

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE MODELO MATEMÁTICO PARA REPRESENTAÇÃO DO
COMPORTAMENTO DE UM EQUIPAMENTO DE AVALIAÇÃO MACROSCÓPICA DE
MODELOS DE ATRITO

por

Caroline Francisco Dorneles

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenharia Mecânica.

Porto Alegre, julho de 2017.

DESENVOLVIMENTO DE MODELO MATEMÁTICO PARA REPRESENTAÇÃO DO
COMPORTAMENTO DE UM EQUIPAMENTO DE AVALIAÇÃO MACROSCÓPICA DE
MODELOS DE ATRITO

por

Caroline Francisco Dorneles

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRA MECÂNICA
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof.^a Thamy Cristina Hayashi
Coordenadora do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Projeto e Fabricação**

Orientador: Prof. Eduardo André Perondi

Comissão de Avaliação:

Prof. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara

Prof. Fabiano Disconzi Wildner

Prof. Tiago Becker

Porto Alegre, 20 de julho de 2017.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Soraia e Gilberto, e a minha irmã, Melissa, por toda dedicação e confiança depositadas em mim. Sem o apoio e incentivo de vocês nada disso seria possível.

Ao professor Eduardo Perondi, pela orientação neste trabalho, ajuda e incentivo na minha vida acadêmica.

Ao Laboratório de Mecatrônica e Controle (LAMECC), pelo apoio na execução deste trabalho e acolhimento durante a graduação. Aos colegas e amigos do LAMECC agradeço pelos cafés, risadas e apoio que sempre recebi.

Aos amigos Alexandre Stedile, Eder Gonçalves, Grégori Fronza, Paulo Fam e Theo Souza, por toda a ajuda na realização deste trabalho.

Por fim, mas não menos importante, aos amigos Daniela Luchini, Guilherme Jacometo, Hanna Zanatta e Laura Testa, pela amizade e companheirismo durante toda a graduação.

DORNELES, C. F. **Desenvolvimento de Modelo Matemático para Representação de Comportamento de um Equipamento de Avaliação Macroscópica de Modelos de Atrito.** 2017. 25 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

RESUMO

Este trabalho aborda o desenvolvimento de um modelo matemático que representa o comportamento da parte móvel de um equipamento experimental de avaliação de modelos de atrito, existente no Laboratório de Mecatrônica e Controle (LAMECC) da UFRGS. É apresentada uma fundamentação teórica sobre modelos de atrito, bem como uma revisão sobre o funcionamento da bancada referida. O modelo é proposto a partir do levantamento de características físicas e geométricas do sistema, assim como de hipóteses que simplificam o equacionamento. O principal objetivo do equacionamento é, a partir da condição de equilíbrio estático, obter a equação que relaciona a força de atrito resultante do contato com o deslocamento das hastes. Com o modelo proposto, foi possível representar o comportamento da força de atrito na região de pré-deslizamento.

PALAVRAS-CHAVE: Modelos de Atrito, Modelagem de Sistemas Mecânicos, Modelo de Hastes para Atrito.

DORNELES, C. F. **Development of Mathematical Model for Representation of Behavior of a Macroscopic Evaluation of Models of Friction** 2017. 25 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ABSTRACT

This paper approaches the development of a mathematical model to represent the friction behavior on a experimental friction bench equipment, from LAMECC (Control and mechatronics laboratory at Federal University of Rio Grande do Sul). Theoretical fundamentation on friction models are presented, and a revision on the bench equipment operation is presented. The mathematical model is proposed based on the system's fisical and geometric characteristics. Also, hypotheses that simplify the problem were used to reduce the complexity of the modeling. The main goal of mathematical modeling is, from the stastic's equilibrium configuration, to obtain the equation that relates the contact resultant frictional force with the bristles displacement. According to the proposed model, it was possible to represent the behavior of friction force in the presliding region.

KEYWORDS: Friction Models, Mechanical Systems Modeling, Bristles Models for Friction.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	1
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
3.1 Atrito	1
3.2 Modelos de Atrito	3
3.3 Bancada de Avaliação Macroscópica de Modelos de Atrito	6
3.4 Princípio dos Trabalhos Virtuais	7
4. METODOLOGIA	8
4.1 Definição do Modelo	8
4.2 Equacionamento do Equilíbrio Estático do Sistema	10
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	13
6. CONCLUSÕES	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	14
Apêndice A	16
Apêndice B	17
Apêndice C	18
Apêndice D	19

1. INTRODUÇÃO

O fenômeno de atrito ocorre quando há interação entre duas superfícies em contato. Desta forma, o atrito se apresenta em praticamente todos os mecanismos com elementos móveis. A pesquisa sobre este fenômeno físico agrega diferentes áreas de conhecimento, como ciência dos materiais, mecânica dos fluidos e estudos de deformações elásticas e plásticas. Exemplos de engenharia mecânica onde o atrito é significativo são abundantes, como transmissões, freios, rolamentos, cilindros hidráulicos e pneumáticos [Olsson et al., 1998].

Segundo Canudas-de-Wit *et al*, 1995, o atrito pode causar erros de seguimento de trajetória, surgimento de ciclos-limite e movimentos adere-desliza que são indesejáveis ao sistema controlado. Por conta disso, o atrito se torna um fator importante no desenvolvimento de sistemas de controles precisos, exigindo modelos matemáticos para a validação de resultados. Estes modelos matemáticos podem ser obtidos por meio de técnicas analíticas, isto é, pelo levantamento das leis físicas que regem o comportamento do sistema mecânico e com auxílio de *softwares* específicos.

A bancada de avaliação macroscópica de atrito, desenvolvida por Fronza, 2015, mostrou-se eficaz para estudos de modelos de atrito, permitindo a representação, de forma macroscópica, dos fenômenos microscópicos que ocorrem nos materiais em contato. Como as forças de atrito dependem de diversos fatores que não foram totalmente esclarecidos, a modelagem matemática da bancada de atrito tem por objetivo a obtenção de um equacionamento capaz de descrever o comportamento da mesma quando em operação.

Assim, visando contribuir para o entendimento e validação de estudos sobre modelos de atrito, este trabalho propõe um modelo matemático para a representação física da bancada de avaliação de atrito, através de um equacionamento matemático e análise dos seus resultados no regime de atrito estático, conhecido como região de pré-deslizamento .

2. OBJETIVOS

Este trabalho visa a desenvolver um modelo matemático que represente o comportamento da parte móvel de uma bancada experimental de avaliação de modelos de atrito direcionados à modelagem e compensação de atrito de sistemas mecânicos controlados. O modelo matemático deverá dar suporte à síntese futura de modelos de atrito baseados em equacionamento físico, visto que a bancada foi concebida para simular o comportamento microscópico dos fenômenos envolvidos na geração das forças de atrito entre dois materiais em contato.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Atrito

O atrito pode ser definido com o resultado de interações complexas entre duas superfícies em contato. A força de atrito é uma força de reação tangencial ao contato entre os corpos que depende de diversos parâmetros, como carga, rugosidades, velocidade relativa dos corpos, presença de lubrificantes, propriedades do material, entre outros (Olsson et al., 1998).

De acordo com Bowden e Tabor, 2001, quando se trata de contatos deslizantes entre superfícies planas, o atrito pode ser modelado como forças elásticas e plásticas oriundas das rugosidades microscópicas em contato.

Os corpos possuem superfícies naturalmente ásperas, como mostra a Figura 3.1. Desta forma, o contato ocorre sobre um determinado número de asperezas, e não de forma contínua sobre a superfície. As deformações nos pontos de contato ocorrem devido ao carregamento externo aplicado. Assim, quando há uma força tangencial aplicada na superfície, surge uma força de cisalhamento entre os pontos de contato e isso resulta em deformações elásticas e plásticas.

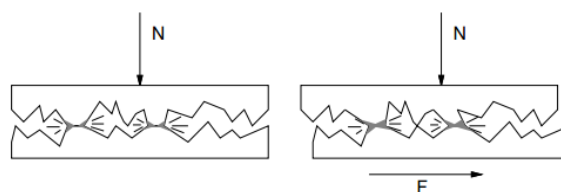


Figura 3.1 – Representação microscópica do contato entre superfícies.(Fonte: Olsson, 1996)

Segundo Armstrong-Hélouvri, 1991, o comportamento dos mecanismos de atrito pode ser dividido em quatro regiões, que dependem da velocidade relativa entre as superfícies. Esta divisão está exemplificada na Figura 3.2.

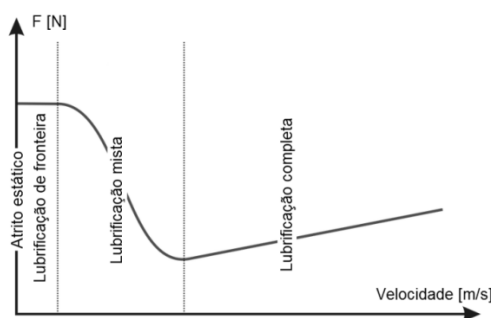


Figura 3.2 – Relação entre força de atrito e velocidade.(Fonte: Fronza, 2015)

No primeiro regime apresentado, conhecido como atrito estático, não há movimento significativo entre as superfícies, pois as mesmas estão aderidas. Esse regime também é conhecido como pré-deslizamento. No segundo regime, lubrificação de fronteira, ocorre movimento relativo entre as superfícies, porém quase não há lubrificante presente. À medida que a velocidade de deslizamento aumenta, cresce também a quantidade de lubrificante na interface das superfícies, aumentando a separação das mesmas. No terceiro regime, o de lubrificação mista, tem-se parte das superfícies em contato e outra parte separada pelo lubrificante. Neste regime, a força de atrito é parcialmente devida ao lubrificante e sua viscosidade e, parcialmente devida aos pontos de contato de aspereza (Olson, 1996). No momento em que as superfícies estão inteiramente separadas pelo lubrificante, ocorre a lubrificação completa, que caracteriza o quarto regime, se aproximando ao comportamento do atrito viscoso de Newton.

A relação apresentada na Figura 3.2 é conhecida como efeito de Stribeck, onde nota-se que há a diminuição da força de atrito com o aumento da velocidade no início do movimento.

No regime de atrito estático, a força necessária para superar a inércia e iniciar o movimento é conhecida como força de quebra. Segundo Rabinowicz, 1951, apud Olson, 1996, a força de quebra corresponde a um valor de pico no gráfico do atrito como função do deslocamento. A Figura 3.3 destaca a força de quebra que ocorre muito próximo do ponto de partida.

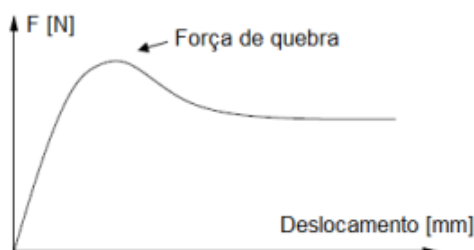


Figura 3.3 – Relação entre atrito e deslocamento.(Fonte: Fronza, 2015)

Courtney-Pratt Eisner, 1957, *apud* Olson, 1996, realizaram alguns experimentos e comprovaram que ocorrem movimentos microscópicos no regime de atrito estático, conhecido com pré-deslizamento. A Figura 3.4 mostra a relação entre a força de atrito e o deslocamento, as linhas pontilhadas na figura indicam que a interrupção da força aplicada resulta em deslocamentos diferentes.

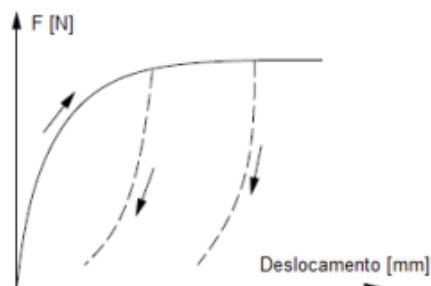


Figura 3.4 – Comportamento no pré-deslizamento.(Fonte: Fronza, 2015)

Segundo estudos realizados por Hess e Soom, 1990, conclui-se que a força de atrito é menor para velocidades decrescentes do que para velocidades crescentes. Isso está exemplificado na Figura 3.5, onde se identifica uma relação não linear entre a força e a velocidade, incluído histerese, o qual sofre influência da viscosidade, do carregamento e da taxa de variação da velocidade.

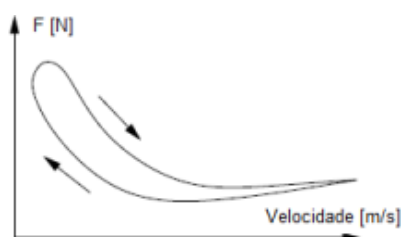


Figura 3.5 – Comportamento não linear da força de atrito com relação à velocidade. (Fonte: Fronza, 2015)

3.2 Modelos de Atrito

Os modelos clássicos de atrito têm o propósito de dar uma compreensão aproximada do comportamento de atrito, de acordo com experimentos simples que podem ser reproduzidos.

A Figura 3.6 apresenta as curvas representativas dos modelos de atrito estático clássicos disponíveis na literatura.

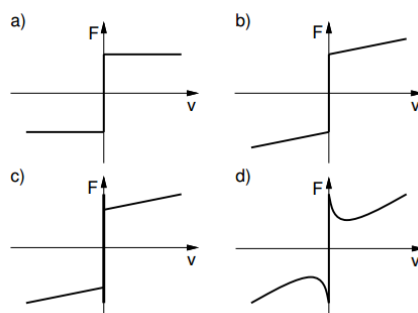


Figura 3.6 – Modelos de atrito clássicos.(Fonte: Olsson, 1996)

A Figura 3.6(a) indica a representação do modelo de atrito de Coulomb. O princípio deste modelo é de que o atrito se opõe ao movimento e sua força independe da velocidade e da área de contato. O modelo de Coulomb pode ser descrito através da Equação 3.1:

$$F = F_c \operatorname{sgn}(v), \quad (3.1)$$

onde F é a força de atrito, F_c é o coeficiente de atrito de Coulomb e v é a velocidade. O valor da força para velocidade zero não está especificado, dependendo diretamente de como a função sgn (sinal) é definida.

Em meados do Século XIX, a teoria da hidrodinâmica foi aperfeiçoada e com isso, expressões para a força de atrito decorrente da viscosidade dos lubrificantes foram desenvolvidas (Olson, 1996). A Equação 3.2 expõe esses efeitos na composição da força de atrito.

$$F = F_v v, \quad (3.2)$$

onde F é a força de atrito, F_v é o coeficiente de atrito viscoso e v é a velocidade.

Segundo Morin, 1833, *apud* Olson, 1996, a força de atrito no repouso é maior do que a força de atrito de Coulomb. Por este raciocínio, tem-se que o atrito estático neutraliza as forças externas até um determinado valor correspondente à força de atrito estático ou força de “quebra” F_s , impedindo a movimentação do objeto. Todavia, se a força externa é suficientemente grande, a força de atrito não consegue impedir o movimento do mesmo. Assim, quando o corpo está em repouso, o atrito não pode ser modelado apenas em função da velocidade, pois uma força externa contribui para o fenômeno. Desta forma, a força de atrito pode ser descrita através da Equação 3.3:

$$F = \begin{cases} F_e & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| \geq F_s \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde F é a força de atrito e F_e é a força externa.

Ao longo dos anos, os modelos clássicos foram combinados de diferentes formas (continuando, porém, sendo referenciados como clássicos). A Figura 3.6 (c) é relativa à combinação dos modelos de Coulomb, viscoso e estático.

Estudos realizados por Stribeck, 1902, *apud* Olson, 1998, demonstram que a força de atrito diminui continuamente e não de forma descontínua, como mostram os modelos descritos anteriormente. Esse efeito ocorre devido a uma dependência da velocidade, podendo o mesmo ser observado na Figura 3.6(d). O modelo de Stribeck pode ser representado pela Equação 3.4:

$$F = \begin{cases} F(v), & \text{se } v \neq 0 \\ F_e, & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e), & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| > F_s \end{cases}, \quad (3.4)$$

onde F é a força de atrito, F_e é a força externa, F_s é a força de atrito estático e $F(v)$ é conhecida como função de Stribeck. A função de Stribeck pode se definida de acordo com a Equação 3.5:

$$F(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-|v/v_s|^{\delta_s}} + F_v v, \quad (3.5)$$

onde, v_s é a velocidade relativa à força de atrito mínima e δ_s é a constante de Stribeck (normalmente definida como $\delta_s = 2$). De acordo com a Equação 3.5, quando $v \approx 0$, a força de atrito tende à força de atrito estática. No entanto, quando a velocidade entre as superfícies forem

altas, isto é, quando $v \rightarrow \infty$, a força de atrito tende à soma das forças de atrito de Coulomb e viscosa.

Com a finalidade de relatar características dinâmicas do fenômeno de atrito, Dahl, 1968 *apud* Olson, 1998, propôs um modelo que tem como partida a curva tensão-deformação de componentes mecânicos clássicos. A ideia baseia no aumento gradual da força de atrito até que ocorra a ruptura do contato. Dessa forma, Dahl modelou o atrito através da Equação 3.6:

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha, \quad (3.6)$$

onde F é a força de atrito, σ é o coeficiente de rigidez e α é o parâmetro que determina a forma da curva tensão-deformação, normalmente usado como $\alpha = 1$. Assim, o modelo de Dahl pode ser também definido como a derivada da Equação 3.6 em relação ao tempo, apresentada na Equação 3.7 a 3.9, com o parâmetro $\alpha = 1$.

$$\frac{dF}{dt} = \sigma v - \frac{F}{F_c} |v|, \quad (3.7)$$

$$F = \sigma z \quad (3.8)$$

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{F_c} z. \quad (3.9)$$

O modelo de hastes *Bristle Model*, proposto por Haessing e Friedland, 1991, tem por objetivo avaliar o comportamento microscópico entre duas superfícies em contato. Por conta de superfícies irregulares, o número de pontos em contato e sua localização são distribuídos de forma aleatória. A Figura 3.7 representa a estrutura em que o modelo é baseado. Neste formato, cada ponto é supostamente ligado por hastes flexíveis e, com o movimento relativo entre as superfícies, os esforços nas hastes aumentam e as mesmas se comportam como molas. A Equação 3.10 expressa a força de atrito para o Modelo de Hastes:

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma_0 (x_i - b_i), \quad (3.10)$$

onde, F é a força de atrito, σ_0 é a rigidez da haste, N é o número de hastes, x_i é a posição relativa das hastes e b_i é a localização do ponto em que ocorre o contato.

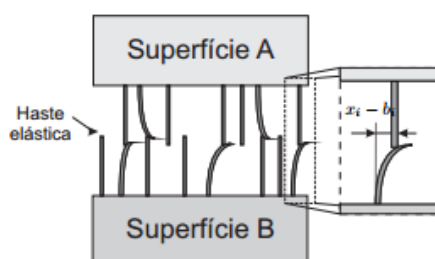


Figura 3.7 – Superfícies em contato de acordo com o Modelo de Hastes. (Casanova, 2007)

O modelo de LuGre, descrito por Canudas de Wit *et al*, 1995, consiste de uma extensão do modelo de Dahl, 1968, que, além de basear-se no comportamento microscópico dos materiais, leva em consideração o efeito de Stribeck. Neste modelo, os dois corpos rígidos em contato são considerados como elementos elásticos. Quando ocorre movimento relativo entre as superfícies,

há o surgimento de uma força tangencial que tende a deformar os elementos elásticos no ponto de contato. Quando a deformação for suficientemente grande, os elementos começam a deslizar. Assim, a força de atrito pode ser descrita pela Equação 3.11.

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v, \quad (3.11)$$

A variável z é denominada dinâmica de deflexão média e é expressa pela Equação 3.12:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|\sigma_0}{g(v)} z, \quad (3.12)$$

onde F é a força de atrito, v é a velocidade relativa entre as superfícies, z é a deflexão média do elemento elástico, σ_0 é a rigidez do elemento elástico σ_1 é o amortecimento microscópico e σ_2 é o coeficiente de atrito viscoso. A função $g(v)$ é equivalente à força de atrito de Stribeck (Equação 3.5) diminuída da parcela relativa à força viscosa ($F_v v$), que é considerada no Modelo de LuGre através do termo $\sigma_2 v$. A mesma é expressa pela Equação 3.13:

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2}, \quad (3.13)$$

Desta forma, o modelo de LuGre considera os efeitos do pré deslizamento e os efeitos dinâmicos do atrito (quando ocorre deslizamento) em função da velocidade e de acordo com o modelo de Stribeck.

3.3 Bancada de avaliação macroscópica de modelos de atrito

A bancada de avaliação macroscópica de modelos de atrito baseia-se no comportamento microscópico dos contatos entre os materiais. Por conta de superfícies irregulares e ásperas, microscopicamente, dois corpos em contato não estarão integralmente ligados. Assim, Fronza, 2015, desenvolveu a bancada a fim de representar as rugosidades de maneira macroscópica por meio de placas articuladas que representam hastes.

Com o propósito de oportunizar condições necessárias para avaliar a capacidade dos modelos na reprodução de fenômenos físicos, a bancada deve permitir o movimento vertical do conjunto, com o objetivo de simular o contato entre materiais mais polidos e rugosos. O movimento horizontal também deve ser permitido, a fim de reproduzir o deslocamento entre as superfícies em contato. Um sistema de retorno vertical com pré-tensionamento regulável foi instalado a fim de avaliar as diversas situações de sobreposição de materiais, contrapondo o movimento se subida das hastes superiores durante o deslizamento. A Figura 3.8 mostra o projeto da bancada e suas principais partes.

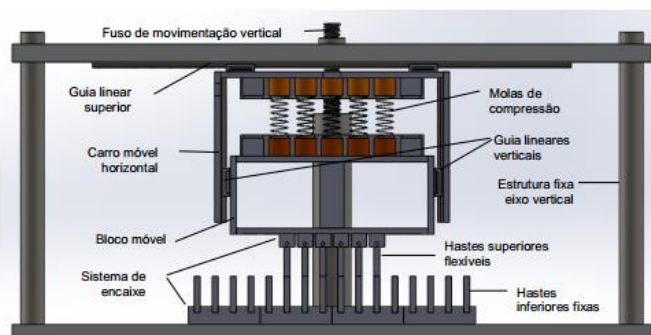


Figura 3.8 – Principais partes da Bancada de Atrito.

As hastes inferiores são fixas, e as superiores são montadas em um conjunto com pinos e molas de torção, que permitem rotação de 30° para cada lado. Todas as hastes são sustentadas por um sistema de encaixe que permite a troca rápida e utilização de diferentes quantidades de hastes. O projeto idealizado por Fronza, 2015, pode ser utilizado com até 24 hastes inferiores e 10 hastes superiores.

As placas superiores são fixadas em um bloco com molas de compressão. No momento em que ocorre um movimento relativo entre as hastes, as mesmas deslizam umas sobre as outras, de modo que o contato se afaste. Nesse instante, as molas de compressão opõem-se ao movimento, fazendo com que as placas retornem à posição original. Guias lineares são utilizadas para permitir esse deslocamento.

Para movimentar o dispositivo de forma controlada, Stona, 2016, projetou e implementou um atuador linear elétrico para automatizar o deslocamento do carro móvel da bancada, assim, melhorando as condições para a medição das forças de atrito. De acordo com o projeto de Stona, 2016, o acionamento do atuador foi realizado através de um motor de passo atuando diretamente no fuso, que o rotaciona e fornece o deslocamento linear da castanha. O motor foi fixado na bancada, unido ao fuso por um acoplamento e o fuso, acoplado a mancais.

3.4 Princípio do Trabalho Virtual (PTV)

Segundo Meirovitch, 1986, o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) é basicamente um equacionamento do equilíbrio estático de um sistema mecânico. Para a obtenção do PTV, é necessário introduzir o conceito de deslocamentos virtuais.

Imagina-se um sistema de N partículas se movendo em um espaço tridimensional, definindo os deslocamentos virtuais $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \dots, \delta z_N$ como mudanças infinitesimais nas coordenadas $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N$, os deslocamentos virtuais consistem de pequenas variações nas coordenadas, resultantes da suposição de um sistema em uma posição ligeiramente deslocada, que não requer alterações no tempo (Meirovitch, 1986). Estes, sendo infinitesimais, obedecem ao cálculo diferencial. Logo, se as coordenadas reais satisfazem a equação da contração:

$$g(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, \dots, z_N, t) = c, \quad (3.14)$$

os deslocamentos virtuais devem ser descritos como:

$$g(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, x_2 + \delta x_2, \dots, z_N + \delta z_N, t) = c. \quad (3.15)$$

Expandindo a Equação 3.15 em série de Taylor de primeira ordem, chega-se em:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial g}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial g}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (3.16)$$

Assumindo que cada partícula do sistema é atuada por uma força resultante, tem-se que:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i, \quad (3.17)$$

onde \mathbf{F}_i é a força aplicada e \mathbf{f}_i é a força de restrição. Para um sistema em equilíbrio, cada partícula deve estar em repouso, de modo que a força em cada uma seja nula, logo $\mathbf{R}_i = 0$. Desta forma, o produto escalar $\mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$, que representa o deslocamento virtual da partícula, também deve ser nulo. Assim, o trabalho virtual para todo o sistema deve ser nulo, logo:

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.18)$$

Restringindo-se a sistemas para os quais o trabalho virtual realizado pela força de restrição é nulo, exclui-se as forças de atrito resultantes do contato de superfícies rugosas, como mostra a Equação 3.19.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (3.19)$$

Com essas considerações, tem-se que o trabalho realizado pelas forças aplicadas, através de deslocamentos virtuais infinitesimais, é zero.

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (3.20)$$

Esta é a fundamentação do princípio do trabalho virtual que pode ser usado para calcular a posição estática de equilíbrio de elementos flexíveis.

4. METODOLOGIA

Conforme já comentado, o atrito é um fenômeno físico no qual seus mecanismos ainda não foram completamente esclarecidos. O modelo matemático, baseado no equacionamento da bancada experimental de avaliação de modelos de atrito tem o intuito de auxiliar no entendimento do comportamento do fenômeno físico de atrito, dando base para simulações e validações das variáveis apresentadas anteriormente.

A primeira parte do trabalho consiste em estabelecer as hipóteses de simplificação do sistema para a definição do modelo. Após o modelo já estar definido, é realizado o equacionamento físico do sistema com o auxílio do *software* MathCad (versão educacional), o qual possibilitou a avaliação numérica das expressões matemáticas e a construção de gráficos para análise física dos resultados obtidos.

4.1 Definição do modelo

O desenvolvimento do modelo baseou-se no comportamento da parte móvel da bancada experimental de avaliação de modelos de atrito, desenvolvida por Fronza, 2015. Por ser um sistema complexo, algumas considerações foram feitas a fim de simplificar a modelagem e posterior equacionamento físico, sendo listadas abaixo:

- 1) Foi analisado somente o comportamento estático da bancada;
- 2) A análise desprezou os pré-deslizamentos ocasionados pela força peso;
- 3) O modelo inicial considerou apenas a fase de pré-deslizamento;
- 4) O comprimento das hastes é considerado infinito ou seja, não ocorre a “quebra” do contato.

A Figura 4.1 apresenta o modelo aproximado utilizado para o equacionamento físico da parte móvel da bancada de avaliação macroscópica de atrito.

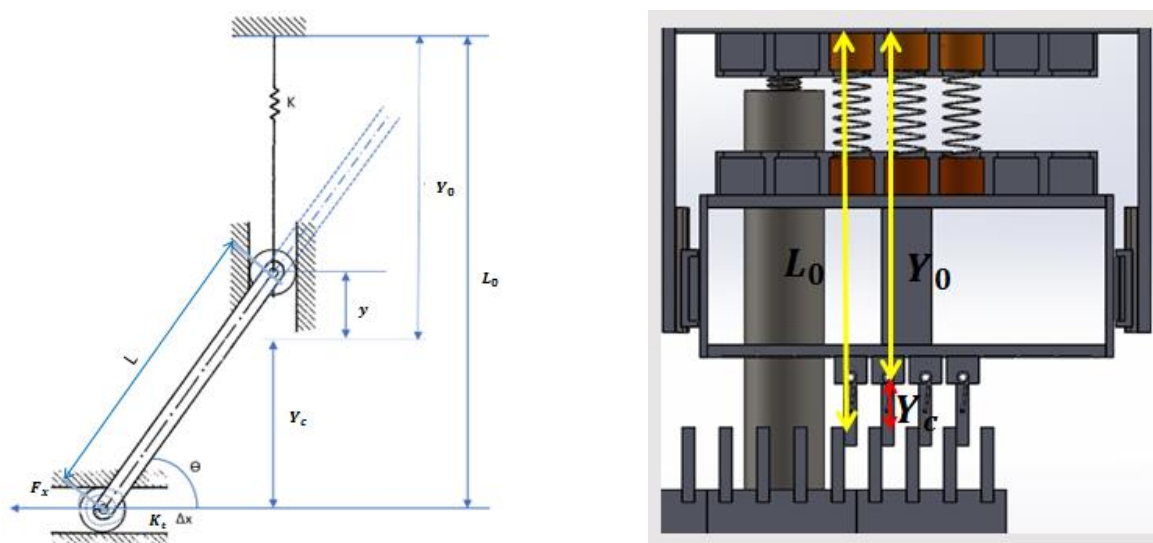


Figura 4.1 – Modelo representativo da parte móvel da bancada de atrito.

De acordo com o modelo descrito na Figura 4.1, partiu-se da premissa em que alguns parâmetros são conhecidos ou de fácil obtenção através de uma análise geométrica do modelo. A Figura 4.2 deixa evidente a região em que ocorre o contato entre as hastes.

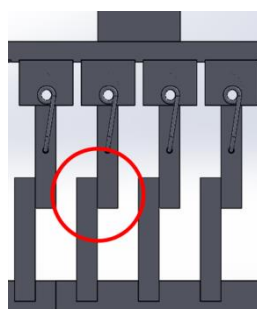


Figura 4.2 – Região em que ocorre o contato.

As constantes das molas de compressão e torcional, K e K_t , respectivamente, são valores conhecidos e que não variam com nenhum parâmetro do sistema.

De acordo com a Figura 4.1, Y_c é o parâmetro geométrico que traduz a diferença entre as posições iniciais do conjunto, ou seja:

$$Y_c = L_0 - Y_0, \quad (4.1)$$

onde L_0 e Y_0 são valores fixos e conhecidos. O comprimento L_0 é definido como a distância inicial entre a fixação da haste na mola torcional e a fixação do conjunto de molas lineares com o carro móvel da bancada de atrito, como mostra na Figura 4.1. O comprimento Y_0 é a posição inicial da mola, ou seja, é a distância entre a fixação da mola no carro móvel e o contato com a haste, com esta trabalhando com um ângulo de 90° de inclinação com a horizontal.

O comprimento L é um valor variável, que depende do ângulo de inclinação da haste. L pode ser descrito como o comprimento útil de trabalho da haste. O deslocamento da haste na direção horizontal, Δx , depende do comprimento de trabalho da haste L e do ângulo de rotação θ , como segue:

$$\Delta x = L \cos(\theta). \quad (4.2)$$

Isolando o parâmetro L da Equação (4.2), obtemos a expressão para o comprimento útil da haste.

$$L = \frac{\Delta x}{\cos \theta} . \quad (4.3)$$

O deslocamento y representa o quanto a mola axial se desloca na direção vertical, sendo definido, a partir da Figura 4.1, como:

$$y = L \operatorname{sen}(\theta) - Y_c . \quad (4.4)$$

4.2 Equacionamento do Equilíbrio Estático do Sistema

Após a definição dos parâmetros físicos e geométricos, foi realizado um estudo das forças atuantes no sistema para o caso estático. A partir desta análise, foi possível desenvolver um modelo matemático que represente o comportamento da força de atrito na parte móvel da bancada experimental de avaliação de modelos de atrito.

O principal objetivo do equacionamento é, a partir da condição de equilíbrio estático, obter a equação que relaciona a força de atrito F_x resultante do contato com o deslocamento Δx . Assim, o modelo proposto poderá ser utilizado, por exemplo, em modelagem de sistemas visando à simulação dinâmica. Dessa forma, o equacionamento de um sistema mecânico de 2ª ordem (sistema massa-mola em paralelo) com atrito entre as partes móveis pode ser definido considerando a equação de equilíbrio dinâmico da forma:

$$M_0 \ddot{x} + K_0 \dot{x} + F_x(\Delta x) = F_0(t),$$

onde M_0 é a massa deslocada, K_0 é a rigidez elástica do sistema, $x(t)$ é o deslocamento da massa, $\Delta x(t)$ é o deslocamento relativo entre os corpos em contato, \ddot{x} é a aceleração da massa e $F_0(t)$ é uma força externa aplicada. A força F_x é calculada em função de $\Delta x(t)$ medida em relação a uma referência. Se uma das partes em contato está fixa, $\Delta x(t)$ passa a coincidir com $x(t)$.

A força produzida pela mola de compressão pode ser descrita, de acordo com a Lei de Hooke, como:

$$F_y = -Ky , \quad (4.5)$$

onde K é a constante elástica da mola e y representa a deformação sofrida pela mola na direção vertical.

O momento aplicado à mola torcional pode ser expresso como:

$$M_o = K_t \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) , \quad (4.6)$$

onde K_t é a constante da mola torcional e θ é o deslocamento angular relativo.

A força na direção normal à haste exercida por efeito da deformação da mola torcional pode ser expressa como:

$$F_n = \frac{K_t \theta}{L} . \quad (4.7)$$

Decompondo a força normal na direção de x e y , permite obter-se suas componentes nessas direções, respectivamente F_{nx} e F_{ny} , descritas como:

$$F_{nx} = F_n \sin \theta . \quad (4.8)$$

$$F_{ny} = F_n \cos \theta . \quad (4.9)$$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais e, através da análise geométrica do modelo, os deslocamentos virtuais podem ser definidos para as direções horizontal e vertical, como segue:

Na direção horizontal:

$$\delta x = \frac{d}{d\theta} (L \cos \theta),$$

logo,

$$\delta x = -L \sin \theta \delta \theta . \quad (4.10)$$

Na direção vertical:

$$\delta y = \frac{d}{d\theta} (L \sin \theta - Y_c),$$

logo,

$$\delta y = L \cos \theta \delta \theta . \quad (4.11)$$

Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais (PTV), obtém-se a seguinte equação para o balanço de energia do sistema:

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + M_o \delta \theta = 0 , \quad (4.12)$$

Substituindo os termos δx , F_y , δy e M_o , da Equação (4.12) pelas suas respectivas definições (equações 4.10, 4.5, 4.11, 4.6) e, logo após, substituindo o valor de y pela expressão (4.4) na expressão para F_y (4.5), obtém-se o seguinte balanço de energia.

$$F_x (-L \sin \theta \delta \theta) - K (L \sin \theta - Y_c) (L \cos \theta \delta \theta) + K_t \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \delta \theta = 0 . \quad (4.13)$$

Isolando F_x na Equação (4.13) encontramos uma expressão para a força de atrito, dependente do ângulo de rotação (θ) e do comprimento efetivo da haste (L).

$$F_x(\theta, L) = \frac{2KY_c \cos \theta L - K L^2 \sin 2\theta + \pi K_t - 2K_t \theta}{2 L \sin \theta} , \quad (4.14)$$

Realizando o equacionamento do equilíbrio de forças na direção horizontal, igualamos as expressões (4.14) e (4.8):

$$F_x = F_{nx} . \quad (4.15)$$

Após uma manipulação algébrica simples, obtém-se uma expressão para o deslocamento Δx , descrita por meio da Equação (4.16):

$$\Delta x(\theta) = d_1 + d_2 , \quad (4.16)$$

onde,

$$d_1 = \frac{\sqrt{4 K^2 Y_c^2 \cos^2 \theta + 2 \pi K K_t \sin 2\theta + \pi K K_t \sin 4\theta - 4 K K_t \theta \sin 2\theta - 2 K K_t \theta \sin 4\theta}}{4K \sin \theta} ,$$

$$d_2 = \frac{-2KY_c + 4KY_c \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{4K \sin \theta} .$$

onde d_1 e d_2 são variáveis auxiliares.

Substituindo a expressão para o deslocamento Δx (Equação (4.16)) na expressão para o comprimento L (Equação (4.3)), encontrou-se uma relação para L que depende apenas do ângulo θ . Com isso, foi possível chegar à expressão para a força de atrito que também depende apenas do ângulo de rotação das hastes (θ), como segue:

$$F_x(\theta) = \frac{A(B+C)D}{M}, \quad (4.17)$$

onde

$$A = K K_t \cos \theta (2\theta - \pi)$$

$$B = \sqrt{K(2K Y_c^2 + 2\pi K_t \sin 2\theta + \pi K_t \sin 4\theta - 4K_t \theta \sin 2\theta - 2K_t \theta \sin 4\theta + 2K Y_c^2 \cos 2\theta)}$$

$$C = -2K Y_c \cos \theta$$

$$D = (\sin 4\theta - 2 \sin 2\theta)$$

$$M = 2 \sin 2\theta (2\pi K K_t \sin 2\theta + \pi K K_t \sin 4\theta - 4K K_t \theta \sin 2\theta - 2K K_t \theta \sin 4\theta)$$

onde A, B, C, D e M são também variáveis auxiliares.

Realizando o equilíbrio de forças na direção y , tem-se agora a seguinte igualdade:

$$F_y = F_{yn}, \quad (4.18)$$

Com uma manipulação algébrica adequada (ver apêndice A), obtém-se uma expressão para o parâmetro L dependendo apenas do ângulo θ .

$$L(\theta) = \frac{\sqrt{K^2 Y_c^2 - K K_t \sin 2\theta (2\theta - \pi)} + K Y_c}{2K \sin \theta}. \quad (4.19)$$

Substituindo L na expressão (4.2) para o deslocamento Δx , chega-se à Equação (4.20), que representa também o deslocamento da haste na direção horizontal (Δx).

$$\Delta x(\theta) = \cot \theta \frac{\sqrt{K^2 Y_c^2 - K K_t \sin 2\theta (2\theta - \pi)} + K Y_c}{2K}. \quad (4.20)$$

Com a expressão encontrada para o deslocamento Δx (Equação (4.2)) e, substituindo a mesma na expressão para o comprimento útil L (Equação (4.3)), chegou-se à seguinte expressão para a força de atrito.

$$F_x(\theta) = \frac{-8KK_t \sin^4 4\theta (2\theta - \pi) \left(\sqrt{K^2 Y_c^2 - K K_t \sin 2\theta (2\theta - \pi)} - K Y_c \right)}{8 \sin^2 \theta (-K K_t \sin 2\theta (2\theta - \pi))}. \quad (4.21)$$

A expressão para a força F_x , apresentada na Equação (4.21) depende apenas no ângulo de rotação (θ).

As equações (4.16) e (4.20) representam o deslocamento horizontal das hastes, porém, percebe-se que a expressão (4.20) é mais compacta.

Trabalhando com a hipótese de ângulos pequenos, fez-se uma aproximação linear para o ângulo de rotação θ , restringindo a faixa de aplicação da Equação (4.20) para ângulos relativamente pequenos. Segundo essa hipótese, utiliza-se as seguintes aproximações:

$$\sin \theta \cong \theta \text{ e } \cos \theta \cong 1$$

Com isso, obteve-se a seguinte expressão para o deslocamento horizontal.

$$\Delta x_L(\theta) = \frac{K Y_c + \sqrt{K(K Y_c^2 - 4K_t \theta^2 + 2\pi K_t \theta)}}{2K \theta}, \quad (4.22)$$

Como será visto mais adiante (Figura 5.2), com relação aos valores da expressão não simplificada, esta aproximação resulta em erro relativamente baixo para uma ampla faixa valores de θ .

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o modelo matemático definido e, após a obtenção do equacionamento físico para o mesmo, foram feitos gráficos para avaliar o comportamento do fenômeno do atrito utilizando o modelo de hastes.

Os parâmetros do modelo que possuem valores constantes são descritos na Tabela 5.1. Esses valores são de referência, sendo obtidos através de medições na bancada e por catálogo de fabricantes. As dimensões L_0 e Y_0 foram obtidas com o auxílio de uma régua, fazendo uma medição direta na bancada e conferidas através do modelo em SolidWorks®. Os valores para as constantes das molas K e K_t foram obtidos através das especificações do fabricante, ver Apêndice D.

Tabela 5.1 – Valores de referência para utilizados no equacionamento do modelo.

Parâmetro	Valor de referência
K	4,11 N/m
K_t	1,20 Nm/rad
L_0	0,165 m
Y_0	0,136 m

Desta forma, os gráficos apresentam uma visão qualitativa e quantitativa de como os parâmetros se comportam com a variação do ângulo de rotação e sobreposição das hastes.

A Figura 5.1 apresenta a variação do comprimento útil da haste em função do ângulo de rotação θ , sendo $L(\theta)$ a curva obtida pela Equação (4.3), substituindo Δx pela Equação (4.16), e $L_1(\theta)$ a curva obtida pela Equação (4.19). Conclui-se que as duas curvas são idênticas, o que significa que o modelo proposto está de acordo com o esperado, levando em consideração a hipótese inicial de comprimento infinito para as hastes. Analisando a Figura 5.2, tem-se que o comportamento da função deslocamento Δx é idêntico, levamos em conta o equacionamento através das direções x (Equação 4.16) e y (Equação 4.21), respectivamente Δx e Δx_1 . A curva pontilhada, que representa a função linearizada (Equação 4.22) é semelhante às outras duas curvas, o que mostra que a aproximação é válida e satisfatória para a hipótese de pequenos ângulos.

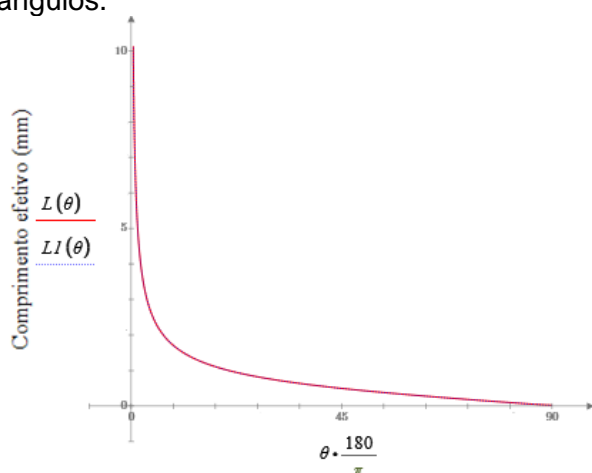


Figura 5.1 – Variação do comprimento da haste.

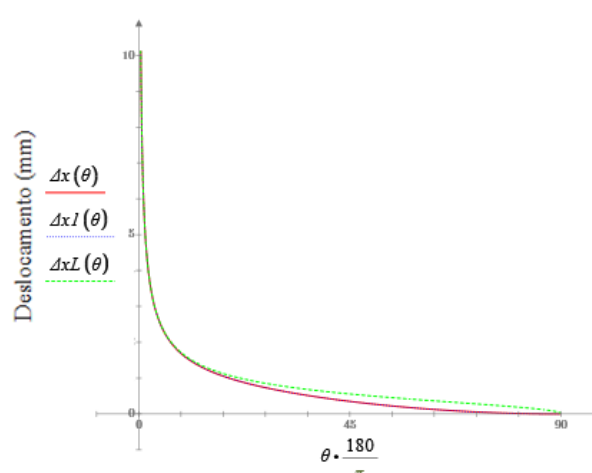


Figura 5.2 – Variação do deslocamento horizontal da haste.

A Figura 5.3 apresenta o comportamento da força de atrito em função do ângulo θ . As curvas para F_x e F_{x1} , como apresentadas, são idênticas e validam o equacionamento para o modelo. No início do movimento, quando a haste está a 0° de rotação, a força de atrito assume um valor nulo. Como mostra na Figura 5.3, a força de atrito aumenta até assumir um valor máximo, que corresponde a um $\theta \approx 75^\circ$. Esta região em que ocorre o pico de força é análoga à região em que surge a força de quebra, no regime de pré-deslizamento. Após este pico, a força de atrito perde intensidade até não ter mais oposição ao movimento. A Figura 5.4 apresenta a curva da força de atrito versus o deslocamento das hastes ($F_x \times \Delta x$) antes de existir um movimento macroscópico de deslizamento entre os coros de contato. Essa figura configura o regime de pré-deslizamento.

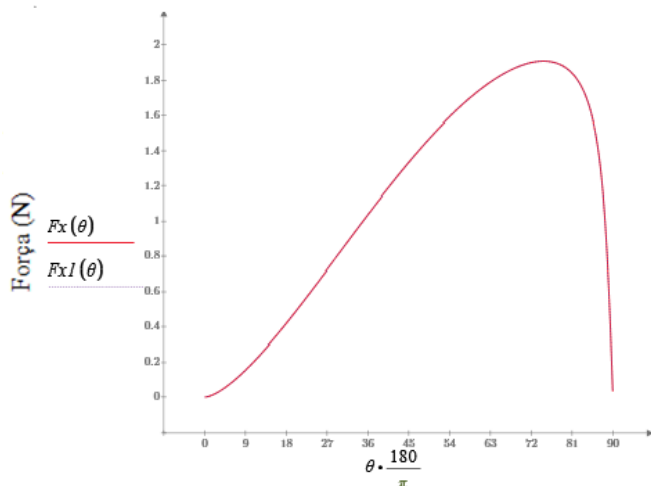


Figura 5.3 – Comportamento da Força de Atrito em função do ângulo θ

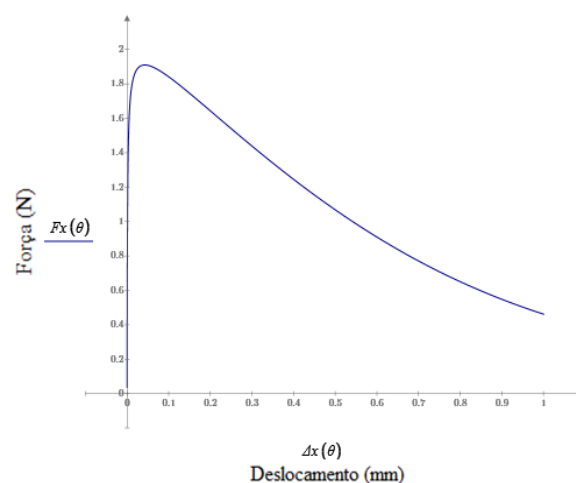


Figura 5.4 – Caracterização do regime de pré-deslizamento

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma proposta de modelo matemático para a representação do comportamento da parte móvel de uma bancada experimental de avaliação de modelos de atrito, através do equacionamento físico do sistema.

O modelo proposto se mostra adequado para representar os parâmetros geométricos da bancada, assim como o comportamento da força de atrito na região de pré-deslizamento. As simplificações impostas no início são satisfatórias, não interferindo de modo direto nos resultados obtidos, resultando em erros relativamente baixos para uma ampla faixa de valores de θ .

A aquisição de dados experimentais foi uma dificuldade encontrada durante a realização do trabalho. Sem os programas para tal, e sem tempo hábil para refazer os mesmos, não foi possível comparar as curvas puramente experimentais com as propostas pelo modelo.

Para trabalhos futuros, sugere-se a revisão do projeto mecânico da bancada, com o objetivo de alinhar a mesma e diminuir as folgas entre os elementos. Outro ponto importante trata-se da reformulação dos programas de aquisição de dados experimentais, que permitem comparar o comportamento da força de atrito obtido através de testes na bancada com as expressões teóricas desenvolvidas. Por último, sugere-se a análise dinâmica da bancada com base na modelagem descrita no presente trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Armstrong-Hélouvry, B., “Control of Machines with Friction”, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1991.

Bowden F., Tabor D., **“The Friction and Lubrication of Solids”**, Oxford University Press, Oxford Classic Texts, 2001.

Casanova, C. C., **“Modelagem e Compensação de Atrito em Robôs Manipuladores com Flexibilidades nas Juntas: Identificação, Análise e Resultados Experimentais”**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

Canudas de Wit, C., Olsson, H., Aström, k., Lischinsky, P., **“A new model for control of systems with friction”**, IEEE Transactions on Automatic Control, vol 40, pp. 419 – 425, 1995.

Courtney-Pratt, J., Eisner, E., **“The Effects of a Tangential Force on the Contact of Metallic Bodies”**, Proceedings of the Royal Society, vol A238, pp. 529 – 550, 1957.

Dahl, P., **“A Solid Friction Model”**, Technical Report TOR-0158(3107-18)-1, The Aerospace Corporation, El Segundo, CA, 1968.

Fronza, G. R., **“Desenvolvimento de um Protótipo de Equipamento de Avaliação Macroscópica de Modelos de Atrito”**, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

Haessig, D., Friedland, B., **“On the Modelling and Simulation of Friction”**, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol 113, pp. 354–362, 1991.

Hess, D., Soom, A., **“Friction at a Lubricated Line Contact Operating at Oscillating Sliding Velocities”**, Journal of Tribology, vol 112, pp. 147–152, 1990.

Meirovitch, L., **“Elements of Vibration Analysis”**, McGraw-Hill International Editions, 2ª edição, 1986.

Morin, A., **“New Friction Experiments Carried Out at Metz in 1831-1833”**, Proceedings of the French Royal Academy of Sciences, vol 4, pp 1-128, 1833.]

Olsson H., **“Control systems with friction”**, Doctoral thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1996.

Olsson, H., Åström, K., Canudas de Wit, C., Gäfvert, M., Lischinsky, P., **“Friction Models and Friction Compensation”**, European Journal of Control, vol 4, pp 176-195, 1998.

Shigley, J.E., **“Elementos de Máquinas”**, Editora LTC, Volume 1, 1984.

Stona, I. A. S., **“Desenvolvimento de Atuador Linear Elétrico para Equipamento de Avaliação Macroscópica de Modelos de Atrito”**, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

Stribeck, R., **“Die Wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager – The Key Qualities of Sliding and Roller Bearings.”** Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, pp. 1342–1348, 1432–1437, 1902.

APÊNDICE A – Dedução do equilíbrio de forças na direção y

Realizando o equilíbrio de forças na direção y, tem-se agora a seguinte igualdade, apresentada na Equação (4.18):

$$F_y = F_{yn}, \quad (4.18)$$

Substituindo os termos da Equação (4.18), pelas Equações (4.5, 4.7 e 4.9), obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{K_t(\pi/2 - \theta) \cos \theta}{L} = K (L \sin \theta - Y_c), \quad (A.1)$$

Fazendo uma pequena manipulação algébrica, tem-se que:

$$\frac{-K_t(2\theta - \pi) \cos \theta}{2L} = K L \sin \theta - K Y_c, \quad (A.2)$$

Multiplicando os dois lados da expressão acima por $2L$ e organizando os termos, chega-se na seguinte igualdade:

$$K \sin \theta L^2 - K Y_c L + \frac{K_t(2\theta - \pi) \cos \theta}{2} = 0, \quad (A.3)$$

Através da fórmula de Bhaskara, obtém-se a solução para o parâmetro L dependendo apenas do ângulo θ .

$$L = \frac{\sqrt{K^2 Y_c^2 - K K_t \sin 2\theta (2\theta - \pi) + K Y_c}}{2 K \sin \theta}. \quad (4.19)$$

APÊNDICE B – Caracterização dos instrumentos de medição da Bancada de Atrito

A bancada desenvolvida por Fronza, 2015, é equipada com três instrumentos de medição, cujas características são apresentadas na Tabela B.1. Um sensor linear (LVDT) é acoplado ao bloco com as molas de compressão com a finalidade de obter o deslocamento vertical do conjunto. Uma régua potenciométrica foi fixada no topo do conjunto para aferir o deslocamento horizontal. Além disso, uma célula de carga foi conectada junto a lateral do bloco com molas de compressão para avaliar a força aplicada durante o deslocamento. A Figura B.1 mostra a configuração final da bancada proposta por Fronza, 2015.

Tabela B.1 – Dados dos instrumentos de medição.

Descrição	Modelo	Limite Aplicação	Erro
LVDT	GEFRAN PY-2-F-025-S01M	25 mm	±0,2%
Régua Potenciométrica	FESTO MLO-POT-360-TLF	360 mm	±0,2%
Célula de Carga	Obtida da balança SWAN SF- 400	70 N	±5%

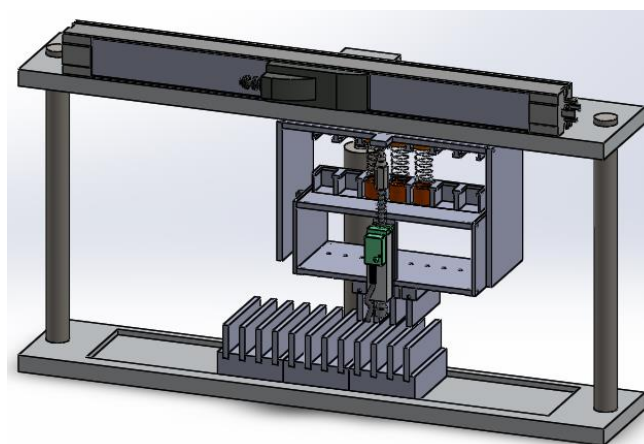


Figura B.1 – Modelo da Bancada de testes.(Fonte: Fronza, 2015)

APÊNCIDE C – Expressão para o ângulo de rotação θ

Resolvendo a Equação (4.22) para θ , obtém-se a seguinte expressão para o ângulo θ em função de Δx :

$$\theta = \frac{\pi K_t + 2K Y_c \Delta x_L}{2K Y_c \Delta x_L + 2 K_t}, \quad (C.1)$$

ou seja, pode-se obter um ângulo aproximado θ em função de Δx , que, por sua vez, pode ser obtido, por exemplo, a partir da equação dinâmica (conforme anteriormente exemplificado por meio de um sistema massa-mola).

Uma vez conhecido o valor de θ por intermédio da expressão (C.1), é possível calcular por meio da Equação (4.21) o valor de F_x para um determinado Δx .

APÊNDICE D – Determinação das constantes das molas.

Para determinar a constante das molas de compressão de torção, realizou-se o cálculo teórico das mesmas, de acordo com as especificações do fabricante. Para a mola de compressão, utilizaram-se as seguintes especificações para uma mola.

Tabela D.1 – Valores para o cálculo da constante da mola de compressão.

Parâmetro	Valor de referência
<i>Diâmetro do arame (d)</i>	1 mm
<i>Módulo de rigidez (G)</i>	80,8 Mpa
<i>Número de espiras ativas (Na)</i>	10
<i>Diâmetro médio da mola (D)</i>	13,5 mm

Através Equação (D.1), Shigley, 1984, chega-se ao valor para a constante da mola de compressão (K).

$$K = \frac{d^4 G}{8 D^3 N_a} \quad (D.1)$$

Para a mola de torção, utilizaram-se as seguintes especificações para uma mola de Aço Inox AISI 316L:

Tabela D.2 – Valores para o cálculo da constante da mola de torção.

Parâmetro	Valor de referência
<i>Diâmetro do arame (d)</i>	0,7 mm
<i>Módulo de elasticidade (E)</i>	193 Gpa
<i>Número de espiras ativas (Na)</i>	7
<i>Diâmetro médio da mola (D)</i>	4,3 mm

Através Equação (D.2), Shigley, 1984, chega-se ao valor para a constante da mola de torção (K).

$$K_t = \frac{d^4 E}{10,8 D N_a} \quad (D.2)$$