

**ANÁLISE DE PILARES ESBELTOS
DE CONCRETO ARMADO CONFINADOS,
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

MICHELLE PONTES SEIXAS

**Porto Alegre
Fevereiro 2003**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

MICHELLE PONTES SEIXAS

**ANÁLISE DE PILARES ESBELTOS
DE CONCRETO ARMADO CONFINADOS,
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de *Mestre em Engenharia*, na modalidade Acadêmico.

Área de concentração: Estruturas

**Porto Alegre
Fevereiro 2003**

SEIXAS, Michelle Pontes.

Análise de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Confinados, através do Método dos Elementos Finitos / Michelle Pontes Seixas. – Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2003.

127 p.

Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul; Mestre em Engenharia. Orientador: Américo Campos Filho.

1. Elementos finitos 2. Não-linearidade física e geométrica 3. Pilares de concreto armado 4. Confinamento 5. Compósitos de fibras I. Título

CCAA2

MICHELLE PONTES SEIXAS

**ANÁLISE DE PILARES ESBELTOS
DE CONCRETO ARMADO CONFINADOS,
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 24 de fevereiro de 2003

Prof. Américo Campos Filho

Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Orientador

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal

Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Ronald José Ellwanger (UFRGS)

Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

*Dedico este trabalho à minha mãe Rejane e avó Maria,
pelo apoio, incentivo e amor imensuráveis.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Américo Campos Filho, orientador deste trabalho, pela dedicação, apoio e, sobretudo, pelos conhecimentos transmitidos.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS pelos ensinamentos, e aos funcionários pelo auxílio e colaboração.

Aos colegas Andriei José Beber, Dirceo Santarosa e Mauren Aurich, pelo apoio e amizade dispensados durante a elaboração desta dissertação.

À Capes, pela concessão da bolsa de estudos, que possibilitou a minha total dedicação a este trabalho.

À minha mãe, Rejane, por sua dedicação, em todos os momentos da minha vida, sempre me apoiando, dando segurança e estímulo para vencer obstáculos e conquistar meus sonhos.

À minha tia Rosilene, família e amigos, pelo incentivo, apoio, e pela compreensão nos momentos ausentes.

A meu namorado, Fábio, pelo amor, paciência, incentivo, e principalmente pela compreensão da minha ausência durante o desenvolvimento desta dissertação.

E a Deus, por sempre guiar meu caminho e iluminar minha vida.

RESUMO

SEIXAS, M. P. **Análise de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Confinados, através do Método dos Elementos Finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEC, 2003. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

O confinamento é uma técnica que tem sido cada vez mais aplicada no reforço e reabilitação de peças comprimidas de concreto, com o objetivo de aumentar sua capacidade resistente e recuperá-las de eventuais deteriorações. Este trabalho apresenta um modelo não-linear físico e geométrico, baseado no Método dos Elementos Finitos, para a análise de pilares esbeltos de concreto armado, sob estado triplo de tensões.

Neste estudo, são utilizados elementos finitos isoparamétricos tridimensionais para o concreto e um modelo incorporado de armadura. O comportamento do concreto é descrito por um modelo elasto-viscoplástico, que permite a análise da estrutura sob cargas de curta e longa duração. Para representação do concreto ao longo do tempo, utiliza-se um modelo de camadas superpostas. A fissuração do concreto é representada através de um modelo de fissuras distribuídas, onde se considera a contribuição do concreto entre fissuras. É admitida aderência perfeita entre os materiais. O aço é modelado como um material elastoplástico perfeito ou com endurecimento linear, e os materiais utilizados para confinamento, como os compósitos de fibras de carbono, são modelados como um caso particular do modelo elastoplástico definido para o aço. O modelo não-linear geométrico foi desenvolvido com base na formulação Lagrangeana Total. Consideram-se grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Os resultados obtidos através do modelo computacional são confrontados com resultados experimentais disponíveis na literatura, de modo a validar o modelo matemático e a metodologia numérica. Boa correlação é obtida entre os resultados numéricos e experimentais, que confirmam estudos prévios realizados por diversos autores, na medida em que são verificados significativos ganhos de resistência e/ou ductilidade em pilares comprimidos de concreto, devido ao confinamento.

Palavras-chave: elementos finitos; não-linearidade física e geométrica; pilares de concreto armado; confinamento; compósitos de fibras.

ABSTRACT

SEIXAS, M. P. **Análise de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Confinados, através do Método dos Elementos Finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGE, 2003. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

Confinement is a technique that has been applied in the retrofitting and rehabilitation of compressed concrete members, with the objective to enhance its resistant capacity and to repair them from accidental deteriorations. This work presents a physical and geometric nonlinear model, based on the Finite Element Method, for the analysis of slender reinforced concrete columns, subjected to a three-dimensional state of stress.

In this study, three-dimensional isoparametric finite elements are used for concrete and an embedded model is used for the reinforcement. The concrete behavior is described through an elasto-viscoplastic model, which allows the analysis of the structure under short and long-term loading. In order to represent the concrete behavior with age, it was adopted an overlay model. A smeared crack model is used to represent concrete cracking, where it is considered the contribution of concrete between cracks (tension stiffening). Perfect bond between concrete and steel is assumed. Steel is modeled as a perfect elastoplastic material or with a linear hardening, and the confinement materials, such as carbon fibers composites, are modeled as a particular case of the elastoplastic model defined for steel. The geometric nonlinear model was developed based on the Total Lagrangean formulation. Large displacements and small strains are considered.

The results obtained through this computational model are compared with available experimental results in literature, to validate the mathematical model and the numerical methodology. Good correlation is obtained between numerical and experimental results, which confirms previous studies carried out by several authors, where it is verified significant enhancements in strength and/or ductility in the compressed concrete columns, due to confinement.

Key-words: finite elements; physical and geometric nonlinearities; reinforced concrete columns; confinement; fibers composites.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	p. x
LISTA DE SÍMBOLOS	p. xiii
1 INTRODUÇÃO	p.1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	p.6
2.1 CONFINAMENTO.....	p.6
2.2 HISTÓRICO.....	p.7
2.3 OS COMPÓSITOS DE FIBRAS.....	p.9
2.4 MODELOS PARA O CONCRETO CONFINADO.....	p.11
3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS	p.13
3.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	p.13
3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO.....	p.18
3.2.1 Funções de Forma e Expressões Básicas.....	p.18
3.2.2 Formulação do Modelo Não-linear Geométrico.....	p.20
3.2.2.1 Coordenadas no Instante t_n	p.20
3.2.2.2 Deformações e Matriz Deformação-Deslocamento Não-linear.....	p.21
3.2.2.3 Medidas de Tensão.....	p.26
3.2.2.4 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Equilibradas.....	p.27
3.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA.....	p.28
3.3.1 Funções de Forma.....	p.30
3.3.2 Formulação Geométrica.....	p.31
3.3.3 Procedimento para Determinação dos Segmentos de Armadura Contidos em Cada Elemento de Concreto.....	p.33
3.3.4 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Equilibradas.....	p.39
3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE FORÇAS EQUILIBRADAS PARA O ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO.....	p.42

4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS.....	p.43
4.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO.....	p.43
4.1.1 Modelo para o Concreto Comprimido.....	p.45
4.1.1.1 Critério de Ruptura.....	p.45
4.1.1.2 Critério de Plastificação.....	p.48
4.1.1.3 Regra de Endurecimento.....	p.49
4.1.2 Modelo para o Concreto Fissurado.....	p.50
4.1.2.1 Critério de Fissuração.....	p.52
4.1.2.2 Colaboração do Concreto entre Fissuras.....	p.53
4.1.2.3 Modelo para Transferência de Tensões de Corte.....	p.56
4.1.3 Modelo para o Concreto Submetido a Cargas de Longa Duração.....	p.58
4.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO.....	p.61
5 FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO.....	p.63
5.1 FORMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO.....	p.63
5.1.1 Deformações Viscoplasticas.....	p.63
5.1.2 Vetor de Fluxo Plástico.....	p.66
5.1.3 Tensões Elásticas.....	p.67
5.1.4 Modelo de Camadas Superpostas.....	p.68
5.2 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	p.69
5.2.1 Solução por Incremento de Deslocamentos.....	p.71
5.2.2 Critério de Convergência.....	p.71
5.3 REGRA DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	p.72
5.4 ESTRUTURA DO PROGRAMA.....	p.73
6 COMPROVAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO E APLICAÇÕES.....	p.75
6.1 ANÁLISE ELÁSTICA DE UMA VIGA-COLUNA COM GRANDES DESLOCAMENTOS.....	p.75
6.2 ANÁLISE DE UM PILAR ELASTOPLÁSTICO COM GRANDES DESLOCAMENTOS.....	p.77

6.3 ANÁLISE DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO.....	p.79
6.3.1 Pilar de Kordina.....	p.79
6.3.2 Pilares de Kim e Yang.....	p.83
6.3.2.1 Curvas Carga-Deslocamento na Seção Central.....	p.86
6.3.2.2 Deformações na Armadura Longitudinal.....	p.89
6.4 ANÁLISE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO CONFINADOS.....	p.93
6.4.1 Análise de Pilares de Concreto Armado Confinados por Estribos.....	p.93
6.4.2 Desempenho de Pilares de Concreto Armado Confinados por Compósitos de Fibras de Carbono.....	p.95
6.4.3 Avaliação da Resistência de Pilares Curtos de Concreto Confinados Externamente por Tecidos de Fibras de Carbono...	p.98
7 CONCLUSÕES.....	p.101
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	p.103

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1: Mecanismo do confinamento.....	p.7
FIGURA 3.1: Elemento isoparamétrico quadrático de 20 nós.....	p.18
FIGURA 3.2: Modelo discreto.....	p.28
FIGURA 3.3: Modelo distribuído.....	p.29
FIGURA 3.4: Modelo incorporado.....	p.29
FIGURA 3.5: Elemento isoparamétrico quadrático unidimensional de 3 nós.....	p.30
FIGURA 3.6: Coordenada ao longo do eixo da armadura.....	p.33
FIGURA 3.7: Curva de definição da barra de armadura.....	p.35
FIGURA 3.8: P_1 dentro do elemento de concreto.....	p.37
FIGURA 3.9: P_1 e P_{np} dentro do elemento de concreto.....	p.37
FIGURA 3.10: Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento.....	p.37
FIGURA 3.11: Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento.....	p.38
FIGURA 3.12: Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.....	p.38
FIGURA 4.1: Modelo elasto-viscoplástico unidimensional.....	p.43
FIGURA 4.2: (a) Meridianos e (b) seções transversais da superfície de ruptura de Ottoosen.....	p.47
FIGURA 4.3: Superfícies de plastificação e ruptura.....	p.49
FIGURA 4.4: Curva tensão-deformação uniaxial para o concreto comprimido.....	p.50
FIGURA 4.5: Modelos alternativos para modelar a fissuração – (a) fissuras discretas e (b) fissuras distribuídas.....	p.52
FIGURA 4.6: Curva tensão-deformação para o concreto tracionado.....	p.55
FIGURA 4.7: Evolução da deformação por fluência, para tensão constante aplicada em t'	p.58
FIGURA 4.8: Curva de deformação por retração.....	p.59
FIGURA 4.9: Modelo de cadeias Maxwell.....	p.60
FIGURA 4.10: Diagrama tensão-deformação para o aço tipo A.....	p.61

FIGURA 4.11: Diagrama tensão-deformação para o aço tipo B.....	p.62
FIGURA 5.1: Analogia da técnica de camadas em duas dimensões.....	p.68
FIGURA 5.2: Distribuição dos pontos de integração em um elemento finitos de 20 nós.....	p.72
FIGURA 5.3: Fluxograma do programa.....	p.74
FIGURA 6.1: Viga-coluna sob carga uniformemente distribuída.....	p.76
FIGURA 6.2: Variação da flecha W/L e de h/L com a carga P.....	p.76
FIGURA 6.3: Dimensões e malha de elementos finitos do pilar.....	p.77
FIGURA 6.4: Deflexão lateral da extremidade livre.....	p.78
FIGURA 6.5: Geometria e carregamento do pilar S-XII.....	p.79
FIGURA 6.6: Malha de elementos finitos empregada na análise.....	p.81
FIGURA 6.7: Flecha resultante na seção central do pilar.....	p.81
FIGURA 6.8: Deformações específicas no vértice 1.....	p.82
FIGURA 6.9: Deformações específicas no vértice 2.....	p.82
FIGURA 6.10: Deformações específicas no vértice 3.....	p.82
FIGURA 6.11: Deformações específicas no vértice 4.....	p.83
FIGURA 6.12: Geometria e carregamento dos pilares.....	p.84
FIGURA 6.13: Malhas de elementos finitos utilizadas nas análises.....	p.85
FIGURA 6.14: Deflexão lateral da seção central do pilar 60L2.....	p.86
FIGURA 6.15: Deflexão lateral da seção central do pilar 60M2.....	p.87
FIGURA 6.16: Deflexão lateral da seção central do pilar 60H2.....	p.87
FIGURA 6.17: Deflexão lateral da seção central do pilar 100L2.....	p.87
FIGURA 6.18: Deflexão lateral da seção central do pilar 100M2.....	p.88
FIGURA 6.19: Deflexão lateral da seção central do pilar 100H2.....	p.88
FIGURA 6.20: Deflexão lateral da seção central do pilar 100L4.....	p.88
FIGURA 6.21: Deflexão lateral da seção central do pilar 100M4.....	p.89
FIGURA 6.22: Deflexão lateral da seção central do pilar 100H4.....	p.89

FIGURA 6.23: Deformações da armadura no centro do pilar 60L2.....	p.90
FIGURA 6.24: Deformações da armadura no centro do pilar 60M2.....	p.90
FIGURA 6.25: Deformações da armadura no centro do pilar 60H2.....	p.90
FIGURA 6.26: Deformações da armadura no centro do pilar 100L2.....	p.91
FIGURA 6.27: Deformações da armadura no centro do pilar 100M2.....	p.91
FIGURA 6.28: Deformações da armadura no centro do pilar 100H2.....	p.91
FIGURA 6.29: Deformações da armadura no centro do pilar 100L4.....	p.92
FIGURA 6.30: Deformações da armadura no centro do pilar 100M4.....	p.92
FIGURA 6.31: Deformações da armadura no centro do pilar 100H4.....	p.92
FIGURA 6.32: Características geométricas das colunas.....	p.94
FIGURA 6.33: Malha de elementos finitos.....	p.94
FIGURA 6.34: Efeito do espaçamento de estribos na resposta axial dos pilares.....	p.95
FIGURA 6.35: Características geométricas e de carregamento dos pilares.....	p.96
FIGURA 6.36: Malha de elementos finitos e carregamento aplicado nas análises.....	p.97
FIGURA 6.37: Efeito do confinamento obtido por compósitos de fibras, nas curvas momento-deflexão na seção central dos pilares.....	p.98
FIGURA 6.38: Malha de elementos finitos.....	p.99

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

- A:** área
- A:** matriz que contém os gradientes dos deslocamentos em um ponto
- A_S:** área da seção transversal da armadura
- B:** matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto
- B_i:** matriz deformação-deslocamento completa associada ao nó *i*
- B_{Li}:** matriz deformação-deslocamento linear associada ao nó *i*
- B_{NLi}:** matriz deformação-deslocamento não-linear associada ao nó *i*
- B_S:** vetor linha que relaciona deformações da armadura e deslocamentos nodais do elemento de concreto
- B_{Si}:** vetor linha que relaciona deformações da armadura e deslocamentos do elemento de concreto associados ao nó *i*
- D:** matriz constitutiva (matriz de constantes elásticas)
- E:** módulo de elasticidade longitudinal
- E:** tensor de deformações de Green-Lagrange
- E_S:** módulo de elasticidade longitudinal da armadura
- E_i:** módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto
- F:** força; superfície de plastificação
- F₀:** valor que define a posição da superfície de plastificação
- G₀:** módulo de elasticidade transversal do concreto não-fissurado
- G_C:** módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado
- G_i:** matriz que contém as derivadas cartesianas das funções de forma, associada ao nó *i*
- H_j:** função de interpolação para o elemento de armadura, associada ao nó *j*
- H':** taxa de endurecimento
- I:** matriz identidade
- I₁:** 1º invariante do tensor de tensão

- J:** matriz Jacobiana
- J_D:** matriz de deformações Jacobiana (tensor gradiente de deformações)
- J₂:** 2º invariante do tensor desviador de tensão
- J₃:** 3º invariante do tensor desviador de tensão
- K:** matriz de rigidez do elemento de concreto armado
- K_c:** matriz de rigidez do elemento de concreto
- K_s:** contribuição da armadura para a matriz de rigidez do elemento de concreto
- L:** comprimento indeformado do vão do elemento estrutural
- N:** matriz que contém as funções de forma para o elemento
- N_i:** função de interpolação do elemento de concreto, associada ao nó *i*
- P:** carga concentrada; carga por unidade de comprimento
- P:** vetor de forças nodais do elemento ou de toda a estrutura; vetor de forças
- P_u:** carga de ruptura
- Q:** função de potencial plástico
- Q:** vetor de forças internas equilibradas para o elemento de concreto
- Q_c:** vetor de forças resistentes internas para o elemento de concreto
- Q_s:** contribuição da armadura para o vetor de forças internas equilibradas do elemento de concreto
- R:** matriz de rotação
- S₀:** superfície do corpo na configuração indeformada
- S:** superfície do corpo na configuração deformada
- T:** Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff, vetor de tensões de Piola-Kirchhoff II
- U:** vetor de deslocamentos nodais do elemento ou de toda a estrutura
- U_i:** vetor que contém os deslocamentos do nó *i* do elemento
- V₀:** volume do corpo na configuração indeformada
- V:** volume do corpo na configuração deformada
- W_s:** contribuição da armadura para o trabalho virtual interno

- X: eixo de coordenadas cartesianas
Y: eixo de coordenadas cartesianas
Z: eixo de coordenadas cartesianas

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

- a:** vetor de fluxo plástico
- b:** vetor de forças de volume
- c_1, c_2 : parâmetros do critério de ruptura de Ottosen
- e:** excentricidade da força normal
- e_i : espessura da camada de concreto
- f_{ck} : resistência característica à compressão do concreto
- f_{cm} : resistência média à compressão do concreto
- \mathbf{f}_{int} : vetor de forças internas da estrutura
- f_{tm} : resistência média à tração do concreto
- f_y : tensão de escoamento da armadura
- l:** número de nós da barra de armadura
- m:** número de nós do elemento de concreto
- n:** subíndice que relaciona vetores, matrizes ou variáveis ao instante de tempo t_n
- n:** vetor normal unitário na configuração deformada do corpo
- nb:** número de segmentos de armadura no interior de um elemento de concreto
- ng:** número de pontos de integração
- np:** número de pontos que definem a barra de armadura
- s:** coordenada ao longo do eixo da armadura; tensão desviadora
- t:** vetor de forças por unidade de superfície deformada (tensão); vetor de forças de superfície
- t_n : instante de tempo
- u:** deslocamento na direção do eixo X

- u:** vetor de deslocamentos
- v:** deslocamento na direção do eixo Y
- w:** deslocamento na direção do eixo Z
- w_i:** fator de peso associado ao ponto de integração i
- x:** coordenada cartesiana na posição indeformada
- x_n:** coordenada cartesiana na posição deformada
- y:** coordenada cartesiana na posição indeformada
- y_n:** coordenada cartesiana na posição deformada
- z:** coordenada cartesiana na posição indeformada
- z_n:** coordenada cartesiana na posição deformada

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

- Φ:** função de escoamento
- Δ:** incremento
- Σ:** somatório
- Π:** produtório

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

- α:** parâmetro do critério de ruptura de Ottosen; parâmetro; ângulo
- β:** parâmetro do critério de Ottosen; ângulo
- γ:** coeficiente de fluidez; deformação específica de distorção; ângulo
- δ:** variação
- ε:** deformação específica axial
- ε:** vetor de deformações
- ε_{ctu}:** deformação última para o concreto tracionado
- ε_e:** vetor que contém componentes de deformação elástica

$\boldsymbol{\varepsilon}_L$:	parcela linear do vetor de deformações de Green-Lagrange
$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$:	parcela não-linear do vetor de deformações de Green-Lagrange
ε_p :	deformação plástica
ε_s :	deformação axial ao longo do eixo da armadura
$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}$:	vetor que contém componentes de deformação viscoplástica
η :	coeficiente de viscosidade; coordenada normalizada
θ :	ângulo de similaridade; ângulo
$\boldsymbol{\theta}$:	vetor que contém os gradientes dos deslocamentos em um ponto
κ :	parâmetro de endurecimento
λ :	parâmetro; índice de esbeltez
ν :	coeficiente de Poisson
ξ :	coordenada normalizada
ζ :	coordenada normalizada
ρ :	taxa geométrica de armadura longitudinal
σ :	tensão axial
$\boldsymbol{\sigma}$:	tensor de tensões de Cauchy; vetor de tensões de Cauchy
σ_1 :	tensão principal de tração
σ_e :	tensão uniaxial de plastificação inicial
σ_{ef} :	tensão efetiva no concreto
σ_s :	tensão normal na armadura
σ_y :	tensão de plastificação
τ :	tensão de corte
ϕ :	diâmetro das barras de armadura
χ :	coordenada normalizada do eixo da armadura
$\boldsymbol{\psi}$:	vetor de forças desequilibradas (forças residuais)

SÍMBOLOS ESPECIAIS

$\{ \}$: vetor coluna

$\langle \rangle$: vetor linha

$[]$: tensor (matriz)

$[]^T$: matriz transposta

$[]^{-1}$: matriz inversa

1 INTRODUÇÃO

O concreto é o material estrutural dominante nos dias atuais por suas vantagens, que incluem a facilidade de moldagem, resistência ao fogo, resistência às influências atmosféricas e ao desgaste mecânico, entre outras, aliadas a seu baixo custo. Devido a sua importância na engenharia estrutural, o concreto é um objeto permanente de estudo.

O comportamento estrutural do concreto armado é bastante complexo, devido principalmente à resistência à tração do concreto ser muito inferior que sua resistência à compressão, à aderência imperfeita entre o aço e o concreto adjacente, à não-linearidade da relação tensão-deformação já para níveis de tensão relativamente baixos, à fissuração do concreto e à transmissão de esforços entre as fissuras, e aos fenômenos da fluência e da retração do concreto, que dependem, entre outros fatores, da umidade ambiente e das dimensões do elemento estrutural. Estes fatores dificultam a análise e a compreensão do comportamento das estruturas de concreto e são alvos de inúmeras pesquisas desde o início do século passado.

Com o desenvolvimento e avanço dos computadores digitais, com grande capacidade de processamento, diversos métodos numéricos e ferramentas de análise foram desenvolvidos para o estudo do comportamento das estruturas de concreto, possibilitando um exame mais detalhado destas estruturas, onde a análise experimental conduz muitas vezes a resultados limitados e de difícil interpretação.

O Método dos Elementos Finitos, primeiramente aplicado a estruturas de concreto armado por Ngo e Scordelis (1967), é o processo numérico mais utilizado na análise deste tipo de estrutura, devido à analogia física direta que se estabelece entre o sistema físico real (a estrutura em análise) e o modelo (malha de elementos finitos), aliada ao alto grau de desenvolvimento alcançado pelo método na simulação do funcionamento destas estruturas.

As primeiras formulações do método dos elementos finitos para concreto armado combinaram modelos constitutivos e elementos finitos para a representação da flexão no próprio plano (vigas, vigas paredes e pórticos). As formulações seguintes abrangeram flexão fora do plano do elemento, como é o caso de placas e cascas e, posteriormente, estruturas

tridimensionais. Grande parte destes modelos foi idealizada para carregamentos monotônicos, mas com o passar dos anos, os modelos passaram a ser formulados também para carregamentos cíclicos. Dessa forma, existem atualmente diversos modelos para o concreto armado, cada qual adaptando-se na análise de determinado tipo de estrutura, de acordo com a facilidade de aplicação e com a precisão dos resultados desejados.

No Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, muitos trabalhos foram realizados, utilizando o Método dos Elementos Finitos, com o objetivo de analisar o comportamento de estruturas de concreto armado e protendido. Dentre os quais, pode-se citar os trabalhos de Sensale (1991), que estudou o comportamento, ao longo do tempo, de estruturas de concreto armado submetidas a estados planos de tensão, Prates Júnior (1992), que estendeu o estudo de Sensale (1991) para peças de concreto protendido, Claire (1994), que utilizou elementos tridimensionais na simulação do comportamento de vigas de concreto armado e Aurich (2001), que modelou situações de aderência imperfeita entre os materiais, com base no trabalho de Claire (1994). Nos modelos desenvolvidos nestes trabalhos, foram consideradas não-linearidades apenas de origem material.

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um modelo tridimensional de elementos finitos para a análise de pilares esbeltos, sob estado triplo de tensões.

O modelo foi implementado computacionalmente com base no programa para análise dinâmica, não-linear e transiente apresentado por Hinton (1988) e modificado por Claire (1994) para a inclusão do modelo incorporado de armadura, aperfeiçoamento dos modelos constitutivos dos materiais e implementação de um modelo viscoelástico, com envelhecimento do concreto.

A não-linearidade geométrica é considerada no modelo de elementos finitos, de modo a levar em consideração nas análises os efeitos de segunda ordem, presentes quando grandes deslocamentos ocorrem na estrutura. O modelo não-linear geométrico foi implementado com base na formulação Lagrangeana Total, que utiliza como sistema de referência a geometria indeformada da estrutura.

O confinamento tem sido cada vez mais aplicado no reforço e reabilitação de pilares de concreto, com o objetivo de aumentar sua capacidade resistente ou recuperá-los de eventuais deteriorações, causadas pela má qualidade do material e/ou por condições

ambientais severas, pela sobrecarga não prevista em projeto, por terremotos, incêndios e até por poluição ambiental (Toutanji, 1999).

Diversas pesquisas têm demonstrado que o confinamento lateral em colunas aumenta a resistência à compressão, ductilidade e capacidade de deformação do concreto (Toutanji, 1999). Estruturas confinadas ficam submetidas a estados triaxiais de tensões, e podem ter seu comportamento determinado através do uso de relações tensões-deformações apropriadas para o concreto.

Desde o pioneiro trabalho de CONSIDIRÈ (1903), que introduziu a armadura na forma de espirais em colunas de concreto, vários pesquisadores vêm tentando desenvolver um modelo generalizado para quantificar os efeitos do confinamento na resistência e ductilidade de pilares de concreto. A maioria dos estudos experimentais e teóricos realizados nesta área se concentram no confinamento devido a armaduras internas. Com o destaque das chapas de aço no reforço externo de elementos estruturais de concreto, estes estudos passaram a abranger o confinamento obtido por tubos de aço externos, cuja técnica se difundiu bastante, principalmente em regiões sísmicas.

Apesar dos tubos de aço serem considerados bastante eficientes no confinamento das estruturas de concreto, as dificuldades encontradas na aplicação desta técnica, devido ao elevado peso próprio destes materiais, e os altos custos de manutenção contra a corrosão, levaram os pesquisadores recentemente a voltar suas atenções para a utilização de materiais não metálicos com o propósito de superar estas deficiências e inconvenientes.

Nos últimos anos, uma atenção cada vez maior está sendo dada ao uso de polímeros reforçados com fibras (FRP – “Fiber Reinforced Polymers”) na reabilitação estrutural, por causa da sua alta resistência, baixo peso próprio, grande durabilidade e facilidade de assumir formas complexas. Geralmente estes compósitos podem ser aplicados enquanto a estrutura está em uso, levando a mudanças insignificantes nas dimensões do elemento estrutural. Outras vantagens destes compósitos incluem a resistência à corrosão eletroquímica, expansão térmica controlada e neutralidade eletromagnética (Chaallal e Shahawy, 2000). Os FRP podem atuar no confinamento do concreto e como reforço à flexão e ao corte, e podem ser usados para complementar ou substituir barras de aço das estruturas de concreto armado.

O confinamento de peças comprimidas de concreto armado com tubos, lâminas ou mantas de compósitos de fibras é uma alternativa promissora ao uso de barras e tubos de aço, e pesquisas nesta área são ainda muito recentes e estão concentradas geralmente em análises experimentais de colunas curtas submetidas principalmente a carregamentos axiais. A utilização dos compósitos de fibras no confinamento de peças comprimidas de concreto tem levado experimentalmente a resultados bastante satisfatórios (Mirmiran e Shahawy, 1997; Samaan et al, 1998; Chaallal e Shahawy, 2000, Carneiro et al, 2000).

O modelo desenvolvido neste trabalho permite análises do comportamento de pilares de concreto armado, sob situações gerais de confinamento, possibilitando estudos para um aproveitamento otimizado dos materiais.

Este trabalho está dividido em sete capítulos, dos quais esta introdução é o primeiro.

No Capítulo 2, são apresentados alguns conceitos sobre confinamento e uma breve descrição do que tem sido feito nesta área nos últimos anos. Discorre-se também sobre os compósitos de fibras, por serem materiais cada vez mais utilizados para confinamento de elementos comprimidos de concreto. Estes materiais foram usados no confinamento de pilares em dois exemplos apresentados neste trabalho.

No Capítulo 3, são descritos os modelos de elementos finitos utilizados para o concreto e para a armadura, incluindo a formulação para a consideração da não-linearidade geométrica nestes modelos. O concreto é modelado através de elementos isoparamétricos tridimensionais, de vinte nós, e a armadura através de um modelo incorporado, que permite completa liberdade da localização e distribuição das barras de aço.

Os modelos constitutivos adotados para o concreto e o aço são descritos no Capítulo 4. O modelo constitutivo para o concreto comprimido baseia-se no critério de ruptura de Ottosen (1977). A fissuração do concreto é considerada através de um modelo de fissuras distribuídas, que leva em consideração a contribuição do concreto entre fissuras na resistência à tração. É considerada aderência perfeita entre o concreto e o aço, sendo a degradação da aderência considerada indiretamente, através da introdução de um ramo descendente suave na curva tensão-deformação do concreto tracionado. O aço é modelado como um material elastoplástico perfeito ou com endurecimento linear. Apresentam-se, também, neste capítulo, os modelos para os materiais submetidos a cargas de longa duração.

No Capítulo 5, são apresentados os procedimentos de solução das equações de equilíbrio do modelo não-linear implementado neste trabalho, para a análise de um material elasto-viscoplástico, e explica-se o modelo de camadas adotado para o estudo das estruturas de concreto ao longo do tempo.

No Capítulo 6, o programa computacional desenvolvido é aplicado na análise de pilares de concreto armado, e seus resultados são comparados com resultados experimentais encontrados na literatura, de modo a validar o modelo numérico implementado. São também apresentados exemplos de utilização do modelo a pilares esbeltos constituídos de materiais elásticos e elastoplásticos, para comprovar a formulação não-linear geométrica implementada. Três exemplos de pilares confinados são apresentados, de modo a mostrar a capacidade do modelo na simulação do comportamento de estruturas de concreto submetidas a estados triplos de tensões.

Por fim, no Capítulo 7, apresentam-se as conclusões obtidas neste estudo e sugestões para a sua continuidade e complementação.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e uma breve revisão bibliográfica referentes ao tema abordado nesta dissertação, de modo a situá-la no contexto geral do que tem sido realizado nesta área.

2.1 CONFINAMENTO

Quando um elemento de concreto é comprimido axialmente, são induzidas, por efeito Poisson, deformações transversais que resultam na expansão lateral do concreto.

Sob baixos níveis de carregamento, as deformações transversais são proporcionais às deformações longitudinais, relacionando-se entre si através do coeficiente de Poisson.

Para valores críticos de tensão, normalmente situados entre 75% e 80% da resistência à compressão do concreto, a formação de microfissuras entre os agregados graúdos, na massa do concreto, conduz a grandes incrementos de deformações transversais, para acréscimos relativamente pequenos de deformações longitudinais. A propagação e o agrupamento destas microfissuras conduzem à falha do elemento estrutural, geralmente caracterizada pela presença de trincas paralelas à direção do carregamento (Santarosa et al, 2001).

O confinamento de peças comprimidas de concreto permite diminuir o desenvolvimento da fissuração ao longo do concreto, retardando a ruptura do elemento estrutural, através do controle de sua expansão lateral.

Quando o concreto confinado é comprimido axialmente, o mesmo é parcial ou totalmente impedido de se expandir na direção lateral, resultando em uma pressão radial na interface entre o concreto e o material confinante, conforme ilustrado na Figura 2.1. Esta pressão de confinamento induz um estado triaxial de tensões de compressão no concreto, o que proporciona um comportamento superior, tanto em resistência quanto em ductilidade, em relação ao concreto não confinado, submetido apenas à compressão uniaxial.

O confinamento do concreto é geralmente obtido pelo envolvimento do elemento comprimido por materiais com boas características de resistência à tração, disposto de maneira a resistir ao aumento das deformações transversais.

O grau de confinamento de um elemento estrutural, do qual sua resistência e ductilidade são extremamente dependentes, é fortemente influenciado pela forma de sua seção transversal e pelo material utilizado para o seu confinamento. As seções circulares são geralmente as mais eficientemente confinadas, por permitirem uma pressão de confinamento uniforme em toda a seção, enquanto que nas peças de seção prismática ocorre concentração de tensões em seus vértices. A continuidade do material confinante ao longo da peça comprimida também influencia na uniformidade da pressão de confinamento, e suas propriedades mecânicas definem, sobretudo, a variação da pressão de confinamento com o aumento da carga axial.

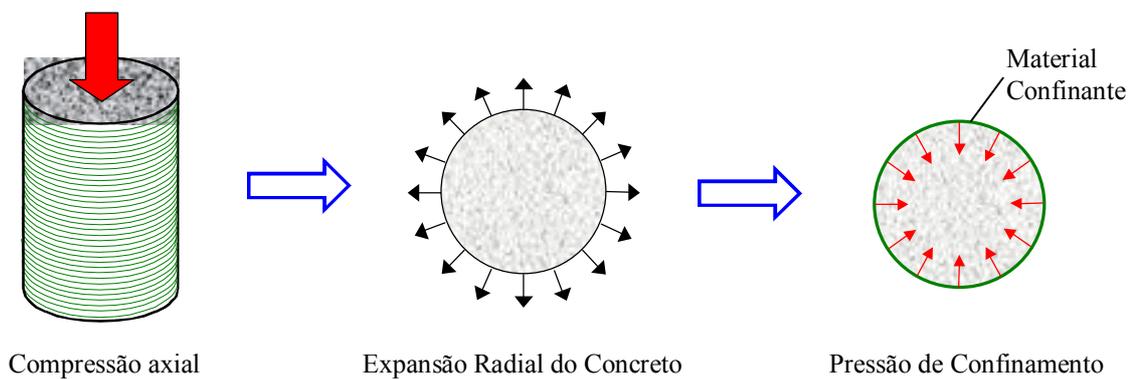


FIGURA 2.1: Mecanismo do confinamento.

2.2 HISTÓRICO

Os primeiros estudos dos efeitos do confinamento no comportamento do concreto foram realizados em concretos confinados de forma ativa por pressões hidrostáticas laterais. Em 1929, Richart et al verificou que a resistência do concreto confinado por pressão hidrostática podia ser obtida por confinamento passivo, resultante da colocação de espirais de aço pouco espaçadas.

A partir de então, um grande número de ensaios foi realizado por diferentes pesquisadores, onde se estudou a quantidade e distribuição das barras de aço que poderiam

proporcionar um maior confinamento do concreto. Comprovou-se principalmente que a colocação de estribos pouco espaçados e uma boa distribuição das barras longitudinais ao longo do perímetro da seção são essenciais para se obter um confinamento efetivo do concreto.

Nas últimas décadas, os métodos de confinamento obtidos através da distribuição conveniente de barras de aço transversais e longitudinais foram sendo substituídos pela utilização de tubos de aço preenchidos com concreto, chapas de aço, e mais recentemente pela utilização de polímeros reforçados com fibras (FRP).

A utilização de tubos de aço no confinamento do concreto, principalmente em regiões sísmicas, estendeu-se rapidamente devido aos benefícios obtidos, que incluem, além de um aumento na resistência e ductilidade do concreto, uma resistência adicional ao corte. No entanto, os tubos de aço apresentam algumas desvantagens, por estarem sujeitos a uma flambagem prematura e por terem seu coeficiente de Poisson maior do que o do concreto no início do carregamento, o que conduz a expansões diferentes dos materiais, fazendo com que haja separação entre os mesmos e retardação do mecanismo de confinamento. Os tubos de aço também estão relacionados a um alto custo de manutenção e prevenção contra a corrosão (Mirmiran e Shahawy, 1997).

O uso de materiais compósitos no confinamento de estruturas de concreto reúne os mesmos benefícios dos tubos de aço, evitando os problemas acima descritos. Estes materiais, na forma de chapas ou mantas flexíveis, podem ser usados para confinamento de colunas já existentes de concreto armado ou na forma de tubos pré-moldados, dentro do qual o concreto é moldado, em construções novas.

Dentre todos os materiais compósitos avançados, os compósitos de fibras de carbono destacaram-se no reforço e reabilitação das estruturas de concreto em geral, devido, principalmente, à alta resistência que estas fibras apresentam. A utilização destes materiais no reforço de elementos fletidos de concreto armado, particularmente vigas e lajes, já foi bastante estudada por diferentes autores (Beber, 1999; Silva, 1999). Estudos sobre confinamento de elementos comprimidos de concreto por compósitos de fibras são mais recentes, e a maioria se concentra ainda no confinamento de colunas curtas de seção circular de concreto, embora mantas de fibras de carbono já tenham sido usadas com sucesso no reforço de pilares de concreto (Saadatmanesh et al, 1994).

2.3 OS COMPÓSITOS DE FIBRAS

Os polímeros reforçados com fibras são materiais compósitos formados pela combinação de fibras de alta resistência com uma matriz de resina polimérica.

O comportamento e as propriedades dos materiais compósitos dependem da natureza, forma, arranjo estrutural e da interação entre seus componentes. Como as fibras podem ser orientadas em qualquer direção, as propriedades estruturais e o módulo de elasticidade destes compósitos dependem do paralelismo entre os eixos das fibras e de sua distribuição e quantidade.

Os FRP começaram a ser produzidos industrialmente a partir de 1982 e aplicaram-se rapidamente a uma diversificada gama de indústrias, que vão desde as aeroespaciais, naval e automotiva até às de equipamentos esportivos, por causa da sua alta resistência, baixo peso próprio, grande durabilidade e facilidade de assumir formas complexas (Norris et al, 1997).

Por longo tempo o alto custo inicial destes materiais e a falta de suficientes pesquisas e informações técnicas adequadas limitaram ou inibiram a utilização dos FRP na indústria da construção civil. Na última década, com a redução dos custos das matérias primas e de manufatura, os FRP tornaram-se competitivos para a recuperação e o reforço das estruturas de concreto armado e/ou protendido, em relação aos materiais tradicionais utilizados para este fim. Isto permitiu o desenvolvimento de uma grande variedade de pesquisas nesta área, que visam o estabelecimento de uma avaliação teórica em bases confiáveis e seguras para o projeto e o detalhamento dos reforços das estruturas de concreto armado com estes materiais.

Uma variedade de fibras está disponível para materiais compósitos, sendo as fibras de vidro, carbono e aramida as mais utilizadas em conjunto com polímeros como poliéster, éster-vinílico e epóxi.

O vidro foi por muito tempo a fibra predominante em muitas aplicações na engenharia civil principalmente devido ao balanço econômico entre seu custo e suas características de resistência específicas. As fibras de vidro são comercialmente disponíveis em duas formas: E-Glass e S-2. As fibras do tipo E-Glass são de baixo custo e apresentam baixo módulo e alta resistência à umidade e à fadiga, e são geralmente usadas quando se deseja obter uma alta resistência elétrica. As fibras do tipo S-2 são usadas para obter alta resistência, módulo e estabilidade sob temperaturas extremas e ambientes corrosivos (Herakovich, 1998). As fibras

de aramida são fibras orgânicas que possuem uma alta resistência química (Mirmiran, 1997) e são empregadas em blindagens balísticas e utilizações que exigem aumento de flexibilidade (Machado, 2002).

As fibras de carbono são materiais baseados nas forças das ligações carbono-carbono, no grafite e na leveza do átomo de carbono, sendo caracterizadas por uma combinação de baixo peso, alta resistência e grande rigidez. Estas fibras são fabricadas através da pirólise de fibras orgânicas em uma atmosfera inerte e podem ser obtidas em uma grande variedade de módulos de elasticidade, de acordo com a temperatura de pirólise, que pode variar entre 1000°C e 3000°C (Schwartz, 1984).

As matrizes nas quais as fibras são imersas tem a função de uni-las e protegê-las durante o manuseio, fabricação e vida útil do compósito. As matrizes atuam no compósito transferindo as tensões para as fibras por aderência, e devem ser térmica e quimicamente compatíveis com as fibras (Kwon, 2000). Tipicamente polímeros, metais e cerâmicas podem ser usados como matriz. No entanto, os polímeros são os mais utilizados, pois os metais são pesados e estão submetidos à corrosão, e as matrizes de cerâmica são quebradiças. Os polímeros mais comuns são os poliésteres e o epóxi, sendo que estes últimos apresentam uma maior resistência à umidade e pequena retração durante a cura.

Segundo Beber (1999), os compósitos de fibras de carbono apresentam um desempenho superior a outras técnicas de reforço estrutural, tais como a chapa de aço colada e a argamassa de alto desempenho. A principal característica deste material é a elevada resistência à tração, na direção de orientação das fibras, que apresentam comportamento elástico linear até atingir a ruptura (Karbhari, 1998).

Mirmiran e Shahawy (1997) mostraram que os compósitos de fibras, quando aplicados no confinamento de colunas comprimidas de concreto, provocam uma pressão de confinamento que aumenta linearmente até a sua ruptura, enquanto que o confinamento por meio de barras ou tubos de aço, é caracterizado por uma pressão de confinamento constante, após o escoamento do aço. Estas diferenças de comportamento influenciam a deformação volumétrica e a taxa de dilatação do concreto, sendo observado que os concretos confinados por FRP apresentam uma maior deformação de ruptura.

2.4 MODELOS PARA O CONCRETO CONFINADO

Os primeiros modelos para o concreto confinado empregavam relações simples para determinação das tensões e correspondentes deformações do concreto sob confinamento ativo produzido por fluidos. Com a utilização de confinamento passivo obtido através de armadura, muitos modelos analíticos foram desenvolvidos com base em resultados experimentais específicos, estando geralmente limitados a determinadas seções transversais e distribuições de barras de aço, assim como a concretos submetidos a baixas taxas de deformação e cargas estáticas.

Em 1988 Mander et al propuseram uma relação tensão-deformação unificada para prever o comportamento de pilares de concreto de seção circular ou retangular confinadas através de diferentes distribuições de barras de aço e submetidas à compressão axial. O modelo de Mander et al (1988) é baseado em uma equação desenvolvida por Popovics (1973), que originalmente representava a resposta tensão-deformação do concreto não-confinado. De acordo com este modelo, a resistência e correspondente deformação do concreto confinado são obtidas a partir da resistência do concreto não-confinado e da pressão de confinamento através de uma relação simples. No entanto, este modelo só pode ser aplicado para pressões de confinamento constantes.

Posteriormente, muitos modelos foram desenvolvidos com base no modelo de Mander et al (1988), tendo-se obtido aproximações satisfatórias com resultados experimentais. No entanto, as relações propostas por tais modelos são de natureza empírica ou semiempírica, formuladas através de tratamentos estatísticos de resultados experimentais, e por isso não são facilmente estendidas a situações que são significativamente diferentes das situações que geraram os dados de origem destes modelos.

Devido a grande limitação destes modelos, muitos pesquisadores tentaram obter modelos para o concreto confinado com base em formulações teóricas, destacando-se os modelos de Ahmad e Shah (1982), que usa um critério de resistência baseado na teoria de falha octaédrica, nos três invariantes de tensão e em resultados experimentais; e o de Karabinis e Kiousis (1994), onde os efeitos do confinamento, obtidos através da utilização de estribos ou espirais de aço, em colunas circulares de concreto, são determinados com base na teoria da plasticidade e em relações simples de compatibilidade de deformações entre o concreto e a armadura que o confina.

Como o uso dos compósitos de fibras no confinamento do concreto é relativamente novo, os trabalhos teóricos nesta área são limitados aos modelos originalmente desenvolvidos para confinamento através de armadura transversal. O modelo de Mander et al (1988), apesar de ser desenvolvido para colunas confinadas por armadura transversal convencional, foi aplicado a colunas revestidas com tubos de aço (Chai, 1991) e com compósitos de fibras (Saadatmanesh et al, 1994).

No entanto, Mirmiran e Shahawy (1997) mostraram que enquanto os modelos de Mander et al (1988), Ahmad e Shah (1982) e Karabinis e Kiousis (1994) apresentaram boas previsões da curva tensão-deformação do concreto confinado por tubos de aço, estes modelos apresentaram fracas previsões do concreto confinado por fios de fibra de vidro e por tubos de FRP, devido aos diferentes mecanismos de confinamento que estes materiais desenvolvem.

Samaan et al (1998) concluiu que os modelos para concreto confinado por FRP devem levar em consideração a rigidez do tubo e propôs um modelo analítico simples, baseado numa correlação entre a taxa de dilatação do concreto e a rigidez circunferencial do material confinante, para prever a resposta tensão-deformação completa dos concretos confinados por compósitos de fibras. Seu modelo mostrou uma boa correlação com resultados experimentais obtidos por diferentes autores, apresentando uma margem de erro de 10%.

Em 2001, Fam e Rizkalla introduziram um novo modelo analítico para prever o comportamento de colunas curtas circulares de concreto carregadas axialmente e confinadas por tubos de polímeros reforçados com fibras. Este modelo corresponde a uma extensão do modelo de Mander et al (1988) para concreto sob pressão de confinamento constante, a partir do qual é utilizada uma técnica de deformação passo a passo para considerar o aumento linear da pressão de confinamento exercida pelos compósitos de fibras. O modelo baseia-se nas equações de equilíbrio, condições de compatibilidade e num critério de resistência biaxial dos tubos de FRP, e foi aplicado com sucesso a resultados experimentais que incluem confinamento com tubos e mantas de fibras de vidro e de carbono.

No entanto, modelos mais gerais podem ser obtidos pela utilização do Método dos Elementos Finitos, onde o concreto e o material confinante podem ser modelados separadamente, de acordo com suas características próprias, o que foi feito neste trabalho.

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo, são descritos a formulação do modelo de elementos finitos não-linear geométrico e os modelos de elementos finitos utilizados para o concreto e para a armadura.

3.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que, dado um sólido em equilíbrio, submetido à forças de volume e de superfície, e cujo estado de deformação sofre uma variação arbitrária $\delta \mathbf{u}$ que respeita as condições de contorno de deslocamentos, o trabalho realizado pelas tensões ou sollicitações internas é igual ao trabalho realizado pelas forças aplicadas, de forma que:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} \cdot dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dS \quad (3.1)$$

onde \mathbf{b} e \mathbf{t} são os vetores de forças de volume e superfície, respectivamente, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações virtuais associado ao vetor de deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor que contém as componentes de tensão, e V e S são o volume e a superfície do sólido em consideração.

O Método dos Elementos Finitos, que divide uma estrutura contínua em uma série de elementos conectados por um número finito de pontos (nós), permite obter equações de equilíbrio discretas a partir da equação (3.1).

De acordo com este método, os deslocamentos ao longo de um elemento finito são obtidos a partir dos deslocamentos de seus nós, através do uso de funções de interpolação apropriadas, por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{N} = [N_1\mathbf{I} \ N_2\mathbf{I} \ \dots \ N_m\mathbf{I}]$ é a matriz que contém as funções de forma para o elemento, sendo N_i a função de forma associada ao nó i , \mathbf{I} é uma matriz identidade $m \times m$, sendo m o número de nós do elemento; e \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Os correspondentes deslocamentos e deformações virtuais podem ser expressos por:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{U} \quad (3.3)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{U} \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \dots \ \mathbf{B}_m]$ é a matriz de deformação-deslocamento total do elemento, sendo \mathbf{B}_i a matriz associada ao nó i . A substituição das expressões (3.3) e (3.4) na (3.1), sabendo que esta última equação deve ser satisfeita para deslocamentos virtuais quaisquer, resulta em:

$$\int_V \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV = \int_V \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} \cdot dV + \int_S \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dS \quad (3.5)$$

As tensões elásticas estão relacionadas às deformações através da matriz constitutiva \mathbf{D} , por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}) \quad (3.6)$$

Substituindo a equação (3.6) na (3.5), obtém-se, para cada elemento, a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (3.7)$$

sendo

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot dV \quad (3.8)$$

a matriz de rigidez do elemento e

$$\mathbf{P} = \int_V \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} \cdot dV + \int_S \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dS \quad (3.9)$$

o vetor de forças nodais equivalentes do elemento.

Quando a geometria do corpo analisado sofre poucas alterações durante o processo de carregamento, as deformações e os deslocamentos podem ser considerados pequenos. Neste caso, as integrais para a avaliação da matriz de rigidez \mathbf{K} e do vetor de cargas \mathbf{P} são desenvolvidas sobre o volume original dos elementos e a matriz de gradientes \mathbf{B} de cada elemento é constante e independente dos deslocamentos. Assim, se há linearidade também material, a equação (3.7) expressa uma relação linear entre os deslocamentos e as cargas aplicadas, e a simples resolução desta equação fornece a resposta estática linear para um determinado carregamento.

No entanto, tais aproximações não podem mais ser consideradas quando grandes deslocamentos, rotações e/ou deformações ocorrem na estrutura, por causa da modificação da geometria de referência da análise ao longo do processo de deformação do corpo. Mesmo quando as deformações permanecem pequenas, a configuração deformada do corpo pode diferir bastante de sua geometria inicial indeformada. Nestes casos, as equações de equilíbrio devem ser formuladas sobre a geometria deformada do corpo, e devem ser satisfeitas para todo intervalo de tempo¹, através de procedimentos incrementais, do tipo passo a passo. Desse modo, marchando-se através de pequenos incrementos de tempo, determinam-se configurações deformadas sucessivas até que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas.

O fato da configuração do corpo mudar continuamente ao longo da análise impõe a utilização de medidas de tensão e deformação apropriadas, pois sendo a configuração do corpo, num determinado instante, desconhecida, as tensões e deformações devem ser referenciadas a uma configuração de equilíbrio conhecida, para que se possa estabelecer o equilíbrio neste instante.

Problemas de não-linearidade geométrica na mecânica dos sólidos são geralmente abordados através da formulação Lagrangeana, que permite com que as tensões e deformações, num determinado instante, sejam referidas a qualquer configuração de equilíbrio previamente calculada. Apesar de qualquer configuração de equilíbrio anteriormente calculada poder ser usada como referência, uma das seguintes formulações é geralmente empregada (Bathe, 1996):

¹ Neste capítulo, o tempo é usado para definir diferentes intensidades de aplicação da carga e, conseqüentemente, diferentes configurações do corpo.

- a) Formulação Lagrangeana Total, em que o sistema de referência da análise é fixado na configuração indeformada do corpo, de modo que todas as variáveis referem-se a esta configuração;
- b) Formulação Lagrangeana Atualizada, em que todas as variáveis do problema são referidas à última configuração calculada.

Dependendo do tipo de problema, uma das formulações acima discriminadas pode se tornar mais vantajosa, em relação à outra, quanto à eficiência numérica. Bathe e Ozdemir (1976) e Crisfield (1991) compararam estas duas formulações quando aplicadas a problemas variados. A formulação Lagrangeana Atualizada permite calcular a matriz de rigidez mais rápido computacionalmente, mas todas as derivadas do problema, como por exemplo as derivadas das funções de interpolação, precisam ser calculadas a cada incremento de tempo, em relação às coordenadas calculadas no último instante, enquanto que na formulação Lagrangeana Total, as derivadas com respeito às coordenadas iniciais só precisam ser calculadas uma vez, no primeiro passo de tempo, e armazenada na memória para uso nos passos de tempo subsequentes (Bathe, 1996). Uma outra desvantagem da formulação atualizada é que a precisão da solução num procedimento incremental/iterativo é afetada pela precisão das soluções obtidas nos passos anteriores, de modo que os erros obtidos na determinação da configuração atualizada podem se acumular, à medida que o número de passos aumenta (Pai et al, 2000).

Neste trabalho, o modelo de elementos finitos não-linear geométrico foi desenvolvido de acordo com a formulação Lagrangeana Total, de modo a permitir a análise de estruturas com grandes deslocamentos, como é o caso dos pilares esbeltos. A formulação Lagrangeana Total é recomendada por Bathe (1996) quando são considerados grandes deslocamentos e pequenas deformações.

De acordo com a formulação Lagrangeana Total, a equação de equilíbrio (3.7) é estabelecida de maneira análoga ao caso linear geométrico, a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais, considerando-se o sistema de referência fixado na configuração original indeformada e as medidas de deformação e tensão, em relação a esta configuração, definidas pelo tensor de deformação de Green-Lagrange e pelo Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff, respectivamente, os quais serão definidos mais adiante.

A dedução do Princípio dos Trabalhos Virtuais e da equação de equilíbrio, para a formulação Lagrangeana Total, é detalhada por Real (2000). A expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais, para o caso de grandes deslocamentos, pode ser expressa por:

$$\int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{T} \cdot dV = \int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} \cdot dV + \int_{S_0} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dS \quad (3.10)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações de Green-Lagrange, \mathbf{T} é o vetor de tensão de Piola-Kirchhoff II, e V_0 e S_0 são o volume e a superfície de referência, correspondentes à configuração indeformada, respectivamente.

A equação de equilíbrio correspondente, apropriada ao Método dos Elementos Finitos, é dada para cada elemento, num determinado instante, por:

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{T} \cdot dV = \int_{V_0} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} \cdot dV + \int_{S_0} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dS \quad (3.11)$$

De posse da equação constitutiva (3.6), chega-se, a partir da equação (3.11), e para cada instante de tempo, à equação de equilíbrio dada na (3.7), sendo que a matriz de rigidez \mathbf{K} e o vetor de cargas \mathbf{P} são obtidos pela integração indicada nas equações (3.8) e (3.9), sobre a configuração de referência.

Somando-se, para cada grau de liberdade de cada nó de elemento em que foi discretizada a estrutura, as contribuições dos elementos que para ele concorrem, chega-se a equação de equilíbrio global da estrutura, que pode ser expressa, num instante de tempo t_n , por:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{U}_n) = \mathbf{P}_n - \mathbf{f}_{\text{int } n} = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

onde \mathbf{P}_n é o vetor que contém as forças externas aplicadas no instante t_n sobre a estrutura (correspondente ao lado direito da equação (3.11)), e $\mathbf{f}_{\text{int } n}$ é o vetor de forças internas da estrutura atuantes em t_n (correspondente à integral do lado esquerdo da equação (3.11)), que é uma função dos deslocamentos nodais.

Desse modo, a solução do problema não-linear, através do Método dos Elementos Finitos, com solução em deslocamentos, é o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U}_n , que torna o

vetor de forças desequilibradas $\Psi(\mathbf{U}_n)$ nulo. O procedimento utilizado para solução deste sistema de equações não-lineares é descrito no Capítulo 5.

3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

Neste item é descrito o modelo de elementos finitos utilizado para o concreto, sendo inicialmente apresentadas as funções de forma e expressões básicas do modelo e posteriormente a formulação para a consideração da não-linearidade geométrica neste modelo.

3.2.1 Funções de Forma e Expressões Básicas

O concreto é modelado neste trabalho através de elementos finitos isoparamétricos quadráticos, da família Serendipity.

O elemento isoparamétrico quadrático, ilustrado na Figura 3.1, contém vinte nós, cada qual possuindo três graus de liberdade, correspondentes às translações segundo os três eixos do sistema global de coordenadas.

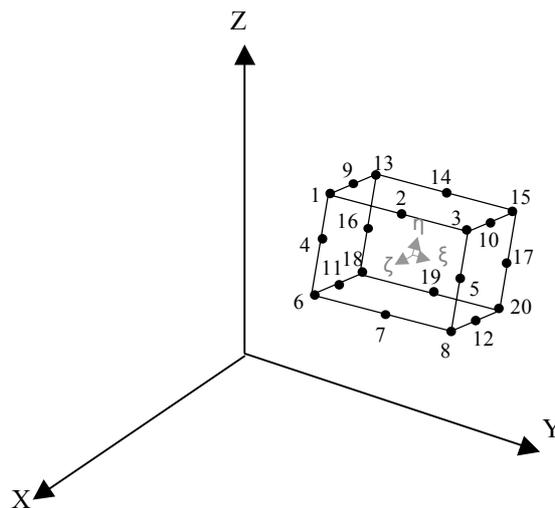


FIGURA 3.1: Elemento isoparamétrico quadrático de 20 nós.

Neste elemento, o campo de deslocamentos possui variação quadrática e os campos de tensões e deformações, variações lineares.

As funções de interpolação (funções de forma) para este elemento são funções quadráticas que têm como variáveis independentes as coordenadas normalizadas (coordenadas naturais) ξ , η e ζ , e são apresentadas por Zienkiewicz (1977), para a numeração dos nós indicada na Figura 3.1, como:

a) Nós de canto:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad i = 1,3,6,8,13,15,18,20 \quad (3.13)$$

b) Nós intermediários:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad i = 2,7,14,19 \\ N_i &= \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0) \quad i = 4,5,16,17 \\ N_i &= \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad i = 9,10,11,12 \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $\xi_0 = \xi\xi_i$, $\eta_0 = \eta\eta_i$, $\zeta_0 = \zeta\zeta_i$, e ξ_i , η_i e ζ_i são as coordenadas naturais do nó em consideração.

Como os elementos são isoparamétricos, as funções de interpolação podem ser utilizadas para definir as incógnitas e a geometria a partir dos respectivos valores nodais. Desse modo, pode-se determinar as coordenadas cartesianas x , y e z de um ponto qualquer deste elemento em função de suas coordenadas nodais, por:

$$\begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

onde $N_i = N_i(\xi, \eta, \zeta)$ é a função de forma correspondente ao nó i , de coordenadas cartesianas x_i , y_i e z_i , e m é o número de nós do elemento.

Os correspondentes diferenciais são dados por:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana, expressa por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

As derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas x , y e z são obtidas aplicando-se a regra de derivação em cadeia, obtendo-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

3.2.2 Formulação do Modelo Não-linear Geométrico

O modelo não-linear geométrico foi implementado com base na formulação Lagrangeana Total, descrita no início deste capítulo. Neste modelo, consideram-se grandes deslocamentos e pequenas deformações.

3.2.2.1 Coordenadas no Instante t_n

As coordenadas do sistema deformado são obtidas adicionando-se às coordenadas do sistema indeformado os deslocamentos sofridos pelo corpo durante o processo de carregamento. Desse modo, num determinado instante t_n , as coordenadas de uma partícula do corpo são dadas por:

$$\begin{aligned}
x_n &= x + u_n \\
y_n &= y + v_n \\
z_n &= z + w_n
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

onde x , y e z são as coordenadas da posição inicial da partícula, na configuração indeformada do corpo, e u_n , v_n e w_n são os deslocamentos totais da partícula no tempo t_n .

3.2.2.2 Deformações e Matriz Deformação-Deslocamento Não-linear

Na formulação Lagrangeana Total, as deformações são calculadas com base no tensor de deformações de Green-Lagrange (ou simplesmente Green), cujas definições são válidas tanto para pequenos quanto para grandes deslocamentos e deformações. O tensor de deformação de Green-Lagrange é definido, partindo da diferença do quadrado do comprimento de uma “fibra” material antes e depois da deformação, por:

$$\mathbf{E}_n = \frac{1}{2} [\mathbf{J}_{D_n}^T \cdot \mathbf{J}_{D_n} - \mathbf{I}]
\tag{3.20}$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade e \mathbf{J}_{D_n} é a matriz de deformações Jacobiana, que contém os gradientes de deformação no tempo t_n , dada por:

$$\mathbf{J}_{D_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x} & \frac{\partial x_n}{\partial y} & \frac{\partial x_n}{\partial z} \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} & \frac{\partial y_n}{\partial y} & \frac{\partial y_n}{\partial z} \\ \frac{\partial z_n}{\partial x} & \frac{\partial z_n}{\partial y} & \frac{\partial z_n}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} x_{ni} & \frac{\partial N_i}{\partial y} x_{ni} & \frac{\partial N_i}{\partial z} x_{ni} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} y_{ni} & \frac{\partial N_i}{\partial y} y_{ni} & \frac{\partial N_i}{\partial z} y_{ni} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} z_{ni} & \frac{\partial N_i}{\partial y} z_{ni} & \frac{\partial N_i}{\partial z} z_{ni} \end{bmatrix}
\tag{3.21}$$

onde x_{ni} , y_{ni} e z_{ni} são as coordenadas no instante t_n dos nós do elemento, sendo m o número de nós e as derivadas cartesianas das funções de forma dadas em (3.18).

De posse das relações dadas em (3.19), é possível expressar o tensor de deformações de Green em função dos deslocamentos. Desse modo, expandindo-se (3.20), obtêm-se os seguintes componentes, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} + \left[\frac{\partial u_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_n}{\partial y} \right]\end{aligned}\quad (3.22)$$

onde ε_x é a deformação específica axial na direção X e γ_{xy} a deformação específica de distorção no plano XY, sendo os outros componentes obtidos de forma análoga. No caso de deslocamentos pequenos, o vetor de deformações lineares é obtido desconsiderando-se os termos quadráticos.

O vetor de deformações, que contém estas componentes, pode ser decomposto em uma parcela contendo somente os termos infinitesimais ($\boldsymbol{\varepsilon}_{L_n}$) e em outra contendo os termos não-lineares ($\boldsymbol{\varepsilon}_{NL_n}$), de modo que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_{L_n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL_n} \quad (3.23)$$

onde o vetor $\boldsymbol{\varepsilon}_n^T = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz} \rangle$ possui suas parcelas lineares dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{L_n} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_n}{\partial x} \\ \frac{\partial v_n}{\partial y} \\ \frac{\partial w_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \\ \frac{\partial v_n}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial y} \\ \frac{\partial u_n}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

Este vetor de deformações lineares pode ser expresso, no instante t_n , de acordo com o Método dos Elementos Finitos, pela relação tensão-deformação linear:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{L_n} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_{Li} \cdot \mathbf{U}_{i_n} \quad (3.25)$$

As deformações virtuais correspondentes são dadas por:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{L_n} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_{Li} \cdot \delta \mathbf{U}_{i_n} \quad (3.26)$$

onde \mathbf{U}_{i_n} é o vetor que contém os deslocamentos do nó i do elemento, no instante t_n , $\delta \mathbf{U}_{i_n}$ é a primeira variação deste vetor e \mathbf{B}_{Li} é a matriz deformação-deslocamento linear, dada por:

$$\mathbf{B}_{Li} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

As parcelas não-lineares do vetor de Green podem ser escritas convenientemente como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL_n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x^T & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\theta}_y^T & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\theta}_z^T \\ \boldsymbol{\theta}_y^T & \boldsymbol{\theta}_x^T & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\theta}_z^T & \boldsymbol{\theta}_y^T \\ \boldsymbol{\theta}_z^T & 0 & \boldsymbol{\theta}_x^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \\ \boldsymbol{\theta}_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_n \cdot \boldsymbol{\theta}_n \quad (3.28)$$

onde \mathbf{A}_n é uma matriz de dimensões 6×9 que contém os gradientes dos deslocamentos no instante t_n e $\boldsymbol{\theta}_n$ é o vetor que contém estes gradientes, definidos por:

$$\boldsymbol{\theta}_x^T = \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial x} \quad \frac{\partial v_n}{\partial x} \quad \frac{\partial w_n}{\partial x} \right\rangle; \boldsymbol{\theta}_y^T = \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial y} \quad \frac{\partial v_n}{\partial y} \quad \frac{\partial w_n}{\partial y} \right\rangle; \boldsymbol{\theta}_z^T = \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial z} \quad \frac{\partial v_n}{\partial z} \quad \frac{\partial w_n}{\partial z} \right\rangle \quad (3.29)$$

No Método dos Elementos Finitos, o vetor dos gradientes de deslocamentos pode ser dado em termos dos deslocamentos nodais, de acordo com a relação linear:

$$\boldsymbol{\theta}_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{U}_{in} \quad (3.30)$$

onde \mathbf{G}_i é a matriz que contém as derivadas cartesianas das funções de forma para cada nó i do elemento, dada por:

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

As deformações virtuais, correspondentes à (3.28), podem ser escritas como²:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NLn} = \mathbf{A}_n \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_n = \sum_{i=1}^m (\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{G}_i) \cdot \delta \mathbf{U}_{in} \quad (3.32)$$

Sendo as deformações não-lineares dadas pela equação (3.28), onde o vetor $\boldsymbol{\theta}_n$ é dado na (3.30), e tendo em vista a equação (3.25), a equação (3.23) pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^m \left(\mathbf{B}_{Li} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{G}_i \right) \cdot \mathbf{U}_{in} \quad (3.33)$$

Definindo a matriz deformação-deslocamento não-linear por:

² A variação da equação (3.28) é dada por: $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NLn} = \frac{1}{2} \delta \mathbf{A}_n \cdot \boldsymbol{\theta}_n + \frac{1}{2} \mathbf{A}_n \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_n = \mathbf{A}_n \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_n$, pois, devido as propriedades das matrizes \mathbf{A}_n e $\boldsymbol{\theta}_n$, $\delta \mathbf{A}_n \cdot \boldsymbol{\theta}_n = \mathbf{A}_n \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_n$ (Zienkiewicz, 1977).

$$\mathbf{B}_{\text{NLI}_n} = \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{G}_i \quad (3.34)$$

o vetor de deformações de Green pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^m \left(\mathbf{B}_{\text{Li}} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{\text{NLI}_n} \right) \cdot \mathbf{U}_{i_n} \quad (3.35)$$

e as deformações virtuais correspondentes, cujos termos lineares e não-lineares são dados pelas equações (3.26) e (3.32), podem ser expressas por:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_{i_n} \cdot \delta \mathbf{U}_{i_n} \quad (3.36)$$

onde

$$\mathbf{B}_{i_n} = \mathbf{B}_{\text{Li}} + \mathbf{B}_{\text{NLI}_n} \quad (3.37)$$

Dessa forma, a matriz deformação-deslocamento, no caso de não-linearidade geométrica, é dada por:

$$\mathbf{B}_{i_n} = \mathbf{B}_{\text{Li}} + \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{G}_i \quad (3.38)$$

Como as matrizes \mathbf{B}_{Li} , \mathbf{A}_n e \mathbf{G}_i são conhecidas, e sabendo que as coordenadas de um ponto na configuração atual são dadas pelas equações (3.19), a matriz deformação-deslocamento é determinada por:

$$\mathbf{B}_{i_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} \\ \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial z}{\partial y_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial z}{\partial y_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial z}{\partial z_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial z}{\partial z_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} + \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \frac{\partial N_i}{\partial N_i} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

3.2.2.3 Medidas de Tensão

Segundo sua definição clássica, se $d\mathbf{P}_n$ é um vetor de força elementar atuando sobre uma área elementar dA_n definida no volume do corpo, no instante t_n , o vetor tensão é dado por:

$$\mathbf{t}_n = \frac{d\mathbf{P}_n}{dA_n} \quad (3.40)$$

Este vetor também pode ser expresso, de acordo com a Lei de Cauchy, como:

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{n} \quad (3.41)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_n$ é o tensor de tensões de Cauchy, conhecido por tensor de tensões físicas ou verdadeiras, por representar as forças elementares atuantes no sistema deformado por unidade de área da configuração deformada; e \mathbf{n} é o vetor unitário normal à área elementar dA_n .

Na formulação Lagrangeana Total, deseja-se obter um tensor tensão que relacione um vetor de força elementar $d\mathbf{P}_n$, agindo sobre o corpo no instante t_n , com a geometria do corpo na configuração indeformada. Com esta finalidade são definidos matematicamente o Primeiro e o Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff, sendo este último mais apropriado ao modelo, por possuir a condição de simetria e relacionar-se diretamente com o tensor de deformações de Green-Lagrange, por meio das relações constitutivas (Bathe, 1996).

O Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff é expresso, em componentes cartesianas, para estado triplo de tensão, por:

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_y & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_z \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Este tensor se reduz ao tensor de tensão de Cauchy, para o caso de pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

3.2.2.4 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Equilibradas

A substituição da equação (3.36) no Princípio dos Trabalhos Virtuais permite a obtenção de uma expressão idêntica à equação de equilíbrio para o caso de pequenos deslocamentos. No entanto, a matriz deformação-deslocamento, dada pela equação (3.39), não é mais linear, de modo que as forças resistentes internas são dadas, para cada elemento de concreto, por:

$$\mathbf{Q}_{c_n} = \int_{V_0} \mathbf{B}_n^T \cdot \mathbf{T}_n \cdot dV \quad (3.43)$$

onde $\mathbf{B}_n = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \dots \mathbf{B}_m]_n$ é a matriz deformação-deslocamento para o elemento de concreto no instante t_n e \mathbf{T}_n é o vetor que contém as componentes de tensão de Piola-Kirchhoff II neste instante, dadas na forma:

$$\mathbf{T}_n^T = \langle T_x \quad T_y \quad T_z \quad T_{xy} \quad T_{yz} \quad T_{xz} \rangle \quad (3.44)$$

A matriz de rigidez para o elemento de concreto é dada por:

$$\mathbf{K}_{c_n} = \int_{V_0} \mathbf{B}_n^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_n \cdot dV \quad (3.45)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva elástica para estado triplo de tensão, dada para materiais isotrópicos por:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson do concreto e E seu módulo de elasticidade. O elemento diferencial de volume é dado por:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz = \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (3.47)$$

onde $\det \mathbf{J}$ é o determinante da matriz Jacobiana dada pela equação (3.17).

Esta matriz de rigidez é calculada numericamente, para cada instante t_n , através de uma regra de integração do tipo Gauss, pela expressão:

$$\mathbf{K}_{e_n} = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} \sum_{k=1}^{ng} \mathbf{B}_n^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_n w_i w_j w_k \det \mathbf{J} \quad (3.48)$$

onde ng é a ordem da regra de integração, ou seja, o número de pontos de integração em cada direção do elemento, e w_i , w_j e w_k são fatores de peso. O vetor de forças internas equilibradas, expresso pela equação (3.43), é calculado numericamente de forma análoga.

O programa computacional implementado neste trabalho utiliza o esquema de integração proposto por Hinton (1988), em que são utilizados 15 pontos de integração dispostos simetricamente no domínio tridimensional do elemento. A regra de integração utilizada é descrita em detalhes no Capítulo 5.

3.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Existem três formulações para representar as barras de aço em um modelo de elementos finitos para a análise de estruturas de concreto armado: a discreta, a distribuída e a incorporada.

No modelo discreto, a armadura é representada usando elementos de barra discretos (elementos unidimensionais tipo treliça), que possuem nós coincidentes com os da malha de elementos finitos de concreto, conforme ilustrado na Figura 3.2. Assim, esta técnica requer que a localização das barras coincida com a malha de elementos finitos, limitando a escolha desta para discretizar as estruturas de concreto.

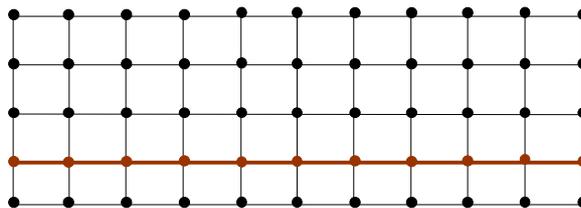


FIGURA 3.2: Modelo discreto.

No modelo distribuído, considera-se o aço distribuído uniformemente no elemento de concreto, sendo cada conjunto de barras de armadura substituído por uma camada bi-dimensional de espessura e área equivalente (Figura 3.3). Este modelo representa bem a armadura quando a mesma é densamente distribuída, como no caso de placas e cascas.

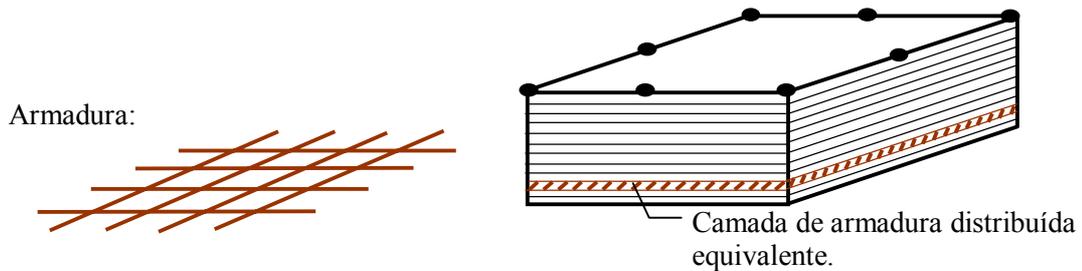


FIGURA 3.3: Modelo distribuído.

Já no modelo incorporado, a barra de aço é representada por um elemento uniaxial que é considerado como uma linha de material mais rígido no interior dos elementos de concreto, de modo que seus deslocamentos coincidam com os do elemento no qual se encontra. Os deslocamentos ao longo dos segmentos de armadura podem, dessa forma, serem referenciados aos deslocamentos nodais do elemento finito de concreto.

Este modelo provê uma representação realista das barras de armadura, sem que novas incógnitas sejam introduzidas no sistema de equações de equilíbrio e apresenta a vantagem das barras poderem ser arbitrariamente colocadas no interior de um elemento de concreto, sem necessariamente estarem vinculadas à malha de elementos finitos (Figura 3.4).

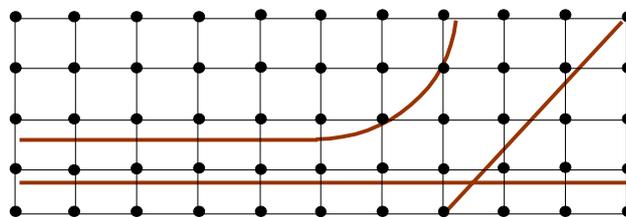


FIGURA 3.4: Modelo incorporado.

Todos os três modelos acima descritos consideram aderência perfeita entre o aço e o concreto. A seleção de um dos modelos para representação do aço através do Método dos

Elementos Finitos pode ser baseada na facilidade de aplicação do modelo a um determinado tipo de elemento estrutural.

Neste trabalho, adotou-se um modelo incorporado de armadura, devido às vantagens quanto a sua flexibilidade na disposição das barras de armadura no interior do elemento de concreto.

Apresentam-se, a seguir, as funções de forma utilizadas para as barras de armadura e a formulação geométrica do modelo incorporado de armadura, considerando a não-linearidade geométrica da estrutura. Descreve-se ainda o procedimento utilizado para a determinação automática dos segmentos das barras contidos em cada elemento finito de concreto.

3.3.1 Funções de Forma

Neste trabalho, as barras de armadura são modeladas através de elementos isoparamétricos quadráticos unidimensionais (Figura 3.5), que permitem a modelagem de barras retas e curvas.

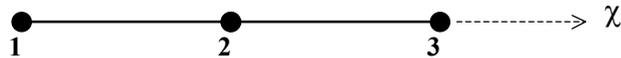


FIGURA 3.5: Elemento isoparamétrico quadrático unidimensional de 3 nós.

As funções de interpolação para o elemento de armadura são funções unidimensionais expressas em termos de uma coordenada normalizada independente, e podem ser obtidas a partir de polinômios de Lagrange, dados pela expressão (Zienkiewicz, 1977):

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \cdots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \cdots (\chi - \chi_n)}{(\chi_k - \chi_1) \cdots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \cdots (\chi_k - \chi_n)} \quad (3.49)$$

Esta função é um polinômio de grau $m = n - 1$ em χ , e tem valor unitário em $\chi = \chi_k$ e nulo para $\chi = \chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n$, onde n é o número de nós do elemento.

Assim, para o elemento mostrado na Figura 3.5, têm-se as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned}
H_1(\chi) &= \frac{(\chi^2 - \chi)}{2} \\
H_2(\chi) &= (1 - \chi^2) \\
H_3(\chi) &= \frac{(\chi^2 + \chi)}{2}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

3.3.2 Formulação Geométrica

A formulação descrita neste item para incorporar as barras de armadura ao elemento tridimensional de concreto foi desenvolvida com base na formulação bidimensional apresentada por Elwi e Hrudey (1989), que permite com que a localização e a geometria das barras de armadura sejam independentes da malha de elementos finitos.

Desse modo, independentemente da malha de elementos finitos definida para o concreto, as barras de armadura são posicionadas através da definição de um conjunto de pontos nodais, especificados em coordenadas globais cartesianas, sendo as barras retas definidas por dois pontos e as barras curvas definidas por três pontos.

Para assegurar uma continuidade interelementar adequada, é necessário colocar nós nos elementos de barra, onde a armadura atravessa o elemento de concreto. As coordenadas dos nós das barras, localizados entre os nós de definição das mesmas, são obtidas por interpolação. Desta forma, nós adicionais são colocados dentro do elemento de concreto.

Como as barras de armadura são modeladas através de elementos isoparamétricos, as coordenadas de qualquer ponto ao longo de uma barra podem ser obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} x(\chi) \\ y(\chi) \\ z(\chi) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^l \begin{bmatrix} H_j(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & H_j(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & H_j(\chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \tag{3.51}$$

onde x_j , y_j e z_j são as coordenadas globais do nó j do elemento de armadura, $H_j(\chi)$ é a função de forma associada a este nó, definida para cada nó em (3.50), em função da coordenada normalizada independente χ , e l é o número de nós do elemento de armadura.

A partir da expressão anterior, pode-se obter um elemento diferencial de comprimento ds_n , disposto ao longo da barra de armadura, que é necessário nas integrações ao longo da mesma. Considerando a não-linearidade geométrica da estrutura, a orientação da tangente à barra ilustrada na Figura 3.6, no instante t_n , é dada pelos ângulos α_n , β_n e γ_n que a mesma faz com os eixos X, Y e Z, respectivamente, de modo que seus cossenos diretores sejam dados por:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_n &= \frac{dx_n}{ds_n} = \frac{dx_n}{d\chi} \frac{d\chi}{ds_n} \\ \cos \beta_n &= \frac{dy_n}{ds_n} = \frac{dy_n}{d\chi} \frac{d\chi}{ds_n} \\ \cos \gamma_n &= \frac{dz_n}{ds_n} = \frac{dz_n}{d\chi} \frac{d\chi}{ds_n}\end{aligned}\quad (3.52)$$

onde o elemento diferencial de comprimento ds_n pode ser obtido a partir dos elementos diferenciais cartesianos dx_n , dy_n e dz_n , resultando no seguinte fator de mapeamento:

$$\frac{ds_n}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx_n}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dz_n}{d\chi}\right)^2}\quad (3.53)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx_n}{d\chi} \\ \frac{dy_n}{d\chi} \\ \frac{dz_n}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^l \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{n j} \\ y_{n j} \\ z_{n j} \end{Bmatrix}\quad (3.54)$$

onde $x_{n j}$, $y_{n j}$ e $z_{n j}$ são as coordenadas globais do nó j do elemento de armadura no instante t_n . Desse modo, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, bem como o fator de mapeamento $ds_n/d\chi$, podem ser facilmente calculados, para cada instante t_n , usando as equações desenvolvidas acima.

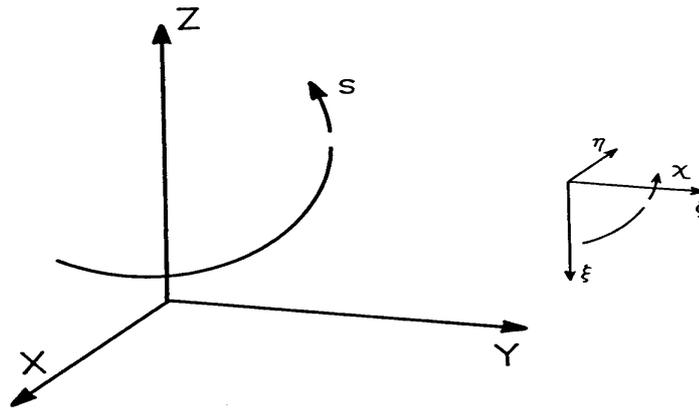


FIGURA 3.6: Coordenada ao longo do eixo da armadura.

Um elemento diferencial de volume dV_{sn} da barra de aço pode ser expresso em termos de ds_n e da área A_s da seção transversal da barra, resultando:

$$dV_{sn} = A_s \cdot ds_n \quad (3.55)$$

Desse modo, integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser resolvidas em termos da coordenada normalizada χ , utilizando o fator de mapeamento dado na Equação (3.53) para definir o elemento diferencial de volume da barra:

$$dV_{sn} = A_s \frac{ds_n}{d\chi} d\chi \quad (3.56)$$

3.3.3 Procedimento para Determinação dos Segmentos de Armadura Contidos em cada Elemento de Concreto

O programa computacional implementado, neste trabalho, calcula de forma automática os segmentos das barras de armadura que ficam situados no interior dos elementos de concreto, de acordo com o procedimento descrito neste item.

O primeiro passo consiste na transformação das coordenadas globais $P_j(x,y,z)$, dos pontos que definem as barras de armadura para coordenadas naturais locais $P_j(\xi,\eta,\zeta)$ do elemento de concreto no qual se encontra. A relação entre as coordenadas locais e globais,

para um dado ponto P_j de definição da barra de aço é dada implicitamente, para elementos isoparamétricos, por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{P_j} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

onde x , y e z são as coordenadas globais do ponto de definição da barra de aço, x_i , y_i e z_i são as coordenadas globais dos nós i do elemento de concreto, de funções de forma $N_i(\xi, \eta, \zeta)$, e m é o número de nós do elemento de concreto.

Como a forma explícita da relação inversa a (3.57) não é facilmente encontrada, o mapeamento inverso é realizado numericamente, baseando-se no fato de que as coordenadas naturais do ponto P_j da barra de armadura são as raízes do sistema de equações não-lineares:

$$\{f(\xi, \eta, \zeta)\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{P_j} - \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.58)$$

Elwi e Hrudey (1989) sugerem a utilização do esquema iterativo de Newton-Raphson, a partir do qual tem-se a seguinte solução, após $k+1$ iterações:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_{P_j}^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_{P_j}^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{Bmatrix}_{P_j}^{k+1} \quad (3.59)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{Bmatrix}_{P_j}^{k+1} = (\mathbf{J}^k)^{T^{-1}} \left[\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{P_j} - \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i^k & 0 & 0 \\ 0 & N_i^k & 0 \\ 0 & 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \right] \quad (3.60)$$

sendo $(\mathbf{J}^k)^{T^{-1}}$ a inversa da matriz Jacobiana transposta do elemento de concreto, na iteração k , e N_i^k suas funções de forma nesta iteração.

Determinadas as coordenadas naturais dos pontos de definição da geometria da barra, referenciadas ao sistema natural do elemento de concreto, parte-se para a segunda etapa do processo, que consiste na definição da curva que passa por estes pontos, como ilustrado pela Figura 3.7. Esta etapa consiste, mais especificamente, em determinar as coordenadas naturais da intersecção da barra de armadura com o plano que contém a face do elemento de concreto. As faces do elemento de concreto são definidas fixando-se uma das coordenadas naturais como 1 ou -1, podendo as outras coordenadas assumirem valores entre -1 e 1.

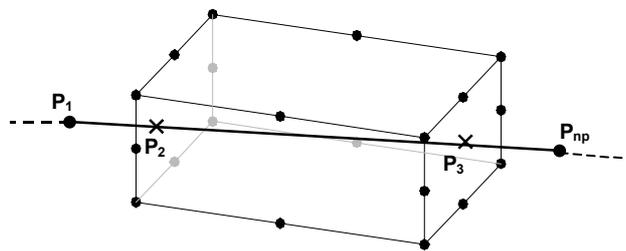


FIGURA 3.7: Curva de definição da barra de armadura.

Zienkiewicz (1977) sugere o emprego de polinômios interpoladores de Lagrange para determinar as coordenadas naturais dos pontos da curva que definem o eixo da barra de aço, de modo que quando a coordenada ξ de um ponto da barra é conhecida, calculam-se η e ζ pelas expressões:

$$\eta = \sum_{i=1}^{np} f_i(\xi)\eta_i; \quad \zeta = \sum_{i=1}^{np} f_i(\xi)\zeta_i \quad (3.61)$$

De forma análoga, quando a coordenada η é conhecida, ξ e ζ são determinados por:

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} g_i(\eta)\xi_i; \quad \zeta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\eta)\zeta_i \quad (3.62)$$

E, finalmente, quando a coordenada ζ é conhecida, ξ e η são dados por:

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} h_i(\zeta)\xi_i; \quad \eta = \sum_{i=1}^{np} h_i(\zeta)\eta_i \quad (3.63)$$

onde np é o número de pontos que definem a barra de armadura e f , g e h são funções (polinômios de Lagrange) dadas pelas seguintes expressões:

$$f_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}; \quad g_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)}; \quad h_i(\zeta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\zeta - \zeta_j)}{(\zeta_i - \zeta_j)} \quad (3.64)$$

A terceira etapa consiste em verificar se existe intersecção da curva P_1, P_2, \dots, P_{np} , com cada uma das seis faces que definem o elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento de concreto e calculam-se as coordenadas η e ζ da intersecção da curva da barra com a face do concreto de acordo com as equações (3.61). Se $-1 \leq \eta \leq 1$ e $-1 \leq \zeta \leq 1$, a barra intercepta esta face do elemento. Repete-se o procedimento de maneira análoga, fixando-se a coordenada $\eta = \pm 1$ ou $\zeta = \pm 1$ e verificando os limites das coordenadas que variam na face em análise do elemento de concreto. Desta forma, define-se um elemento unidimensional representativo da parte de armadura situada no interior deste elemento de concreto.

Neste estágio do processo, considera-se a possibilidade de existir um único ponto de intersecção com o elemento de concreto, que corresponde ao caso em que a barra intercepta somente um vértice do elemento. Neste caso, o programa considera que a barra não intercepta o elemento de concreto.

A quarta etapa consiste na verificação do trecho de armadura efetivamente contido no elemento de concreto, destacando-se os seguintes casos possíveis:

- a) Um dos nós, que definem as extremidades do elemento de armadura, encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de P_1 ou P_{np} , em módulo, são menores que 1. Neste caso, o programa se encarrega de distinguir a intersecção verdadeira (I_V) da falsa (I_F) e assim obter, de forma correta, o comprimento real do segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto. A Figura 3.8 ilustra esta situação.
- b) Os dois nós que definem a geometria da barra encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Neste caso, o programa toma para as coordenadas naturais

dos pontos de intersecção as mesmas coordenadas naturais dos pontos P_1 e P_{np} já obtidas anteriormente. A Figura 3.9 ilustra esta situação.

- c) Nenhum dos nós de definição da barra está situado dentro do elemento de concreto. Neste caso existem duas possibilidades: a primeira, quando o segmento que liga os dois pontos P_1 e P_{np} intercepta o elemento (Figura 3.10) e a segunda, em caso contrário (Figura 3.11).

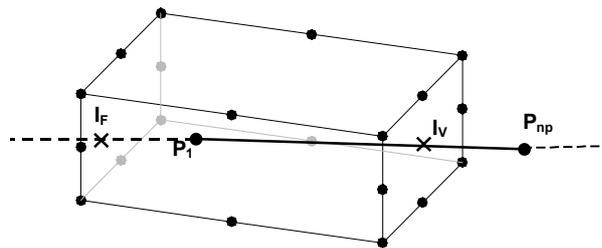


FIGURA 3.8: P_1 dentro do elemento de concreto.

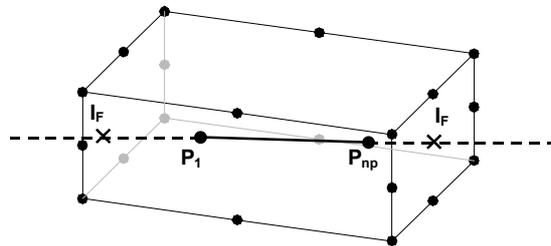


FIGURA 3.9: P_1 e P_{np} dentro do elemento de concreto.

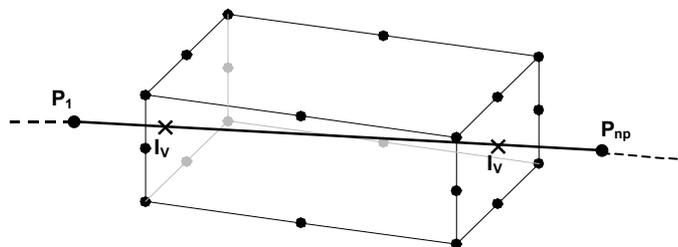


FIGURA 3.10: Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento.

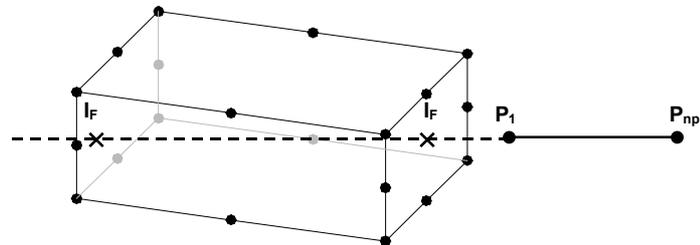


FIGURA 3.11: Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento.

A quinta etapa consiste na criação de um nó intermediário no segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto, e posterior determinação das coordenadas globais e naturais dos nós extremos do segmento, bem como do nó intermediário. A Figura 3.12 ilustra esta etapa.

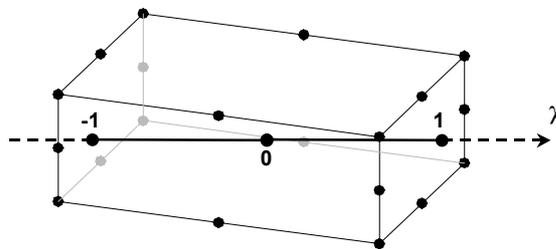


FIGURA 3.12: Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.

A sexta e última etapa consiste em verificar se a barra se encontra disposta ao longo de uma face ou ao longo de uma aresta, num determinado elemento. Neste caso, a rigidez associada com a armadura é distribuída a dois ou a quatro elementos de concreto, respectivamente.

3.3.4 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Equilibradas

Considerando-se aderência perfeita entre o aço e o concreto, admite-se que o campo de deslocamentos da armadura é idêntico aquele do elemento de concreto no qual a barra de aço está inserida, e como as barras de aço são modeladas neste trabalho por elementos unidimensionais, sob a hipótese de que as mesmas resistem apenas a esforços na sua direção, a deformação ao longo da armadura é igual à deformação no elemento de concreto, na direção tangente ao eixo do segmento de armadura.

Dessa forma, a deformação na armadura pode ser calculada, com base na expressão proposta por Elwi e Hrudey (1989), por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s_n} = & \varepsilon_x \cdot \cos^2 \alpha_n + \varepsilon_y \cdot \cos^2 \beta_n + \varepsilon_z \cdot \cos^2 \gamma_n + \\ & \gamma_{xy} \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \beta_n + \gamma_{yz} \cdot \cos \beta_n \cdot \cos \gamma_n + \gamma_{xz} \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \gamma_n \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} e γ_{xz} são as componentes da deformação no elemento de concreto, no instante t_n .

Como as componentes da deformação em um ponto do elemento de concreto podem ser obtidas diretamente de seu campo de deslocamentos pela expressão (3.35), a deformação na armadura pode ser facilmente encontrada pela equação (3.65).

Para determinar a contribuição da armadura para o vetor de forças internas equilibradas do elemento de concreto, é necessário calcular a primeira variação da deformação da armadura:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{s_n} = & \delta\varepsilon_x \cdot \cos^2 \alpha_n + \delta\varepsilon_y \cdot \cos^2 \beta_n + \delta\varepsilon_z \cdot \cos^2 \gamma_n + \\ & \delta\gamma_{xy} \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \beta_n + \delta\gamma_{yz} \cdot \cos \beta_n \cdot \cos \gamma_n + \delta\gamma_{xz} \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \gamma_n \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde a primeira variação das componentes de deformação do elemento de concreto pode ser calculada pela equação (3.36). Substituindo-se estas componentes em (3.66), pode-se escrever a primeira variação da deformação da armadura em função da primeira variação dos deslocamentos nodais do elemento de concreto como:

$$\delta\varepsilon_{s_n} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_{s_{i_n}} \cdot \delta\mathbf{U}_{i_n} \quad (3.67)$$

onde $\delta \mathbf{U}_{i_n}$ é o vetor que contém a primeira variação dos deslocamentos do nó i do elemento de concreto e $\mathbf{B}_{s_{i_n}}$ é o vetor linha que relaciona a primeira variação da deformação na armadura com estes deslocamentos. Este vetor é dado, num determinado instante de tempo, e para cada nó i do elemento de concreto, considerando-se a não-linearidade geométrica da estrutura, por:

$$\mathbf{B}_{s_{i_n}}^T = \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \cos^2 \beta_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos^2 \gamma_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \beta_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos \beta_n \cos \gamma_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \\ \dots \\ \cos^2 \alpha_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \cos^2 \beta_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos^2 \gamma_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \beta_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos \beta_n \cos \gamma_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \\ \dots \\ \cos^2 \alpha_n \left(\frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \cos^2 \beta_n \left(\frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos^2 \gamma_n \left(\frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \beta_n \left(\frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos \beta_n \cos \gamma_n \left(\frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \left(\frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \end{array} \right\} \quad (3.68)$$

Para pequenos deslocamentos, em que $x_n \cong x$, $y_n \cong y$ e $z_n \cong z$, o vetor acima se reduz à relações deformação-deslocamento lineares para a armadura.

A equação (3.67) pode ser escrita alternativamente como:

$$\delta \varepsilon_{s_n} = \mathbf{B}_{s_n} \cdot \delta \mathbf{U}_n \quad (3.69)$$

onde $\mathbf{B}_{s_n} = \langle \mathbf{B}_{s_1} \mathbf{B}_{s_2} \dots \mathbf{B}_{s_m} \rangle_n$ é o vetor linha que contém as relações deformação-deslocamento para a armadura e $\delta \mathbf{U}_n$ é o vetor que contém a primeira variação dos deslocamentos nodais do elemento de concreto, sendo m o número de nós deste elemento.

De acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais, a contribuição da armadura para o trabalho virtual interno pode ser calculada a partir da expressão:

$$\delta W_{s_n} = \int_{V_s} \delta \varepsilon_{s_n}^T \cdot \sigma_{s_n} \cdot dV_{s_n} \quad (3.70)$$

onde σ_{s_n} é a tensão normal na armadura e V_s o seu volume.

Substituindo (3.69) na (3.70), obtém-se:

$$\delta W_{s_n} = \int_{V_s} \delta \mathbf{U}_n^T \cdot \mathbf{B}_{s_n}^T \cdot \sigma_{s_n} \cdot dV_{s_n} = \delta \mathbf{U}_n^T \cdot \mathbf{Q}_{s_n} \quad (3.71)$$

onde, lembrando-se a equação (3.56) e sendo a primeira variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto arbitrária, a expressão que permite calcular as forças internas equilibradas correspondentes ao estado de tensão a que se encontra submetida a armadura é dada por:

$$\mathbf{Q}_{s_n} = \int_{\chi} \mathbf{B}_{s_n}^T \cdot \sigma_{s_n} \cdot A_s \cdot \frac{ds_n}{d\chi} \cdot d\chi \quad (3.72)$$

A relação constitutiva para a armadura pode ser escrita como:

$$\sigma_{s_n} = E_s \cdot \varepsilon_{s_n} \quad (3.73)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço.

Substituindo-se (3.73) em (3.72), e aproximando a deformação na armadura pela multiplicação do vetor \mathbf{B}_{s_n} pelo vetor dos deslocamentos nodais \mathbf{U}_n , obtém-se:

$$\mathbf{K}_{s_n} \cdot \mathbf{U}_n = \int_{\chi} \mathbf{B}_{s_n}^T \cdot E_s \cdot \mathbf{B}_{s_n} \cdot A_s \cdot \frac{ds_n}{d\chi} \cdot d\chi \cdot \mathbf{U}_n \quad (3.74)$$

onde \mathbf{K}_{s_n} é a contribuição da rigidez da armadura à matriz de rigidez do elemento de concreto.

A matriz de rigidez da armadura é calculada numericamente, através da Quadratura de Gauss-Legendre, de acordo com a equação:

$$\mathbf{K}_{s_n} = \sum_{i=1}^{ng} (\mathbf{B}_{s_n}^T)_i \cdot E_s \cdot (\mathbf{B}_{s_n})_i \cdot A_s \cdot \frac{ds_n}{d\chi} \cdot w_i \quad (3.75)$$

onde ng é o número de pontos de integração de Gauss (igual a dois neste trabalho), as grandezas associadas ao índice i são calculadas na posição do ponto de integração i , e w_i é o fator de peso associado a este ponto. O vetor de forças internas equilibradas é calculado numericamente de forma análoga.

3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE FORÇAS EQUILIBRADAS PARA O ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO

Como os deslocamentos ao longo da armadura são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto, a matriz de rigidez da armadura tem as mesmas dimensões que a matriz de rigidez do elemento de concreto. Deste modo, a matriz de rigidez total de um elemento de concreto armado é dada pela superposição, termo a termo, das duas matrizes:

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{c_n} + \sum_{b=1}^{nb} (\mathbf{K}_{s_n})_b \quad (3.76)$$

onde nb é o número de segmentos de armadura contidos no interior do elemento de concreto.

De forma análoga, o vetor de forças internas equilibradas para o elemento de concreto armado é obtido por:

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{c_n} + \sum_{b=1}^{nb} (\mathbf{Q}_{s_n})_b \quad (3.77)$$

4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

Para a análise numérica de estruturas de concreto armado, é necessário que sejam definidos modelos constitutivos para cada material. Neste capítulo são apresentadas e discutidas as formulações dos modelos utilizados para o concreto e para a armadura.

4.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO

O concreto, por ser um material compósito obtido a partir da mistura de agregados miúdos e graúdos e de uma pasta de cimento, possui um comportamento bastante complexo.

A presença de microfissuras, especialmente na interface da pasta de cimento e dos agregados, é fundamental para o comportamento mecânico do concreto. A propagação destas microfissuras, durante o carregamento, produz o comportamento não-linear deste material estrutural. Também contribuem para este comportamento o esmagamento do concreto e as deformações que ocorrem ao longo do tempo.

Neste trabalho, é utilizado um modelo elasto-viscoplástico para representar o comportamento do concreto sob cargas de curta e longa duração. O modelo elasto-viscoplástico básico utilizado é mostrado na Figura 4.1.

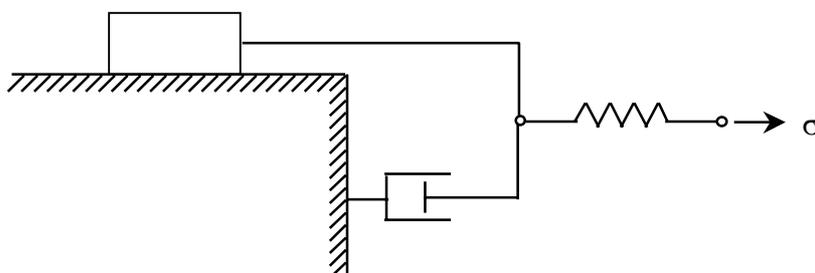


FIGURA 4.1: Modelo elasto-viscoplástico unidimensional.

Neste modelo, a resposta elástica instantânea é proporcionada pela mola linear. Como o amortecedor não sofre deformação instantânea, o elemento de atrito também apresenta

deformação nula, pois ambos estão conectados em paralelo. O elemento de atrito torna-se ativo somente se a tensão corrente for maior que a tensão de plastificação, sendo o excesso de tensão absorvido gradativamente pelo amortecedor.

O comportamento elasto-viscoplástico é característico das estruturas de concreto, que apresentam deformações imediatas, deformações não reversíveis após atingido o seu limite de plasticidade e deformações que ocorrem ao longo do tempo, como a retração e a fluência. No programa implementado neste trabalho, este comportamento é obtido em duas etapas distintas.

Numa primeira etapa, é determinada a resposta da estrutura para incrementos de tempo. Esta resposta, transcorrido um período de tempo após a aplicação da carga, corresponde a um comportamento viscoelástico dos materiais, onde ocorrem os efeitos diferidos na estrutura (fluência e retração do concreto). Considera-se, nesta etapa, que a tensão de plastificação é nula.

Na segunda etapa, é determinada a resposta da estrutura para incrementos de carga. Esta resposta é obtida através do modelo elasto-viscoplástico para o tempo tendendo ao infinito. Quando o tempo cresce indefinidamente, a parcela de tensão que o amortecedor absorve diminui gradativamente, enquanto que o elemento de atrito se torna cada vez mais rígido. Sendo a velocidade de deformação viscosa proporcional à tensão absorvida pelo amortecedor, a mesma diminui e adquire um comportamento assintótico, que tende à resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico.

A seguir, descreve-se o modelo elastoplástico com endurecimento empregado para representar o comportamento não-linear do concreto comprimido. Posteriormente é apresentado um modelo de fissuração para o concreto tracionado, no qual o concreto sob tração apresenta um comportamento elástico-linear até a ruptura. Após a ruptura, introduz-se um ramo descendente suave na curva tensão-deformação do concreto tracionado, de modo a considerar-se uma colaboração do concreto entre fissuras, devida à transferência de esforços entre o concreto e o aço. Em seguida, descreve-se o modelo utilizado para o concreto submetido a cargas de longa duração, correspondente ao comportamento viscoelástico do concreto.

4.1.1 Modelo para o Concreto Comprimido

O modelo elastoplástico estabelecido para o concreto sob compressão é composto por um critério de ruptura, um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

4.1.1.1 Critério de Ruptura

Adotou-se o critério de ruptura proposto por Ottosen (1977), no qual a superfície de ruptura é expressa pela seguinte equação:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.1)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto, λ é uma função dada por:

$$\lambda = c_1 \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(-c_2 \sin 3\theta) \right], \text{ para } \sin 3\theta \leq 0 \quad (4.2)$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \sin 3\theta) \right], \text{ para } \sin 3\theta > 0$$

com

$$\sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (4.3)$$

e α , β , c_1 e c_2 são os quatro parâmetros do critério.

Expressando as componentes cartesianas de tensão³ como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz} \rangle \quad (4.4)$$

os invariantes de tensão são obtidos por:

³ Neste capítulo e nos próximos, o símbolo σ é usado para expressar tensões de uma maneira geral, independentemente do sistema de referência utilizado.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
 J_2 &= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \\
 J_3 &= \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde s_x , s_y e s_z são as tensões desviadoras, determinadas por:

$$\begin{aligned}
 s_x &= \frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)}{3} \\
 s_y &= \frac{(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)}{3} \\
 s_z &= \frac{(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)}{3}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Os parâmetros α , β , c_1 e c_2 , podem ser estimados a partir da resistência média à compressão uniaxial do concreto f_{cm} e da resistência média à tração uniaxial do concreto f_{tm} , de acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), por:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{9k^{1,4}} \\
 \beta &= \frac{1}{3,7k^{1,1}} \\
 c_1 &= \frac{1}{0,7k^{0,9}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$c_2 = 1 - 6,8[k - 0,07]^2$$

onde $k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}}$

A resistência média à tração do concreto pode ser estimada, de acordo com o CEB (1993), por:

$$f_{tm} = \bar{\alpha} \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}, \text{ em MPa} \tag{4.8}$$

onde $\bar{\alpha}$ assume valores entre 0,95 e 1,85. Neste trabalho, adota-se para este coeficiente o valor de 1,85 proposto por Clautre (1994), por considerar-se o valor médio proposto pelo Código Modelo do CEB-FIP 1990 (1993) por demais cauteloso, em virtude de comparações com valores experimentais. O Código Modelo recomenda uma diferença de 8 MPa entre f_{cm} e f_{ck} , considerada exagerada para concretos de resistência normal à baixa (Clautre, 1994). Desse modo, para o cálculo da resistência à tração a partir da resistência média à compressão do concreto f_{cm} , adotou-se para f_{ck} uma fração de f_{cm} (80%), de modo que a resistência média à tração do concreto é determinada no modelo por:

$$f_{tm} = 1,85 \left(\frac{0,8f_{cm}}{10} \right)^{2/3} \quad (4.9)$$

A superfície de ruptura de Ottosen (1977), no espaço tridimensional de tensões, pode ser visualizada na Figura 4.2, por suas seções transversais nos planos desviadores e seus meridianos nos planos meridianos. As seções transversais da superfície de ruptura são as curvas de interseção entre a superfície de ruptura e um plano desviador, perpendicular ao eixo hidrostático, e os meridianos são as curvas de interseção entre a superfície de ruptura e um plano meridiano, que contém o eixo hidrostático. Os meridianos determinados por valores de θ iguais a 0° , 30° e 60° são chamados, respectivamente, de meridiano de tração, de cisalhamento e de compressão.

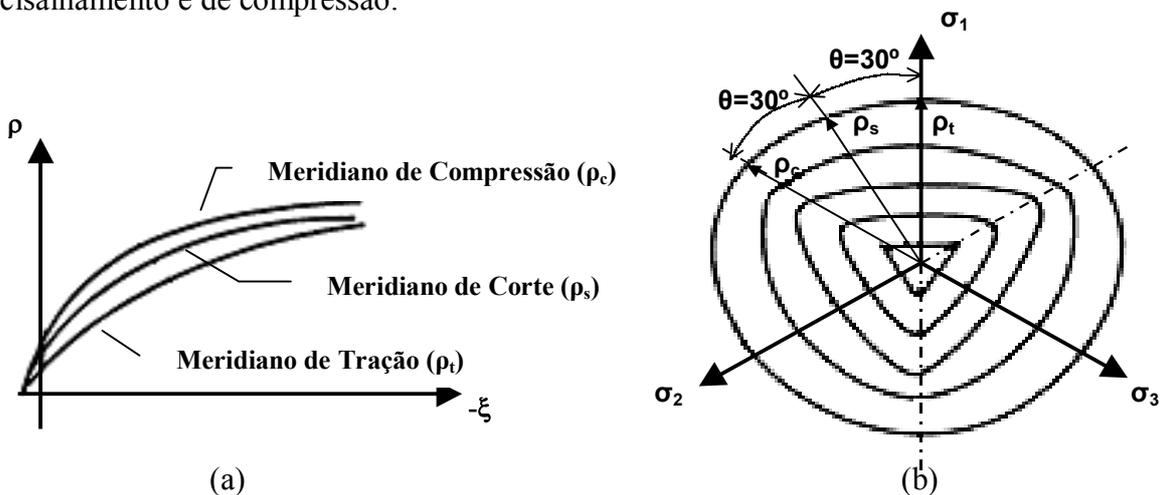


FIGURA 4.2: (a) Meridianos e (b) seções transversais da superfície de ruptura de Ottosen.

Para um material isotrópico, a superfície de ruptura de Ottosen apresenta tríplice simetria e os índices 1, 2 e 3, associados aos eixos coordenados, são arbitrários. Neste caso, é

necessário estudar apenas o setor compreendido entre $\theta = 0^\circ$ e 60° , pois os demais setores da superfície ficam conhecidos por simetria.

A superfície de ruptura de Ottosen (1977), apresenta as seguintes características em um plano desviador:

- a) É suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- b) Os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- c) É aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, ficando mais circular à medida que as tensões de compressão aumentam.

Desta forma, o critério de ruptura de Ottosen (1977) apresenta todas as características observadas experimentalmente para a superfície de ruptura do concreto.

4.1.1.2 Critério de Plastificação

Considera-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha um endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura. Assim, considerando a tensão efetiva ou uniaxial equivalente $\sigma_{ef} = f_{cm}$, obtém-se, a partir da equação (4.1), que define o critério de ruptura, a seguinte expressão para as superfícies de plastificação:

$$F = \sigma_{ef} = \left[\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2} \right] / 2 \quad (4.10)$$

O domínio elástico, para o concreto comprimido, é definido para tensões efetivas menores que 30% da tensão de ruptura. Para superfícies de carregamento subseqüentes à superfície de plastificação inicial ($0,3f_{cm} \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$) o concreto encontra-se no domínio plástico, em que apresenta um comportamento elastoplástico com endurecimento (Figura 4.3).

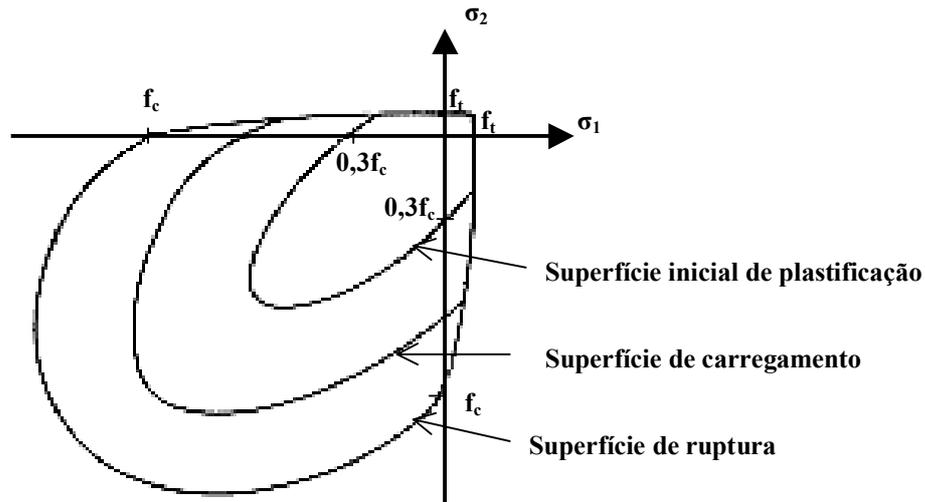


FIGURA 4.3: Superfícies de plastificação e ruptura.

4.1.1.3 Regra de Endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. Esta regra é determinada pela relação entre a tensão efetiva e a deformação plástica acumulada ou efetiva. Através dos conceitos de tensão efetiva e deformação plástica efetiva, é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Para representar o comportamento do concreto comprimido, emprega-se neste trabalho a curva tensão-deformação uniaxial proposta pelo Código Modelo CEB-FIB 1990 (1993), cuja equação é dada abaixo.

$$\sigma = - \frac{-\frac{E}{f_{cm}}\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{0,0022}\right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}}0,0022 - 2\right)\frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (4.11)$$

onde E é o módulo de elasticidade do concreto na origem, aos 28 dias de idade. Este módulo pode ser estimado a partir da resistência à compressão do concreto aos 28 dias, através da expressão proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993):

$$E = \alpha_E \cdot E_{co} [f_{cm} / f_{cmo}]^{1/3} \quad (4.12)$$

em que $E_{co} = 2,15 \cdot 10^4$ MPa, $f_{cmo} = 10$ MPa e α_E é um coeficiente que leva em consideração o tipo de agregado utilizado no concreto. Nas aplicações realizadas neste trabalho, nas quais o agregado não foi especificado, adotou-se $\alpha_E = 1$, que corresponde aos agregados do tipo quartzo.

Considerando-se que a componente de deformação elástica é expressa por σ/E , obtém-se, para $0,3f_{cm} \leq \sigma \leq f_{cm}$, a partir de (4.9), uma relação $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$. A curva tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial está mostrada na Figura 4.4.

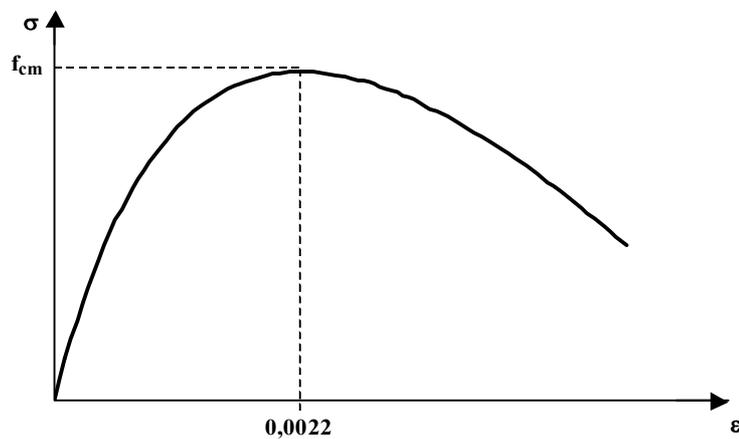


FIGURA 4.4: Curva tensão-deformação uniaxial para o concreto comprimido.

4.1.2 Modelo para o Concreto Fissurado

O aparecimento de fissuras, nas estruturas de concreto, ocorre, geralmente, já nas condições de serviço, devido à resistência à tração do concreto ser muito inferior à sua resistência à compressão.

Uma modelagem adequada da fissuração nas estruturas de concreto armado é fundamental para uma análise precisa destas estruturas, pois a mesma induz um acentuado comportamento não-linear, que influencia fortemente no comportamento carga-deslocamento destas estruturas.

Os modelos desenvolvidos para descrever o funcionamento do concreto armado fissurado geralmente consideram uma perda da capacidade de carga do concreto causada pela fissuração. No contexto do Método dos Elementos Finitos, basicamente duas aproximações têm sido usadas para representar a fissuração: o modelo de fissuras discretas e o modelo de fissuras distribuídas.

No modelo de fissuras discretas, cada fissura é representada individualmente, como uma descontinuidade real na malha de elementos finitos. Este modelo foi primeiramente aplicado por Ngo e Scordelis (1967), em análises elástico-lineares de vigas simplesmente apoiadas. Neste estudo, as fissuras foram modeladas por separação de nós em localizações pré-estabelecidas, os quais ocupavam inicialmente a mesma posição no espaço. Em estudos posteriores, este modelo foi sendo aperfeiçoado e as fissuras deixaram de serem pré-definidas para serem localizadas em posições estabelecidas durante a análise (Darwin, 1991).

Uma restrição que o modelo de fissuras discretas apresenta é que as fissuras são obrigadas a se formar ao longo da borda dos elementos. Desta forma, a resposta é fortemente dependente da malha de elementos finitos. Além disso, após a formação da fissura, a topologia da malha varia, exigindo procedimentos de atualização desta, que demandam muito tempo computacional. Mais recentemente, têm sido usados refinamentos de malha, através de métodos auto-adaptativos, de forma que novos elementos de fronteira são inseridos ao longo da propagação das fissuras. No entanto, estes métodos, apesar de reduzirem a dependência da malha e levarem a resultados suficientemente precisos, tornam a análise muito cara computacionalmente, sendo mais apropriados para problemas envolvendo somente poucas fissuras dominantes.

A necessidade de um modelo de fissuras que oferecesse geração automática das mesmas, sem a redefinição da malha de elementos finitos, levou grande parte dos pesquisadores nas últimas décadas a adotarem o modelo de fissuras distribuídas, introduzido por Rashid (1968). Neste modelo, as propriedades dos materiais são modificadas para considerar o dano devido à fissuração e admite-se que o concreto fissurado permanece contínuo, desconsiderando-se a descontinuidade real da malha.

De acordo com o modelo de fissuras distribuídas, o concreto, inicialmente isotrópico, torna-se ortotrópico, depois de fissurado, tendo os eixos materiais principais orientados no sentido das direções de fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado

de deformação e de tensão, de modo que, após o aparecimento das fissuras (quando a tensão principal de tração exceder um valor pré-determinado), o módulo de elasticidade longitudinal é reduzido a zero perpendicularmente ao plano da fissura e o efeito de Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido.

O modelo de fissuras distribuídas (“smeared crack model”) é atrativo do ponto de vista computacional, uma vez que a topologia da malha não muda no decorrer da análise, e só a relação tensão-deformação deve ser atualizada quando ocorre a fissuração.

A Figura 4.5 ilustra os dois modelos alternativos descritos para modelar as fissuras numa direção não conhecida “a priori”.

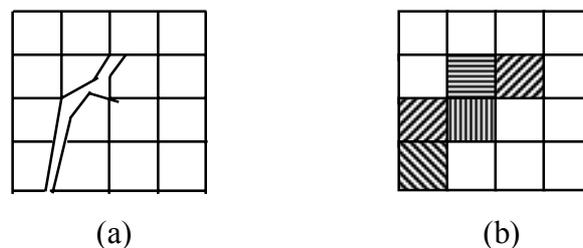


FIGURA 4.5: Modelos alternativos para modelar a fissuração – (a) fissuras discretas e (b) fissuras distribuídas.

Neste trabalho, adotou-se um modelo de fissuras distribuídas. Este modelo é composto por um critério de fissuração, uma regra para consideração da colaboração do concreto entre fissuras (“tension stiffening”) e um modelo para transferência de tensões de corte.

4.1.2.1 Critério de Fissuração

Neste trabalho, o concreto tracionado é modelado como um material elástico-linear até ocorrer a fissuração, sendo sua lei constitutiva dada pela versão isotrópica da relação $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$. O critério utilizado para avaliar a fissuração do concreto, baseado na formulação apresentada em Hinton (1988), consiste em verificar se o nível de tensões dos pontos de integração dos elementos de concreto alcançou a superfície de ruptura, apresentada no item 4.1.1.1.

A tensão principal de tração nos pontos de integração de cada elemento de concreto pode ser determinada a partir dos invariantes de tensões I_1 , J_2 e do ângulo de similaridade θ , por:

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (4.13)$$

Como o ponto pode atingir a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo boletim nº 156 do CEB (1983) para distinguir estas duas situações. De acordo com este critério, tem-se que:

- a) se $\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração fissurou;
- b) se $\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração esmagou.

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se a formação de uma fissura em um plano ortogonal à tensão σ_1 . A partir deste momento, o comportamento do concreto deixa de ser isotrópico e passa a ser ortotrópico, com os eixos materiais locais coincidindo com as direções principais de tensões.

No modelo implementado é permitida a ocorrência de dois conjuntos de fissuras em cada ponto de integração. Assim, para carregamentos posteriores, uma fissura secundária pode ocorrer no ponto de integração que estava previamente fissurado em uma direção. Neste caso, utiliza-se o procedimento da fissura fixa, em que a direção do primeiro conjunto de fissuras permanece fixa e a tensão de tração é avaliada perpendicularmente ao plano da fissura já existente. Se esta tensão satisfizer o critério definido acima para a fissuração, um novo conjunto de fissuras, perpendicular ao já existente, é formado, e todas as componentes de tensão são zeradas no ponto de integração analisado.

4.1.2.2 Colaboração do Concreto entre Fissuras

O comportamento carga-deslocamento do concreto armado é fortemente influenciado pela interação entre o concreto e o aço. A aderência entre estes materiais é que torna possível

a transmissão de esforços e sua qualidade é decisiva para a distribuição e abertura das fissuras.

Quando a resistência à tração do concreto é atingida, ocorre uma ruptura local do material e a fissura se forma. Após a fissuração, os esforços são transmitidos ao concreto pelos mecanismos de aderência, de modo que o concreto entre as fissuras continua resistindo a esforços de tração. Este fenômeno é conhecido como “efeito de rigidez à tração” (“tension stiffening effect”). Negligenciar esta capacidade de resistência implica subestimar significativamente a rigidez pós-fissuração a níveis de carga de serviço. Desta forma, é fundamental a consideração da capacidade resistente do concreto entre as fissuras, na análise de estruturas de concreto armado sob cargas de serviço.

A aderência, responsável pela transmissão de esforços entre o aço e o concreto fissurado, depende principalmente das características das barras de armadura (conformação superficial e diâmetro), da resistência do concreto, da história de carga (especialmente se ocorrerem carregamentos cíclicos) e das tensões normais à superfície da barra, e sua consideração no Método dos Elementos Finitos depende da forma de conectar os elementos de aço aos de concreto.

Existem duas maneiras de se modelar esta ligação: através da utilização de elementos especiais de aderência, onde as propriedades da aderência são modeladas por suas relações tensões-deslocamentos, de modo a considerar escorregamentos localizados nas proximidades das fissuras; ou ligando-se diretamente os elementos de aço aos de concreto, admitindo-se completa compatibilidade de deformações entre estes materiais e modificando-se a lei do material (concreto ou aço) para considerarem-se indiretamente os mecanismos de interação.

A utilização de elementos especiais de aderência requer um grande esforço computacional, e seu emprego só se justifica nos casos em que as tensões de aderência são de particular interesse, tais como em estudos de zonas de ancoragem e reforços estruturais, em que a falta da aderência é o modo de falha dominante (Stevens et al, 1991).

Neste trabalho, admite-se aderência perfeita entre o concreto e o aço e a degradação da aderência é considerada indiretamente pela introdução de um ramo descendente suave na curva tensão-deformação do concreto tracionado, de modo que as perdas de resistência à

tração ocorram gradualmente após a fissuração. Isto equivale a considerar o concreto como um material com amolecimento em tração.

A curva tensão-deformação para o concreto tracionado empregada com sucesso por Prates Júnior (1992) foi adotada neste trabalho. Esta curva é composta por um ramo ascendente, que corresponde a uma resposta elástica linear, e um ramo descendente, pós-fissura, que considera uma degradação linear da aderência (Figura 4.6). A relação constitutiva é expressa por:

$$\sigma = \alpha \cdot f_{tm} \left(1,0 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ctu}} \right) \quad (4.14)$$

onde α é o parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente e ε_{ctu} é um parâmetro que indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. Neste trabalho, adotou-se para α e ε_{ctu} os valores de 0,6 e 0,002, respectivamente.

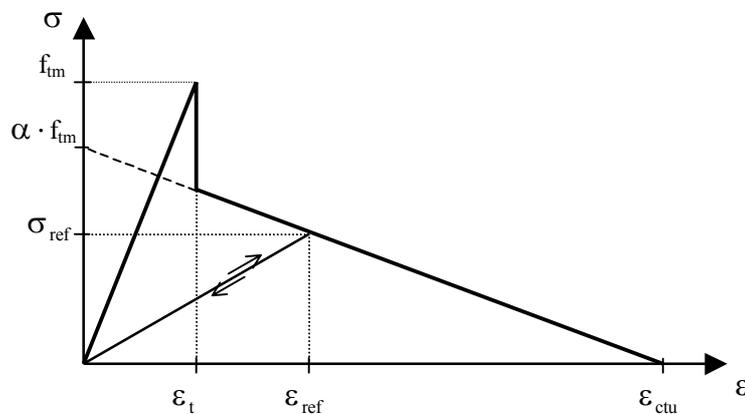


FIGURA 4.6: Curva tensão-deformação para o concreto tracionado.

A redistribuição de tensões, devido à fissuração em outros pontos de integração ou carregamentos posteriores, pode eventualmente forçar algum ponto previamente fissurado a fechar total ou parcialmente. Esta possibilidade é considerada neste modelo. Se a deformação atual ε é pequena comparada com a deformação ε_{ref} , armazenada como a máxima deformação de tração alcançada através da fissura pelo ponto de integração em questão, a tensão normal à fissura, σ , é calculada por:

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{ref}}}{\varepsilon_{\text{ref}}} \varepsilon \quad (4.15)$$

onde σ_{ref} é a tensão interpolada correspondente à deformação ε_{ref} . A trajetória desta "descarga" secante pode ser visualizada na Figura 4.6. A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até ε_{ref} ser excedida, após a qual segue a trajetória descendente definida pela equação (4.14).

No programa implementado, as componentes de deformação e tensão são obtidas nos pontos de integração em um sistema de coordenadas cartesianas. Desse modo, para a obtenção da tensão no concreto fissurado, as direções principais de deformações devem ser determinadas, uma vez que a equação (4.14) é válida apenas no sistema local dos eixos materiais. É necessário, portanto, a rotação para a direção da fissura.

As componentes de tensão, na direção da fissura, podem ser determinadas a partir das componentes cartesianas de tensão, através da matriz de rotação do sistema global para o local:

$$\sigma^L = \mathbf{R}^L \cdot \sigma^G \quad (4.16)$$

onde o índice L denota o sistema local e o índice G denota o global.

No sistema local, aplicam-se as fórmulas (4.14) ou (4.15) para calcular as tensões normais ao plano da fissura. A componente de tensão tangencial local é $\tau^L = G_c \gamma^L$, onde G_c é o módulo de elasticidade transversal reduzido, definido no próximo item.

Com as tensões ajustadas do ponto fissurado, retomam-se as componentes de tensões no sistema global de coordenadas:

$$\sigma^G = \mathbf{R}^G \cdot \sigma^L \quad (4.17)$$

4.1.2.3 Modelo para Transferência de Tensões de Corte

As primeiras fissuras, que aparecem no concreto sob carga, formam-se perpendicularmente à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto. As direções

principais se modificam, por mudanças no carregamento ou por não-linearidades da estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces da fissura. Este fenômeno ocasiona o surgimento de tensões de corte no plano da fissura, cujo valor depende das condições locais da fissura.

O principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados (“aggregate interlock”) e as principais grandezas envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos. Além disto, o efeito de pino da armadura (“dowell effect”) também influencia na transferência de esforços, sendo as principais variáveis envolvidas o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano da fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura da fissura, e quanto maior é este valor, menor é a capacidade de transferência de tensões de corte.

A inclusão direta dos efeitos destes mecanismos em um modelo de fissuras distribuídas é complexa. Geralmente utilizam-se aproximações para considerar a capacidade de transferência de tensões de corte no concreto fissurado. Estas aproximações consistem em adotar um valor reduzido para o módulo de elasticidade transversal, correspondente ao plano fissurado. Neste trabalho, adota-se o módulo de deformação por corte reduzido, proposto por Hinton (1988), em que o fator de redução é relacionado com a deformação de tração normal ao plano da fissura:

$$G_c = \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_t}{0,005} \right)^{k_1} \right] \cdot G_0 \quad (4.18)$$

onde ε_t é a deformação de tração fictícia normal ao plano da fissura, k_1 é um parâmetro que, segundo Cervenka (1985), varia de 0,3 até 1,0, e G_0 é o módulo de deformação por corte do concreto não-fissurado, dado a partir do módulo de deformação longitudinal na origem (E) por:

$$G_0 = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.19)$$

Nas aplicações do modelo, apresentadas neste trabalho, foi utilizado o valor mínimo para k_1 .

Observe-se que quanto maior a deformação na direção perpendicular ao plano da fissura, ε_p , menor é o valor do módulo de deformação por corte reduzido e , conseqüentemente, menor será a tensão de corte transferida através da fissura. Caso a fissura feche, o módulo G_0 é novamente adotado.

4.1.3 Modelo para o Concreto Submetido a Cargas de Longa Duração

O concreto submetido a cargas de longa duração sofre, além de uma deformação imediata, uma deformação devida a fluência, que se desenvolve ao longo do tempo. Desta forma, mesmo sob tensões constantes, as deformações no concreto aumentam no decorrer do tempo, conforme ilustrado na Figura 4.7.

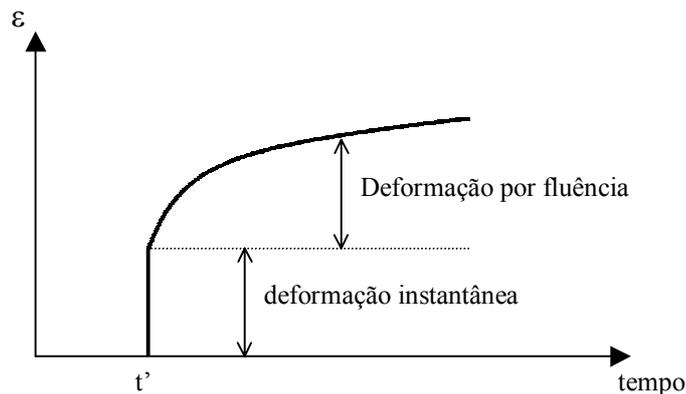


FIGURA 4.7: Evolução da deformação por fluência, para tensão constante aplicada em t' .

O fenômeno da fluência manifesta-se mais acentuadamente nas idades imediatamente posteriores ao aparecimento das tensões, e está relacionado com a circulação de água na massa de concreto e sua dissipação para o exterior. Em sua magnitude e desenvolvimento no tempo influem fundamentalmente a umidade, a temperatura ambiente, a idade do carregamento e o tempo transcorrido após sua aplicação, as dimensões da peça, as condições de cura, a composição do concreto e a velocidade de endurecimento do cimento.

Após a concretagem e cura do concreto, a evaporação da água residual alojada em seus vasos capilares, resíduo da reação de hidratação do cimento, faz com que os vasos capilares sejam esmagados, provocando uma perda de volume denominada retração, conforme ilustra a

Figura 4.8. Esta deformação ao longo do tempo é independente da tensão aplicada e está ligada a fenômenos semelhantes aos da fluência, relacionados com a água que em parte hidrata os componentes do cimento e, em parte, fica livre dentro da massa de concreto. Seu valor varia consideravelmente com o tamanho e a forma das peças, pois a evaporação da água é uma função da relação área da superfície/volume, e quanto menores as dimensões do elemento estrutural, maior é a retração.

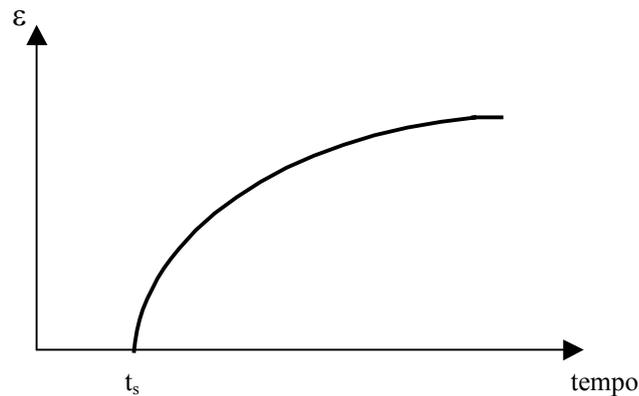


FIGURA 4.8: Curva de deformação por retração.

A fluência e a retração são deformações de mesma ordem de grandeza das deformações imediatas, para níveis usuais de tensão, e contribuem significativamente na resposta não-linear, de modo que a consideração destas deformações no modelo para o concreto submetido a cargas de longa duração é de indiscutível relevância.

No domínio das tensões de utilização, as deformações por fluência, devidas a tensões aplicadas em dois instantes diferentes, são consideradas aditivas (hipótese da superposição dos efeitos). Desta hipótese, tem-se que a deformação por fluência, sob tensão constante, está linearmente ligada à tensão. Esta hipótese é aceita, de acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), para níveis de tensões menores que 40% da resistência à compressão média do concreto. Neste estudo, por trabalhar-se nesta faixa de tensões, adotou-se este comportamento linear.

O modelo adotado para representar o comportamento dependente do tempo do concreto é um modelo reológico formado por uma cadeia de elementos Maxwell, baseado no modelo apresentado por Bazant e Wu (1974) e aplicado por Fairbairn et al (1987). Este modelo é constituído por uma associação em paralelo de elementos compostos por uma mola

em série com um amortecedor viscoso e está ilustrado na Figura 4.9. Conforme esta Figura, foram utilizados cinco elementos para compor a cadeia, sendo que no quinto elemento a mola não está acoplada a um amortecedor, a fim de tornar a deformação assintoticamente convergente para uma certa data, conforme o comportamento real do concreto.

Este modelo pode ser obtido a partir de um modelo elasto-viscoplástico, admitindo-se que os elementos de atrito possuam tensão de plastificação nula.

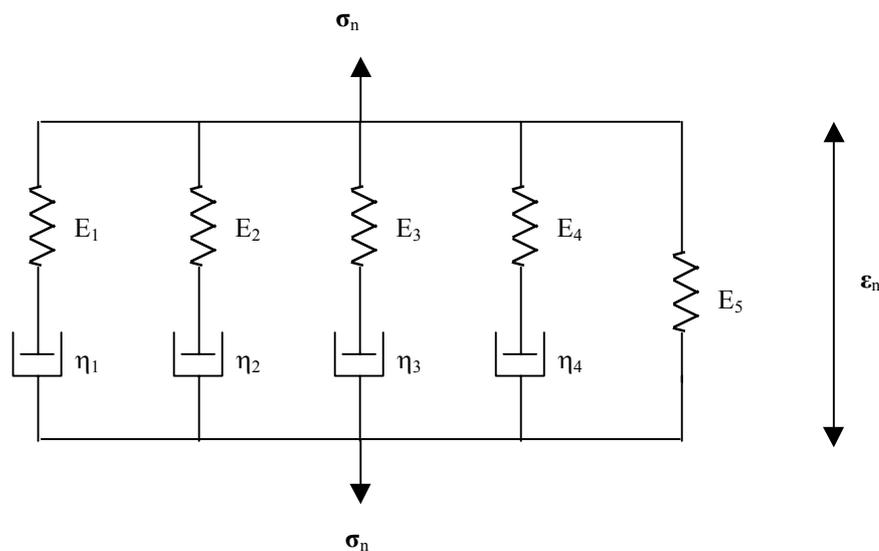


FIGURA 4.9: Modelo de cadeias Maxwell.

A tensão, num tempo t_n , é obtida pela soma das tensões atuantes em cada elemento da cadeia de Maxwell:

$$\sigma_n = \sum_{\mu=1}^5 \sigma_{\mu_n} \quad (4.20)$$

Observe-se que cada elemento desta cadeia apresenta a mesma deformação ϵ , pois os mesmos estão associados em paralelo.

No modelo implementado neste trabalho, as deformações por fluência e retração do concreto são tratadas como deformações impostas à estrutura, pois não produzem diretamente tensões no concreto. Desta forma, as tensões no concreto são determinadas descontando-se do valor da deformação total, obtida a partir do vetor de deslocamentos, as parcelas de deformação originadas diretamente pela fluência e retração.

Para estruturas de concreto armado, considera-se, nesta etapa viscoelástica, que o aço tem um comportamento elástico linear.

A formulação matemática do modelo, e a determinação dos parâmetros da fluência e da retração, de acordo com o CEB (1993), estão apresentados no trabalho de Claire (1994).

4.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

Neste trabalho, considera-se que as barras de aço resistam a esforços apenas na sua direção. Desta forma, é utilizado um modelo constitutivo uniaxial para descrever seu comportamento.

O aço é modelado como um material elastoplástico com endurecimento, sendo representado por um diagrama tensão-deformação bilinear. Admite-se que o aço apresente mesmo comportamento em tração e compressão.

Os aços do tipo A, que possuem dureza natural e patamar de escoamento bem definido, são modelados como um material elastoplástico perfeito. Desta forma, possui um comportamento elástico linear até a tensão de escoamento f_y ser atingida, após a qual o aço deforma-se sob tensão constante até atingir a ruptura, conforme ilustra o diagrama tensão-deformação apresentado na Figura 4.10.

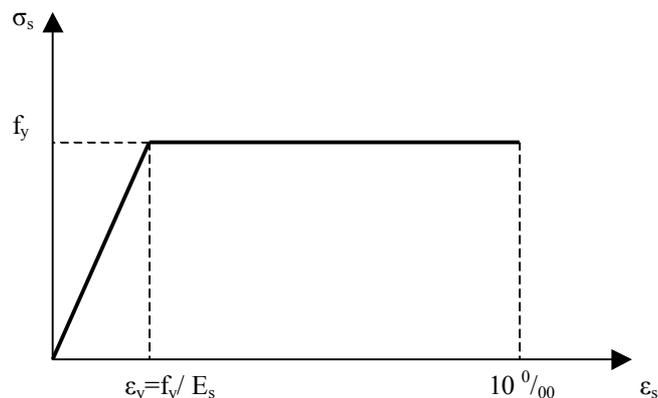


FIGURA 4.10: Diagrama tensão-deformação para o aço tipo A.

O aço do tipo B, encruado a frio, apresenta comportamento elastoplástico com endurecimento e, por simplificação, foi adotado o diagrama tensão-deformação com endurecimento linear, ilustrado na Figura 4.11. O endurecimento é definido por:

$$H'_s = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_p} = \frac{\Delta\sigma_s}{\Delta\varepsilon_p} = \frac{0,15f_y}{\left(10\text{‰} - \frac{0,85f_y}{E_s}\right) - \frac{0,15f_y}{E_s}} = \frac{0,15f_y}{10\text{‰} - \frac{f_y}{E_s}} \quad (4.21)$$

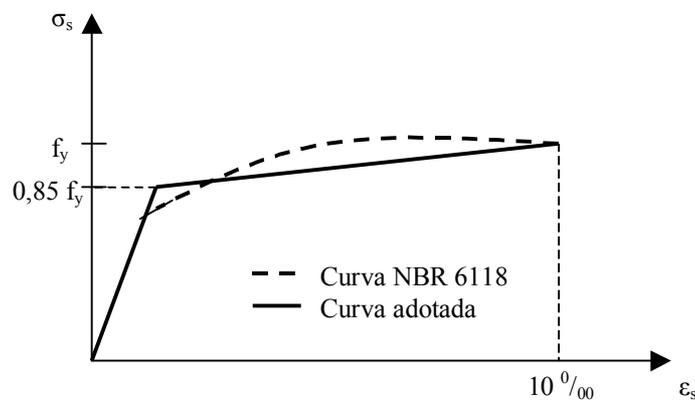


FIGURA 4.11: Diagrama tensão-deformação para o aço tipo B.

5 FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO

Neste capítulo, será apresentada a formulação utilizada para a análise estrutural não-linear, através do Método dos Elementos Finitos, de um material isotrópico homogêneo, de comportamento elasto-viscoplástico.

O programa computacional desenvolvido baseia-se no programa para análise dinâmica e transiente de estruturas tridimensionais de concreto armado com não-linearidade física, apresentado por Hinton (1988) e modificado por Claire (1994), para a implementação dos modelos constitutivos do concreto ao longo do tempo e do modelo incorporado de armadura, e aperfeiçoamento dos modelos elastoplásticos para os materiais.

Neste programa, o comportamento elasto-viscoplástico, idealizado para representar o comportamento real do concreto sob cargas de curta ou longa duração, é obtido em duas etapas distintas, conforme descrito no capítulo anterior. A primeira etapa, que corresponde ao comportamento viscoelástico dos materiais, e a segunda, correspondente ao comportamento elastoplástico, são executadas de forma sucessiva, à medida que são aplicadas as cargas (ou os deslocamento prescritos) nas datas especificadas pelo usuário, permitindo assim a aplicação de diversos carregamentos, em datas distintas, entre as quais ocorrem os fenômenos decorrentes do tempo.

5.1 FORMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO

A formulação matemática utilizada para a implementação do modelo elasto-viscoplástico no Método dos Elementos Finitos é apresentada neste item.

5.1.1 Deformações Viscoplasticas

De modo geral, na formulação de problemas contínuos não-lineares, admite-se que as componentes de deformação total, em um dado ponto, são compostas por uma parcela elástica

ε_e , e outra viscoplástica ε_{vp} , de modo que a taxa do vetor de deformações pode ser expressa por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} \quad (5.1)$$

onde o ponto (·) indica diferenciação em relação ao tempo t.

As tensões são produzidas unicamente pelas deformações elásticas, e sua taxa pode ser obtida em função da taxa de deformação elástica por meio da relação constitutiva:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (5.2)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material.

No espaço das tensões, pode-se expressar uma superfície de plastificação genérica por:

$$F\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle - F_0\langle\kappa\rangle = 0 \quad (5.3)$$

onde F é a função tensão efetiva, que é a condição de plastificação ou as funções de carregamento subseqüentes no modelo de plasticidade com endurecimento, e F_0 é um valor que define a posição da superfície de plastificação, em função do parâmetro de endurecimento κ . Tem-se um comportamento elástico para $F < F_0$, plástico para $F = F_0$ e, para $F > F_0$, viscoplástico.

A taxa de deformação viscoplástica pode ser determinada a partir do estado de tensões, de acordo com a equação (Hinton, 1988):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} &= \gamma\langle\Phi(F)\rangle \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \text{ para } F > F_0 \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} &= \mathbf{0}, \text{ para } F \leq F_0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde γ é o coeficiente de fluidez, $Q = Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}, \kappa)$ é a função de potencial plástico e $\langle\Phi(F)\rangle$ é uma função monotônica crescente para valores positivos de F e nula nos demais casos:

$$\begin{aligned} \langle\Phi(F)\rangle &= \Phi(F), \text{ para } F > 0 \\ \langle\Phi(F)\rangle &= 0, \text{ para } F \leq 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Neste trabalho, considera-se plasticidade associada, na qual a função potencial plástico, que define a direção de plastificação, é considerada igual à função que define a superfície de plastificação (equação (4.10)). Desta forma, o vetor taxa de deformação plástica é normal à superfície de plastificação. Esta regra de fluxo é considerada para o concreto apenas por razões de ordem prática. Neste caso, a taxa de deformação viscoplástica, para $F > F_0$, é:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \cdot \mathbf{a} \quad (5.6)$$

onde \mathbf{a} é o vetor gradiente que define a direção do incremento de deformação viscoplástica, perpendicular à superfície de plastificação. Este vetor será obtido no próximo item, para a função que define a superfície de plastificação adotada neste trabalho e apresentada no Capítulo 4.

Nas aplicações numéricas, realizadas neste trabalho, foi utilizado o valor constante de 10^{-5} para o coeficiente de fluidez, e a função Φ definida por:

$$\Phi(F) = F - F_0 \quad (5.7)$$

A deformação viscoplástica é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp} = \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} dt \quad (5.8)$$

Em um procedimento numérico passo por passo, a deformação viscoplástica pode ser obtida, para tempos discretos separados de Δt , pela seguinte aproximação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{vp_n} + [(1 - \beta) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp_n} + \beta \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp(n+1)}] \cdot \Delta t_n \quad (5.9)$$

onde Δt_n é o intervalo de tempo decorrido entre os instantes t_n e t_{n+1} .

Deste modo, o incremento de deformação viscoplástica, dentro de um intervalo, é definido em termos das condições existentes nas extremidades do intervalo. Para $\beta = 0$, obtém-se o esquema de integração explícito de Euler, utilizado neste trabalho, onde o incremento de deformação é completamente determinado pelas condições existentes no tempo t_n , através da expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{vp_n} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp_n} \cdot \Delta t_n \quad (5.10)$$

5.1.2 Vetor de Fluxo Plástico

O vetor de fluxo plástico é dado por:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.11)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz} \rangle \quad (5.12)$$

O vetor \mathbf{a} expresso pela equação (5.11) pode ser escrito como:

$$\mathbf{a} = C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3 \quad (5.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{xz}\} \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \left(s_y s_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(s_x s_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}), 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{yz}), 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}) \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

sendo as tensões desviadoras s_x , s_y e s_z determinadas pelas equações (4.6). Os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 são dados por:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\partial F}{\partial I_1} \\ C_2 &= \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ C_3 &= - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (5.15)$$

As derivadas da função de plastificação F em relação aos invariantes de tensão I_1 , J_2 e θ são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial I_1} &= \frac{\beta}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right] \\ \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} &= \frac{1}{2} \left[\lambda + \frac{\lambda(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1) + 4\alpha \sqrt{J_2}}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right] \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}\end{aligned}\tag{5.16}$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right]\tag{5.17}$$

e, para $\sin 3\theta \leq 0$, tem-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \sin[1/3 \arccos(-c_2 \sin 3\theta)]}{\sin[\arccos(-c_2 \sin 3\theta)]}\tag{5.18}$$

e para $\sin 3\theta > 0$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \sin[1/3 \arccos(-c_2 \sin 3\theta)]}{\sin[\arccos(-c_2 \sin 3\theta)]}\tag{5.19}$$

5.1.3 Tensões Elásticas

As tensões elásticas são obtidas, a cada instante t_n , a partir da parcela elástica da deformação total neste instante $\boldsymbol{\varepsilon}_{e_n}$, de acordo com a equação:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{e_n} = \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_{vp_n})\tag{5.20}$$

onde ε_n é a deformação total no instante t_n e σ_n é o vetor de tensões elásticas neste instante. No caso de não-linearidade geométrica da estrutura, ε_n denota o vetor de deformações de Green-Lagrange e $\sigma_n = \mathbf{T}_n$ denota o vetor de tensões de Piola-Kirchhoff II.

5.1.4 Modelo de Camadas Superpostas

Neste trabalho, aplica-se o modelo de camadas superpostas (“overlay model”) para representar o comportamento viscoelástico do concreto com envelhecimento, conforme Pande et al (1977). Neste modelo, o sólido analisado é suposto como sendo composto de várias camadas, cada uma das quais apresentando a mesma deformação. O campo de tensões totais é obtido pela soma das contribuições de cada camada.

Mediante a introdução de um número conveniente de camadas superpostas, com a atribuição de diferentes características materiais a cada uma, é possível reproduzir com bastante precisão o comportamento experimental de materiais complexos como o concreto.

O modelo constitutivo viscoelástico do concreto utilizado neste trabalho, introduzido no Capítulo 4, é formado por um conjunto de elementos tipo Maxwell em paralelo. O mesmo foi modelado em 5 camadas superpostas (Figura 5.1), que têm como parâmetros as espessuras e_i , os módulos de elasticidade das molas E_i , os coeficientes de amortecimento η_i , e as tensões de plastificação F_{0i} , nas quais começam a atuar os elementos de atrito.

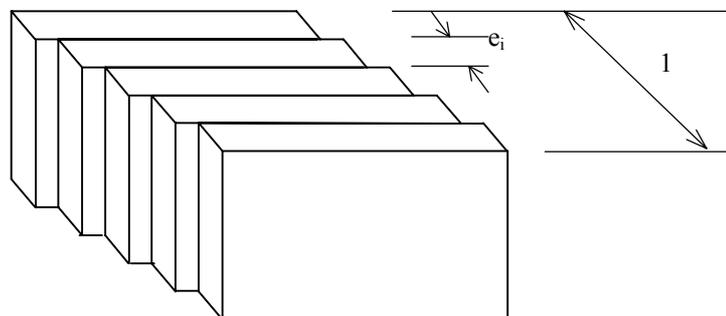


FIGURA 5.1: Analogia da técnica de camadas em duas dimensões.

Como os nós em todas as camadas coincidem, em cada uma delas tem-se a mesma deformação. Isto resulta em um campo de tensões diferente em cada camada, de modo que o campo de tensões totais é obtido pela soma da contribuição de cada camada:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\sigma}_{i_n} \cdot e_i \quad (5.21)$$

onde k é o número de camadas do modelo e,

$$\sum_{i=1}^k e_i = 1 \quad (5.22)$$

sendo e_i a espessura relativa de cada camada, isto é, sua espessura dividida pela espessura total.

A matriz de rigidez de cada elemento simples de concreto é obtida pela soma das contribuições de cada camada individualmente, ou seja:

$$\mathbf{K}_{e_n} = \sum_{i=1}^k \int_{V_0} \mathbf{B}_n^T \cdot \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{B}_n \cdot dV \quad (5.23)$$

onde \mathbf{D}_i é a matriz constitutiva de cada camada. Esta matriz será distinta para cada uma das camadas, dependendo de suas propriedades materiais. O processo de solução é idêntico ao descrito nas seções anteriores, com os termos de deformação e tensão sendo calculados para cada camada separadamente. É importante salientar que, embora as deformações viscoplásticas, em cada camada, possam ser diferentes, devido aos diferentes valores do coeficiente de fluidez e do módulo de elasticidade, a deformação total deve ser a mesma.

5.2 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Neste trabalho, adota-se um método incremental-iterativo para a solução das equações de equilíbrio não-lineares dadas no Capítulo 3, de forma que o carregamento é subdividido em cargas parciais ou incrementos de carga e , para cada um destes incrementos, é obtida uma solução inicial na forma de incremento de deslocamentos. Esta solução é efetuada, considerando equações de equilíbrio lineares dentro do incremento, e serve como uma

primeira aproximação a partir da qual se calculam forças residuais e se dá início ao processo iterativo.

O incremento de deslocamento, ocorrido durante cada passo de tempo Δt_n é calculado, como:

$$\Delta \mathbf{U}_n = \mathbf{K}_n^{-1} \cdot \Delta \mathbf{P}_n \quad (5.24)$$

onde $\Delta \mathbf{U}_n$ é o vetor que contém os incrementos dos deslocamentos nodais da estrutura, \mathbf{K}_n é a matriz de rigidez secante global e $\Delta \mathbf{P}_n$ é a variação nas cargas nodais durante o intervalo de tempo Δt_n . Como os incrementos de carga são aplicados em passos discretos, $\Delta \mathbf{P}_n = \mathbf{0}$ para todos os passos de tempo, exceto para o primeiro dentro de um incremento de carga.

Desta forma, aplicando-se as condições de contorno, determinam-se os incrementos de deslocamentos nodais por (5.24) e o vetor de deslocamentos nodais totais:

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta \mathbf{U}_n \quad (5.25)$$

a partir do qual são obtidas as deformações de Green-Lagrange, a matriz de deformações-deslocamentos e a matriz de rigidez atualizada, para cada elemento, conforme explicado em maiores detalhes no Capítulo 3. Nas aplicações apresentadas neste trabalho, a matriz de rigidez foi atualizada a cada iteração, mas há a possibilidade, no modelo, de que esta matriz seja atualizada apenas em incrementos de tempo definidos, de modo a se obter uma maior rapidez computacional.

Como o cálculo do incremento de deslocamento está baseado numa forma linearizada das equações incrementais de equilíbrio, torna-se necessário efetuar correções iterativas sobre $\Delta \mathbf{U}_n$, a fim de alcançar o equilíbrio no tempo t_n . Há vários procedimentos de solução disponíveis para realizar as correções necessárias. Neste trabalho, utiliza-se um procedimento iterativo, que consiste em calcular as forças não-equilibradas em cada iteração, e em seguida reaplicá-las na iteração subsequente.

O procedimento de solução descrito acima corresponde a um método secante, recomendado por Kwon (2000) para problemas não-lineares formulados com base na formulação Lagrangeana Total, em substituição aos métodos tangentes de Newton-Raphson, que apresentam dificuldades numéricas na obtenção de curvas pós-pico.

5.2.1 Solução por Incremento de Deslocamentos

A solução do sistema de equações (5.24) permite obter incrementos de deslocamentos nodais, para incrementos de carga ocorridos num intervalo de tempo. Se um deslocamento é prescrito na estrutura, seu valor é conhecido e a força nodal necessária para mantê-lo se torna a incógnita do problema.

No programa computacional desenvolvido neste trabalho, implementou-se uma solução por incremento de deslocamentos, de modo a possibilitar uma solução com controle de deslocamentos e permitir a obtenção de curvas carga-deslocamento pós-pico.

Esta solução consiste em substituir os valores prescritos dos deslocamentos nas equações do sistema em que aparece e transferir a quantidade conhecida para o outro lado da equação, ou seja, para o vetor de incrementos de cargas aplicadas à estrutura, de modo que a linha e coluna correspondentes a este deslocamento prescrito possam ser excluídos do sistema de equações. As reações correspondentes aos deslocamentos nodais prescritos são computadas separadamente, a partir das forças internas equilibradas que correspondem a estes nós.

5.2.2 Critério de Convergência

As condições de estado estacionário podem ser controladas pelo exame da variação dos deslocamentos nodais. A convergência é atingida quando esta quantidade torna-se adequadamente pequena, de acordo com um fator de tolerância adotado.

O critério utilizado para a avaliação da convergência da solução é definido, neste trabalho, por:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}_n\|}{\|\mathbf{U}_n\|} < 0,0001 \quad (5.26)$$

onde $\|\Delta \mathbf{U}_n\|$ é a norma euclidiana do vetor de incremento de deslocamentos e $\|\mathbf{U}_n\|$ é a norma euclidiana do vetor de deslocamentos totais.

5.3 REGRA DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho, as integrais são resolvidas numericamente, conforme a regra de integração do tipo Gauss introduzida por Irons (1971) e recomendada por Hinton (1988).

Nesta regra de integração são utilizados quinze pontos de integração dispostos simetricamente no domínio tridimensional do elemento, conforme a Figura 5.2. Hinton (1988) verificou que esta regra diminui consideravelmente o esforço computacional e apresenta resultados bastante próximos aos obtidos pela regra de integração numérica completa de Gauss-Legendre.

Esta regra de integração pode ser expressa na forma (Hinton, 1988):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz =$$

A · f(0,0,0) +	(1 termo)	(5.27)
B · [f(-b,0,0) + f(b,0,0) + f(0,-b,0) + ...] +	(6 termos)	
C · [f(-c,-c,-c) + f(c,-c,-c) + ...]	(8 termos)	

onde A = 1,564444, B = 0,355556 e C = 0,537778 são fatores de peso, e b = 1,0 e c = 0,6741 definem a posição dos pontos de integração no sistema de coordenadas naturais do elemento.

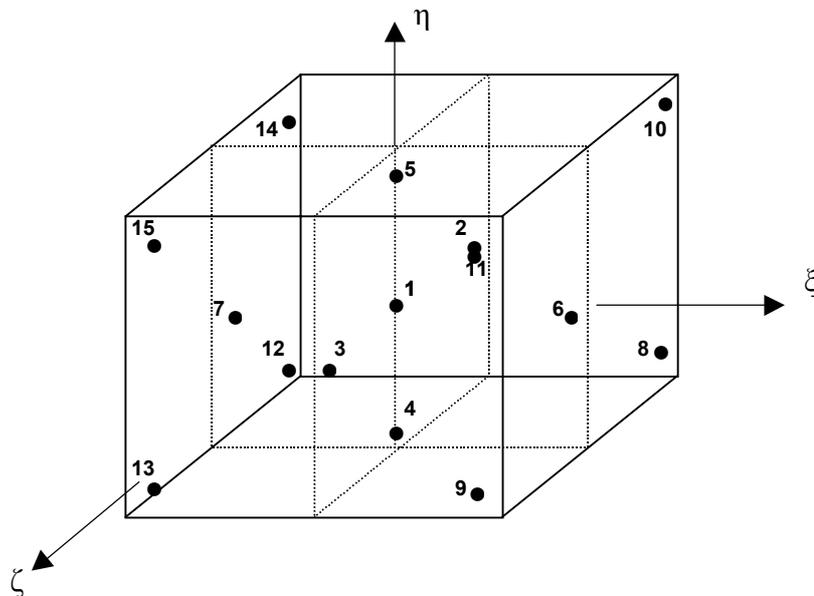


FIGURA 5.2: Distribuição dos pontos de integração em um elemento finito de 20 nós.

5.4 ESTRUTURA DO PROGRAMA

A seqüência computacional do programa é apresentada no fluxograma geral da Figura 5.3.

Na etapa 1, viscoelástica, adotou-se o modelo de cinco camadas idealizado por Bazant e Wu (1974), onde são representadas a fluência e a retração. Nesta etapa, não se considera o efeito de endurecimento e a tensão de plastificação inicial do modelo é tomada como zero. Nos pontos de integração, onde atuam tensões de tração, admite-se que não surjam novas fissuras nesta fase.

Na etapa 2, elastoplástica, é determinado o endurecimento do ponto de integração em que a tensão efetiva exceder a tensão de plastificação inicial. Utiliza-se uma única camada nesta fase de carregamento instantâneo. Quando se passa da etapa 1 para a etapa 2 do programa, calcula-se, para cada ponto de integração, uma tensão equivalente em função das cinco tensões determinadas no final da etapa 1. Nesta fase, verificam-se os pontos de integração quanto ao critério de fissuração, conforme descrito no Capítulo 4.

É importante ressaltar ainda que, na etapa 1, as premissas para a consideração dos efeitos dependentes do tempo só permitem resultados confiáveis para as cargas em serviço, enquanto que, na etapa 2, pode-se analisar estruturas até a carga de ruptura.

O programa foi desenvolvido na linguagem de programação FORTRAN, ideal para processamentos numéricos, e de modo a tornar os resultados dos testes independentes de ajustes de parâmetros. São fornecidos apenas, através de um arquivo de entrada de dados, dados da geometria e topologia da estrutura, da malha de elementos finitos adotada, do tipo de carregamento, das propriedades dos materiais e das condições ambientais.

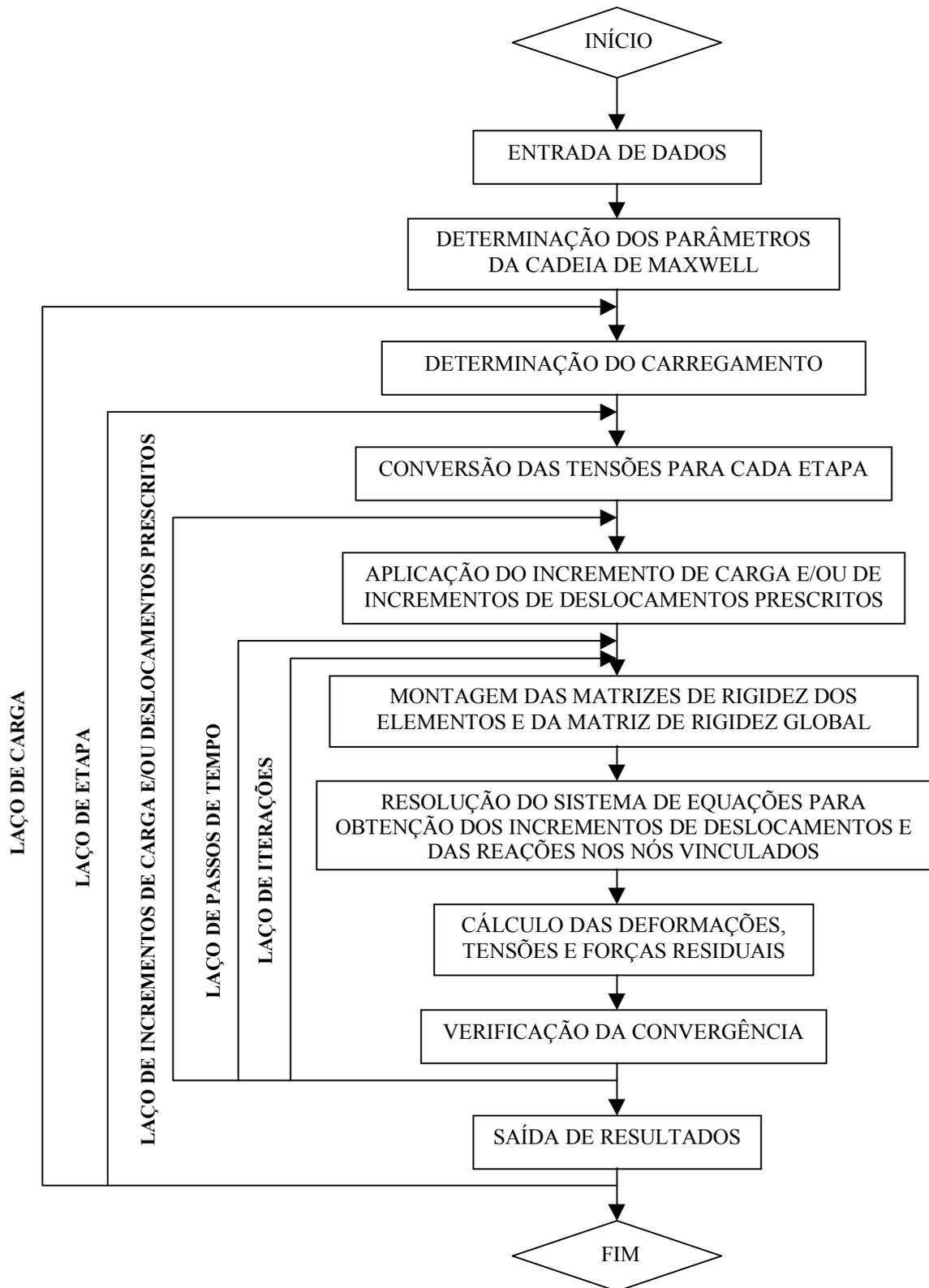


FIGURA 5.3: Fluxograma do programa.

6 COMPROVAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO E APLICAÇÕES

Neste capítulo, são apresentados exemplos de aplicação do modelo proposto na análise não-linear de elementos estruturais, através do Método dos Elementos Finitos, de modo a avaliar a capacidade do modelo de simular o comportamento real das estruturas.

O modelo foi inicialmente aplicado a pilares esbeltos de material elástico e elastoplástico, com o objetivo de se comprovar a adequação do modelo não-linear geométrico implementado, através da comparação entre os resultados obtidos através deste modelo e resultados analíticos ou numéricos obtidos por outros autores para tais estruturas. Posteriormente, são apresentados exemplos de aplicação do modelo na análise não-linear física e geométrica de pilares esbeltos de concreto armado, submetidos a esforços de flexo-compressão, e seus resultados são confrontados com resultados experimentais existentes para estes pilares.

Para comprovar a aplicabilidade do modelo a estruturas submetidas a estados de tensões tridimensionais, são apresentados três exemplos que envolvem o confinamento de pilares de concreto, dois dos quais envolvendo confinamento por compósitos de fibras de carbono.

Todos os exemplos foram testados sob cargas de curta duração.

6.1 ANÁLISE ELÁSTICA DE UMA VIGA-COLUNA COM GRANDES DESLOCAMENTOS

Com o intuito de validar o modelo não-linear geométrico implementado, o mesmo foi aplicado a uma viga-coluna submetida à carga uniformemente distribuída (Figura 6.1). A resposta desta viga-coluna, engastada numa extremidade e livre na outra, pode ser obtida através da solução analítica de Holden (1972).

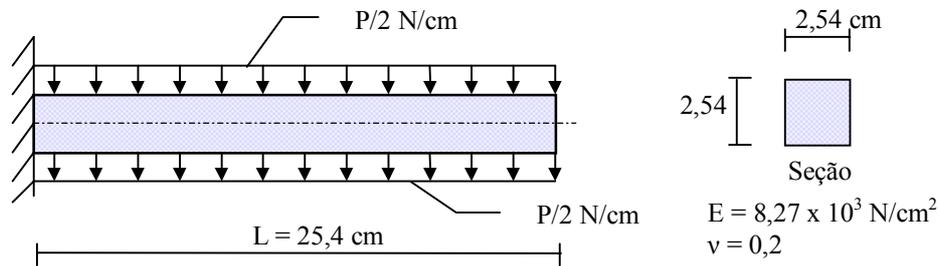


FIGURA 6.1: Viga-coluna sob carga uniformemente distribuída.

A viga-coluna é constituída por material isotrópico e elástico linear. De modo a prevenir uma resposta plástica da estrutura, tomou-se uma tensão de escoamento suficientemente grande.

Esta viga-coluna foi discretizada em cinco elementos finitos de iguais dimensões, ao longo de seu comprimento, e sua resposta, mostrada na Figura 6.2 juntamente com a solução analítica de Holden (1972), foi obtida através da aplicação de incrementos de carga. Na Figura 6.2 encontra-se também a solução obtida pelo modelo, no caso de linearidade geométrica.

Verifica-se que a resposta obtida pelo modelo não-linear foi coincidente com a solução analítica de Holden, diferindo bastante da resposta obtida pelo modelo linear.

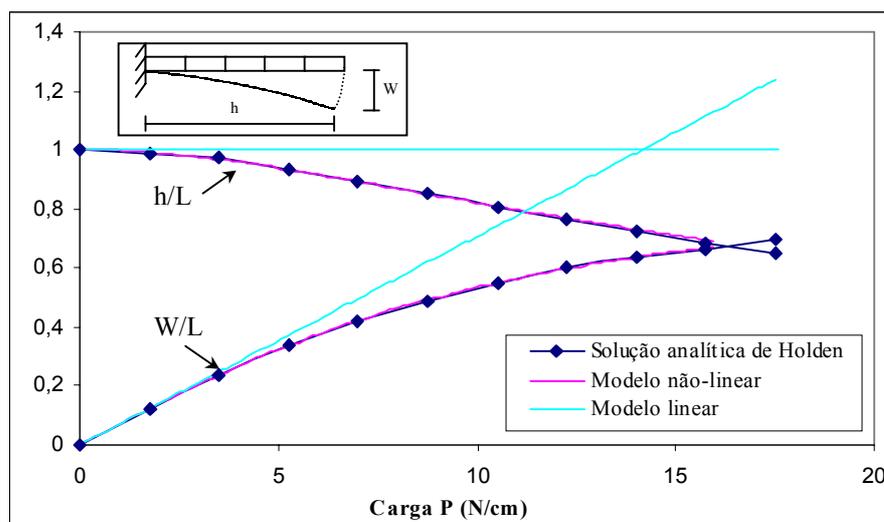


FIGURA 6.2: Variação da Flecha W/L e de h/L com a carga P .

6.2 ANÁLISE DE UM PILAR ELASTOPLÁSTICO COM GRANDES DESLOCAMENTOS

A análise de um pilar de material elastoplástico, através do Método dos Elementos Finitos, foi realizada por Kanchi et al (1978), com o objetivo de associar efeitos de instabilidade com plasticidade.

De modo a verificar a aplicabilidade do modelo proposto a um exemplo simples que envolve não-linearidades material e geométrica, este pilar foi analisado e sua curva carga-deslocamento foi comparada com a solução obtida por Kanchi et al (1978). O modelo utilizado por Kanchi et al (1978) é bidimensional e composto por elementos finitos isoparamétricos de oito nós.

As dimensões do pilar e a malha de elementos finitos utilizada na análise deste pilar, que possui mesmo número de elementos utilizados por Kanchi et al (1978), estão apresentadas na Figura 6.3.

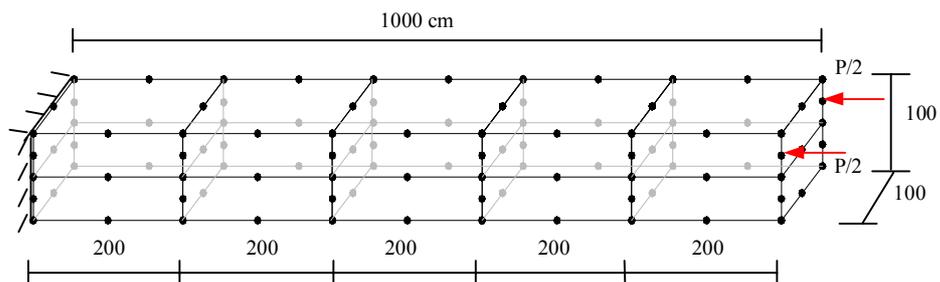


FIGURA 6.3: Dimensões e malha de elementos finitos do pilar.

O pilar foi submetido a incrementos de carga, aplicados com uma excentricidade de 25 cm e seu material apresenta módulo de elasticidade de $2,0 \times 10^7$ t/m², tensão de escoamento σ_e de $3,0 \times 10^4$ t/m² e coeficiente de Poisson nulo.

O critério de escoamento, que define a superfície de plastificação ou de carregamento, adotado por Kanchi et al (1978) e neste exemplo é o critério definido pela superfície de Von Mises, expresso por:

$$F = \sigma_{ef} = (3J_2)^{1/2} \quad (6.1)$$

Neste exemplo, admite-se que a tensão de plastificação é dada por:

$$\sigma_y = \sigma_e + H' \cdot \varepsilon_p \quad (6.2)$$

onde H' é a taxa de endurecimento e ε_p a deformação plástica.

Desta forma, admite-se que o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento para valores de $\sigma_{ef} \geq \sigma_y$.

Os resultados obtidos na análise do pilar encontram-se na Figura 6.4, para diferentes taxas de endurecimento. Não há informações no trabalho de Kanchi et al (1978) sobre a taxa de endurecimento considerada na análise e sobre o coeficiente de fluidez adotado. Mesmo assim, consideramos os resultados obtidos por este autor e pelo programa desenvolvido neste trabalho bastante próximos. As duas análises caracterizaram com bastante proximidade o início do escoamento e a diferença existente na curva carga-deslocamento, após este ponto, pode ser explicada pelas diferentes funções de escoamento e coeficiente de fluidez adotados na análise. Na Figura 6.4 são também apresentadas as curvas obtidas para um material elástico e para o caso linear geométrico.

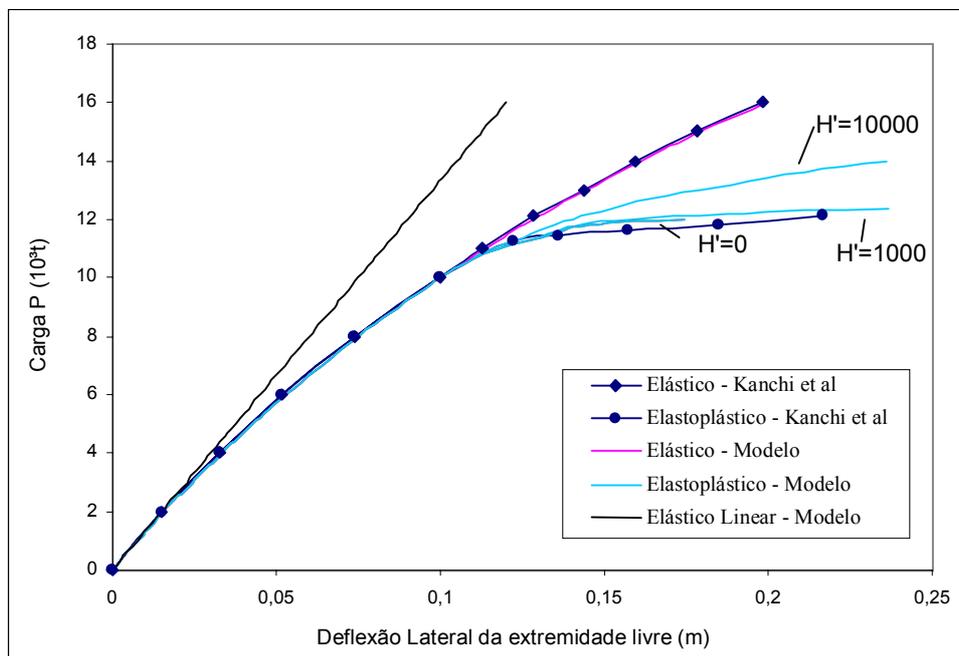


FIGURA 6.4: Deflexão lateral da extremidade livre.

6.3 ANÁLISE DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

Neste item são analisados pilares esbeltos de concreto armado sob flexo-compressão, de modo a validar o modelo não-linear proposto para o concreto armado, associado com não-linearidades de ordem geométrica, já que os pilares esbeltos são bastante afetados por efeitos de segunda ordem.

6.3.1 Pilar de Kordina

Kordina (1976) ensaiou uma série de pilares esbeltos birrotulados de concreto armado, sob flexo-compressão oblíqua. Os resultados para um pilar de seção retangular (S-XII), com seção transversal 17,40 x 26,55cm e 498cm de comprimento, foram utilizados na comprovação experimental do modelo desenvolvido neste trabalho.

As características geométricas do pilar e a posição de aplicação da carga encontram-se ilustradas na Figura 6.5.

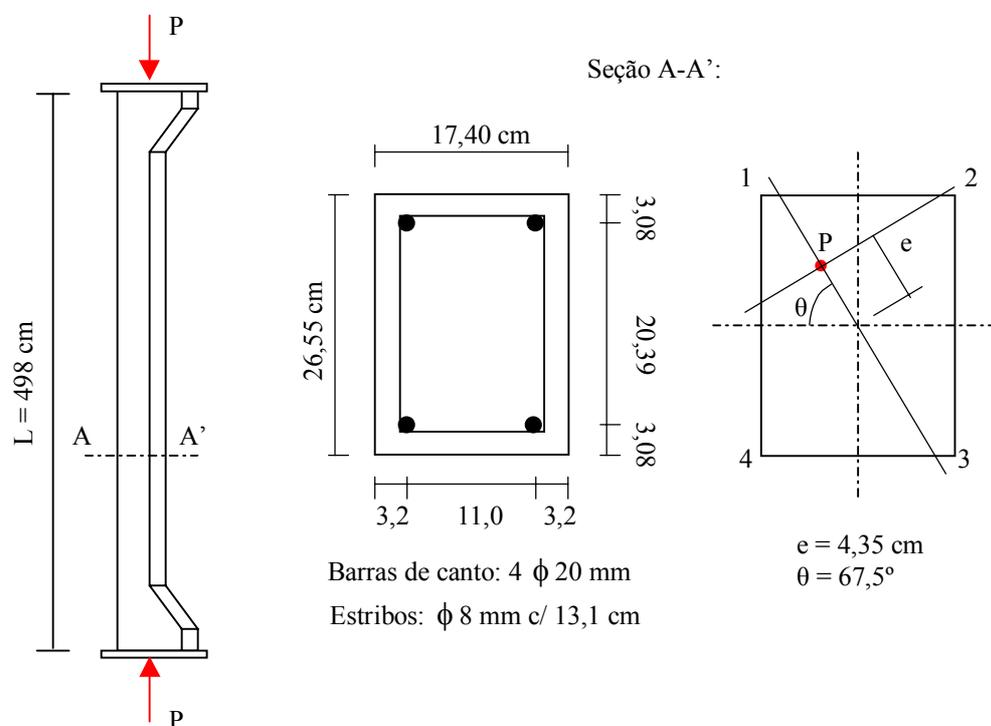


FIGURA 6.5: Geometria e carregamento do pilar S-XII.

Os pilares foram aumentados para 26,4 x 26,4 cm na zona de transferência de cargas, de modo a evitar que a ruptura ocorresse neste ponto. Como tal precaução pode ser desprezada numa análise numérica, o pilar foi analisado como tendo a mesma seção transversal ao longo de sua altura.

A armadura longitudinal, constituída por quatro barras de canto, corresponde a uma taxa total de armadura de 2,80%. O aço utilizado, BSt 42/50, apresentou uma tensão média de escoamento de 453,3 MPa. Neste exemplo, admitiu-se uma tensão de escoamento de 500 MPa para a armadura transversal e um módulo de deformação longitudinal de 210 GPa para as armaduras transversal e longitudinal.

A resistência cúbica do concreto, determinada em cubos com 20 cm de aresta, no dia do ensaio, foi de 32,9 MPa. No entanto, como os modelos implementados neste trabalho são calibrados a partir da resistência do concreto à compressão, medida em cilindros com 15cm de diâmetro e 30cm de altura, foi necessário uma conversão de valores. A resistência cilíndrica do concreto à compressão $f_{c\text{ cilíndrica}}$ pode ser obtida a partir de sua resistência cúbica $f_{c\text{ cúbica}}$ a partir da seguinte expressão, apresentada por Leonhardt (1977), com base nas recomendações do CEB de 1964:

$$f_{c\text{ cilíndrica}} = 0,83 \cdot f_{c\text{ cúbica}} \quad (6.3)$$

Desta forma, a resistência do concreto à compressão utilizada na análise através do programa, foi de 27,31MPa.

Devido à simetria de geometria e carga deste exemplo, apenas a metade do pilar foi modelada, através de uma malha com dez elementos ao longo do comprimento, dois ao longo da base e dois ao longo da altura da seção. A malha de elementos finitos utilizada na análise está mostrada na Figura 6.6, e foi definida de modo a apresentar um nó no ponto de aplicação da carga. A solução computacional foi obtida pela aplicação de incrementos de deslocamento de 0,001 cm neste nó.

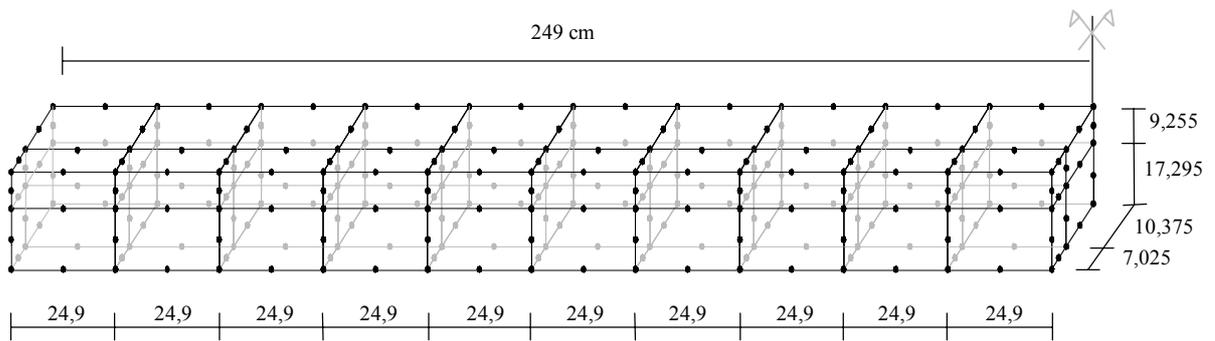


FIGURA 6.6: Malha de elementos finitos empregada na análise.

Na Figura 6.7, comparam-se os valores das flechas no meio do vão, obtidas numérica e experimentalmente. Nas Figuras 6.8 a 6.11 são comparadas as deformações longitudinais obtidas experimentalmente nos vértices da seção transversal central do pilar, com as deformações específicas medidas nos pontos de integração de concreto mais próximos destes vértices.

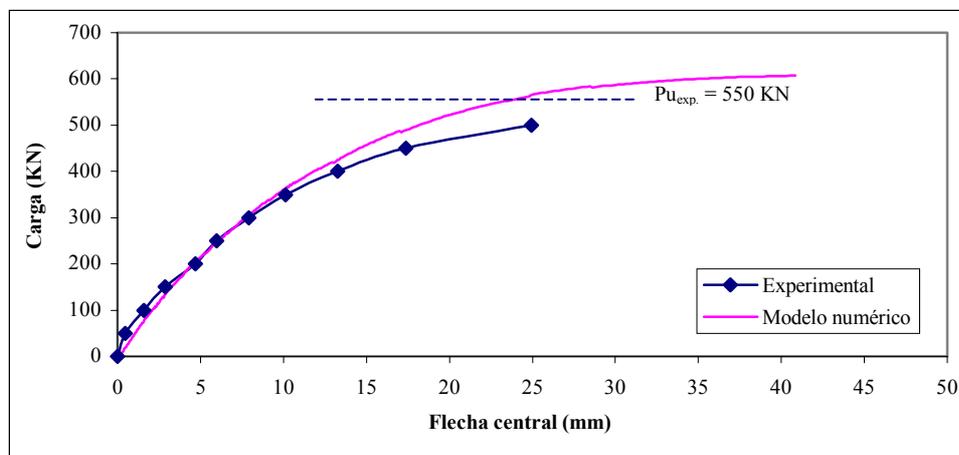


FIGURA 6.7: Flecha resultante na seção central do pilar.

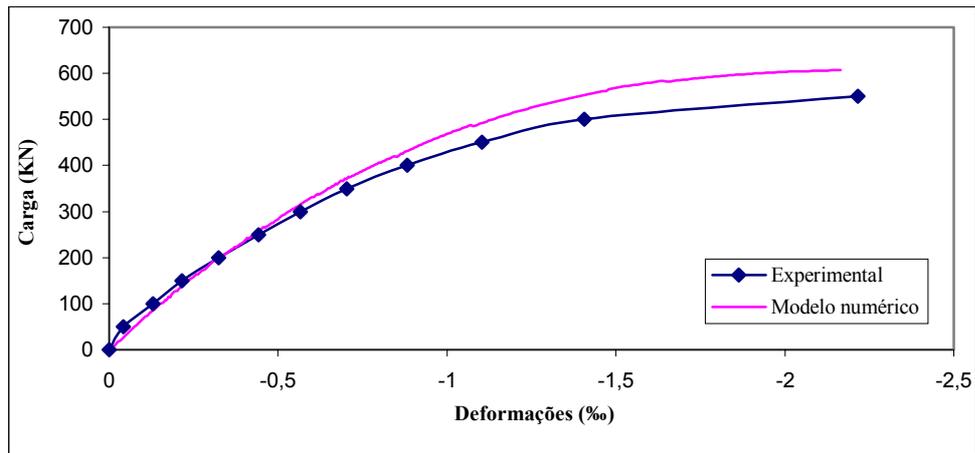


FIGURA 6.8: Deformações específicas no vértice 1.

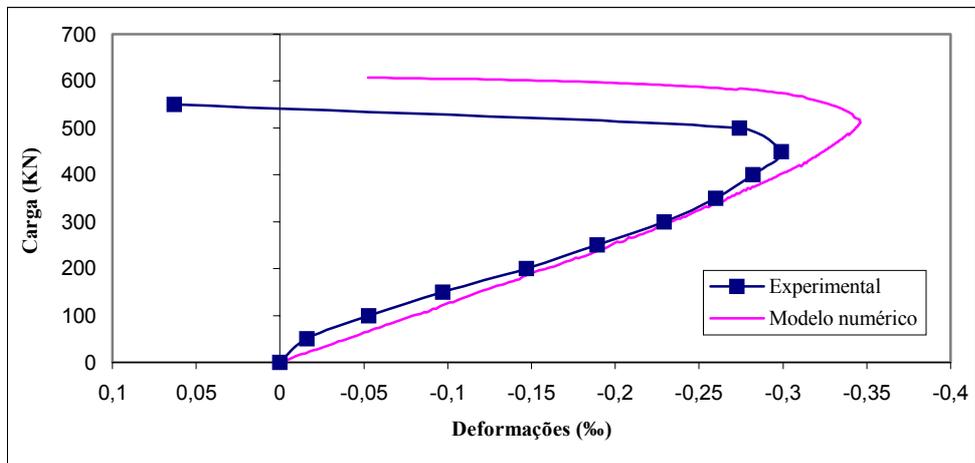


FIGURA 6.9: Deformações específicas no vértice 2.

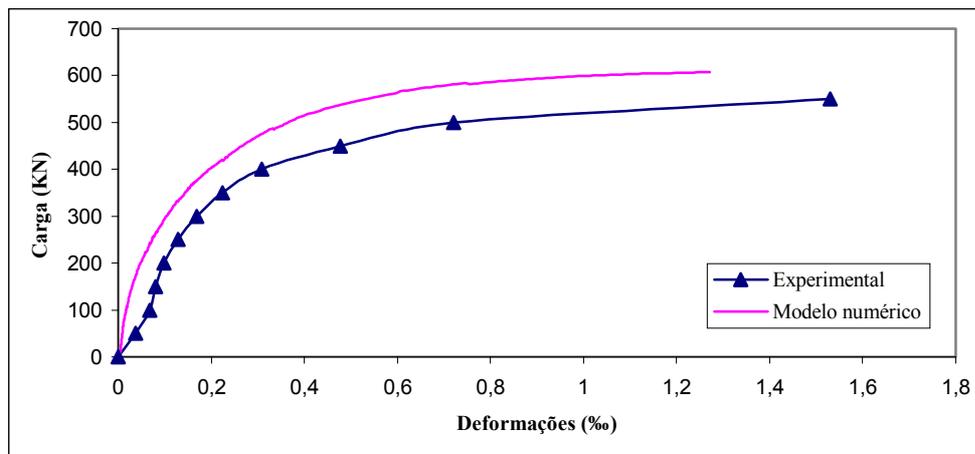


FIGURA 6.10: Deformações específicas no vértice 3.

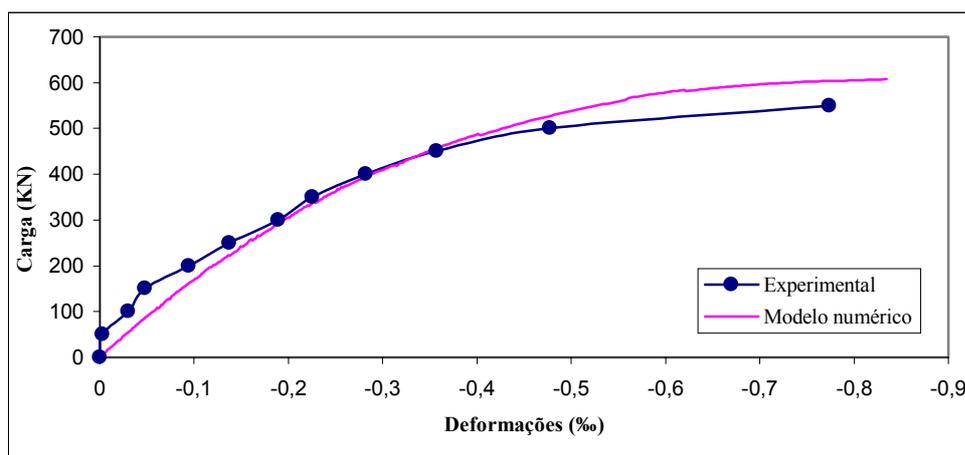


FIGURA 6.11: Deformações específicas no vértice 4.

Observa-se que, de uma maneira geral, há uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais. A carga de ruptura obtida experimentalmente foi de 550 kN, para a qual não foi medida a flecha no centro do pilar, de modo que na Figura 6.7 este ponto não está indicado. A carga de ruptura obtida pelo modelo foi em torno de 10% maior que a obtida no ensaio.

6.3.2 Pilares de Kim e Yang

Kim e Yang (1995) ensaiaram um total de trinta pilares de concreto armado de mesma seção transversal, com índices de esbeltez λ iguais a 10, 60 e 100, para três valores de resistências de 25,5, 63,5 e 86,2 MPa, e com taxas de armadura longitudinal ρ de 1,98% e 3,95%. Todos os pilares são birrotulados e estão submetidos à flexo-compressão normal, com a carga aplicada com uma excentricidade de 2,4 cm.

Neste trabalho, foram analisados os pilares com λ igual a 60 e 100, onde se estuda os efeitos da resistência do concreto e da taxa de armadura longitudinal na obtenção das curvas carga-deslocamento da estrutura e carga-deformação da armadura longitudinal. Detalhes da geometria e do carregamento dos pilares podem ser vistos na Figura 6.12.

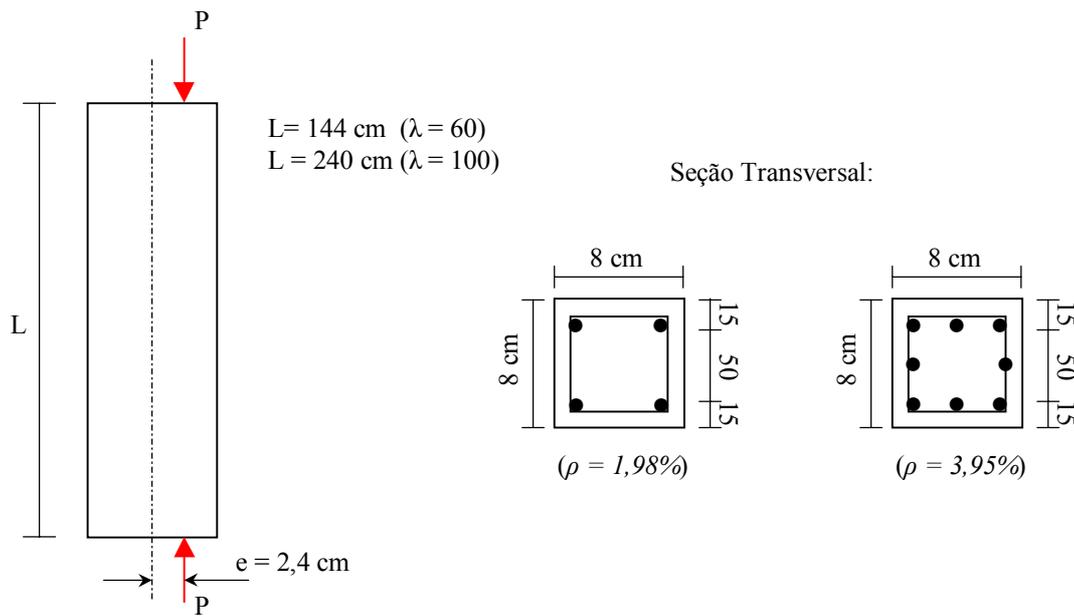


FIGURA 6.12: Geometria e carregamento dos pilares.

Na Tabela 6.1 os pilares analisados neste trabalho estão enumerados de acordo com a mesma numeração dos pilares de Kim e Yang (1995), na qual as letras L, M e H denotam os concretos de resistência normal, média e alta, respectivamente, juntamente com as características específicas de cada pilar.

A resistência do concreto dos pilares foi avaliada em corpos de prova cilíndricos com 10 cm de diâmetro e 20 cm de altura. Como os modelos implementados são calibrados pela resistência cilíndrica de corpos de prova com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura, foi necessário fazer um ajuste nestes valores. A geometria do corpo de prova pode afetar os resultados do ensaio em laboratório sobre a resistência do concreto, na medida em que, para uma razão altura/diâmetro igual a dois, quanto maior o diâmetro menor a resistência (Mehta e Monteiro, 1994). Desta forma, as resistências utilizadas nas análises dos pilares foram reduzidas em 5%, com base em um gráfico do Concrete Manual (1975), que mostra a influência do diâmetro do corpo de prova sobre a resistência do concreto quando a razão altura/diâmetro é igual a dois.

Tabela 6.1: Pilares analisados.

Pilar	λ	ρ (%)	f_{cm} (MPa)	f_{cm} adotado
60L2	60	1,98	25,5	24,2
60M2	60	1,98	63,5	60,4
60H2	60	1,98	86,2	81,9
100L2	100	1,98	25,5	24,2
100M2	100	1,98	63,5	60,4
100H2	100	1,98	86,2	81,9
100L4	100	3,95	25,5	24,2
100M4	100	3,95	63,5	60,4
100H4	100	3,95	86,2	81,9

As barras longitudinais possuem 6,35 mm de diâmetro e 387 MPa de tensão de escoamento, e os estribos 3 mm de diâmetro, espaçados de 60 mm. Admitiu-se uma tensão de escoamento para os estribos de 500MPa e um módulo de deformação longitudinal de 210 GPa para a armadura longitudinal e transversal.

Devido à simetria de carregamento e de geometria destes pilares, apenas a metade dos mesmos foi considerada nas análises. As malhas de elementos finitos utilizadas estão esquematizadas na Figura 6.13. As extremidades dos pilares foram modeladas através de elementos trapezoidais, de modo a apresentarem nós com mesma excentricidade com que a carga foi aplicada nos ensaios.

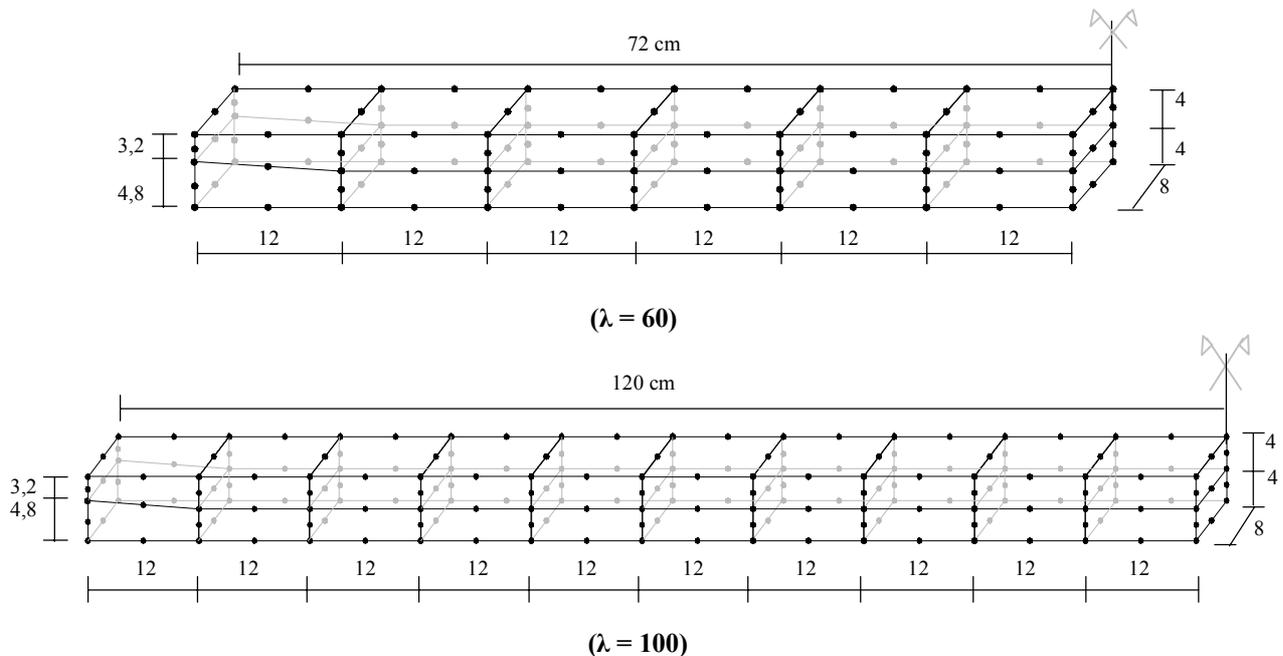


FIGURA 6.13: Malhas de elementos finitos utilizadas nas análises.

As análises foram realizadas com incrementos de deslocamento de 0,0015 cm, de modo a tornar possível a obtenção de curvas pós-ruptura.

Os resultados das análises através do programa estão apresentados nos itens 6.3.2.1 e 6.3.2.2, onde são comparados com os resultados experimentais obtidos por Kim e Yang (1995). Para cada item discriminado na Tabela 6.1, foram ensaiados dois pilares.

6.3.2.1 Curvas Carga-Deslocamento na Seção Central

Nas Figuras 6.14 a 6.22, são apresentadas as curvas carga-deslocamento, obtidas pelo modelo e experimentalmente, para os nove pilares analisados.

Verifica-se uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais, principalmente para os concretos de resistência normal. A curva pós-pico foi obtida pelo modelo apenas para o pilar 60L2, para o qual são disponíveis resultados experimentais após a ruptura. Para os demais pilares, são apresentadas as curvas até a ruptura.

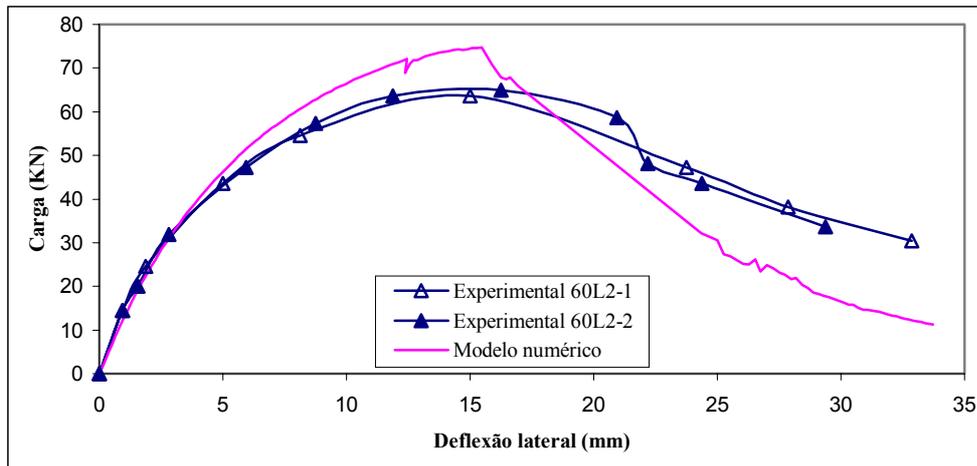


FIGURA 6.14: Deflexão lateral da seção central do pilar 60L2.

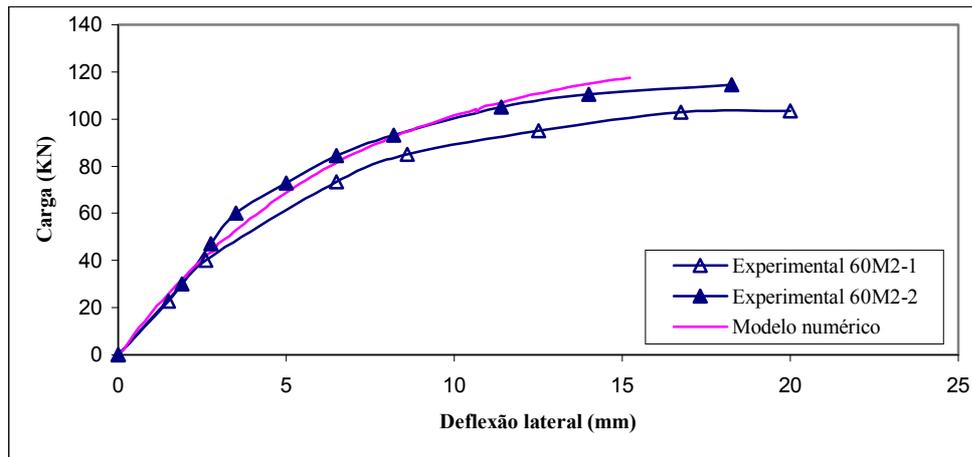


FIGURA 6.15: Deflexão lateral da seção central do pilar 60M2.

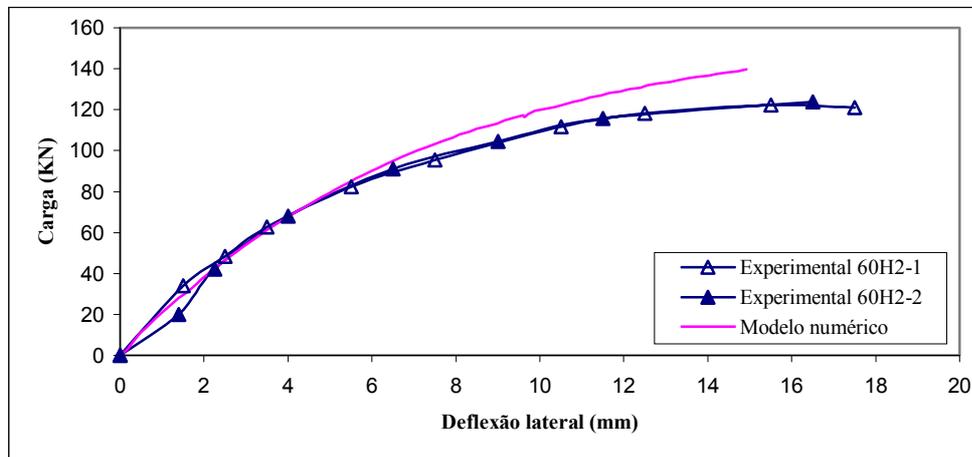


FIGURA 6.16: Deflexão lateral da seção central do pilar 60H2.

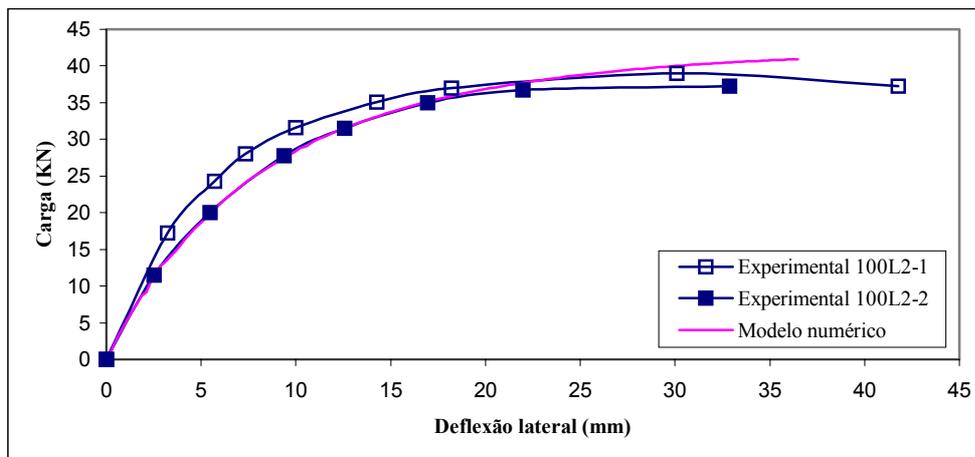


FIGURA 6.17: Deflexão lateral da seção central do pilar 100L2.

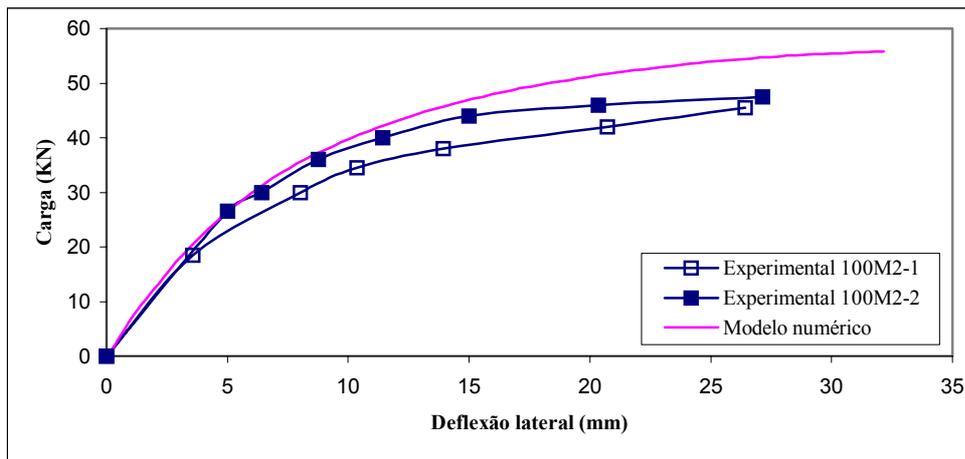


FIGURA 6.18: Deflexão lateral da seção central do pilar 100M2.

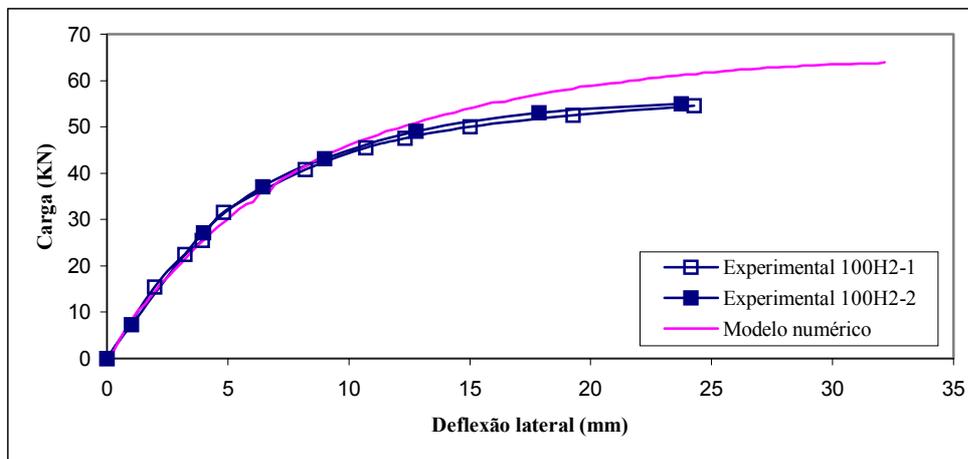


FIGURA 6.19: Deflexão lateral da seção central do pilar 100H2.

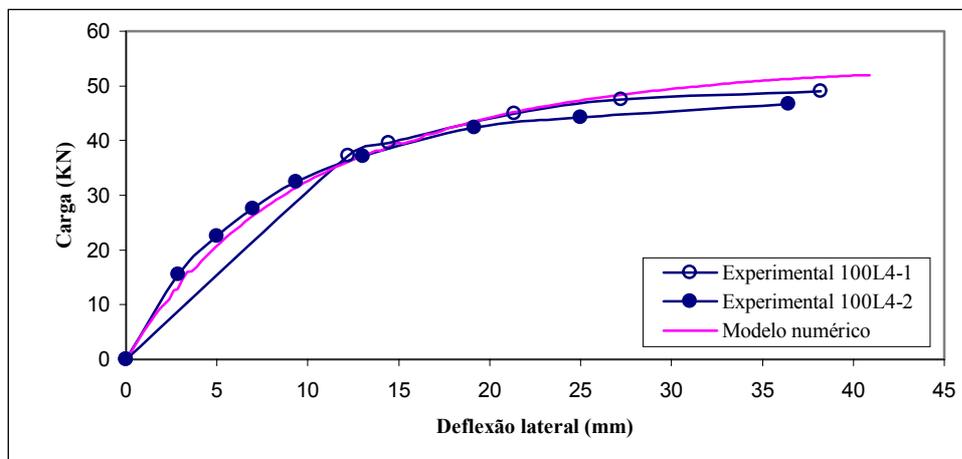


FIGURA 6.20: Deflexão lateral da seção central do pilar 100L4.

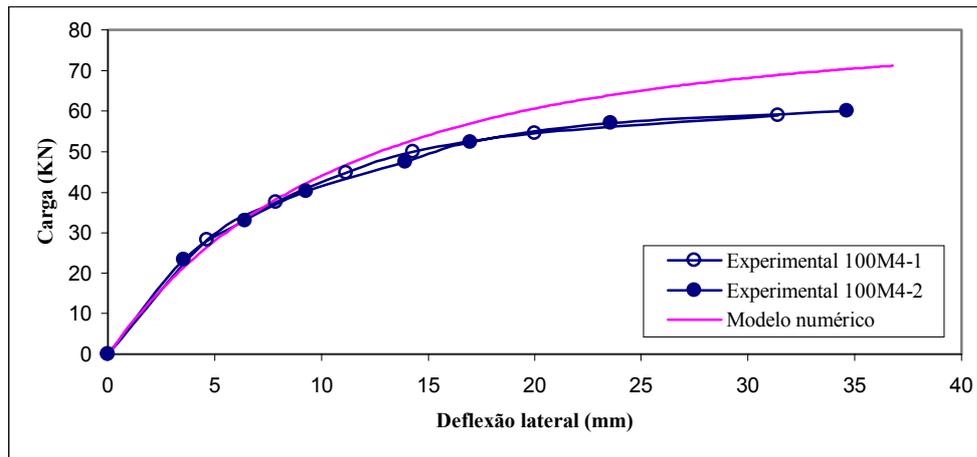


FIGURA 6.21: Deflexão lateral da seção central do pilar 100M4.

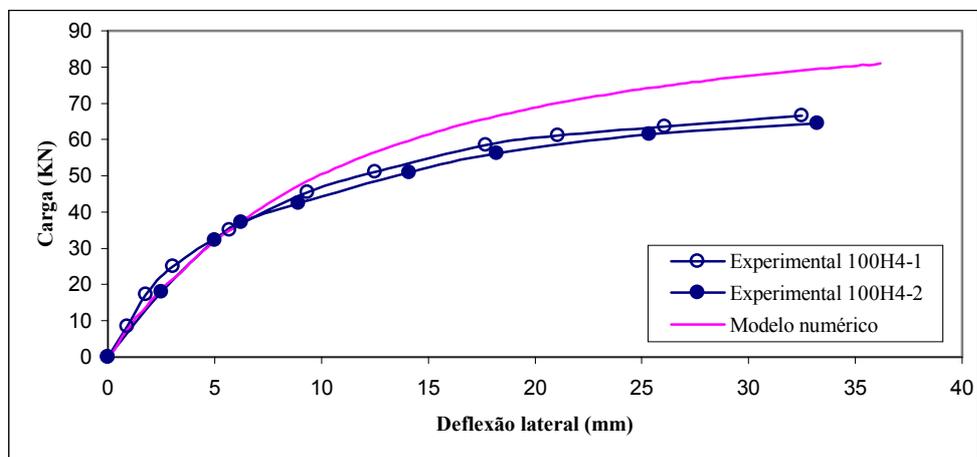


FIGURA 6.22: Deflexão lateral a seção central do pilar 100H4.

6.3.2.2 Deformações na Armadura Longitudinal

Nas Figuras 6.23 a 6.31 são apresentadas as curvas das deformações específicas da armadura longitudinal no centro do vão, pela carga aplicada, obtidas pelo modelo implementado e obtidas experimentalmente por Kim e Yang (1995). A deformação específica foi determinada nos pontos de integração da armadura mais próximos da seção central dos pilares, nas barras de armadura mais distantes do centro dos mesmos, onde atuam as maiores tensões de tração e compressão.

Assim como os resultados apresentados no item anterior, verifica-se uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais.

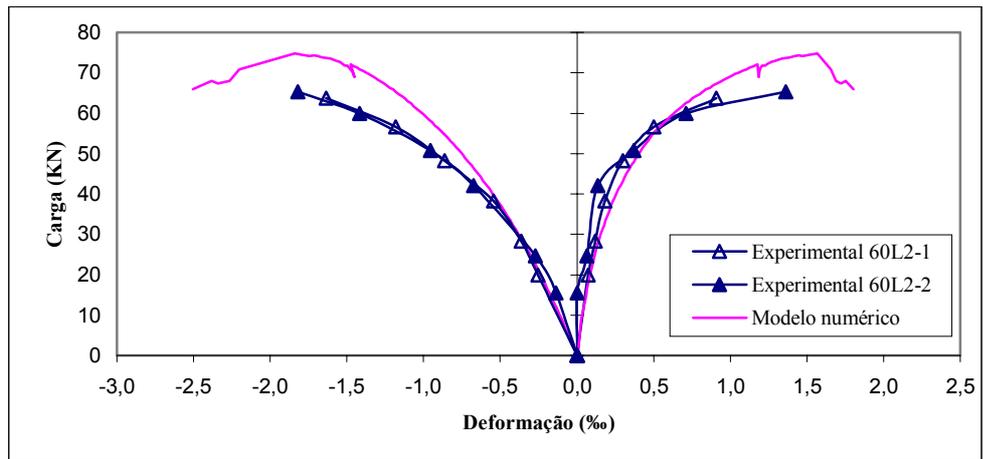


FIGURA 6.23: Deformações da armadura no centro do pilar 60L2.

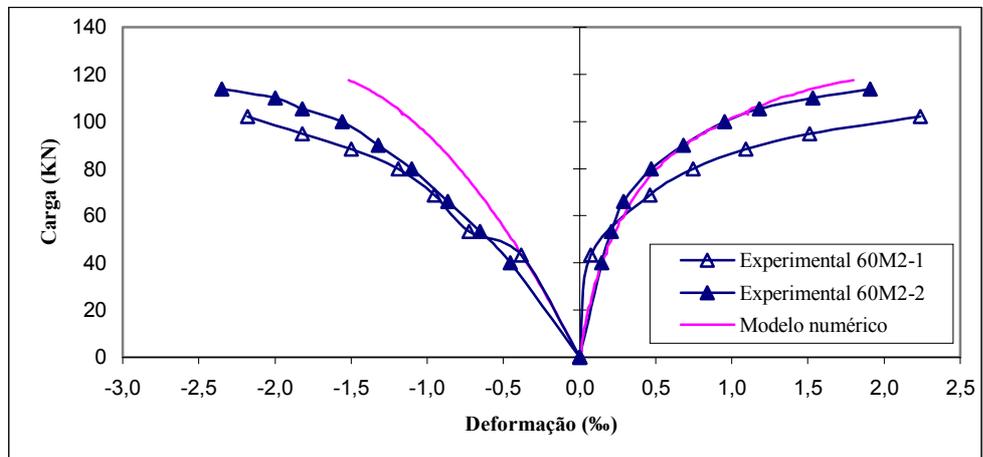


FIGURA 6.24: Deformações da armadura no centro do pilar 60M2.

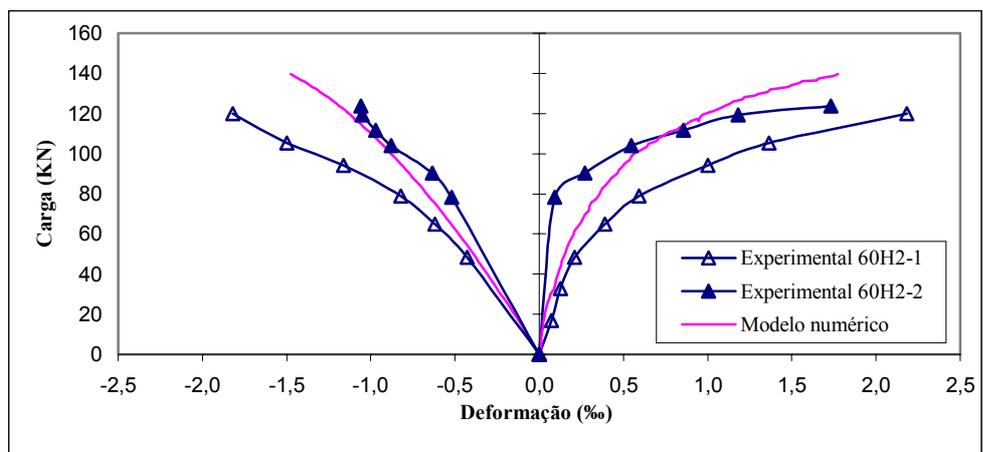


FIGURA 6.25: Deformações da armadura no centro do pilar 60H2.

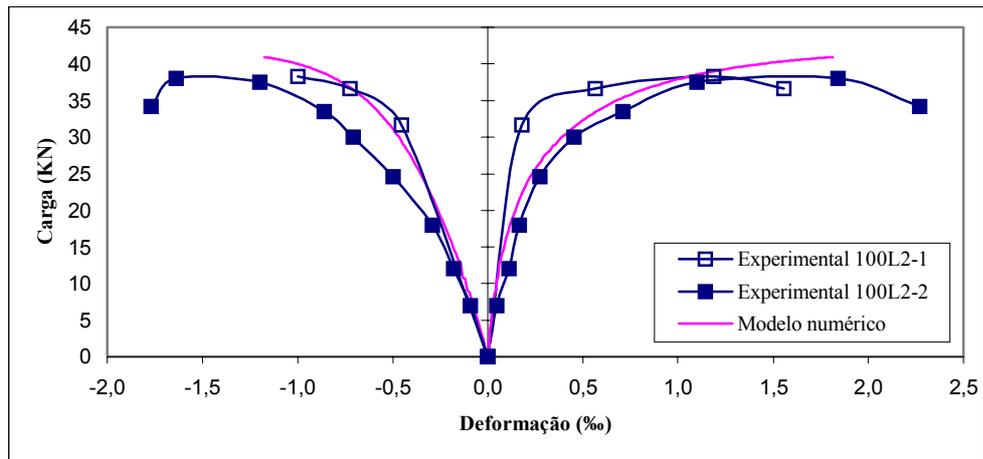


FIGURA 6.26: Deformações da armadura no centro do pilar 100L2.

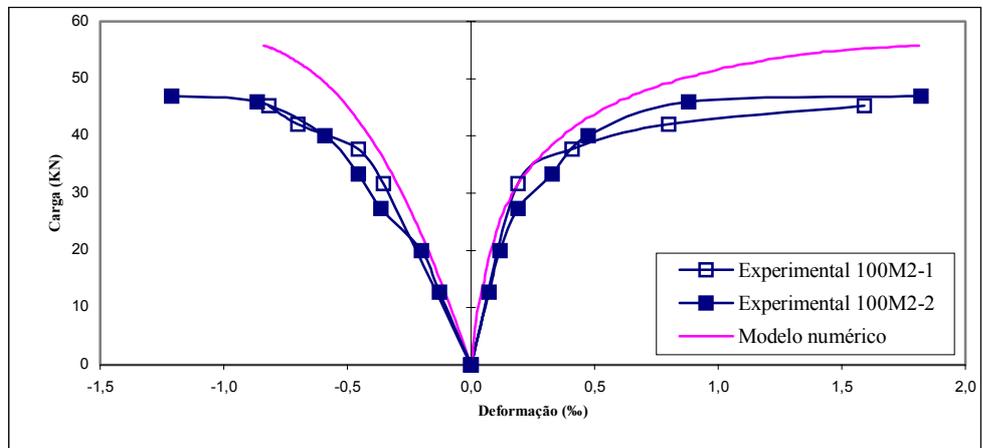


FIGURA 6.27: Deformações da armadura no centro do pilar 100M2.

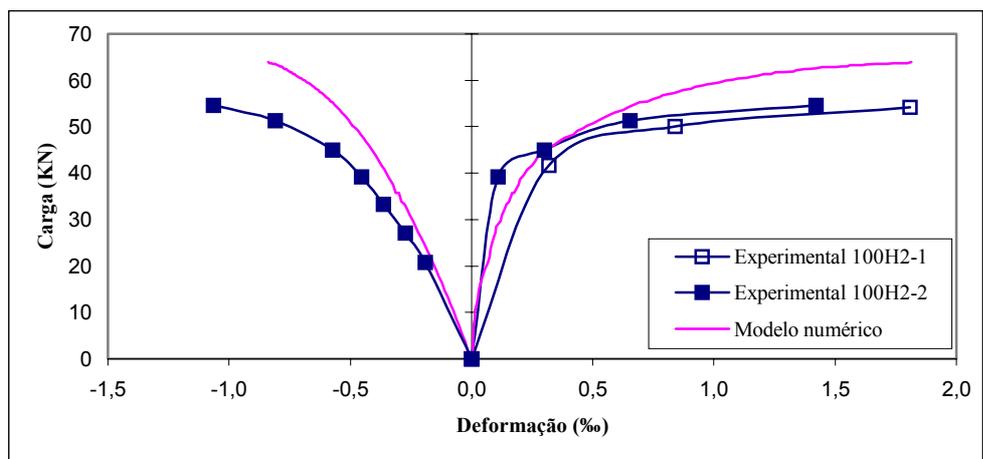


FIGURA 6.28: Deformações da armadura no centro do pilar 100H2.

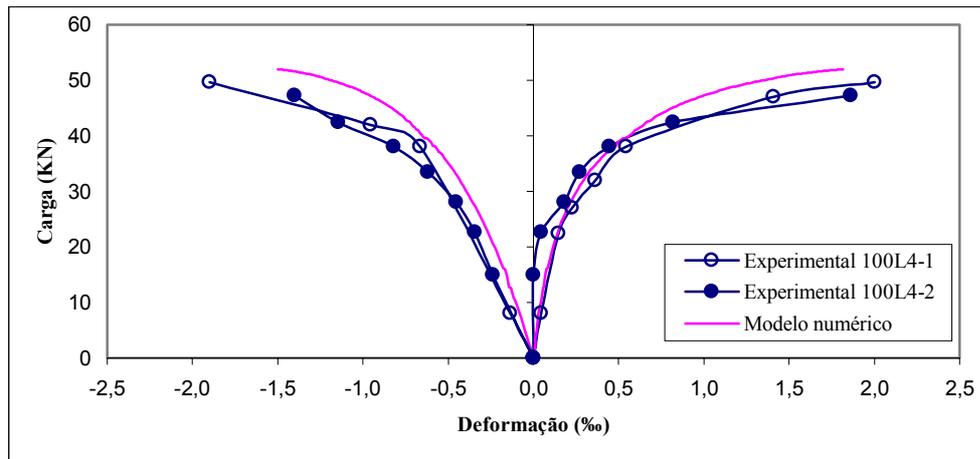


FIGURA 6.29: Deformações da armadura no centro do pilar 100L4.

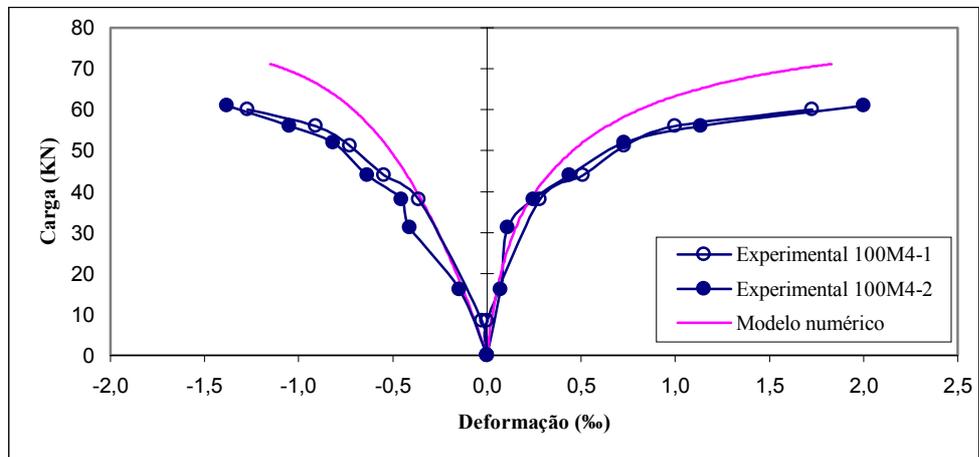


FIGURA 6.30: Deformações da armadura no centro do pilar 100M4.

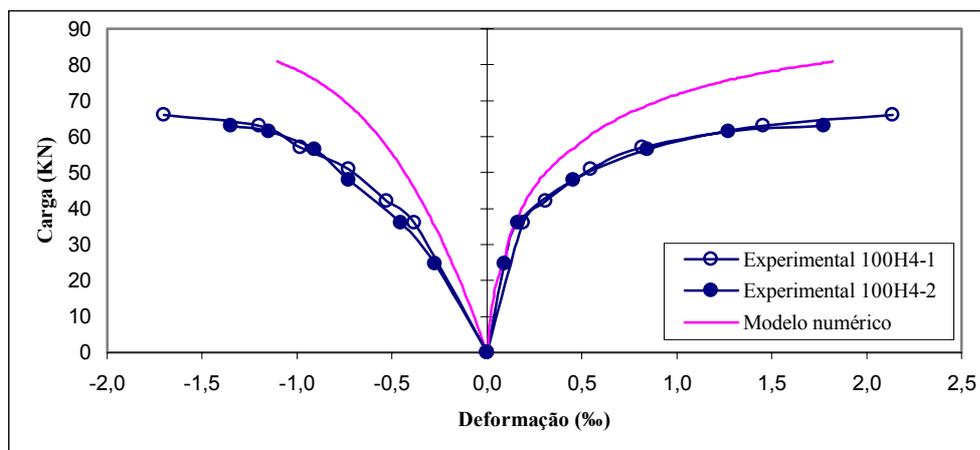


FIGURA 6.31: Deformações da armadura no centro do pilar 100H4.

6.4 ANÁLISE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO CONFINADOS

Neste item, são analisadas situações de confinamento em pilares de concreto armado, de modo a verificar a aplicabilidade do modelo desenvolvido a este tipo de situação, em que a estrutura fica submetida a um estado triplo de tensão.

Num primeiro exemplo é avaliado o ganho na carga de ruptura de um pilar confinado através da utilização de estribos pouco espaçados. Posteriormente, o programa foi aplicado na obtenção da curva momento-deflexão de um pilar confinado por compósitos de fibras de carbono. O modelo foi aplicado também na avaliação da resistência de corpos de prova de concreto prismáticos, confinados externamente por tecidos de fibras de carbono.

6.4.1 Análise de Pilares de Concreto Armado Confinados por Estribos

Em seu estudo sobre o comportamento de pilares confinados, Razvi e Saatcioglu (1989) ensaiaram alguns pilares curtos de seção quadrada, executados com concreto de resistência normal e submetidos à compressão axial.

Os pilares numerados por #3 e #4 foram reforçados transversalmente pela utilização de estribos e diferem apenas quanto ao espaçamento dos mesmos, de modo que no pilar #3 o espaçamento dos estribos é a metade do espaçamento utilizado no pilar #4. Estes pilares, cujas características geométricas estão indicadas na Figura 6.32, foram analisados através do modelo desenvolvido neste trabalho.

A armadura longitudinal é composta por quatro barras de canto de 16,0 mm de diâmetro e apresenta 470 MPa de tensão de escoamento, enquanto que os estribos são formados por barras de 6,53 mm de diâmetro, com tensão de escoamento de 373 MPa. Adotou-se 210 GPa para o módulo de deformação longitudinal das armaduras. Os pilares #3 e #4 possuem estribos espaçados a 35 mm e 70 mm, respectivamente.

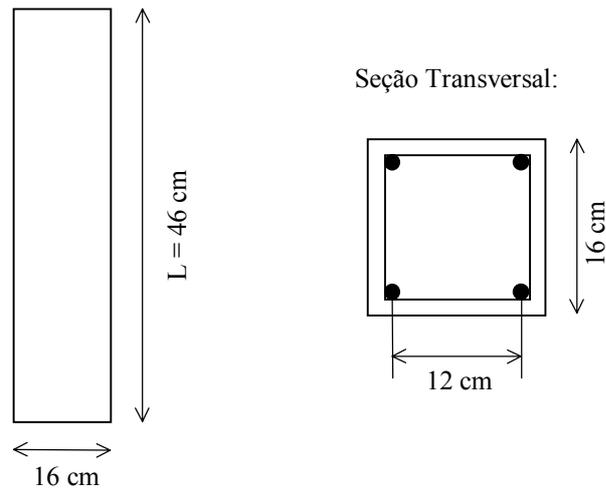


FIGURA 6.32: Características geométricas dos pilares.

A resistência do concreto utilizado nos pilares é de 32 MPa.

A malha de elementos finitos empregada na análise dos pilares está ilustrada na Figura 6.33. Os pilares foram analisados através de incrementos de deslocamento de 0,002 cm na face superior dos mesmos.

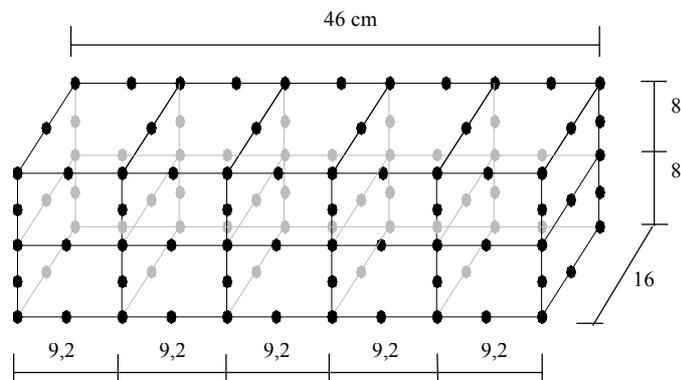


FIGURA 6.33: Malha de elementos finitos.

Na Figura 6.34 é mostrada a curva carga-deformação axial para os dois pilares analisados numericamente, juntamente com os resultados dos ensaios experimentais. A deformação axial foi medida no ponto de integração localizado no centro do pilar.

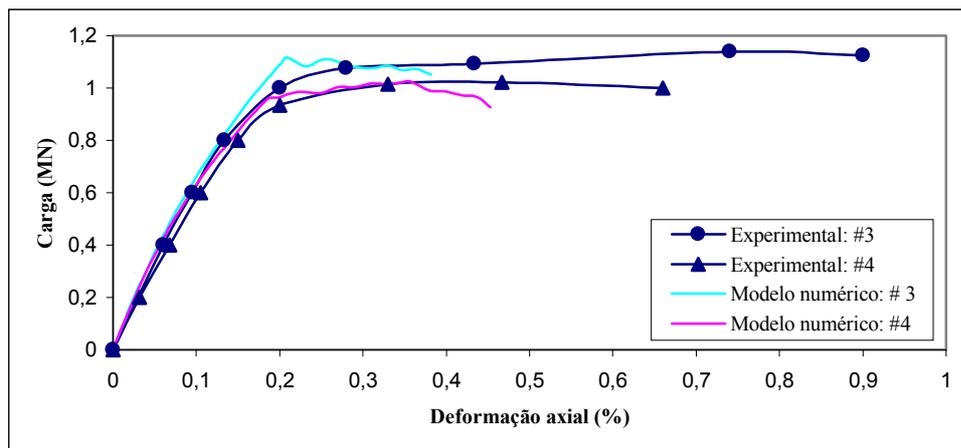


FIGURA 6.34: Efeito do espaçamento de estribos na resposta axial dos pilares.

Verifica-se que os resultados numéricos e experimentais são bastante próximos. A razão entre a carga de ruína prevista pelo modelo e aquela medida no ensaio, para os pilares #3 e #4, é de 0,9798 e 1,0005, respectivamente.

Os resultados confirmam estudos prévios realizados por diversos autores, na medida em que se constata que a redução no espaçamento dos estribos, conduzindo a uma maior taxa de armadura transversal, resulta numa maior pressão de confinamento, melhorando a resistência e ductilidade dos pilares. O pilar #3, cuja taxa de armadura transversal é o dobro da taxa do pilar #4, apresentou resistência 11,5% maior que o pilar #4, que é menos confinado.

6.4.2 Desempenho de Pilares de Concreto Armado Confinados por Compósitos de Fibras de Carbono

Chaallal e Shahawy (2000) investigaram o desempenho de pilares birrotulados de concreto armado reforçados externamente por compósitos bidirecionais de fibras de carbono e submetidos a flexo-compressão normal, sob diferentes excentricidades.

O programa desenvolvido neste trabalho foi aplicado na análise de dois dos pilares ensaiados, sendo um confinado e o outro sem confinamento (de referência), para os quais Chaallal e Shahawy (2000) apresentaram as curvas do momento aplicado pela deflexão lateral, obtidas experimentalmente.

Estes pilares, identificados por 0LE12 e 2LE12, apresentam mesmas características geométricas e de carregamento, de acordo com a Figura 6.35, sendo o pilar 0LE12 não confinado e o pilar 2LE12 confinado por duas camadas de um sistema compósito bidirecional de fibras de carbono. Este sistema compósito consiste em um entrelaçado bidirecional, que possui 6,7 fios por polegadas em cada direção e por camada, sendo os fios formados por 12000 filamentos de fibras de carbono (Chaallal e Shahawy, 2000). As propriedades mecânicas deste sistema, sugeridas pelos autores, são 538 MPa de resistência à tração e 45500 MPa para o módulo de elasticidade. Cada camada possui espessura de 0,508 mm.

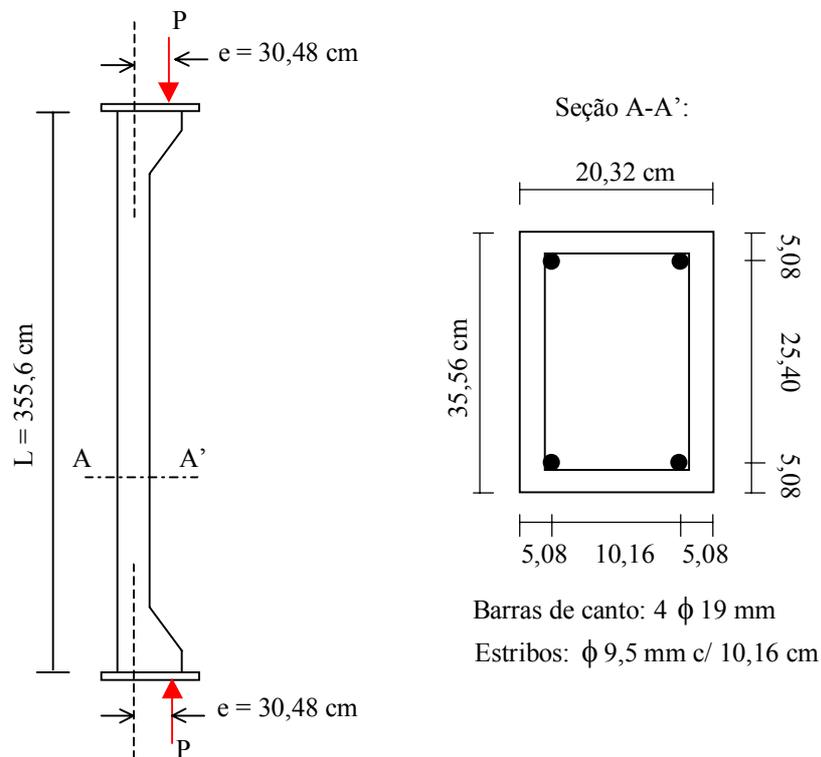


FIGURA 6.35: Características geométricas e de carregamento dos pilares.

Devido à simetria de geometria e carregamento dos pilares, modelou-se apenas metade dos mesmos. Assim como na análise do pilar de Kordina (1976), o alargamento das extremidades dos pilares não foi considerado nas análises. A malha de elementos finitos utilizada nas análises numéricas é composta por cinco elementos ao longo do comprimento dos pilares, e dois na altura da seção, de acordo com a ilustração mostrada na Figura 6.36. Considerou-se 500 MPa (aço tipo A) e 600 MPa (aço tipo B) para a tensão de escoamento das armaduras longitudinais e transversais, respectivamente, e adotou-se para o módulo de

elasticidade de ambas as armaduras o valor de 210 GPa. A resistência média à compressão do concreto utilizado nos pilares foi de 25,51 MPa na data dos ensaios.

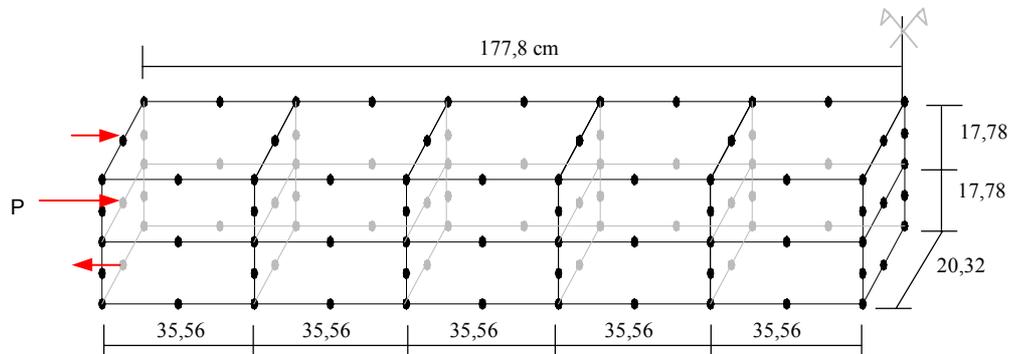


FIGURA 6.36: Malha de elementos finitos e carregamento aplicado nas análises.

Os tecidos de fibra de carbono apresentam comportamento elástico linear até atingir a ruptura e são introduzidos no modelo como barras de armadura pouco espaçadas, que apresentam área da seção transversal correspondente à área do compósito (espessura vezes a largura considerada) e características, tais como o módulo de elasticidade e a resistência, fornecidas pelo fabricante. Desse modo, estes compósitos são modelados como um caso particular do modelo elastoplástico definido para o aço.

Como o sistema compósito é bidirecional, o mesmo foi modelado através de barras de armadura transversais (estribos) e longitudinais, localizados ao longo das faces dos pilares, sendo cada barra correspondente a 5,08 cm de largura do compósito.

Como os pilares 0LE12 e 2LE12 estão submetidos a uma carga com grande excentricidade, o carregamento é aplicado por meio de uma carga centrada e um binário, utilizado para produzir o momento fletor que atua na estrutura, devido à excentricidade, conforme ilustrado na Figura 6.36. A carga foi aplicada através de incrementos de 10KN.

A Figura 6.37 mostra as curvas do momento total aplicado, dado pela soma dos momentos de primeira e segunda ordem, pela flecha na seção central do pilar, obtidas numérica e experimentalmente.

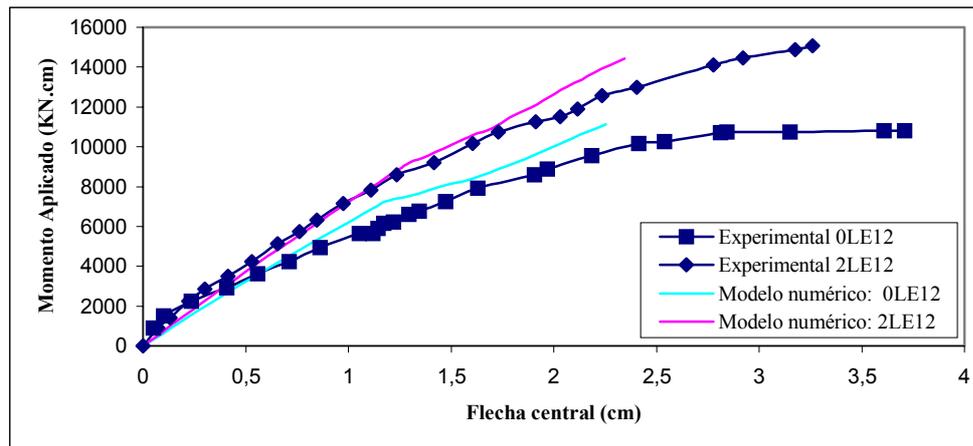


FIGURA 6.37: Efeito do confinamento obtido por compósitos de fibras, nas curvas momento-deflexão na seção central dos pilares.

Embora os resultados experimentais indiquem uma maior ductilidade nas proximidades da ruptura, a relação entre a carga de ruptura prevista pelo modelo e medida experimentalmente é de 1,03 para o pilar 0LE12 e de 0,96 para o pilar 2LE12. A diferença existente na ductilidade das colunas, próximo à ruptura, pode decorrer do fato das propriedades mecânicas da armadura, utilizadas nas análises, não corresponderem exatamente às propriedades das armaduras que são utilizadas nos ensaios, pois estes dados não são informados no trabalho de Chaallal e Shahawy (2000).

Verifica-se, na Figura 6.37, que o pilar reforçado pelo compósito apresentou uma maior rigidez à flexão, em comparação ao pilar não reforçado, sendo este fato atribuído ao controle da fissuração que ocorre na peça reforçada, devido à pressão de confinamento exercida pelo sistema compósito. O pilar reforçado pelo compósito bidirecional aumentou cerca de 35% a sua capacidade de suportar momento.

6.4.3 Avaliação da Resistência de Pilares Curtos de Concreto Confinados Externamente por Tecidos de Fibras de Carbono

Carneiro et al (2000) ensaiaram um total de 27 pilares de concreto convencional, com 30 cm de altura, e com seções transversais circulares (15 cm de diâmetro), quadrada (15 x 15 cm) e retangular (9,4 x 18,8 cm), sob compressão axial. Destes pilares, 18 foram reforçados com uma ou duas camadas de tecido de fibras de carbono.

As resistências dos pilares de seção quadrada e retangular, sem reforço e reforçados com uma e duas camadas do compósito de fibra de carbono, foram avaliadas pelo modelo computacional desenvolvido neste trabalho.

A resistência média à compressão medida para o concreto não-confinado foi de 23,7 MPa. O tecido utilizado no confinamento apresenta resistência à tração de 3550 MPa e módulo de elasticidade de 235 GPa. Cada camada do compósito possui 0,165 mm de espessura. Este compósito foi modelado da mesma forma descrita no item anterior, sendo que neste sistema de reforço, as fibras de carbono são orientadas em uma direção apenas, e são colocadas transversalmente à altura dos pilares. Desse modo, são consideradas armaduras transversais nas faces dos pilares, que possuem as propriedades mecânicas dos compósitos e diâmetros que correspondem à área de 1 cm de largura do compósito vezes a espessura do mesmo.

Os pilares foram modelados por meio de uma malha contendo 10 elementos finitos ao todo, conforme a Figura 6.38, onde a e b são iguais a 7,5 cm e 15,0 cm, respectivamente, para o pilar de seção quadrada e iguais a 9,4 para o pilar de seção retangular. Estes pilares foram analisados para incrementos de deslocamentos de 0,0015 cm na face superior dos mesmos.

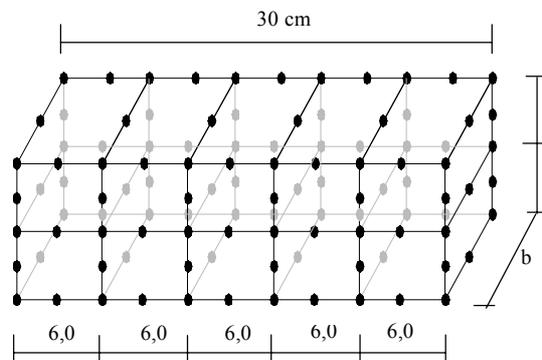


FIGURA 6.38: Malha de elementos finitos.

Os resultados dos ensaios de compressão centrada, obtidos para três pilares iguais, moldados para cada tipo de seção, e os obtidos numericamente, para os pilares sem e com confinamento externo, são comparados na Tabela 6.2 a seguir.

Tabela 6.2: Resistência dos pilares.

Seção	Nº do pilar	Sem reforço		Com 1 camada de reforço		Com 2 camadas de reforço	
		Experimental f_{co} (MPa)	Numérico f_{co} (MPa)	Experimental f_{cc} (MPa)	Numérico f_{cc} (MPa)	Experimental f_{cc} (MPa)	Numérico f_{cc} (MPa)
Quadrada 15 x 15 x 30 cm	CL-4	23,1	25,1	26,7	31,8	37,8	36,3
	CL-5	25,8		27,6		35,6	
	CL-6	22,2		28,0		36,0	
Retangular 9,8 x 18,8 x 30 cm	CL-7	17,0	22,7	21,5	28,5	29,4	30,9
	CL-8	19,8		28,3		33,4	
	CL-9	22,1		27,7		36,8	

De maneira geral, as resistências medidas numericamente ficaram bastante próximas das medidas nos ensaios, ficando muitas vezes dentro da variação de resistência apresentada pelos três pilares ensaiados para cada tipo de seção. Na Tabela 6.2, verifica-se que os maiores ganhos de resistência dos pilares confinados, em relação aos não confinados, foram para os pilares de seção quadrada confinados com duas camadas do sistema compósito, os quais chegaram a 45%, de acordo com as análises numéricas, e a 54%, de acordo com a média dos resultados experimentais obtidos.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um modelo não-linear físico e geométrico, para análise tridimensional de peças de concreto armado, confinadas ou não, através do Método dos Elementos Finitos.

Obteve-se uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais dos pilares analisados, considerando a variabilidade inerente ao comportamento de peças de concreto armado. O modelo mostrou-se capaz de acompanhar, de forma bastante aproximada, as curvas carga-deslocamento experimentais e de prever, com precisão satisfatória, as cargas de ruptura dos pilares.

O modelo também foi capaz de simular o comportamento de estruturas submetidas a estados de tensões tipicamente tridimensionais, oriundos do confinamento. O modelo previu com bastante precisão as cargas de ruptura dos pilares confinados, tanto por ação de estribos, como pela utilização de compósitos de fibras, e os resultados obtidos confirmam a eficiência do confinamento na melhoria da resistência e ductilidade destes pilares.

A aproximação entre os resultados numéricos e experimentais é uma indicação da validade do modelo proposto e de sua capacidade de prever o comportamento real de elementos de concreto armado.

Desse modo, o modelo desenvolvido neste trabalho permitirá análises do comportamento de peças de concreto armado, possibilitando estudos para um aproveitamento otimizado dos materiais, especialmente estudos de confinamento em pilares esbeltos de concreto armado, cujos trabalhos experimentais são escassos, devido à dificuldade de realização de ensaios laboratoriais, que demandam grande estabilidade dos equipamentos frente às cargas aplicadas.

O modelo obtido pode ser aperfeiçoado, com o intuito de estender sua aplicabilidade, melhorar a convergência das análises e aumentar sua precisão, principalmente na obtenção do comportamento da estrutura após a carga crítica ser atingida.

Sugere-se a elaboração de um modelo de chapa para a camada de compósito que envolve a peça de concreto armado, de modo a modelar este material com uma maior precisão.

Seria interessante, também, estender o modelo desenvolvido neste trabalho de modo a possibilitar a análise de estruturas já submetidas a um estado de deformação inicial, para que se possa avaliar a eficiência do confinamento no reforço e reabilitação de estruturas inicialmente sob carga. Este tipo de estudo é também escasso no campo experimental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHMAD, S. H., SHAH, S. P. **Stress-strain curves of concrete confined by spiral reinforcement.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 115, n. 11, p. 3036-3454, 1982.
- AURICH, M. **Modelo da ligação entre concreto e armadura na análise de estruturas de concreto pelo método dos elementos finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEC, 2001. 132p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- AVRAM, C., FACAOARU, I., MIRSU, O., FILIMON, I., TERTEA, I. **Concrete strength and strains.** Elsevier Scientific Publishing Co., 1981.
- BALAKRISHNAN, S., ELWI, A. E., MURRAY, D. W. **Effect of modeling on NLFE analysis of concrete structures.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 114, n. 7, p. 1449-1466, 1988.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures.** Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1996. 1037p.
- BATHE, K. J., OZDEMIR, H. **Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis.** Computers and Structures, v. 6, p. 81-92, 1976.
- BAZANT, Z. P. **Constitutive law for nonlinear creep of concrete.** Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n. 1, p. 113-124, 1977.
- BAZANT, Z. P., WU, S. T. **Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain.** Matériaux et Constructions, v. 7, n. 37, p. 45-60, 1974.
- BEBER, A. J. **Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1999, 108p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- CAMPOS FILHO, A. **Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático.** São Paulo: Escola Politécnica da USP, 1987. 293p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.
- CARNEIRO, L. A., SHEHATA, I. A. E. M., SHEHATA, L. C. D. **Avaliação da resistência de colunas curtas de concreto confinadas externamente com fibras de carbono.** In: XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, Anais... Punta Del Este, 2000.
- CERVENKA, V. **Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete.** Journal of American Concrete Institute, v. 82, n. 6, p. 877-882, 1985.

- CHAALLAL, O., SHAHAWY, M. **Performance of fiber-reinforced polymer-wrapped reinforced concrete column under combined axial-flexural loading.** ACI Structural Journal, v. 97, n. 4, p. 659-668, 2000.
- CHAI, Y. H. **Steel jacketing of circular reinforced concrete bridge columns for enhanced flexural performance.** PhD thesis, Univ. of California, San Diego, California, 1991.
- CHAPMAN, S. J. **Fortran 90/95 for scientists and engineers.** Boston: WCB/McGraw-Hill, 1998, 874p.
- CHEN, W. F., HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers.** New York: Springer-Verlag, 1988, 606p.
- CHOI, O. C., HADJE-GHAFFARI, H., DARWIN, D., MCCABE, S. L. **Bond strength of epoxy-coated reinforcement: Bar parameters.** ACI Materials Journal, v. 88, n. 2, p. 207-217, 1991.
- CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1994. 145p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures.** Chichester (UK): John Wiley & Sons, 1991.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990: Design Code.** London: Thomas Telford Services, 1993. 437p.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Concrete under multiaxial states of stress – constitutive equations for practical design.** Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 156).
- CONCRETE MANUAL, U. S. **Bureau of Reclamation,** 1975, p. 574-575.
- CONSIDERÈ, A. **Experimental researches reinforced concrete.** New York: MacGraw-Hill Book Co., L. F. Moisseiff, translator, 1903.
- DARWIN, D. **Reinforced concrete.** Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II: Proceedings of International Workshop. Ed. J. Isenberg, p. 203-232, 1991.
- ELWI, A. E., HRUDEY, T. M. **Finite element model for curved embedded reinforcement.** Journal of Engineering Mechanics Division , ASCE , v. 115 , n. 4, p. 740-754, 1989.

- FAIRBAIRN, E. M. R., LONGO, H. I., ZHENG, R. **Formulação diferencial do problema da relaxação do concreto – estudo teórico experimental.** In: Jornadas Sul-americanas de Engenharia Estrutural, 24. Anais... Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, v. 2, p. 103-117, 1987.
- FAM, A., RIZKALLA, S. **Confinement model for axially loaded concrete confined by circular fiber-reinforced polymer tubes.** ACI Structural Journal, v. 98, n. 4, p. 451-461, 2001.
- FUNG, Y. C. **Foundations of solid mechanics.** Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965.
- FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto – solicitações normais.** Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. 464p.
- HERAKOVICH, C. T. **Mechanics of fibrous composites.** John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1988. 550 p.
- HINTON, E., OWEN, D. R. J. **Finite element software for plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1984. 403p.
- HOLDEN, J. T. **On the finite deflections of thin beams.** International Journal of Solids and Structures, v. 8, p. 1051-1055, 1972.
- IRONS, B. M. **Quadrature rules for brick based finite elements.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 3, p. 293-294, 1971.
- KANCHI, M. B., ZIENKIEWICZ, O. C., OWEN, D. R. J. **The visco-plastic approach to problems of plasticity and creep involving geometric non-linear effects.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 12, p. 169-181, 1978.
- KARABINIS, A. I., KIOUSIS, P. D. **Effects of confinement on concrete columns: experiment.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 120, n. 9, p. 2747-2767, 1994.
- KARBHARI, V. M., SEIBLE, F. **Design considerations for FRP rehabilitation of concrete structures.** In: 1st International Conference on the Behavior of Damaged Structures, 1998. Rio de Janeiro. Proceedings... CD-ROM.
- KIM, J. K., YANG, J. K. **Buckling behaviour of slender high-strength concrete columns.** Journal of Engineering Structures, v. 17, n. 1, p. 39-51, 1995.
- KORDINA, K., RAFLA, K., HJORTH, O. **Traglast von stahlbetondruckgliedern unter schiefer biegung mit achsdruck.** Berlin, 1976. Vertrieb Durch Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, heft 265.

- KORDINA, K., RAFLA, K., HJORTH, O. **Carga limite em peças de concreto armado comprimidas sob a ação de força axial com flexão desviada.** Berlin, 1976. Vertrieb Durch Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, heft 265. Tradução por Ivo Wolff.
- KWON, M. H. **Three dimensional finite element analysis of reinforced concrete members.** PhD thesis, University of Colorado, Colorado, 2000, 183p.
- LEONHARDT, F., MÖNNIG, E. **Construções de Concreto.** Rio de Janeiro: Interciência, 1977, v.1, 336p.
- LIU, J., FOSTER, S. J. **Finite-element model for confined concrete columns.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 124, n. 9, p. 1011-1017, 1998.
- LIU, J., FOSTER, S. J. **A three-dimensional finite element model for confined concrete structures.** Computers and Structures, v. 77, p. 441-451, 2000.
- MACHADO, A. P. **Reforço de estruturas de concreto armado com fibras de carbono.** São Paulo: Pini, 2002. 282p.
- MANDER, J. B., PRIESTLEY, M. J. N., PARK, R. J. T. **Theoretical stress-strain model for confined concrete.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 114, n. 8, p. 1804-1826, 1988.
- MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: estrutura, propriedades e materiais.** São Paulo: Pini, 1994. 573p.
- MIRMIRAN, A. **Analytical and experimental investigation of reinforced concrete columns encased in fiberglass tubular jackets and use of fiber jacket for pile splicing.** Florida: Florida Department of Transportation. Final Report, Contract n. B-9135, 1997.
- MIRMIRAN, A., SHAHAWY, M. **Behavior of concrete columns confined with fiber composites.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 123, n. 5, p. 583-590, 1997.
- MIRMIRAN, A., ZAGERS, K., YUAN, W. **Nonlinear finite element modeling of concrete confined by fiber composites.** Finite Elements in Analysis and Design, v. 35, n. 1, p. 79-96, 2000.
- NANNI, A., BRADFORD, N. M. **FRP jacketed concrete under uniaxial compression.** Construction & Building Materials, v. 9, n. 2, p. 115-124, 1995.
- NANNI, A., NORRIS, M. **FRP jacketed concrete under flexure and combined flexure-compression.** Construction & Building Materials, v. 9, n. 5, p. 273-281, 1995.
- NGO, D., SCORDELIS, A. C. **Finite element analysis of reinforced concrete beams.** Journal of American Concrete Institute, v. 64, n. 3, p. 152-163, 1967.

- NORRIS, T., SAADATMANESH, H., EHSANI, M. **Shear and flexural strengthening of R/C beams with carbon fiber sheets.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 123, n. 7, p. 903-911, 1997.
- ORITO, Y., SATO, T., TANAKA, N., WATANABE, Y. **Study on the unbounded steel tube structures.** Proceedings of the International Conference of Composite Construction in Steel and Concrete, ASCE, p. 786-804, 1987.
- OTTOSEN, N. S. **A failure criterion for concrete.** Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n. 4, p.527-535, 1977.
- OTTOSEN, N. S. **Constitutive model for short-time loading of concrete.** Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 105, n. 1, p. 127-141, 1979.
- OWEN, D. R. J., HINTON, E. **Finite element in plasticity: theory and practice.** Swansea: Pineridge Press, 1980. 594 p.
- OWEN, D. R. J., HINTON, E. **Finite element programming.** London: Academic Press, 1977. 305 p.
- PAI, P. F., ANDERSON, T. J., WHEATER, E. A. **Large-deformation tests and total-lagrangian finite-element analyses of flexible beams.** International Journal of Solids and Structures, v. 37, p. 2951-2980, 2000.
- PANDE, G. N., OWEN, D. R. J., ZIENKIEWICZ, O. C. **Overlay models in time-dependent non-linear material analysis.** Computers and Structures, v. 7, n. 3, p. 435-443, 1977.
- PICHER, F., ROCHETTE, P., LABOSSIÈRE, P. **Confinement of concrete cylinders with CFRP.** Proc. 1st Int. Conf. Composites in Infrastructure, H. Saadatmanesh and M. R. Ehsani, eds., University of Arizona, Tucson, Ariz., p. 829-841, 1996.
- POPOVICS, S. **A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete.** Cement and Concrete Research, v. 3, p. 583-599, 1973.
- PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1992, 131p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- RASHID, Y. R. **Analysis of prestressed concrete pressure vessels.** Nuclear Engineering and Design, v. 7, n. 4, p. 334-344, 1968.
- RAZVI, S. R., SAATCIOGLU, M. **Confinement of reinforced columns with welded wire fabric.** ACI Structural Journal, v. 86, n. 5, p. 615-623, 1989.

- REAL, M. V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 2000, 224p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.
- RICHART, F. E., BRANDTZAEG, A., BROWN, R. L. **The failure of plain and spirally reinforced concrete in compression.** Bulletin 190, Univ. of Illinois Engineering Experimental Station, Champaign, Ill, 1929.
- ROBERY, P., INNES, C. **Carbon fibre strengthening of concrete structures.** In: International Conference on Structural Faults and Repair, 7., 1997, Edinburgh. Proceedings... Edinburgh: Engineering Technics Press, 1997, 3v, v. 1, p. 197-208.
- ROCHETTE, P., LABOSSIERE, P. **A plasticity approach for concrete columns confined with composite materials.** In: M. M. El-Badry (Eds.), Proceedings Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, CSCE, p. 359-366, 1996.
- SAADATMANESH, H. EHSANI, M. R., LI, M. W. **Strength and ductility of concrete columns externally reinforced with fiber composite straps.** ACI Structural Journal, v. 91, n. 4, p. 434-447, 1994.
- SAMAAN, M., MIRMIRAN, A., SHAHAWY, M. **Model of concrete confined by fiber composites.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 124, n. 9, p. 1025-1031, 1998.
- SANTAROSA, D., CAMPOS, A., CAMPAGNOLO, J. L., BEBER, A. J. **Desempenho de elementos comprimidos de concreto confinados com fibra de carbono.** Compat 2001 – VI Congreso Iberoamericano de Patologia de Lãs Construcciones y VIII Congreso de Control de Calidad, 2001.
- SCHWARTZ, M. M. **Composite materials handbook.** New York: McGraw-Hill, 1984.
- SENSALE, C. B. **Análise do comportamento ao longo do tempo de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1991, 110p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- SILVA, P. A. S. C. M. **Modelação e análise de estruturas de betão reforçadas com FRP.** Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1999, 254p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- SHAHAWY, M., MIRMIRAN, A., BEITELMAN, T. **Tests and modeling of carbon-wrapped concrete columns.** Composites: Part B 31, p. 471-480, 2000.
- STEVENS, N. J., UZUMERI, S. M., COLLINS, M. P., WILL, G. T. **Constitutive model for reinforced concrete finite element analysis.** ACI Structural Journal, v. 88, n. 1, p. 49-59, 1991.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de concreto: concreto armado**. São Paulo: Globo, 1989, v.1, 376p.

TOUTANJI, H. A. **Stress-strain characteristics of concrete columns externally confined with advanced fiber composite**. ACI Materials Journal, v. 96, n. 3, p. 397-404, 1999.

VAN MIER, J. G. M. **Examples of non-linear analysis of reinforced concrete structures with DIANA**. Netherlands: Heron, v. 32, n. 3, 1987.

ZANATO, G. A. **Desempenho de reforços em pilares esbeltos de concreto armado: análise numérico-experimental**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEC, 1999, 141p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method**. London: McGraw-Hill, 1977. 787p.

ZIENKIEWICZ, O. C., PHILLIPS, D. V., OWEN, D. J. R. **Finite element analysis of some concrete non-linearities: theory and examples**. Seminar on concrete structures subjected to triaxial stresses. Papers. Bergamo: IABSE, p. 1-21, 1974.