesma proporção de diminuição dos ingredientes para adaptar a receita de 9 pessoas para 6 pessoas. Destes 16 grupos, 9 realizaram a diminuição correta para os 4 primeiros ingredientes (que diminuíam de 3 para 1 unidade), no entanto, não conseguiram seguir o mesmo raciocínio para os ingredientes que apresentavam quantidade 1 (xícara de óleo e colher de sopa de fermento) conforme imagem 38. Durante a aplicação dos problemas, foi observado que vários destes grupos não consideravam como possibilidade acrescentar uma quantidade diferente daquelas que são inteiras ou metade de alguma medida, indicando novamente a dificuldade dos estudantes em trabalhar com quantidades não inteiras, ou pelo menos diferentes de quantidade múltiplas de 0,5.

Figura 38: resposta do grupo 24 para a questão 8.



8) Observe os ingredientes da receita de bolo de cenoura abaixo:

- ✓ 3 cenouras médias;
- ✓ 3 xícaras de farinha;
- ✓ 3 ovos.
- ✓ 3 xícaras de açúcar;
- ✓ 1 xícara de óleo;
- ✓ 1 colher de sopa de fermento;

(Serve 9 pessoas)

a) Suponha que um grupo de amigos que utilizar a receita para servir 6 pessoas. Quais as quantidades que eles deveriam utilizar de cada ingrediente?

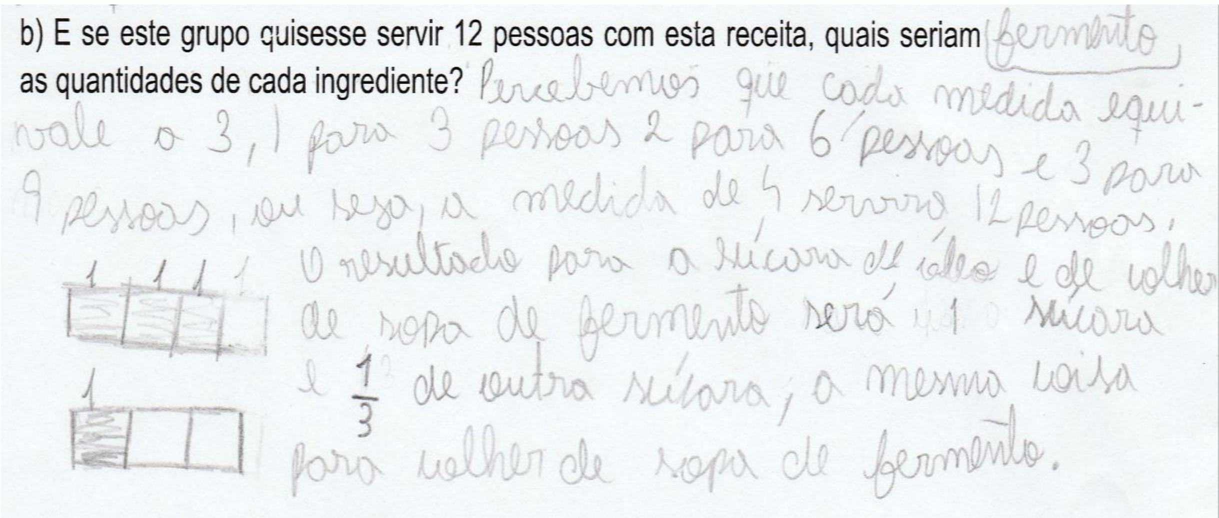
V 2 cenouras médias
V 2 xícaras de farinha
V 2 ovos
V 2 xícaras de açucar
V 0,5 xicara de óleo
V 0,5 colher de sopa fermento

Fonte: acervo pessoal.

Analisando as respostas ao item B, 21 grupos apresentaram alguma estratégia para resolução do problema. Destes 21 grupos, 4 apresentaram a resposta correta e os outros 17 apresentaram pelo menos um dos ingredientes com quantidade inadequada.

Os 4 grupos que apresentaram raciocínio correto apenas duplicaram a quantidade obtida no item anterior, mostrando a utilização de um operador vertical entre as quantidades de ingredientes, respeitando o operador identificado entre as quantidades de pessoas. No entanto, duas resoluções apresentaram uma resolução que fazia uso de uma linguagem fracionária e números mistos para justificar sua resolução, como nas figuras 39 e 40.

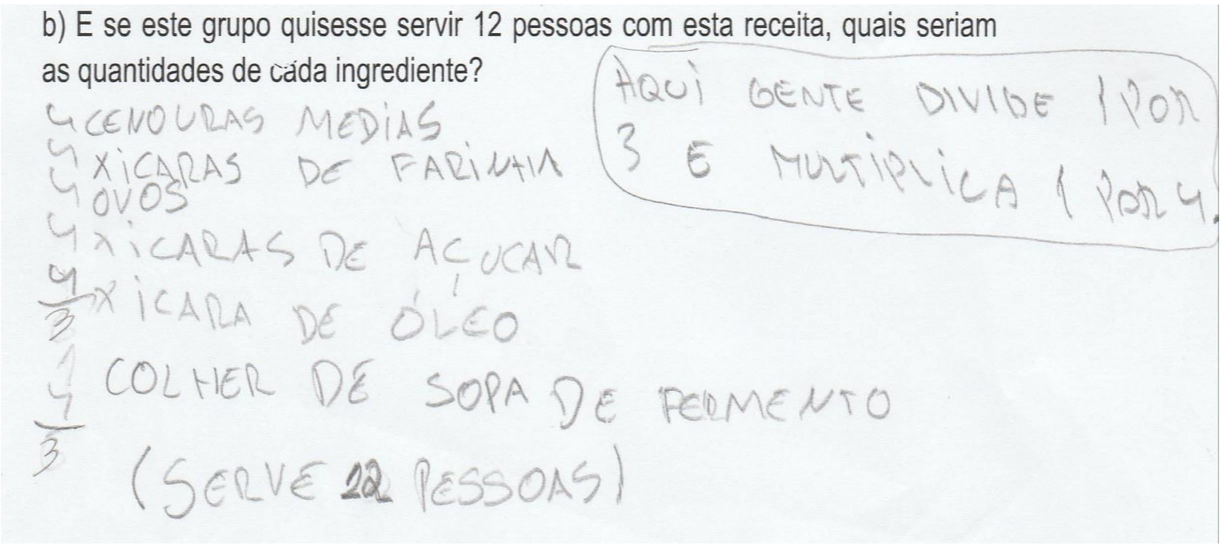
Figura 39: resposta do grupo 2 para a questão 8.


b) E se este grupo quisesse servir 12 pessoas com esta receita, quais seriam as quantidades de cada ingrediente? Percebemos que cada medida equivale a 3, 1 para 3 pessoas 2 para 6 pessoas e 3 para 9 pessoas, ou seja, a medida de 4 servirá 12 pessoas. fermento

O resultado para a xícara de óleo e de colher de sopa de fermento será 1 xícara e $\frac{1}{3}$ de outra xícara, a mesma coisa para colher de sopa de fermento.

Fonte: acervo pessoal.

Figura 40: resposta do grupo 16 para a questão 8.


b) E se este grupo quisesse servir 12 pessoas com esta receita, quais seriam as quantidades de cada ingrediente?

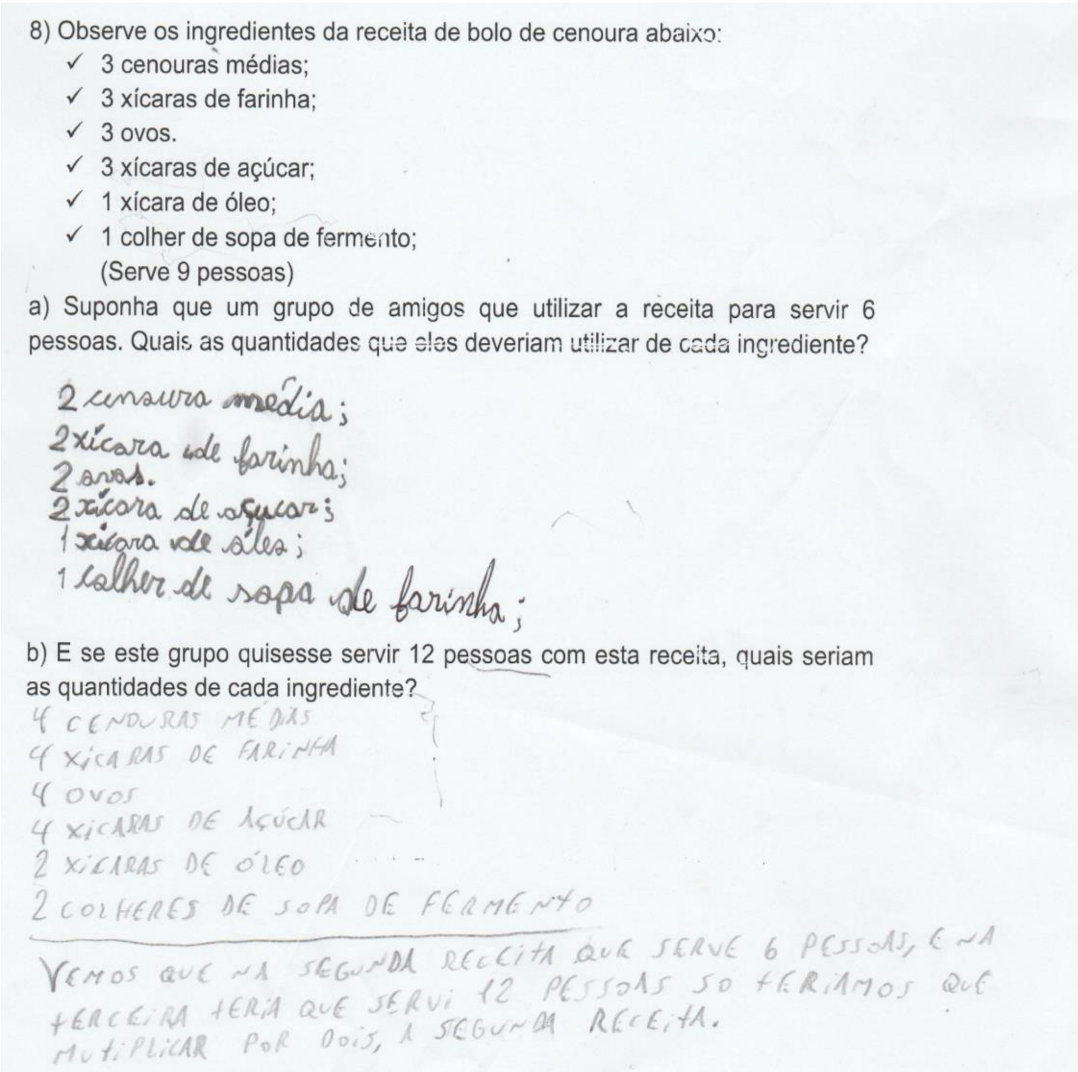
4 CENOURAS MEDIAS
4 XICARAS DE FARINHA
4 OVOS
4 XICARAS DE AÇUCAR
$\frac{4}{3}$ XICARA DE ÓLEO
$\frac{4}{3}$ COLHER DE SOPA DE FERMENTO
(SERVE 12 PESSOAS)

AQUI GENTE DIVIDE 1 POR 3 E MULTIPLICA 1 POR 4.

Fonte: acervo pessoal.

Dentre os 17 grupos que apresentaram respostas incorretas, foi identificado um grupo que conseguiu chegar à conclusão de que bastava duplicar a resposta do item anterior, porém, como a resposta ao item anterior estava incorreta, a do item B também acabou ficando incorreta, como podemos observar na figura 41.

Figura 41: resposta e justificativa do grupo 18 para a questão 8.



8) Observe os ingredientes da receita de bolo de cenoura abaixo:
- ✓ 3 cenouras médias;
- ✓ 3 xícaras de farinha;
- ✓ 3 ovos.
- ✓ 3 xícaras de açúcar;
- ✓ 1 xícara de óleo;
- ✓ 1 colher de sopa de fermento;

(Serve 9 pessoas)

a) Suponha que um grupo de amigos que utilizar a receita para servir 6 pessoas. Quais as quantidades que eles deveriam utilizar de cada ingrediente?

2 cenoura média;
2 xícara de farinha;
2 ovos.
2 xícara de açucar;
1 xícara de óleo;
1 colher de sopa de farinha;

b) E se este grupo quisesse servir 12 pessoas com esta receita, quais seriam as quantidades de cada ingrediente?

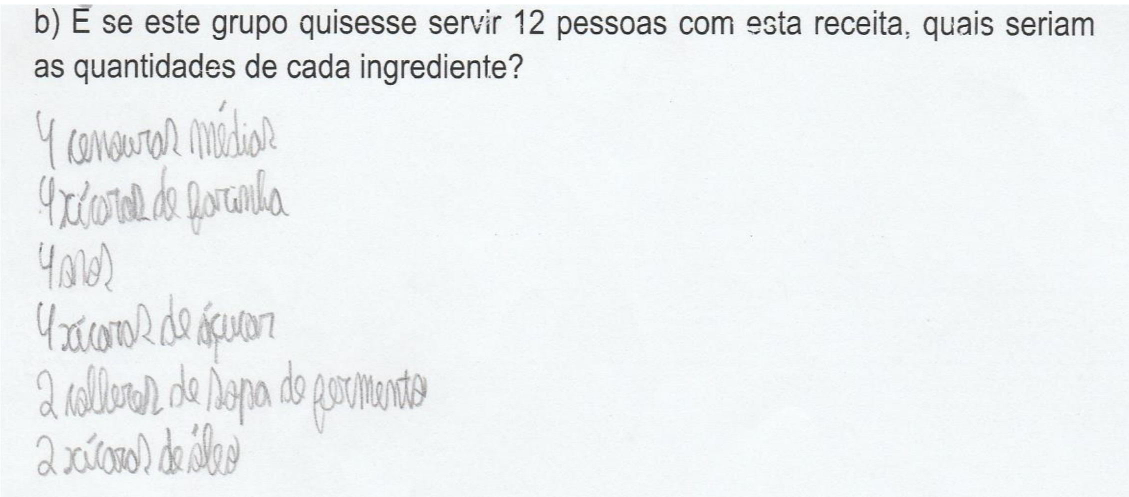
4 CENOURAS MÉDIAS
4 XÍCARAS DE FARINHA
4 OVOS
4 XÍCARAS DE AÇÚCAR
2 XÍCARAS DE ÓLEO
2 COLHERES DE SOPA DE FERMENTO

VEMOS QUE NA SEGUNDA RECEITA QUE SERVE 6 PESSOAS, E NA TERCEIRA TERIA QUE SERVI 12 PESSOAS SO TERIAMOS QUE MUTIPLICAR POR DOIS, A SEGUNDA RECEITA.

Fonte: acervo pessoal.

Os outros 16 grupos apresentavam esquemas em suas resoluções que não respeitavam a proporcionalidade no aumento dos ingredientes, muitas vezes apresentando raciocínios diferentes entre aqueles ingredientes que necessitavam de 3 unidades na receita original e os que necessitavam de 1 unidade (figuras 42 e 43). Levanta-se a hipótese de que a utilização de operadores diferentes no aumento de ingredientes, causando desproporcionalidade, aconteceu devido à dificuldade causada pela inserção do número fracionário nas quantidades resultantes.

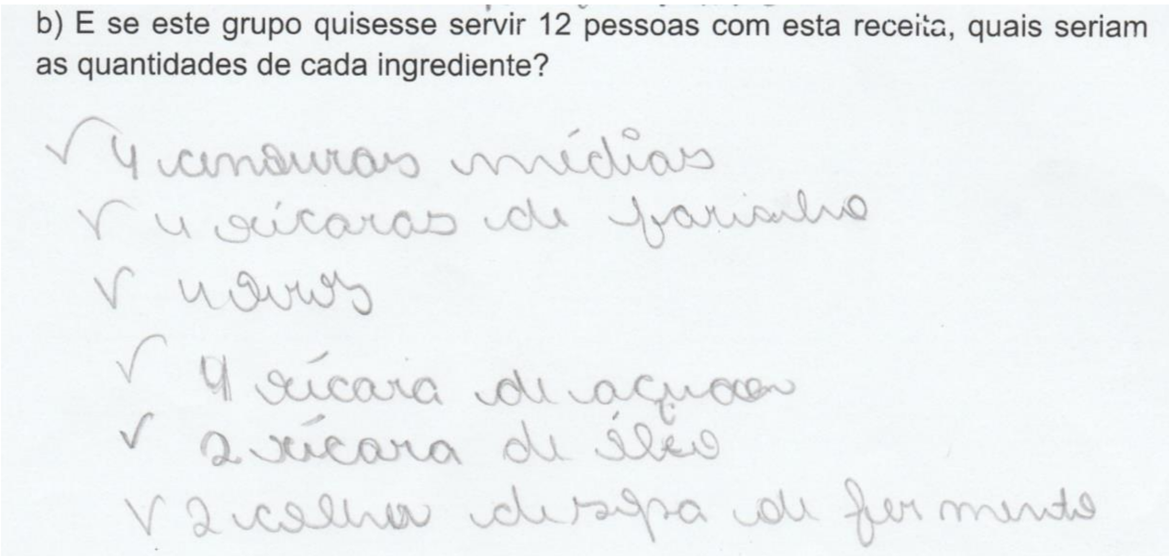
Figura 42: resposta e justificativa do grupo 13 para a questão 8.


b) E se este grupo quisesse servir 12 pessoas com esta receita, quais seriam as quantidades de cada ingrediente?

4 cenouras médias
4 xícaras de farinha
4 ovos
4 xícaras de açúcar
2 colheres de sopa de fermento
2 xícaras de óleo

Fonte: acervo pessoal.

Figura 43: resposta e justificativa do grupo 24 para a questão 8.


b) E se este grupo quisesse servir 12 pessoas com esta receita, quais seriam as quantidades de cada ingrediente?

4 cenouras médias
4 xícaras de farinha
4 ovos
4 xícara de açúcar
2 xícara de óleo
2 colher de sopa de fermento

Fonte: acervo pessoal.

4.3 TERCEIRO ENCONTRO

Iniciei o terceiro encontro solicitando que os alunos formassem os mesmos grupos que trabalharam juntos nos encontros anteriores. Os alunos aproximaram suas classes e algumas orientações foram retomadas: eles deveriam escrever o máximo de informações nas folhas de problemas matemáticos que receberiam, contendo explicações mais claras possíveis acerca do processo que utilizaram para resolver o problema. Os alunos também foram informados que, ao final de cada um dos dois períodos de aula, haveria um momento dedicado ao compartilhamento de ideias com o grande grupo, no qual alguns grupos poderiam ir à frente explicar aos demais como resolveram cada um dos problemas.

Os alunos iniciaram resolvendo o problema 9 (quadro 16), que envolve uma situação em que três grandezas se relacionam através de proporcionalidade, ora diretamente proporcionais, ora inversamente proporcionais.

Quadro 16: problema 9

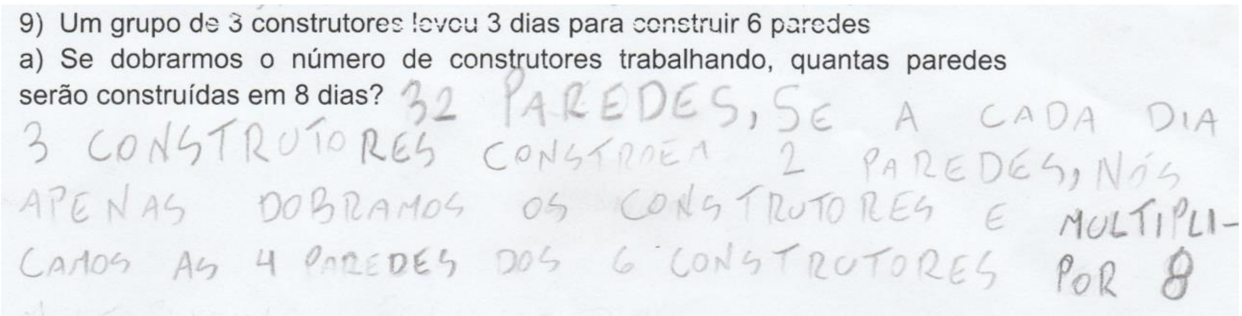
Problema 9: Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes. a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? b) De quantos construtores preciso para construir 8 paredes em 2 dias?

Foram recolhidas 26 respostas para este problema, ambas com os itens A e B resolvidos. Em relação ao item A, 18 grupos indicaram a resposta correta que é de 32 paredes; 5 grupos indicaram que serão construídas 16 paredes e os demais se dividiram em outros valores.

Ao analisar as respostas dos 18 grupos que obtiveram sucesso na resolução, foi possível identificar tipos de raciocínios diferentes: 10 grupos utilizaram multiplicações em sua argumentação e 8 grupos argumentaram via tabelas e/ou esquemas gráficos de agrupamento de figuras e símbolos, nos quais utilizaram adições sucessivas para chegar ao resultado final.

Nas resoluções dos 10 grupos que fizeram uso de diferentes multiplicações, pudemos perceber que os estudantes realizaram aplicações de operadores em duas grandezas de cada vez até obterem a informação desejada. Foram observadas resoluções que iniciavam com a divisão de duas grandezas expressas no enunciado (dias e paredes) por 2, mostrando a noção de proporcionalidade direta entre essas duas grandezas e aplicando um determinado operador, neste caso, o operador inverso $(\div 2)$, a fim de obter uma informação que revele as medidas das demais grandezas quando a quantidade de dias fosse unitária. Após, os alunos fizeram uso novamente da noção de proporcionalidade ao aplicar o operador $(\times 2)$ nas grandezas “construtores” e “paredes” e, em seguida, o operador $(\times 8)$ nas grandezas “dias” e “paredes”. Abaixo, na figura 44, um exemplo de resolução dos grupos que fizeram uso deste tipo de raciocínio.

Figura 44: resposta e justificativa do grupo 25 para a questão 9.

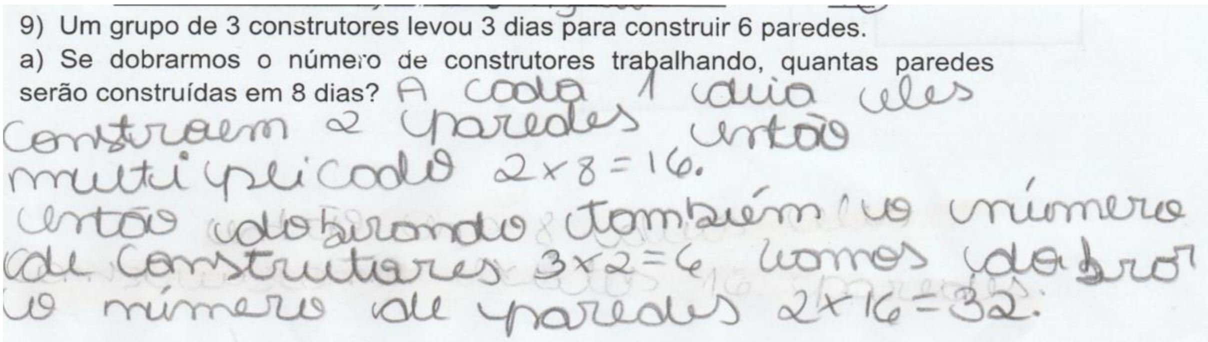


9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes
a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? 32 PAREDES, SE A CADA DIA 3 CONSTRUTORES CONSTROEM 2 PAREDES, NÓS APENAS DOBRAMOS OS CONSTRUTORES E MULTIPLICAMOS AS 4 PAREDES DOS 6 CONSTRUTORES POR 8

Fonte: acervo pessoal.

Também foram identificadas resoluções que identificavam outros operadores existentes entre as grandezas proporcionais dos problemas, o que também indica a presença da noção de proporcionalidade como conhecimento organizador do esquema, como podemos observar na imagem abaixo.

Figura 45: resposta e justificativa do grupo 19 para a questão 9.



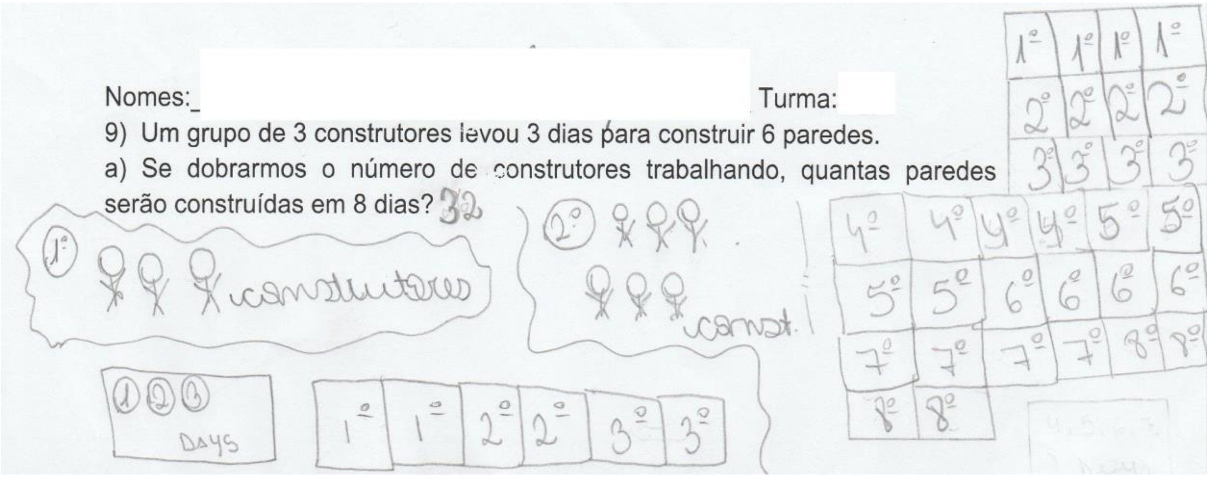
9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.
a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? A cada 1 dia eles construaem 2 paredes então multiplicado 2x8=16. então dobrando também o número de construtores 3x2=6 vamos dobrar o número de paredes 2x16=32.

Fonte: acervo pessoal.

Os outros 8 grupos que apresentaram a resposta correta, recorreram à operação soma para concluir sua respostas, e apresentaram diferentes tabelas e desenhos para ilustrar a construção das paredes conforme o número de dias.

O grupo 21, por exemplo, ilustrou a situação inicial, em que três construtores levaram 3 dias para construir 6 paredes, o que pode ser observado ao lado esquerdo da resolução (figura 46). Após, ao lado direito da imagem, podemos observar os alunos ilustraram o novo número de construtores e desenharam as paredes, colocando dentro de cada uma o dia em que ela seria construída, totalizando as 32 paredes.

Figura 46: resposta e justificativa do grupo 21 para a questão 9.

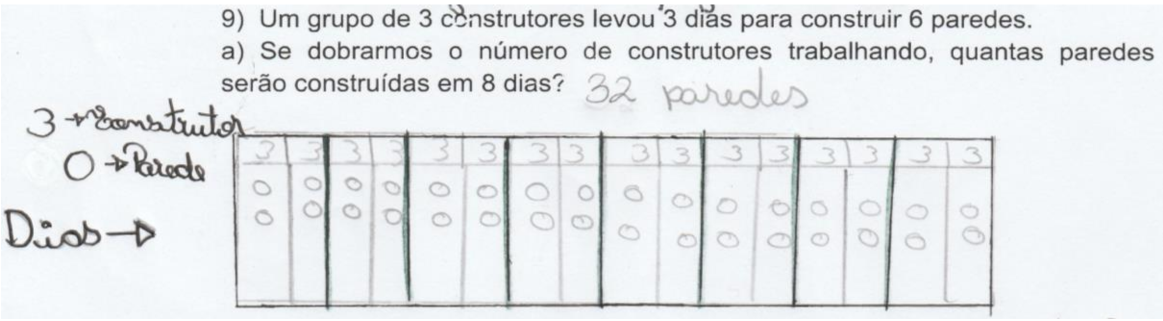


Fonte: acervo pessoal.

Neste esquema, ao passar da ilustração 1 (lado esquerdo) para a ilustração 2 (lado direito), podemos perceber, através de relatos orais registrados durante a aplicação das atividades, que os alunos utilizaram a proporcionalidade direta entre o número de construtores e paredes construídas. Segundo a explicação dos alunos, ao dobrarem o número de construtores, o número de paredes também seria dobrada, se considerarmos o mesmo número inicial de dias, que é 3. Sendo assim, listaram as primeiras 12 paredes, equivalentes aos primeiros 3 dias de construção. Nos outros três dias de construção, foram listadas mais 12 paredes e, para os últimos 2 dias, seriam listadas 8 paredes pois perceberam que seriam 4 paredes construídas a cada dia. A partir daí, então, realizam a soma de todas as paredes listadas, o que indica um esquema que foi operacionalizado através de uma soma, mas que respeitou a estrutura multiplicativa existente entre as grandezas do problema.

Outro grupo optou por organizar colunas individuais (figura 47), descrevendo a relação básica inicial que o problema fornece, que é a de que 3 construtores (que ela representou através do numeral 3) constroem 2 paredes (as quais são representadas pelo símbolo do círculo) em um dia. Após, agrupou as colunas duas a duas com uma divisão mais destacada no papel, já que o número de construtores foi dobrado, e repetiu o processo 8 vezes, correspondendo ao número de dias trabalhados, totalizando 32 paredes e, assim como a resolução anterior, embora caracterize uma conclusão do problema através de uma estrutura aditiva, respeitou a proporcionalidade existente entre as grandezas do problema.

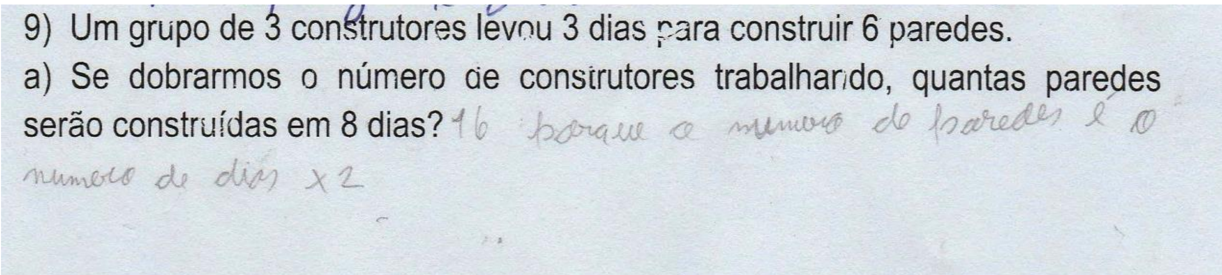
Figura 47: resposta e justificativa do grupo 9 para a questão 9.


9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.
a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? 32 paredes

Fonte: acervo pessoal.

Analisando o grupo de respostas incorretas, foi identificado que o erro cometido na maioria dos casos foi o de não considerar que haviam 3 variáveis envolvidas no problema – construtores, paredes e dias – e não apenas duas. Os grupos observaram que o número de paredes correspondia ao dobro do número de dias, então concluíram que seriam 16 paredes, como podemos observar na figura 46. Nestas resoluções, não houve a percepção de uma relação mais complexa de proporcionalidade entre as grandezas, de forma que a alteração de uma delas geraria alterações nas demais.

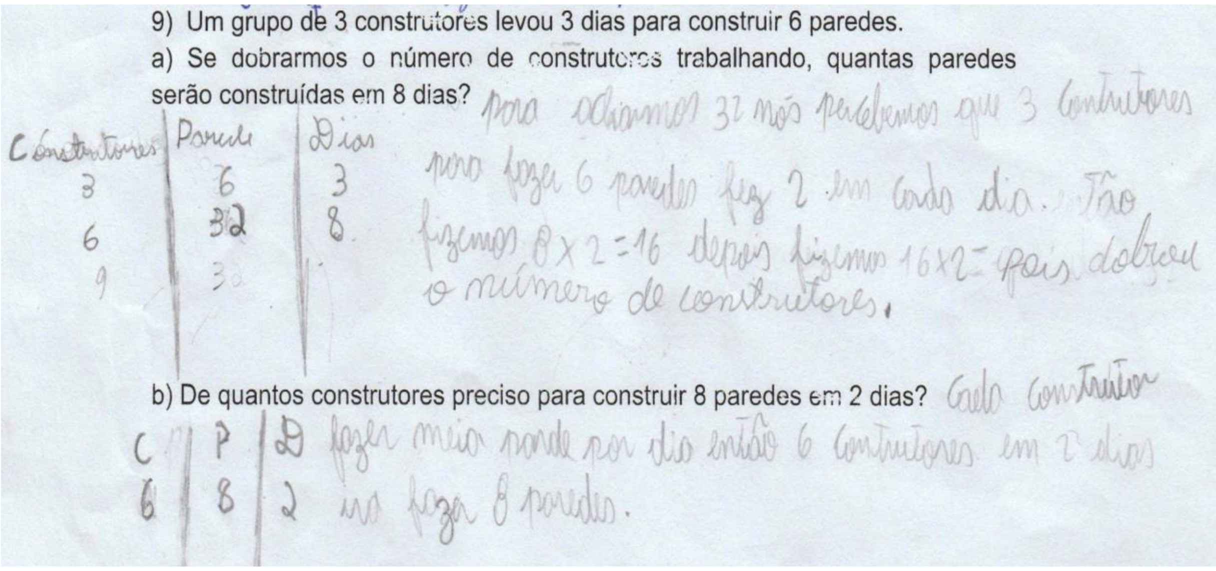
Figura 48: resposta e justificativa do grupo 1 para a questão 9.


9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.
a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? 16 porque o numero de paredes é o numero de dias x 2

Fonte: acervo pessoal.

Observando as respostas do item B, foram identificadas 15 respostas corretas e 11 incorretas. Em geral, os grupos que acertaram a resposta do item A observaram que com 6 construtores se constroem 8 paredes em 2 dias, e utilizaram tabelas e argumentações semelhantes àquelas utilizadas no item A, dando continuidade as esquemas anteriores, como podemos observar na figura 49.

Figura 49: resposta e justificativa do grupo 2 para a questão 9.


9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.

a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? para achar 32 nós percebemos que 3 construtores para fazer 6 paredes fez 2 em cada dia. Então fizemos 8 x 2 = 16 depois fizemos 16 x 2 = pois dobrou o número de construtores.

Construtores	Parede	Dias
3	6	3
6	32	8
9	3	

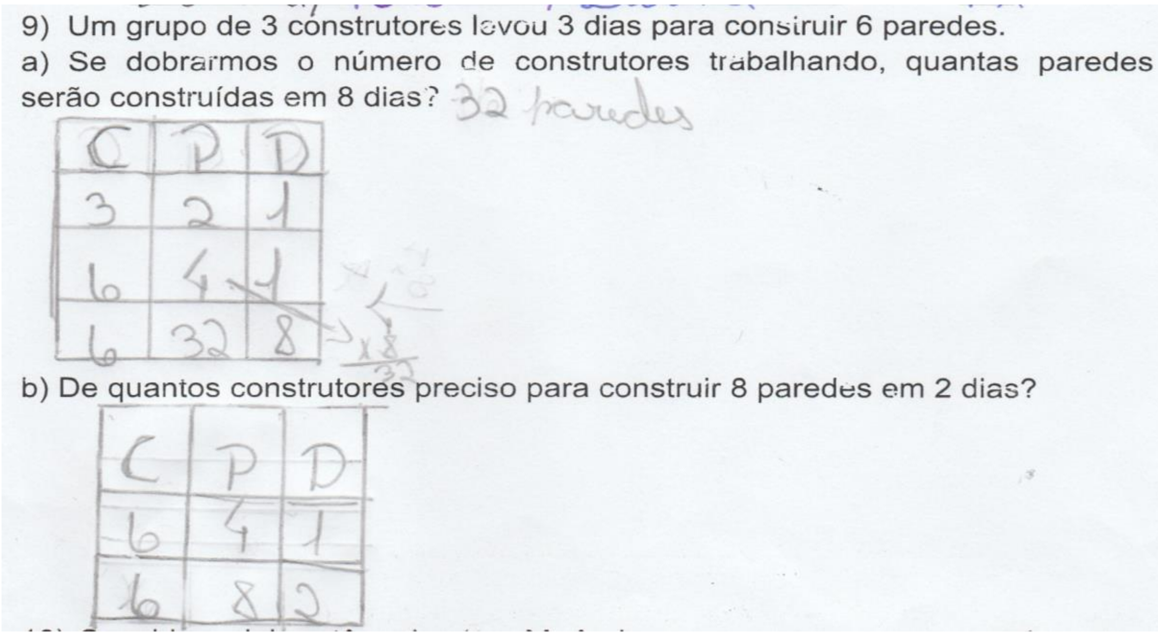
b) De quantos construtores preciso para construir 8 paredes em 2 dias? Cada construtor fazer meio parede por dia então 6 construtores em 2 dias vão fazer 8 paredes.

C	P	D
6	8	2

Fonte: acervo pessoal.

Em algumas das resoluções, ficaram mais evidentes as utilizações de operadores horizontais entre as colunas que representavam as grandezas envolvidas no problema, como na imagem abaixo.

Figura 50: resposta e justificativa do grupo 5 para a questão 9.


9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.

a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? 32 paredes

C	P	D
3	2	1
6	4	1
6	32	8

x 8

32

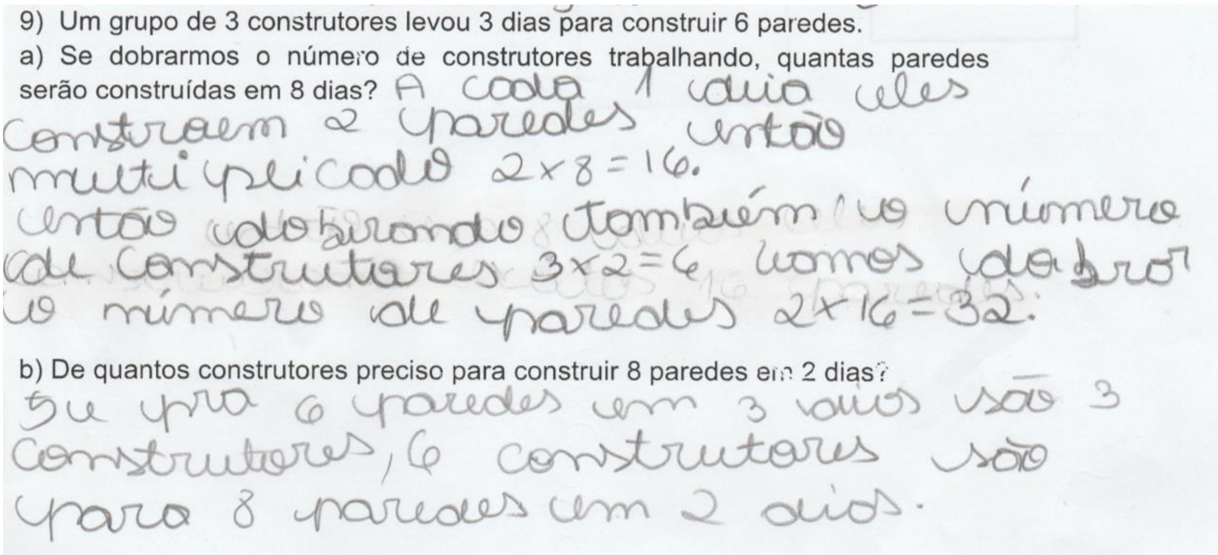
b) De quantos construtores preciso para construir 8 paredes em 2 dias?

C	P	D
6	4	1
6	8	2

Fonte: acervo pessoal.

Em outras resoluções, como a da figura 51, a linguagem escrita mostra o uso sucessivo de diferentes operadores identificados no problema até a obtenção da resposta correta.

Figura 51: resposta e justificativa do grupo 19 para a questão 9.



9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.

a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? A cada 1 dia eles constroem 2 paredes então multiplicado 2x8=16. então dobrando também o número de construtores 3x2=6 vamos dobrar o número de paredes 2x16=32.

b) De quantos construtores preciso para construir 8 paredes em 2 dias? Se pra 6 paredes em 3 dias são 3 construtores, 6 construtores são para 8 paredes em 2 dias.

Fonte: acervo pessoal.

As respostas incorretas novamente indicaram que os alunos não observaram que a situação envolvia 3 variáveis. A maioria deles apenas dividiu o número de paredes pelo número de dias, obtendo 4 como resposta. Porém, interpretaram este 4 de forma equivocada, achando que esta seria a resposta do número de construtores, quando na verdade seria o número de paredes que deveria ser construída a cada dia.

Logo após as exposições das estratégias de alguns grupos, foi entregue o segundo problema a ser discutido no encontro (quadro 17), o qual dava início a uma série de problemas que buscava investigar situações de proporcionalidade ligadas a conceitos de geometria como área e perímetro.

Quadro 17: problema 10

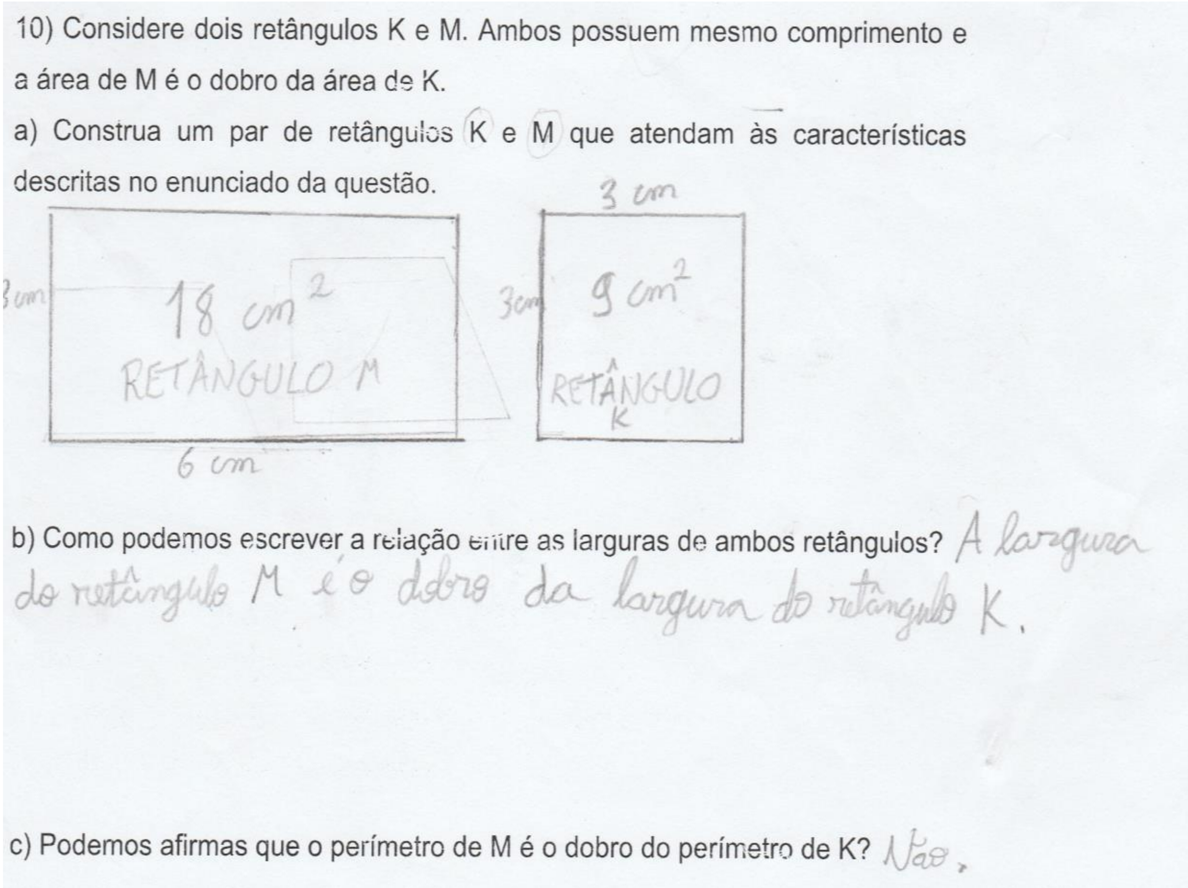
10) Considere dois retângulos K e M. Ambos possuem mesmo comprimento e a área de M é o dobro da área de K. a) Construa um par de retângulos K e M que atendam às características descritas no enunciado da questão. b) Como podemos escrever a relação entre as larguras de ambos retângulos? c) Podemos afirmar que o perímetro de M é o dobro do perímetro de K?

O problema 10 era o primeiro problema proposto envolvendo conceitos de geometria como área e perímetro, os quais haviam sido estudados recentemente pelos alunos na época em que a atividade prática foi desenvolvida. O principal elemento exigido nesta questão era a construção de dois retângulos, ambos de mesmo comprimento, porém um com o dobro da área do outro. A partir de uma construção coerente com aquilo que foi solicitado, a resposta aos demais itens se daria a partir da observação da construção e dos operadores envolvidos entre as grandezas do problema.

Das 25 respostas coletadas para esta questão, 20 apresentaram uma construção coerente no item A, o que acarretou no acerto dos itens B e C. Como a questão não solicitava que os alunos explicassem o motivo pelo qual desenharam os retângulos com determinadas dimensões, pedi que os alunos explicassem no momento do encontro reservado para que os grupos compartilhassem ideias com os colegas e com a professora.

O grupo 13 utilizou a seguinte justificativa verbal para a construção realizada: “[...] se queremos que tenha o dobro de área e a gente não pode mexer no comprimento, temos que mexer na largura. A gente foi aumentando a largura do grande e vimos que ela tinha que ser duas vezes a largura do pequeno.” Embora não constem registros escritos, a linguagem verbal expressa pelos estudantes fornece indícios suficientes para acreditar que a fórmula da área do retângulo, deduzida algumas aulas antes deste encontro, foi levada em consideração. O principal conhecimento organizador do pensamento presente no esquema utilizado pelos estudantes é a noção de que, para aumentar o resultado de um produto, devemos aumentar os fatores e, no caso do problema, como o comprimento era fixo, só restava ao aluno aumentar a altura do retângulo, que era o outro fator envolvido. A resolução deste grupo consta na figura 52.

Figura 52: resposta e justificativa do grupo 13 para a questão 10.


10) Considere dois retângulos K e M. Ambos possuem mesmo comprimento e a área de M é o dobro da área de K.

a) Construa um par de retângulos K e M que atendam às características descritas no enunciado da questão.

b) Como podemos escrever a relação entre as larguras de ambos retângulos? A largura do retângulo M é o dobro da largura do retângulo K.

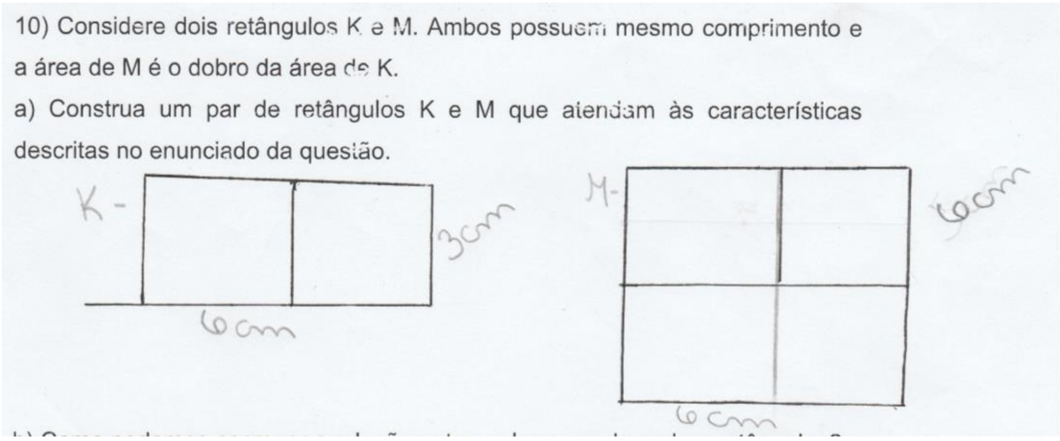
c) Podemos afirmas que o perímetro de M é o dobro do perímetro de K? Não.

Fonte: acervo pessoal.

Outro grupo utilizou a seguinte justificativa para a realização da construção: “a gente queria que tivesse o dobro de área no grande, então na verdade a gente queria que dentro do grande desse para colocar dois pequenos. Fizemos um pequeno de 6cm e 3cm e o nosso grande foi formado por dois pequenos, então ele ficou de 6cm por 6cm.”

Nesta justificativa, o que organiza o esquema apresentado pelos estudantes é a noção intuitiva do conceito de área, que é relacionado ao espaço ocupado pela figura, e não ao produto do comprimento pela largura do retângulo. A partir desta ideia, o grupo apresentou a resolução, a qual está presente na figura abaixo.

Figura 53: construção do grupo 5 para a questão 10.


10) Considere dois retângulos K e M. Ambos possuem mesmo comprimento e a área de M é o dobro da área de K.

a) Construa um par de retângulos K e M que atendam às características descritas no enunciado da questão.

K-

3cm

6cm

M-

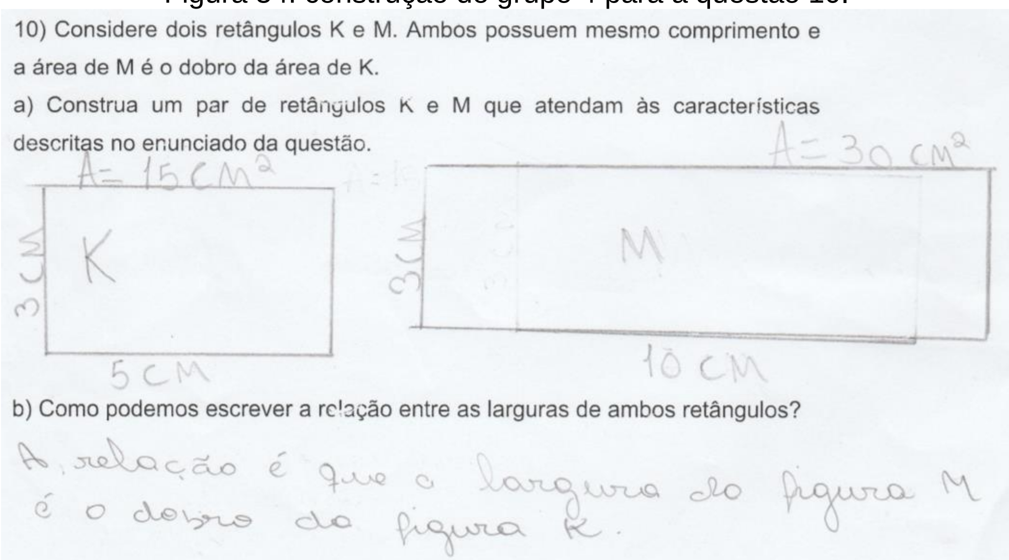
6cm

6cm

Fonte: acervo pessoal.

Ainda, houve grupos que embasaram seu esquema também na noção relacionada ao produto do comprimento pela largura dos retângulos para obter a área de forma distinta, escolhendo valores para as dimensões e obtendo a área e, em seguida, aplicando o operador vertical $(\times 2)$ que leva a área de K à área de M. Um dos grupos que utilizou este tipo de resolução justificou da seguinte forma: “a gente começou construindo um pequeno, com 3cm de altura e a base, que é o comprimento, com 5 cm. A área dele deu 15, então a gente sabia que o nosso grande tinha que ter 30 de área. A gente sabia que o 3cm a gente não podia mudar, então como para calcular a área do retângulo a gente tem que multiplicar a base pela altura, a gente tinha que achar qual era a base que multiplicada pela nossa altura de 3 cm daria os 30 de área, então a gente achou o 10cm.” As construções do grupo constam na figura abaixo.

Figura 54: construção do grupo 4 para a questão 10.


10) Considere dois retângulos K e M. Ambos possuem mesmo comprimento e a área de M é o dobro da área de K.

a) Construa um par de retângulos K e M que atendam às características descritas no enunciado da questão.

A= 15 CM²

3CM

K

5 CM

A= 30 CM²

3CM

M

10 CM

b) Como podemos escrever a relação entre as larguras de ambos retângulos?

A relação é que a largura da figura M é o dobro da figura K.

Fonte: acervo pessoal.

Analisando as 5 construções incorretas, identificamos que os grupos não seguiram a exigência de que os comprimentos deviam se manter, e, desta forma, não conseguiram obter as relações que deveriam ser descritas no item B e C.

No item B, os grupos deveriam utilizar da linguagem de sua preferência para descrever o operador vertical observado entre as larguras dos retângulos K e M, e, dentre os grupos que realizaram uma construção coerente no primeiro item, foi unânime a descrição do operador com expressões como “dobro” ou “duas vezes mais”.

Logo após a discussão deste problema, foi entregue o problema 11, que aprofundava as discussões que dizem respeito às relações entre área e perímetros de figuras quando suas dimensões originais são alteradas seguindo um operador vertical, como podemos observar no quadro abaixo.

Quadro 18: problema 11

Problema 11: Considere dois retângulos A e B. Para cada 1cm de comprimento do retângulo A, há 2 cm de comprimento no retângulo B, e a mesma relação acontece com a largura de ambos retângulos. a) Como podemos escrever a relação entre os perímetros destes retângulos? b) Como podemos escrever a relação entre as áreas destes retângulos?

O problema 11 também exigia o trabalho com conceitos de área e perímetro de retângulos, porém não exigia a construção geométrica em si. Ainda sim, alguns grupos optaram por realizar as construções para facilitar a respostas aos itens A e B das questões.

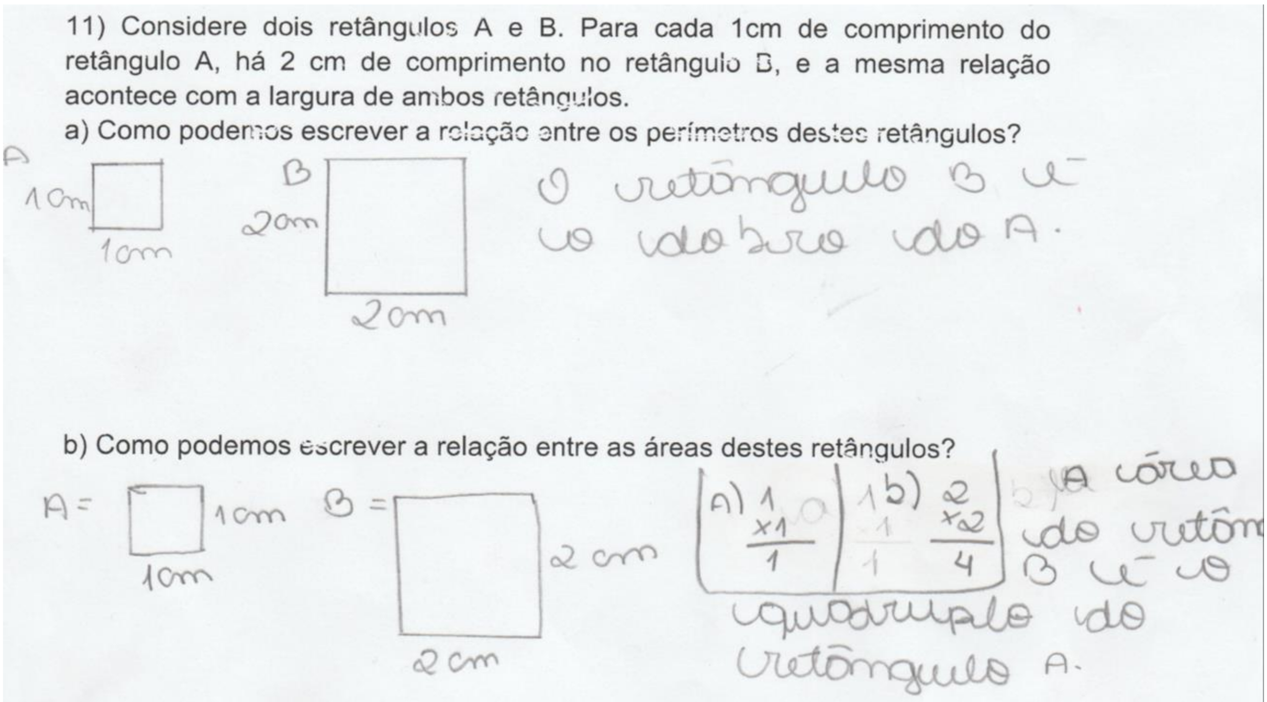
Foram recolhidas 22 respostas a este problema, das quais 19 estavam corretas e 3 estavam incorretas. Nas 3 respostas incorretas, foi observado que os alunos realizaram construções respeitando a relação 2:1 solicitada apenas para uma das dimensões, semelhante ao que foi pedido no item anterior, não sendo possível encontrar o operador vertical $(\times 2)$ que leva o perímetro de A ao perímetro B, assim como o operador vertical $(\times 4)$ que leva a área de A à área de B.

Nas 19 respostas corretas ao item A, os alunos conseguiram identificar que, ao dobrar cada uma das dimensões do retângulo, o perímetro também estava sendo duplicado. No entanto, houve 3 grupos que estenderam a relação para a área, afirmando que, se o perímetro duplicou, a área também seria duplicada, o que é aparentemente razoável de se afirmar quando o grupo não investigou a situação através de construções, que foi o caso dos três grupos em questão.

Nas outras 16 respostas, que apresentaram conclusões corretar para os itens A e B, foi observado que a construção se fez necessária nos esquemas desenvolvidos pelos estudantes. Nestes esquemas, os alunos mostraram estratégias que envolviam realização de testes e generalização de resultados observados no teste. A rigor, sabemos que este tipo de argumentação não é válida para generalizações, mas serviram para ilustrar o raciocínio utilizado pelos grupos.

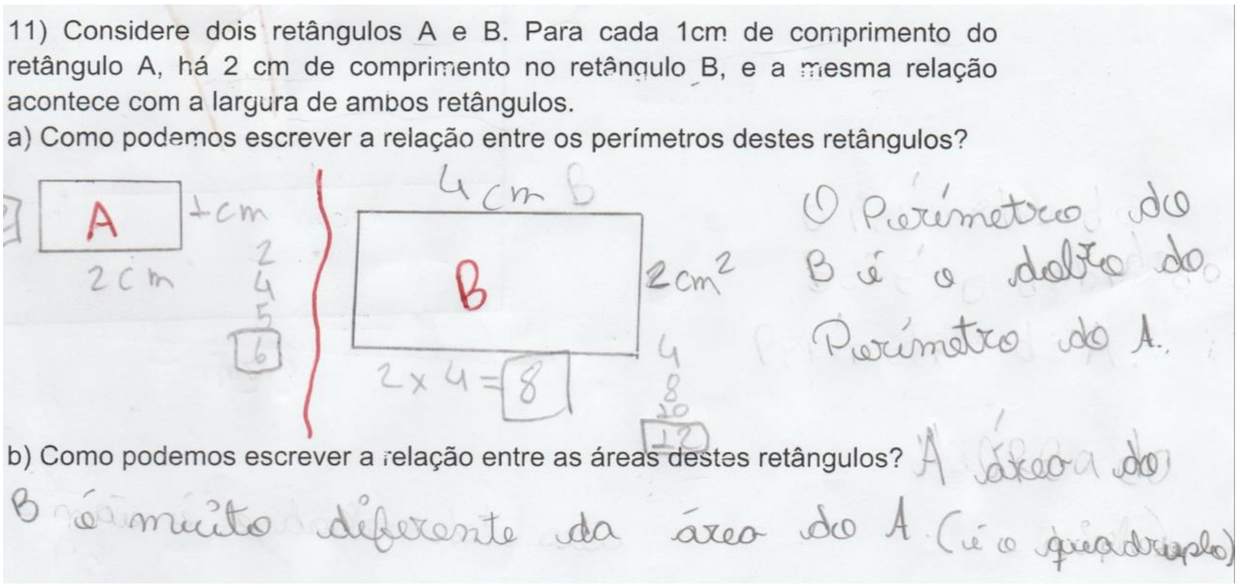
O primeiro passo dado pelos grupos nas suas resoluções, foi a identificação do operador vertical $(\times 2)$ que leva as dimensões de A às dimensões de B, construindo um par de retângulos de atendia à essa exigência. Logo após, foram analisados os valores de área e perímetro obtidos, na tentativa de identificar os operadores verticais envolvidos nas transformações, como podemos observar nas imagens 55, 56 e 57.

Figura 55: construção do grupo 19 para a questão 10.



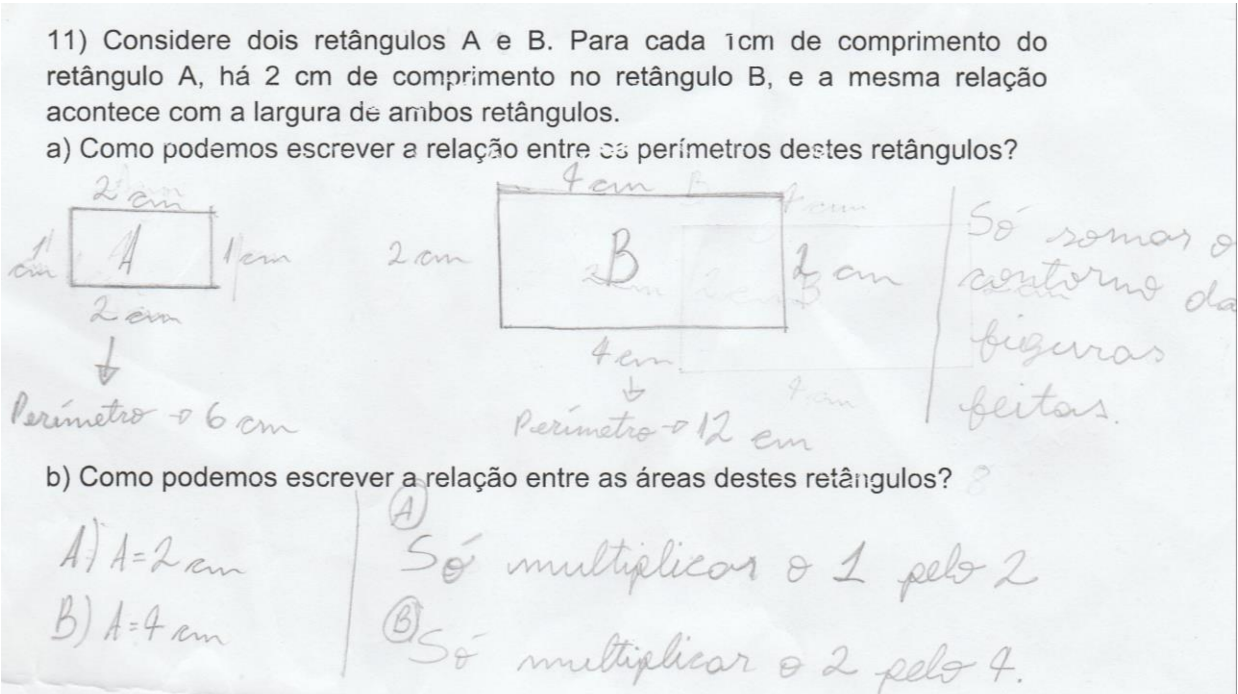
Fonte: acervo pessoal.

Figura 56: construção do grupo 23 para a questão 11.



Fonte: acervo pessoal.

Figura 57: construção do grupo 4 para a questão 11.



Fonte: acervo pessoal.

Sendo assim, nos problemas envolvendo conceitos de geometria, foi possível observar uma procura, por parte dos estudantes, dos operadores verticais responsáveis pelas transformações observadas nos problemas, o que indica ~~o~~ uso de estruturas multiplicativas na solução destes problemas.

4.4. QUARTO ENCONTRO

No início do encontro, assim como nos anteriores, foram relembradas algumas orientações aos grupos: eles deveriam escrever o máximo de informações nas folhas de problemas matemáticos que receberiam, contendo explicações mais claras possíveis acerca do processo que utilizaram para resolver o problema. Os alunos também foram relembrados que, ao final de cada um dos dois períodos de aula, haveria um momento dedicado ao compartilhamento de ideias com o grande grupo, no qual alguns grupos poderiam ir à frente explicar aos demais como resolveram cada um dos problemas.

Entreguei os problemas previstos para serem resolvidos naquele encontro aos grupos, sendo o problema 12 (quadro abaixo) o primeiro deles:

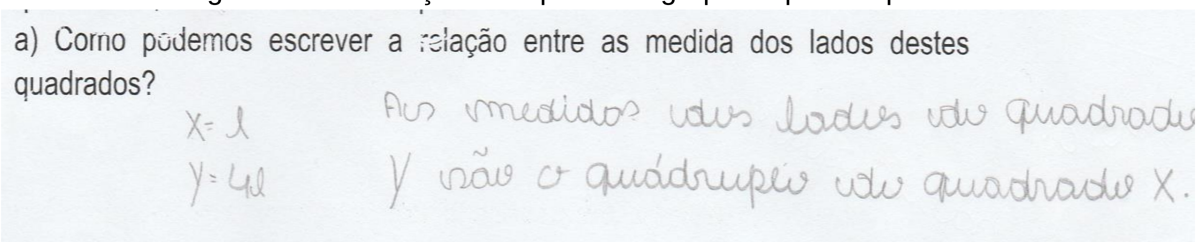
Quadro 19: problema 12

Problema 12: Considere dois quadrados X e Y. Para cada 1cm² de área que há no quadrado X, há 4cm² de área no quadrado Y. a) Como podemos escrever a relação entre as medida dos lados destes quadrados? b) Como podemos escrever a relação entre os perímetros destes quadrados?

O problema 12 era uma situação inversa a do problema 11, a fim de verificar se os alunos haviam compreendido as relações existentes entre a área e o perímetro de uma figura quando a mesma tem suas medidas transformadas através de um operador vertical.

Foram coletadas 17 respostas contendo algum desenvolvimento em pelo menos um dos itens da questão. Destas 17 respostas, em 8 delas foi detectada dificuldade de interpretação, pois realizaram a questão assim como a anterior, interpretando que a relação dos lados era de 1:4, e não a relação entre as áreas, como podemos observar nas figuras 58 e 59.

Figura 58: construção e resposta do grupo 12 para a questão 12.

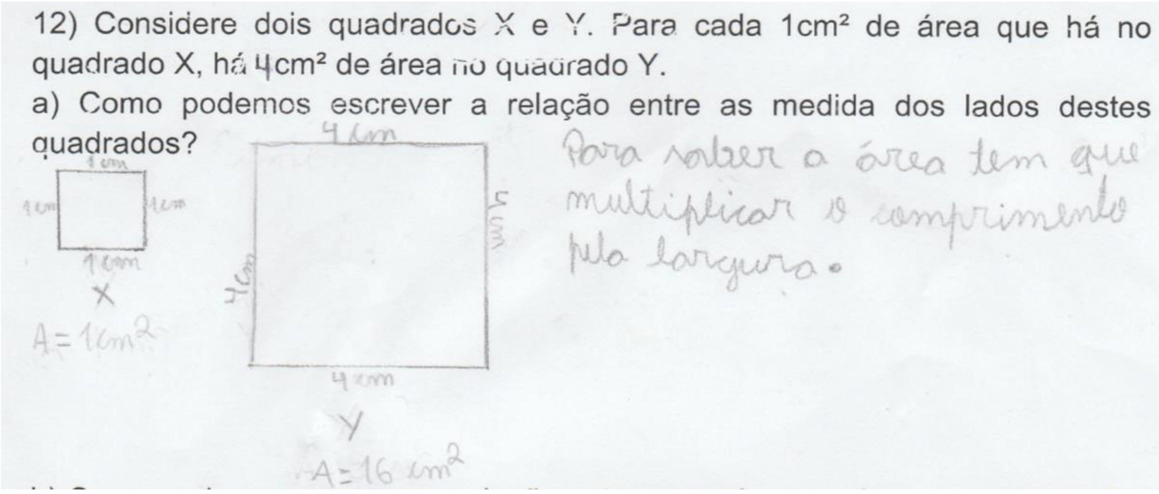

a) Como podemos escrever a relação entre as medida dos lados destes quadrados?

X= l
Y= 4l

As medidas dos lados do quadrado Y são o quádruplo do quadrado X.

Fonte: acervo pessoal.

Figura 59: resposta do grupo 2 para a questão 12.

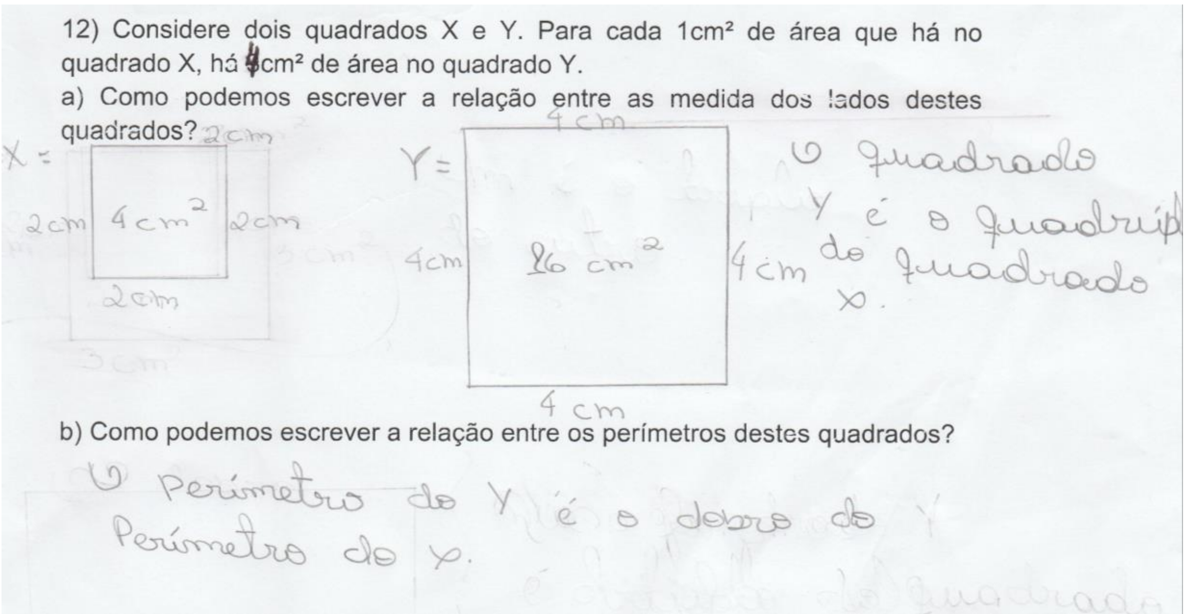

12) Considere dois quadrados X e Y. Para cada 1cm² de área que há no quadrado X, há 4cm² de área no quadrado Y.

a) Como podemos escrever a relação entre as medida dos lados destes quadrados?

Fonte: acervo pessoal.

Nas 9 respostas em que os grupos partiram de uma construção geométrica coerente, como nas figuras 60 e 61, foi possível perceber que os alunos dedicaram tempo e variadas tentativas até encontrar uma construção que atendesse aos dados do problema, o que indica que os alunos não utilizaram as relações realizadas na questão anterior. Ainda, devido à dificuldade em realizar a construção dos quadrados, alguns grupos acabaram não escrevendo as relações conforme era solicitado na questão.

Figura 60: resposta do grupo 15 para a questão 12.

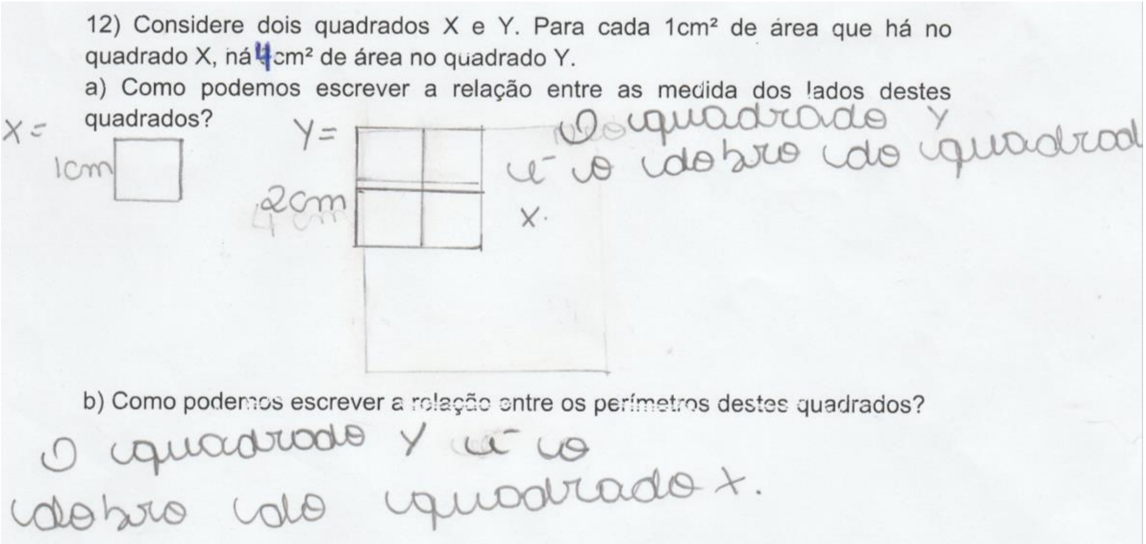

12) Considere dois quadrados X e Y. Para cada 1cm² de área que há no quadrado X, há 4cm² de área no quadrado Y.

a) Como podemos escrever a relação entre as medida dos lados destes quadrados?

b) Como podemos escrever a relação entre os perímetros destes quadrados?

Fonte: acervo pessoal.

Figura 61: resposta do grupo 19 para a questão 12.



12) Considere dois quadrados X e Y. Para cada 1cm² de área que há no quadrado X, há 4cm² de área no quadrado Y.

a) Como podemos escrever a relação entre as medida dos lados destes quadrados?

b) Como podemos escrever a relação entre os perímetros destes quadrados?

O quadrado Y é o dobro do quadrado X.

Fonte: acervo pessoal.

Segundo Vergnaud (1993), nos diferentes esquemas, é possível identificar comportamentos que se automatizam progressivamente, conforme as condutas do sujeito o levam ao sucesso nos diferentes problemas a serem resolvidos. Além disso, também se identifica tomadas de decisões conscientes no esquema, as quais envolvem as variáveis específicas do problema, e não se generalizam e automatizam progressivamente, já que são particulares da situação proposta. No caso dos esquemas observados para a resolução deste problema, é possível perceber que os esquemas utilizados não foram provenientes da automatização de um comportamento perante situações semelhantes vistas anteriormente, já que iniciou-se uma investigação do caso novamente, não fazendo uso das conclusões obtidas no problema anterior, o qual era semelhante ao problema 12.

Logo após, foi entregue o penúltimo problema a ser resolvido pelos estudantes na atividade prática, presente no quadro abaixo.

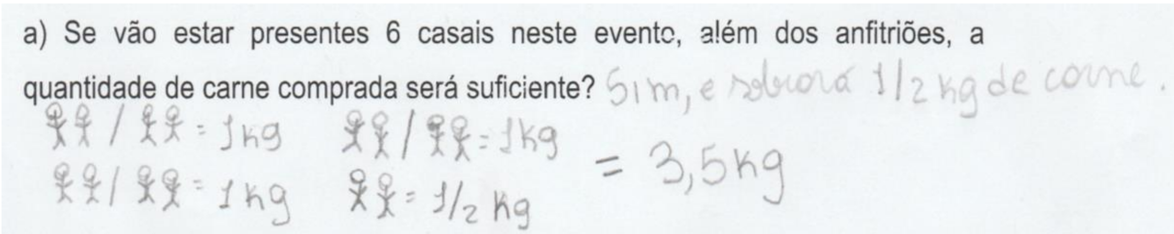
Quadro 20: problema 13

Problema 13: Para preparar um churrasco para seus casais de amigos, Júlia e Roberto compraram 4kg de carne. Sugere-se que, para cada casal presente em um churrasco, seja assado $1/2\,kg$ de carne. a) Se vão estar presentes 6 casais neste evento, além dos anfitriões, a quantidade de carne comprada será suficiente? b) Como podemos escrever a quantidade de carne que cada casal poderá consumir neste evento? b) Até quantos casais Júlia e Roberto poderiam receber neste evento de forma que a carne comprada seja suficiente?

Foram coletadas 21 respostas para este problema, e identificamos que todos os grupos conseguiram encontrar e resposta correta para o item A. As argumentações, em geral, utilizaram de frases ou agrupamentos de diferentes símbolos que representavam as grandezas do problema, mostrando a correspondência entre casais e a quantidade de carne que cada um deles deveria consumir, concluindo que a quantidade de carne era suficiente e ainda iria sobrar meio quilo.

Um dos grupos, por exemplo, através do uso de símbolos para representar casais (figura 62), utilizou um esquema apoiado na distributividade da multiplicação em relação à soma, tendo considerado os 7 casais como equivalente a 2+2+2+1, e então distribuindo a quantidade de 1kg de carne para casa 2 casais. Nesse caso, foi utilizado um raciocínio operacionalizado de forma aditiva, mas que gerou um resultado equivalente à aplicação de um operador horizontal que leva a quantidade de casais na quantidade de carne necessária no churrasco, respeitando o isomorfismo entre as medidas.

Figura 62: resposta do grupo 6 para a questão 13.


a) Se vão estar presentes 6 casais neste evento, além dos anfitriões, a quantidade de carne comprada será suficiente? Sim, e sobrará 1/2 kg de carne.

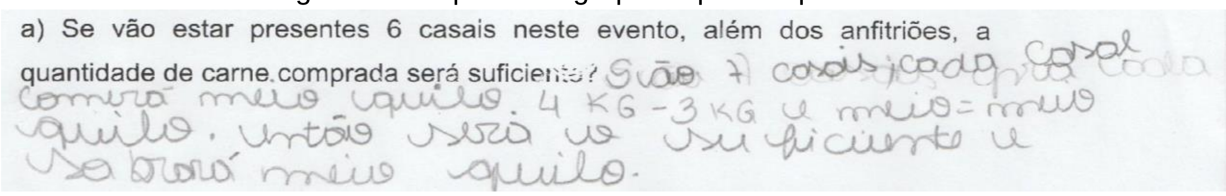
/ = 1kg / = 1kg

/ = 1kg = 1/2 kg = 3,5kg

Fonte: acervo pessoal.

Questionei alguns dos grupos que apresentaram apenas frases em suas argumentações acerca das operações matemáticas utilizadas, como na figura 63, e os grupos expressaram a ideia de que haviam realizado uma divisão de 4kg por 0,5kg para obter o número de casais que poderia estar presente. Sendo assim, identificamos a utilização de um operador vertical inverso (divisão) entre uma das grandezas do problema (quantidade de carne).

Figura 63: resposta do grupo 19 para a questão 13.

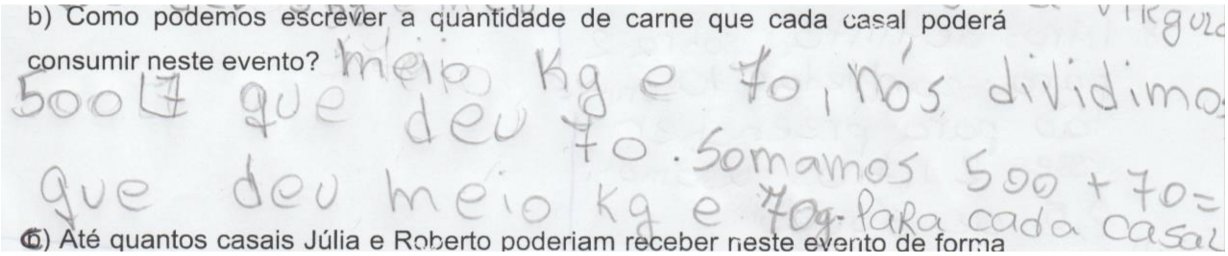

a) Se vão estar presentes 6 casais neste evento, além dos anfitriões, a quantidade de carne comprada será suficiente? São 7 casais, cada casal cada comerá meio quilo. 4 KG - 3 KG e meio = meio quilo. Então será o suficiente e sobrará meio quilo.

Fonte: acervo pessoal.

Em relação ao item B, foram identificadas 9 respostas corretas e 12 incorretas. Os 13 grupos que responderam de forma incorreta, não demonstraram compreensão sobre o que estava sendo proposto na questão. Todos estes grupos escreveram que cada um dos casais poderia comer meio quilo de carne e sobraria meio, ou seja, não compreenderam que, na verdade, a ideia era a de não sobrar carne e, além disso, dividir os 4kg igualmente para todos os casais presentes.

Dentre os 9 grupos que optaram por dividir igualmente os 4kg pelos 7 casais presentes no evento, foram identificadas formas distintas de resolução. Dois grupos utilizaram a operação divisão que era indicada, obtendo um valor aproximado de 570 gramas por casal em sua divisão, como na figura 64, o qual foi considerado correto. Isto é, foi utilizado um esquema pertencente ao campo multiplicativo, no qual podemos identificar o uso de um operador horizontal inverso (divisão) para resolução do problema.

Figura 64: resposta do grupo 15 para a questão 13.

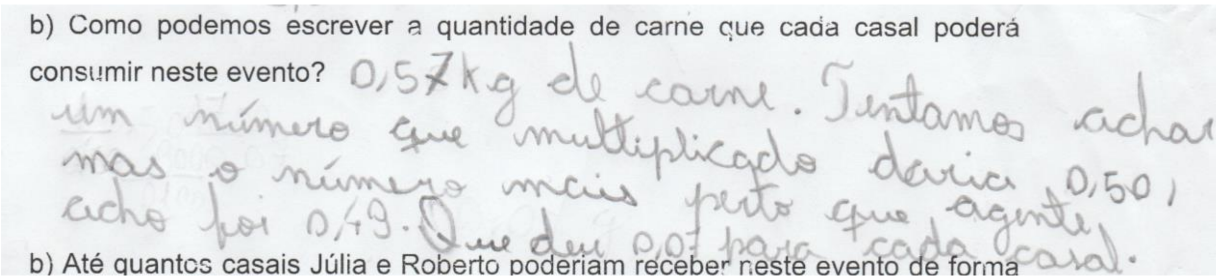

b) Como podemos escrever a quantidade de carne que cada casal poderá consumir neste evento? meio kg e 70, nós dividimos 500÷7 que deu 70. Somamos 500 + 70 = que deu meio kg e 70g para cada casal

c) Até quantos casais Júlia e Roberto poderiam receber neste evento de forma

Fonte: acervo pessoal.

Outros 2 grupos fizeram testes a partir de multiplicações, na busca de encontrar o valor que, multiplicado por 7 casais, totalizaria os 4000g disponíveis, como nas figuras 65 e 66. Nesse caso, percebemos a opção pelos testes com multiplicações ao invés do uso de divisões, evidenciando, como em outros casos nas análises realizadas até o momento, a preferência pelo trabalho com operadores diretos a operadores inversos.

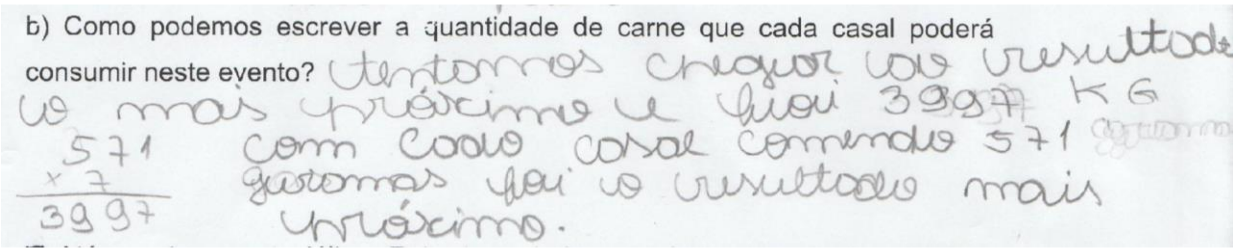
Figura 65: resposta do grupo 5 para a questão 13.


b) Como podemos escrever a quantidade de carne que cada casal poderá consumir neste evento? 0,57 kg de carne. Tentamos achar um número que multiplicado daria 0,50, mas o número mais perto que agente acho foi 0,49. Que deu 0,07 para cada casal.

b) Até quantos casais Júlia e Roberto poderiam receber neste evento de forma

Fonte: acervo pessoal.

Figura 66: resposta do grupo 19 para a questão 13.


b) Como podemos escrever a quantidade de carne que cada casal poderá consumir neste evento? tentamos chegar ao resultado o mais próximo e foi 3997 KG

571 com cada casal comendo 571 gramas

x 7 gramas foi o resultado mais

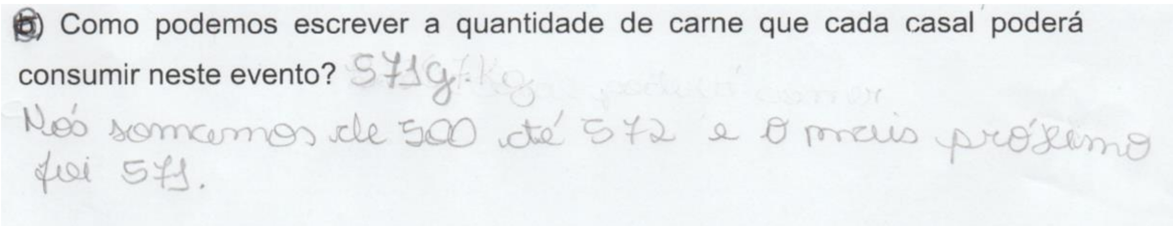
3997 próximo.

Fonte: acervo pessoal.

Os outros 4 grupos também fizeram uso de testes, porém tentaram encontrar o valor que, somado 7 vezes, totalizaria os 4000g disponíveis. Estes grupos dedicaram bastante tempo e trabalho nestes testes, mas também conseguiram encontrar valores aproximados coerentes.

O uso de adições indica, como em outras ocasiões na análise dos problemas, a consideração, por parte dos alunos, da multiplicação como sendo equivalente às somas sucessivas. Embora esta equivalência seja limitada, é importante ressaltar que o caminho escolhido (figuras 67 e 68) pelos estudantes para encontrar o valor procurado, embora mais trabalhoso, os levou de forma coerente ao resultado do problema, apenas foi operacionalizado a partir de adições.

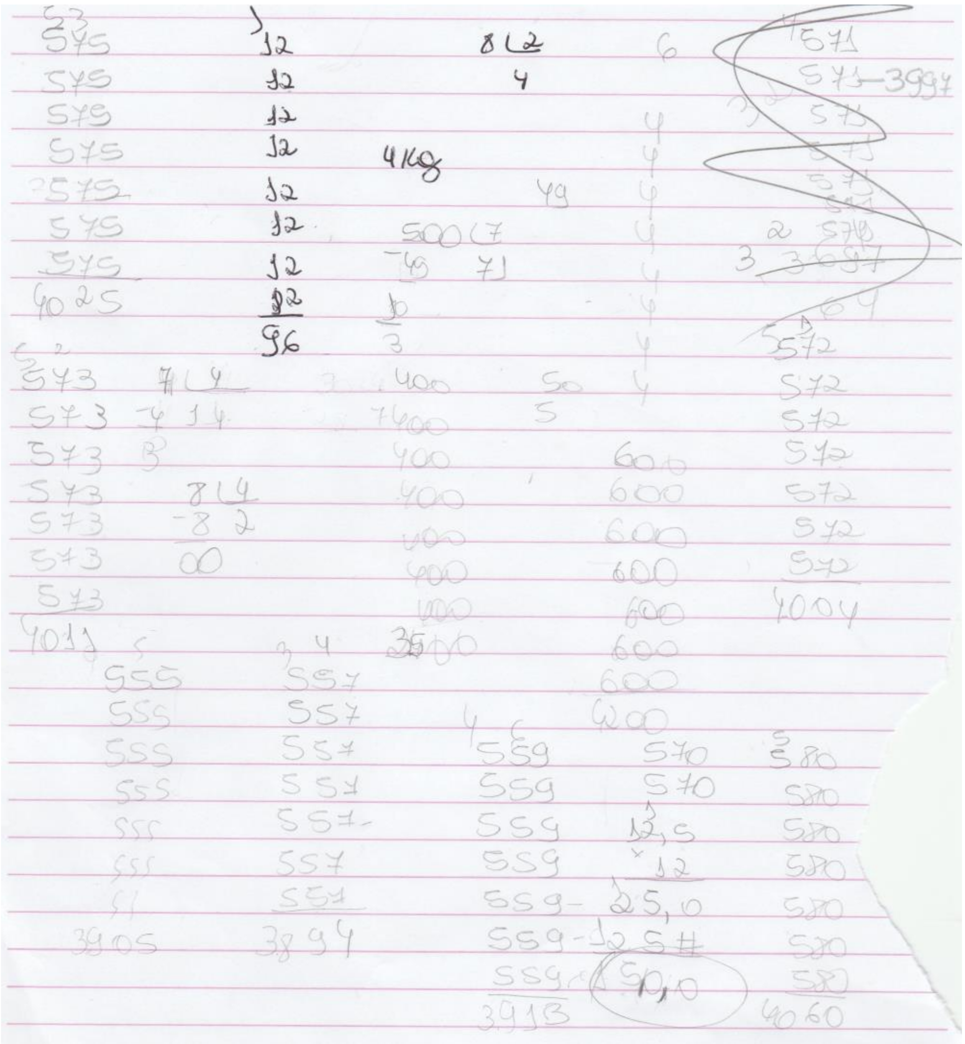
Figura 67: resposta do grupo 12 para a questão 13.


b) Como podemos escrever a quantidade de carne que cada casal poderá consumir neste evento? 571g/kg

Nós somamos de 500 até 572 e o mais próximo foi 571.

Fonte: acervo pessoal.

Figura 68: rascunho utilizado pelo grupo 17 para a questão 13.



Fonte: acervo pessoal.

Em relação ao item C, todos os grupos observaram que, ao sobrar meio quilo de carne, os anfitriões poderiam receber mais um casal em seu evento.

Por fim, foi entregue aos alunos o último problema a ser resolvido, o qual pode ser observado no quadro abaixo.

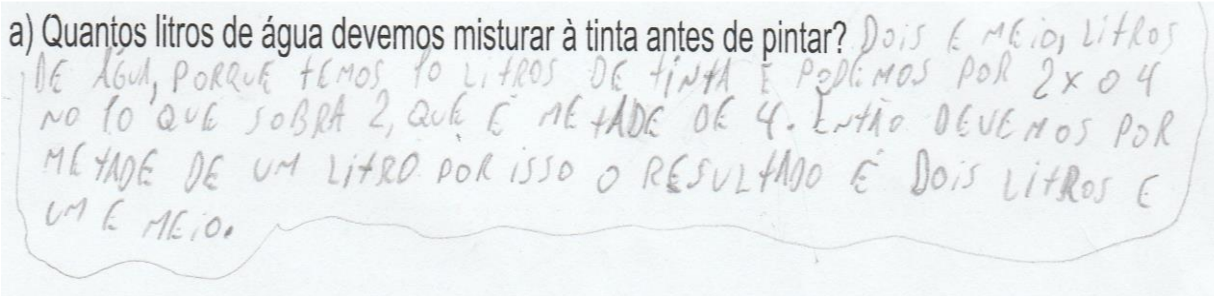
Quadro 21: problema 14

Problema 14: Em uma lata de tinta, está escrita a seguinte instrução: para o rendimento máximo de pintura de 12m² por litro de tinta, devem ser misturados 1 litro de água para cada 4 litros de tinta. Suponha que o galão de tinta possua 10 litros de tinta. a) Quantos litros de água devemos misturar à tinta antes de pintar? b) Quantos metros quadrados (m²) de pintura este galão de tinta irá render? c) Como podemos escrever a relação de água misturada com o número de metros quadrados que a pintura renderá?

Foram coletadas 21 respostas para este problema. No item A, foram identificadas 16 respostas corretas e 5 respostas incorretas. Nas 16 respostas corretas, foi possível perceber que os grupos utilizaram a mesma forma para resolução: diluíram os 10 litros de tinta de 4 em 4 litros, pois a questão informava que deveriam ser misturados 1 litro de água para cada 4 litros de tinta. Para expressar este raciocínio, foram observadas listagens e frases explicativas.

Podemos observar novamente nas resoluções a distributividade da multiplicação em relação à soma como um dos organizadores do esquema, tendo considerado os 10 litros de tinta como equivalente a 4+4+2 litros de tinta, e então distribuindo a quantidade de 1 litro de água para cada 4 litros de tinta, como nas imagens abaixo.

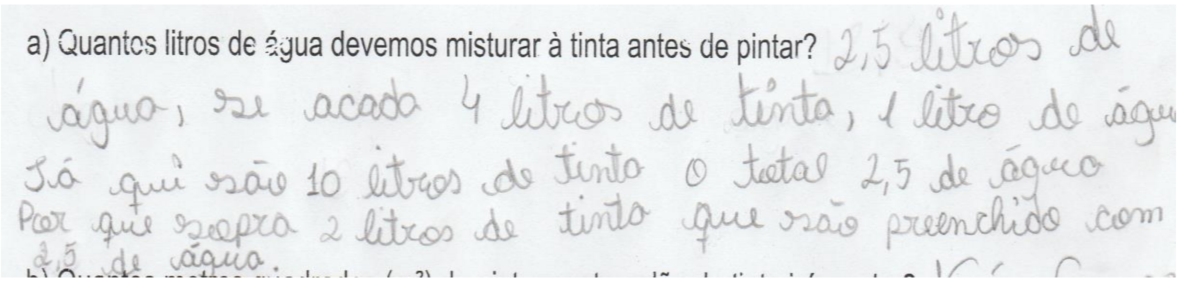
Figura 69: respostas e justificativa do grupo 18 para a questão 14.



a) Quantos litros de água devemos misturar à tinta antes de pintar? DOIS E MEIO, LITROS DE ÁGUA, PORQUE TEMOS 10 LITROS DE TINTA E PODEMOS POR 2 x O 4 NO 10 QUE SOBRA 2, QUE É METADE DE 4. ENTÃO DEVEMOS POR METADE DE UM LITRO POR ISSO O RESULTADO É DOIS LITROS E UM E MEIO.

Fonte: acervo pessoal.

Figura 70: respostas e justificativa do grupo 23 para a questão 14.



a) Quantos litros de água devemos misturar à tinta antes de pintar? 2,5 litros de água, se acada 4 litros de tinta, 1 litro de água Já qui são 10 litros de tinto o total 2,5 de água Por que sopra 2 litros de tinto que são preenchido com 2,5 de água.

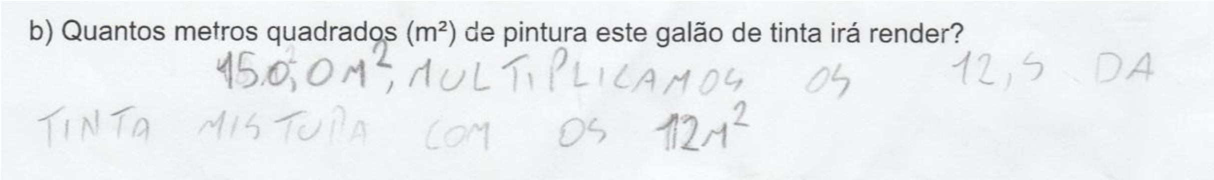
Fonte: acervo pessoal.

Ainda em relação ao item A, especificamente às resoluções semelhantes aos das imagens 69 e 70, podemos identificar a utilização de adições para chegar à resposta final ao invés da utilização de operadores verticais/horizontais, mas que, para efeitos de resultado e coerência da estratégia, geraram o mesmo efeito, pois foram organizados por uma estrutura multiplicativa.

Em relação ao item B, foram coletadas 19 respostas, nas quais 9 apresentaram raciocínio correto e as demais, incorretos. Foi possível perceber, nos grupos que conseguiram concluir corretamente o item, que multiplicaram os 12,5 litros de mistura de tinta pelos 12m² de rendimento de cada litro.

Nestes grupos, podemos perceber a utilização do operador horizontal $(\times 12)$ que leva a quantidade de mistura de tinta ao rendimento da pintura, como na figura abaixo.

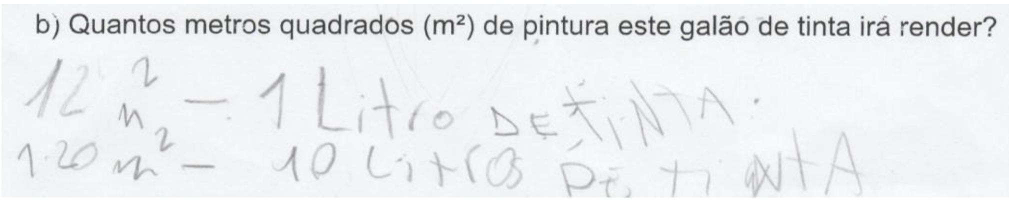
Figura 71: respostas e justificativa do grupo 25 para a questão 14.


b) Quantos metros quadrados (m²) de pintura este galão de tinta irá render?
150,0 M², MULTIPLICAMOS OS 12,5 DA TINTA MISTURA COM OS 12M²

Fonte: acervo pessoal.

Ainda, houve grupos que realizaram raciocínio coerente, porém não se deram conta de que a mistura de tinta passava a ter 12,5 litros quando misturada com água, e não mais 10 litros, e realizaram a multiplicação de 10 litros pelos 12m² de rendimento, como na figura abaixo.

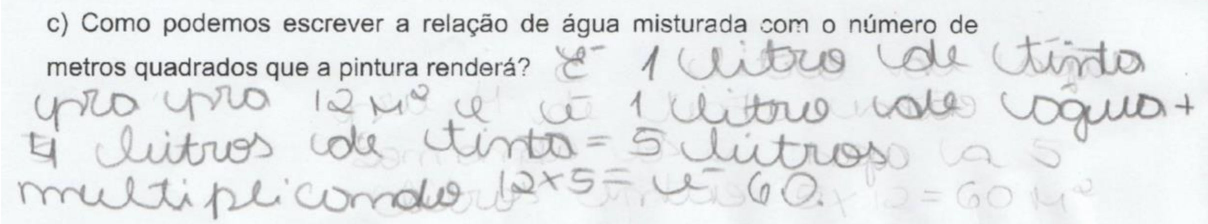
Figura 72: registro do raciocínio do grupo 5 na questão 14.


b) Quantos metros quadrados (m²) de pintura este galão de tinta irá render?
12 m² — 1 Litro DE TINTA:
1·20 m² — 10 Litros DE TINTA

Fonte: acervo pessoal.

Em relação ao item C, foram identificadas, dentre as 18 respostas coletadas, 7 respostas que apresentaram raciocínios coerentes. Três destes grupos descreveram uma mistura que utilizasse 1 litro de água e 4 litros de tinta, a qual renderia 60m² de pintura. Para obter a relação, fizeram uso dos mesmos operadores horizontais observados nos outros itens, que levam a quantidade de mistura de tinta ao rendimento da pintura, como podemos observar na figura 73.

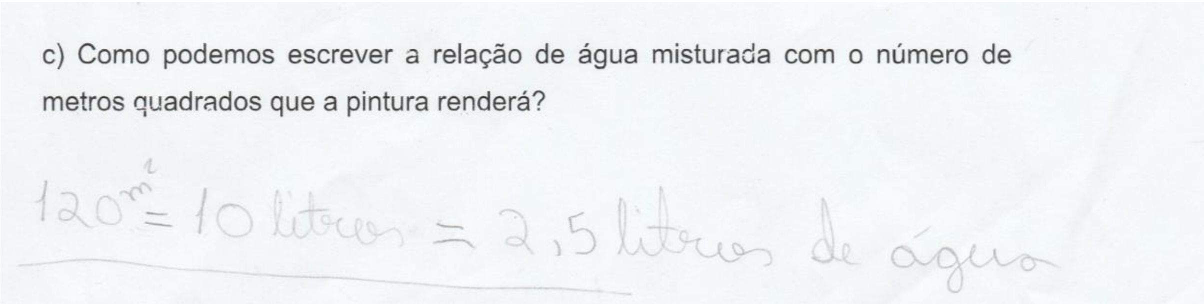
Figura 73: registro do raciocínio do grupo 19 na questão 14.


c) Como podemos escrever a relação de água misturada com o número de metros quadrados que a pintura renderá? É 1 litro de tinta
pro pro 12 m² e 1 litro de água +
4 litros de tinta = 5 litros a 5
multiplicando 12×5 = 60.

Fonte: acervo pessoal.

Também foram observados raciocínios corretos, mas que não se preocuparam em identificar a mistura utilizando 1 litro de água, descrevendo uma relação com base nos rendimentos que haviam descoberto nos itens anteriores. Sendo assim, os alunos não se preocuparam em expressar uma relação entre as grandezas de forma simples, em que pelo menos uma das grandezas envolvidas era expressa de forma unitária, apenas repetindo quantidades encontradas anteriormente.

Figura 74: registro do raciocínio do grupo 6 na questão 14.


c) Como podemos escrever a relação de água misturada com o número de metros quadrados que a pintura renderá?

$120m^2 = 10$ litros = 2,5 litros de água

Fonte: acervo pessoal.

Durante a realização da coleta e descrição dos dados, foram identificadas recorrências no que diz respeito aos organizadores dos esquemas utilizados pelos estudantes, bem como na linguagem utilizada pelos mesmos para expressar as diferentes tomadas de decisões ocorridas em cada problema. Desta forma, o capítulo a seguir tem por objetivo sistematizar as recorrências identificadas e retomar as etapas da pesquisa, na busca de responder à pergunta central desta pesquisa.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a realização desta pesquisa, muitos processos foram vivenciados: a identificação de um tema de interesse; a busca pela pergunta de pesquisa e sua reconstrução de acordo com os resultados de testagens preliminares; a realização da prática de sala de aula e a coleta de dados; o estudo aprofundado da teoria que embasou a análise dos dados; a confrontação dos dados obtidos com os principais conceitos da teoria de análise e, por fim, a retomada de todo o processo na tentativa de responder a questão de pesquisa, a qual será realizada neste capítulo.

Ainda no processo de delimitação dos objetivos de pesquisa, minha expectativa enquanto pesquisadora era o de que, ao serem confrontados com problemas envolvendo razões e proporções, conteúdo que ainda não haviam aprendido em ambiente escolar, os estudantes fariam uso do número fracionário de forma espontânea, o que poderia indicar uma forma alternativa de introduzir, através da resolução de problemas, o conteúdo de razões e proporções. No entanto, algumas testagens iniciais com um grupo menor de alunos me levaram a crer que, no momento em que os alunos não são apresentados previamente ao conceito de razão como uma fração e, consequentemente, ao conteúdo de proporção como uma igualdade entre frações, eles mobilizam outros conceitos de forma natural para resolver estes problemas, indicando que o entendimento de uma razão como sendo uma fração pode se mostrar inicialmente desnecessário para a aprendizagem do estudante. Desta forma, delimitou-se como objetivo da pesquisa identificar quais esquemas seriam mobilizados e apontar uma forma alternativa de trabalho com o conteúdo de razões e proporções, sem necessariamente relacioná-la às frações, como consta em livros didáticos e documentos curriculares norteadores recentes.

A desconstrução da pergunta de pesquisa inicial e formulação de um novo norte, considerando a divergência entre as minhas expectativas e os resultados obtidos em estudos preliminares, constituiu um processo que enriqueceu e acrescentou muito aprendizado à vivência desta investigação, mostrando que o trabalho com pessoas, especialmente com crianças e as diferentes estratégias de que as mesmas podem fazer uso para resolver problemas, é um caminho repleto de variações e incertezas. O conhecimento prévio do sujeito é um aspecto que deve ser sempre considerado e que pode modificar consideravelmente os resultados de uma pesquisa quando comparados às expectativas do pesquisador, especialmente quando a coleta de dados se dá em uma atividade prática que envolve construção de estratégias para resolver diferentes situações.

É importante retomar, afinal, a pergunta que busquei responder a partir de toda essa vivência: quais são e como são mobilizados os conceitos relacionados a razões e proporções mediante a metodologia de Resolução de problemas? Isto é, o objetivo deixou de ser voltado à expectativa inicial de observar a linguagem fracionária sendo utilizada de forma espontânea, mas sim identificar os esquemas utilizados pelos para resolver problemas para os quais não possuem as competências necessárias para fazê-los de imediato, precisando recorrer à exploração do problema, testagens, identificação de semelhanças com situações anteriores, entre outras estratégias preliminares para traçar o seu caminho até a resolução. Desta forma, durante a análise, foi dada uma importância maior ao meio, ao método, e não somente à conclusão final.

No entanto, inicialmente dirijo-me à primeira questão preliminar formulada: “A metodologia Resolução de Problemas contribui para a compreensão dos conceitos relacionados a razões e proporções?” Antes de responder a esta pergunta, é importante relembrar a significado da palavra conceito, e para isso, retomamos as ideias de Vergnaud, de que conceito não é simplesmente sinônimo de definição, mas engloba também o sentido que esta definição adquire quando utilizada em situações-problema, bem como o conjunto das formas de linguagem que podem ser utilizadas para representá-lo simbolicamente. A partir dos dados coletados, portanto, podemos afirmar que, mesmo não estudando definições especificamente, os estudantes participantes, em sua maioria, utilizaram a noção de proporcionalidade como organizadores do pensamento em seus esquemas de forma a mostrar o sentido que aquela ideia assumia em suas estratégias, embora não fosse solicitado que os mesmos definissem-na em palavras.

Portanto, podemos concluir, a partir desta pesquisa, que a metodologia de Resolução de Problemas demonstra potencial para proporcionar a compreensão dos conceitos relacionados à razão e proporção, já que desencadeou a construção de esquemas que utilizavam a noção de proporcionalidade, auxiliando a dar sentido a um conceito, mesmo que este conceito não tenha sido especificamente definido em palavras anteriormente. Em uma possível continuidade deste estudo, por exemplo, se mostra interessante que, para finalização desta atividade prática, o professor auxiliasse na definição deste conceito, o qual seria feito em um momento oportuno, já que o sentido do mesmo já teria sido utilizado pelos alunos em situações problema.

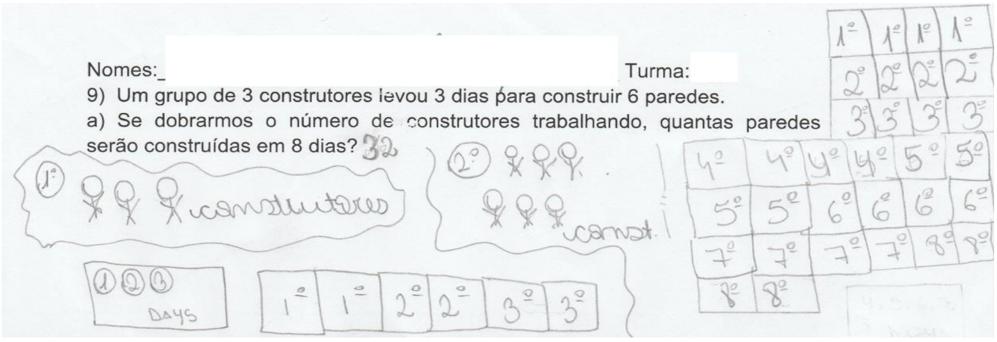
Outra questão auxiliar proposta no início desta pesquisa foi: É necessário, para o estudo do conteúdo de razões e proporções, que o aluno compreenda a razão como uma fração e a proporção como uma igualdade entre frações?” O conjunto de dados coletados mostrou uma série de problemas envolvendo proporcionalidade que puderam ser resolvidos sem mencionar a linguagem fracionária. Mesmo esquemas que faziam uso de operações aditivas se mostraram eficazes e coerentes para resolver problemas de razão e proporção entre grandezas, o que indicou que relacionar este conteúdo ao número fracionário não é estritamente necessário. Inclusive, um dos principais objetivos desta pesquisa, foi justamente sugerir ao professor leitor, que há outras formas de resolver um problema de proporcionalidade que não a igualdade entre frações ou a conhecida “Regra de Três”, e que podem explorar os conhecimentos prévios dos estudantes. Esta abordagem pode contribuir para dar sentido a este conceito, o qual pode ser definido posteriormente a esse momento de investigação e construção de estratégias dos alunos. A ideia presente nesta sequência é a de, primeiramente, criar um contexto propício para a definição de uma ideia recorrente, ou seja, propor aos alunos uma série de problemas com alguma semelhança – no caso, a presença da proporcionalidade – e fazer com que sintam a necessidade de que essa ideia, já identificada e utilizada pelos estudantes, seja definida em palavras.

A partir destas primeiras reflexões, se faz necessário explorar a questão central desta pesquisa: quais são e como são mobilizados os conceitos relacionados a razões e proporções mediante a metodologia de Resolução de problemas?

Conforme desenvolvido no capítulo 2, Vergnaud define conceito como uma terna C= (S, I, L), no qual S representa as situações que dão sentido ao conceito, I representa as invariantes que a definição traz consigo e L representa as diferentes linguagens que permitem representar simbolicamente o conceito. Debrucemo-nos, inicialmente, às diferentes linguagens identificadas nos esquemas apresentados pelos estudantes, especialmente nos problemas que exigiam que o estudante expressasse a relações identificadas entre as grandezas envolvidas no problema, as quais foram: agrupamentos de diferentes símbolos; linguagem escrita, tabelas e, a menos utilizada em relação às demais, linguagem fracionária para expressar a relação entre as diferentes grandezas dos problemas.

Quadro 22: diferentes linguagens observadas nos esquemas

<table>
<tr><th colspan="2">DIFERENTES LINGUAGENS OBSERVADAS NOS ESQUEMAS</th></tr>
<tr><td>Agrupamento de símbolos</td><td>



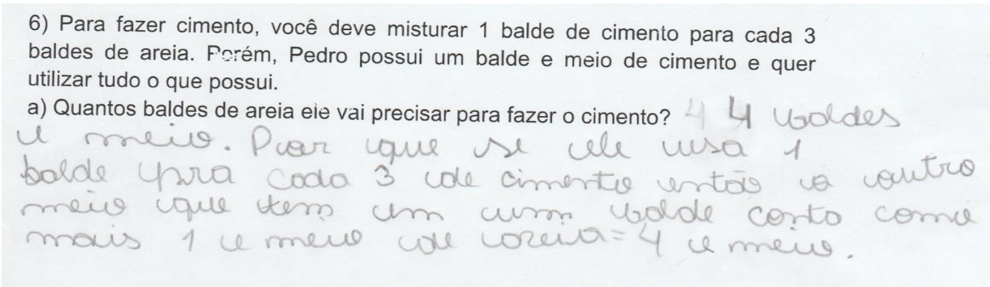
Nomes:_ Turma:

9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.

a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? 32

Figura 46 (página 82)

</td></tr>
<tr><td>Frases escritas</td><td>

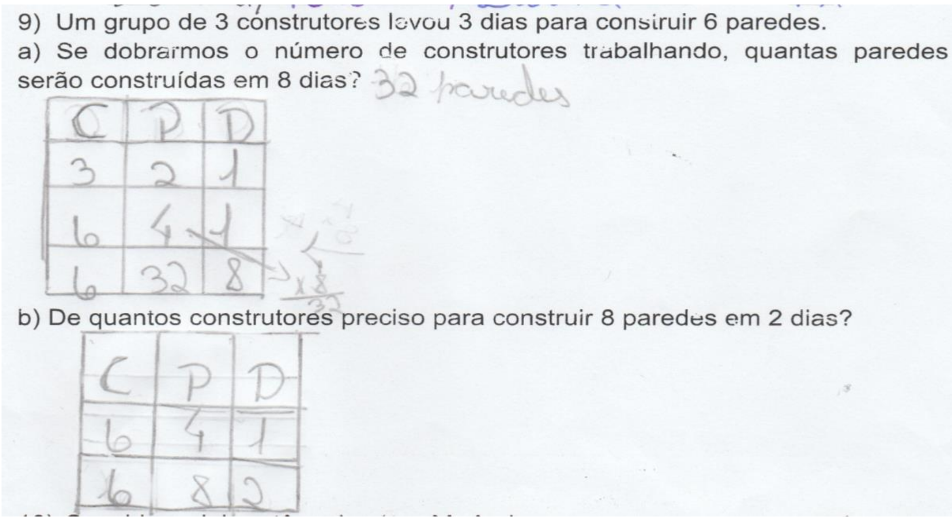


6) Para fazer cimento, você deve misturar 1 balde de cimento para cada 3 baldes de areia. Porém, Pedro possui um balde e meio de cimento e quer utilizar tudo o que possui.

a) Quantos baldes de areia ele vai precisar para fazer o cimento? 4 4 baldes e meio. Pois que se ele usa 1 balde para cada 3 de cimento então o outro meio que tem um um balde conto como mais 1 e meio de areia = 4 e meio.

Figura 25 (página 67)

</td></tr>
<tr><td>Tabelas</td><td>



9) Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.

a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias? 32 paredes

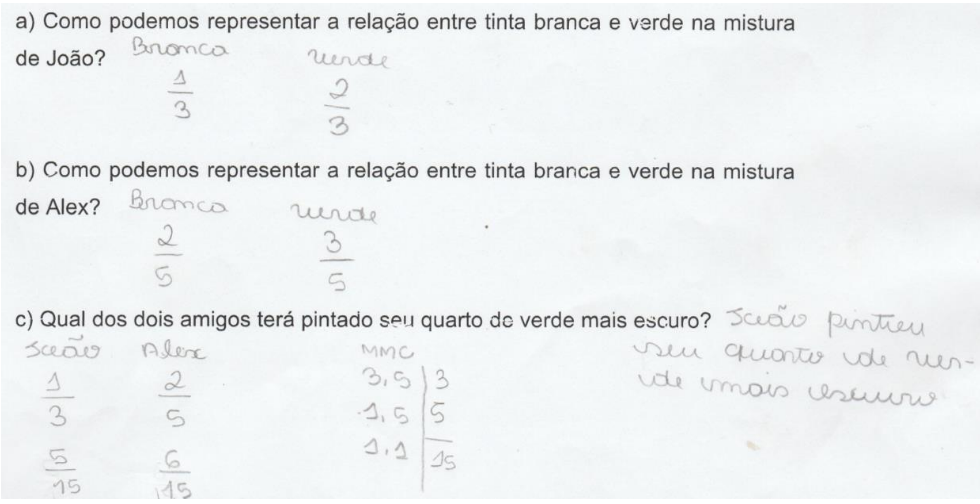
C	P	D
3	2	1
6	4	1
6	32	8

b) De quantos construtores preciso para construir 8 paredes em 2 dias?

C	P	D
6	4	1
6	8	2

Figura 50 (página 84)

</td></tr>
</table>

Fracionária	 a) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de João? Branca $\frac{1}{3}$ verde $\frac{2}{3}$ b) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de Alex? Branca $\frac{2}{5}$ verde $\frac{3}{5}$ c) Qual dos dois amigos terá pintado seu quarto de verde mais escuro? João pintou seu quarto de ver-de mais escuro João $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{15}$ Alex $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{15}$ MMC 3, 5 | 3 ; 1, 5 | 5 ; 1, 1 | 15 Figura 11 (página 57)

Quadro: Diferentes linguagens observadas nos esquemas e exemplos correspondentes.

Observando as formas de linguagem mais identificadas – agrupamento de símbolos e frases escritas – podemos concluir que a exploração destas linguagens por parte do professor na introdução ao estudo de proporcionalidade, apresenta potencial para uma maior compreensão dos estudantes das ideias relacionadas a este conceito, pois explora a naturalidade e a espontaneidade contidas no uso destas linguagens.

Agora, voltando-nos especificamente aos diferentes esquemas identificados nas diferentes resoluções, foram percebidos três níveis: esquemas que fazem uso exclusivamente de estruturas aditivas; esquemas que fazem uso de estruturas multiplicativas, mas que são operacionalizados através de adições ou subtrações e esquemas que fazem uso de estruturas multiplicativas. Respectivamente, estes três níveis apresentam menor e maior nível de compreensão e utilização da ideia de proporcionalidade.

A categoria de esquemas que fazem uso exclusivamente de estruturas aditivas demonstra a ausência do respeito à proporcionalidade entre as grandezas do problema e foram identificados nas resoluções que não obtiveram sucesso nos problemas propostos. Nesta categoria, em geral, um mesmo valor era somado às diferentes grandezas envolvidas no problema, mostrando incompreensão do isomorfismo presente entre os dados do problema.

Os esquemas que fizeram uso de estruturas multiplicativas, mas que foram operacionalizados através de adições ou subtrações, constituíram um nível considerado intermediário dentre as categorias, pois a estrutura multiplicativa de proporcionalidade existente estre as grandezas do problema foi respeitada, apenas operacionalizada a partir de adições ou subtrações sucessivas.

Conforme discutido no capítulo 2, relacionar a noção de multiplicação à noção de adições sucessivas constitui uma forma limitada de associação. No entanto, grande parte dos problemas resolvidos pelos estudantes foi abordada de forma coerente e suficiente a partir da soma. Reconheço que a sequência de problemas propostos pode ser considerada simples, em que os números utilizados raramente causaram a necessidade de um raciocínio geral de proporcionalidade através de operadores que expressassem a razão entre as grandezas, mas é importante ressaltar que o objetivo da proposição deste tipo de problema foi justamente o de introduzir a noção de proporcionalidade, e não aprofundá-la de forma generalizada.

Por último, os esquemas que respeitavam as estruturas multiplicativas fazendo uso de operadores multiplicativos verticais e/ou horizontais constituíram a categoria de esquemas que apresentou um maior nível de compreensão acerca dos problemas propostos e utilização da noção de proporcionalidade.

Desta forma, a partir da identificação destas três vertentes de pensamento nos esquemas apresentados pelos estudantes, concluo que é possível explorar o conteúdo de razões e proporções sem recorrer necessariamente à relação com o número fracionário, pois emergem, dos próprios alunos, formas de resolver problemas de proporcionalidade que indicam o uso de conhecimentos prévios e linguagens que, na maioria das vezes, os levam ao sucesso.

Como pesquisadora, identifico que esta pesquisa mostra potencial para continuidade, pois é possível aproveitar estes resultados para construir uma sequência didática que aprofunde o conteúdo de proporcionalidade a partir dos esquemas mobilizados pelos estudantes no momento de investigação e exploração proporcionado pela sequência didática analisada nesta pesquisa.

REFERÊNCIAS

BATISTA, A. M. S. B. **A Influência dos Suportes de Representação na Resolução de Problemas com Estruturas Multiplicativas**. Dissertação de Mestrado em Psicologia Cognitiva. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**, Brasília: Ministério da Educação, 2015. Acesso online em 15 jan 2016. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

GUIMARÃES, K. P. **Processos cognitivos envolvidos na construção das estruturas multiplicativas.** Tese de Doutorado em Educação. Instituição de Ensino: Universidade Federal de Campinas, Campinas, 2004.

INHELDER, G. PIAGET, J. **De la lojique de l'enfant à la logique de l'adolescent**. PUF, Paris, 1955.

KARPLUS, R. KARPLUS, E.F. Intellectual development beyond elementar school: Ratio, a longitudinal study. **School, Science and Mathematics**, 1972.

OLIVEIRA, I. A. F. G. **Um estudo sobre a proporcionalidade: a resolução de problemas de proporção simples no ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, cap. 12, p.199-218, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

________. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, vol. 25, nº 41, p. 73–98, 2011.

PEREIRA, E. F. **Esquemas utilizados por estudantes do nono ano ao resolver situações de estrutura multiplicativa.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Interciência, Rio de Janeiro, 1995.

PONTE, João Pedro da. Estudo de Caso em Educação Matemática. **Bolema**, vol. 19, nº 25, p. 105–132, 2006.

TOURNIAIRE, F. Proportions in elementary school, **Educational Studies in Mathematics**, 1986.

VERGNAUD, G. Conceitos e Esquemas numa teoria operatória de representação. Trad. Ana Franchi e Dioni Luchesi de Carvalho. **Psycologie Fraçaise**, n. 30/3-4, 1985.

____________ Teoria dos Campos Conceituais. In: Nasser. L. (Ed.) **Anais do Primeiro Seminário Internacional de Educação Matemática**. Rio de Janeiro, p.1–26, 1993

____________ **A Criança, a Matemática e a Realidade**. Trad. MORO, M. L. F. UFPR, Curitiba 2009.

YIN, R.K. **Estudo de Caso: Planejamento e Métodos**. Porto Alegre, Bookman, 2005.

ZUFFI, E.M. ONUCHIC, L.R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores**. Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, p. 79-97, 2007.

APÊNDICES

Apêndice A – Modelo de Termo de Consentimento Informado dos alunos participantes

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ______________,

responsável pelo(a) aluno(a) ____,

da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **O Estudo do conteúdo de Razões e Proporções via Resolução de Problemas**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) **Mariana Braun Aguiar**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marcus Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone 3308.6186 ou e-mail mbasso@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, é:

- Determinar quais são e como são mobilizados os conceitos relacionados a razões e proporções mediante a metodologia de Resolução de problemas.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Rua Capistrano de Abreu, 1721, Bairro Niterói, Canoas, telefone 3475.5604, e-mail mariana_braun94@hotmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Canoas, 02 de junho de 2016.

Assinatura do Responsável:

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Apêndice B - Modelo de Termo de Consentimento Informado da Escola

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem

INSTITUTO DE ppgensimat MATEMÁTICA UFRGS

Ilma. Sra. Cerani Vieira dos Santos

Diretora da EMEF Pernambuco

Na oportunidade em que a saúdo, solicito sua autorização para que mestranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Professora Mariana Braun Aguiar, desenvolva sua pesquisa de mestrado junto à EMEF Pernambuco.

A pesquisa intitulada O Estudo do conteúdo de **Razões e Proporções via Resolução de Problemas**, desenvolvida pela Professora Mariana Aguiar encontra-se sob minha orientação e desde já me coloco à disposição via telefone 3308.6212 ou e-mail mbasso@ufrgs.br.

A pesquisa, que conta com a participação de estudantes da EMEF Pernambuco não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Dentre os objetivos estritamente acadêmicos do estudo, destaca-se determinar quais são e como são mobilizados os conceitos relacionados a razões e proporções mediante a metodologia de Resolução de problemas. Esclarecemos que os usos das informações oferecidas pelos estudantes ocorrerão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

Enquanto pesquisadores reiteramos nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados.

Agradecendo sua atenção, cordialmente,

Marcus Basso

Porto Alegre, 1 de junho de 2016.

Ciente

Cerani Vieira dos Santos
Diretora
Matricula: 75639

E. M. DE ENSINO FUNDAMENTAL
PERNAMBUCO
Decreto de Criação Nº 155 09/10/78
Port. de Reorg 178 09/01/85 D.O. 25/01/85
Decreto Municipal de Alteração de Designação da Escola Nº 320 de 24/06/99
Canoas / RS

Apêndice C – Produto Didático

O produto técnico desta Dissertação consiste no conjunto de problemas que foi aplicado com os estudantes participantes da coleta de dados analisada nesta pesquisa. Os problemas envolvem noções de proporcionalidade com um ou mais itens a serem desenvolvidos.

Na presente pesquisa, os problemas foram propostos a estudantes de sétimo ano que ainda não haviam estudado o conteúdo de proporcionalidade em ambiente escolar. Ainda, optou-se por um formato de trabalho em que os estudantes poderiam reunir-se em duplas ou trios para incentivar a troca de ideias e estratégias entre os grupos.

Além disso, o uso destes problemas nesta pesquisa tinha por objetivo identificar e analisar os diferentes esquemas mobilizados pelos estudantes para resolvê-los, buscando estudar os conceitos que emergem dos estudantes envolvidos ao tratar de proporcionalidade, no sentido de indicar ao professor a que noções prévias os mesmos recorrem de forma espontânea para tratar destas situações. Desta forma, o professor pode optar, no estudo do conteúdo de proporcionalidade, por fazer uso destas noções trazidas pelos estudantes, auxiliando na construção dos conceitos envolvidos neste conteúdo a partir da linguagem e das ideias trazidas por seus estudantes.

Problema 1: Renata e Juliana fizeram um suco do sabor que mais gostam para dividir com a turma. Para isso, fizeram 18 litros de suco. Nestes 18 litros, 12 são de suco concentrado e 6 são de água, e os colegas acharam que o sabor ficou muito bom e quiseram fazer quantidades maiores do suco para vender no bar da escola, mas que tivesse o mesmo sabor.

a) Vamos supor que os colegas desejam fazer 30 litros de suco. Quantos litros de suco concentrado e quantos litros de água vão precisar?

b) Como podemos expressar a relação entre a quantidade de suco concentrado e de água nesta receita?

Neste tipo de questão, o objetivo é o de analisar a forma como os estudantes expressam relações de proporcionalidade entre grandezas, sem, no entanto, terem sido apresentados previamente ao uso linguagem fracionária para realizar tal tarefa.

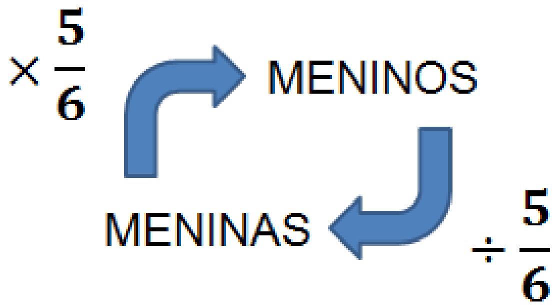
Já no item C, o aluno tem de comparar duas razões entre quantidades para decidir qual delas é maior, descobrindo, assim, aquela que apresenta uma maior concentração de tinta verde.

Problema 2: Em uma turma do 7º ano, há 5 meninos para cada 6 meninas.

a) Se houver 15 meninos, quantas meninas haverá nesta turma?

b) Considerando o número de meninos que você encontrou no item anterior, qual será o número total de pessoas nesta turma?

Em problemas que envolvem proporcionalidade, há situações em que a relação entre duas quantidades de um problema não são evidentes. Neste problema, por exemplo, o operador a ser identificado e que leva o número de meninas ao número de meninos e vice-versa é um número racional.



No entanto, não é necessário que o estudante possua conhecimento acerca dos Números Racionais para identificar a correspondência entre as quantidades de meninos e meninas na turma. Isto se deve, principalmente, à forma como o problema é descrito, evitando descrever a relação entre as quantidades de meninos e meninas como uma razão, a qual seria indicada por um número fracionário.

Problema 3: Dois amigos fizeram duas misturas de tinta verde para pintar seus respectivos quartos. Para cada 3 litros de mistura, João usou 1 litro de tinta branca e o restante de tinta verde. Já Alex, para cada 5 litros de mistura, usou 2 litros de tinta branca e o restante de tinta verde.

a) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de João?

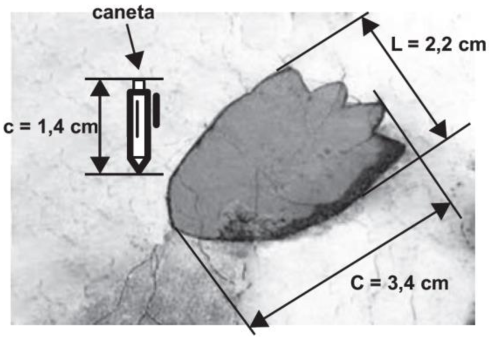
b) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de Alex?

c) Qual dos dois amigos terá pintado seu quarto de verde mais escuro?

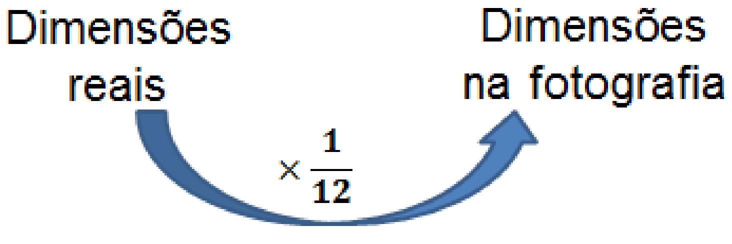
Neste tipo de questão, o objetivo é o de analisar a forma como os estudantes expressam relações de proporcionalidade entre grandezas, sem, no entanto, terem sido apresentados previamente ao uso linguagem fracionária para realizar tal tarefa.

Já no item C, o aluno tem de comparar duas razões entre quantidades para decidir qual delas é maior, descobrindo, assim, aquela que apresenta uma maior concentração de tinta verde.

Problema 4: (ENEM 2015) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados na figura. Quais são o comprimento e largura reais da pegada?

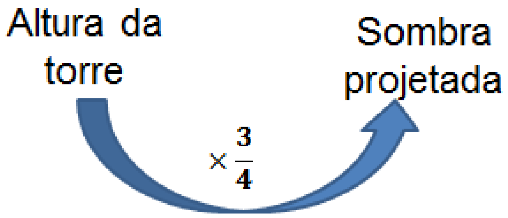


Neste problema, o estudante necessita observar, primeiramente, a diminuição do tamanho real da caneta quando comparado ao tamanho observado na fotografia. Desta forma, o aluno tem condições de encontrar a razão a partir da qual todas as dimensões observadas na fotografia foram diminuídas, para então encontrar a dimensão real da pegada.



Problema 5: (SEAP1102/001-AgSegPenClasseI-V1 – 2012 ADAPTADO) – Uma torre tem 28 m de altura. Sob um determinado ângulo do sol, cada 4 metros de altura da torre projetam 3 metros de sombra no chão. Assim sendo, a medida do comprimento da sombra da torre será de quantos metros?

No problema 9, há uma razão entre a altura de uma torre e sua sombra projetada, quando fixado um determinado ângulo do sol. Desta forma, o aluno precisa encontrar uma quarta proporcional.



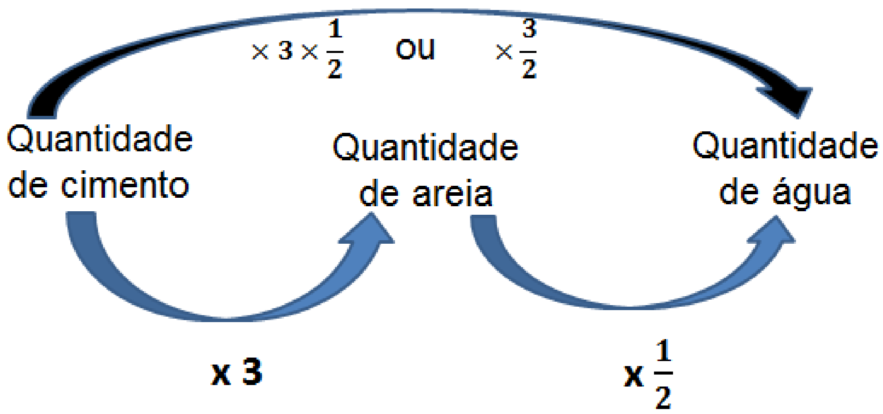
Problema 6: Para fazer cimento, você deve misturar 1 balde de cimento para cada 3 baldes de areia. Porém, Pedro possui um balde e meio de cimento e quer utilizar tudo o que possui.

a) Quantos baldes de areia ele vai precisar para fazer o cimento?

b) Se, para cada balde de areia utilizado, é necessário meio balde de água, quantos baldes de água ele necessitará?

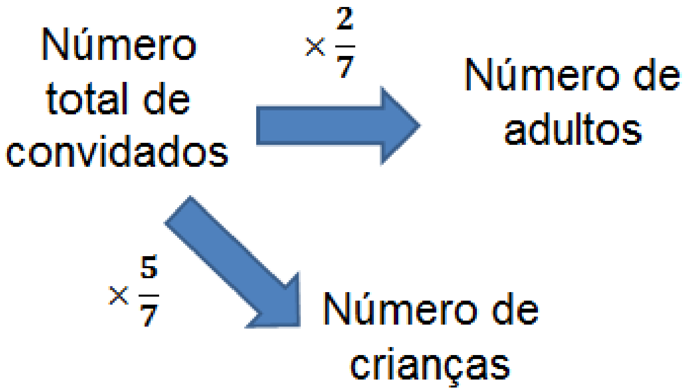
c) Como podemos relacionar a quantidade de baldes de cimento com a quantidade de baldes de água em uma receita para cimento?

No problema 6, podemos observar uma situação semelhante a do problema anterior, em que, para fazer cimento, deve-se respeitar a razão de 1 balde de cimento para cada três baldes de areia e de meio balde de água para cada balde de areia. É exigido que o aluno reconheça as razões sob as quais as grandezas se relacionam, calculando uma quarta proporcional no itens A e B e compondo as razões entre cimento e areia e areia e água para expressar a razão entre cimento e água.



Problema 7: (PSBC1001/03-GuardaCivilMunicipal – 2010 ADAPTADO) – Em uma festa, há 42 convidados e, para cada 2 adultos, há 5 crianças. Se estivessem presentes mais 3 adultos e 3 crianças não tivessem comparecido, como poderíamos relacionar a quantidade de crianças e adultos?

Neste problema, pode ser observada uma razão entre adultos e crianças dentre os convidados em uma festa. A partir deste dado, o estudante necessita encontrar o número de crianças e adultos quando fornecido um determinado número de convidados. Logo após, deve supor uma alteração no número de convidados para expressar uma nova razão entre adultos e crianças na festa.



Ao encontrar o número de adultos e crianças na situação proposta, o aluno deve propor uma alteração de três crianças a menos e três adultos a mais, de forma a encontrar uma nova divisão do número de convidados e expressá-la utilizando a linguagem que achar mais adequada.

Problema 8: Observe os ingredientes da receita de bolo de cenoura abaixo:

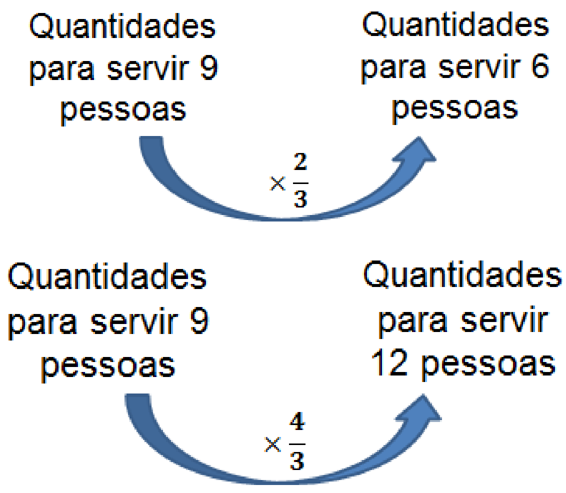
- ✓ 3 cenouras médias;
- ✓ 3 xícaras de farinha;
- ✓ 3 ovos.
- ✓ 3 xícaras de açúcar;
- ✓ 1 xícara de óleo;
- ✓ 1 colher de sopa de fermento;

(Serve 9 pessoas)

a) Suponha que um grupo de amigos que utilizar a receita para servir 6 pessoas. Quais as quantidades que eles deveriam utilizar de cada ingrediente?

b) E se este grupo quisesse servir 12 pessoas com esta receita, quais seriam as quantidades de cada ingrediente?

Neste problema, dada a receita do bolo para um número fixo de pessoas, o estudante deve analisar as quantidades dos ingredientes para adaptá-las de modo a servir um número de pessoas específico. Para encontras estas quantidades, é necessário encontrar um fator multiplicativo fracionário.



Problema 9: Um grupo de 3 construtores levou 3 dias para construir 6 paredes.

a) Se dobrarmos o número de construtores trabalhando, quantas paredes serão construídas em 8 dias?

b) De quantos construtores preciso para construir 8 paredes em 2 dias?

O problema 9 envolve a exploração da relação entre três variáveis: número de construtores, número de dias e número de paredes construídas. Além disso, quando analisadas aos pares, ora as grandezas são diretamente proporcionais, ora inversamente proporcionais. Comparando construtores e dias, por exemplo, obtemos um par de grandezas inversamente proporcionais. No entanto, quando comparamos paredes e dias, observamos que são diretamente proporcionais.

Portanto, o problema mostra-se complexo no momento em que, quando uma das grandezas é aumentada, por exemplo, observamos que as outras duas grandezas se comportam de formas diferentes, uma aumentando e a outra diminuindo em determinadas razões.

Problema 10: Considere dois retângulos K e M. Ambos possuem mesmo comprimento e a área de M é o dobro da área de K.

a) Construa um par de retângulos K e M que atendam às características descritas no enunciado da questão.

b) Como podemos escrever a relação entre as larguras de ambos retângulos?

c) Podemos afirmar que o perímetro de M é o dobro do perímetro de K?

O problema 10 também envolve uma situação geométrica que envolve dois retângulos, de forma que um deles possui o dobro da área do outro, porém uma das dimensões de ambos retângulos é fixa. Sendo assim, o item A é colocado no problema para incentivar que o estudante explore a situação, através da tentativa e erro, fazendo diferentes esboços de pares de retângulos até encontrar um par que atenda às características solicitadas. Durante esta exploração, é necessário que o aluno perceba que existe uma relação entre as dimensões que não são iguais para que a área seja dobrada. No item B, é exigido que o aluno expresse a relação percebida durante a exploração realizada no item anterior.

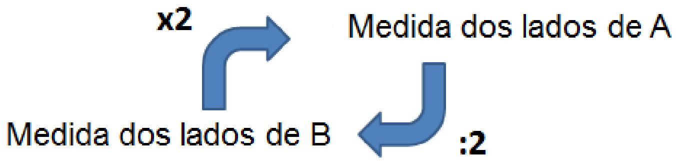
Por fim, no item C, é exigido que o aluno relembre o conceito de perímetro e retorne à exploração da situação geométrica para perceber que a relação descrita no item B não é válida para o perímetro dos retângulos.

Problema 11: Considere dois retângulos A e B. Para cada 1cm de comprimento do retângulo A, há 2 cm de comprimento no retângulo B, e a mesma relação acontece com a largura de ambos retângulos.

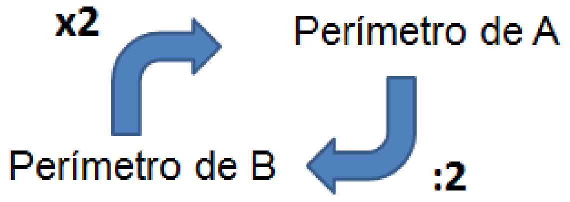
a) Como podemos escrever a relação entre os perímetros destes retângulos?

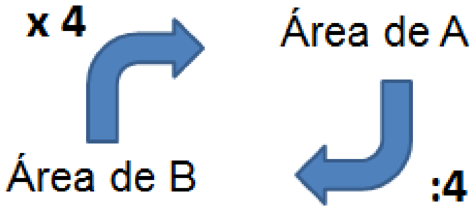
b) Como podemos escrever a relação entre as áreas destes retângulos?

O problema 11 aborda uma situação geométrica em que dois retângulos A e B mantém uma correspondência entre as medidas de seus lados, a qual pode ser expressa por um número natural.



Ao observar esta correspondência entre as medidas, o aluno deve explorar a relação que pode ser observada quando se calcula o perímetro e a área destes retângulos. Para isso, pode recorrer a esboços de retângulos que atendam à correspondência entre os lados e analisar a situação no que se refere ao perímetro e à área.



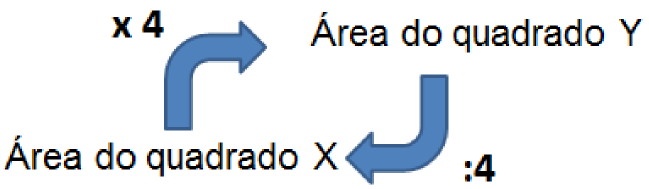


Problema 12: Considere dois quadrados X e Y. Para cada 1cm² de área que há no quadrado X, há 4cm² de área no quadrado Y.

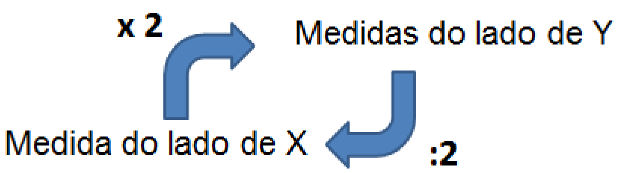
a) Como podemos escrever a relação entre as medida dos lados destes quadrados?

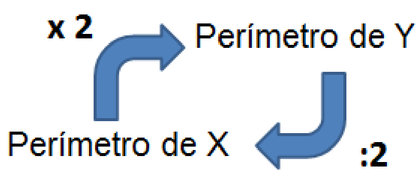
b) Como podemos escrever a relação entre os perímetros destes quadrados?

Diferentemente do problema 3, a situação geométrica expressa se refere ao fator de correspondência entre as áreas dos quadrados X e Y.



Ao explorar a situação, também podendo fazer uso de esboços de diferentes quadrados que atendam à exigência descrita no problema, o aluno deve expressar, utilizando sua linguagem, a relação observada entre as medidas dos lados e as medidas dos perímetros dos quadrados.





Problema 13: Para preparar um churrasco para seus casais de amigos, Júlia e Roberto compraram 4kg de carne. Sugere-se que, para cada casal presente em um churrasco, seja assado $^{1}/_{2}\,kg$ de carne.

a) Se vão estar presentes 6 casais neste evento, além dos anfitriões, a quantidade de carne comprada será suficiente?

b) Como podemos escrever a quantidade de carne que cada casal poderá consumir neste evento?

b) Até quantos casais Júlia e Roberto poderiam receber neste evento de forma que a carne comprada seja suficiente?

No problema 13, o principal objetivo é o de identificar, no item C, a razão entre a quantidade de carne e o número de casais presentes no evento. Além disso, no item anterior, é explorada a forma de linguagem utilizada pelo estudante para expressar a quantidade envolvida no problema.

Problema 14: Dois amigos fizeram duas misturas de tinta verde para pintar seus respectivos quartos. Para cada 3 litros de mistura, João usou 1 litro de tinta branca e o restante de tinta verde. Já Alex, para cada 5 litros de mistura, usou 2 litros de tinta branca e o restante de tinta verde.

a) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de João?

b) Como podemos representar a relação entre tinta branca e verde na mistura de Alex?

c) Qual dos dois amigos terá pintado seu quarto de verde mais escuro?

Neste tipo de questão, o objetivo é o de analisar a forma como os estudantes expressam relações de proporcionalidade entre grandezas, sem, no entanto, terem sido apresentados previamente ao uso linguagem fracionária para realizarem tal tarefa.

Já no item C, o aluno tem de comparar duas razões entre quantidades para decidir qual delas é maior, descobrindo, assim, aquela que apresenta uma maior concentração de tinta verde.