UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM CAMINHO PARA O APRENDIZADO DE FUNÇÕES AFIM

JANAÍNA ZORTÉA PIEGAS

Porto Alegre
2017

JANAÍNA ZORTÉA PIEGAS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM CAMINHO PARA O APRENDIZADO DE FUNÇÕES AFIM

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2017

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM CAMINHO PARA O APRENDIZADO DE FUNÇÕES AFIM

JANAÍNA ZORTÉA PIEGAS

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinicíus de Azevedo Basso (IME-UFRGS)

Profª. Drª. Fabiana Fattore Serres (CAP - UFRGS)

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Maristela e Remi que fizerem o possível para tornar o meu sonho realidade. Obrigada por todo o amor, dedicação, e suporte que me dão todos os dias. Foi o apoio de vocês que meu deu forças, mesmo de longe, para que eu não desistisse no meio do caminho. Ao meu irmão Israel pelas palavras de incentivo e pelo carinho. Sou muito grata a Deus por ter uma família maravilhosa como a nossa.

Agradeço ao meu namorado, amigo e parceiro, Heitor, pela compreensão nos dias difíceis dos semestres, pelos abraços e palavras de incentivo nas reprovações e por comemorar comigo a cada aprovação. Obrigada por acreditar e caminhar ao meu lado nessa jornada. Te amo.

Agradeço as minhas amigas de infância pela amizade que me deu forças mesmo na distância. Aos amigos que a UFRGS me deu que felizmente são muitos. Vocês conseguiram fazer esses longos anos estudos serem mais leves e felizes. Cada um de vocês tem um lugar especial nessa caminhada.

Agradeço a Professora Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana por ter aceito o convite para ser minha orientadora e por toda a dedicação que teve com o meu trabalho ao longo da escrita.

Agradeço ao Professor Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso e a Profª. Drª. Fabiana Fattore Serres por aceitarem compor a banca, e pelo tempo que dedicaram para ler o meu trabalho.

Muito obrigada a todos!

Dedicatória

Dedico este trabalho a ela, que onde quer que esteja, está orgulhosa da pessoa que me tornei ao longo dos anos. Dedico a quem sempre me incentivou a estudar. Dedico a quem dedicou parte do seu tempo a me cuidar e amar. Dedico este trabalho a minha eterna e amada vó Gema.

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo analisar como a Resolução de Problemas pode auxiliar no ensino de funções afim. Essa proposta de trabalho foi motivada pela minha curiosidade em compreender porque é complicado propor, interpretar e resolver problemas em sala de aula. A coleta de dados foi realizada no ano letivo de 2016, com uma turma do primeiro ano do ensino médio da rede pública de Porto Alegre, por meio de um projeto extraclasse e atuação em aulas no período regular. Os problemas propostos e analisados foram retirados em sua maioria do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Com ajuda do roteiro do GTERP, Grupo de Trabalho de Estudos de Resolução de Problemas, o intuito da pesquisa foi verificar como ocorre o entendimento do conteúdo seguindo passos para resolver problemas. A análise da pesquisa realizou-se por meio do Estudo de Caso, e se baseia nos trabalhos de George Polya, Lourdes de la Rosa Onuchic e outros autores que pesquisam sobre a Resolução de Problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas – Função afim - ENEM

Abstract

This Course Completion Work aims to analyze how Problem Solving can help in teaching linear functions. This work proposal was motivated by my curiosity to understand why it is complicated to propose, interpret and solve problems in the classroom. The data collection was carried out in the academic year of 2016, with a class of the first year of the high school of the public network of Porto Alegre, through an extraclass project and performance in classes in the regular period. The problems proposed and analyzed were mostly removed from the National High School Examination (ENEM). With the help of the GTERP (Problem Solving Studies Working Group), the purpose of the research was to verify how the understanding of content occurs by following steps to solve problems. The analysis of the research was done through the Case Study, and is based on the works of George Polya, Lourdes de la Rosa Onuchic and other authors who research on Problem Solving.

Keywords: Problem Solving - Linear function – ENEM

Lista de figuras

TABELA

Sumário

1 Introdução

O seguinte Trabalho de Conclusão de curso trata do ensino de funções afim através da Resolução de Problemas. Quando comecei a pensar sobre o assunto do meu TCC, queria que fosse algo que tivesse relação com as dificuldades que eu também encontrei como aluna. Sempre estudei em escola pública no interior do Estado e lembro-me de ter visto poucas atividades que envolviam resolução de problemas, principalmente no conteúdo de funções. Isto foi algo que me marcou, pois quando cheguei à faculdade, no primeiro semestre já senti dificuldades na disciplina de Cálculo I, em que precisávamos encontrar uma função para poder resolver alguns problemas.

Comecei a faculdade cursando o Bacharelado em Matemática, e as disciplinas de Cálculo já eram oferecidas nos primeiros semestres. A falta de experiência em saber resolver problemas que envolviam uma interpretação e uma construção quase fez com que eu desistisse do curso, pois estava estudando Matemática e tinha dificuldades em resolver problemas.

Três anos mais tarde pedi transferência interna para a Licenciatura em Matemática. Ali, no semestre que cursei a disciplina de Fundamentos II, com a professora Marilaine de Fraga Sant'Ana, me deparei mais uma vez com as funções e as dificuldades decorrentes destas. Então ao longo do semestre foi surgindo a vontade de entender o que era tão difícil na resolução de um problema no contexto das funções. Posteriormente conversei com a professora Marilaine sobre essas minhas inquietações e a convidei para ser a minha orientadora nessa pesquisa.

No semestre seguinte, quando cursei a disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III, também ministrada pela professora, tive a oportunidade de dar aulas no Pré - Cálculo para os calouros da Universidade. Nesse tempo comecei a fazer algumas observações em certos problemas que abordávamos com a turma, e percebi que os alunos também tinham dificuldades na resolução de problemas envolvendo funções.

A ideia de pesquisar o assunto nos anos finais da formação escolar foi se desenvolvendo a partir das várias experiências que tive como aluna e professora. Dessa forma, o objetivo do trabalho é analisar ainda na escola, como estratégias usadas na Resolução de Problemas podem ajudar os alunos a resolver problemas que envolvam funções.

Problemas em que é preciso construir uma função para chegar ao resultado aparecem não só na escola ou faculdade, mas também em avaliações para ingresso em cursos superiores, como o ENEM. Então, quando realizei meu estágio, escolhi uma turma do primeiro ano do ensino médio para iniciar o assunto de funções afim e desenvolve-lo através da Resolução de Problemas.

A metodologia que utilizei para este trabalho foi o Estudo de Caso. E tomamos como referências teóricas para essa análise George Polya (1995), Onuchic (2012), Gil (2002), Ponte (2006), Skovsmose (2000), além de artigos e trabalhos acadêmicos em geral.

No capítulo 2 abordo o conceito de Resolução de Problemas, por meio dos 4 passos de Polya (1995) e também pelo roteiro do GTERP, grupo coordenado por Lourdes de la Rosa Onuchic. Além de falar como a Resolução de Problemas é abordada na prova do ENEM.

O capítulo 3 traz a metodologia de Estudo de Caso de acordo com Ponte (2006) e a explicação das etapas desse processo segundo Gil (2002). Também são esclarecidos os objetivos da pesquisa.

No capítulo 4 abordo um pouco do ensino de funções na escola. Para essa reflexão apresento um artigo de Garcia (2010), que faz indagações sobre a preparação do professor e dos cursos de formação de professores diante do conteúdo de funções.

No capítulo 5 apresento os Cenários de investigação de Skovsmose (2000), que foram usados para a análise dos ambientes utilizados na prática escolar.

O capítulo 6 traz a prática realizada no Estágio em Educação Matemática III, e também os relatos e análises das atividades realizadas para a pesquisa desse trabalho de conclusão de curso.

2 A Resolução de problemas

A resolução de problemas pode ajudar no processo de ensino de Matemática e na aprendizagem de Matemática auxiliando os alunos a desenvolver o raciocínio matemático através de problemas diferenciados. Também segundo Dante (apud SOUZA, 2005)

> é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela.

.

O matemático George Polya foi um importante pesquisador da resolução de problemas em várias áreas. Segundo Polya, ao resolver um problema pode existir uma vontade de investigá-lo:

> Por trás do desejo de resolver este ou aquele problema que não resulta em nenhuma vantagem material, pode haver uma curiosidade mais profunda, um desejo de compreender os meios e as maneiras, as motivações e os procedimentos de resolução. (POLYA, 1995, pg. 6)

Para a compreensão, motivação e procedimentos de resolução de problemas, Polya (1995) cita alguns passos:

1. Compreensão do problema: o primeiro passo é compreender o problema. “Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?”.
2. Planejamento de estratégias: Encontrar a relação entre os dados e a incógnitas. Se não achar isso poderá ver problemas semelhantes para chegar a alguma resolução. “Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?”... “É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições”.

3. Execução das estratégias revendo todos os passos: É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que está correto?"
4. Verificação e interpretação dos resultados obtidos: " É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível isso num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema"

Os trabalhos de Polya inspiraram outras pessoas, como Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato a pesquisarem mais sobre esse tema. Segundo Onuchic e Allevato (apud MESQUITA, 2015, p.37)

> a resolução de problemas desenvolve a capacidade de pensar a Matemática usando as estratégias para resolver diferentes problemas, aumenta a confiança e a autoestima dos alunos e ainda os professores que aplicam essa metodologia se sentem satisfeitos com o desenvolvimento dos alunos na compreensão dos problemas e no raciocínio matemático.

Onuchic coordena um Grupo de Trabalho de Estudos de Resolução de Problemas (GTERP) em Rio Claro (UNESP). O grupo, que é formado por alunos e ex-alunos da Pós Graduação em Matemática, se reúne para aperfeiçoar seus conhecimentos. O GTERP desenvolve inúmeras atividades de investigações no campo da Resolução de Problemas e formação de professores. O grupo, que está sempre atualizado em relação a assuntos na área de Educação Matemática, segue a linha de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas como metodologia de ensino.

Esse grupo criou um roteiro metodológico (2004) para resolver problemas. Segue abaixo os passos:

1. Preparação do problema

O professor deve escolher um problema, chamado problema gerador, visando construir um novo conceito com o mesmo.

2. Leitura individual

Cada aluno deverá receber uma cópia do problema e fazer a leitura.

3. Leitura em conjunto

O professor pede para a turma se separar em grupos para fazer a leitura do problema em conjunto. Se houver dificuldades com a interpretação do problema, ou com palavras, o professor poderá ajudar na leitura e no melhor entendimento do problema.

4. Resolução do problema

No momento que os alunos entenderam o problema, eles começam em seus grupos, num trabalho colaborativo a buscar a sua resolução. Nesse cenário, sendo os alunos construtores da “nova matemática” que se quer abordar, o problema gerador é aquele que ajudará os alunos na construção do conteúdo planejado pelo professor.

5. Observar e incentivar

Nesse passo, o professor observa o trabalho dos grupos, o comportamento de cada aluno e estimula o trabalho colaborativo. Também, incentiva os alunos a usarem os conhecimentos prévios de matemática.

6. Registro das resoluções no quadro

O professor pede que cada representante dos grupos escreva no quadro a sua resolução. Todos os tipos de repostas devem ser colocadas, para que o grande grupo possa discuti-las.

7. Plenária

Nesse momento, os alunos explicam suas ideias e discutem as dúvidas. O professor se coloca como mediador, incentivando a participação de todos.

8. Busca do consenso

Após serem discutidas e resolvidas todas as dúvidas, o professor convida a todos a chegarem num consenso para a resposta certa para o problema.

9. Formalização do conteúdo.

No momento de formalização do conteúdo, o professor apresenta de forma organizada em linguagem matemática, os conceitos, princípios e procedimentos usados para a resolução do problema proposto.

De acordo com o GTERP (2016), na década de 80 , nos Estados Unidos, o NCTM, National Council of de Teachers of Mathematics publicou a An Agenda for Action , que trazia preocupações sobre o ensino de matemática, e recomendações para mudanças do mesmo. Então o NCTM (1986) organizou a Comissão sobre Padrões para Matemática Escolar, estes escreveram o documento chamado Curriculum and Evaluation Standards for School

Mathematics[1] (Padrões de Currículo e Avaliação para Matemática Escolar) (1989).

Ainda, o GTERP (2016) cita que este documento traz as seguintes recomendações:

> (1) conceitos e habilidades matemáticas deveriam ser aprendidos em contexto de resolução de problemas; (2) o desenvolvimento de processos de ensino de alto nível deveria estar repleto de experiências de resolução de problemas; (3) instruções matemáticas deveriam acontecer dentro de uma investigação orientada, em uma atmosfera de resolução de problemas.

Baseado nas ideias do Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, no Brasil foram criados os PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais, que:

> apontam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles, como um dos propósitos do ensino de Matemática; indicam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para se fazer matemática na sala de aula (GTERP,2016).

A resolução de problemas que também é abordada nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) citam que no PCNEM[2] (2002), se espera que o aluno:

> Saiba usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (PCN BRASIL, 2006, p. 69).

O PCN+ Ensino Médio (2002), quando fala sobre investigações de situações-problema, ressalta três pontos importantes para resolvê-las:

> • Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver.

[1] Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: documento publicado em 1989 pela NCTM que traz recomendações sobre a Resolução de Problemas.
[2] PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

> • Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.
> • Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas. (PCN+,2002, p.112)

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 70) também falam que no processo de aprendizagem de algum conteúdo, é muito importante valorizar o "pensar matematicamente". Desse modo, como os autores citados acima comentam, a resolução de problemas pode ser uma grande aliada no ensino dos conteúdos matemáticos.

2.1 O ENEM e a Resolução de Problemas

Em 1998 o Instituto Nacional de estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) criou o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, que tinha como proposta avaliar as habilidades e competências, por exemplo, saber resolver situações problemas ao término do ensino fundamental e assim fazer melhorias no ensino de acordo com os resultados da prova.

> A mobilização de conhecimentos requerida pelo exame manifesta-se por meio da estrutura de competências e habilidades do participante que o possibilita ler (perceber) o mundo que o cerca, simbolicamente representado pelas situações-problema; interpretá-lo (decodificando-o, atribuindo-lhe sentido) e, sentindo-se "provocado", agir, ainda que em pensamento (atribui valores, julga, escolhe, decide, entre outras operações mentais) (idem, p. 38). (BRASIL, Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): fundamentação teórico-metodológica, 2005, p. 8)

Na época o Exame não era obrigatório, e em 2004 passou a ser critério para Bolsa de estudos do ProUni[3]. Em 2009 houve mais uma mudança e as notas da prova passaram a ser usadas pelas instituições de ensino superior públicas para ingresso nos cursos oferecidos. Também surgiu o SISU (Sistema

[3] ProUni: Programa Universidade para Todos criado pelo governo federal em 2004.

de Seleção unificada), que possibilitou aos estudantes o ingresso nas mais variadas instituições de ensino no país.

As mudanças recentes feitas para o Exame buscam

> por meio dos resultados obtidos pela prova, à reformulação do currículo do Ensino Médio. Ou seja, a proposta consiste em chamar atenção para um tipo de formação diferenciada, voltada para a solução de problemas. Assim, as situações – problemas apresentadas no ENEM procurarão incentivar o raciocínio dos alunos e estimular a interdisciplinaridade, mas sempre direcionado ao currículo escolar do Ensino Médio (AMORIM, 2009, p.15)

E como cita Ataíde Alves (2005), diretor de avalição de certificado de competência, a prova do ENEM serva para avaliarmos como está o ensino da matemática nas escolas, e o quanto ainda os professores e alunos têm a descobrir sobre os novos conceitos que a Educação Matemática tem a oferecer

> O Enem tem, ainda, papel fundamental na implementação da Reforma do Ensino Médio, ao apresentar, nos itens da prova, os conceitos de situação-problema, interdisciplinaridade e contextualização, que são, ainda, mal compreendidos e pouco habituais na comunidade escolar. A prova do Enem, ao entrar na escola, possibilita a discussão entre professores e alunos dessa nova concepção de ensino preconizada pela LDB, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela Reforma do Ensino Médio, norteadores da concepção do exame. (Inep, pg 8,2005).

Segundo a análise de Amorin, o ENEM avalia os estudantes em relação as suas competências e habilidades, assim vemos que as questões

> buscam estimular o raciocínio do estudante a partir de situações desconhecidas, incentivando-o a buscar respostas que exijam ideias novas, análise, interpretação, comparação, ações que possibilitem o desenvolvimento do pensamento cognitivo. (Amorim, Luiza Depieri, pg 17, 2009)

A prova do ENEM é feita com questões que esperam que o aluno use estratégias que os aproxime da sua vivência, e assim consigam resolver situações problemas. Essa matemática vista no Exame nos indaga sobre como ensiná-la para que os alunos aprendam a pensar, e de acordo com o GTERP (2016) os PCN's sugerem que a resolução de problemas seja um caminho para se trabalhar a matemática.

Ainda Willoughby apud L. Onuchic (2012) opina sobre o que poderia ocorrer de mudanças no ensino da matemática em sala de aula:

- Precisa-se ensinar tanto as habilidades básicas quanto as de ordem superior;
- Os estudantes deveriam ser levados a acreditar que podem imaginar, representar e compreender a maior parte da

> matemática trabalhada mesmo se tiverem esquecido um fato ou nunca o tivessem aprendido;
>
> - Quando se estivesse usando uma nova tecnologia, o aluno deveria estar seguro de que há uma clara vantagem pedagógica para ela;
> - Que a educação matemática deveria ser uma atividade para a vida toda e que facilitações para a educação matemática deveriam estar disponíveis;
> - Que a matemática deveria ser aprendida como um todo integrado, começando com atividades concretas e intuitivas para o aprendiz;
> - Que todos os estudantes poderiam aprender matemática e que pudessem se mostrar desejosos e capazes de usá-la de modo eficiente;
> - Que excelentes professores conhecessem diferentes caminhos para ajudar seus alunos a aprender matemática e que, antes de prescrever-se métodos particulares, se pudesse avaliar seus resultados: conhecimentos de conteúdo, habilidade e desejo de usar apropriadamente a matemática trabalhada (Willoughby apud L. Onuchic, 2012, pg 4).

Analisando essas mudanças sugeridas, juntamente com o desempenho das habilidades e competências que se espera dos estudantes, vemos que a construção do conhecimento que a resolução de problemas pode desenvolver no aluno e os objetivos do ENEM se relacionam de várias maneiras. O aluno é apresentado a situações em que ele terá que buscar estratégias novas ou conhecimentos prévios para resolver um problema, além de proporcionar o desenvolvimento do raciocínio e as habilidades de interpretação de problemas matemáticos.

3 METODOLOGIA E OBJETIVOS DA PESQUISA

A partir das ideias dos autores já citados, que defendem que a resolução de problemas é uma aliada no desenvolvimento do raciocínio matemático, o objetivo da pesquisa é investigar como é possível a abordagem de funções via resoluções de problemas.

Tanto nas situações propostas no projeto ou nos grupos em sala de aula procurei apresentar aos alunos problemas que foram abordados no ENEM, para que eles pudessem ter contato com a realidade desse exame.

Por meio do roteiro do GTERP e da visão da resolução de problemas, desejo analisar como as estratégias da Resolução de Problemas podem auxiliar no ensino de Funções. E para tal, a metodologia usada foi o Estudo de caso.

O Estudo de Caso segundo Ponte (2006) investiga alguém/algo bem específico como uma pessoa, uma disciplina, um curso, instituição ou qualquer unidade social. Mas também como cita Gil (apud MESQUITA, 2015, p.42), "o Estudo de Caso não precisa se constituir da investigação de somente um aluno, uma disciplina, mas sim de qualquer sistema definido que apresenta características únicas e que mereçam uma atenção especial". (Mesquita, 2015).

Também Mesquita (2015, p. 41) cita Ventura (2007) ao falar das inúmeras aplicações do Estudo de Caso

> Com base nas aplicações apresentadas, evidenciam-se as vantagens e dos estudos de caso: estimulam novas descobertas, em função da flexibilidade de seu planejamento; enfatizam a multiplicidade de dimensões de um problema, focalizando-o como um todo e apresentam simplicidade nos procedimentos, além de permitir uma análise em profundidade dos processos e das relações entre eles. (VENTURA, 2007, p.386).

Baseado nos trabalhos dos principais autores que se dedicaram a essa questão, Robert K. Yin (2001) e Robert E. Stake (2000), Gil (2002) define as etapas a serem seguidas nas pesquisas de Estudo de caso:

1. Formulação do problema

Nessa primeira etapa é importante escolher um problema que possa ser verificado através do estudo de caso. A formulação do problema requer um longo tempo de reflexão e estudo em fontes bibliográficas adequadas.

2. Definição da unidade-caso

Segundo Gil (2002, p. 138), “a unidade- caso se refere a um indivíduo num contexto definido”, e ainda pode ser entendido como uma família ou qualquer outro grupo social um pequeno grupo, uma organização, um conjunto de relações, um papel social, um processo social, uma comunidade, uma nação ou mesmo toda uma cultura.

3. Determinação do número de casos

O número de caso pode ser um em particular ou múltiplos casos. A determinação desse número não acontece num primeiro momento, a não ser que o caso seja específico. Ao longo do estudo podem ser adicionados novos casos, até que se alcancem todas as informações necessárias para fazer uma analise adequada das situações.

4. Elaboração do protocolo

Esse protocolo contém a coleta de dados e também de que forma será conduzida a sua aplicação. Gil (2002) comenta que de acordo com Yin (2001, p. 89), o protocolo inclui as seguintes seções:

> a) visão global do projeto: para informar acerca dos propósitos e cenário em que será desenvolvido o estudo de caso. Essa seção pode envolver também a literatura referente ao assunto;
> b) procedimentos de campo: que envolvem acesso às organizações ou informantes, material e informações gerais sobre procedimentos a serem desenvolvidos;
> c) determinação das questões: estas questões não são propriamente as que deverão ser formuladas aos informantes, mas constituem essencialmente lembranças acerca das informações que devem ser coletadas e devem estar acompanhadas das prováveis fontes de informação;
> d) guia para a elaboração do relatório: esse item é muito importante, pois, com frequência, o relatório é elaborado paralelamente à coleta de dados.

5. Coleta de dados;

Gil (2002, p. 141) define a coleta de dados do estudo de caso, como a mais completa, “vale-se tanto de dados de pessoas quanto de papéis [...] análise de documentos, entrevistas, depoimentos pessoais, observação espontânea, observação participante e análise de artefatos físicos”.

6. Avaliação e análise dos dados

Como são inúmeros os processos de coletas de dados no estudo de caso, geralmente a avaliação e análise também podem tem diversas formas de interpretação. Gil (2002, p. 141) cita que “O mais importante na análise e interpretação de dados no estudo de caso é a preservação da totalidade da unidade social”.

7. Preparação do relatório.

Por ser uma escrita mais flexível, o estudo de caso pode ter certa informalidade, mas atualmente ele está sendo apresentado praticamente como outros tipos de pesquisa, “envolvendo partes destinadas à apresentação do problema, à metodologia empregada, aos resultados obtidos e às conclusões”. (GIL, 2002, p. 142)

Como cita Ponte o estudo de caso:

> essencialmente na medida em que se apresentam como histórias apelativas, verosímeis, credíveis e iluminativas que põem em causa pseudo-verdades tidas como inquestionáveis, ilustram como podem avançar certas inovações, e ajudam a perceber certos aspectos da realidade quotidiana. Deste modo, eles têm tido um papel significativo no desenvolvimento do conhecimento em Educação Matemática. (Ponte, 2006, p.20).

No trabalho apresentado as unidades-caso são diferentes, no projeto extraclasse foi desenvolvido um ambiente escolar com apenas um aluno e nas atividades em sala de aula, a proposta foi formar grupos de 2 a 3 alunos e também individualmente. Esse ambiente foi criado para trabalharmos a Resolução de Problemas por meio de um roteiro.

A “elaboração do protocolo”, que segundo Gil (2002), são as etapas realizadas para a pesquisa, desde a literatura usada para tal, que tipos de informações quero conseguir até o relatório final. Paro o meu trabalho, “a elaboração do protocolo” foi iniciada ainda na cadeira de Pesquisa em Educação Matemática, em que fiz o projeto da pesquisa que seria realizada.

Na “avaliação e analise de dados” faço uma interpretação dos dados coletados referentes aos alunos e aos ambientes construídos ao longo das atividades. e na “preparação do relatório”, apresento o relatório no capítulo 6 com os relatos e análises de cada encontro.

4 O ENSINO DE FUNÇÕES NA ESCOLA

No ano de 2015, na disciplina de Laboratório em Ensino e Aprendizagem III, fiz uma análise de um artigo de Garcia (2010), que apresenta uma pesquisa sobre o conhecimento necessário que os professores precisam ter para ensinar função. Este artigo chamou minha atenção, pois traz questionamentos sobre os saberes matemáticos do professor e sobre o suporte que os cursos de licenciatura, especialmente o da UFRGS, oferecem aos futuros professores, para que ele saiba o suficiente desse conteúdo que é fundamental na formação dos alunos.

Várias perguntas são feitas ao longo do trabalho, tais como: “Quais são os conhecimentos de matemática necessários para o professor ensinar?” (Garcia, 2010, p. 44). Para esse questionamento, o conceito usado foi proposto por Shulman (apud GARCIA, 2010) e define categorias do conhecimento básico importantes para o professor ensinar, como por exemplo, saber o conteúdo, pois para ensinar, precisamos antes aprender e compreender o que abordaremos aos alunos.

De acordo com Garcia (2010), diversas publicações internacionais e nacionais consideram o domínio do conteúdo essencial para o docente ter autonomia e autoconfiança, tanto para participar na organização do currículo quanto para fazer atividades em sala de aula.

Segundo Garcia (2010), em Fiorentini, Souza e Melo (1998) e Fiorentini (2004) são apresentados os desafios que os professores têm atualmente: eles precisam ter atitudes investigadoras e críticas em relação à prática pedagógica e aos saberes. Devem também, participar no desenvolvimento curricular da escola. Para isso eles necessitam, além de conhecer o conteúdo, saber relacioná-los à natureza dos seus significados com o desenvolvimento histórico. Para Veloso et al. (apud GARCIA, 2010, p. 11) esse tendência se resume em: “Conhecimento explicito matemático é mais do que enunciar uma dada proposição ou procedimento, envolve sabermos as razões e as relações, sermos capaz de explicar a outros por que é assim, bem como relacionar ideias particulares ou processos.”

Partindo desses estudos, foi feito um roteiro para o trabalho. O conhecimento de matemática é primordial para o professor ensinar e desenvolver uma aula em que os alunos aprendam e participem. Segundo Garcia (2010, p. 45) esse conhecimento deve ser “conceitual, profundo, compreensivo, amplo, conectado em uma rede de informações, relações e representações.” A construção dessa experiência deve começar nos cursos de formação de professores.

Outra pergunta que foi feita por Garcia (2010, p. 45): “Quais são os conhecimentos a respeito de função necessários para o professor ensinar?” Hansson (apud GARCIA, 2010) investigando o conhecimento dos futuros professores sobre função, destacou que esse conceito é unificar central no desenvolvimento da própria matemática. O conceito função tem origem em outros conceitos fundamentais da Matemática, como explica Caraça (apud GARCIA 2010): “contagem, medida, forma, conjunto, coleção, correspondência, classificação, comparação, variação, interdependência, movimento, lei natural.” A partir desses conceitos, o conhecimento de função é saber estabelecer conexões entre esses conceitos e o conteúdo de funções.

As perguntas são finalizadas com Garcia (2010) indagando sobre: “Qual é o conhecimento a respeito de função desejável para o professor na escola? O que os futuros professores de matemática estão aprendendo a respeito de função no curso de licenciatura em matemática da UFRGS?”. O estudo de função na escola é limitado a um único significado: relação de dependência entre variáveis numéricas. Mesmo com essa única alternativa de trabalho, muitos professores não compreendem o que estão tentando ensinar. Assim sendo, também foi feita uma análise do currículo de licenciatura da UFRGS.

Nesse estudo, foram analisadas as disciplinas do Cálculo/Aplicações, do grupo de Álgebra e do Grupo de Transformações. O resultado, como os pesquisadores já esperavam, foi de que os alunos não tinham o conhecimento de conceitos bem desenvolvidos. Uma vez que, o que era passado a eles se restringia a conjuntos numéricos, deixando de lado as relações entre o conceito de função e outros contextos. Por outro lado, para o currículo da escola, esse conhecimento do formando é o esperado para que o ensino de função fique restrito as funções reais de variável real e suas representações.

Ao final desse trabalho a autora apresenta uma proposta de ensino para contribuir e mudar algumas coisas no ensino de funções. Além de enfatizar que apesar do professor necessitar ter um conhecimento profundo do conceito de função, isso não ocorre no curso de formação que foi analisado, pois não são destacadas a generalidade e a abrangência do conceito. Mas ao se pensar no conceito de função que a escola quer que seja visto pelo aluno, o curso alcança o conhecimento necessário, limitado às funções reais.

Garcia (2010, p. 49) ainda destaca as responsabilidades que segundo Fiorentini, Souza e Melo (1998) são associadas a todos os professores:

> [...] espera-se dele uma atitude investigadora e crítica em relação à prática pedagógica e aos saberes historicamente produzidos; [...] passa a ser responsável pela produção de seus saberes e pelo desenvolvimento curricular. (p.332)

As pesquisas em Educação Matemática nos mostram que o professor necessita um conhecimento mais profundo que vai além da matemática escolar, para construir ambientes de interação entre professores e alunos, de discussão e de investigação em sala de aula.

5 CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

O desenvolvimento do trabalho feito com os alunos também é analisado através dos Cenários para Investigação de Ole Skovsmose (2000), em que eles são convidados a vivenciar certos problemas buscando soluções através de indagações, justificativas e possiblidades de resoluções. Esses cenários de investigação, para Skovsmose (2000) são ambientes que dão suporte a um trabalho de investigação, assim são deixados de lado ambientes de aprendizagem em que o aluno somente ouve e resolve os problemas de acordo com o que o professor fala.

Nos Cenários para Investigação alunos e professores tem oportunidade de desenvolver um ambiente de aprendizagem, construindo juntos os raciocínios matemáticos necessários para os problemas propostos.

> Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. O convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma os alunos se envolvem no processo de exploração e explicação. O “Por que isto?” do professor representa um desafio, e os “Sim, por que isto...? dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e estão em busca de explicações, o cenário de investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário de investigação os alunos são responsáveis pelo processo. (SKOVSMOSE, 2000, p. 73).

Assim, esses ambientes podem ou não serem aceitos pelos alunos e o professor perceberá através do envolvimento da turma com as atividades.

Segundo Skovsmose (2000), os Cenários para Investigação contrapõem o que ele chama de paradigma do exercício, ou seja, as aulas tradicionais de matemática, em que o professor aborda certo conteúdo, expõe exemplos e exercícios no quadro, e geralmente existe uma única resposta certa. Nessas aulas, o professor detém todo o conhecimento e sustenta suas ideias no livro didático.

Como chamam a atenção Faustino e Passos (2013),

> Para avançar em uma aula baseada no paradigma do exercício, o aluno ou aluna, precisa se satisfazer com os elementos dados pelo problema e tomá-lo como verdade inquestionável, buscando apenas manipular os dados para buscar a resposta correta.(FAUSTINO, PASSOS, 2013, p 64)

A partir dessa oposição de ambientes, Skovsmose (2000) os caracteriza

> As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente das baseadas em exercícios. A distinção entre elas pode ser combinada com uma distinção diferente, a que tem a

> ver com as “referências” que visam levar os estudantes a produzirem significados para conceitos e atividades matemáticas. (SKOVSMOSE, 2000, p.7)

As referências que Skovsmose cita são: à matemática pura, à semi-realidade ou à realidade e todos os ambientes de aprendizagem abordados podem ser desenvolvidos. Relacionando os três tipos de referências e os dois paradigmas de prática escolar, Skovsmose (2000, p.75) criou o que chama de “matriz com seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagem.”

Tabela 1- Ambientes de Aprendizagem

	Exercícios	Cenários para Investigação
Referência à matemática pura	(1)	(2)
Referência à semi-realidade	(3)	(4)
Referência à realidade	(5)	(6)

5.1 Analisando a tabela de Ambientes de Aprendizagem

Ambiente (1): O ambiente é construído através da prática de exercícios da matemática pura. Exemplos:

- (2x+3).(4x-2)=
- (5m - 3n) – (m + 4n)=

Ambiente (2): Ocorre um cenário de investigação que se baseia na Matemática pura, sem fazer ligações com outras matérias. De acordo com Menezes (2011), “os alunos constroem juntos os processos matemáticos e, assim, talvez entendam porque se procede de tal maneira, visando determinada resolução. O professor faz o convite aos alunos e, se aceito, eles participam da construção”.

Ambiente (3): A referência à semi-realidade diz respeito a situações que podem ou não existir. Skovsmose (2000) acredita ser um mito que exercícios que se referem a esse ambiente descrevam alguma realidade.

Resolver exercícios com referência à semi-realidade pode não ser uma tarefa muito fácil, se algumas regras entre professor e aluno não forem estabelecidas, além de destacar que o que está escrito no exercício é o suficiente para resolvê-lo.

> [...] A combinação da exatidão das medidas com o pressuposto de que a semi-realidade é completamente descrita pelas informações fornecidas torna possível sustentar o pressuposto de que há somente uma resposta correta. A metafísica da semi-realidade assegura que esse pressuposto pode ser mantido, não somente quando a referência é exclusivamente para números e figuras geométricas, mas também quando são “compras”, “maçãs”, “preços”, “distâncias”, bem como outras entidades empíricas parecidas. Em particular, essa metafísica tem estruturado a comunicação entre professor e alunos. (SKOVSMOSE, 2000, p.9)

E ainda, o autor afirma que a educação matemática frequentemente alterna entre os ambientes tradicionais (1) e (3)

> [...] o paradigma do exercício oferece uma fundamentação assentada na “tradição” da educação matemática. Muitos estudos em educação matemática têm revelado um quadro desolador sobre o que acontece na sala de aula tradicional. Muitos desses estudos, todavia, não reconhecem que existem outros possíveis ambientes de aprendizagem e que seus dados estão ligados a uma organização particular de sala de aula de matemática [...] O exercício é parte do que define a tradição da matemática escolar. (Skovsmose, 2000,p.82)

No ambiente (4) voltamos ao cenário para investigação, mas agora com referência à semi-realidade em que aluno a usa “como um recurso para a produção de exercícios: é um convite para que os alunos façam exploração e explicações” (Skovsmose,2000, p.77). Quando o aluno aceita participar dessa experiência, “poderá construir seus próprios problemas dentro da questão inicial”. (MENEZES, 2011, p.26)

No Ambiente (5), assim como no (1) e no (3) os alunos apenas resolvem exercícios a partir da teoria e dos exemplos apresentados pelo professor, só que agora apoiados em situações reais. Os exercícios propostos já terão todos os dados que o aluno precisa para resolvê-los, ele precisará somente juntar os dados e analisá-los. Quando houver questionamentos sobre os mesmos, então passará a existir o ambiente (6).

Ao evoluirmos dos ambientes (4), em que há investigação e (5), que envolve situações reais, podemos obter também o ambiente (6) no qual o aluno é convidado a participar de situações-problema reais em que o professor passa ser o mediador. Menezes (2011, p. 29) explica que, “aceito o convite, neste cenário, o aluno pode entrar no assunto escolhido para debate, tomar tal questão inicial para si e enunciar seus próprios problemas.”

Sobre os ambientes de aprendizagem, Skovsmose (2000) conclui que a educação matemática deve mover-se entre os diversos cenários para que “alunos e professores, juntos, achem seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem.” (Skovsmose, 2000, p. 82)

A relação que Skovsmose (2000) faz entre o paradigma do exercício e os Cenários de investigação nos leva a perceber que quando há um envolvimento do aluno na construção de situações-problema, ele desenvolve maior facilidade para desenvolver o raciocínio matemático, que é um dos processos que a resolução de problemas evidencia, além de aprender a questionar e relacionar os conhecimentos prévios com situações novas.

6 A PRÁTICA NO ESTÁGIO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA III

6.1 O Ambiente Escolar

No ano de 2016, no segundo semestre cursei a disciplina de Estágio em Educação Matemática III, no qual foi realizada a prática para o Trabalho de Conclusão de Curso. Meu estágio foi em uma turma de 20 alunos do Ensino Médio de uma escola da rede pública de Porto Alegre. A escola fica localizada no Bairro Petrópolis e totaliza 899 alunos, distribuídos no Ensino Médio – manhã: 488, noite: 78, e Ensino Fundamental: 333 – tarde. Além das salas de aula, existe também um laboratório de Química/Física, para as aulas experimentais e uma sala específica de Inglês, já que a escola oferece também cursos independentes de línguas. Eram feitas inúmeras atividades extraclasses na escola, como passeios, gincanas e festas, com ampla participação dos alunos em todos os eventos oferecidos.

6.2 Projeto

Na disciplina de Estágio III, em que fiz a prática e a coleta de dados para o Trabalho de Conclusão de Curso, temos obrigatoriamente 14 horas de observação e 35 horas – aula.

Inicialmente, o projeto teria por volta de quatro encontros extraclasse, sendo definidos no decorrer das atividades. Decidido isso, uma semana antes do início do projeto, passei nas salas do 1º ano do Ensino Médio, juntamente com a professora de Matemática e convidei todos os alunos. Em cada sala pelo menos dois alunos pegaram a autorização para participar.

No dia marcado um só aluno compareceu, mesmo assim realizamos a atividade prevista, levando em consideração a sua disponibilidade em ir ao encontro. O primeiro encontro não foi como o esperado, e eu já estava começando a temer que a prática não fosse mais acontecer naquele semestre. Então conversei com a minha orientadora e com a professora de Estágio e decidimos que eu faria mais uma atividade para o projeto, e se realmente não tivéssemos alunos o suficiente para dar continuidade eu partiria para um segundo plano.

No segundo encontro também só um aluno compareceu, mas fizemos a atividade. Então parti para um segundo plano que era desenvolver o trabalho do projeto em sala de aula, com os alunos do Estágio III. Por sorte iria iniciar o conteúdo de função afim na semana seguinte, o que meu deu tempo para reorganizar os planos de aula e os problemas a serem resolvidos por eles.

Nos relatos, a identidade dos alunos é preservada e me refiro a eles como alunos A, B, C e D, e os grupos também são identificados apenas por números.

6.3 Encontros extraclasse

Relato nesta seção os dois encontros realizados no projeto, que teve a participação de dois alunos. Analiso os ambientes de aprendizagem que os alunos puderam vivenciar e também como os passos do GTERP foram utilizados para cada atividade

6.3.1 1º encontro

O objetivo do primeiro encontro foi retomar o conceito inicial de função visto em aula e resolver dois problemas: o primeiro deixando o aluno resolver do jeito que achar melhor e o segundo, usando os passos do GTERP.

Inicialmente entreguei um problema para que resolvesse:

Atividade 1

A tabela a seguir relaciona o número de litros de gasolina com o preço a pagar por eles (em agosto de 2016):

Número de litros	Preço a pagar (R$)
1	3,90
2	7,80
3	11,70
4	15,60
5	19,50

Responda:

a) Qual a variável dependente e a variável independente da função?
b) Qual a lei da função que relaciona o número de litros de gasolina com o preço a pagar por eles?
c) Se eu quiser completar o tanque com R$ 50,00, quantos litros de gasolina eu terei colocado?

Figura 1- Atividade 1

Atividade 2

2) (ENEM 2011) - O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.
Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$
b) $100n + 150 = 120n + 350$
c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$
e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

Figura 2 - Atividade 2

6.3.1.1 Relato e análise: 1º encontro

Atividade 1

Nesse dia, somente o aluno A compareceu. Entreguei a folha e pedi para que resolvesse o problema descrito na Figura 1. O problema já tinha sido visto em sala de aula quando iniciamos o estudo de função.

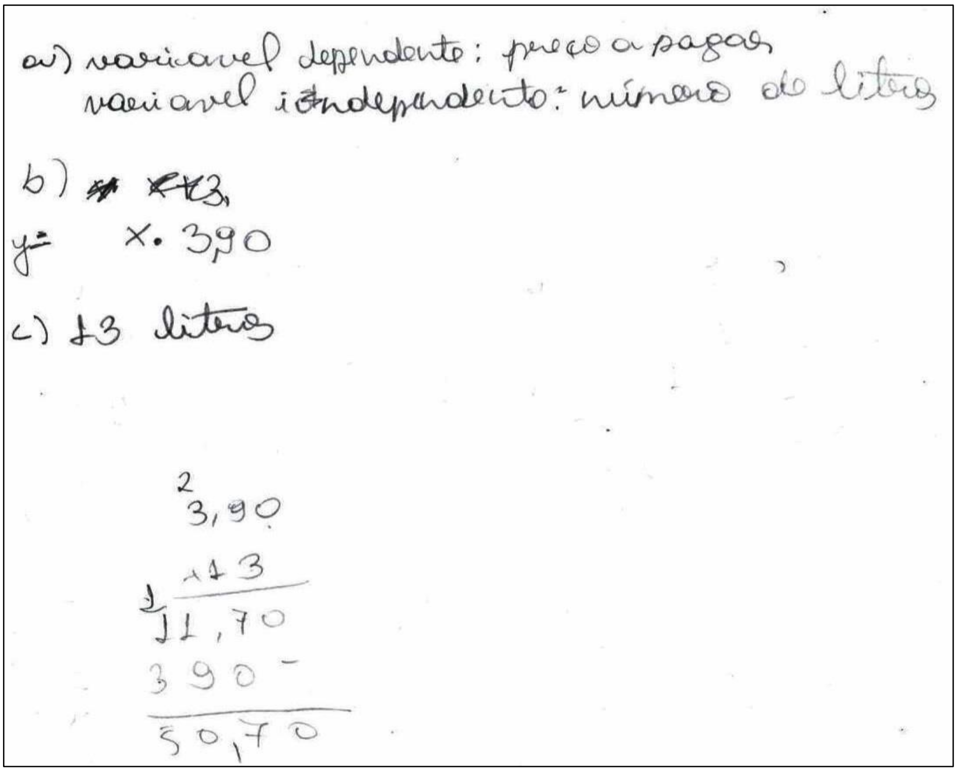
Como era um problema já conhecido pelo aluno A, a ideia de como pensar e resolver o problema não foi tão complicada. Mesmo que o intuito desse primeiro problema foi não falar dos passos do GTERP, ao resolvê-lo observei o aluno A fazendo a leitura individual do mesmo (passo 2), resolvendo-o (passo 4), indo ao quadro escrever sua solução (passo 6), e discutindo sua solução para relembrarmos a ideia de função.

Verificando a resposta do aluno na Figura 3, para o item c), vemos que para encontrar o número de litros necessários para gastar R$ 50,00 ele fez o seguinte cálculo: 3,90 x 13 e encontrou 50,70, ou seja ele foi pensando em valores que ao multiplicar por 3,90 resultassem ou mais se aproximassem de 50, não usando a lei da função encontrada no item b).

O aluno pensou o problema do seu modo, como mostra a Figura 3, e de acordo com Gallo (apud MENEZES, 2011, p. 13) “A cada experimentação singular do problema, novas soluções podem ser engendradas”. Ou seja, cada pessoa pensa e vive o problema de uma maneira diferente, por isso é importante ouvir as soluções dos alunos diante de algo que lhe é proposto, antes de induzi-lo a pensar como o professor.

Neste problema temos um pouco do ambiente (6) descrito por Skovsmose (2000), em que há dados reais da tabela de preço do litro da gasolina, o aluno aceita resolvê-lo, mas não chega a explorá-lo, a não ser para resolver o item c), que ele precisa encontrar quantos litros darão os R$ 50,00.

O objetivo de resolvê-lo era para relembrá-la do que já tinha sido estudado em sala, para usar os seus conhecimentos posteriormente.



a) variavel dependente: preço a pagar
variavel independente: número de litros

b) ~~x13~~

y= x. 390

c) 13 litros

3,90
x13
11,70
390
50,70

Figura 3 - resolução do aluno A - Problema 1

Atividade 2

Quando pensei em propor um problema que já havia sido abordado em sala de aula, e que ele resolveria sem usar os roteiros do GTERP, e o outro problema novo, que seria resolvido por meio dos passos do roteiro, o intuito era que ao final das atividades o aluno opinasse sobre como foi resolver o problema sem usar os passos e usando-os.

Nesta questão tentei seguir os passos do roteiro do GTERP. Mas como tive contratempos em relação à participação dos alunos no projeto, precisei reorganizar minha estratégia de aula, reproduzindo exatamente só os três primeiros passos, que se restringiram a preparar o problema para entregá-lo, na leitura individual e na leitura em conjunto, que no caso fizemos juntos. A partir do passo 4, “resolução do problema”, eu o auxiliei, visto que o problema não estava sendo resolvido em grupo, como o sugerido pelo roteiro .

Como cita Polya (1995) quando fala de partes da aula, “um dos mais importantes deveres do professor é auxiliar os seus alunos”... “mas se for deixado sozinho, sem ajuda ou auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso”. Por isso, a partir do 4º passo do roteiro, a “resolução do problema”, começamos a conversar sobre o problema. Primeiro perguntei se ele havia entendido o problema, ele respondeu que sim, então partimos para a resolução dele.

Assim, pedi para que me falasse como estava pensando em resolvê-lo para que eu anotasse no quadro suas ideias. De início, já excluiu as alternativas C, D e E, que segundo ele, estavam escritas de uma forma “estranha”, pois tinha os “( )”. Pensou mais e perguntou se poderia usar funções em algum momento, e eu respondi que poderia ser um bom caminho.

Em certo momento, ele perguntou o que significava a palavra “acrescidos”, e então expliquei que era a mesma coisa que acrescentar, somar. Estávamos no passo 4 do roteiro, mas percebi que era necessário voltar para o passo 3, da leitura em conjunto, para ajudá-lo no significado de algumas palavras ou frases. Resolvidas as dúvidas referentes à interpretação do problema, voltamos à “resolução do problema”, passo 4. Resolvi perguntar o que seria “tornar indiferente”, pois achei que poderia ajudá-lo na resolução, e ele indagou “o valor cobrado ser o mesmo?!”, então falei: “Ótimo e como posso escrever isso?”.

No passo 5, “observar e incentivar”, o incentivei a lembrar de como achou a função do exercício anterior, relacionando os dados do problema. Os passos 6, de registro das resoluções no quadro e do 7, da plenária e 8, da busca do consenso, foram realizados praticamente juntos, pois enquanto ele escrevia sua solução no quadro nós já íamos conversando sobre a mesma e organizando as ideias para chegar na solução certa.

Como observamos na resolução do aluno, Figura 4, vemos que ele conseguiu perceber os dados do problema, mas não soube escrevê-los em forma de função, pensando nas variáveis dependentes e independentes, como foi feito no problema 1. Pedi para que no papel, ele deixasse exatamente como pensou e no quadro escrevi as funções de acordo com os dados que ele falou:

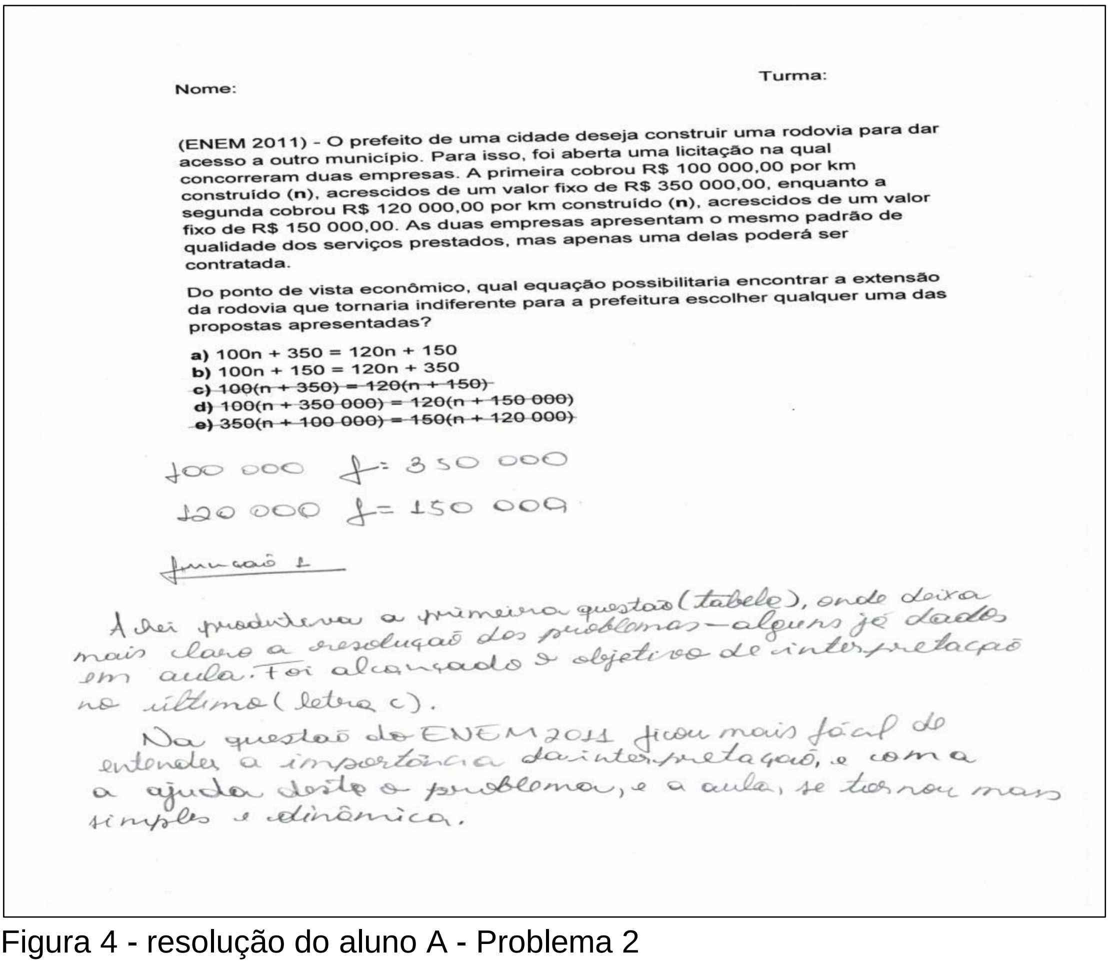
$f_1(n) = 100n + 350$ e $f_2(n) = 120n + 150$

Expliquei que o “n” em questão variava e como ele mesmo havia dito, precisávamos encontrar um “n” para que o valor cobrado fosse o mesmo, por isso para encontrá-lo, poderíamos igualar f_1 e f_2. Dessa explicação ele concluiu que resolvendo $100n + 350 = 120n + 150$ encontraria o “n”. Após chegarmos à solução correta, como descrito no passo 9, a “ formalização do conteúdo”, usando as funções f_1 e f_2, definimos função afim da seguinte maneira:

Função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se função afim quando existem dois números reais* a *e* b *tal que* $f(x) = ax + b$, *com* $a \neq o, \forall\ x\ \in \mathbb{R}$.

Neste problema passamos pelo ambiente (4), com referência à semi-realidade, em que ao aceitar o convite, o aluno A, faz uma investigação tanto da interpretação do problema até chegar a sua solução.



Nome:

Turma:

(ENEM 2011) - O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (**n**), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (**n**), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) 100n + 350 = 120n + 150
b) 100n + 150 = 120n + 350
~~**c)** 100(n + 350) = 120(n + 150)~~
~~**d)** 100(n + 350 000) = 120(n + 150 000)~~
~~**e)** 350(n + 100 000) = 150(n + 120 000)~~

100 000 f: 350 000
120 000 f= 150 009

função 1

A chei produtiva a primeira questão (tabela), onde deixa mais claro a resolução dos problemas – alguns já dados em aula. Foi alcançado o objetivo de interpretação no último (letra c).

Na questão do ENEM 2011 ficou mais fácil de entender a importância da interpretação, e com a a ajuda deste o problema, e a aula, se tornou mais simples e dinâmica.

Figura 4 - resolução do aluno A - Problema 2

6.3.2 2º encontro

O objetivo da atividade foi resolver problemas que envolvam função afim, conteúdo já abordado, com vistas a: entender o significado dos dados de uma função para encontrar a expressão da mesma.

O alunos resolveu o problema de acordo com o roteiro de resolução de problemas do GTERP.

Atividade 3

(ENEM 2011) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando – se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é:

a) y = 4300x
b) y = 884.905x
c) y = 872.005 + 4.300x
d) y = 876.305 + 4.300x
e) y = 880.605 +4.300x

Figura 5 - Atividade 3

6.3.2.1 Relato e análise: 2º encontro

No segundo encontro do projeto, também só o aluno B compareceu. Então usei praticamente as mesmas estratégias do 1º encontro. Ao pensar no problema gerador, como descreve o passo 1, “a preparação do problema”, escolhi um problema em que o aluno precisaria trabalhar com os coeficientes a e b da função afim.

No primeiro momento, o aluno não estava tão confortável, pois só tinha ele na sala. Então tentei deixá-lo mais a vontade, entreguei o problema e dei um tempo para o aluno B ler, conforme o passo 2, a “leitura individual” . Depois fizemos a leitura em conjunto (passo 3), e a partir do passo 4 do roteiro, “resolução do problema”, começamos a discutir sobre o problema.

Percebi que ele não havia entendido o que o problema perguntava, pois inicialmente já quis chutar uma letra, no caso a (a), e isso pode ter ocorrido porque no momento da leitura em conjunto (passo 3), o aluno não perguntou nada sobre a escrita do problema, logo eu considerei que havia entendido . Então pedi para que ele fosse ao quadro escrever e explicar seu raciocínio, já que para conseguir construir a função, ele deveria entender onde cada dado se encaixaria na forma geral da função afim, definida por $f(x) = ax + b$. Ao convidá-lo para ir ao quadro, queria ver qual a parte do problema ele não estava entendendo, e pelos passos 4 e 6, “resolução do problema” e “registro das soluções no quadro”, respectivamente, eu o ajudei a buscar uma solução com as ideias expostas por ele. Essas etapas do roteiro foram importantes para que o aluno compreendesse o que o problema queria.

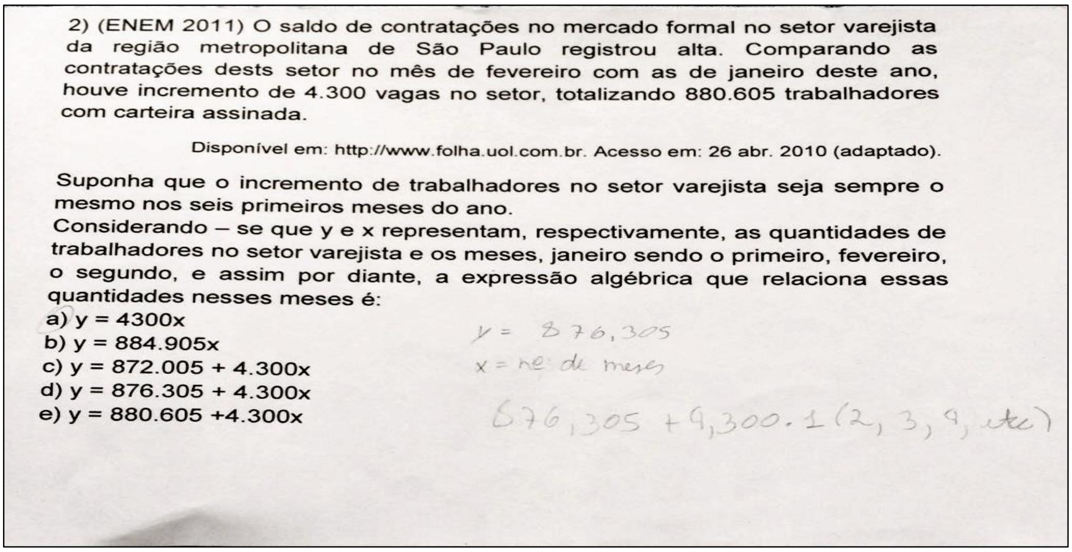
Esse problema, a meu ver tinha uma dificuldade maior, pois o aluno deveria entender primeiro que de janeiro para fevereiro houve um acréscimo de 4.300 trabalhadores e que para saber o número total de trabalhadores em janeiro, teria que descontar esse valor. Portanto em janeiro seriam 876.305 trabalhadores.

E podemos perceber a dificuldade em relacionar esses dados, na Figura 7, em que o aluno faz a sua resolução do problema. Na Figura 6 ele coloca 876.305, como sendo o y para todos os meses.

Enquanto ele ainda estava no quadro, lemos o problema novamente, voltando para o passo 3 da “leitura em conjunto”. Após a leitura chegamos ao passo 7 “plenária”, em que eu fui tentando explicá-lo em outras palavras, para que ele entendesse a relação de cada valor com a função afim $f(x) = ax + b$, e ao longo da explicação ele foi tirando as dúvidas quanto aos coeficientes a e b da função afim. Assim, chegamos à solução correta (passo 8) e no quadro (passo 9) expliquei que o a era o coeficiente angular e o b o coeficiente linear.

No final do encontro, pedi para que ele escrevesse o que foi mais difícil ao resolver do problema: a leitura (passos 2 e 3), a resolução (passo 4), registrar no quadro (passo 6), plenária (passo 7) ou busca do consenso (passo 8), e pelo que o aluno respondeu, conforme a Figura 7, observamos que quando passou pela leitura, mas não entendeu o que os dados do problema traziam, ao chegar o momento de resolvê-lo, o aluno B não conseguiu e precisamos voltar um passo.

Neste encontro, como já relatado acima, inicialmente o aluno não parecia ter aceitado o convite para o ambiente de aprendizagem, mas aos poucos ele foi ficando mais à vontade e pudemos explorar o problema proposto. Para essa situação, depois que o aluno B aceitou refletir e discutir sobre o problema, criou-se o ambiente (4), da semi-realidade, pois o problema foi adaptado de dados reais.



2) (ENEM 2011) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações dests setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

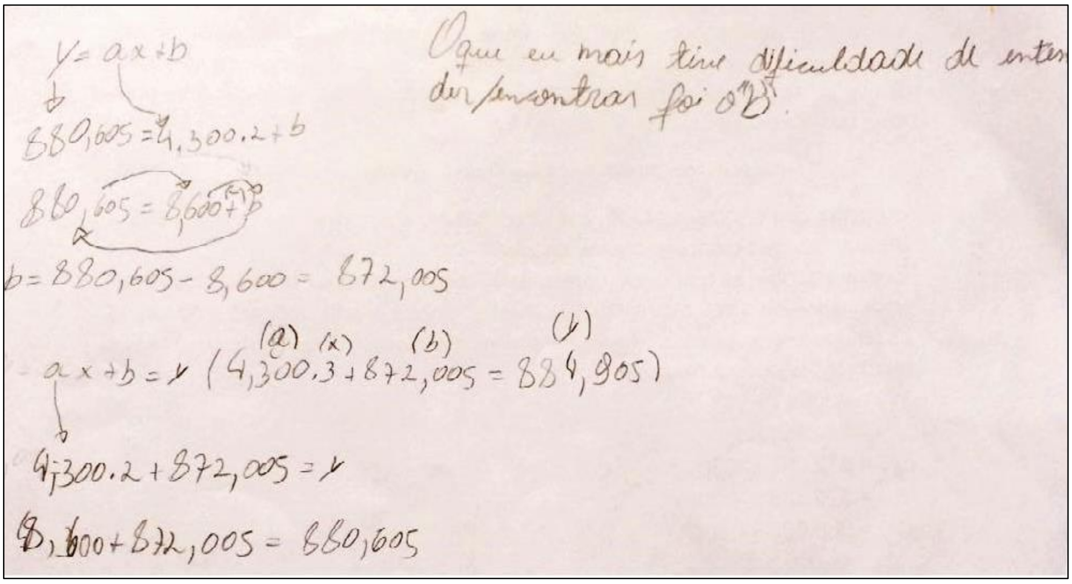
Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.
Considerando – se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é:

a) y = 4300x
b) y = 884.905x
c) y = 872.005 + 4.300x
d) y = 876.305 + 4.300x
e) y = 880.605 +4.300x

y = 876,305
x = nº de meses
876,305 + 4,300.1 (2, 3, 4, etc)

Figura 6 - resolução do aluno B - Problema 3 - parte 1



y = ax+b
880,605 = 4,300.2+b
880,605 = 8,600+b
b = 880,605 − 8,600 = 872,005
(a) (x) (b) (y)
ax+b = y (4,300.3+872,005 = 884,905)
4,300.2+872,005 = y
8,600+872,005 = 880,605

O que eu mais tive dificuldade de enten der/encontrar foi o B.

Figura 7 - resolução do aluno B - Problema 3 - parte 2

6.4 Atividades em sala de aula

Nesta seção são relatadas as atividades realizadas em sala de aula Analiso os ambientes de aprendizagem que os alunos vivenciaram e também como os passos do GTERP foram utilizados para cada atividade.

6.4.1 Atividade 4

Entreguei para a turma o mesmo problema do projeto, para então com um número maior de alunos aplicar o roteiro do GTERP. Nesta atividade o objetivo era resolver o problema e identificar uma função afim.

2) (ENEM 2011) - O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.
Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?
a) $100n + 350 = 120n + 150$
b) $100n + 150 = 120n + 350$
c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$
e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

Figura 8 - Atividade 4

6.4.1.1 Relatório e análise: atividade 4

Comecei a aula falando para a turma sobre a atividade e expliquei rapidamente sobre o roteiro do GTERP que seria usado para a mesma. Alguns alunos inicialmente não gostaram de saber que resolveriam um problema de manhã cedo, pois segundo eles teriam que pensar muito. Conversei sobre a importância do problema, falando que ele foi retirado da prova do ENEM, e que seria interessante a turma ter contato com provas como esta.

Então entreguei o problema para cada aluno, que fez a leitura individual (passo 2). No momento da formação dos grupos (passo 3), senti certa aversão, por parte de alguns alunos, a esse tipo de trabalho, achavam melhor fazer atividades sozinhos, pois alguns colegas só copiavam a resposta. Inicialmente deixei a divisão da turma como eles mesmos fizeram, mas ao pedir que fizessem a leitura em conjunto, eles se organizaram em grupos, então eu disse: "Pessoal já que vocês estão lendo o problema em grupos, podem resolvê-lo também em grupo, mas todos precisam fazer. Não vai ser só um do grupo pensando e o resto só copiando!"

Depois de ter perdido um tempinho convencendo a turma a formar grupos, foi feita a divisão, ficamos com 6 grupos. Finalmente leram o problema, agora em grupo (passo 3). Feita a leitura, disse que poderiam começar a resolver o problema (passo 4). Enquanto isso, circulei pela sala para observar como eles estavam pensando no problema. Naquele momento os passos 4 e 5, " resolução do problema", e " observar e incentivar", respectivamente, estavam sendo realizados em paralelo.

A seguir descrevo como cada grupo construiu a resolução do problema:

Grupo 1: Entenderam o enunciado sem maiores dificuldades. Para achar a igualdade válida, eles usaram a equação da alternativa a), e a resolveram para encontrarem o valor de "n". Quando o encontraram, foram substituindo nas alternativas restantes até achar o mesmo valor nos dois lados da igualdade. Neste grupo, o ambiente (4), de investigação com referência à semi-realidade, é criado quando os alunos exploram cada alternativa, resolvendo o problema da maneira que acharam mais pratica, não usando os dados para construir funções e após igualá-las.

Grupo 2: Ao fazer perguntas para o grupo, vi que ainda estavam com dificuldades para entender o que estava sendo pedido. Expliquei o que significava "tornar indiferente", executando o passo 3, em que o professor ajuda o grupo a entender melhor o problema. Aparentemente pareceu mais claro que teriam que igualar os dados, mas como não conseguiam construir as funções, "chutaram" uma alternativa, recusando o convite para explorar mais o problema, para encontrar a solução correta.

Grupo 3: Nesse grupo havia a aluna A que participou do projeto, então na "resolução do problema" (passo 4), ela ajudou o grupo a encontrar a solução de uma maneira mais simples. Enquanto observava o grupo (passo 5), vi que retiraram dados do problema, construíram as funções e a partir delas encontraram a equação válida para tornar o valor de "n" indiferente. No ambiente do grupo, temos referência à semi-realidade, ambiente (4), pelo problema proposto, mas o modo como chegaram a resposta, passa pelo ambiente (3), em que não houve uma investigação por parte do grupo, mas o uso da resolução da colega que participou do projeto.

Grupo 4: Os alunos estavam divididos entre as respostas. Um disse que a alternativa certa era a "A", quando perguntei o porquê, ele respondeu que era óbvia, mas não sabia explicar e o restante do grupo não fazia ideia de como chegar à solução certa. Percebi que a leitura do problema (passos 2 e 3), não havia sido feita completamente, então li junto com o grupo, e para que tivessem uma ideia melhor da resolução do problema (passo 5) expliquei o que seria "tornar indiferente", sugeri que pensassem antes nas funções que o problema trazia e pedi para que o grupo trabalhasse junto. Então me afastei e fiquei observando, assim como o passo 5 descreve, o comportamento de cada membro do grupo na construção da resolução.

Para o grupo 4, o ambiente (4), é o que melhor o descreve. Apesar de inicialmente não mostrarem muito interesse, mas ao explicar melhor o problema e incentivando-os a pensar juntos, a discussão do problema surgiu, fazendo-os explorar as alternativas.

Grupo 5: A leitura em conjunto (passo 3), foi feita tranquilamente. No passo 4, para buscar a resolução correta, fizeram uma tabela do nº de quilômetros até encontrarem o mesmo valor, por meio das funções encontradas de cada empresa. Primeiro eles destacaram os dados do problema, através de um valor fixo (independente) e o valor que variava dependendo do n. Vemos na Figura 10, uma tabela em que eles erraram os preços, pois não somaram os valores fixos. Mesmo assim encontraram a igualdade certa, a partir das funções certas.

Grupo 6: Não se interessam muito pela dinâmica, ou seja não aceitaram o convite para o ambiente proposto.

Terminada a parte da resolução do problema (passo 5), convidei um membro de cada grupo para ir ao quadro escrever a solução (passo 6). Alguns alunos não gostam de ir para o quadro para resolver um problema e explicar ao resto da turma a sua solução. Para a minha surpresa, esse passo foi bem recebido por quase todos, com a exceção de quem não fez a atividade dede o começo.

A plenária (passo 7), foi o momento que quem não tivesse entendido com as minhas palavras, teria a oportunidade de ouvir os colegas falando em outras palavras e entenderem o problema. Como argumenta Onuchic (2012, p. 13), “este é um momento bastante rico para a aprendizagem”.

No passo 8, “ busca pelo consenso”, comentei que por ser uma questão do ENEM era mais razoável pensar numa solução mais simples e rápida, mas que todas as soluções estavam certas, com pensamentos distintos. Também comentei que eles poderiam trabalhar direto com equações, mas para tirar os dados do problema seria interessante inicialmente escrever as funções de cada empresa, assim como alguns fizeram. Então como eu queria apresentar a função afim para a turma e formalizar o conteúdo, como descreve no passo 9, era interessante eles construírem as funções de cada empresa.

Nessa atividade alguns alunos não aceitaram participar da construção e resolução do problema, mas acredito que os ambientes (2), da matemática pura, em que trabalhamos funções, e o (4), em que eles exploraram o ambiente e cada grupo tirou suas próprias conclusões sobre a resolução para depois expô-la aos colegas.

A seguir temos a Figura 9, que descreve o registro de soluções de todos os grupos, referente ao problema proposto (Figura 8).

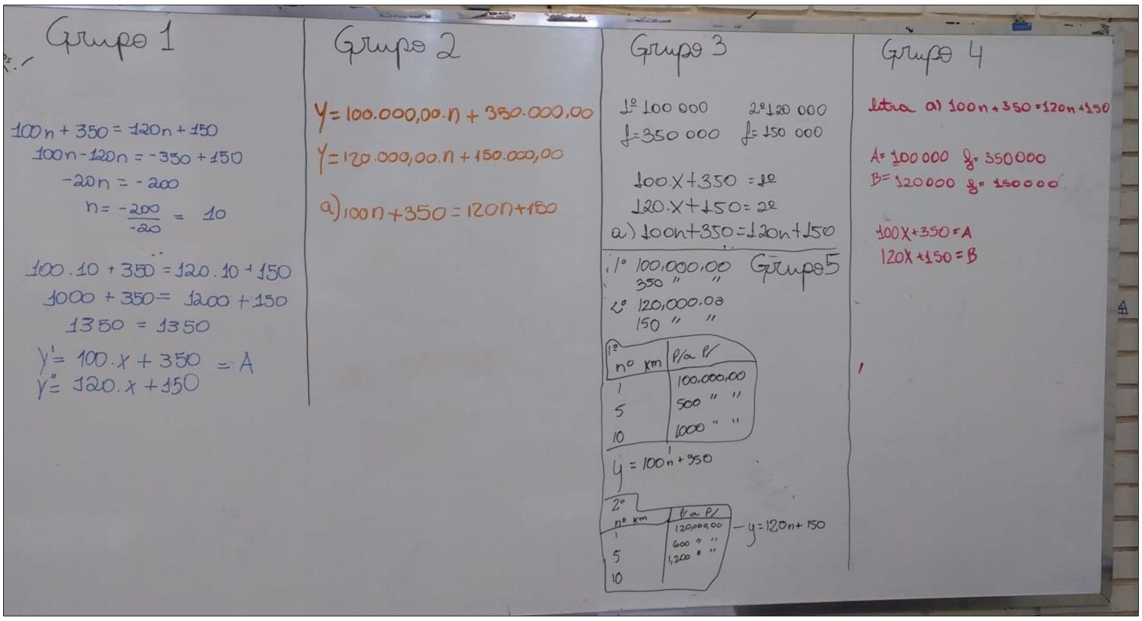


Figura 9 - Quadro de resoluções dos grupos

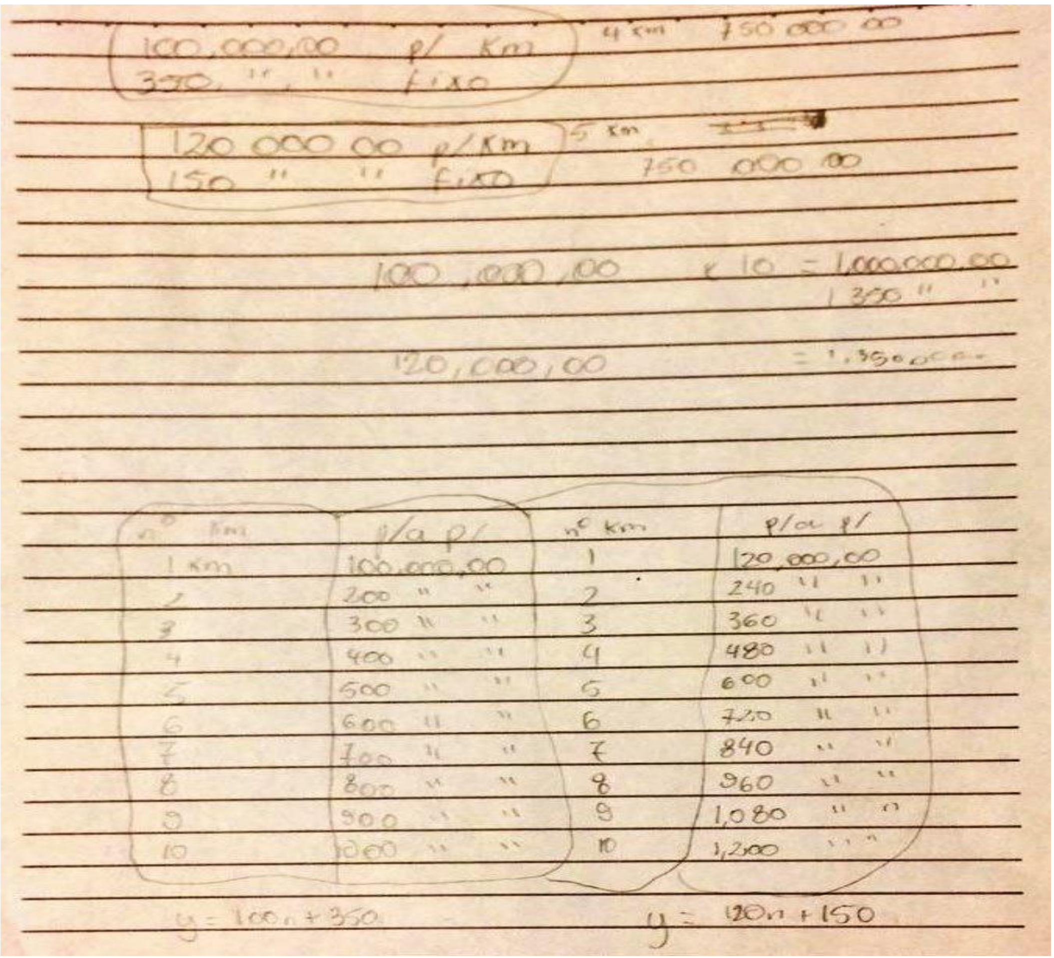


Figura 10 - Resolução do Grupo 5

6.4.2 Atividade 5

Nesta segunda atividade os alunos teriam que resolver o problema identificando e compreendendo o gráfico da função afim.

Numa certa cidade operam duas empresas de táxis. A empresa E cobra pela bandeirada inicial R$ 6,00 e por quilômetro rodado R$ 3,00. Enquanto que a empresa F cobra apenas por quilômetro rodado R$ 4,00. Pede-se as funções que representam os valores cobrados por cada empresa de acordo com a quilometragem rodada e o gráfico comparativo entre elas.

Adaptado de: http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2013/12/questoes-resolvidas-de-vestibulares.html

Figura 11 - Atividade 5

6.4.2.1 Relato e análise: atividade 5

O problema gerador para a segunda atividade (passo 1), foi escolhido para trabalharmos os coeficientes angular e linear nos gráficos de função afim. O aluno B que compareceu no projeto, no dia da atividade em que foi visto este problema não estava nessa aula.

Entreguei para cada aluno o problema a ser resolvido, pedi para que fizessem a leitura individual (passo 2) e depois formassem grupos para a leitura em conjunto (passo 3). Alguns preferiram fazer sozinhos, e dessa vez eu não intervi na escolha deles, pois ao longo da atividade todos conversaram entre si sobre a resolução do problema, que ocorre no passo 4 do roteiro.

Enquanto os alunos discutiam a resolução do problema, eu passava pela sala para observar (passo 5) o trabalho individual e em grupo da turma.

Ao observá-los, vi que a construção das funções foi feita sem dificuldades. Eles identificaram quem era o “a” e quem era o “b” e escreveram as respectivas funções. A construção do gráfico foi mais complicada. No problema é pedido um gráfico comparativo entre as empresas e quase todos os alunos fizeram a mesma coisa: construíram tabelas, dando valores para o x para encontrar o y, para cada função e fizeram os gráficos separadamente, como vemos na Figura

14. Eles não fizeram essa construção errada, pois em sala víamos que a maioria das construções dos gráficos era em planos cartesianos separados, e pelo visto só lembraram-se dessas.

Mas o problema pedia gráficos comparativos, então perguntei como iriam comparar os dois gráficos e o que era preciso para comparar. Eles não souberam o que responder e então eu os lembrei que a construção de dois gráficos poderia ser feita no mesmo plano cartesiano como tínhamos visto algumas vezes. O passo 5 foi usado também para incentivá-los a usar os conhecimentos prévios deles. Expliquei que fazer separadamente, tornaria a comparação dos gráficos mais complicada.

Como Rancière apud Menezes (2011) nos diz

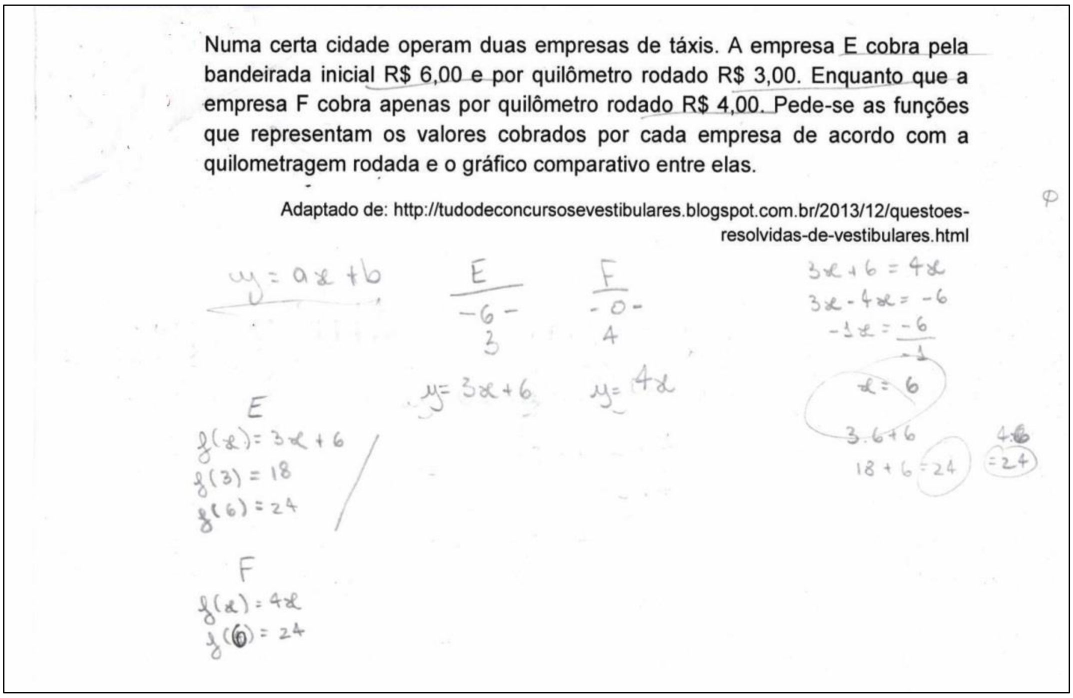
> Aqui está outra função do mestre a ser discutida com Rancière (2005): o interesse também do professor por impulsionar seu aluno ao aprendizado, à sua própria experiência do problema, sem induzi-lo. Trata-se de uma arte. Intuir, sentir, perceber até que ponto avançar na explicação ou, talvez, quando colocar uma palavra que funcione como um incentivo para o aluno prosseguir no seu estudo. Algo que abra o pensamento do estudante e o provoque ao raciocínio. (Menezes, 2011, p. 16).

Percebi que no momento que expliquei para eles sobre fazer os gráficos no mesmo plano, entenderam a pergunta que fiz anteriormente, sobre como iriam comparar os gráficos. Assim, na medida em que construíram os gráficos, como mostra a Figura 15, foram analisando que em relação aos quilômetros rodados, qual empresa era mais barata e quando cobrariam o mesmo valor.

Uma explicação em especial me chamou a atenção, o aluno C, do grupo 3, explicando para o aluno D, do grupo 1, a construção do gráfico: ele percebeu que o preço da empresa E aumentava 3 unidades e da empresa F aumentava 4 unidades a cada valor de x que ele substituía, então disse para ir fazendo daquele jeito, aumentando direto no gráfico as unidades. Ele estava falando sobre a ideia de coeficiente angular, e nesse momento o aluno passa a ser construtor da “nova matemática” que se que abordar, como é descrito no passo 4, de resolução do problema. Podemos ver na Figura 12, que o grupo 1 encontrou as duas funções pedidas e após as igualou para encontrar o valor de x para que o preço cobrado fosse o mesmo. E na Figura 13 temos os gráficos construídos de acordo com a explicação do aluno C ao grupo 1.

Nessa última atividade que fiz com a turma, usando os passos do GTERP para resolução de problemas, passamos também por quase todos os passos, somente quando chegamos ao passo 6, “registro das resoluções no quadro” eles não se sentiram a vontade para desenhar os seus gráficos no quadro, mas como eu tinha circulado pela sala e ajudado um pouco mais na construção dos mesmos, sabia que eles tinham feito de uma maneira parecida, desenhando-os no mesmo plano cartesiano. No passo 7, da plenária, como os alunos pensaram diferentemente a construção dos gráficos, convidei o aluno C do grupo 3 para que ele explicasse o seu raciocínio do aumento das unidades. Logo após, eu desenhei no quadro os gráficos para então formalizar em linguagem matemática (passo 9) a explicação do aluno C, definindo os coeficientes angular e linear da função afim a partir dos gráficos.

O ambiente proposto nesta aula tem características do ambiente (4), uma semi-realidade em que os dados podem realmente existir ou não, além de explorar as informações do problema criando explicações para a solução correta.


Numa certa cidade operam duas empresas de táxis. A empresa E cobra pela bandeirada inicial R$ 6,00 e por quilômetro rodado R$ 3,00. Enquanto que a empresa F cobra apenas por quilômetro rodado R$ 4,00. Pede-se as funções que representam os valores cobrados por cada empresa de acordo com a quilometragem rodada e o gráfico comparativo entre elas.

Adaptado de: http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2013/12/questoes-resolvidas-de-vestibulares.html

$y = ax + b$

E: 6; 3 — $y = 3x + 6$

F: 0; 4 — $y = 4x$

$3x + 6 = 4x$
$3x - 4x = -6$
$-1x = \frac{-6}{-1}$
$x = 6$
$3 \cdot 6 + 6$
$18 + 6 = 24$
$4 \cdot 6 = 24$

E
$f(x) = 3x + 6$
$f(3) = 18$
$f(6) = 24$

F
$f(x) = 4x$
$f(6) = 24$

Figura 12 - Resolução do grupo 1 - problema 3

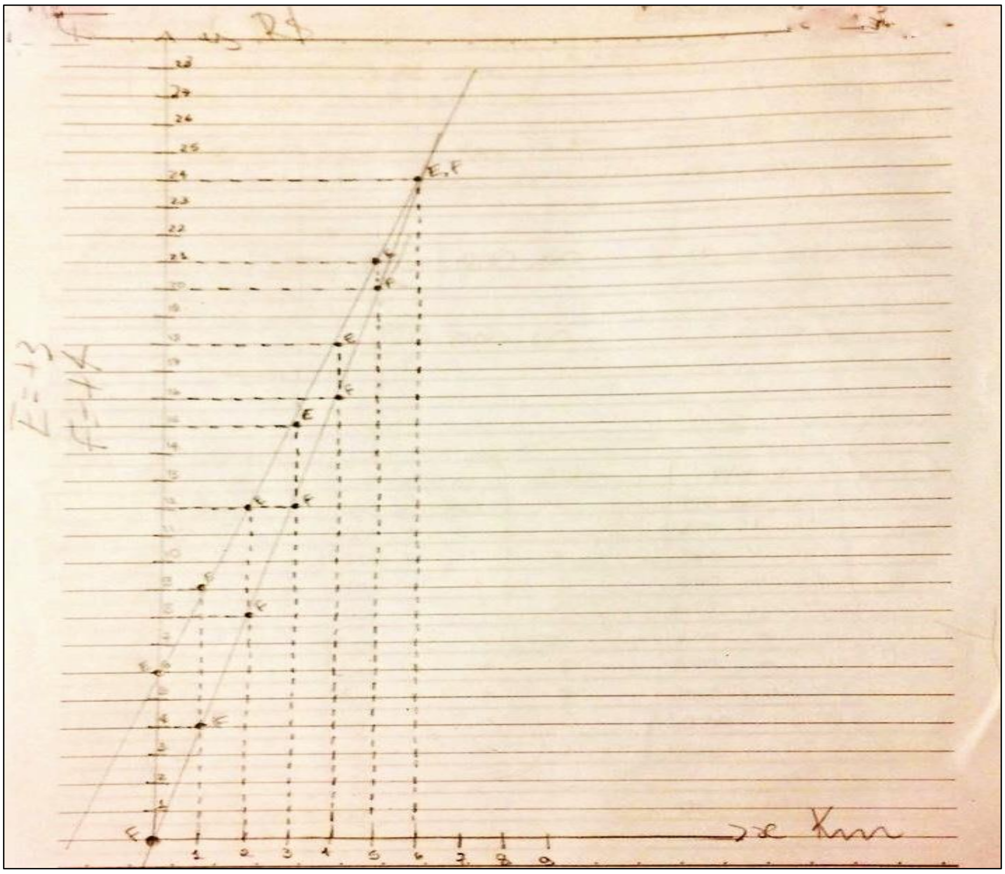
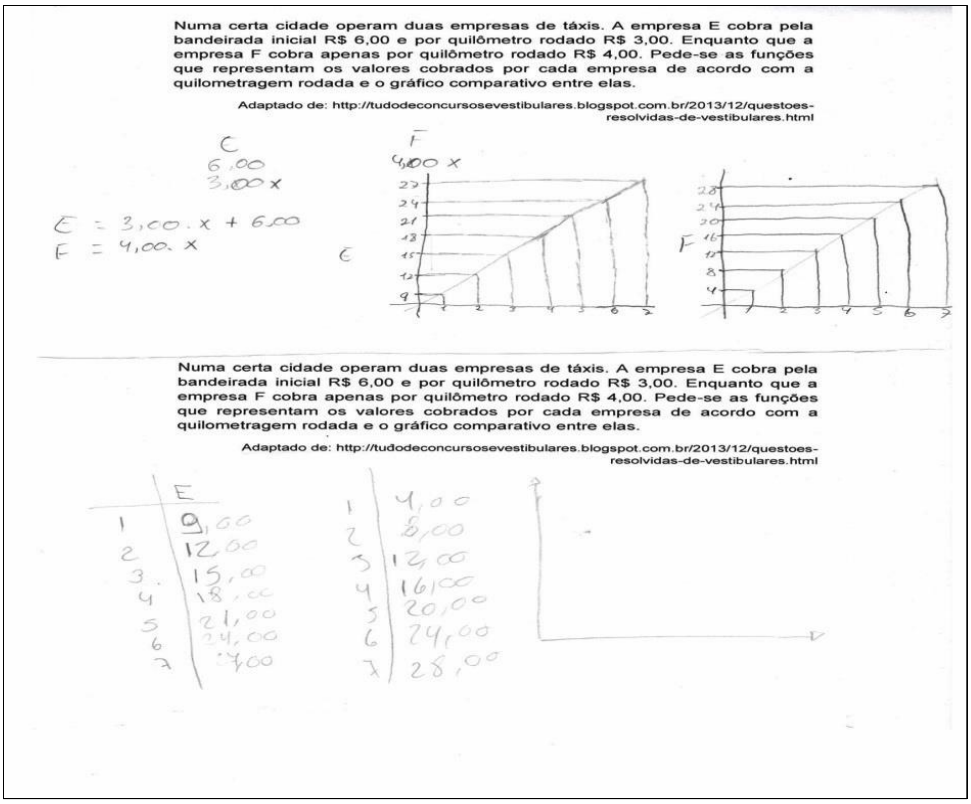


Figura 13 - Gráfico do grupo 1 - Problema 2



Numa certa cidade operam duas empresas de táxis. A empresa E cobra pela bandeirada inicial R$ 6,00 e por quilômetro rodado R$ 3,00. Enquanto que a empresa F cobra apenas por quilômetro rodado R$ 4,00. Pede-se as funções que representam os valores cobrados por cada empresa de acordo com a quilometragem rodada e o gráfico comparativo entre elas.

Adaptado de: http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2013/12/questoes-resolvidas-de-vestibulares.html

E = 3,00 . x + 6,00
F = 4,00 . x

Numa certa cidade operam duas empresas de táxis. A empresa E cobra pela bandeirada inicial R$ 6,00 e por quilômetro rodado R$ 3,00. Enquanto que a empresa F cobra apenas por quilômetro rodado R$ 4,00. Pede-se as funções que representam os valores cobrados por cada empresa de acordo com a quilometragem rodada e o gráfico comparativo entre elas.

Adaptado de: http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2013/12/questoes-resolvidas-de-vestibulares.html

	E		F
1	9,00	1	4,00
2	12,00	2	8,00
3	15,00	3	12,00
4	18,00	4	16,00
5	21,00	5	20,00
6	24,00	6	24,00
7	27,00	7	28,00

Figura 14 - Resolução do grupo 2 - Problema 2

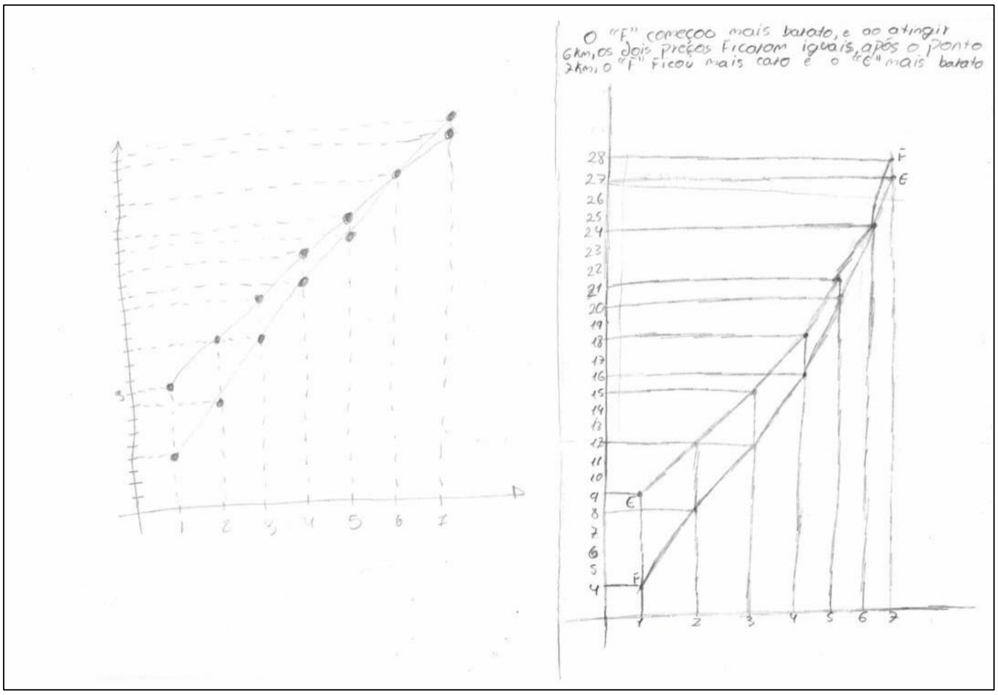


Figura 15 - Gráfico do grupo 2 - Problema 2

Seguem abaixo imagens dos alunos construindo os gráficos. Na Figura 16 o aluno construiu os gráficos se baseando na explicação do aluno C, enquanto na Figura 17, o aluno fez uma tabela para as duas funções para então construir os gráficos comparativos.

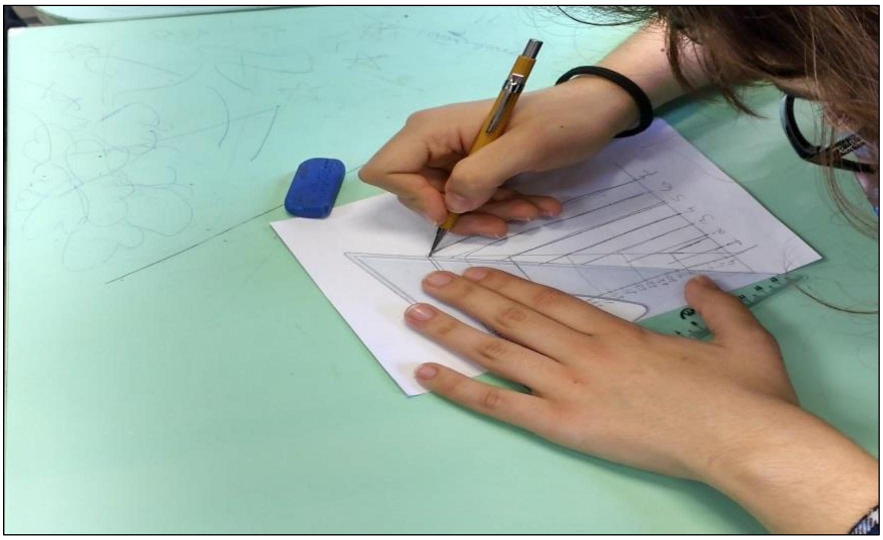


Figura 16 - Alunos construindo os gráficos

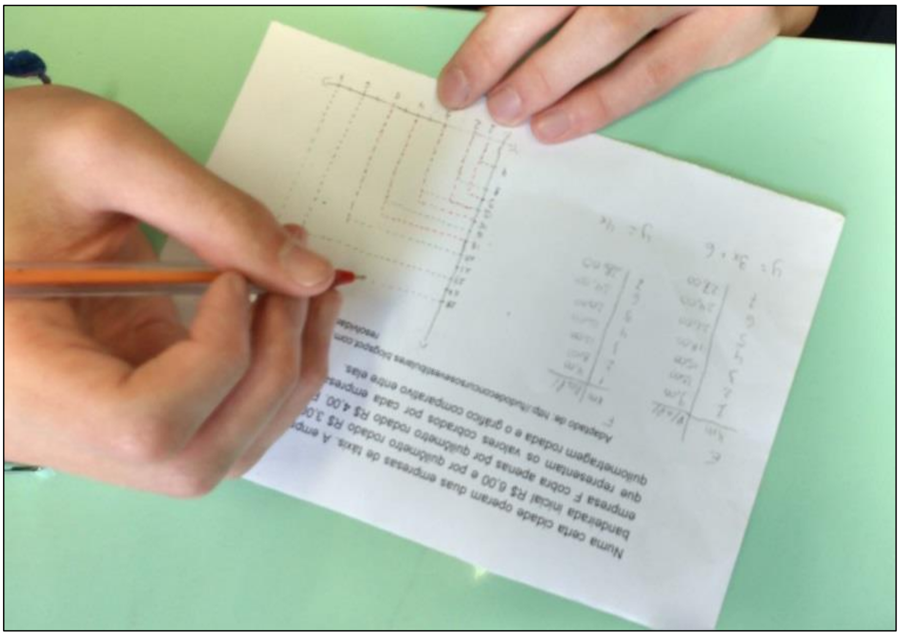


Figura 17 - Alunos construindo os gráficos

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho de conclusão foi analisar como as estratégias usadas na Resolução de Problemas podem auxiliar os alunos a resolver problemas que envolvam funções. Assim como os ambientes foram construídos ao longo das atividades e como os alunos desenvolveram o raciocínio matemático para a resolução de cada problema proposto.

O roteiro do GTERP (2004) foi utilizado para tentar responder a minha pergunta norteadora sobre as estratégias na Resolução de Problemas, e acredito que, realizando as etapas desse roteiro, encontramos um caminho que pode auxiliar na melhor compreensão de um problema e de que forma ele está ligado ao conteúdo estudado. Também, a partir das etapas propostas pude perceber em que passos eles tinham mais dificuldades, que geralmente ocorria no passo 3, em que era feita a leitura individual e após eu ajudava os alunos a interpretar novamente o problema, falando o significado de algumas palavras.

No passo 5 do roteiro “observar e incentivar”, por algumas vezes, eu sugeria aos alunos ideias para chegar a solução do problema mais facilmente. Depois de ter feito a análise do material, percebi que isso influenciou no modo do aluno pensar sobre o problema e assim, talvez ele não tenha feito uma investigação mais profunda como gostaria. Então para atividades futuras penso que eu possa analisar outras maneiras de ajudar os alunos nas suas dúvidas sem direcioná-los para um caminho de resolução.

Trabalhar com problemas que são abordados no ENEM, foi uma maneira de mostrar aos alunos que não só na escola, mas também nas provas para ingresso no Ensino superior eles estão presentes. Nessas situações, o aluno busca estratégias novas ou conhecimentos prévios para resolver um problema, além de proporcionar o desenvolvimento do raciocínio e as habilidades de interpretação dos problemas.

A metodologia do Estudo de Caso foi utilizada para a coleta de dados da prática e para analisar todo o material que foi reunido e comparar com a teoria da pesquisa.

E pensando em funções, um artigo de Garcia (2010) afirma que o ensino desse conteúdo ainda é limitado a relação de dependência entre variáveis. Além da pesquisa feita com professores de um curso de licenciatura, em que o resultado confirma que na graduação também o ensino de funções é limitado, mas para o currículo que é oferecido nas escolas, esse conhecimento é o suficiente. Também afirma que para haver uma interação maior entre alunos e professores, o professor deve ter um conhecimento não só matemático, mas um conhecimento de ambientes de aprendizagem. E voltando para as estratégias da Resolução de Problemas, entendo que a realização dos passos do roteiro deixam professor e alunos mais próximos, visto que chegamos à formalização do conteúdo depois de um consenso geral.

Os ambientes de aprendizagem vistos na pesquisa são descritos por Skovsmose (2000) e ajudaram na análise de cada aula. Desde o momento que o aluno aceitou o convite para vivenciar o problema até chegarmos à resolução e formalização do conteúdo, pudemos passar por alguns dos ambientes.

A meu ver, a Resolução de Problemas é uma alternativa para a aprendizagem de funções afim, pois o aluno ao se deparar com o conteúdo consegue relacioná-lo com situações que podem ser reais ou não, e não apenas com fórmulas. Os passos do roteiro do GTERP (2004), me permitiram perceber como é importante o professor não ser só aquela figura que fica a frente do quadro explicando o conteúdo, mas sim aquele que escuta e interpreta o raciocínio dos seus alunos e os guia quando necessário.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Luiza Depieri. **Estratégias utilizadas na resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).** 2009. 63 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática Licenciatura, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/>.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio (Enem):** fundamentação teórico-metodológica, vol 2, 121p. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), Brasília: O Instituto, 2005. Disponível em: < http://www.publicacoes.inep.gov.br/portal/download/407> Acesso em: 13 jun 2017.

BRASIL. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e sua Tecnologias,vol. 2, 135 p. Ministério da Educação(MEC), Secretária da Educação Básica(SEB), departamento de políticas de Ensino Médio, Brasília, 2006. Disponível em: <*http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf*>*.* Acesso em: 07 jun. 2016.

FAUSTINO, A. C; PASSOS, C.L.B. cenários para investigação e resolução de problemas: reflexões para possíveis caminhos. **Revista Educação e Linguagens**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, p. 64, jul/dez. 2013.

GARCIA, Vera Clotilde. FUNÇÃO: O PROFESSOR CONHECE ESTE CONCEITO? **Vidya,** Santa Maria, v. 29, n. 2, p.43-52, 2010. Semestral.

GIL, Antonio Carlos, **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas S.A, 2002. Disponível em: <https://professores.faccat.br/moodle/pluginfile.php/13410/mod_resource/content/1/como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2016.

GTERP, **Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas.** Disponível em: http://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/educacao-matematica/gterp/. Acesso em: 07 de junho de 2016.

MENEZES, Bernarda Souza de. **A experiência do problema e a modelagem matemática.** 2011. 66 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática Licenciatura, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/>.

MESQUITA, Daniel da Rosa. **Resolução de problemas relacionados à Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental.** 2015. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática Licenciatura, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/>.

POLYA, GEORGE. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995, 179 p. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2ª Reimpressão.

PONTE, J.P. **Estudo de caso em educação matemática.** Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Portugal, p.2., 2006.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos?** In: Jornada Nacional de Educação Matemática, 4; Jornada Regional de Educação Matemática, 17., 2012, Passo fundo. *Atas*...Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2012, p. 13.

SOUZA, Ariana Bezerra de, **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino de Matemática**. 2005. Universidade Católica de Brasília. Brasília, 2005. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>. Acesso em: 09 jun. 2016.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para Investigação**. Bolema – Boletim de educação matemática. Rio Claro (SP), n. 14, 2000. p. 66 – 91.

ANEXOS

Anexo 1

Termo de consentimento da Escola

O Colégio Estadual Florinda Sampaio Tubino, neste ato representado pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Janaína Zortéa Piegas, brasileira, estudante, CPF ____________, a aplicar a proposta de ensino: “Resolução de problemas: um caminho para o aprendizado de Funções Afim” na turma ___ do Ensino Médio. A Escola está ciente de que a referida proposta de ensino é base para o trabalho de conclusão de curso (TCC) de Janaína, o qual é uma exigência parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e é orientado pela Profª. Drª. Marilaine Sant’Ana. A autorizada, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes da escola que participarão da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, ___de ___________ de 2016

____

Janaína Zortéa Piegas

____

Profª. Drª. Marilaine Sant’Ana

____

Direção da Escola

Anexo 2

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada Resolução de problemas: um caminho para o aprendizado de Funções, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Janaína Zortéa Piegas. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marilaine Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone ou e-mail.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Investigar como é possível a abordagem de funções via resolução de problemas;
- Analisar quais são os maiores erros dos alunos e em que momento da resolução do problema isso acontece;
- Refletir sobre as capacidades matemáticas desenvolvidas pelos alunos ao resolver problemas que envolvam funções.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço UFRGS /telefone (51) 95913234/e-mail janapiegas@hotmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: