

**Universidade Federal do Rio Gande do Sul**  
**Escola de Engenharia**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil**

**Simulação de Escoamentos Compressíveis  
Turbulentos no Entorno de Corpos Móveis Usando  
Malhas Adaptativas de Elementos Finitos**

Renato Vaz Linn

Porto Alegre

2017

Renato Vaz Linn

**Simulação de Escoamentos Compressíveis  
Turbulentos no Entorno de Corpos Móveis Usando  
Malhas Adaptativas de Elementos Finitos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia. Orientação: Prof. Dr. Armando Miguel Awruch.

Porto Alegre

2017

L251s Linn, Renato Vaz  
Simulação de Escoamentos Compressíveis Turbulentos no Entorno de  
Corpos Móveis Usando Malhas Adaptativas de Elementos Finitos / Renato  
Vaz Linn. – 2017.

Tese de Doutorado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de  
Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre,  
BR-RS, 2017

Orientador: Prof. Dr. Armando Miguel Awruch.

1. Dinâmica de Fluidos Computacional. 2. Turbulência em Escoamentos  
Compressíveis. 3. Simulação de Grades Escalas. 4. Adaptação de Malhas. 5.  
Corpos Móveis. 6. Aeroelasticidade. I. Awruch, Armando Miguel, orient. II.  
Título.

CDU-624.04(043)

Renato Vaz Linn

Simulação de Escoamentos Compressíveis Turbulentos no  
Entorno de Corpos Móveis Usando Malhas Adaptativas de  
Elementos Finitos

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, na Área de Concentração de ESTRUTURAS, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 19 de maio de 2017

Prof. Armando Miguel Awruch  
Dr. COPPE/UFRJ  
Orientador

Luiz Antonio Bressani  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**Comissão Julgadora:**

Alexandre Luis Braun  
Dr. em Engenharia Civil, PPGEC/UFRGS

Jorge Hugo Silvestrini  
PhD em Mecânica de Fluidos e Transferências, INPG, França

Roberto Gil Annes da Silva  
Dr. em Engenharia Aeronáutica e Mecânica, ITA

*Dedico este trabalho à minha família.*

# Agradecimentos

Agadeço primeiramente a minha família, em especial minha mãe Maria Sirlei pelo apoio, paciência e carinho.

Ao professor Awruch, pelo constante incentivo, dedicação e orientação do trabalho.

Ao Centro Nacional de Supercomputação (CESUP/UFRGS) e ao Centro de Mecânica Aplicada Computacional (CEMACOM/UFRGS), por possibilitarem o uso de um *Cluster* e um *Workstation*, sem os quais grande parte deste trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos meus colegas de departamento, pelo agradável convívio.

A todos os meus amigos, sem os quais o percurso ao longo da vida não seria tão aprazível.

# Epígrafe

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

*("Que não entre aqui aquele que não sabe Geometria")*

*– Inscrição que marcava a entrada da Academia de Platão.*

# Resumo

Linn, R.V. **Simulação de Escoamentos Compressíveis Turbulentos no Entorno de Corpos Móveis Usando Malhas Adaptativas de Elementos Finitos**. Tese de Doutorado em Engenharia Civil – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2017.

Neste trabalho, é apresentada a simulação de escoamentos compressíveis turbulentos no entorno de corpos móveis rígidos ou deformáveis empregando-se técnicas adaptativas. As simulações numéricas são conduzidas utilizando-se o método dos elementos finitos. A discretização espaço-temporal é desenvolvida através do método das linhas ou direções características (Characteristic-Based Split - CBS) e a modelagem da turbulência é feita através de um modelo de Simulação de Grandes Escalas (SGE, ou na terminologia em inglês, Large Eddy Simulation – LES) com o coeficiente de Smagorinsky variável no tempo e espaço (SGE ou LES dinâmico). A análise estrutural de corpos deformáveis imersos no fluido é realizada através de um modelo de elementos finitos triangulares para análise de placas e cascas com não linearidade geométrica, usando materiais elásticos com comportamento linear. Conjuntamente, um método de adaptação anisotrópica transiente de malhas é empregado para obter resultados com boa resolução a baixos custos computacionais. A consideração do movimento relativo de corpos imersos no escoamento é feita através de um método híbrido de movimento da malha que emprega interpolação com funções de base radial. Exemplos bidimensionais e tridimensionais são apresentados de forma a validar cada uma das metodologias desenvolvidas. Por fim, exemplos de simulações complexas são investigados, comparando-se os resultados obtidos com resultados experimentais e numéricos presentes na literatura.

Palavras-chave: Dinâmica de Fluidos Computacional, Turbulência em Escoamentos Compressíveis, Simulação de Grandes Escalas, Adaptação de Malhas, Corpos Móveis, Aeroelasticidade.

# Abstract

Linn, R.V. **Simulation of Turbulent Compressible Flows Around Moving Bodies Using Adaptative Finite Element Meshes.** Tese de Doutorado em Engenharia Civil – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2017.

In this work, the simulation of compressible turbulent flows around rigid and flexible moving bodies is presented using adaptative techniques. The numerical simulations are solved employing the finite element method. The space-time discretization is performed using the Characteristic-Based Split scheme (CBS) and turbulence is modelled with Large Eddy Simulation (LES) and a dynamic Smagorinsky sub-grid model. The structural analysis of deformable bodies immersed on the flow is performed using a triangular finite element model for the analysis of geometrically non-linear elastic plates and shells. An anisotropic mesh adaptation algorithm for transient simulations is coupled with the solver to achieve results with good resolution and low computational costs. The consideration of the relative movement of immersed bodies on the flow is performed employing a hybrid method of mesh movement based on radial basis function interpolation. Two-dimensional and three-dimensional examples are presented in order to validate the proposed methodologies. Finally, complex simulations are investigated, where results are compared with experimental and numerical data available in the literature.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Compressible Turbulence, LES, Anisotropic Mesh Adaptation, Moving Bodies, Aero-elasticity.

---

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>11</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>15</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>16</b>
1.1 Turbulência em Regime Compressível	17
1.2 Adaptação de Malhas	22
1.3 Variação da Topologia do Domínio	29
1.4 Computação Paralela e Interpretação de Dados	34
1.5 Contextualização do Trabalho	35
1.6 Objetivos	40
1.7 Metodologia	41
<b>2 Escoamentos Compressíveis Turbulentos</b>	<b>43</b>
2.1 Equações Fundamentais do Escoamento	47
2.2 Filtragem das Equações Fundamentais do Escoamento	49
2.2.1 Propriedades Fundamentais	50
2.2.2 Hipóteses Adicionais	51
2.2.3 Filtragem Favre	52
2.2.4 Equações Fundamentais do Escoamento Filtradas	53
2.2.5 Modelagem das Escalas de Sub-Malha	55
2.2.6 Forma Final das Equações Fundamentais do Escoamento Filtradas	63
2.2.7 Condições Iniciais e de Contorno	64
2.2.8 Forma Adimensional das Equações de Fundamentais do Escoamento	66
2.3 Solução Numérica das Equações de Fundamentais do Escoamento	67
2.3.1 O Método das Linhas ou Direções Características ( <i>Characteristic Based Split – CBS</i> )	68
2.3.2 Método CBS Aplicado à Mecânica de Fluidos	71
2.3.3 Discretização Espacial	74
2.3.4 Difusão Artificial	75
2.3.5 Incremento de Tempo	76
2.3.6 Simulações Transientes	77
2.3.7 Simulações Permanentes	77
<b>3 Adaptação Anisotrópica de Malhas com Contornos Móveis</b>	<b>79</b>
3.1 Topologia da Malha	80
3.2 Estimativas de Métrica	81
3.2.1 Espaço Métrico Euclidiano	81
3.2.2 Espaço Métrico Riemanniano	82

---

3.2.3	Interpretação Geométrica	84
3.2.4	Estimativa de Erro	85
3.2.5	Interseção Multi-Métrica	87
3.2.6	Determinação da Matriz Hessiana	87
3.3	Adaptação de Malhas	89
3.3.1	Refinamento	89
3.3.2	Desrefinamento	92
3.3.3	Alternância de Arestas e Faces	94
3.3.4	Suavização Nodal	95
3.3.5	Algoritmo de Adaptação	98
3.4	Interpolação com Funções de Base Radial	99
3.5	Malhas Dinâmicas para Contornos Móveis	101
3.6	Transferência de Solução	103
<b>4</b>	<b>Interação Fluido-Estrutura</b>	<b>108</b>
4.1	Dinâmica Não-Linear em Mecânica de Sólidos	108
4.2	Elemento Triangular de Placas Finas e Cascas	111
4.3	Formulação Lagrangeana Atualizada	113
4.4	Solução Iterativa das Equações de Equilíbrio Incrementais	116
4.5	Acoplamento Fluido-Estrutura	117
<b>5</b>	<b>Visualização Científica, Pós-Processamento e Computação Paralela</b>	<b>119</b>
5.1	Visualização Científica de escoamentos Compressíveis Turbulentos	119
5.1.1	Visualização de Compressibilidade e Identificação de Ondas de Choque	120
5.1.2	Identificação de Vórtices	120
5.2	Coefficientes Aerodinâmicos	121
5.3	Computação Paralela	123
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>126</b>
6.1	Adaptação de Malhas Bidimensionais e Tridimensionais para Campos Analíticos	126
6.2	Movimento Prescrito no Contorno de Malhas Bidimensionais e Tridimensionais	131
6.3	Aerodinâmica em Regime Permanente	135
6.3.1	Escoamento Permanente Transônico Não-Viscoso no Entorno de Aerofólio NACA-0012	135
6.3.2	Escoamento Permanente Supersônico Não-Viscoso no Entorno de Esfera	138
6.3.3	Escoamento Permanente Supersônico Não-Viscoso no Entorno de Míssil AGM-114 Hellfire	141
6.4	Aerodinâmica em Regime Transiente e Turbulento	145
6.4.1	Escoamento Turbulento Supersônico no Entorno de Cilindro Circular em Canal	145
6.4.2	Escoamento Turbulento Transônico no Entorno de Cilindro Circular	149
6.4.3	Escoamento Transônico Laminar com Martelamento em Aerofólio NACA-0012	162
6.4.4	Escoamento Turbulento Supersônico no Entorno de Modelo Rombo Esfera-Cilindro-Cone-Cilindro	169

6.4.5	Escoamento Turbulento Transônico no Entorno de Avião Civil CRM-NASA . . . . .	175
6.5	Aerodinâmica de Problemas Envolvendo Topologia Móvel . . . . .	182
6.5.1	Escoamento Transônico Não-Viscoso no Entorno de Aerofólio NACA 0012 Oscilante . . . . .	182
6.5.2	Efeito Magnus em Escoamento Supersônico Turbulento no Entorno de Cilindro Quadrado Realizando Grandes Rotações . . . . .	186
6.5.3	Acionamento de <i>Spoiler</i> em um Aerofólio NACA-0012 . . . . .	197
6.5.4	Escoamento Turbulento Supersônico no Entorno do Projétil Giratório M910 . . . . .	207
6.5.5	Escoamento Turbulento Transônico em <i>Turbofan</i> . . . . .	213
6.5.6	Problemas Dinâmicos e Aerolásticos . . . . .	222
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>226</b>
7.1	Adaptação de Malhas . . . . .	227
7.2	Escoamentos Compressíveis Turbulentos . . . . .	228
7.3	Malhas Móveis . . . . .	228
7.4	Simulações Estacionárias . . . . .	229
7.5	Simulações Transientes Turbulentas . . . . .	229
7.6	Simulações Transientes Turbulentas com Contornos Móveis . . . . .	230
7.7	Sugestões Para Trabalhos Futuros . . . . .	230
7.8	Epílogo . . . . .	231
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>232</b>

---

# Lista de Figuras

1.1	À esquerda, a malha da superfície de um jato comercial empregada no início dos anos 90, composta de 1 879 vértices. À direita, a malha da superfície de um F-16 empregada em meados dos anos 2000, composta de 271 763 vértices (Alauzet e Loseille, 2016). . . . .	23
2.1	Espectro típico da turbulência homogênea. . . . .	56
2.2	Espectro típico da turbulência homogênea incluindo um segundo nível de filtragem. . . . .	60
2.3	Determinação do tamanho dos filtros. Exemplo em duas dimensões. . . . .	64
2.4	Domínio (genérico) e regiões do contorno. . . . .	65
2.5	Natureza do comportamento em forma de onda. . . . .	69
2.6	Problema de convecção linear. Linhas características. . . . .	69
2.7	Determinação do comprimento característico. . . . .	77
3.1	Isovalores da função $f(\mathbf{x}) = \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{o}\mathbf{x})$ , onde $\mathbf{o}$ é a origem do plano (centro), para diferentes espaços métricos Riemannianos. Na esquerda, o espaço Euclidiano canônico $([-1,1] \times [-1,1], \mathbf{I}_2)$ . No centro, o espaço métrico Euclidiano $([-1,1] \times [-1,1], \mathcal{M})$ com $\mathcal{M}$ constante. À direita, um espaço métrico Riemanniano $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in [-1,1]^2}$ com um tensor métrico variável. . . . .	83
3.2	Interpretação geométrica de $\Psi_{\mathcal{M}}(1)$ : $\vec{v}_i$ são os auto-vetores de $\mathcal{M}$ e $h_i^{-2}$ são os auto-valores de $\mathcal{M}$ . . . . .	85
3.3	Interpretação geométrica da interseção de métricas em duas dimensões. . . . .	88
3.4	Esquema de subdivisão anisotrópica de triângulos baseada em arestas. . . . .	90
3.5	Esquema de subdivisão anisotrópica de tetraedros baseada em arestas. . . . .	91
3.6	Procedimento de colapso de aresta. . . . .	92
3.7	Alternância de arestas. . . . .	94
3.8	Alternância de faces. . . . .	95
3.9	Estratégia de suavização nodal anisotrópica. . . . .	97
3.10	Contornos móveis. . . . .	103
3.11	Procedimento de transferência de solução entre malhas cobrindo um domínio de mesma topologia através de interpolação de funções de base radial. . . . .	106
3.12	Procedimento de transferência de solução entre malhas cobrindo domínios com topologias diferentes através de interpolação de funções de base radial. . . . .	107
4.1	Movimento de um corpo em um sistema de coordenadas cartesianas estacionárias. . . . .	109
4.2	Elemento de placa e graus de liberdade considerados. . . . .	112
5.1	Forças de arrasto, sustentação, normais e axiais. . . . .	122

---

5.2	Coloração de nós para adaptação de malhas em computação paralela. . . .	125
6.1	Malha inicial e adaptada para o campo analítico $u_1$ . . . . .	128
6.2	Dados das malhas obtidas para a adaptação do campo analítico $u_1$ . . . . .	129
6.3	Malha inicial, malha adaptada e isolinhas para o campo $u_2$ . . . . .	129
6.4	Seção de corte da malha adaptada. . . . .	130
6.5	Dados das malhas obtidas para a adaptação do campo analítico $u_2$ . . . . .	130
6.6	Malha e geometria utilizada para o domínio bidimensional. . . . .	131
6.7	Malha final após translação e isolinhas de velocidades verticais. . . . .	132
6.8	Malha em diferentes instantes durante a rotação. . . . .	134
6.9	Malha após deformação. . . . .	135
6.10	Malha em diferentes instantes durante a rotação. . . . .	136
6.11	Malha inicial e adaptada e respectivas isolinhas de número de Mach. . . . .	137
6.12	Distribuição do coeficiente de pressão. . . . .	138
6.13	Malha inicial e adaptada com respectivos campos de pressão. . . . .	140
6.14	Detalhe da malha adaptada atrás da esfera. . . . .	140
6.15	Uma vista lateral do míssil com uma seção de corte mostrando a malha atrás do míssil, isolinhas de pressão neste corte, iso-superfície para o número de Mach de valor $Mach = 1,199$ , a malha e o campo de número de Mach. . . . .	142
6.16	A malha e o campo de número de Mach na superfície da geometria do míssil e em uma seção de corte no entorno da superfície. . . . .	143
6.17	Seção de corte mostrando um detalhe da malha adaptada no entorno da região dos estabilizadores. . . . .	144
6.18	A malha e o campo de número de Mach em uma vista lateral obtida por <a href="#">Linn (2013)</a> empregando-se adaptação anisotrópica do tipo $h$ e avaliação do erro na norma $L^\infty$ . . . . .	145
6.19	Diferentes instantes da solução do escoamento (A). . . . .	147
6.20	Diferentes instantes da solução do escoamento (B). . . . .	148
6.21	Solução temporal e no domínio de frequências para o cilindro em regime transônico. . . . .	153
6.22	Coeficiente de pressão médio na superfície do cilindro. . . . .	154
6.23	Malha em um dado tempo computacional. . . . .	155
6.24	Magnitude do gradiente de massa específica em um dado tempo computa- cional. . . . .	156
6.25	Detalhe da malha adaptada capturando vórtices despreendido atrás do cilindro e efeitos compressíveis com $\varepsilon_{L^2} = 0,10D$ , $h_{min} = 0,01D$ . . . . .	157
6.26	Campo de solução e malha para diversas seções de corte ao longo do eixo $x$ . . . . .	159
6.27	Campo de solução e malha para duas seções de corte ao longo do eixo $z$ . . . . .	160
6.28	Isosuperfícies e linhas de corrente do escoamento no entorno do cilindro . . . . .	161
6.29	Escoamento transônico transiente com martelamento em diferentes estágios e respectiva malha adaptada (A). . . . .	164
6.30	Escoamento transônico transiente com martelamento em diferentes estágios e respectiva malha adaptada (B). . . . .	165
6.31	Escoamento transônico transiente com martelamento em diferentes estágios e respectiva malha adaptada (C). . . . .	166
6.32	Detalhe do escoamento transônico transiente com martelamento próximo do aerofólio e respectiva malha adaptada. . . . .	167

6.33	Solução temporal e no domínio de frequências para o aerofólio NACA em regime transônico. . . . .	168
6.34	Geometria e sistema de coordenadas. . . . .	171
6.35	Seção de corte no plano médio do eixo $z$ . . . . .	172
6.36	Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas em planos de corte ao longo do eixo $x$ . . . . .	173
6.37	Linhas de corrente coloridas pela magnitude de velocidades. . . . .	174
6.38	Distribuição de pressão média ( $p/p_\infty$ ) no plano $xy$ em $z = 0$ . . . . .	174
6.39	Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas em planos de corte ao longo do eixo $z$ para $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	176
6.40	Vista superior e inferior da distribuição do coeficiente de pressão para $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	177
6.41	Linhas de corrente coloridas pelo magnitude de velocidade para $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	178
6.42	Estrutura do escoamento pelo critério $Q$ para $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	179
6.43	Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas em planos de corte ao longo do eixo $y$ para $\alpha = 30^\circ$ . . . . .	180
6.44	Linhas de corrente coloridas pelo magnitude de velocidade e estrutura do escoamento para $\alpha = 30^\circ$ . . . . .	181
6.45	Contornos de pressão e número de Mach para diferentes ângulos de ataque ao longo da simulação do aerofólio NACA-0012 oscilante. . . . .	185
6.46	Coefficiente de sustentação em função do ângulo de ataque do aerofólio NACA-0012 oscilante. . . . .	186
6.47	Escoamento e respectiva malha para o caso $\omega_0 = 0$ em $T = 25$ . . . . .	190
6.48	Escoamento e respectiva malha para o caso $\omega_0 = 1$ em $T = 25$ . . . . .	191
6.49	Escoamento e respectiva malha para o caso $\omega_0 = 2$ em $T = 25$ . . . . .	192
6.50	Escoamento e respectiva malha para o caso $\omega_0 = 0$ em $T = 30$ . . . . .	193
6.51	Escoamento e respectiva malha para o caso $\omega_0 = 1$ em $T = 30$ . . . . .	194
6.52	Escoamento e respectiva malha para o caso $\omega_0 = 2$ em $T = 30$ . . . . .	195
6.53	Solução temporal e no domínio de frequências para o cilindro quadrado supersônico. . . . .	196
6.54	<i>Spoiler</i> superior no aerofólio NACA-0012. . . . .	199
6.55	Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas para o caso subsônico com $Mach = 0,4$ . . . . .	200
6.56	Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas para o caso transônico com $Mach = 0,8$ . . . . .	201
6.57	Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas para o caso supersônico com $Mach = 1,2$ . . . . .	202
6.58	Caso subsônico com $Mach = 0,4$ e $\beta = 90^\circ$ . . . . .	203
6.59	Caso transônico com $Mach = 0,8$ e $\beta = 90^\circ$ . . . . .	204
6.60	Caso supersônico com $Mach = 1,2$ e $\beta = 90^\circ$ . . . . .	205
6.61	Solução temporal para o acionamento do <i>spoiler</i> no aerofólio NACA-0012. . . . .	206
6.62	Geometria do projétil M910. . . . .	207
6.63	Escoamento e respectiva malha para o projétil em um plano de corte localizado em $y = 0cm$ . . . . .	209
6.64	Escoamento e respectiva malha para o projétil em um plano de corte localizado em $x = 20$ . . . . .	210
6.65	Componentes da velocidade na direção $z$ para o projétil. . . . .	211
6.66	Solução temporal para o projétil. . . . .	212
6.67	Geometria das pás de admissão do <i>turbofan</i> considerado. . . . .	214

6.68	Estrutura do escoamento pelo critério $Q$ .	215
6.69	Seção de corte no plano $yz$ em $x = 0$ .	216
6.70	Seção de corte no plano $yz$ em $x = -1m$ .	217
6.71	Seção de corte no plano $xz$ em $y = 0$ .	218
6.72	Seções de corte no plano $xy$ .	219
6.73	Linhas de corrente coloridas pelo magnitude de velocidade.	220
6.74	Solução temporal e no domínio de frequências para o <i>turbofan</i> em regime transônico.	221
6.75	Deslocamentos na direção $w$ no ponto central da estrutura.	223
6.76	Deslocamentos da placa em diferentes instantes de tempo.	223
6.77	Geometria do problema.	224
6.78	Malha e campo de número de Mach para o instante $t = 0,1s$ .	225
6.79	Deslocamentos da placa em $x = 0,35m$ em diferentes instantes de tempo.	225

---

# Lista de Tabelas

1.1	Custos computacionais envolvidos em refinamento uniforme de malhas tri-dimensionais . . . . .	24
6.1	Dados da malha e coeficiente de arrasto $C_d$ para a esfera supersônica. . . .	139
6.2	Valores calculados para o cilindro com $M_\infty = 0,80$ e $Re_\infty = 5 \times 10^5$ . . . .	152

---

# Capítulo 1

## Introdução

Problemas de relevância acadêmica e industrial frequentemente envolvem escoamentos no entorno de corpos com geometrias cuja posição e formato variam ao longo do tempo. Tais problemas podem envolver um movimento que é essencialmente conhecido *a priori* ou um movimento que é diretamente dependente do escoamento e à dinâmica do problema. Alguns problemas podem ser suficientemente bem aproximados através da simulação do movimento de um ou mais corpos rígidos, enquanto que outros requerem a consideração da deformação de alguns componentes. A simulação numérica de tais escoamentos transientes promovem dificuldades computacionais adicionais, uma vez que a malha deve ser modificada ao longo da simulação para acomodar o movimento do corpo.

São muitas as aplicações. Por exemplo, para o caso em que o objeto em questão encontra-se imerso em um escoamento em regime transônico ou supersônico, tanto na indústria aeronáutica civil quanto na militar, tem-se problemas de escoamentos envolvendo múltiplos corpos executando movimentos relativos, tais como o desprendimento de mísseis (Zyluk, 2005), paraquedistas (Stein et al., 2000) ou reabastecimento aéreo. Um único corpo pode possuir componentes móveis, tal como acontece no acionamento de *flaps* de uma asa ou aerofólio (Tijdemand e Seebass, 1980; Favre et al., 2014). Outros problemas incluem o corpo executando um único movimento de rotação, tal como ocorre em turbinas (Medic et al., 2007), pás de helicópteros (Dindar et al., 2000) e balas de rifles que experimentam o chamado efeito Magnus (Kokes et al., 2006). A execução de manobras por aeronaves (Ghoreyshi e Cummings, 2014) resulta não apenas na variação da posição do corpo, mas também em efeitos aeroelásticos (Lesoinne e Farhat, 1993), os quais

---

---

podem alterar as características aerodinâmicas significativamente, bem como a integridade estrutural da aeronave.

O efeito da turbulência do escoamento tem grande importância neste contexto, uma vez que a maioria destas aplicações envolvem escoamentos de altos números de Reynolds e uma série de efeitos viscosos. Além disto, as flutuações presentes no escoamento contribuem de forma significativa com a interação desenvolvida entre o escoamento e a estrutura. Este efeito é mais pronunciado em estruturas flexíveis, tais como as utilizadas em estruturas aeroespaciais. Neste capítulo, descreve-se os temas envolvidos no estudo de tais situações e os objetivos deste trabalho.

## 1.1 Turbulência em Regime Compressível

A turbulência está presente na maioria dos escoamentos de interesse e possui forte impacto na sua evolução. Por este motivo, a turbulência tem ocupado uma posição central de esforços de inúmeras pesquisas envolvendo trabalhos teóricos, analíticos, experimentais e numéricos. Apesar da natureza caótica da turbulência, previsões confiáveis podem ser feitas para inúmeros casos fundamentais. Entretanto, devido à enorme extensão de escalas de tempo e espaço compreendidas, à complexidade das equações envolvidas e à variabilidade encontrada na experimentação física e numérica, o entendimento físico total da turbulência ainda não foi totalmente alcançado, mantendo-se, portanto, uma área muito ativa e prolífera de pesquisa.

Estudos experimentais da turbulência em escoamentos transônicos e supersônicos evoluíram de forma a permitir o desenvolvimento de métodos sofisticados para obtenção de dados qualitativos e quantitativos do campo de velocidades (velocimetria por laser Doppler; fotografias Schlieren) e campos escalares (fluorescência planar induzida por laser; espalhamento filtrado de Rayleigh; termometria CARS) (Alkisar et al., 2000; Ulrych, 2004). Problemas de aerodinâmica externa são normalmente conduzidos em túneis de vento. Este tipo de investigação está sujeita, em muitos casos, a dificuldades tais como o de redução de escalas e custos financeiros elevados. Além disto, alguns tipos de experimentações tornaram-se difíceis de serem conduzidas, tais como aquelas envolvendo o movimento relativo entre corpos (Balck, 1969; Smits e Dussauge, 1969; Plostins et al.,

---

1991; Manshadi et al., 1969).

O desenvolvimento de técnicas de simulação numérica no campo da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), por outro lado, pode complementar o estudo experimental e teórico, promovendo uma compreensão da física envolvida não apenas em configurações fundamentais de aplicações mas também em problemas específicos. Por exemplo, é possível simular diversas configurações de variação de movimento de um corpo imerso no escoamento alterando-se parâmetros de velocidades, número de Reynolds, temperatura, trajetória, geometria, número de corpos imersos, dentre tantas outras as quais nem sempre são possíveis ou fáceis de serem manipuladas experimentalmente. Para ser útil, tal ferramenta de simulação deve ser precisa o suficiente para o problema a um custo computacional razoável.

Existem essencialmente três abordagens fundamentais para a investigação numérica da turbulência compressível: simulação DNS; simulação LES e simulação RANS (média aproximada). A Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation* – DNS) permite obter uma descrição precisa da evolução temporal de todas as escalas do escoamento turbulento tridimensional sem a dependência de nenhuma consideração de modelagem. Desta forma, o número de nós necessários na simulação torna-se bastante elevado, principalmente se contornos sólidos estão presentes no escoamento, possuindo forte dependência do número de Reynolds (Moin e Mahesh, 1998). Infelizmente, escoamentos turbulentos encontrados no campo de estudos deste trabalho, bem como em outras áreas, exibem uma ampla faixa de escalas de tempo e comprimento excitadas, de forma que as simulações DNS tornam-se severamente custosas computacionalmente para escoamentos com número de Reynolds na faixa em questão  $\approx 10^6 - 10^8$ . Este é um motivo porquê a modelagem das escalas torna-se necessária para conseguir-se estudar o escoamento turbulento nestes casos, em detrimento à resolução das equações de Navier-Stokes. A simulação DNS mantém-se como uma ferramenta de pesquisa que proporciona uma compreensão mais aprofundada da física da turbulência, mas os recursos computacionais atualmente disponíveis ainda se mantêm insuficientes para sua aplicação em simulações tais como o escoamento no entorno de uma avião ou de um helicóptero com suas pás em rotação. Entretanto, podem ser encontrados avanços significativos em trabalhos recentes presentes na literatura, os quais atingem números de Reynolds

---

moderados em geometrias não tão simplificadas (Gageik et al., 2015).

As simulações empregando as equações de Navier-Stokes com Média de Reynolds (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations* – RANS) é um método empregado para ser obter uma média aproximada do escoamento. Tal técnica não modela a turbulência, uma vez que o escoamento médio é diferente da média do escoamento real. O efeito transiente do escoamento se perde nesta abordagem, mas tem-se também uma redução significativa da complexidade computacional envolvida (Speziale, 1991). É também o método mais empregado em códigos tradicionais ou de aplicação na indústria de simulação computacional de escoamentos (Löhner, 2008).

É interessante observar que, historicamente, a maior parcela de esforços numéricos no campo da aerodinâmica aplicada se concentraram na simulação de configurações nominais de operação. Como consequência direta no design aerodinâmico, as configurações empregadas para escoamento externo exibiam geralmente áreas com limitada presença de separação do escoamento e, principalmente, gradientes suaves. As técnicas estacionárias tais como RANS mostraram-se suficientes para lidar com escoamentos turbulentos nestas situações com razoável grau de precisão, sendo diversas vezes empregadas com grande sucesso no design de aeronaves sob regimes transônicos e supersônicos (Jameson e Ou, 2011). Entretanto, novas necessidades industriais no campo da aerodinâmica transônica e supersônica lidam com escoamentos com separação, com a previsão e controle de ruídos, bem como a necessidade de se prever cargas dinâmicas transientes, de forma que a simulação de problemas tridimensionais turbulentos não-permanentes agora torna-se necessária. De fato, esta necessidade tem se tornado uma questão proeminente devido à alta quantidade de fenômenos não-permanentes que possuem sérias implicações em termos de performance obtida, acústica, ou em questões de segurança que requerem uma predição precisa a ser incorporada no ciclo de design de tais aplicações (Sagaut e Deck, 2009). Para tal previsão, a solução via simulação RANS não será o que os engenheiros necessitarão. Em adição, o desafio de lidar com corpos que apresentam geometrias complexas não está apenas relacionado aos custos computacionais, mas também à qualidade da solução obtida em termos de malha e validação dos resultados transientes obtidos.

A Simulação das Grandes Escalas (*Large Eddy Simulation* – LES) calcula diretamente as escalas resolvidas do escoamento e modela o efeito das escalas não-resolvidas (aquelas

---

para as quais a discretização espacial é insuficiente) sobre as escalas resolvidas. Desta forma, a discretização pode ser menor em relação à requerida em uma simulação DNS, requerendo, tipicamente, menos de um décimo do custo computacional requerido para o caso de uma simulação DNS (Rogallo e Moin, 1984). A modelagem nesta abordagem fica restrita apenas às pequenas escalas e permite o cálculo transiente das estruturas coerentes da turbulência. Entre as desvantagens, pode-se citar que o custo computacional ainda é elevado, principalmente para escoamentos limitados por paredes ou obstáculos. Além disto, o filtro empregado para modelagem pode interagir com a discretização numérica (Lesieur e Métais, 1996).

A simulação LES tem sido empregada em diversos regimes de escoamentos, tais como problemas de separação induzida por choques (Garnier et al., 2002), problemas de escoamento compressível de cavitação com acoplamento aeroacústico (Larchevêque et al., 2004), e problemas de transferência de calor em separação de escoamentos de baixas velocidades (Labbé et al., 2002). Muitas das simulações LES de aplicações apresentadas na literatura envolvem corpos com geometrias simplificadas ou reduzidas, tais como pequenos cortes de asas ou pás (Raverdy et al., 2003), embora aplicações em geometrias mais complexas, tais como o escoamento em zonas urbanas (Maronga et al., 2015), asas de aviões (Mary, 2003), aviões completos (Page e McGuirk, 2009) e turbinas (Papadogiannis et al., 2014) possam ser encontradas.

Existem abordagens híbridas, tais como as RANS/LES, a Simulação dos Vórtices Desprendidos (*Detached Eddy Simulation* – DES) e técnicas que visam reduzir as limitações do método RANS, tais como o RANS transiente. Apesar da grande variação de métodos híbridos (e acrônimos), tais métodos são próximos uns dos outros. Aplicações complexas podem ser encontradas na literatura empregando-se métodos híbridos, tais como a simulação do escoamento turbulento no entorno de um avião transônico completo (Brunet e Deck, 2008).

Para a simulação numérica de escoamentos não-permanentes, necessita-se de dois níveis de discretização: um espacial e outro temporal. Como o presente trabalho visa tratar de escoamentos no entorno de geometrias complexas com variação topológica, adotou-se o emprego do Método dos Elementos Finitos para a discretização espacial do domínio, utilizando malhas não-estruturadas formadas por triângulos e tetraedros lineares em

---

duas e três dimensões, respectivamente. Para a discretização temporal, há uma grande variedade de metodologias, podendo-se citar o método de Taylor-Galerkin (de 1 e de 2 passos e também suas variantes), o método Galerkin-Descontínuo e o Método das Linhas ou Direções Características (*Characteristic Based Split* – CBS).

Os métodos de Taylor-Galerkin baseiam-se em uma expansão em séries de Taylor no tempo truncada. No contexto dos escoamentos compressíveis, seu emprego se mostra adequado para escoamentos de alta velocidade, onde as equações fundamentais do escoamento assumem um comportamento predominantemente hiperbólico (o método foi, de fato, concebido originalmente para solução de equações diferenciais parciais puramente hiperbólicas). Velocidades baixas nestas aproximações resultam em instabilidade numérica devido a oscilações de pressão decorrentes do operador das equações do escoamento não ser auto-adjunto ([Zienkiewicz et al., 2011](#)).

O método de Galerkin-Descontínuo tem como característica a descontinuidade de suas funções de forma e possui performance mais adequada para uma variedade ampla de problemas, não apenas os casos hiperbólicos, mas também os elípticos, parabólicos e mistos.

O Método das Linhas ou Direções Características (CBS) baseia-se em uma transformação de coordenadas da malha que é variável ao longo do tempo, de forma que altere o comportamento das equações fundamentais do escoamento para otimizar a discretização espacial. A otimização se dá pelo fato do operador das equações fundamentais do escoamento se tornar auto-adjunto nesta metodologia ([Nithiarasu et al., 2006](#)). Este método foi desenvolvido no intuito de poder ser utilizado num amplo espectro de velocidades, desde problemas de escoamentos subsônicos até problemas de escoamentos hipersônicos sem apresentar grandes oscilações.

Neste trabalho, utiliza-se a abordagem LES para simular escoamentos compressíveis turbulentos. O método dos elementos finitos é empregado conjuntamente com o método CBS em malhas não-estruturadas através de uma formulação explícita. No Capítulo 2 é apresentada a técnica LES e também a solução numérica via elementos finitos empregada.

---

## 1.2 Adaptação de Malhas

A adaptação de malhas visa remodelar automaticamente a discretização espacial do problema, de forma a reduzir o esforço computacional e maximizar a precisão da solução obtida. É um tema de grande importância pois permite reduzir a magnitude do custo computacional de uma simulação em uma ou várias ordens de grandeza (Löhner, 2008). Inúmeros problemas numéricos a serem solucionados computacionalmente e com precisão surgem das mais diversas aplicações. A adaptação de malhas pode ser encontrada em problemas de mecânica de fluidos (Frey e Alauzet, 2005), engenharia estrutural (Stein e Rust, 1991), cosmologia (Klein, 1999), processamento de imagens para fins medicinais (Frey, 2004), dentre tantas outras áreas. O modelo mais tradicional de análise numérica para tais problemas envolve a seguinte ordem de etapas:

1. Modelagem geométrica;
2. Geração de malha;
3. Solução numérica;
4. Visualização e análise de dados.

Uma simples observação desta lista de etapas é suficiente para concluir que: *sem uma malha não há simulação numérica*. É por isto que no final da década de 80 e início da década de 90 um esforço considerável foi devotado à geração automática de malhas. O estado da arte de todas as tecnologias de geração de malhas é amplo (Frey e George, 2008), mas, atualmente, as abordagens principais empregadas na área de CFD são: malhas multi-blocos (Shaw e Weatherill, 1992), malhas adaptativas cartesianas (Aftosmis et al., 2004) e malhas não-estruturadas empregando um único tipo de elemento (Löhner e Parikh, 1988; Yerry e Shephard, 1984; Weatherill e Hassan, 1994). Esta primeira observação é clara, mas a segunda é mais complexa: *uma malha 'ruim' implica em uma solução errônea ou imprecisa*. Esta complexidade está relacionada principalmente à interpretação de o quê é uma malha 'boa' ou 'ruim'.

As simulações numéricas tendem a incorporar cada vez mais e mais novas complexidades geométricas e físicas que se apresentam. A precisão dos modelos geométricos mantém-

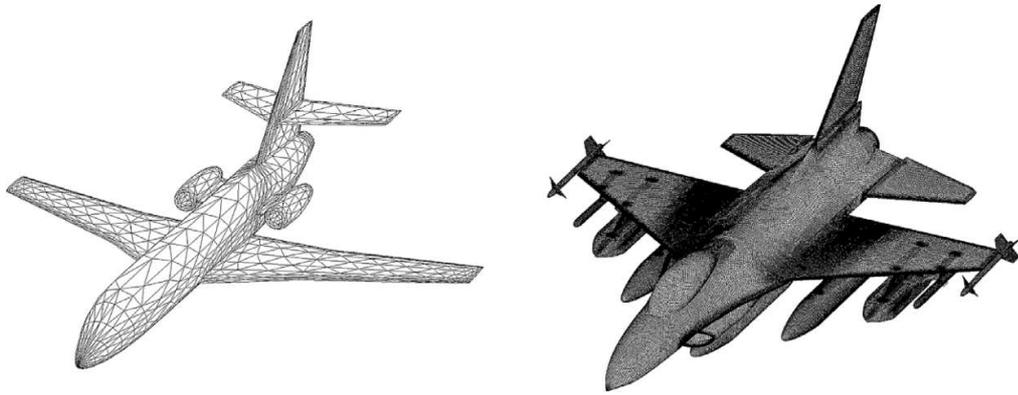


Figura 1.1: À esquerda, a malha da superfície de um jato comercial empregada no início dos anos 90, composta de 1 879 vértices. À direita, a malha da superfície de um F-16 empregada em meados dos anos 2000, composta de 271 763 vértices (Alauzet e Loseille, 2016).

se aumentando cada vez mais: se uma precisão de  $10\text{cm}$  era obtida na simulação de um jato comercial na década de 80, hoje em dia tem-se simulações que atingem facilmente a precisão de  $1\text{mm}$  para a geometria e  $1\mu\text{m}$  para a camada limite (Mavriplis, 2000). Como mostrado na Fig. 1.1, as geometrias no entorno das quais o escoamento é estudado tornam-se progressivamente mais complexas, incorporando inúmeros pequenos detalhes que impactam no escoamento. Por exemplo, para um avião militar, todos os principais componentes da geometria podem ser modelados hoje em dia, incluindo-se asas, estabilizadores, mísseis, trens-de-pouso, turbinas, etc. Tanto é este avanço, que o famoso laboratório aeroespacial francês ONERA recentemente modificou seu código de simulação numérica `elsA`, que historicamente empregava apenas malhas hexaédricas estruturadas em blocos, acrescentando malhas híbridas para conseguir lidar com pequenos detalhes em geometrias complexas (Puigt et al., 2011). A malha necessita, de fato, ser adaptada para a geometria.

As equações não-lineares que ditam a física do problema, as equações de Navier-Stokes, acrescentam outra dificuldade à geração de malhas: depara-se com uma enorme barreira que é como empregar um gerador de malhas em problemas de grande complexidade física. Para tal, muitas vezes emprega-se malhas geradas artesanalmente com enorme esforço para problemas únicos. Estas malhas usualmente garantem todo o potencial dos métodos numéricos para uma única e específica simulação. Entretanto, tais abordagens não-automatizadas de geração de malhas conduzem a uma intervenção humana no processo, a qual consome um tempo considerável, além de exigir conhecimento prévio do resultado da

simulação. Outra possibilidade no intuito de reduzir esta intervenção humana é empregar uma malha gigantesca para a simulação. Em ambas as formas o custo computacional, incluindo o de geração de malhas, torna a abordagem proibitiva do ponto de vista prático. Tem-se também o problema adicional de que em problemas industriais torna-se necessário a realização de diversas simulações para validação dos resultados obtidos por meio de um estudo de convergência. Este estudo é usualmente conduzido em malhas distintas, com diferentes precisões. De fato, a validação de um estudo se torna muito custosa computacionalmente.

Partindo-se de uma malha tridimensional inicial de tamanho médio dos elementos  $h$ , contendo  $N$  vértices e dividindo-se pela metade este tamanho  $h$ , obtém-se uma malha de  $8N$  vértices. O tamanho do passo de tempo também será reduzido por um fator de 2 neste caso, uma vez que é proporcional a  $h$ . Portanto, o custo computacional (CPU) para realizar a simulação nesta nova malha é multiplicado por 16, no mínimo (ver Tab. 1.1). Dividindo-se novamente pela metade estes elementos, o custo computacional fica multiplicado por 256, comparado com o inicial. Imaginando que a primeira simulação leve 1 dia para ser completada, então ela levaria 9 meses para ser completada quando subdividida duas vezes pela metade seus elementos. A computação paralela é uma possível resposta a este problema, mas a simulação não pode ser escalonada indefinitivamente. Abordagens complementares são necessárias para reduzir a complexidade das simulações numéricas. A adaptação de malhas é, certamente, uma das ferramentas mais pertinentes para tal fim.

Tabela 1.1: Custos computacionais envolvidos em refinamento uniforme de malhas tridimensionais

Tamanho Médio	Número de Vértices	Passo de Tempo	CPU
$h$	$N$	$\Delta t$	1
$h/2$	$8N$	$\Delta t/2$	16
$h/4$	$64N$	$\Delta t/4$	256
$h/8$	$512N$	$\Delta t/8$	4096
$h/16$	$4096N$	$\Delta t/16$	65536

Observando-se o padrão apresentado em diversos escoamentos, verifica-se que os fenômenos físicos de interesse (camada limite, ondas de choque, descontinuidades, vórtices, etc.) encontram-se geralmente concentrados em pequenas regiões do domínio computacional. Portanto, malhas uniformes não são ótimas em termos de *tamanho*. Estes

fenômenos são anisotrópicos por natureza, e, portanto, malhas uniformes não são ótimas em termos de *direção*. É portanto natural se pensar em levar em conta as propriedades do fenômeno físico envolvido no interior da malha para melhorar sua representação. A malha apropriada para um dado escoamento no entorno de uma geometria fixada depende das condições empregadas no escoamento, tais como o número de Reynolds e o número de Mach, do método numérico empregado, bem como da precisão dos resultados objetivada. A adaptação de malhas não só reduz os custos computacionais da simulação, mas também é capaz de automaticamente adaptar regiões críticas do domínio sem ter nenhum conhecimento *a priori* do problema. É também uma ferramenta que permite controlar a qualidade da malha empregada na simulação, uma vez que ela pode definir a precisão da malha diretamente.

A idéia de adaptação de malhas é bastante antiga, mas o número de trabalhos publicados nesta área não é tão grande (Alauzet e Loseille, 2016), sendo que a maior parte deles aborda a adaptação de forma isotrópica, onde os elementos são subdivididos segundo padrões pré-definidos. Esta abordagem unicamente isotrópica como forma de adaptação se estende historicamente até quase o fim da década de 80, onde substanciais estudos sobre estimativa de erro e geração de malhas começaram a ser realizados. Em 1987 Peraire et al. (1987) propõe uma primeira tentativa de gerar malhas bidimensionais segundo dadas direções, seguido de técnicas apresentadas por Löhner (1989) e Selmin e Formaggia (1992). As primeiras tentativas de geração de malhas anisotrópicas tridimensionais datam do início da década de 90, por Löhner (1989) e Peraire et al. (1992), sendo que os resultados eram praticamente isotrópicos. Uma técnica de alongamento de elementos empregando um método Delaunay bidimensional é proposto por Mavriplis (1990) praticamente na mesma época. Um ano após, George et al. (1991) introduzem o uso de métricas para geração de malhas, sendo uma generalização de todos os trabalhos precedentes na área. Desde então, esta idéia vem sendo explorada. Nos anos 90, a idéia foi difundida para adaptação de malhas bidimensionais (Hecht e Mohammadi, 1997; Dompierre et al., 1997; Castro-Díaz et al., 1997; Buscaglia e Dari, 1997). No início dos anos 2000, surgem os primeiros resultados de adaptação de malhas anisotrópicas tridimensionais (Tam et al., 2000; Pain et al., 2001; Bottasso, 2004a). Ao mesmo tempo, diversas melhoras foram propostas para a estimativa do erro (Loseille e Alauzet, 2009), sendo que atualmente pode-se dizer que a técnica encontra-se plenamente desenvolvida para simular problemas de

---

CFD estacionários bidimensionais e tridimensionais, embora para problemas transientes, não ([Alauzet e Loseille, 2016](#)).

Métodos clássicos de adaptação refinam ou desrefinam regiões de forma isotrópica em todas as direções. Tais malhas só podem ser ótimas para escoamentos que possuam gradientes espaciais que variam igualmente em todas direções. Disto resulta que escoamentos direcionais tais como ondas de choque, camada limite, ondas e vórtices não são necessariamente adaptados com a maior eficiência e menor custo possível, sendo que o número de elementos cresce rapidamente a cada etapa de refinamento ([Tam et al., 2000](#)). A adaptação anisotrópica, na qual adapta-se a malha de forma direcional, consiste em uma abordagem mais eficiente com menor custo computacional envolvido.

Para a implementação de uma adaptação anisotrópica, torna-se indispensável que o indicador de erro possa informar estas direções de anisotropia bem como suas respectivas magnitudes ([Bottasso, 2004b](#)). Uma forma bastante generalizada de adaptação anisotrópica é obtida com emprego da estrutura de um espaço métrico Riemanniano (geometria diferencial) para avaliar o erro de forma tensorial. O emprego do espaço Riemanniano permite a implementação de uma série de melhoras na técnica de adaptação de malhas através de fundamentos matemáticos bem estabelecidos. A vantagem desta abordagem, além de possibilitar o tratamento anisotrópico, é a de estimar o erro de forma proporcional à grandeza do erro estimado de forma eficiente e de forma contínua (na forma integral, em contraponto a uma abordagem discreta. Exemplos podem ser encontrados em problemas transientes com variação de topologia ([Alauzet, 2014](#)), funções de nível para superfícies móveis ([Claisse et al., 2009](#)) e camada limite para escoamentos viscosos ([Chitale, 2013](#); [Loseille e Löhrner, 2009](#); [Dolejší e Felcman, 2004](#); [Weatherill e Hassan, 1994](#)). A adaptação de malhas anisotrópica pode ser realizada através de diferentes abordagens. Por exemplo, toda a malha pode ser novamente construída através de um gerador de malhas para um determinado tamanho e orientação dos elementos. Esta alternativa pode ser baseada em técnicas de frente de avanço anisotrópica ([Peraire et al., 1992](#)) ou a técnica Delaunay com núcleo anisotrópico ([Borouchaki et al., 1997](#)). Alternativamente ao remalhamento, existem estratégias baseadas em subdivisão ou modificações locais da malha, onde operações de alternância, colapso, repartição e modificação da posição de vértices são empregadas.

São várias as técnicas para refino da malha presentes na literatura. Procedimentos de bissecções sucessivas podem ser empregados, onde, por exemplo, um tetraedro pode possuir um esquema fixo de subdivisão 1 : 2, 1 : 4 ou 1 : 8 (Löhner e Baum, 1990; Liu e Joe, 1996). Alternativamente, o algoritmo de refinamento de maior aresta (Rivara, 1997), o algoritmo verde-vermelho (Bey, 1995) ou o algoritmo de bissecção de vértices (Maubach, 1995) podem ser empregados. O particionamento de arestas também pode ser empregado como operação de refinamento de malhas (de Cougny e Shephard, 1999; Rassineux et al., 2003). Além do tipo de abordagem de refinamento, tem-se também diferentes abordagens de onde partir elementos e arestas. O centro Euclidiano pode ser empregado, embora esta escolha só possa ser ótima para adaptações isotrópicas (Habashi et al., 2000; Pain et al., 2001). Alternativamente, o centro Riemanniano pode ser empregado (Linn e Awruch, 2016b, 2017).

O procedimento de desrefinamento pode ser realizado através da remoção de nós (Castro-Díaz et al., 1997), anulação do refinamento (Waltz, 2004; Rivara, 1989) ou por colapso da aresta (Ollivier-Gooch, 2003). O colapso de uma aresta pode ser realizado juntando-se um dos vértices de uma aresta até o outro, ou também considerando-se outras possibilidades para o ponto de colapso, tais como o baricentro ou centro Euclidiano (Walter et al., 2005). Assim como para o refinamento, essa limitação de possibilidades para o ponto de colapso conduz a uma técnica não otimizada no sentido anisotrópico. Uma técnica com características anisotrópicas pode ser também empregada (Linn e Awruch, 2016b, 2017).

A alternância de faces ou arestas pode ser empregada para melhorar a qualidade da malha (Freitag e Ollivier-Gooch, 1997). Da mesma forma, a suavização nodal (também chamada de movimento nodal, mas aqui referenciado como suavização nodal para não haver confusão com a técnica de movimento de nós para topologias móveis do domínio) pode ser empregada para otimizar a malha. Esta suavização pode ser realizada através da analogia com molas (Tam et al., 2000), a analogia com molas e considerações anisotrópicas (Castro-Díaz et al., 1997) e algoritmos de otimização numérica (Pain et al., 2001; Sastry e Shontz, 2012). Existem desvantagens ao se usar estas técnicas, tais como dificuldades em lidar com nós do contorno, a necessidade de cálculo de derivadas, assim como a necessidade de se atualizar tanto a métrica quanto os campos de solução, que ao se mover um nó conduz a um problema de interpolação que deve ser solucionado com precisão.

---

Uma técnica anisotrópica eficiente para contornar tais dificuldades pode ser derivada se os nós possuírem restrições de movimento ao longo de arestas (Linn e Awruch, 2017).

O acoplamento da estratégia de adaptação de malhas já foi realizado com sucesso para a simulação de escoamentos compressíveis permanentes bidimensionais (Habashi et al., 2000) e tridimensionais (Frey e Alauzet, 2005; Loseille e Alauzet, 2009; Peraire et al., 1992; Löhner e Baum, 1990). Aplicações transientes, porém, envolvem o erro temporal, e, pelo menos duas estratégias podem ser empregadas: a primeira é a adaptação espaço temporal 4D, também chamada de adaptação de ponto fixo (Alauzet et al., 2003), onde a simulação é realizada inúmeras vezes e a malha é adaptada em pontos de controle ao longo da evolução do tempo. Esta abordagem é provavelmente a mais precisa, mas dificuldades surgem em tal estratégia, inviabilizando sua aplicação em escoamentos turbulentos via modelagem LES. Tem-se a necessidade de armazenar inúmeras malhas gigantescas na memória e necessita-se empregar uma técnica de interpolação precisa também para transferir os dados entre as malhas distintas no tempo (Alauzet e Mehrenberger, 2010). Além disto, realizar inúmeras simulações LES é inviável computacionalmente. A segunda abordagem de adaptação transiente consiste em adaptar a malha com frequência ao longo da simulação (Löhner e Baum, 1990; Löhner, 1990; Löhner e Baum, 1992), a qual usualmente é feita sem empregar suavização nodal. A principal vantagem nesta abordagem é que apenas uma simulação é necessária porque a malha é adaptada ao longo da evolução temporal, mas tem-se que a malha adaptada está sempre atrasada com relação à solução, introduzindo erros temporais. Além disto, uma interpolação precisa ainda continua sendo necessária, além de ocasionar um impacto considerável em termos computacionais na simulação devido à alta frequência de adaptação de malhas. O emprego de técnicas de adaptação de malhas permanece extremamente raro em simulações LES, embora exemplos possam ser encontrados (Benard et al., 2015; Hoffman, 2005; Hertel e Frölich, 2011).

A adaptação de malhas aplicada a problemas turbulentos compressíveis possui algumas particularidades. A primeira é a presença de uma ampla variação de escalas presentes no escoamento. Fortes ondas de choque e pequenas zonas de recirculação devem ser capturadas concomitantemente. Para detectar todas as escalas do escoamento, pode-se empregar um escalonamento do erro (Castro-Díaz et al., 1997). Outra metodologia mais potente consiste em avaliar o erro na norma  $L^p$  (Frey e Alauzet, 2005; Loseille e

---

(Alauzet, 2009; Alauzet et al., 2003), permitindo que todas as escalas sejam capturadas. Outra dificuldade reside no campo de solução cujo erro será avaliado. Para problemas compressíveis estacionários, usualmente emprega-se o número de Mach local (Habashi et al., 2000), mas esta escolha não é adequada para problemas turbulentos compressíveis porque, por exemplo, flutuações na energia cinética turbulenta podem ocorrer em diversas regiões do domínio (Benard et al., 2015; Hoffman et al., 2011). Pode-se, porém, aplicar interseções de métricas para cobrir o erro de interpolação de diversos campos de solução simultaneamente (Castro-Díaz et al., 1997; Frey e Alauzet, 2005).

Neste trabalho, um esquema de adaptação anisotrópica de malhas não-estruturadas é empregado freqüentemente ao longo da simulação incluindo etapas de refinamento, desrefinamento, alternância de arestas e faces e suavização nodal para controlar o erro de interpolação e o tamanho da malha. Considerações de efeitos multi-escalas via avaliação do erro na norma  $L^p$  e interseções de métricas são empregadas para capturar efeitos da turbulência. A estratégia de refinamento desenvolvida emprega uma divisão ao longo do centro Riemanniano das arestas. A metodologia de desrefinamento emprega a técnica de colapso das aresta com considerações de qualidade anisotrópica dos elementos. A técnica de suavização nodal desenvolvida opera ao longo das direções das arestas de forma eficiente e precisa. A adaptação de malhas bidimensionais e tridimensionais é apresentada no Capítulo 3 deste trabalho.

### 1.3 Variação da Topologia do Domínio

A topologia de um domínio  $\Omega$  é dita variável quando seu contorno  $\Gamma$  varia ao longo do tempo. Muitas contribuições recentes foram apresentadas para simulação numérica de problemas envolvendo domínios com topologia móvel, sendo uma área de pesquisa em expansão nas últimas décadas (Hassan et al., 2016). Em meados da década de 90, as pesquisas relacionadas aumentaram consideravelmente graças aos avanços em termos de capacidade computacional disponível. Da mesma forma como em diversas áreas da simulação, o campo da aerodinâmica computacional tomou a dianteira nos estudos pioneiros desta área, apresentando já desde cedo a possibilidade de simular problemas reais envolvendo domínios com geometrias móveis incluindo-se efeitos aeroelásticos (Batina,

---

1990; Lesoinne e Farhat, 1993; Tijdemand e Seebass, 1980). Malhas móveis para simular tais problemas são, hoje em dia, empregadas em diversos campos distintos de pesquisa: balística (Hassan et al., 2007), aplicações biomédicas (Astorino et al., 2009; Formaggia et al., 2009), aeronáutica (Baum et al., 1997; Dindar et al., 2000), estudo de explosões (Baum et al., 1996), turbo-máquinas (Shyam et al., 2010), dentre outros. Estas simulações, as quais combinam as dificuldades associadas pelos efeitos transientes do escoamento, o movimento da malha, a variação topológica do domínio e o acoplamento fluido-estrutura, são geralmente complexas de serem implementadas e extremamente custosas computacionalmente.

Três metodologias principais foram propostas na literatura para lidar com a variação da topologia do domínio ao longo da simulação numérica, sendo que cada uma delas apresenta vantagens e fraquezas particulares.

Na primeira classe de metodologia, emprega-se uma malha monolítica onde o domínio computacional é tratado como ajustado ao corpo ao longo do tempo (Batina, 1990; Lesoinne e Farhat, 1993; Tijdemand e Seebass, 1980; Baum et al., 1994; Thomas e Lombard, 1979), o que significa que a malha computacional acompanha as geometrias móveis em seu movimento. Em outras palavras, os corpos têm de ser movidos no interior da malha computacional empregando-se um algoritmo de deformação de malhas. Esquemas numéricos do tipo Lagrangeanos-Eulerianos Arbitrários (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian* – ALE) são então usualmente considerados para levar em consideração o deslocamento dos vértices. Esta abordagem promove a preservação da topologia da malha, isto é, as conectividades da malha são mantidas ao longo da deformação.

A segunda classe compreende os métodos de malha Chimera (ou métodos de sobreposição de malhas, em inglês: *overset methods*) (Benek et al., 1985; Brezzi et al., 2001). Neste caso, cada corpo móvel possui sua própria malha. A simulação então decorre com múltiplas malhas e interpolações são realizadas nas zonas onde ocorre sobreposição.

A última classe corresponde aos métodos de fronteiras imersas, ou embebidas (Löhner, 2008; Löhner e Baum, 1992), nas quais determina-se o escoamento em malhas nas quais os contornos dos corpos imersos não estão contidos no contorno topológico da

---

malha. Emprega-se um tratamento especial para os elementos e nós nas proximidades de superfícies ou no interior de corpos. O movimento dos corpos é obtido através do reposicionamento das fronteiras imersas ao longo da malha computacional fixada.

Para o caso do emprego de uma malha monolítica, a restrição de topologia fixada imposta por formulações com descrição ALE clássicas limitam consideravelmente a eficiência das técnicas de movimento de malha. Se o problema analisado induz grandes deslocamentos na geometria, as distorções de malha ocasionadas podem afetar consideravelmente a precisão e a estabilidade da simulação, limitando o emprego da formulação ALE (Alauzet, 2014). Outro problema existente é que a formulação ALE requer a modificação das equações fundamentais do escoamento do problema para levar em consideração este tipo de movimento. A definição do movimento de malha vem no sentido de que, dado um deslocamento aplicado na fronteira do domínio, como fazer para determinar o movimento a ser prescrito em cada vértice no interior do domínio de forma a não violar a topologia da malha e manter a melhor qualidade possível. Para aplicar tal movimento, existem, de forma geral, duas variantes: métodos baseados em equações diferenciais parciais (PDE) e métodos de interpolação.

Os métodos baseados em PDE são vastos, incluindo-se os métodos Laplaceanos (Löhner e Yang, 1996), os métodos baseados em analogia de molas (Batina, 1990; Bottasso et al., 2005; Farhat et al., 1998) e os métodos baseados em elasticidade linear (Baker e Cavallo, 1999; Stein et al., 2003; Yang e Mavriplis, 2007). Nos métodos que empregam analogia com molas, a conexão entre os nós da malha é representada por molas, onde determina-se uma rigidez para conferir o movimento entre os nós. Embora muitas tentativas de melhoria do método tenham sido propostas, a técnica de analogia com molas é menos robusta para lidar com o movimento de malhas (Yang e Mavriplis, 2007), além de ser muito custosa para propagar o deslocamento para todo o domínio a partir dos contornos em malhas complexas tridimensionais (Deng et al., 2016). Os métodos que empregam analogia com elasticidade utilizam as equações de mecânica para corpos contínuos deformáveis elásticos lineares para determinar a deformação da malha (Lynch e O'Neill, 1980), sendo técnicas que tendem a deteriorar menos a qualidade da malha (Alauzet, 2014). Apesar das limitações, os métodos PDE foram aplicados com sucesso na solução de inúmeras simulações envolvendo topologia móvel.

Os métodos de interpolação para determinação do movimento de malhas consistem em interpolar a velocidade ou deslocamento a partir dos contornos do domínio para os vértices internos. Estas abordagens geralmente empregam interpolação através de funções de base radial (RBF) (de Boer et al., 2007; Gumorov e Duraiswami, 2007; Luke et al., 2012). O emprego de interpolação RBF em um contexto ALE se mostrou eficiente para lidar com problemas tais como interação fluido-estrutura (Rendall e Allen, 2008), transferência de informações (Beckert e Wend, 2001) e aerodinâmica de asas móveis (Deng et al., 2016), porém, todos estes casos não envolvem grandes deslocamentos. A técnica de interpolação RBF é adequada para interpolação de dados porque não requer informação de conectividades da malha, de forma que o valor pode ser interpolado usando-se apenas a informação de sua posição no domínio com relação ao contorno. O método, portanto, é contínuo, uma vez que emprega a informação dos deslocamentos de todo o contorno para determinar os deslocamentos no interior, diferentemente da técnica de analogia com molas, a qual é descontínua, bem como a de analogia com elasticidade linear, a qual é local no espaço.

A técnica de malha Chimera tem sido usada por mais 30 anos. Múltiplos corpos com movimento relativo podem ser tratados sem dificuldades com esta técnica, sendo que o esquema original foi subseqüentemente estendido para malhas não-estruturadas por Nakahashi et al. (2000). Aplicações complexas de aerodinâmica de asas deformáveis (Togashi et al., 2001), separação de mísseis (Lijewski e Suhs, 1992) e rotação de hélices (Meakin, 1992) podem ser encontradas na literatura. A maior dificuldade do método é o custo de interpolação, uma vez que determinar a localização da sobreposição das malhas a cada passo de tempo torna-se muito custoso computacionalmente (Löhner, 2008).

A técnica de fronteiras imersas evita o movimento complexo da malha uma vez que ela está fixa. É uma característica muito atrativa para simular escoamentos com corpos móveis, porém, para escoamentos de alto número de Reynolds, o custo para tratar as fronteiras imersas se torna muito alto, uma vez que a malha se torna muito refinada nestas zonas (Deng et al., 2016).

Usualmente, todos os métodos descritos sofrem de uma forma ou outra para lidar com escoamentos envolvendo grandes deslocamentos ou efeitos complexos. As técnicas mais robustas e de maior sucesso empregam técnicas híbridas que combinam alguma

---

característica de adaptação de malhas. Por exemplo, [Alauzet \(2014\)](#) emprega suavização nodal e alternância de arestas e faces conjuntamente com a técnica de analogia com elasticidade para controlar a qualidade da malha. Remalhamento local também constitui uma alternativa para evitar excessivas distorções da malha ([Hassan et al., 2007](#)).

Neste trabalho, desenvolveu-se uma metodologia híbrida inovadora que combina a técnica de malha monolítica com efeitos de sobreposição de malhas. A malha é movida monoliticamente ao corpo empregando-se um método de interpolação com funções de base radial, mas, diferentemente, não é empregada a técnica ALE para levar em conta o movimento sobre as equações fundamentais do escoamento. Para tal, emprega-se uma interpolação eficiente entre a malha movida e a malha anterior, de forma parecida com a técnica Chimera. Porém, na técnica Chimera aplica-se um método de interpolação entre malhas distintas no espaço, ao passo que na presente estratégia a interpolação é aplicada entre malhas distintas no tempo. A técnica é então acoplada com a metodologia de adaptação de malhas para aumentar sua eficácia, sendo detalhada no Capítulo 3 deste trabalho.

A interação fluido-estrutura é um caso particular de variação da topologia do domínio, onde uma fronteira entre o fluido e a estrutura define uma região de variação topológica. Uma metodologia clássica para acoplar a interação consiste em impor condições de equilíbrio de forças e deslocamentos (ou, de forma equivalente, velocidades) na interface. Técnicas monolíticas podem ser empregadas ([Küttler e Wolfgang, 2008](#)), onde as equações fundamentais do escoamento e o sólido imerso devem ser solucionadas ao mesmo tempo. Entretanto, para a maioria de problemas de engenharia, os métodos particionados são preferíveis ([Piperno et al., 1995](#); [Felippa e Farhat, 2001](#)). Empregando-se paradigmas de decomposição de domínios, a estrutura e o escoamentos podem ser solucionados separadamente através do emprego de condições de interface. Desta forma, os códigos desenvolvidos e otimizados para solução específica do fluido e da estrutura podem ser empregados de forma eficiente, sendo a troca de informações entre os códigos realizada apenas na interface. A metodologia desenvolvida para consideração da variação topológica do domínio é diretamente aplicável neste caso.

No modelo particionado implementado neste trabalho, emprega-se um modelo estrutural de elementos finitos para cascas poliédricas considerando-se a não-linearidade geométrica

---

para o modelo de deformação do sólido (Bathe e Ho, 1981; Qun et al., 1998). A troca de informações através da interface é realizada com interpolações de função de base radial (de Boer et al., 2008; Lombardi et al., 2013). A principal vantagem de tal emprego é que a interpolação é definida em todo o domínio, de forma que malhas não-conformes podem ser facilmente e diretamente empregadas (Rendall e Allen, 2008). O modelo estrutural e o acoplamento são detalhados no Capítulo 4 deste trabalho.

## 1.4 Computação Paralela e Interpretação de Dados

A simulação numérica adaptativa de escoamentos turbulentos com fronteiras móveis requer naturalmente grande esforço computacional para ser realizada. Portanto, torna-se indispensável o uso de computação paralela para reduzir o tempo físico necessário para realizar a simulação.

Para cada metodologia ou algoritmo desenvolvido, há sempre uma crescente preocupação em investigar a capacidade de lidar com problemas de grande escala ou então uma forma alternativa de executar um algoritmo seqüencial de forma paralela (Weatherill e Hassan, 1994; Bogaers et al., 2011; Waltz, 2004; de Cougny e Shephard, 1999; Masuero, 2009). Outros autores abordam também a eficiência de acesso à memória (Löhner, 1998; Tuszynski e Löhner, 1998). O problema aumenta consideravelmente de dificuldade quando torna-se necessário manipular os dados em uma malha não-estruturada grande e variável no tempo.

Ao final da simulação, a vasta quantidade de informação numérica obtida como resultado necessita ser apresentada e interpretada de forma ordenada. Por exemplo, como identificar vórtices, efeitos de compressibilidade e trajetórias de partículas no escoamento.

O Capítulo 5 deste trabalho apresenta brevemente as principais técnicas de otimização de performance computacional empregadas, bem como os conceitos empregados para visualização científica e pós-processamento dos resultados numéricos obtidos nas simulações.

---

## 1.5 Contextualização do Trabalho

Para melhor compreender a contextualização do presente trabalho no curso em que se insere, é interessante olhar em retrospectiva os trabalhos precedentes realizados tanto no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) quanto, de forma mais ampla, nos outros programas de pós-graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Alguns dos trabalhos que abordam os temas: turbulência, escoamentos compressíveis, adaptação e movimento de malhas e interação fluido-estrutura são listados abaixo, por ordem cronológica, e suas principais contribuições e características são comentadas:

- [Kessler \(1995\)](#) realiza a simulação numérica de processos de conformação mecânica empregando o método dos elementos finitos conjuntamente com uma técnica de movimento de malhas do tipo ALE;
- [Aymone \(1996\)](#) realiza a simulação numérica de problemas estáticos elásticos lineares bidimensionais e tridimensionais empregando estratégias de adaptação do tipo refinamento  $h$ . O refinamento desenvolvido estima o erro *a posteriori* e especial ênfase é dada para obtenção de malhas sem formação de nós irregulares (portanto isotrópica);
- [Burbridge \(1999\)](#) realiza a simulação numérica de escoamentos compressíveis laminares estacionários bidimensionais e tridimensionais empregando o método de Taylor-Galerkin de um passo, elementos hexaédricos de oito nós e o método dos elementos finitos. Uma técnica de movimento de nós do tipo ALE também é empregada. Malhas estruturadas de até 50 000 nós e elementos são empregadas. O escoamento estacionário supersônico não-viscoso no entorno de um corpo de geometria de duplo elipsóide é apresentado;
- [Peçanha \(2000\)](#) apresenta a simulação computacional bidimensional de escoamentos turbulentos compressíveis de baixo número de Mach empregando um método de diferenças finitas de alta precisão. Simulações da evolução temporal dos vórtices coerentes contendo cerca de 20 000 nós para um número de Reynolds de até  $Re_\infty = 1500$  são apresentados;

- [Aymone \(2000\)](#) realiza a simulação numérica de problemas de conformação mecânica e impacto tridimensionais envolvendo grandes deformações através do remanejamento de malhas. A formulação ALE é empregada em malhas compostas de elementos hexaédricos lineares. Técnicas de realocação nodal são empregadas para controlar a distorção da malha em simulações como a de hidroconformação, estrição de barras e indentação;
- [Teixeira \(2001\)](#) realiza a simulação numérica de escoamentos laminares tridimensionais incompressíveis e compressíveis e sua interação com estruturas deformáveis empregando o método dos elementos finitos. O esquema de Taylor-Galerkin de dois passos é empregado em malhas não-estruturadas. O movimento nodal é realizado empregando-se uma técnica ALE. A estrutura é analisada usando-se elementos triangulares com três nós e seis graus de liberdade por nó, considerando-se os efeitos da não-linearidade geométrica. O escoamento supersônico não-viscoso permanente no entorno de um veículo aeroespacial VLS é apresentado com malhas de 200 000 nós e 1 000,000 de elementos;
- [Justo \(2001\)](#) realiza a geração numérica de malhas estruturadas bidimensionais contendo elementos quadriláteros para simulação numérica de escoamentos incompressíveis. A análise de erro é conduzida *a priori*, de forma a atender requisitos de condições de contorno da simulação. A geração da malha emprega técnicas de suavização laplaciana, dentre outras;
- [Petry \(2002\)](#) realiza a simulação numérica tridimensional de escoamentos incompressíveis turbulentos empregando um modelo LES. O esquema de Taylor-Galerkin é empregado conjuntamente do método dos elementos finitos. As simulações atingem um máximo de aproximadamente 100 000 nós e elementos, sendo o número de Reynolds máximo simulado de  $Re_\infty = 1 \times 10^4$ . As geometrias estudadas compreendem principalmente escoamentos em canais e degraus;
- [Braun \(2002\)](#) apresenta a simulação numérica de escoamentos turbulentos bidimensionais incompressíveis considerando-se a interação aeroelásticas com seções de pontes rígidas com restrições elásticas. O modelo clássico de Smagorinsky é empregado para a simulação LES de grandes escalas. O método explícito de Taylor-Galerkin de dois passos é empregado conjuntamente com a técnica de elementos finitos em

---

malhas estruturadas. O movimento da malha emprega uma técnica do tipo ALE. A análise aeroelástica da seção da ponte Great Belt East é apresentada, onde o número de Reynolds simulado é da ordem de  $Re_\infty = 1 \times 10^5$ , empregando-se uma malha de aproximadamente 10 000 nós e elementos;

- [Teixeira \(2003\)](#) realiza a geração de malhas e modelagem paramétrica de superfícies para uso em sistemas de análise e simulações numéricas pelo método dos elementos finitos. São empregadas técnicas de subdivisão adaptativa por *quadtrees* em função da curvatura local da superfície para gerar a malha. É apresentada a geração de malhas de superfície para uma plataforma semi-submersível com múltiplas interseções, contendo cerca de 10 000 nós e 15 000 elementos triangulares;
- [Bono \(2004\)](#) realiza a simulação numérica de escoamentos compressíveis laminares permanentes bidimensionais e tridimensionais empregando-se uma técnica de adaptação de malhas contendo movimento nodal. O esquema de Taylor-Galerkin é empregado com o método dos elementos finitos. O movimento nodal emprega a matriz Hessiana para análise tensorial do erro, consistindo de uma técnica anisotrópica, mas que fica muito restrita a poucas distorções devido ao emprego de uma malha estruturada. Malhas de aproximadamente 15 000 nós e elementos são empregadas nas simulações de escoamentos supersônicos no entorno de aerofólios, canais e um cone;
- [Popiolek \(2005\)](#) realiza a simulação numérica de escoamentos incompressíveis turbulentos bidimensionais e tridimensionais conjuntamente com uma técnica de adaptação de malhas. A adaptação apresenta etapas de refinamento, desrefinamento e suavização laplaciana, onde enfatiza-se a obtenção de malhas isotrópicas. O erro é analisado por meio de indicadores fundamentados em funções estatísticas e probabilísticas. O esquema de Taylor-Galerkin de dois passos é empregado no contexto do método dos elementos finitos. O modelo de Smagorinsky dinâmico é empregado para a simulação LES de grandes escalas. É apresentado o escoamento turbulento transiente adaptativo no entorno de um cilindro empregando-se cerca de 100 000 nós e 700 000 elementos, para um número de Reynolds de  $Re_\infty = 300$ ;
- [Galante \(2006\)](#) apresenta a simulação numérica de problemas de dinâmica de fluidos computacional e transferência de calor bidimensionais estacionários empregando

---

métodos *multigrid* em malhas não-estruturadas. Malhas triangulares são geradas usando técnicas de triangularização Delaunay e de avanço de fronteira. Estudos de casos de difusão de calor e de modelos de hidrodinâmica são abordados;

- [Braun \(2007\)](#) realiza a simulação numérica de escoamentos turbulentos tridimensionais incompressíveis considerando-se a interação fluido-estrutura. Os modelos clássico e dinâmico de Smagorinsky são empregados para a simulação LES de grandes escalas. O método explícito de Taylor-Galerkin de dois passos é empregado conjuntamente com a técnica de elementos finitos em malhas estruturadas. A estrutura é considerada como um corpo deformável constituído de um material elástico linear com a presença de não-linearidade geométrica, sendo que a atualização da malha emprega uma técnica do tipo ALE. A análise da ação do vento sobre zonas urbanas é apresentada, incluindo simulações empregando cerca de 1 500 000 nós e elementos hexaédricos isoparamétricos lineares com um ponto de integração;
- [Buarque \(2007\)](#) realiza a simulação computacional tridimensional de escoamentos turbulentos incompressíveis de um canal com fundo ondulado empregando um método de diferenças finitas para simulação direta (DNS). Foram apresentadas simulações contendo cerca de 500 000 nós para um número de Reynolds de cerca de  $Re_\infty = 1 \times 10^4$ ;
- [Bono \(2008\)](#) realiza a simulação numérica de escoamentos compressíveis e incompressíveis laminares permanentes em casos bidimensionais e tridimensionais, viscosos e não-viscosos. O esquema de Taylor-Galerkin é empregado com o método dos elementos finitos em malhas não-estruturadas. Um esquema de adaptação contendo apenas a etapa de refinamento isotrópico é também considerado. Um exemplo de simulação permanente viscosa de escoamento supersônico no entorno de uma configuração asa-canard-fuselagem com número de Reynolds de  $Re_\infty = 1 \times 10^5$  é apresentado, contendo malhas de cerca de até 300 000 nós e 1 500 000 elementos;
- [Masuero \(2009\)](#) realiza a simulação numérica de diversos tipos de problemas, incluindo escoamentos laminares estacionários tridimensionais, tanto incompressíveis quanto compressíveis, bem como problemas considerando-se a interação fluido-estrutura empregando diversas técnicas de computação paralela. Atenção especial é dada à distribuição de tarefas e comunicação de dados entre múltiplos processadores

---

para o emprego do método dos elementos finitos em computação paralela. Todos os exemplos foram testados com malhas fixas, sem o emprego de técnicas de adaptação de malhas;

- [Andreis \(2011\)](#) realiza a simulação computacional tridimensional de chamas turbulentas difusivas de metano, metanol e etanol através de simulação LES de grandes escalas e diferenças finitas. Resultados empregando cerca de 2 000 000 de células são apresentados para um número de Reynolds de  $Re_\infty = 3500$ ;
- [Almeida \(2012\)](#) apresenta a simulação numérica de escoamentos compressíveis laminares tridimensionais e sua interação com corpos elásticos deformáveis. O esquema de Taylor-Galerkin de dois passos é empregado com o método dos elementos finitos em malhas não-estruturadas. O movimento da malha emprega uma técnica do tipo ALE e a análise estrutural dinâmica não-linear geométrica de materiais compósitos laminares utiliza uma abordagem corrotacional. A simulação da oscilação induzida pelo escoamento não-viscoso transônico sobre uma asa delta é apresentado, onde uma malha de aproximadamente 500 000 nós e 2 500 000 elementos é empregada;
- [Madalozzo \(2012\)](#) realiza a simulação numérica da dispersão de poluentes em zonas urbanas através da simulação de escoamentos turbulentos tridimensionais incompressíveis. O modelo dinâmico de Smagorinsky é empregado para a simulação LES de grandes escalas. O método explícito de Taylor-Galerkin de dois passos é empregado conjuntamente com a técnica de elementos finitos. A simulação do escoamento e dispersão de poluentes em um quarteirão tridimensional é apresentado, empregando-se cerca de 1 500 000 nós e elementos hexaédricos isoparamétricos lineares com um ponto de integração;
- [Linn \(2013\)](#) realiza a simulação numérica de escoamentos laminares compressíveis bidimensionais e tridimensionais empregando-se uma técnica de adaptação de malhas anisotrópica para malhas não estruturadas. O método CBS é empregado para a simulação do escoamento conjuntamente do método dos elementos finitos. A adaptação anisotrópica de malhas foi implementada através da análise tensorial do erro em uma métrica Riemanniana, onde etapas de refinamento, desrefinamento

e alternância de arestas e faces foram incluídas. É apresentada a simulação não-viscosa permanente de geometrias complexas de aviões comerciais, jatos militares e mísseis supersônicos contendo até cerca de 20 000 000 nós e 100 000 000 elementos tetraédricos lineares;

- [Xavier \(2013\)](#) realiza a simulação numérica tridimensional de escoamentos incompressíveis turbulentos em canais compostos empregando um modelo LES. O esquema de Taylor-Galerkin é empregado conjuntamente ao método dos elementos finitos. As simulações atingem um máximo de aproximadamente 400 000 nós e elementos, sendo o número de Reynolds máximo simulado de  $Re_\infty = 7,5 \times 10^4$ .

Como pode ser observado, há diversos trabalhos já realizados em temas correlacionados. Entretanto, a simulação transiente de escoamentos compressíveis turbulentos em regime transônico e supersônico permanece como uma lacuna, assim como a simulação de grandes deslocamentos de corpos no interior da malha. Neste tipo de regime de velocidades, usualmente tem-se efeitos complexos de custosa e difícil captura usando malhas estáticas, tais como ondas de choque. Para simulações estacionárias tem-se já bem difundido o uso de algoritmos adaptativos para contornar esta dificuldade, mas o cenário é muito mais complexo se o escoamento considerado for transiente e turbulento. Para representar geometrias complexas, soma-se também a necessidade de uso de malhas não-estruturadas, impactando em custos computacionais e dificuldades para o algoritmo de adaptação. O movimento de corpos no interior do domínio é tradicionalmente realizado com o auxílio de técnicas do tipo ALE, as quais se tornam ineficientes ou inviáveis em grandes deformações. Além da formulação, a deformação excessiva da malha acaba tornando necessário o uso acoplado de técnicas de adaptação de malhas.

## 1.6 Objetivos

Os objetivos deste trabalho são:

- Implementar um algoritmo de adaptação anisotrópica  $h$ - $r$  de malhas não-estruturadas bidimensionais e tridimensionais compostas por elementos triangulares e tetraédricos lineares, respectivamente. As operações de adaptação contempladas

---

são: refinamento, desrefinamento, alternância de arestas e faces e suavização nodal.

A análise do erro deve ser multi-escalas, considerando-se efeitos multi-físicos;

- Implementar um algoritmo de movimento de malhas para consideração de grandes variações da topologia do domínio computacional;
- Implementar o algoritmo de simulação de grandes escalas (LES) do tipo Smagorinsky dinâmico compressível e acoplá-lo ao código CBS laminar previamente desenvolvido (Linn, 2013) para o método dos elementos finitos;
- Implementar o acoplamento fluido-estrutura através dos itens anteriores conjuntamente com um elemento de casca;
- Validar todas as metodologias individualmente, tanto para problemas bidimensionais quanto para problemas tridimensionais;
- Validar e explorar estudos de simulações aerodinâmicas e aeroelásticas complexas envolvendo turbulência em escoamentos compressíveis, corpos móveis com grandes deslocamentos e interação-fluido estrutura.

## 1.7 Metodologia

Utiliza-se a linguagem Fortran 90/95 para implementar os objetivos citados. Fez-se uso de paralelização para computadores de memória compartilhada para possibilitar o uso de malhas mais robustas em um intervalo de tempo aceitável. As simulações foram executadas no cluster do CESUP/UFRGS (Centro Nacional de Super Computação) e com um *workstation* do CEMACOM/UFRGS (Centro de Mecânica Aplicada e Computacional) com processador do tipo Xeon E5-2697 2.60GHz.

O algoritmo desenvolvido simula escoamentos compressíveis turbulentos empregando a modelagem LES do tipo Smagorinsky dinâmico compressível conjuntamente com o esquema CBS em um contexto de elementos finitos. Malhas não-estruturadas compostas de elementos triangulares lineares e tetraédricos lineares são utilizadas para problemas bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. A adaptação de malhas desenvolvida emprega operações de refinamento, desrefinamento, alternância de arestas e faces, bem

como suavização nodal. O erro é avaliado anisotropicamente com uma técnica multi-escalas e multi-métrica. A variação topológica do domínio é considerada empregando-se uma técnica que movimenta a malha empregando-se interpolação com funções de base radial conjuntamente com a transferência de informação entre malhas empregando-se a mesma técnica de interpolação. A interação fluido-estrutura é formulada através de um acoplamento fraco entre o fluido e um elemento finito de placas poliédricas finas considerando-se a não-linearidade geométrica.

---

## Capítulo 2

# Escoamentos Compressíveis Turbulentos

Um escoamento turbulento é dito compressível quando uma quantidade suficiente de flutuações de densidade é formada em resposta às perturbações presentes no campo de pressão, e estas variações de densidade estão associadas com a divergência de velocidades local (Lele, 1994). Kovászny (1953) apresentou uma análise de perturbações das equações de Navier-Stokes e mostrou que um campo de turbulência pode ser decomposto essencialmente em três modos de flutuações: o modo de vorticidades (velocidades), o modo acústico (pressão) e o modo de entropia (temperatura). Em uma análise de primeira ordem, estes modos estão desacoplados. Entretanto, uma análise de ordem mais alta demonstra o acoplamento entre os modos, de forma que dois tipos de modos podem interagir não-linearmente, gerando algum dos três modos (Chu e Kovászny, 1958). A velocidade turbulenta é caracterizada como a superposição de uma componente solenoidal (não-divergente) e uma parte dilatacional (irrotacional) obtidas através de uma decomposição de Helmholtz. A primeira contribuição é encontrada em escoamentos incompressíveis, enquanto que a segunda componente é típica de escoamentos compressíveis. O comportamento energético destas componentes são muito distintas em natureza. A estrutura vorticial da componente solenoidal interage com não-linearidades e forças viscosas, formando a conhecida cascata de energia. Já a componente dilatacional é um modo ondulatório e propagativo, onde a energia cinética transfere-se com a energia contida nas flutuações termodinâmicas. Tem-se, portanto, que o balanço de energia presente em escoamentos turbulentos compressíveis é mais complexo que a contrapartida

---

---

incompressível, pois novos fenômenos físicos estão presentes.

Embora o escoamento desenvolvido no entorno de um corpo seja complexo em qualquer velocidade, se este estiver imerso em um campo de velocidades transônicas e supersônicas, efeitos adicionais se desenvolvem. A energia cinética do movimento passa a ser uma fração importante da energia total contida no fluido. Dentro da camada limite, a dissipação devido à viscosidade do fluido torna-se importante no balanço médio da energia cinética. Gradientes significativos de temperatura ocorrem mesmo em escoamentos adiabáticos. Como resultado destes efeitos, quando desenvolvida, a camada limite turbulenta apresenta gradientes de massa específica em adição ao gradiente de velocidades e a turbulência do escoamento passa a consistir de flutuações de pressão, massa específica, temperatura e velocidades. A energia transfere-se continuamente entre estes modos (transferência intermodal). Em certas partes do escoamento existem velocidades relativas de estruturas adjacentes da turbulência contendo zonas transônicas e supersônicas, além de efeitos locais ocasionados por ondas de compressão e ondas de choque, os quais podem afetar a evolução da turbulência. Devido ao fato da massa específica depender tanto da pressão quanto da temperatura, pode-se ter a produção de vorticidade devido à torques baroclínicos. A transferência de calor não pode ser negligenciada na maior parte das aplicações e o campo de temperaturas interage diretamente com o campo de velocidades. Quando existem gradientes de pressão, a compressão e a dilatação do fluido tornam-se importantes em adição aos efeitos usuais de gradientes de pressão compreendidos para o caso de regimes incompressíveis ([Smits e Dussauge, 1969](#)).

Os escoamentos turbulentos supersônicos e transônicos se caracterizam pela presença de ondas de choque, as quais podem causar a separação do escoamento, fortes instabilidades e produzir zonas de intensa troca de calor. Se o número de Mach é alto o suficiente, a energia devido à turbulência compressível pode ser transportada sob as formas de energia sonora e dissipada pela formação de choques locais. Esta forte compressibilidade também conduz a uma diferente evolução das estatísticas turbulentas. Em problemas de aerodinâmica externa neste regime de velocidades, ondas de choque interagem com camadas de cisalhamento. Tais interações podem causar grande impacto na evolução do escoamento no entorno do corpo, alterando seu arrasto e também a transferência de calor em sua superfície. Muitos estudos sobre a interação entre ondas de choque e turbulência

---

podem ser encontrados na literatura (por exemplo, [Andreopoulos et al. \(2000\)](#)), onde uma compreensão física pode ser obtida através de estudos de caso simples, tais como a interação de ondas de choque com turbulência homogênea e isotrópica, os quais foram conduzidos experimentalmente ([Jacquin et al., 1993](#); [Agui et al., 2005](#)) e numericamente ([Lee et al., 1997](#); [Mahesh et al., 1997](#); [Sesterhenn et al., 2005](#); [Jamme et al., 2002](#)). Nestes estudos, tem-se demonstrado que a interação entre ondas de choque e turbulência geralmente conduz a uma amplificação de todas as componentes de tensões turbulentas e, conseqüentemente, da energia cinética turbulenta. Para o caso da interação entre choques e turbulência homogênea isotrópica, uma análise linear mostra que a componente das tensões do escoamento na direção perpendicular aos choques é a mais amplificada para escoamentos de número de Mach até 2, e que o efeito pode se reverter aumentando-se o número de Mach até 3, a partir do qual a amplificação fica saturada ([Lee et al., 1997](#)).

Uma observação mais detalhada da evolução da turbulência atrás de uma onda de choque mostra que o escoamento transversal diminui na região após o choque como conseqüência da compressão, enquanto que a componente perpendicular é diretamente amplificada. Em resposta às flutuações de velocidades e de temperatura, a frente de choque se torna corrugada e passa a oscilar no entorno de uma posição média. Este fenômeno passa a produzir flutuações de pressão e velocidade dilatacional atrás da frente de choque. A energia potencial acústica gerada por esta região corrugada alimenta as tensões de Reynolds: ondas acústicas efêmeras amplificam os níveis de turbulência mais à jusante da interação ([Lee et al., 1997](#); [Jamme et al., 2002](#)). Esta transferência de energia ocorre sobre uma pequena região atrás da onda de choque e amplifica principalmente as componentes dilatacionais do campo de velocidades, aumentando, portanto, o nível de turbulência compressível. O acoplamento não-linear entre componentes dilatacionais e solenoidais conduz a uma redistribuição da energia, formando uma região de turbulência homogênea principalmente solenoidal na região a jusante.

As equações de balanço de quantidade de movimento, de massa e de energia constituem um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares que descrevem o movimento e o cumprimento da primeira Lei da Termodinâmica em um meio contínuo ([Malvern, 1969](#)). Utiliza-se uma metodologia de turbulência LES sobre estas equações fundamentais para reduzir o alcance dos comprimentos de escala da solução, possibilitando-se desta

---

forma simular o efeito de escalas menores sobre escalas maiores a custos computacionais reduzidos com relação à simulação DNS. Para a solução numérica destas equações através do Método dos Elementos Finitos (MEF), emprega-se neste trabalho o método dos resíduos ponderados de Bubnov-Galerkin para a discretização espacial do problema. Utiliza-se malhas não estruturadas com elementos triangulares e tetraédricos lineares para problemas bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. Para a discretização temporal, utiliza-se uma série de Taylor conjuntamente com o esquema das Direções ou Linhas Características CBS, o qual modifica a discretização espacial em função do tempo.

Considera-se apenas escoamentos de gases compressíveis onde a hipótese do meio contínuo seja válida. Isto implica que o menor volume em interesse (elemento de fluido) contém um número significativo de moléculas para que o conceito de média estatística seja válido. O comportamento do fluido pode então ser descrito por suas propriedades macroscópicas tais como densidade, pressão e velocidade. Mesmo que o número de Knudsen (razão entre o caminho livre médio das moléculas e uma dimensão característica do escoamento) seja próximo da unidade nas regiões de choques, [Smits e Dussauge \(1969\)](#) demonstram que a hipótese do meio contínuo para as equações fundamentais fornece uma descrição precisa da estrutura dos choques quando comparada com experimentos para escoamentos não-hipersônicos. Delimita-se o fluido em consideração a um gás monofásico, não-reativo e de mono-espécie. Os escoamentos estudados restringem-se a velocidades não-hipersônicas (número de Mach  $< 6$  para o ar) nos quais os efeitos de dissociação e ionização podem ser desprezados. Assume-se que o equilíbrio termodinâmico a nível local se mantém ao longo de todo escoamento. Para tais suposições, pode-se empregar uma equação de estado de gás perfeito. Assume-se também que o fluido é Newtoniano, para o qual a viscosidade dinâmica varia apenas com a temperatura e que o número de Froude, o qual indica a significância das forças gravitacionais comparada com as forças inerciais, pode ser negligenciado devido às altas velocidade dos escoamentos considerados (número de Mach  $> 0.3$ ). Nestas condições, as equações de balanço de massa, quantidade de movimento e energia descrevem o escoamento em questão.

## 2.1 Equações Fundamentais do Escoamento

As equações que descrevem o escoamento constituem um sistema de equações diferenciais em derivadas parciais que pode classificar-se em um tipo mais amplo de problema denominado de problema de convecção-difusão. Estudos e derivações mais detalhadas sobre as equações fundamentais empregadas na Mecânica dos Fluidos podem ser encontrados em [Schlichting \(1979\)](#) e [White \(1991\)](#). Na forma conservativa, em uma descrição cinemática Euleriana, tem-se que o balanço de massa é expresso pela equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $u_i$  é a componente da velocidade do fluido segundo a direção de  $x_i$ , sendo  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) as direções dos eixos coordenados no espaço cartesiano e  $t$  indica a variável tempo. A equação da continuidade expressa a relação entre a massa acumulada no interior de um volume de controle com o fluxo de massa através de seu contorno. A partir da Segunda Lei de Newton, deriva-se a equação de balanço de quantidade de movimento, que vem dada por:

$$\frac{\partial (\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_j u_i) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

onde  $p$  é a pressão termodinâmica e  $\tau_{ij}$  são as tensões viscosas, as quais são proporcionais ao gradiente de velocidades em um fluido Newtoniano. Adotando-se a hipótese de Stokes, a qual assume que o tensor de tensões viscosas é função linear do tensor de taxa de deformação e tomando o segundo postulando de Stokes, o qual define que esta relação deve ser dada por um tensor isotrópico para o caso de um fluido que possui estrutura molecular estatisticamente isotrópica (pois, caso contrário, as tensões geradas em um elemento de fluido devidas a uma dada deformação não seriam independentes da orientação do elemento), obtém-se a seguinte expressão para a relação constitutiva das tensões viscosas:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad (2.3)$$

em que  $\mu$  é a viscosidade dinâmica (de cisalhamento) do fluido e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Em escoamentos com altos gradientes de temperatura, como é o caso de escoamentos compressíveis, a viscosidade e a condutividade térmica não podem ser consideradas constantes, mas sim função da temperatura. Adota-se neste trabalho a Lei de Sutherland,

a qual estima a viscosidade em função da temperatura através da seguinte relação, válida para o ar (Hirsch, 1988):

$$\mu = \mu_r \frac{T_r + S_0}{T + S_0} \left( \frac{T}{T_r} \right)^{3/2} \quad (2.4)$$

onde  $T$  é a temperatura,  $T_r$  é a temperatura de referência, adotada como a temperatura de corrente-livre,  $\mu_r$  é a viscosidade dinâmica de referência, adotada como a viscosidade dinâmica de corrente-livre e  $S_0 = 110,4K$  é a temperatura de Sutherland (Sutherland, 1893). O balanço de energia é derivado da Primeira Lei da Termodinâmica, em conjunto com a adoção da Lei de Fourier (a qual adota a hipótese de que o fluxo de calor deve ser proporcional ao gradiente de temperatura local), resultando (na forma isotrópica e desprezando-se a transferência de calor por radiação):

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i E) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} u_j) = 0 \quad (2.5)$$

onde  $k$  é a condutibilidade térmica do fluido (isotrópica) e  $E$  é a energia total por unidade de massa, a qual inclui a energia interna específica por unidade de massa  $e$  e a energia cinética por unidade de massa, ou seja, que:

$$E = e + \frac{1}{2} u_i u_i \quad (2.6)$$

As equações de balanço podem ser escritas em uma forma mais generalizada e compacta da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

onde  $\Phi$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são dadas por:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_j \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_j u_i + p \delta_{ji} \\ (\rho E + p) u_i \end{Bmatrix} \quad \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{ji} \\ -\tau_{ij} u_j - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$ . O vetor  $\Phi$  contém as variáveis de conservação,  $\mathbf{F}_i$  contém os termos advectivos conjuntamente do gradiente de pressão e  $\mathbf{G}_i$  possui os termos difusivos. Embora formulado para casos tridimensionais, as equações anteriores podem ser facilmente bidimensionalizadas através da redução da variação dos índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  de 3 para 2. Quando desprezam-se os termos difusivos, ou seja,  $\mathbf{G}_i = \mathbf{0}$ , o sistema resultante constitui as Equações de Euler (despreza-se a viscosidade do fluido e o balanço de energia fica modificado de forma a desconsiderar a difusão de calor e o trabalho mecânico das tensões viscosas). O sistema de equações (2.7) possui mais variáveis do que número de equações e

portanto não pode ser resolvido ainda. É necessário a inclusão das chamadas equações de estado para o seu completo fechamento. Neste sentido, adota-se a hipótese de gás perfeito para o fluido, a qual relaciona a massa específica  $\rho$  com a pressão  $p$  e a temperatura absoluta  $T$  através da constante universal dos gases  $R$ :

$$\rho RT = p \quad (2.9)$$

Entretanto, a equação anterior é mais comumente expressa em função da relação entre o coeficiente de calor específico a pressão e volume constante,  $C_p$  e  $C_v$ , respectivamente, ficando:

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (2.10)$$

onde  $\gamma = C_p/C_v$ . Adota-se adicionalmente a hipótese de que o gás é termicamente perfeito, ou seja, que ele não está sujeito a reações químicas e que sua energia interna  $e$  e entalpia  $h$  são proporcionais exclusivamente à temperatura  $T$ , isto é,  $e = e(T)$  e  $h = h(T)$ , de forma que, na forma diferencial:

$$\frac{de}{dT} = C_v \quad \frac{dh}{dT} = C_p \quad (2.11)$$

Por fim, adota-se a hipótese de gás caloricamente perfeito, na qual, em adição, o calor específico é constante:

$$e = C_v T \quad h = C_p T \quad (2.12)$$

O sistema está agora fechado, contendo 5 equações diferenciais parciais para 5 variáveis independentes  $\rho$ ,  $u_i$  ( $i = 1,2,3$ ) e  $e$  juntamente com fórmulas algébricas para o cálculo de  $p$ ,  $\tau$  e  $T$ , as quais devem ser solucionadas com a inclusão de condições iniciais e de contorno adequadas.

## 2.2 Filtragem das Equações Fundamentais do escoamento

A técnica de simulação de grandes escalas (LES) baseia-se na idéia de separação (também chamada de filtragem) das escalas do escoamento através de um formalismo matemático bem estabelecido. A filtragem de uma dada variável  $\phi$  é representada matematicamente no espaço físico através de um produto de convolução. A parte resolvida  $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$  de uma

variável  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , a qual varia no espaço e no tempo, é formalmente definida pela relação (Sagaut, 2006):

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{\mathbf{x} - \xi}{\Delta}, t - t'\right) \phi(\xi, t') dt' d^3\xi \quad (2.13)$$

onde o núcleo de convolução  $G$  depende do filtro utilizado e está associado com a escala de corte tanto no espaço,  $\Delta$ , quanto no tempo,  $\tau_c$ . A parte não resolvida de  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , denotada por  $\phi'(\mathbf{x}, t)$ , é definida por:

$$\phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) \quad (2.14)$$

Algumas propriedades deste tipo de operação de filtragem são fundamentais e ressaltadas a seguir.

### 2.2.1 Propriedades Fundamentais

Três importantes propriedades das operações de filtragem são necessárias para manipulação das equações fundamentais do escoamento, sendo elas:

- Consistência:

$$\bar{a} = a \iff \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, t') d^3\xi dt' = 1 \quad (2.15)$$

- Linearidade:

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi} \quad (2.16)$$

- Comutação com relação à diferenciação:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \bar{\frac{\partial \phi}{\partial s}}, \quad s = \mathbf{x}, t \quad (2.17)$$

O filtro  $G$  não é *a priori* um operador do tipo Reynolds, uma vez que a seguinte propriedade característica deste tipo de operador não é satisfeita em geral:

$$\overline{\phi\psi} = \bar{\phi}\bar{\psi} \quad (2.18)$$

Além disto, o filtro não é necessariamente idempotente:

$$\overline{\bar{\phi}} \neq \bar{\phi} \quad (2.19)$$

e a parte resolvida de uma dada componente de flutuação não é nula:

$$\bar{\phi}' \neq 0 \quad (2.20)$$

Algumas hipóteses adicionais são empregadas para a utilização do processo de filtragem sobre as equações fundamentais do escoamento.

## 2.2.2 Hipóteses Adicionais

A formulação para filtragem apresentada na Eq. (2.13) é bastante geral e usualmente não é empregada diretamente em escoamentos compressíveis. Para simplificação, adota-se a hipótese de que o núcleo de convolução é obtido por extensão tensorial de núcleos unidimensionais:

$$G\left(\frac{\mathbf{x}-\xi}{\Delta}, t-t'\right) = G_t(t-t') G\left(\frac{\mathbf{x}-\xi}{\Delta}\right) = G_t(t-t') \prod_{i=1,3} G_i\left(\frac{x_i-\xi_i}{\Delta}\right) \quad (2.21)$$

Adicionalmente, adota-se a hipótese de que o filtro adotado é unicamente espacial:

$$G_t(t-t') = \delta(t-t') \quad (2.22)$$

Portanto, a filtragem de uma dada variável  $\phi(\mathbf{x}, t)$  fica definida por:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{\mathbf{x}-\xi}{\Delta}\right) \phi(\xi, t) d^3\xi \quad (2.23)$$

É importante salientar que a filtragem unicamente espacial das equações fundamentais do escoamento implica indiretamente na filtragem temporal, uma vez que as escalas de tempo e comprimento estão associadas neste sistema de equações (Garnier et al., 2009). Utiliza-se neste trabalho um filtro do tipo caixa (em inglês: *box filter*) para a separação das escalas espaciais, o qual é representado no espaço físico por:

$$G(x-\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{se } |x-\xi| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.24)$$

Outros tipos de filtro são possíveis, tais como o Gaussiano e o do tipo cortado (em inglês: *sharp cutoff*). Filtros que possuem suporte compacto (tais como o do tipo caixa e o Gaussiano) são preferíveis por maior simplicidade e decorrente interpretação diferencial de operações associadas (Garnier et al., 2009).

### 2.2.3 Filtragem Favre

Embora a filtragem previamente apresentada possa ser diretamente aplicada sobre as equações fundamentais do escoamento, existem muitos inconvenientes associados. Entre eles tem-se os termos cruzados das equações, do tipo  $\phi\psi$ , cuja filtragem dá lugar a termos na forma  $\overline{\phi\psi}$ . Entretanto, os termos diretamente calculados são  $\overline{\phi}$  e  $\overline{\psi}$ , e a substituição direta de  $\overline{\phi\psi}$  por  $\overline{\phi}\overline{\psi}$  introduz um erro de comutação entre o operador de filtragem e o operador de multiplicação. O efeito de cada um destes erros de comutação deve ser modelado se esta filtragem for empregada. As equações resultantes são demasiadamente complexas nesta formulação e por essa razão tal abordagem não é empregada em escoamentos compressíveis. A técnica comumente empregada faz uso da filtragem Favre, a qual consiste numa troca de variáveis em que as variáveis filtradas são ponderadas pela massa específica. Matematicamente, esta troca de variáveis se escreve da forma:

$$\overline{\rho\phi} = \overline{\rho}\tilde{\phi} \quad (2.25)$$

O operador definido por  $(\tilde{\cdot})$  é linear mas não comuta com os operadores de derivada no espaço e no tempo, ou seja:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} \neq \tilde{\frac{\partial \phi}{\partial x_j}} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \neq \tilde{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (2.27)$$

Esta troca de variáveis é muito similar à ponderação de Favre (Favre, 1971) com a diferença de ser uma operação de filtragem. Uma das grandes motivações desta abordagem é a obtenção da seguinte identidade:

$$\overline{\rho u_i} = \overline{\rho}\tilde{u}_i \quad (2.28)$$

a qual está presente nas equações fundamentais do escoamento e pode ser diretamente computada sem modelagem explícita dos erros de comutação. Adicionalmente, tem-se que a aplicação deste filtro mantém a estrutura original das equações de balanço de massa, quantidade de movimento e energia, permitindo uma interpretação física mais simples e tornando necessário modificar apenas os termos de sub-malha nas equações originais (Smits e Dussauge, 1969; Garnier et al., 2009).

## 2.2.4 Equações Fundamentais do Escoamento Filtradas

Aplicando-se a filtragem Favre sobre as equações fundamentais do escoamento obtêm-se as equações filtradas a serem empregadas na formulação LES. A equação de balanço de massa, quantidade de movimento e energia ficam definidas, respectivamente, após a aplicação da filtragem e certo trabalho algébrico, da seguinte forma (Sengupta et al., 2009):

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{\partial \tilde{\tau}_{ji}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ji}^{sgs}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ji} - \tilde{\tau}_{ji})}{\partial x_i} = 0 \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{\tau}_{ij} \tilde{u}_j) - C_p \frac{\partial q_i^{sgs}}{\partial x_i} - \\ & \frac{\partial}{\partial x_k} ([\bar{\tau}_{ik} - \tilde{\tau}_{ik}] \tilde{u}_i) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\rho} \left( \widetilde{u_k u_k u_i} - \tilde{u}_k \tilde{u}_k \tilde{u}_i - \tau_{kk}^{sgs} \tilde{u}_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

É possível obter diferentes formulações para as equações balanço de quantidade de movimento e energia neste tipo de abordagem, dependendo, por exemplo, da filtragem ser aplicada sobre a energia total, entalpia, pressão ou temperatura, dentre outras particularidades (Vreman et al., 1995a). O processo de filtragem gera diversos termos a mais nas equações fundamentais do escoamento os quais devem ser fechados (modelados), tais como o tensor de tensões de sub-malha  $\tau_{ij}^{sgs}$  e o fluxo de calor turbulento de sub-malha  $q_i^{sgs}$ . Estes termos de sub-malha fisicamente representam o efeito das escalas não resolvidas (ditas de sub-malha) sobre as escalas resolvidas. Matematicamente, estes termos são definidos por:

$$\tau_{ij}^{sgs} = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) \quad (2.32)$$

$$q_i^{sgs} = \bar{\rho} (\widetilde{T u_j} - \tilde{T} \tilde{u}_j) \quad (2.33)$$

O segundo termo não fechado que aparece na equação de balanço de quantidade de movimento filtrada é  $(\bar{\tau}_{ji} - \tilde{\tau}_{ji})$ , e decorre da aplicação da filtragem Favre sobre os termos de tensões viscosas. A equação de balanço de energia filtrada apresenta três outros termos não fechados em adição ao fluxo de calor turbulento de sub-malha: o termo  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)$ , o qual resulta da aplicação da filtragem Favre sobre os termos de fluxo de calor difusivo; o termo  $\frac{\partial}{\partial x_k} ([\bar{\tau}_{ik} - \tilde{\tau}_{ik}] \tilde{u}_i)$ , o qual é análogo à dissipação dos termos devidos às tensões viscosas e, finalmente, a divergência da difusão turbulenta,  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\rho} \left( \widetilde{u_k u_k u_i} - \tilde{u}_k \tilde{u}_k \tilde{u}_i - \tau_{kk}^{sgs} \tilde{u}_i \right)$ .

As tensões totais  $\mathcal{T}_{ij}$  podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_{ij} = \tau_{ij}^{sgs} + \bar{\tau}_{ij} \quad (2.34)$$

sendo o tensor de tensões viscosas filtrado aproximado por (Moin et al., 1991):

$$\bar{\tau}_{ij} = \tilde{\mu} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right] \quad (2.35)$$

em que  $\tilde{\mu}$  é a viscosidade molecular baseada na temperatura absoluta filtrada,  $\tilde{T}$ . O fluxo total de calor  $\mathcal{Q}_i$  fica definido por:

$$\mathcal{Q}_i = q_i^{sgs} + \bar{q}_i \quad (2.36)$$

onde o fluxo de calor molecular filtrado é:

$$\bar{q}_i = \tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.37)$$

sendo  $\tilde{k}$  a condutividade térmica calculada baseada na temperatura absoluta filtrada,  $\tilde{T}$ . Por fim, o fluxo total de energia devido à transferência de calor e trabalho realizado pelas tensões totais,  $\mathcal{H}_i$ , fica definido por:

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{Q}_i + \mathcal{T}_{ij} \tilde{u}_j \quad (2.38)$$

e a energia total filtrada por unidade de volume é obtida através da aplicação da filtragem sobre a Eq. (2.6):

$$\bar{\rho} \tilde{E} = \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \quad (2.39)$$

a qual não é diretamente calculável. De forma simplificada, pode-se calcular este termo através de (Ragab et al., 1992), (Kosovic et al., 2002), (Dubois et al., 2002):

$$\bar{\rho} \tilde{E} = \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \frac{1}{2} \tau_{ii}^{sgs} \quad (2.40)$$

em que  $\frac{1}{2} \tau_{ii}^{sgs}$  representa a energia cinética turbulenta de sub-malha por unidade de volume. Tem-se, ao final, um sistema simplificado em questão de complexidade envolvida tanto no espaço quanto no tempo obtido pelo processo de filtragem sobre as equações fundamentais do escoamento no qual resultam termos acoplados entre as escalas resolvidas e as escalas não-resolvidas, os quais devem ser fechados através de algum processo de modelagem. O processo de modelagem consiste em aproximar os termos de sub-malha com base na informação contida unicamente nas escalas resolvidas. Dentre todos os termos de

sub-malha presentes nas equações derivadas,  $\tau_{ii}^{sgs}$  é o único que aparece na formulação incompressível isotérmica, evidenciando os mecanismos mais complexos de acoplamento entre escalas resolvidas e não-resolvidas para o caso compressível. A modelagem funcional é adotada para termos de sub-malha e é discutida na próxima seção.

### 2.2.5 Modelagem das Escalas de Sub-Malha

A modelagem das escalas de sub-malha está baseada na hipótese de que se a escala de sub-malha de fato existe, então o escoamento é localmente turbulento no espaço e no tempo. Como consequência, os modelos de sub-malha são construídos baseados em propriedades conhecidas de escoamentos turbulentos. Assume-se que a turbulência desenvolvida na região das pequenas escalas seja homogênea. Fenomenologicamente (Vincent e Meneguzzi, 1994), tem-se uma transferência de energia das maiores para as menores escalas do escoamento até que a viscosidade molecular dissipe a energia cinética em energia interna. Um espectro típico para este caso de turbulência homogênea é mostrado na Fig. 2.1, onde o eixo horizontal indica, no espaço de frequências, o número de onda  $k$  associado ao filtro espacial e no eixo vertical a energia associada a este número de onda  $E(k)$ . A zona de produção de energia está contida na região de grandes vórtices, associados aos menores números de onda. Existe também uma zona de transferência de energia, também chamada de zona inercial, na qual a energia é transferida das maiores para as menores escalas do escoamento seguindo a Lei de Kolmogorov. De fato, pode existir uma transferência no sentido inverso, isto é, das menores para as maiores escalas, chamado de fenômeno de cascata inverso (em inglês: *backscatter*), mas de intensidade muito mais baixa que a forma usual. Por fim, tem-se a zona de dissipação, onde assume-se desenvolvida sob mecanismo de viscosidade molecular contida na região de alto número de onda (associado às pequenas escalas, que é a região de sub-malha).

Define-se que existe um determinado número de onda de corte  $k_c$  situado na zona inercial o qual separa a região resolvida da região não-resolvida do escoamento para a construção de um modelo de sub-malha. Para o filtro utilizado, tem-se que essa faixa situa-se em  $k_c = \pi/\Delta$ . Desta forma, a transferência de energia através desta zona de corte equivale à taxa de dissipação das menores escalas. Assume-se que as menores escalas são isotrópicas e estão em equilíbrio energético com as maiores escalas, as quais são anisotrópicas por

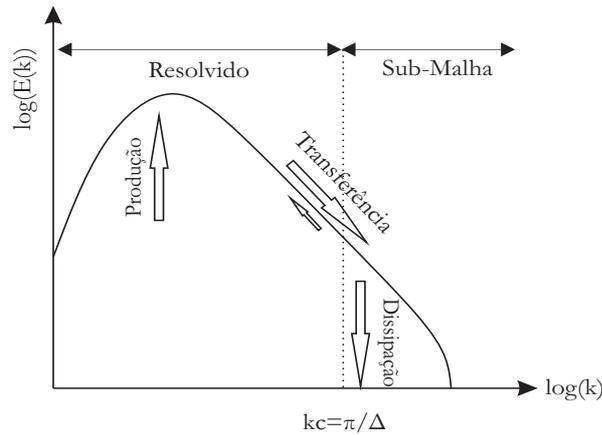


Figura 2.1: Espectro típico da turbulência homogênea.

natureza. Portanto, a hipótese fundamental utilizada para a modelagem funcional dos efeitos de sub-malha sobre as escalas resolvidas é essencialmente energética (Garnier et al., 2009), de forma que o balanço da transferência de energia entre as duas zonas torna-se suficiente para descrever os efeitos de sub-malha. O modelo de viscosidade de sub-malha é empregado para tal.

### Modelo de Viscosidade de Sub-Malha

As equações fundamentais do escoamento filtradas requerem modelagem em virtude de seus termos não fechados. A equação de balanço de massa filtrada, Eq. (2.29), é a única que não requer tal procedimento. Na equação de balanço de quantidade de momento filtrada, Eq. 2.30, o termo  $(\bar{\tau}_{ji} - \tilde{\tau}_{ji})$  é desconsiderado, conforme estudos de Vreman et al. (1995a), Vreman (1995) e Vreman et al. (1997), os quais mostram que estes termos não-lineares são de menor importância sobre as equações filtradas para uma ampla faixa de números de Mach. O mesmo tipo de estudo foi realizado para a influência destes termos sobre as equações de balanço de energia (Martín et al., 2000), evidenciando sua baixa magnitude com relação aos outros termos, sendo, portanto, também negligenciados. Na prática, isto equivale a considerar  $\bar{\tau}_{ij} = \tilde{\tau}_{ij}$  e  $\overline{\tau_{ij}u_i} = \tilde{\tau}_{ij}\tilde{u}_i$ . O efeito do termo  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)$  na Eq. (2.31) é muito pequeno comparado com o termo de sub-malha, conforme Vreman et al. (1995b) e por isso também é desconsiderado, especialmente numa faixa de número de Mach até valores moderados. Finalmente, o termo  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\rho} \left( \widetilde{u_k u_k u_i} - \widetilde{u_k} \widetilde{u_k} \widetilde{u_i} - \tau_{kk}^{sgs} \tilde{u}_i \right)$  da Eq. (2.31) é também desconsiderado devido a sua baixa contribuição com relação aos termos de sub-malha (Santhanam et al., 2003). Com

estas considerações, restam, portanto, o tensor de tensões de sub-malha  $\tau_{ij}^{sgs}$  e o fluxo de calor turbulento de sub-malha  $q_i^{sgs}$  a serem modelados.

O termo  $\tau_{ij}^{sgs}$  é o único presente também na formulação incompressível. Para sua modelagem, assume-se que a Hipótese de Boussinesq descreve a cascata de transferência de energia. A hipótese assume que os mecanismos de transferência de energia das escalas resolvidas para as escalas de sub-malha são análogos aos mecanismos moleculares representados por um termo difusivo no qual a viscosidade molecular aparece. Isto equivale a assumir que o efeito das escalas de sub-malha é análogo ao movimento Browniano superimposto sobre o movimento presente nas escalas resolvidas. Na prática, significa que a cascata de transferência de energia é modelada por um termo com estrutura matemática similar à da difusão molecular, mas em que a viscosidade molecular é substituída por uma viscosidade de sub-malha,  $\nu_{sgs}$  (Boussinesq, 1877):

$$\tau_{ij}^{sgs} = 2\bar{\rho}\nu_{sgs} \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{S}_{kk}\delta_{ij} \right) - \frac{1}{3}\tau_{kk}^{sgs}\delta_{ij} \quad (2.41)$$

onde as partes desviatórias e esféricas do tensor estão explicitamente separadas pois o termo isotrópico  $\tau_{kk}^{sgs}$  não pode ser incluído diretamente, necessitando de uma modelagem particular. O termo  $\tilde{S}_{ij}$  é o tensor de taxa de deformação filtrado:

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.42)$$

A adoção de um escalar  $\nu_{sgs}$  para a viscosidade de sub-malha requer a adoção da hipótese de que um comprimento característico  $l_0$  e um tempo característico  $t_0$  são suficientes para descrever as escalas de sub-malha. Por análise dimensional, tem-se que:

$$\nu_{sgs} = \frac{l_0^2}{t_0} \quad (2.43)$$

Um modelo na forma da Eq. (2.41) é local tanto no espaço quanto no tempo. Isto implica que existe uma total separação entre as escalas resolvidas e as escalas de sub-malha e também que o escoamento está constantemente em equilíbrio espectral, de forma que não há acumulação de energia em nenhuma frequência e a forma do espectro de energia mantém-se invariante com o tempo (Sagaut, 2006). Nestas duas condições, pode-se criar um modelo numérico para a viscosidade de sub-malha representada no espaço físico, sendo um deles o modelo de Smagorinsky.

## Modelo de Smagorinsky

O modelo mais simples para a Eq. (2.43) é o modelo de Smagorinsky (Smagorinsky, 1963):

$$\nu_{sgs} = C_s^2 \Delta^2 |\tilde{S}| \quad (2.44)$$

onde:

$$|\tilde{S}| = \left(2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}\right)^{1/2} \quad (2.45)$$

Utilizando-se a hipótese de equilíbrio local e assumindo-se um espectro de Kolmogorov, o termo  $C_s$  pode ser determinado da forma:

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3K_0}{2}\right)^{-3/4} \approx 0,18 \quad (2.46)$$

onde a constante de Kolmogorov  $K_0$  vale 1,4 e pode ser interpretada como a razão do comprimento de mistura associado às escalas não-resolvidas com o comprimento de corte do filtro espacial,  $\Delta$ . Na prática, a constante de Smagorinsky  $C_s$  é usualmente adotada como um valor entre 0,1 e 0,2, dependendo da configuração do escoamento e da dimensão do filtro espacial, calculado usualmente por  $\Delta = (\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^{1/3}$ , onde  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  representam as dimensões características do filtro segundo as direções de  $x_i$ , para  $i = 1,2,3$ , respectivamente.

Em adição à dependência do tipo de escoamento para o emprego da constante de Smagorinsky, este tipo de modelo tende a ser muito dissipativo nas regiões de grandes deformações do fluido. Particularmente, na região onde ocorre a transição do escoamento laminar para turbulento e na região próxima ao contorno sólido, tem-se uma predição geralmente ruim do comportamento real do escoamento. Independente destes problemas, a simplicidade do modelo tornou seu uso muito popular (Garnier et al., 2009).

## Modelagem do Tensor Isotrópico

Para escoamentos de baixa compressibilidade, com número de Mach menor que 0,2, Squires (1991) demonstra que a desconsideração do termo isotrópico  $\tau_{kk}^{sgs}$  não influencia de forma significativa os resultados de uma simulação LES de turbulência isotrópica compressível. Entretanto, para valores superiores de velocidade, tem-se a necessidade

de consideração do termo. Um modelo proposto por [Yoshizawa \(1986\)](#) é empregado:

$$\tau_{kk}^{sgs} = 2C_I \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}|^2 \quad (2.47)$$

O modelo é derivado de uma expansão assintótica no entorno de um estado incompressível onde foi utilizado a hipótese de equilíbrio entre produção e dissipação de energia. A constante  $C_I$  geralmente é adotada como um valor entre 0,0066 até 0,066, sendo a simulação pouco sensível ao seu valor. Neste tipo de modelo, o termo  $\tau_{kk}^{sgs}$  usualmente assume valores grandes nas áreas de grande compressão e dilatação do fluido, as quais são as mesmas onde o algoritmo numérico usualmente introduz maior dissipação.

### Modelo de Sub-Malha para o Fluxo de Calor

Utiliza-se a hipótese de [Eidson \(1985\)](#) para a modelagem do termo de sub-malha do fluxo de calor, onde assume-se que a transferência de energia das escalas resolvidas para as escalas de sub-malha é proporcional ao gradiente das temperaturas resolvidas. O coeficiente de proporcionalidade é chamado de condutividade de sub-malha,  $\kappa_{sgs}$ , o qual relaciona-se à viscosidade de sub-malha através da relação:

$$\kappa_{sgs} = \frac{\nu_{sgs} C_p}{Pr_{sgs}} \quad (2.48)$$

onde  $Pr_{sgs}$  é o número de Prandtl de sub-malha. O fluxo de calor turbulento de sub-malha é modelado por:

$$q_i^{sgs} = \frac{\bar{\rho} C_s \Delta^2 |\tilde{S}|}{Pr_{sgs}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.49)$$

onde o valor usual de  $Pr_{sgs}$  encontra-se no intervalo compreendido entre 0,3 e 0,9.

### Modelo Dinâmico

Para melhor adaptar o modelo de viscosidade de sub-malha às estruturas locais do escoamento, [Germano et al. \(1991\)](#) propuseram um algoritmo que modifica o modelo de Smagorinsky de forma a calcular automaticamente a constante em cada ponto no espaço a cada instante de tempo. Desta forma, a constante de Smagorinsky torna-se função do tempo e do espaço:  $C_s = C_s(\mathbf{x}, t) = C_s^{dyn}$ . O procedimento também pode ser estendido para determinar da mesma forma  $C_I = C_I(\mathbf{x}, t) = C_I^{dyn}$  e  $Pr_{sgs} = Pr_{sgs}(\mathbf{x}, t) = Pr_{sgs}^{dyn}$ .

O modelo dinâmico se baseia na relação de Germano, a qual utiliza um segundo nível de filtragem tal que seu número de onda de corte,  $k'_c$ , seja menor que o do filtro inicial, de forma que  $k'_c = \pi/\widehat{\Delta} < k_c$ , conforme pode ser visto na Fig. 2.2. Assim, a mesma forma funcional para as quantidades de sub-malha pode ser assumida no comprimento de escala da malha  $\Delta$ , representativa da malha computacional, e em um comprimento de escala de um filtro teste maior  $\widehat{\Delta}$ . É possível escrever o tensor de tensões de sub-malha no nível do filtro de teste,  $T_{ij}$ , da seguinte forma:

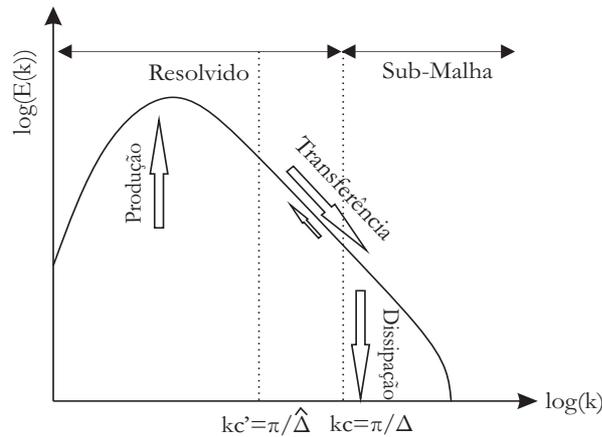


Figura 2.2: Espectro típico da turbulência homogênea incluindo um segundo nível de filtragem.

$$T_{ij} = \widehat{\rho u_i u_j} - \frac{1}{\widehat{\rho}} \widehat{\rho u_i \rho u_j} \quad (2.50)$$

onde o sobrescrito ( $\widehat{\quad}$ ) indica que o termo é calculado em nível do filtro de teste. Aplicando-se o filtro de teste no tensor de tensões de sub-malha no nível da malha  $\tau_{ij}^{sgs}$ , resulta em:

$$\widehat{\tau_{ij}^{sgs}} = \widehat{\rho u_i u_j} - \frac{\widehat{\rho u_i \rho u_j}}{\widehat{\rho}} \quad (2.51)$$

A diferença entre a Eq. (2.50) e a Eq. (2.51) conduz à identidade de Germano,  $L_{ij}$ :

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau_{ij}^{sgs}} = \widehat{\rho u_i u_j} - \frac{\widehat{\rho u_i \rho u_j}}{\widehat{\rho}} \quad (2.52)$$

A dimensão do filtro teste usualmente empregada vale  $\widehat{\Delta} = (\widehat{\Delta}_1 \widehat{\Delta}_2 \widehat{\Delta}_3)^{1/3}$ , onde  $\widehat{\Delta}_1$ ,  $\widehat{\Delta}_2$  e  $\widehat{\Delta}_3$  representam as dimensões características do filtro teste segundo as direções  $x_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , respectivamente. Para turbulência homogênea em escoamentos compressíveis, Spyropoulos e Blaisdell (1996) concluem que a melhor relação para  $\widehat{\Delta}/\Delta$  é 2. Assumindo-se que os dois tensores de tensões de sub-malha,  $T_{ij}$  e  $\tau_{ij}^{sgs}$ , podem ser modelados por uma

mesma constante  $C_s^{dyn}$  em ambos níveis de filtragem, tem-se que (utilizando o modelo de Smagorinsky):

$$T_{ij} = 2C_s^{dyn} \widehat{\Delta^2 \bar{\rho} |S|} \left( \widehat{S}_{ij} - \frac{1}{3} \widehat{S}_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} \quad (2.53)$$

$$\tau_{ij}^{sgs} = 2C_s^{dyn} \Delta^2 \bar{\rho} |\tilde{S}| \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{3} \tau_{kk}^{sgs} \delta_{ij} \quad (2.54)$$

Introduzindo a Eq. (2.53) e a Eq. (2.54) na Eq. (2.52), obtém-se:

$$L_{ij} = 2C_s^{dyn} \widehat{\Delta^2 \bar{\rho} |S|} \left( \widehat{S}_{ij} - \frac{1}{3} \widehat{S}_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} - 2C_s^{dyn} \Delta^2 \bar{\rho} |\tilde{S}| \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} \tau_{kk}^{sgs} \delta_{ij} \quad (2.55)$$

e, considerando-se  $C_s^{dyn}$  constante em um intervalo no mínimo igual ao comprimento de corte do filtro de teste, pode-se simplificar a Eq. (2.55), substituindo-a por:

$$L_{ij} = C_s^{dyn} M_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{kk}^{sgs} \delta_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} \quad (2.56)$$

onde:

$$M_{ij} = 2\widehat{\Delta^2 \bar{\rho} |S|} \left( \widehat{S}_{ij} - \frac{1}{3} \widehat{S}_{kk} \delta_{ij} \right) - 2\Delta^2 \bar{\rho} |\tilde{S}| \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.57)$$

Utilizando-se a abordagem de minimização por mínimos quadrados proposta por Lily (1992), é possível determinar  $C_s^{dyn}$  através de:

$$C_s^{dyn} = \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{kl} M_{kl}} \quad (2.58)$$

Desta forma, tem-se uma forma dinâmica para o cálculo de  $C_s^{dyn}$ . O valor pode assumir inclusive valores negativos, os quais podem ser interpretados como o mecanismo de cascata inversa. Um problema desta abordagem é que  $C_s^{dyn}$  calculado através da Eq. (2.58) não é limitado, uma vez que aparece sob a forma de uma fração cujo denominador pode assumir valores nulos. Para contornar este problema capaz de instabilizar a simulação, toma-se a média do numerador e do denominador separadamente:

$$C_s^{dyn} = \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle} \quad (2.59)$$

e também impõe-se que a soma da viscosidade de sub-malha com a viscosidade decorrente das escalas resolvidas deve ser positiva, além de  $C_s^{dyn}$  possuir valor limitado superiormente por  $C_{max}$ :

$$\nu_{sgs} + \nu \geq 0 \quad (2.60)$$

$$C_s \leq C_{max} \quad (2.61)$$

onde o limite adotado vale  $C_{max} = 0.25$ . O termo  $C_I$  da parte isotrópica do tensor também pode ser determinado dinamicamente, denotado por  $C_I^{dyn}$ , sendo calculado através de (Moin et al., 1991):

$$C_I^{dyn} = \frac{\langle L_{kk} \rangle}{\left\langle 2\widehat{\bar{\rho}}\widehat{\Delta}^2|\widehat{S}|^2 - 2\Delta^2\left(\widehat{\bar{\rho}}|\widehat{S}|^2\right) \right\rangle} \quad (2.62)$$

O princípio é o mesmo para determinar dinamicamente o número de Prandtl turbulento. Calcula-se o fluxo de calor a nível do filtro de teste,  $Q_i$ , da seguinte maneira:

$$Q_i = \widehat{\rho u_i T} - \frac{1}{\widehat{\bar{\rho}}} \widehat{\bar{\rho} T \bar{\rho} u_i} \quad (2.63)$$

Aplicando-se o filtro de teste no fluxo de calor de sub-malha  $q_i^{sgs}$  e subtraindo-se a expressão resultante da Eq. (2.63) obtém-se uma expressão análoga à identidade de Germano, denotada por  $K_i$ :

$$K_i = Q_i - \widehat{q_i^{sgs}} = \widehat{\bar{\rho} u_i T} - \frac{\widehat{\bar{\rho} T \bar{\rho} u_i}}{\widehat{\bar{\rho}}} \quad (2.64)$$

O mesmo modelo de difusão é utilizado para o fluxo de calor em nível do filtro de teste:

$$Q_i = \frac{C_s \widehat{\bar{\rho}} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}|}{Pr_{sgs}} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i} \quad (2.65)$$

Substituindo-se a Eq. (2.49) e a Eq. (2.65) na Eq. (2.64), obtém-se:

$$K_i = \frac{C_s}{Pr_{sgs}} \left( \widehat{\bar{\rho}} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i} - \widehat{\bar{\rho} \Delta^2 |\widehat{S}|} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i} \right) \quad (2.66)$$

Segundo Vreman (1995), o número de Prandtl dinâmico de sub-malha  $Pr_{sgs}^{dyn}$  pode ser calculado utilizando-se o procedimento de minimização de mínimos quadrados de Lily (1992):

$$Pr_{sgs}^{dyn} = \frac{\langle N_i N_i \rangle}{\langle K_j N_j \rangle} \quad (2.67)$$

onde:

$$N_i = C_s \left( \widehat{\bar{\rho}} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i} - \widehat{\bar{\rho} \Delta^2 |\widehat{S}|} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i} \right) \quad (2.68)$$

assumindo-se que o número de Prandtl de sub-malha é constante ao longo dos números de onda compreendidos entre os números de onda de corte do filtro teste e do filtro de malha.

Neste trabalho, para uma dada variável  $\bar{\varphi}_i$  calculada em um nó  $i$  associado ao primeiro filtro, o seu valor no filtro teste  $\hat{\varphi}$  é estimado por (Padilla e Silveira-Neto, 2003):

$$\hat{\varphi}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\bar{\varphi}_j}{d_i^j} \right)}{\sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{d_i^j} \right)} \quad (2.69)$$

onde  $n$  indica o número de nós com conectividades com o nó  $i$ ,  $d_i^j$  a distância Euclidiana entre os nós  $i$  e  $j$ , e  $\bar{\varphi}_j$  o valor da variável associado ao primeiro filtro calculado em cada nó  $j$  que possui conectividade com o nó  $i$ .

### Determinação do Tamanho dos Filtros

Em malhas não-estruturadas e até mesmo em malhas estruturadas, o tamanho e o formato dos elementos não se mantêm constante, portanto, uma definição de tamanho de filtro constante não é aplicável (Deardorff, 1970) (Scotti et al., 1993). Toma-se o tamanho do filtro  $\Delta$  calculado em um nó  $i$  como a raiz quadrada (ou cúbica em três dimensões) da média nodal do valor das áreas  $A_i$  (ou volumes  $V_i$  em três dimensões) dos elementos circundantes a este nó. O filtro de teste  $\hat{\Delta}$  é calculado de forma análoga, mas considerando a área (ou volume) total dos elementos circundantes ao nó considerado (ver Fig. 2.3) (Petry, 2002):

$$\Delta_{2d} = \left( \frac{1}{3} \sum A_i \right)^{1/2} \quad \Delta_{3d} = \left( \frac{1}{4} \sum V_i \right)^{1/3} \quad (2.70)$$

e:

$$\hat{\Delta}_{2d} = \left( \sum A_i \right)^{1/2} \quad \hat{\Delta}_{3d} = \left( \sum V_i \right)^{1/3} \quad (2.71)$$

Este procedimento é equivalente à considerar a matriz de massa discreta para o cálculo do filtro.

### 2.2.6 Forma Final das Equações Fundamentais do escoamento Filtradas

A forma final das equações que descrevem o escoamento compressível com modelagem LES neste trabalho, após as considerações sobre a modelagem das escalas de sub-malha, é dada pela equação da continuidade, de balanço de quantidade de movimento e de balanço

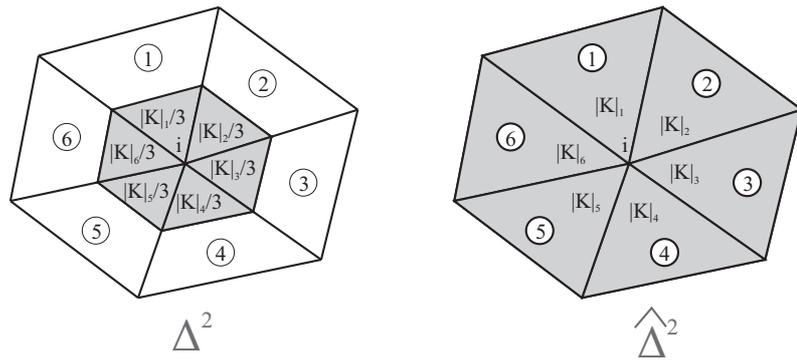


Figura 2.3: Determinação do tamanho dos filtros. Exemplo em duas dimensões.

de energia da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{\partial \mathcal{T}_{ji}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_i) - \frac{\partial \mathcal{Q}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{T}_{ij} \tilde{u}_j) = 0 \quad (2.74)$$

que pode ser escrito na seguinte forma mais compacta:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_i}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (2.75)$$

onde  $\tilde{\Phi}$  contém as variáveis de conservação filtradas,  $\tilde{\mathbf{F}}_i$  contém os termos advectivos filtrados acrescido do gradiente de pressão e  $\tilde{\mathbf{G}}_i$  contém os termos difusivos filtrados e os termos de sub-malha:

$$\tilde{\Phi} = \begin{Bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_j \\ \bar{\rho} \tilde{E} \end{Bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{F}}_i = \begin{Bmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i + \bar{p} \delta_{ji} \\ (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_i \end{Bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{G}}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\mathcal{T}_{ji} \\ -\mathcal{T}_{ij} \tilde{u}_j - \frac{\partial \mathcal{Q}_i}{\partial x_i} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

onde o fluxo total de calor  $\mathcal{Q}_i$  é definido na Eq. (2.36) e as tensões totais  $\mathcal{T}_{ij}$  estão definidas na Eq. (2.34).

## 2.2.7 Condições Iniciais e de Contorno

As condições iniciais que devem ser estabelecidas para se resolver o sistema de Eqs. (2.75) são as seguintes, desprezando-se a notação de filtragem:

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(\mathbf{x}), \quad u_i|_{t=t_0} = u_{i0}(\mathbf{x}), \quad e|_{t=t_0} = e_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.77)$$

em que  $\mathbf{x}$  é a posição e  $\Omega$  representa o domínio. Algumas das condições de contorno possíveis são representadas na Fig. 2.4. O primeiro deles é o contorno de entrada do

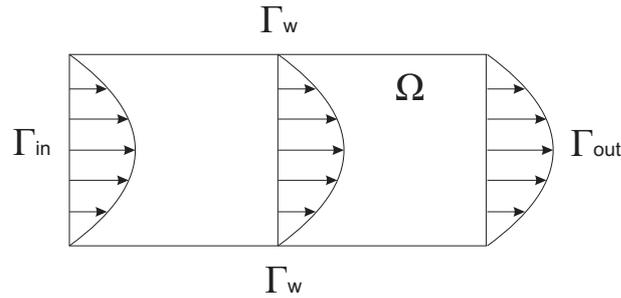


Figura 2.4: Domínio (genérico) e regiões do contorno.

escoamento  $\Gamma_{in} = \{x \in \Omega : u_i n_i < 0\}$  (sendo  $n_i$  a normal externa segundo a direção de  $x_i$ ), onde prescreve-se densidade, energia e velocidades, ou seja:

$$\rho = \rho_{in}, \quad u_i = u_{in}, \quad e = e_{in} \quad \text{em } \Gamma_{in} \quad (2.78)$$

O segundo tipo de contorno de saída do escoamento  $\Gamma_{out} = \{x \in \Omega : u_i n_i > 0\}$ , onde preceve-se a velocidade ou tensões de cisalhamento nulas, portantoo:

$$u_i n_i = u_{out} \quad \text{ou} \quad -p + \tau_{ij} n_i n_j = 0 \quad \text{em } \Gamma_{out} \quad (2.79)$$

sendo que para problemas de escoamentos supersônicos não há necessidade de se prescrever o contorno de saída do escoamento devido ao comportamento hiperbólico das equações fundamentais do escoamento. Há o contorno do tipo parede sólida  $\Gamma_w = \{x \in \Omega : u_i n_i = 0\}$ , onde prescreve-se a condição de não deslizamento conjuntamente com a imposição de uma dada temperatura ou um fluxo de calor prescrito, ou seja:

$$u_i = 0, \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial n_i} = q_w \quad \text{em } \Gamma_w \quad (2.80)$$

sendo que para escoamentos com viscosidade desprezível (equações de Euler), o contorno de parede sólida é tratado de forma distinta, anulando-se apenas a componente da velocidade normal ao contorno. Existe também o contorno do tipo plano de simetria  $\Gamma_{sym} = \{x \in \Omega : u_i n_i = 0\}$ , onde a velocidade normal ao plano de simetria é anulada:

$$u_i n_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_{sym} \quad (2.81)$$

Por último, se o problema envolver contornos sólidos móveis, tem-se o contorno  $\Gamma_m = \{x(t) \in \Omega : u_i n_i = 0\}$ , o qual é altamente não-linear:

$$u_i = 0, \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial n_i} = q_w \quad \text{em } \Gamma_m \quad (2.82)$$

sendo exatamente idêntico ao contorno sólido, com a única diferença de sua posição ser função do tempo. Esta posição variável no tempo pode ser prescrita ou uma incógnita, como em um problema de interação fluido-estrutura. A união de cada uma das partes do contorno fornece o contorno total  $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_{sym} \cup \Gamma_m$ . Com estas condições, o problema fica bem definido. Condições iniciais ou de contorno insuficientes ou incorretas podem levar a soluções errôneas, ou a nenhuma solução. As condições iniciais e os valores prescritos nos contornos utilizados no presente trabalho são as de corrente-livre.

## 2.2.8 Forma Adimensional das Equações de Fundamentais do Escoamento

Embora as equações fundamentais do escoamento apresentadas anteriormente possam ser diretamente utilizadas para solução numérica, resulta mais conveniente utilizá-las de forma adimensionalizada. Entre as vantagens obtidas nesse procedimento, pode-se citar a facilidade do escalonamento das equações para obtenção de resultados em situações reais de escoamentos, o erro de arredondamento devido à manipulação de números em escalas muito distintas é minimizado e, finalmente, permite o acesso direto a termos de fundamental importância para o modelo. Os termos adimensionalizados utilizados são:

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \frac{tu_\infty}{L} & \underline{x}_i &= \frac{x_i}{L} & \underline{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_\infty} & \underline{p} &= \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2} \\ \underline{u}_i &= \frac{u_i}{u_\infty} & \underline{E} &= \frac{E}{u_\infty^2} & \underline{T} &= \frac{TC_p}{u_\infty^2} & \underline{c}^2 &= \frac{c^2}{u_\infty^2} \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde uma linha sob a variável indica que ela está adimensionalizada,  $L$  é o comprimento de referência, o sub-índice  $\infty$  representa uma quantidade de corrente livre e  $c$  é a velocidade do som no meio que, assumindo-se entropia constante, vale:

$$c = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.84)$$

Convém também definir os seguintes números adimensionais:

$$Re_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty} \quad Pr_\infty = \frac{C_p \mu_\infty}{k_\infty} \quad M_\infty = \frac{|u_i|}{c_\infty} \quad (2.85)$$

em que  $Re_\infty$  é o número de Reynolds (relação entre forças de inércia e forças de viscosidade) com relação à corrente-livre,  $Pr_\infty$  é o número de Prandtl (relação entre taxas de difusão viscosa e taxa de difusão térmica) com relação à corrente-livre e  $M_\infty$  é o

número de Mach (relação entre velocidade do fluido e velocidade do som) com relação à corrente-livre. Utilizando-se as variáveis adimensionalizadas nas equações fundamentais, obtém-se a seguinte forma para a equação da balanço de massa filtrada:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \underline{t}} = \frac{1}{\underline{c}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \underline{t}} = - \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \underline{x}_i} \quad (2.86)$$

onde considerou-se o escoamento como isentrópico e  $\tilde{U}_i = \bar{\rho} \tilde{u}_i$ . A equação de balanço de quantidade de movimento fica:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \underline{t}} = - \frac{\partial}{\partial \underline{x}_j} (\tilde{u}_j \tilde{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}_j} \left( \frac{\tilde{\nu}}{Re_\infty} \tilde{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^{sgs} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \underline{x}_i} \quad (2.87)$$

em que  $\tilde{\nu} = \tilde{\mu}/\bar{\rho}$  é a viscosidade cinemática filtrada e:

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\nu}}{\nu_\infty} \quad (2.88)$$

A equação de balanço de energia adimensionalizada é dada por:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial \underline{t}} = - \frac{\partial}{\partial \underline{x}_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}_i} \left( \frac{\tilde{k}}{Re_\infty Pr_\infty} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \underline{x}_i} + \underline{q}_i^{sgs} + \tilde{u}_j \left( \frac{\tilde{\nu}}{Re_\infty} \tilde{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^{sgs} - \bar{p} \right) \right) \quad (2.89)$$

onde os termos  $\tau_{ij}^{sgs}$  e  $\underline{q}_i^{sgs}$  indicam, respectivamente, o tensor de tensões de sub-malha e fluxo de calor turbulento de sub-malha, calculados empregando-se as variáveis adimensionalizadas, e:

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{k}}{k_\infty} \quad (2.90)$$

A equação de estado adimensionalizada resulta:

$$\bar{p} = \bar{\rho} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \tilde{T} \quad (2.91)$$

Por motivo de clareza, as equações na forma original serão mantidas no restante do trabalho.

## 2.3 Solução Numérica das Equações de Fundamentais do Escoamento

A aplicação do Esquema das Linhas ou Direções Características (CBS) sobre as equações de balanço de quantidade de movimento e energia é capaz de proporcionar a separação dos termos advectivos e difusivos. Nesta separação, o operador diferencial de cada uma das equações a serem discretizadas torna-se auto-adjunto, o que otimiza a aplicação de uma técnica variacional ou de resíduos ponderados.

### 2.3.1 O Método das Linhas ou Direções Características (*Characteristic Based Split – CBS*)

Os métodos baseados em linhas características têm sido muito utilizados em diversas áreas da mecânica dos fluidos bem como da mecânica dos sólidos (Zienkiewicz et al., 2011). Para tornar mais claro o entendimento do método, considera-se inicialmente a equação de advecção-difusão para o caso unidimensional na forma não-conservativa:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q = 0 \quad (2.92)$$

onde  $\phi$  é uma variável de conservação. O problema assim definido é não-linear a menos que  $U$  seja independente de  $\phi$ . Entretanto, a forma não-conservativa da equação acima admite variação espacial de  $U$ . Aplica-se então uma mudança da variável independente  $x$  para  $x'$  de forma que:

$$dx' = dx - U dt \quad (2.93)$$

Observando-se que  $\phi = \phi(x', t)$ , tem-se a seguinte derivada:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x=const} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x'=const} = -U \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x'=const} \quad (2.94)$$

a qual pode ser substituída em (2.92), resultando:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right) + Q(x') = 0 \quad (2.95)$$

Uma equação deste tipo possui um operador auto-adjunto e pode ser adequadamente discretizada espacialmente através de um método variacional do tipo Galerkin (Zienkiewicz et al., 2011). O sistema de coordenadas definido pela Eq. (2.93) descreve as linhas ou direções características. Como simples corolário desta mudança de coordenadas tem-se que, na ausência de difusão ( $k = 0$ ) e termos de fonte ( $Q = 0$ ), a Eq. (2.92) torna-se simplesmente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.96)$$

para o caso unidimensional, ou, de outra forma:

$$\phi(x') = \phi(x - Ut) = \text{constante} \quad (2.97)$$

ao longo de uma linha ou direção característica (considerando-se  $U$  constante). Esta é uma típica equação de onda propagando-se com velocidade  $U$  na direção  $x$ , como mostra

a Fig. 2.5. A natureza do comportamento assemelha-se à propagação de uma onda é evidente neste problema, mesmo para o caso em que a difusão não seja nula, onde deve-se obter uma onda que se atenua à medida que se propaga.

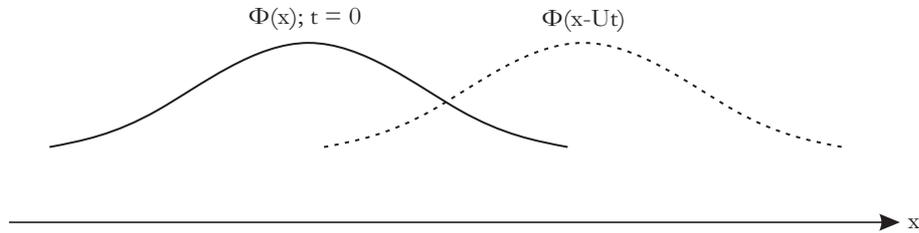


Figura 2.5: Natureza do comportamento em forma de onda.

Nas condições anteriormente estabelecidas, pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$\phi(x')^{n+1} = \phi(x)^n \quad (2.98)$$

em que o super-índice indica tempo, ou seja, a variável propagada ao longo da linha ou direção característica é constante independentemente do tempo no qual a partícula é analisada. Na Fig. 2.6 é mostrada a propagação de linhas características no plano  $x - t$ , em que a velocidade de convecção é constante.

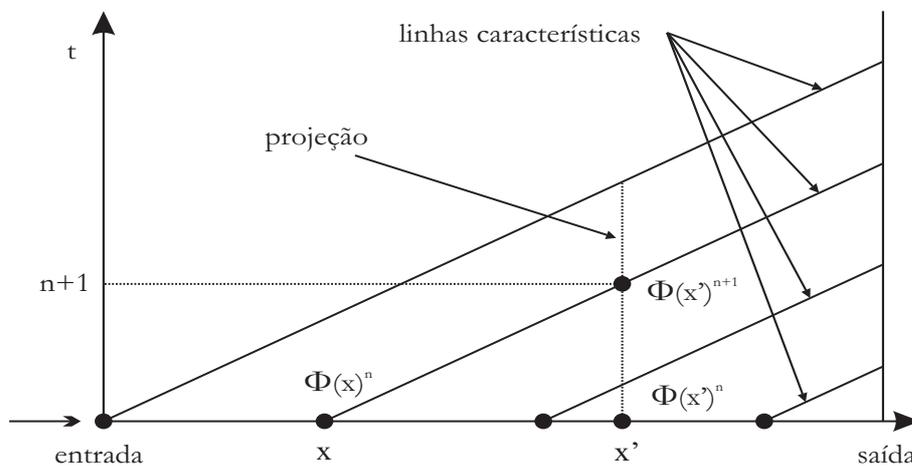


Figura 2.6: Problema de convecção linear. Linhas características.

A partir da equação de advecção escalar unidimensional ao longo da linha característica, dada pela Eq. (2.96), é possível uma discretização no tempo da forma:

$$\frac{\phi(x')^{n+1} - \phi(x)^n}{\Delta t} = 0 \quad (2.99)$$

em que  $\Delta t$  é o passo de tempo. Se  $\phi(x')^{n+1}$  puder ser analiticamente representado em  $x$ , o problema de projeção é evitado. Alternativamente,  $\phi(x)^n$  pode ser expressado em

termos de  $x'$ . É possível integrar a Eq. (2.96) através de um método indireto; entretanto, um método explícito utilizando uma expansão de séries de Taylor para determinar uma relação entre  $\phi(x)^n$  em termos de quantidades em  $x'$  torna o problema significativamente simplificado (Nithiarasu et al., 2006). A seguinte expansão de Taylor é utilizada em um entorno  $(x' - x)$  da distância entre  $\phi(x')^n$  e  $\phi(x)^n$  em um tempo  $n$ :

$$\phi(x)^n = \phi(x')^n - (x' - x) \frac{\partial \phi(x')^n}{\partial x} + \frac{(x' - x)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(x')^n}{\partial x^2} - \frac{(x' - x)^3}{6} \frac{\partial^3 \phi(x')^n}{\partial x^3} + \dots \quad (2.100)$$

Na expressão acima, a distância  $(x' - x)$  pode ser expressada em termos do passo de tempo e da velocidade média  $\bar{u}$  ao longo da linha ou direção característica, na forma:

$$x' - x = \bar{u} \Delta t \quad (2.101)$$

A Eq. (2.100) pode ser substituída na Eq. (2.99), que, juntamente com a Eq. (2.101), resulta na seguinte expressão:

$$\frac{\phi(x')^{n+1} - \phi(x')^n}{\Delta t} = -\bar{u} \frac{\partial \phi(x')^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \bar{u}^2 \frac{\partial^2 \phi(x')^n}{\partial x^2} - \frac{\Delta t^2}{6} \bar{u}^3 \frac{\partial^3 \phi(x')^n}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (2.102)$$

Embora deduzida para o caso de advecção linear, a Eq. (2.102) pode ser estendida ao caso não-linear ao se considerar a seguinte aproximação para  $u\phi(x)$ :

$$u\phi(x)^n = u\phi(x')^n - (x' - x) \frac{\partial}{\partial x} (u\phi(x'))^n + \frac{(x' - x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u\phi(x'))^n - \dots \quad (2.103)$$

Considerando-se a aproximação  $\Delta t = (x' - x)/u$  e substituindo-a na Eq. (2.99) conjuntamente da Eq. (2.103), obtém-se:

$$\frac{\phi(x')^{n+1} - \phi(x')^n}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial x} (u\phi(x'))^n + \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\phi(x')) \right]^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.104)$$

A equação acima é a forma conservativa do método CBS explícito para um problema de advecção escalar. Para um problema de advecção-difusão, o método CBS, sem termos de alta ordem, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x')^{n+1} - \phi(x')^n}{\Delta t} = & -\frac{\partial}{\partial x} (u\phi(x'))^n + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} (x') \right)^n \\ & + \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\phi(x')) - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} (x') \right) \right]^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (2.105)$$

Os termos de ordem maior ou igual a 3 na equação acima podem ser negligenciados para elementos com função de interpolação lineares, entretanto, para elementos de ordem superior devem ser incluídos. Isto se deve ao fato de que, embora ao se considerar

mais termos a equação torna-se de ordem maior no tempo, as derivadas espaciais não acompanham esta discretização (Zienkiewicz et al., 2011). Para problemas não escalares, há uma diferença fundamental devido ao fato de que a variável incluída nos termos de convecção não necessariamente se torna uma variável característica e a velocidade na qual ocorre essa convecção não necessariamente é a velocidade característica. A próxima seção trata do método CBS aplicado às equações de balanço de massa, quantidade de movimento e energia.

### 2.3.2 Método CBS Aplicado à Mecânica de Fluidos

Para a utilização do método CBS nas equações fundamentais do escoamento, aplica-se uma separação dos termos advectivos e difusivos. Considera-se inicialmente a equação da continuidade conjuntamente à equação de balanço de quantidade de movimento a serem resolvidas para as variáveis  $u_i$  e  $p$ . Com exceção do termo de pressão, esta equação é similar à equação de advecção-difusão. Este termo pode, contudo, ser tratado como uma quantidade conhecida (do tipo fonte), fornecendo uma forma independente de se calcular a pressão (Zienkiewicz et al., 2011). O objetivo aqui é que esta separação proposta forneça uma forma de se calcular uma solução  $(U_i^{n+1}, p^{n+1})$  no tempo  $t^{n+1}$  a partir dos valores  $(U_i^n, p^n)$  no tempo  $t^n$ . Assume-se que o incremento de tempo é  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . O incremento de fluxo de massa é então dividido em duas parcelas (Zienkiewicz et al., 2011):

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta U_i^* + \Delta U_i^{**} \quad (2.106)$$

Discretiza-se no tempo também a aproximação para o intervalo  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ :

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{\Delta U_i^*}{\Delta t} + \frac{\Delta U_i^{**}}{\Delta t} \quad (2.107)$$

Utilizando-se a Eq. (2.105), estendendo-a ao caso multidimensional através da substituição de  $u$  por  $u_j$ ,  $u\phi$  por  $u_j U_i + p$  e o termo difusivo por  $\mathcal{T}_{ij}$ , obtém-se a seguinte aproximação para a equação de balanço de quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} - U_i^n = & \Delta t \left[ -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} \right]^n - \Delta t \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) - \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (2.108)$$

e também tem-se que o incremento de pressão fica definido por:

$$\Delta p = p^{n+1} - p^n \quad (2.109)$$

Utilizando-se as variáveis auxiliares  $\Delta U_i^*$  e  $\Delta U_i^{**}$ , divide-se a Eq. (2.108) em duas parcelas. Neste ponto há pelo menos duas alternativas. A primeira consiste em eliminar a pressão do cálculo inicial para ser posteriormente introduzida. A segunda alternativa consiste em omitir apenas o cálculo do gradiente de pressão no cálculo inicial, o qual é re-introduzido novamente em outro passo de tempo (Zienkiewicz et al., 2011). Utiliza-se a segunda alternativa mencionada no presente trabalho, com a omissão do gradiente de pressão no começo do primeiro passo de tempo. Para a solução das equações fundamentais do escoamento, o método CBS pode ser resumido nos 4 passos seguintes (Zienkiewicz et al., 2011):

1. Resolver as equações de balanço de quantidade de movimento omitindo-se o primeiro termo do gradiente de pressão no início do passo para calcular  $\Delta U_i^*$ ;
2. Calcular o incremento de massa  $\Delta \rho$  ou de pressão  $\Delta p$ ;
3. Calcular a correção das velocidades  $\Delta U_i^{**}$  para finalmente calcular o valor de  $U_i$  em  $t^{n+1}$ ;
4. Calcular variáveis escalares adicionais como temperatura e massa específica através da equação de balanço de energia.

Para o passo 1, tem-se a seguinte equação a ser resolvida (desprezando-se os termos de alta ordem):

$$\Delta U_i^* = \Delta t \left[ -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right]^n \quad (2.110)$$

No passo 2, calcula-se o incremento de massa ou de pressão emprega-se a Eq. (2.86):

$$\Delta \rho = \left( \frac{1}{c^2} \right)^n \Delta p = -\Delta t \frac{\partial U_i^{n+\theta_1}}{\partial x_i} = -\Delta t \left[ \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} \right] \quad (2.111)$$

onde empregou-se a relação  $U_i^{n+\theta_1} \equiv \theta_1 U_i^{n+1} + (1-\theta_1) U_i^n = U_i^n + \theta_1 \Delta U_i^*$ , com  $1/2 \leq \theta_1 \leq 1$  e a velocidade do som local é dada pela Eq. (2.84). Utilizando-se a Eq. (2.106), a equação anterior pode ser escrita da forma:

$$\Delta \rho = \left( \frac{1}{c^2} \right)^n \Delta p = -\Delta t \left[ \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t \theta_1 \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i^2} \right] \quad (2.112)$$

Conhecido o incremento de massa ou de pressão, calcula-se a correção das velocidades no passo 3, que corresponde ao termo de gradiente de pressão removido no cálculo inicial:

$$\Delta U_i^{**} = -\Delta t \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (2.113)$$

Finalmente, calcula-se  $U_i$  em  $t^{n+1}$ . Resta apenas o passo 4 para atualização das variáveis escalares, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho E)^{n+1} - (\rho E)^n}{\Delta t} = & -\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i \rho E)^n + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{Q}_i)^n - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i p)^n + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{T}_{ij} u_j)^n \\ & + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i \rho E) - \frac{\partial \mathcal{Q}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i p) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{T}_{ij} u_j) \right]^n \end{aligned} \quad (2.114)$$

O método CBS é empregado neste trabalho utilizando-se o parâmetro  $\theta_1 = 1/2$ , consistindo em um método explícito com precisão de segunda ordem no tempo e no espaço com relação às velocidades (esquema de Crank-Nicolson). Desta forma, tem-se que o método proporciona um operador que é auto-adjunto nas variáveis  $\Delta p$  (ou  $\Delta \rho$ ) para uma discretização espacial do tipo Galerkin e, portanto, tal discretização é empregada de forma otimizada. É importante observar que a seqüência de passos utilizada no algoritmo CBS promove uma forma eficiente de se revolver as equações fundamentais do escoamento com adequada estabilização dos termos de convecção. Como resultante, o método é adequado para resolver problemas de escoamentos em ampla faixa de velocidades, desde problemas subsônicos, transônicos, supersônicos e até hipersônicos. A forma conservativa empregada na formulação garante que as ondas de choque serão posicionadas corretamente e que a solução encontrada (se houver) será única (Zienkiewicz et al., 2011). Observa-se que mesmo em problemas de escoamentos supersônicos, existem regiões de estagnação onde, de fato, não há grande compressibilidade. Este tipo de região causa grandes oscilações e instabilidades numéricas em outros métodos, como por exemplo o de Taylor-Galerkin, gerando também perda de velocidade de convergência em problemas de escoamentos compressíveis de baixas velocidades. Cabe ressaltar também que para malhas convencionais é necessário algum tipo de amortecimento numérico na região próxima aos choques por razões de estabilidade numérica. Este tópico é discutido detalhadamente na Seção 2.3.4.

### 2.3.3 Discretização Espacial

As equações resultantes são solucionadas empregando-se um procedimento de Elementos Finitos do tipo Galerkin padrão na qual o domínio computacional é discretizado em uma malha de elementos finitos. Utiliza-se neste trabalho apenas elementos triangulares e tetraédricos lineares para problema bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. A discretização espacial das variáveis utiliza as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} U_i &= \mathbf{N}_u \underline{\mathbf{U}}_i, & \Delta U_i &= \mathbf{N}_u \Delta \underline{\mathbf{U}}_i, & \Delta U_i^* &= \mathbf{N}_u \Delta \underline{\mathbf{U}}_i^*, & \Delta U_i^{**} &= \mathbf{N}_u \Delta \underline{\mathbf{U}}_i^{**}, \\ u_i &= \mathbf{N}_u \underline{\mathbf{u}}_i, & p &= \mathbf{N}_p \underline{\mathbf{p}}, & \rho &= \mathbf{N}_\rho \underline{\rho} \end{aligned} \quad (2.115)$$

onde o símbolo  $\sim$  abaixo da variável indica uma quantidade nodal, sendo  $\mathbf{N}_i$  as funções de interpolação tal que:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{U}}_i &= [U_i^1, U_i^2, \dots, U_i^a, \dots, U_i^m]^T, & i &= 1, 2, 3 \\ \mathbf{N}_j &= [N_j^1, N_j^2, \dots, N_j^a, \dots, N_j^m] & j &= u_i, p, \rho \end{aligned} \quad (2.116)$$

em que  $a$  é o nó (ou variável), o qual varia de 1 até  $m$ . As equações obtidas para o método CBS aplicado às equações fundamentais do escoamento são agora ponderadas por  $\mathbf{N}^T$  e integradas sobre o domínio. Empregando-se as expressões dadas pela Eq. (2.115) nas equações a serem resolvidas em cada um dos 4 passos e integrando-se por partes, obtém-se a discretização final utilizada, sendo ela a seguinte:

- Passo 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \underline{\mathbf{U}}_i^* &= \Delta t \left[ (\mathbf{C} - \mathbf{S}) \left( \underline{\mathbf{u}}_j \underline{\mathbf{U}}_i \right) - (\mathbf{K}_\tau - \mathbf{T}_\tau) \mathcal{T}_{ij} \right]^n \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \underline{\mathbf{u}}_k \left[ (\mathbf{K}_u - \mathbf{T}_u) \left( \underline{\mathbf{u}}_j \underline{\mathbf{U}}_i \right) + (\mathbf{K}_p - \mathbf{T}_p) \underline{\mathbf{p}} \right]^n \end{aligned} \quad (2.117)$$

- Passo 2:

$$\mathbf{M} \Delta \underline{\rho} = \Delta t \left[ (\mathbf{D} - \mathbf{R}_u) \left( \underline{\mathbf{U}}_i + \theta_1 \Delta \underline{\mathbf{U}}_i^* \right) - \Delta t \theta_1 \mathbf{K}_p \right]^n \quad (2.118)$$

- Passo 3:

$$\mathbf{M} \underline{\mathbf{U}}_i = \mathbf{M} \Delta \underline{\mathbf{U}}_i^* + \Delta t \left[ (\mathbf{D} - \mathbf{R}_u) \underline{\mathbf{p}} \right]^n \quad (2.119)$$

- Passo 4:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \underline{\rho} \underline{\mathbf{E}} &= \Delta t \left[ (\mathbf{C} - \mathbf{S}) \underline{\mathbf{u}}_j \left( \underline{\rho} \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{p}} \right) - (\mathbf{T}_\tau - \mathbf{K}_\tau) \left( \mathcal{Q}_i + \mathcal{T}_{ij} \underline{\mathbf{u}}_j \right) \right]^n \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \underline{\mathbf{u}}_k (\mathbf{K}_u - \mathbf{T}_u) \underline{\mathbf{u}}_j \left( \underline{\rho} \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{p}} \right) \right]^n \end{aligned} \quad (2.120)$$

onde as matrizes e vetores que foram introduzidos são dadas pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad \mathbf{R}_u = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} n_i d\Omega \quad \mathbf{S} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} n_j d\Gamma \quad (2.121a)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mathbf{N} d\Omega \quad \mathbf{D} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} d\Omega \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \quad (2.121b)$$

$$\mathbf{K}_\tau = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} d\Omega \quad \mathbf{K}_u = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \quad \mathbf{K}_p = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \quad (2.121c)$$

$$\mathbf{T}_\tau = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T n_j d\Gamma \quad \mathbf{T}_u = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} n_k d\Gamma \quad \mathbf{T}_p = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} n_k d\Gamma \quad (2.121d)$$

onde os termos referentes à equação de balanço de energia e ao gradiente da temperatura no passo 4 são calculados aproximadamente em nível de elemento, utilizando-se as funções de forma para tal.

### 2.3.4 Difusão Artificial

Em problemas transônicos, supersônicos e de velocidades mais altas, o escoamento apresenta um efeito distinto ao dos escoamentos subsônicos e escoamentos incompressíveis com a formação de ondas de choques em certas regiões do domínio. Claramente, utilizando-se aproximações de elementos finitos nas quais todas as variáveis são interpoladas utilizando-se continuidade  $C_0$  não é possível a exata reprodução de choques. Em tal aproximação, os choques são representados simplesmente como regiões de alto gradiente. A situação ideal é obtida se esta alta variação for confinada a uma região onde realmente ocorre a formação do choque. Infelizmente, esta aproximação da descontinuidade introduz oscilações locais as quais podem persistir por uma área considerável do domínio. Por esta razão, introduz-se na análise de elementos finitos viscosidades adicionais as quais ajudam a amortecer as oscilações causadas pelos choques no intuito de tentar reproduzir a descontinuidade o melhor possível. Adota-se neste trabalho a seguinte metodologia baseada nas derivadas de segunda ordem da pressão para corrigir as variáveis de conservação  $\tilde{\Phi}^{n+1}$  calculadas no tempo  $n + 1$ , substituindo-as por  $\tilde{\Phi}_s^{n+1}$  através de (Nithiarasu et al., 1998):

$$\tilde{\Phi}_s^{n+1} = \tilde{\Phi}^{n+1} - \Delta t \mathbf{M}_L^{-1} C_e h^3 \frac{|\mathbf{u}| + c}{p} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} \right|_e^n \left( \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \right) \tilde{\Phi}^n \quad (2.122)$$

em que  $h$  é o tamanho característico,  $\mathbf{M}_L$  é a matriz  $\mathbf{M}$  diagonalizada, o subíndice  $e$  indica um elemento e  $0 < C_e < 1$  é uma constante. Observa-se que a metodologia

apresenta características importantes que devem estar presentes em qualquer tipo de difusão artificial: ao passo que o tamanho do elemento ou o gradiente de pressão tende a zero, a difusão artificial também deve tender a zero.

### 2.3.5 Incremento de Tempo

O método explícito é condicionalmente estável e, portanto, é importante adotar-se um passo de tempo que seja inferior ou no máximo igual ao passo de tempo crítico. Para isto, o incremento de tempo  $\Delta t$  é escolhido como o valor mínimo dentre o incremento de tempo convectivo  $\Delta t_c$  e o difusivo  $\Delta t_d$ :

$$\Delta t = \min(\Delta t_c, \Delta t_d) \theta_c \quad (2.123)$$

onde:

$$\Delta t_c = \frac{h}{c + |\mathbf{u}|} \quad e \quad \Delta t_d = \frac{h^2}{2\nu} \quad (2.124)$$

em que o termo  $h$  é uma dimensão característica do elemento. O passo de tempo é também ponderado por um escalar  $\theta_c$ , que corresponde ao número de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), o qual tem um papel de coeficiente de segurança neste caso (adotado entre 0 e 1, dependendo do problema e da malha empregada). A condição de Courant–Friedrichs–Lewy implica um limite de passo de tempo máximo no qual a física do problema não é violada. A dimensão característica  $h_i$  de um dado nó  $i$  é usualmente calculada como o valor mínimo do comprimento existente entre o nó em questão e os bordos dos elementos adjacentes que compartilham este nó (Fig. 2.7a). Para o caso bidimensional tem-se:

$$h_i = \min(2A/\hat{L})_{ie} \quad (2.125)$$

onde o valor mínimo é selecionado entre o número de elementos  $ie$  conectados ao nó  $i$ ,  $A$  é a área do elemento e  $\hat{L}$  indica o comprimento da aresta oposta ao nó  $i$  no elemento. Porém, tem-se que esta metodologia não é necessariamente eficiente pois o comprimento característico deve levar em consideração a direção do escoamento na malha. Para tal, emprega-se neste trabalho o cálculo de  $h_i$  na direção das linhas de correntes (Fig. 2.7b) (Thomas e Nithiarasu, 2004):

$$h_i = \min\left(\frac{d}{\sum_{j=1}^d |\mathbf{s}_j \nabla \mathbf{N}_j|}\right)_{ie} \quad (2.126)$$

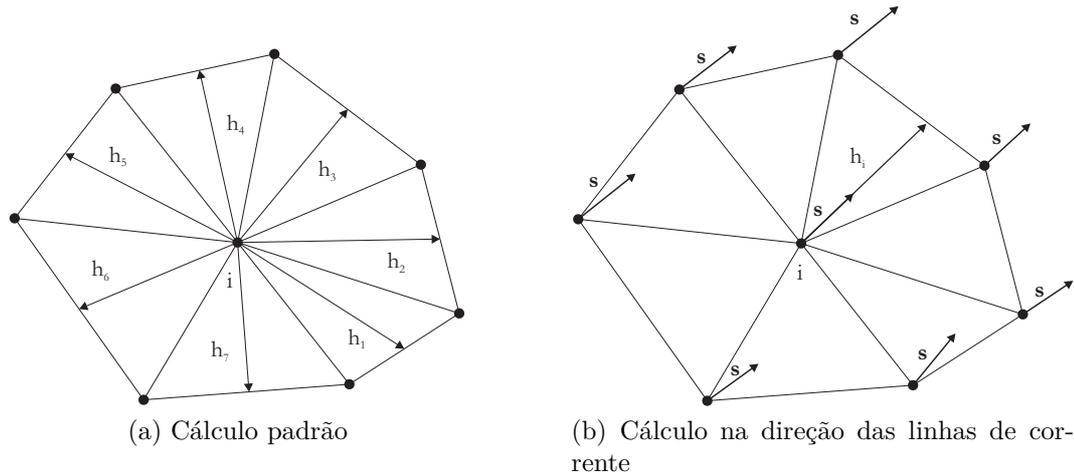


Figura 2.7: Determinação do comprimento característico.

onde  $\mathbf{s}_j$  é o vetor unitário na direção das linhas de corrente,  $\mathbf{N}_j$  é a função de forma calculada em cada nó  $j$  de um elemento  $ie$  conectado ao nó  $i$  e  $d$  indica o número de dimensões do problema.

### 2.3.6 Simulações Transientes

Para simular problemas transientes, a matriz de massa  $\mathbf{M}$  é utilizada na forma completa e calcula-se iterativamente as variáveis da seguinte forma (Löhner, 2008):

$$\Phi_{i+1} = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{r}_n + \mathbf{M}_L^{-1} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \Phi_i \quad (2.127)$$

onde obtém-se o termo  $\mathbf{r}_n$  que representa o lado direito da igualdade das equações dos passos do método CBS iterada  $n$  vezes. Tipicamente,  $n = 3$  é suficiente e aplica-se o método nas simulações transientes (Löhner, 2008).

### 2.3.7 Simulações Permanentes

Alguns exemplos de aplicação neste trabalho empregam simulações permanentes. Para tais casos, os 4 passos do algoritmo CBS são realizados utilizando-se a matriz de massa  $\mathbf{M}$  na sua forma discreta (diagonalizada),  $\mathbf{M}_L$ , e o algoritmo é executado até a convergência, a qual deve atender à tolerância do resíduo objetivado  $R_T$ , dada por:

$$R_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nmos} (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n)^2}{\sum_{i=1}^{nmos} (\rho_i^{n+1})^2}} \quad (2.128)$$

onde  $n_{nos}$  indica o número de nós da malha e  $\rho_i$  é a massa específica do nó  $i$ . A tolerância adimensional é reduzida até um valor mínimo de  $10^{-6}$  para que se obtenha um estado permanente do escoamento.

---

## Capítulo 3

# Adaptação Anisotrópica de Malhas com Contornos Móveis

Emprega-se uma abordagem baseada em métrica Riemanniana para estimar o erro e adaptar a malha de forma anisotrópica neste trabalho. Através do emprego de uma métrica Riemanniana pode-se estimar o erro como uma quantidade tensorial e, portanto, torna-se possível determinar o erro de forma direcional com um fundamento matemático bem estabelecido. A adaptação de malhas não-estruturadas consiste em etapas de refinamento, desrefinamento, alternância de arestas e faces e suavização nodal. É proposta uma metodologia baseada em arestas que leva em consideração a anisotropia dos campos de solução para estes procedimentos. Tais considerações envolvem o particionamento de arestas através de seu centro Riemanniano ao invés do Euclidiano, o colapso de arestas considerando-se a noção de qualidade de elementos estimada em uma métrica Riemanniana bem como a suavização dos nós movendo-os na direção das arestas. Estas técnicas se mostram capazes de produzir malhas altamente distorcidas na direção dos campos de solução.

A consideração dos efeitos multi-escalas dos escoamentos turbulentos é feita empregando-se uma medida de erro em uma norma  $\mathbf{L}^p$ , constituindo-se de uma integração de Lebesgue em um espaço de Sobolev. Isto significa que o erro não é medido como uma diferença apenas de valores de funções, mas uma medida que incorpora as derivadas das funções. A avaliação do erro também é estendida à problemas multi-dimensionais através de considerações de interseção de métricas Riemannianas.

---

A consideração de contornos móveis no domínio do problema é realizada através do emprego de uma lei de movimento de malhas que utiliza funções de base radial. Esta técnica permite obter um campo de deslocamentos contínuo ao longo de toda malha. A mesma técnica de interpolação é empregada para transferir soluções entre malhas distintas que surgem nos problemas de interação fluido-estrutura.

Neste capítulo, apresenta-se uma pequena descrição dos temas relacionados a estimativas de métrica, do procedimento de avaliação das matrizes Hessianas, conceitos topológicos e geométricos utilizados, os procedimentos de refinamento, desrefinamento, alternância de arestas e faces, suavização de malha, interpolação de base radial e, por fim, a metodologia empregada para adaptação de malhas.

### 3.1 Topologia da Malha

Por generalidade, um elemento de malha é descrito como um simplex neste trabalho. Denomina-se  $k$ -simplex ( $0 \leq k \leq d$ ) o envólucro convexo de  $k + 1$  pontos independentes em  $\mathbb{R}^d$  denominados vértices. Geometricamente, um  $0$ -simplex é um ponto, um  $1$ -simplex é um segmento de reta, um  $2$ -simplex é um triângulo, um  $3$ -simplex é um tetraedro e assim por diante. O conjunto dos  $k + 1$  vértices  $v$  de um dado  $k$ -simplex  $K$  é definido como  $V_K$  (Gruau, 2004):

$$V_K = \{v_0, \dots, v_k\} \quad (3.1)$$

O conjunto dos  $3k - 3$  vetores aresta  $a$  de um dado  $k$ -simplex  $K$  é definido como  $A_K$ :

$$A_K = \{a_0, \dots, a_{3k-4}\} \quad k > 1 \quad (3.2)$$

A medida  $|K|$  de um dado  $k$ -simplex  $K$  (área ou volume orientado) é dada por:

$$|K| = \frac{\det \begin{pmatrix} v_1 - v_0 & v_2 - v_0 & \dots & v_{k-1} - v_0 & v_k - v_0 \end{pmatrix}}{k!} \quad (3.3)$$

e um  $k$ -simplex  $K$  é dito não-degenerado se e somente se:

$$|K| > 0 \quad (3.4)$$

Dado um conjunto finito  $\mathcal{N}$  de pontos (chamados nós) pertencentes a um domínio  $\Omega$  e um conjunto  $\mathcal{T}$  de  $k$ -simplexes não-degenerados (chamados elementos) cujos vértices

pertencem a  $\mathcal{N}$ , o procedimento de adaptação deve modificar a malha  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$  garantindo que a topologia da mesma não seja violada em nenhuma parte ao longo deste processo.

## 3.2 Estimativas de Métrica

Os conceitos fundamentais dos quais faz uso a adaptação baseada em métrica são brevemente descritas nesta seção. Um estudo completo sobre geometria diferencial é encontrado em [Carmo \(1976\)](#). Adota-se a notação de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{x}$  para vetores ou pontos em  $\mathbb{R}^d$ . As coordenadas vetoriais são denotadas por  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  e o produto escalar entre dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^d$  por  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .

### 3.2.1 Espaço Métrico Euclidiano

Um espaço métrico Euclidiano  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M})$  é um espaço vetorial finito onde o produto escalar é definido através de uma matriz simétrica positiva-definida  $\mathcal{M}$ :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{M}} = \mathbf{u}^T \mathcal{M} \mathbf{v} \quad \text{para } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \quad (3.5)$$

onde  $\mathcal{M}$  é uma matriz  $d \times d$  a qual verifica as seguintes propriedades:

1. (simétrica):  $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{M}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{M}}$
2. (positiva):  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{M}} \geq 0$
3. (definida):  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{M}} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Estas propriedades garantem que  $\mathcal{M}$  defina um produto escalar. A matriz  $\mathcal{M}$  é também chamada de tensor métrico ou simplesmente métrica. O caso mais comumente utilizado de espaço métrico Euclidiano é o definido pela métrica igual à matriz identidade  $\mathcal{M} = \mathbf{I}_d$ , o qual expande o espaço Euclidiano canônico em  $\mathbb{R}^d$ .

O produto escalar definido através de  $\mathcal{M}$  torna  $\mathbb{R}^d$  um espaço vetorial normado  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$  e um espaço métrico vetorial  $(\mathbb{R}^d, d_{\mathcal{M}}(\cdot, \cdot))$  auxiliado pela seguinte definição de norma e distância, respectivamente:

- $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{M}}}$
- $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad d_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{M}}$

No espaço Euclidiano, o comprimento  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab})$  de um segmento de reta  $\mathbf{ab}$  é dado pela distância entre suas extremidades:  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) = d_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Para um espaço Riemanniano, há uma dissociação entre os conceitos de comprimento e distância.

### 3.2.2 Espaço Métrico Riemanniano

Em um espaço métrico Riemanniano, a métrica varia continuamente em todo o domínio  $\Omega$ . Denota-se este espaço por  $\mathbf{M} = (\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ . Em um espaço métrico Riemanniano, calcular o comprimento de um segmento de reta difere de calcular a distância entre as extremidades de seu segmento. De fato, a linha reta neste espaço deixa de ser o menor caminho entre dois pontos, o qual é dado por uma curva geodésica (uma curva que acompanha a curvatura do espaço). Portanto, o cálculo de quantidades geométricas no espaço Riemanniano requer um procedimento de integração para levar em consideração a variação da métrica. O comprimento de uma aresta  $\mathbf{ab}$ ,  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab})$ , é calculado através de integração utilizando-se uma parametrização do tipo  $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{ab}$  onde  $t \in [0, 1]$ , e vem dada por (Vallet, 1992):

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\mathcal{M}} dt = \int_0^1 \sqrt{\mathbf{ab}^T \mathcal{M}(\mathbf{a} + t\mathbf{ab}) \mathbf{ab}} dt \quad (3.6)$$

enquanto o volume ou área orientada  $|K|_{\mathcal{M}}$  de um dado simplex  $K$  vem dado por:

$$|K|_{\mathcal{M}} = \int_K \sqrt{\det \mathcal{M}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (3.7)$$

A Fig. 3.1 mostra as curvas de isovalores de segmentos de mesmo comprimento até a origem (centro) para diferentes espaços métricos Riemannianos. A função plotada é  $f(\mathbf{x}) = \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ox})$  onde  $\mathbf{o}$  é a origem do plano. Os isovalores são isotrópicos para o caso de um espaço Euclidiano definido por  $\mathbf{I}_2$ . Eles são anisotrópicos no caso de um espaço métrico Euclidiano definido por  $\mathcal{M}$ , apresentando duas direções principais bem definidas. No caso de um espaço métrico Riemanniano  $\mathbf{M}$ , todas as simetrias são perdidas (Loseille, 2008).

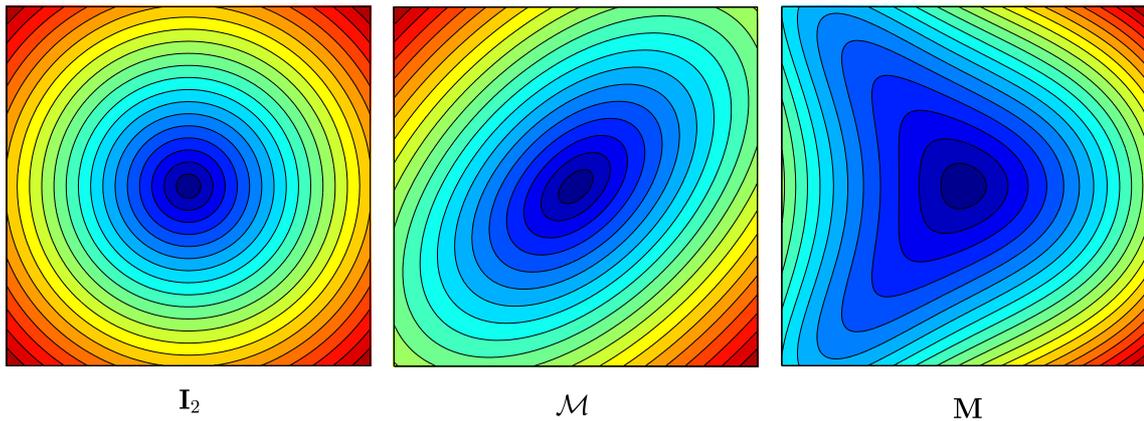


Figura 3.1: Isovalores da função  $f(\mathbf{x}) = \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{o}\mathbf{x})$ , onde  $\mathbf{o}$  é a origem do plano (centro), para diferentes espaços métricos Riemannianos. Na esquerda, o espaço Euclidiano canônico  $([-1,1] \times [-1,1], \mathbf{I}_2)$ . No centro, o espaço métrico Euclidiano  $([-1,1] \times [-1,1], \mathcal{M})$  com  $\mathcal{M}$  constante. À direita, um espaço métrico Riemanniano  $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in [-1,1]^2}$  com um tensor métrico variável.

A idéia central de uma adaptação de malhas guiada pela utilização de métricas é de construir uma malha na qual as arestas possuam comprimento tão mais próximo da unidade quanto possível no espaço métrico Riemanniano prescrito. Quanto mais próximo da unidade, mais bem distribuído encontra-se o erro ao longo da malha. A qualidade de um elemento (simplex  $K$ ) pode ser monitorada através de uma função de qualidade  $Q_{\mathcal{M}}$ , a qual combina informações tanto de comprimento quanto de orientação (Claisse et al., 2009):

$$Q_{\mathcal{M}}(K) = \frac{\sum \ell_{\mathcal{M}}^2(A_K)}{|K|_{\mathcal{M}}^{2/d}} \quad (3.8)$$

Na equação anteriormente definida, o numerador leva em consideração o comprimento. Diminuindo-se o comprimento das arestas calculadas no espaço Riemanniano tem-se a diminuição do valor de  $Q_{\mathcal{M}}$ . O denominador é uma medida da orientação do elemento no espaço Riemanniano, onde um elemento orientado mais próximo dos auto-vetores da métrica da solução local produz uma redução de  $Q_{\mathcal{M}}$ . Portanto, minimizando-se  $Q_{\mathcal{M}}$  a qualidade do elemento torna-se maximizada em um contexto anisotrópico.

Do ponto de vista discreto, a métrica deve ser interpolada para que se possa calcular o comprimento das arestas e o volume ou área orientada no espaço métrico Riemanniano. Considerando-se uma interpolação linear do tensor métrico, a integração definida na Eq. (3.6) pode ser aproximada por (Habashi et al., 2000):

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) \approx \frac{2 \ell_0^2 + \ell_0 \ell_1 + \ell_1^2}{3 \ell_0 + \ell_1} \quad (3.9)$$

onde  $\ell_i(\mathbf{ab}) = \sqrt{\mathbf{ab}^T \mathcal{M}(\mathbf{x}_i) \mathbf{ab}}$  é o comprimento da aresta calculado na métrica  $\mathcal{M}(\mathbf{x}_i)$  com  $i = 0, 1$  para uma aresta com extremidades  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente. De forma similar, a integral da Eq. (3.7) pode ser aproximada numericamente através de (Habashi et al., 2000):

$$|K|_{\mathcal{M}} \approx \sqrt{\det \left( \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathcal{M}_i(\mathbf{x}) \right)} |K| \quad (3.10)$$

onde  $\mathcal{M}_i(\mathbf{x})$  representa a métrica em cada um dos  $i$  vértices do  $k$ -simplex  $K$  com área ou volume orientado  $|K|$  no espaço Euclidiano.

### 3.2.3 Interpretação Geométrica

Existem diferentes formas de se interpretar uma métrica. A partir das propriedades que a matriz  $\mathcal{M}$  apresenta (simétrica, positiva-definida), pode-se reescrever  $\mathcal{M}$  através de uma decomposição espectral:

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \mathbf{\Lambda} \mathcal{R}^T \quad (3.11)$$

onde  $\mathcal{R}$  é uma matriz ortonormal a qual satisfaz  $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathbf{I}_d$ . A matriz  $\mathcal{R}$  é composta pelo auto-vetores associados à  $\mathcal{M}$  e  $\mathbf{\Lambda}$  é uma matriz diagonal composta pelos auto-valores associados à  $\mathcal{M}$ . Por ser positiva-definida, os auto-valores  $(\lambda_i)_{i=1,d}$  são estritamente positivos e diferentes de zero. A interpretação geométrica do tensor métrico é feita através de uma região na vizinhança  $\mathcal{V}(\mathbf{a})$  de um ponto  $\mathbf{a}$ . Este conjunto de pontos, os quais estão a uma distância  $\varepsilon$  de  $\mathbf{a}$ , são dados por:

$$\Psi_{\mathcal{M}}(\varepsilon) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) : (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathcal{M}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq \varepsilon^2 \right\} \quad (3.12)$$

É suficiente descrever apenas a região  $\Psi_{\mathcal{M}}(1)$  uma vez que a região  $\Psi_{\mathcal{M}}(\varepsilon)$  pode ser deduzida para todo  $\varepsilon$  por homogeneidade. Assumindo-se que a forma quadrática inicial  $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathcal{M}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  torna-se  $(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{a}})^T \mathbf{\Lambda}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{a}})$  através da decomposição espectral, então  $\Psi_{\mathcal{M}}(1)$  é reescrito nesta base da seguinte forma (Loseille e Alauzet, 2011):

$$\Psi_{\mathcal{M}}(1) = \left\{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\tilde{\mathbf{a}}) : \sum_{i=1}^d \left( \frac{\tilde{x}_i - \tilde{a}_i}{h_i} \right)^2 \leq 1 \right\} \quad (3.13)$$

A última relação define um elipsóide centrado em  $\mathbf{a}$  com seus eixos alinhados segundo as direções principais de  $\mathcal{M}$  para o caso tridimensional ( $d = 3$ ). Os comprimentos segundo essas direções são dados por  $h_i = \lambda_i^{-\frac{1}{2}}$ . Denota-se por  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  este elipsóide. A Fig. 3.2

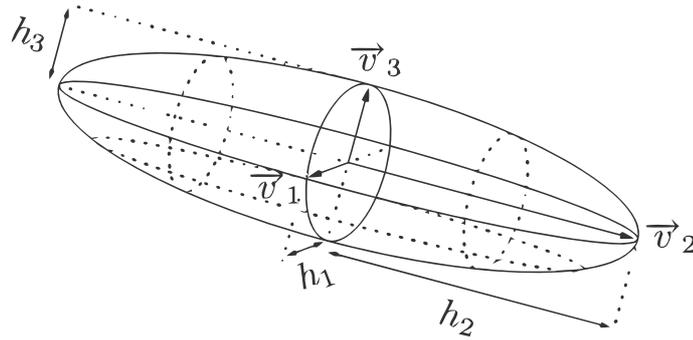


Figura 3.2: Interpretação geométrica de  $\Psi_{\mathcal{M}}(1)$ :  $\vec{v}_i$  são os auto-vetores de  $\mathcal{M}$  e  $h_i^{-2}$  são os auto-valores de  $\mathcal{M}$ .

representa  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ . Quando a métrica Riemanniana é constante e igual à matriz identidade, isto é,  $\mathcal{M} = \mathbf{I}_d$ , então o elipsóide torna-se uma esfera para  $d = 3$  e um círculo para  $d = 2$ . Este resultado é uma forma alternativa de demonstrar que um espaço Euclidiano canônico apresenta curvatura constante para todo o domínio.

### 3.2.4 Estimativa de Erro

O erro  $E_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{ab})$  estimado para uma aresta  $\mathbf{ab}$  é definido como o limite superior da diferença entre o valor de uma aproximação quadrática e o valor da função propriamente calculado através de uma interpolação linear medida em uma norma  $\mathbf{L}^p$  para uma dada função contínua  $u$ , o qual pode ser expresso através de:

$$E_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{ab}) \equiv \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) \quad (3.14)$$

com a métrica  $\mathcal{M}(\mathbf{x})$  definida como o Hessiano normalizado da função  $u$  calculado na norma  $\mathbf{L}^p$  (Loseille e Alauzet, 2011, 2009):

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{x}) = (\det |\mathbf{H}|)^{-\frac{1}{2p+d}} |\mathbf{H}| \quad (3.15)$$

onde  $\mathbf{H}$  é uma matriz simétrica representando o Hessiano de  $u$ . Para garantir que  $\mathbf{H}$  seja uma matriz positiva-definida, o termo  $|\mathbf{H}|$  é obtido como a matriz Hessiana com seus auto-valores normalizados e limitados, tal que  $|\mathbf{H}| = \mathcal{R}|\tilde{\mathbf{\Lambda}}|\mathcal{R}^T$ , de forma que seus respectivos auto-valores limitados  $\tilde{\lambda}_i$  que compõe  $|\tilde{\mathbf{\Lambda}}| = \text{diag}(\tilde{\lambda}_i)$  sejam (Frey e Alauzet, 2005):

$$\tilde{\lambda}_i = \min \left( \max \left( |\lambda_i|, \frac{1}{h_{\max}^2} \right), \frac{1}{h_{\min}^2} \right) \quad (3.16)$$

sendo  $h_{\max}$  e  $h_{\min}$  o comprimento máximo e mínimo permitido para uma aresta pertencente à malha e a matriz Hessiana calculada empregando-se uma formulação variacional de dupla projeção (Vallet et al., 2007).

Na Eq. (3.15), O último termo  $|\mathbf{H}|$  especifica a orientação e anisotropia local do erro através de uma matriz Hessiana normalizada da função  $u$ . Este é um resultado consistente com a teoria de limites de erro de interpolação para funções polinomiais de Lagrange, a qual diz que um polinômio interpolador para uma dada função gera um erro máximo de interpolação de magnitude proporcional a uma derivada de ordem imediatamente acima à do polinômio. Assim, para uma função linear de interpolação, como a usada para a aproximação de elementos finitos neste caso, tem-se um erro de interpolação de ordem quadrática, ou em um espaço tridimensional, proporcional ao Hessiano da função a ser interpolada. Além disto, a limitação imposta sobre os autovalores através da Eq. (3.16) limita o erro, eliminando o refinamento ou desrefinamento ilimitado para controlar o erro. Um refinamento limitado se mostra importante para esquemas explícitos onde o menor tamanho da malha dita o passo de tempo de solução do problema.

Já o primeiro termo escalar  $(\det |\mathbf{H}|)^{-\frac{1}{2p+d}}$  que aparece na Eq. (3.15) é resultado da medida ser realizada na norma  $\mathbf{L}^p$ , consistindo em uma medida de Lebesgue em um espaço de Sobolev. Desta forma, a medida do erro considera as derivadas das funções e não apenas a diferença entre valores de funções. Disto resulta que este termo modifica a estimativa do erro para levar em consideração a sensibilidade à norma  $\mathbf{L}^p$ . Se  $p = \infty$ , então  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{\mathbf{L}^\infty}(\mathbf{x}) = |\mathbf{H}|$  e nenhuma sensibilidade à norma  $\mathbf{L}^p$  é levada em consideração.

Estratégias de adaptação de malha baseadas no controle do erro de interpolação na norma  $\mathbf{L}^\infty$  falham em capturar pequenas variações presentes no campo de solução que diferem das demais por muitas ordens de grandeza. A anisotropia seria também perdida nas regiões próximas a discontinuidades (Loseille e Alauzet, 2009). Portanto, controlar o erro na norma  $\mathbf{L}^p$  permite capturar todas as escalas do campo de solução, sendo, por isto, também chamado de uma abordagem multi-escalas. Para os problemas envolvendo escoamentos transônicos e supersônicos turbulentos, o emprego da norma  $\mathbf{L}^p$  permite capturar pequenas nuances tais como zonas de pequena recirculação e camada limite

mesmo na presença de efeitos mais fortes como ondas de choque. É importante salientar que este procedimento estima o erro de apenas uma variável  $u$  escolhida. A extensão a um número qualquer de variáveis é descrita a seguir.

### 3.2.5 Interseção Multi-Métrica

Quando mais de uma métrica é especificada em um dado ponto, o procedimento de adaptação precisa cobrir o erro de interpolação de todos estes campos ao mesmo tempo. Para isto, uma técnica de redução simultânea é empregada. Nesta abordagem, busca-se uma base comum  $\mathcal{P}$  de duas métricas  $\mathcal{M}_A$  e  $\mathcal{M}_B$ , tal que elas sejam congruentes a uma matriz diagonal em suas bases. A matriz  $\mathcal{B} = \mathcal{M}_A^{-1}\mathcal{M}_B$  é introduzida, tal que  $\mathcal{B}$  é diagonalizável com auto-valores reais. Os auto-vetores normalizados de  $\mathcal{B}$  são  $\mathbf{e}_i$  com  $i = 1, d$  e compõem a base comum diagonalizável  $\mathcal{P}$ . As componentes principais de  $\mathcal{M}_A$  e  $\mathcal{M}_B$  projetadas nesta base podem ser obtidas com (Loseille e Frey, 2003):

$$\mu_i = \mathbf{e}_i^T \mathcal{M}_A \mathbf{e}_i \quad \text{e} \quad \beta_i = \mathbf{e}_i^T \mathcal{M}_B \mathbf{e}_i \quad (3.17)$$

Como  $\mathcal{P}$  é também inversível, a interseção da métrica pode ser calculada através de:

$$\mathcal{M}_{A \cap B} = \mathcal{M}_A \cap \mathcal{M}_B = (\mathcal{P}^{-1})^T \text{diag}(\max(\mu_i, \beta_i)) \mathcal{P}^{-1} \quad (3.18)$$

A Fig. 3.3 mostra uma interpretação geométrica do procedimento de interseção de duas métricas. Para uma terceira métrica  $\mathcal{M}_C$  a ser interpolada, o procedimento é realizado da mesma forma, com  $\mathcal{M}_{AB \cap C}$  utilizando  $\mathcal{M}_{AB} = \mathcal{M}_{A \cap B}$  e assim por diante para mais interseções de métricas. É importante observar que quanto maior o número de interseções empregadas, menor será a anisotropia final da malha (Castro-Díaz et al., 1997).

### 3.2.6 Determinação da Matriz Hessiana

Para estimar do erro através da Eq. (3.14), torna-se necessário a informação da matriz Hessiana  $\mathbf{H}$ . Entretanto, como são utilizados elementos lineares no presente trabalho,  $\mathbf{H}$  não está diretamente disponível. Torna-se necessário um procedimento que estime o Hessiano de uma função genérica  $u$ . Emprega-se um dupla projeção baseada em uma formulação variacional neste trabalho. Para tal, primeiramente assume-se que tanto a

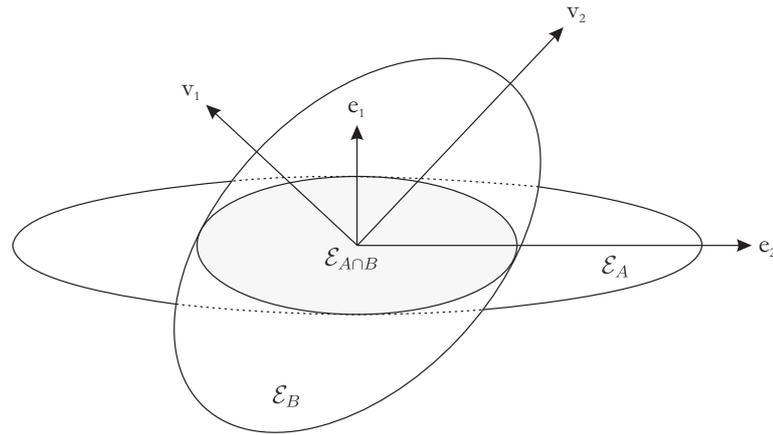


Figura 3.3: Interpretação geométrica da interseção de métricas em duas dimensões.

função  $u$  quanto seu gradiente são proporcionais à função de forma  $\mathbf{N}$  (Pain et al., 2001):

$$u = \mathbf{N}\tilde{\mathbf{u}} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \mathbf{N} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_i} \quad (3.20)$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}$  indica quantidades nodais. Derivando-se a função  $u$  escrita em termos de suas quantidades nodais através da Eq. (3.19) e combinando-a com a proporcionalidade assumida para sua derivada com relação à função de forma escrita na Eq. (3.20), obtém-se uma relação nodal para o gradiente de  $u$ :

$$\mathbf{N} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.21)$$

Aplicando-se uma ponderação pela função de forma transposta  $\mathbf{N}^T$  em ambos os lados e integrando-se ao longo do domínio (método variacional de Galerkin), as derivadas ficam reduzidas a:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \tilde{\mathbf{u}} d\Omega \quad (3.22)$$

Observa-se que no lado esquerdo da equação acima tem-se a matriz de massa consistente. Para simplificar o cálculo, adota-se a matriz de massa diagonalizada neste procedimento, tornando a inversão direta. A Eq. (3.22) fornece o valor da derivada de primeira ordem para cada nó da malha. O Hessiano propriamente dito é obtido através de uma segunda projeção onde emprega-se o gradiente de  $u$  calculado ao invés da função  $u$  para os passos descritos acima. Desta forma, obtém-se as derivadas de segunda ordem.

### 3.3 Adaptação de Malhas

O procedimento de adaptação de malhas utiliza a estimativa de erro baseada no uso de métricas para determinar o erro associado a cada aresta da malha. Quando este erro encontra-se acima de um dado valor, a malha é refinada e quando o erro encontra-se inferior a um dado valor, a malha é desrefinada neste local. Os processos de alternância de arestas e faces atuam melhorando a qualidade da malha conjuntamente com a técnica de suavização nodal.

#### 3.3.1 Refinamento

Quando uma aresta  $\mathbf{ab}$  é designada para ser refinada, um novo nó  $\mathbf{c}$  é inserido no seu centro, gerando duas novas arestas:  $\mathbf{ac}$  e  $\mathbf{cb}$ . Geralmente,  $\mathbf{c}$  é adotado como o centro Euclidiano da aresta, mas desta forma a informação da anisotropia é perdida pois o erro ao longo da aresta não é uniformemente distribuído no espaço físico. É proposto neste trabalho uma divisão centrada na métrica Riemanniana, de forma que o novo nó inserido  $\mathbf{c}$  verifica a seguinte relação:

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ac}) = \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{cb}) \quad (3.23)$$

A equação anterior define uma relação não-linear porque a relação integral definida pela Eq. (3.6) leva em consideração a variação espacial da métrica ao longo da aresta.

A variação espacial da métrica deve ser levada em consideração para se resolver a relação integral não-linear definida pela Eq. (3.23). Ademais, empregando-se a Eq. (3.6) e uma parametrização do tipo  $\mathbf{ac} = m\mathbf{ab}$  e  $\mathbf{cb} = (1 - m)\mathbf{ab}$  com  $m \in [0,1]$ , o particionamento no centro Riemanniano definido na Eq. (3.23) pode ser resolvido encontrando-se  $m$  tal que:

$$\int_0^1 \sqrt{\mathbf{ac}^T \mathcal{M}(\mathbf{a} + t \mathbf{ac}) \mathbf{ac}} dt = \int_0^1 \sqrt{\mathbf{cb}^T \mathcal{M}(\mathbf{c} + t \mathbf{cb}) \mathbf{cb}} dt \quad (3.24)$$

e considerando-se uma interpolação linear do tensor métrico ao longo de  $\mathbf{ab}$ , o valor de  $m$  é obtido como (Linn e Awruch, 2017):

$$m = \frac{\ell_0^2 - 2^{-\frac{2}{3}}(\ell_0^3 + \ell_1^3)^{\frac{2}{3}}}{\ell_0^2 - \ell_1^2} \quad (3.25)$$

válido para todos os valores de  $\ell_0$  e  $\ell_1$  tal que  $\ell_0 \neq \ell_1$ . Se  $\ell_0 = \ell_1$ , então não há variação

de métrica ao longo da aresta e o centro Euclidiano é empregado para o particionamento, adotando-se  $m = 1/2$ .

O procedimento de refinamento deve garantir que a topologia da malha não será violada, gerando apenas elementos válidos. Para satisfazer esta condição, o particionamento de um elemento é realizado de acordo com o número e posição das arestas refinadas no mesmo. Todos os casos de particionamento anisotrópico são considerados. Para o caso bi-dimensional em uma malha composta por elementos triangulares, quatro tipos de subdivisão são possíveis, cobrindo oito casos de anisotropia (Fig. 3.4):

- $\{0\}$  *Nenhuma aresta a ser refinada*: neste caso nada precisa ser feito;
- $\{1\}$  *Uma aresta a ser refinada*: o triângulo é dividido ao longo da linha que une o novo nó até o nó oposto do triângulo, gerando dois novos elementos;
- $\{2\}$  *Duas arestas a serem refinadas*: os dois novos nós são conectados. O quadrilátero remanescente é dividido partindo do novo nó da maior aresta. Se ambas diagonais possuem o mesmo comprimento, a diagonal partindo do novo nó com menor índice é escolhida, gerando três novos elementos;
- $\{3\}$  *Três arestas a serem refinadas*: todos os novos nós são conectados, gerando quatro novos elementos.

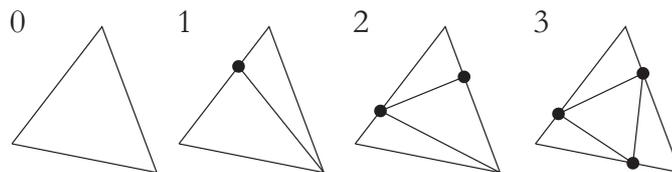


Figura 3.4: Esquema de subdivisão anisotrópica de triângulos baseada em arestas.

A subdivisão dos elementos a partir das arestas é única e sempre será possível (Ruprecht e Muller, 1998) (as condições de existência e unicidade são satisfeitas). A metodologia, portanto, garante que a topologia da malha não seja violada. Para o caso tridimensional, em uma malha composta por elementos tetraédricos, existem onze tipos de subdivisão possíveis, cobrindo um total de 64 casos de anisotropia (Fig. 3.5):

- $\{0\}$  *Nenhuma aresta a ser refinada*;

- {1} *Uma aresta a ser refinada;*
- {2a} *Duas arestas a serem refinadas na mesma face;*
- {2b} *Duas arestas a serem refinadas em faces opostas;*
- {3a} *Três arestas a serem refinadas compartilhando um nó;*
- {3b} *Três arestas a serem refinadas na mesma face;*
- {3c} *Três arestas a serem refinadas que não compartilham um nó e nem estão contidas em uma mesma face;*
- {4a} *Quatro arestas a serem refinadas com três delas compartilhando um nó;*
- {4b} *Quatro arestas a serem refinadas com dois nós em cada face;*
- {5} *Cinco arestas a serem refinadas;*
- {6} *Seis arestas a serem refinadas.*

Mais uma vez, a condição de existência e unicidade se mantém e a topologia não é violada (Ruprecht e Muller, 1998). Como o procedimento de subdivisão de um elemento é independente da subdivisão de outros elementos, o procedimento pode ser realizado facilmente em computação paralela.

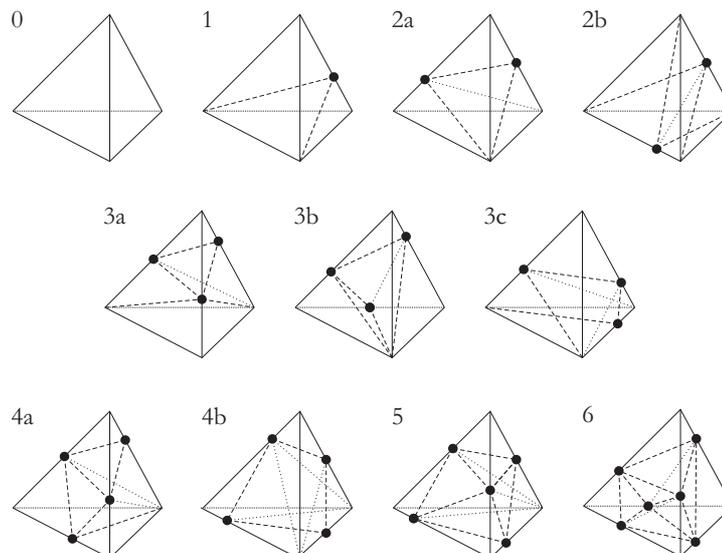


Figura 3.5: Esquema de subdivisão anisotrópica de tetraedros baseada em arestas.

### 3.3.2 Desrefinamento

Seja  $\mathbf{ab}$  uma aresta a ser desrefinada (colapsada), com vértice inicial  $\mathbf{a}$  e vértice final  $\mathbf{b}$ . Define-se o conjunto  $G$  de todos os simplexes que compartilham pelo menos uma aresta com  $\mathbf{ab}$  (Fig. 3.6):

$$G = \{K : \mathbf{ab} \in A_K\} \quad (3.26)$$

Seja  $B$  o conjunto de todos os simplexes que compartilham o vértice  $\mathbf{a}$  mas não estão contidos no conjunto  $G$ :

$$B = \{K : \mathbf{a} \in V_K \text{ e } \mathbf{ab} \notin A_K\} \quad (3.27)$$

Da mesma forma,  $C$  é definido como o conjunto de todos os simplexes que compartilham o vértice  $\mathbf{b}$  mas não estão contidos no conjunto  $G$ :

$$C = \{K : \mathbf{b} \in V_K \text{ e } \mathbf{ab} \notin A_K\} \quad (3.28)$$

Os vértices  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são conectados ao longo da direção da aresta  $\mathbf{ab}$  até um novo ponto  $\mathbf{c}$  entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , colapsando todos os simplexes do conjunto  $G$ . Todos os simplexes contidos no conjunto  $B$  são linearmente transformados em um novo conjunto  $B'$  através da seguinte relação:

$$B' = \{K \in B : (\mathbf{a} \in V_K) \mapsto \mathbf{c}\} \quad (3.29)$$

Da mesma forma, os simplexes do conjunto  $C$  são transformados em um novo conjunto  $C'$  através de:

$$C' = \{K \in C : (\mathbf{b} \in V_K) \mapsto \mathbf{c}\} \quad (3.30)$$

Para considerar a informação da anisotropia no procedimento, é proposto que a escolha

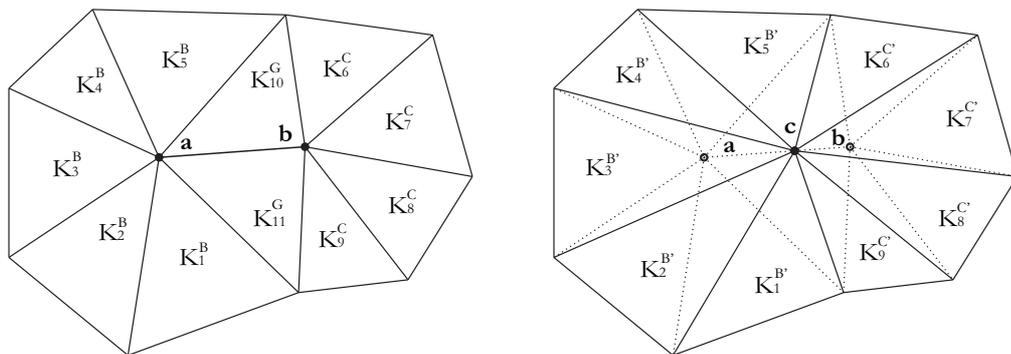


Figura 3.6: Procedimento de colapso de aresta.

do ponto de colapso  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + n\mathbf{ab}$  seja feita encontrando-se  $n \in [0,1]$  que minimiza a soma da função qualidade de todos os simplexes remanescentes após o colapso (Linn e Awruch, 2017):

$$\min_{n \in [0,1]} \sum_{K \in B' \cup C'} Q_{\mathcal{M}}(K) \quad (3.31)$$

sujeita às seguintes restrições:

$$|T_K| \quad \forall K \in B' \cup C' > 0 \quad (3.32a)$$

$$\sum_{K \in G \cup B \cup C} |T_K| - \sum_{K \in B' \cup C'} |T_K| = 0 \quad (3.32b)$$

A função objetivo na Eq. (3.31) traduz matematicamente que o ponto de colapso  $\mathbf{c}$  deve ser o ponto que produz o melhor valor para a soma da qualidade anisotrópica de cada simplex afetado pelo colapso, mantendo, portanto, informações de orientação e comprimento no procedimento devido às propriedades de  $Q_{\mathcal{M}}$ . A primeira e segunda restrições impostas, dada pelas Eqs. (3.32), são utilizadas para manter válida a topologia e conservar os contornos do domínio (a aproximação inicial da geometria do domínio é preservada). Se ambos os vértices  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  não pertencem ao contorno, a segunda restrição, Eq. (3.32b), não necessita ser verificada. Esta conservação do domínio automaticamente garante que apenas topologias válidas sejam geradas pelo procedimento de colapso em casos mais complexos, tais como no caso quando a aresta tenha apenas um vértice pertencente ao contorno e só possa ser colapsada partido-se do nó que não pertença ao contorno, ou quando ambos os vértices pertençam ao contorno, permitindo apenas colapsos que não gerem buracos no domínio.

Uma abordagem discreta é empregada para se resolver a Eq. (3.31) neste trabalho. A parametrização contínua  $n$  é substituída por  $n_c \geq 2$  pontos discretos  $n_j \in [0,1]$  (Linn e Awruch, 2017):

$$n_j = \frac{(j-1)}{(n_c-1)} \quad (3.33)$$

com  $j = 1, \dots, n_c$ . Para cada posição  $n_j$ , o somatório da Eq. (3.31) é calculado utilizando-se a Eq. (3.8) e considerando-se uma interpolação linear do tensor métrico entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Finalmente, a posição  $n_j$  que possui o menor valor para esta função objetivo e que não viola as restrições dadas pelas Eqs. (3.32) é escolhida como o ponto de colapso. Esta abordagem discreta é equivalente a escolher entre colapsar a aresta para uma de suas extremidades  $\mathbf{a}$  ou  $\mathbf{b}$  se  $n_c = 2$ . Para  $n_c = 3$ , o centro Euclidiano é também considerado

como possibilidade de posição para o colapso e assim por diante. Neste trabalho  $n_c = 5$  é adotado, permitindo-se diversas possibilidades para a escolha do ponto de colapso  $\mathbf{c}$ .

### 3.3.3 Alternância de Arestas e Faces

O procedimento de alternância de arestas (em inglês: *Edge Swapping*), também chamado de reconecção de malha, é utilizado neste trabalho em conjunto com as técnicas de refinamento e desrefinamento para melhorar a qualidade da malha. Um estudo completo do método pode ser encontrado em Freitag e Ollivier-Gooch (1997). A alternância de arestas é um procedimento que modifica a conexão existente entre elementos vizinhos, mantendo fixo o número de nós da malha. Embora seja possível implementar o procedimento para o caso de malhas compostas tanto por triângulos (bidimensionais) bem como para tetraedros (tridimensionais), neste trabalho a técnica é aplicada exclusivamente para elementos triangulares. Tal caso só pode ser realizado em uma aresta  $\mathbf{ab}$  que não pertença ao contorno do domínio. Esta aresta compartilha dois elementos:  $K_1$  e  $K_2$ . O procedimento consiste em trocar a posição da aresta interna do subdomínio para se obter os elementos  $K'_1$  e  $K'_2$  (ver Fig. 3.7). Para levar em consideração a anisotropia, a seguinte condição deve ser verificada:

$$\max \{Q_{\mathcal{M}}(K'_1), Q_{\mathcal{M}}(K'_2)\} < \max \{Q_{\mathcal{M}}(K_1), Q_{\mathcal{M}}(K_2)\} \quad (3.34)$$

Se esta condição é verificada e a condição de não-degeneração dos elementos é satisfeita, então a alternância é realizada, melhorando a qualidade da malha em um contexto anisotrópico.

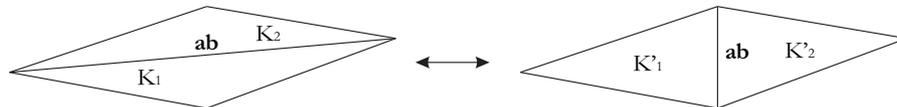


Figura 3.7: Alternância de arestas.

O procedimento de alternância de faces (em inglês: *Face Swapping*) é análogo ao de alternância de arestas. Porém, só é possível em malhas tridimensionais. Para malhas compostas por elementos tetraédricos, dois casos são possíveis: alternância de faces do contorno ou do interior do domínio. No primeiro caso (Fig. 3.8a), dois elementos que compartilham uma face podem alternar as faces do contorno, resultando em dois

novos elementos distintos. Para o segundo caso (Fig. 3.8b), dois elementos internos compartilham uma face e uma nova aresta é inserida, resultando em três novos elementos distintos. O procedimento inverso é considerado, passando de três para dois elementos através da remoção de uma aresta interna. A condição verificada para alternância de faces é análoga à condição dada pela Eq. (3.34) para o caso de alternância de arestas.

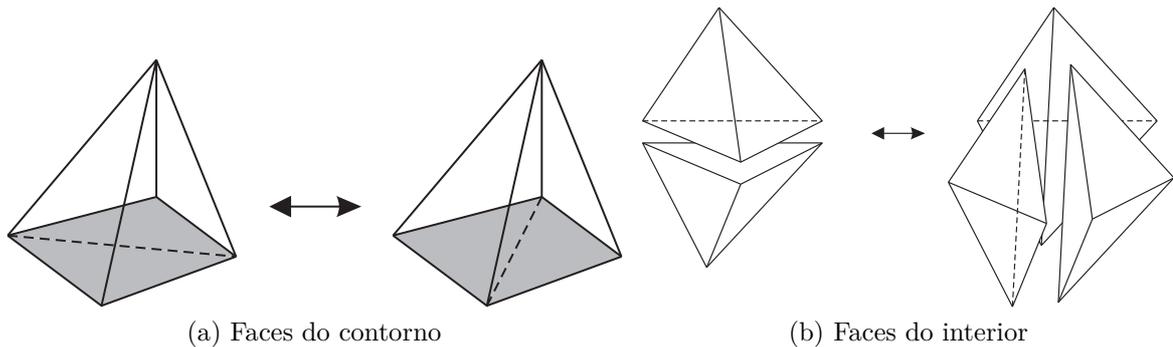


Figura 3.8: Alternância de faces.

### 3.3.4 Suavização Nodal

O procedimento de suavização nodal é realizado em todos os nós da malha com o objetivo de melhorar a qualidade da malha. Cada vértice  $j$  da malha com posição inicial  $\mathbf{x}_j$  é movido para uma nova posição  $\mathbf{x}'_j$ . Neste trabalho, o movimento é restringido ao longo de cada uma das direções das arestas que compartilham o nó. Com esta restrição imposta para o movimento dos nós, a interpolação da solução da malha inicial para a malha final obtida após o movimento pode ser facilmente realizada de forma conservativa e consistente através de simples interpolação linear dos campos de solução entre os vértices das arestas. Mais do que isto, devido à consideração de uma interpolação linear da métrica para o cálculo do comprimento das arestas na métrica Riemanniana, a atualização da métrica pode também ser realizada através de uma interpolação linear ao longo das arestas de forma consistente concomitantemente ao movimento dos vértices. A desvantagem desta metodologia é que as possíveis direções de movimento são mais limitadas (há somente possibilidade discretas), o que pode ser contornado através da execução em série de movimentos partindo-se inicialmente da posição atualizada a cada nova iteração. As etapas do algoritmo são descritas a seguir (veja Fig. 3.9) (Linn e Awruch, 2017):

1. Definir o contador de iterações  $i = 0$  e definir o número de subdivisões para cada aresta  $w$ ;
2. Percorrer cada vértice  $j$  da malha e:
  - Calcular a soma da qualidade anisotrópica dos elementos conectados ao vértice na posição inicial,  $\overline{Q}_0$ ;
  - Mover o vértice  $j$  da sua posição inicial  $\mathbf{x}_j$  para  $\mathbf{r}_{k,1}$ , onde  $\mathbf{r}_{k,1} = \mathbf{x}_j + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) [1/(w + 1)]$  está localizado ao longo das  $k$  arestas conectadas ao vértice  $j$ , sendo  $\mathbf{x}_k$  a extremidade da aresta  $k$  oposta à do vértice  $j$ . Considerando uma interpolação linear do campo de solução  $u$  e da métrica  $\mathcal{M}$ , calcular a soma da qualidade anisotrópica dos elementos conectados ao vértice  $\overline{Q}_{k,1}$  em cada uma das  $\mathbf{r}_{k,1}$  posições e verificar se a topologia não é violada para nenhum caso;
  - A direção de maior decréscimo  $k'$  ao longo das arestas é escolhida como sendo a aresta  $k$  que atinge o menor valor para  $\overline{Q}_{k,1}$  e não viola a topologia da malha. Ao longo desta aresta  $k'$ :
    - Calcular a soma da qualidade anisotrópica associada aos elementos conectados ao vértice,  $\overline{Q}_{k',l}$ , nas posições  $\mathbf{r}_{k',l} = \mathbf{x}_j + (\mathbf{x}_{k'} - \mathbf{x}_j) [l/(w + 1)]$ , com  $l = 2, \dots, w$ , também movendo o vértice  $j$  da sua posição inicial  $\mathbf{x}_j$  para  $\mathbf{r}_{k',l}$  e atualizando o campo de solução  $u$  e a métrica  $\mathcal{M}$  através de interpolação linear;
    - A posição  $\mathbf{x}_j$  do vértice é atualizada para a posição  $\mathbf{x}'_j$  a qual corresponde à posição  $\mathbf{r}_{k',l}$  que atinge o menor valor para  $\overline{Q}_{k',l}$ ;
3. Tomar  $i = i + 1$ ;
4. Se  $\sum |\mathbf{x}'_j - \mathbf{x}_j| \leq \text{toldispl}$  ou  $i > \text{maxiter}$ , finalizar o algoritmo, caso contrário, retornar ao passo 2.

Aumentando-se o número especificado de subdivisões das arestas  $w$ , mais posições ao longo das arestas são calculadas no intuito de se buscar em qual resulta a melhor configuração de qualidade anisotrópica para os elementos circundantes ao nó. Um número de quatro posições ( $w = 4$ ) é considerado neste trabalho. O algoritmo trabalha primeiramente

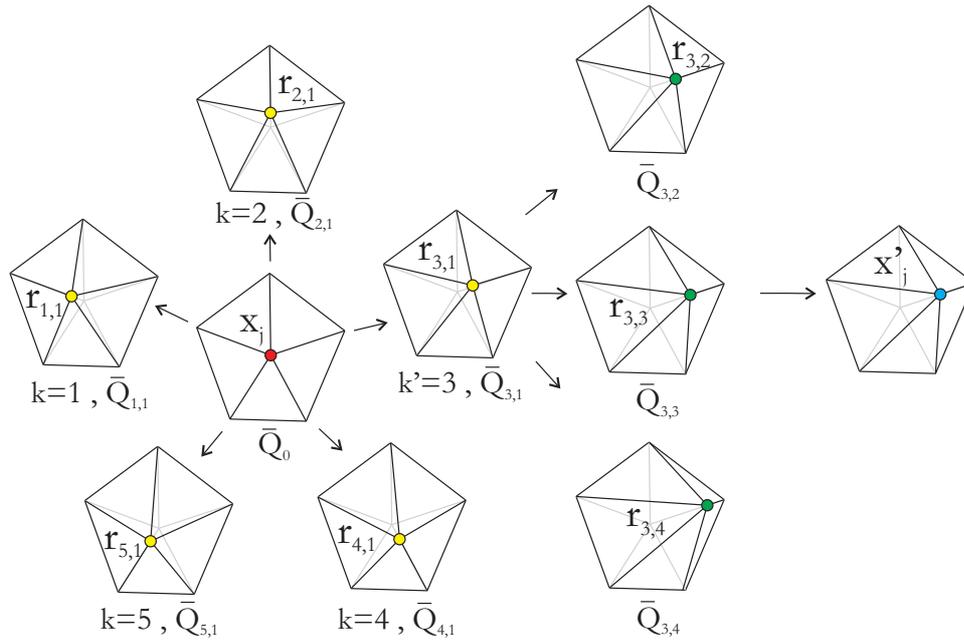


Figura 3.9: Estratégia de suavização nodal anisotrópica.

buscando a direção de maior decréscimo ao calcular a qualidade anisotrópica dos elementos circundantes na posição inicial e em uma posição em cada aresta conectada. Esta estratégia é assim empregada para reduzir o custo computacional. Embora o número de arestas conectadas não seja alto para malhas bi-dimensionais, tal número torna-se considerável em casos tridimensionais. Além disto, o método evita calcular mais posições em arestas previamente inviáveis devido à violação da topologia. Após determinar a aresta de maior decréscimo, o algoritmo continua o refinamento da procura ao longo desta direção. Finalmente, depois de realizar o movimento ao longo de cada vértice, o algoritmo recomeça novamente até que um número máximo de iterações *maxiter* ou uma dada tolerância de deslocamento *toldispl* seja verificada. Estes parâmetros são tomados como  $maxiter = 50$  para problemas estacionários,  $maxiter = 1$  para problemas transientes, e  $toldispl = 10^{-6}$  para todos os casos neste trabalho. Ao se calcular a qualidade anisotrópica em cada posição, tanto o campo de solução quanto a métrica são exatamente atualizados através de uma interpolação linear entre os nós das arestas, o que é uma vantagem em comparação com estratégias que requerem técnicas de interpolação mais complicadas devido à possibilidade de se considerar posições que não se localizam ao longo das arestas da malha.

### 3.3.5 Algoritmo de Adaptação

O algoritmo geral de adaptação de malhas implementado neste trabalho realiza a seguinte seqüência de modificações locais na malha, a qual define uma iteração de adaptação:

1. Realizar suavização nodal;
2. Refinar todas as arestas cujo erro esteja acima de um dado limiar superior  $\eta_U$ ;
3. Alternar faces/arestas até a convergência;
4. Realizar suavização nodal;
5. Desrefinar todas as arestas cujo erro esteja abaixo de um dado limiar inferior  $\eta_L$ ;
6. Alternar faces/arestas até a convergência;
7. Realizar suavização nodal.

A convergência da etapa de alternância de faces ou arestas é obtida quando mais nenhuma alternância produz resultados benéficos para a qualidade da malha. Uma aresta  $\mathbf{ab}$  é refinada se:

$$E_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{ab}) \geq \eta_U \varepsilon_{\mathbf{L}^p} \quad (3.35)$$

e é desrefinada se:

$$E_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{ab}) \leq \eta_L \varepsilon_{\mathbf{L}^p} \quad (3.36)$$

onde  $\varepsilon_{\mathbf{L}^p}$  é o erro de interpolação objetivo medido na norma  $\mathbf{L}^p$ . O valor dos limiares superiores e inferiores de erro,  $\eta_U$  e  $\eta_L$ , são tomados como 1,4 e 0,6, respectivamente (Habashi et al., 2000).

O acoplamento do algoritmo de adaptação com o de simulação de escoamentos compressíveis é realizado de duas formas distintas:

1. **Escoamentos turbulentos transientes:** onde controla-se o erro de interpolação de todas as variáveis de conservação  $\Phi$ , portanto  $\mathbf{M}(u) = \mathbf{M}(\rho) \cap \mathbf{M}(u_i) \cap \mathbf{M}(E)$ . Desta forma, controla-se simultaneamente o erro da massa específica  $\rho$ , dos campos de velocidades  $u_i$  e da energia total  $E$ . A malha é adaptada a cada  $\Delta\alpha$  passos

executados do algoritmo de escoamento. Considerando-se uma diferença de no mínimo 10 vezes entre as maiores e menores escalas do escoamento na malha e um número de CFL igual à 0.5, adota-se  $\Delta\alpha = 20$  neste trabalho, garantindo o controle do erro de interpolação dos vórtices maiores para todo  $t$  do escoamento nas condições estimadas;

2. **Escoamentos laminares permanentes:** em que a variável cujo erro de interpolação é controlado é escolhida como sendo o número de Mach local  $M$  do escoamento de forma que  $\mathbf{M}(u) = \mathbf{M}(M)$ . O algoritmo obtém um escoamento estacionário para a malha inicial e posteriormente realiza  $\alpha$  iterações de adaptação seguidas da obtenção dos respectivos escoamentos permanentes.

### 3.4 Interpolação com Funções de Base Radial

A interpolação com funções de base radial é utilizada tanto para mover os contornos quanto interpolar e transferir a solução entre malhas neste trabalho. Utiliza-se uma função real univariável  $\psi : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  como uma função multivariável simétrica  $\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  através de (Buhmann, 2000):

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|) \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d \quad (3.37)$$

Nestas condições,  $\psi$  é dita uma função de base radial e  $\Psi$  é chamado de núcleo associado à base radial. A função de base radial depende, portanto, da distância Euclidiana  $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$  até um certo ponto  $\mathbf{c}$ , também chamado de origem. O suporte de uma função  $f(\mathbf{x})$  definida em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  é definido por:

$$\text{supp}(f(\mathbf{x})) \equiv \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) \neq 0\}} \quad (3.38)$$

que pode ser traduzido como um subconjunto fechado em que a função assume valores não nulos. Neste ponto, as funções de base radial podem ser divididas em dois grupos: as que contêm suporte local e as que possuem suporte global. Funções de base radial com suporte local satisfazem a condição:

$$\psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|) = 0, \quad \text{para } \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| > 1 \quad (3.39)$$

Nas aplicações, a função  $\psi$  é geralmente escalonada com um raio suporte  $r$  para controlar o suporte compacto, de forma que obtém-se a relação:

$$\psi(\xi) = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|}{r} \quad (3.40)$$

As funções de base radial com suporte compacto geralmente são funções polinomiais ou séries de funções derivadas de equações de placas finas enquanto que as de suporte global são funções tais como a multiquadrática bi-harmônica e a Gaussiana, também empregadas em problemas de redes neurais e problemas de visualização científica (Carr et al., 2003).

Dado um conjunto de pontos  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  em um domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ , associa-se um valor real  $f_i = f(\mathbf{x}_i)$  a cada um destes pontos. Busca-se uma função de interpolação  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  restrita à condição:

$$s|_{\mathcal{X}} = f|_{\mathcal{X}} \quad (3.41)$$

que indica que o valor da função de interpolação deve ser o valor real associado ao conjunto de pontos dado. No contexto da interpolação de base radial, a função de interpolação buscada tem a forma:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + p(\mathbf{x}), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{P}^M \quad (3.42)$$

onde o termo polinomial  $p$  é necessário para a existência e unicidade da solução. O grau  $M$  do polinômio requerido para existência da solução depende da escolha da função de base. No caso da escolha de uma função de base polinomial com suporte compacto, o dado conjunto de pontos  $\mathcal{X}$  deve necessariamente ser unissolvente com respeito aos polinomiais do mesmo grau. O conjunto  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$  é dito unissolvente para  $\mathbb{P}_d^{k-1}$  se, para polinomiais  $p \in \mathbb{P}_d^{k-1}$ , verifica-se:

$$p|_{\mathcal{X}} = 0 \Rightarrow p \equiv 0 \quad (3.43)$$

Portanto, satisfazer a condição de interpolação definida pela Eq. (3.41) para todos os pontos dados conjuntamente com a condição imposta sobre os coeficientes  $\pi_j$  dos polinômios  $p$  da Eq. (3.43) leva a um sistema de equações lineares a ser resolvido para a determinação dos coeficientes  $\lambda_i$  e  $\pi_j$  na forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) + \sum_{j=1}^M \pi_j p_j(\mathbf{x}_k) &= f(\mathbf{x}_k) & 1 \leq k \leq N, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i p_l(\mathbf{x}_i) &= 0 & 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (3.44)$$

ou, em notação simplificada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi} & \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{\Pi}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\pi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

onde  $\mathbf{\Psi}$  é uma matriz  $N \times N$  contendo o cálculo da função de base radial entre cada combinação dos  $N$  pontos, dois-a-dois,  $\Psi_{i,k} = \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|)$ ,  $\mathbf{\Pi}$  é uma matriz  $N \times M$ , de forma  $\Pi_{i,j} = [1 \ \mathbf{x}_i]$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  é um vetor com  $N$  dimensões contendo cada um dos  $\lambda_i$  coeficientes,  $\boldsymbol{\pi}$  é um vetor com  $M$  dimensões contendo cada um dos  $\pi_j$  coeficientes e  $\mathbf{f}$  é um vetor com  $N$  dimensões contendo cada um dos valores da função real  $f_i$  em cada um dos  $N$  pontos sobre os quais é realizada a interpolação. A resolução do sistema da Eq. (3.45) fornece os coeficientes  $\boldsymbol{\lambda}$  e  $\boldsymbol{\pi}$  com os quais pode-se calcular o valor da função  $f(\mathbf{x})$  para um  $\mathbf{x}$  qualquer através da relação estabelecida pela Eq. (3.42).

### 3.5 Malhas Dinâmicas para Contornos Móveis

Para incluir a capacidade de variação da topologia da malha, ou seja, que os contornos do domínio sejam móveis, emprega-se uma técnica de movimento de malha, também chamada de técnica de malha dinâmica (este termo é empregado aqui para diferenciar este procedimento do movimento ou suavização nodal empregado por outros autores em processo adaptativos em topologia fixada). O método empregado para movimentar a malha é o de interpolação com funções de base radial. Neste método, determina-se o deslocamento de cada nó no interior do domínio dados os valores de deslocamento dos contornos do domínio.

A função  $s(\mathbf{x})$  de interpolação da Eq. (3.42) é empregada, sendo que ela é aplicada para interpolar os  $n_b$  pontos do contorno sobre uma função real que tem o valor do deslocamento  $\Delta x$  segundo uma dada direção nestes pontos. Portanto, para a interpolação, tem-se um número de valores nodais prescritos  $N = n_b$ , os quais são os valores  $f_i = \Delta x(\mathbf{x}_i)$  de deslocamentos nos contornos para a Eq. (3.44). Resolver o sistema da Eq. (3.45) nestas condições permite calcular o valor do deslocamento de um ponto  $\mathbf{x}$  qualquer do interior do domínio com base nos deslocamentos conhecidos em cada ponto do contorno de forma contínua.

Esta abordagem é um método mais robusto quando comparado com técnicas mais simples

de movimento que levam em consideração apenas informação local dos nós da vizinhança na malha ou que se baseiam na distância até o contorno sólido mais próximo para interpolar um valor do movimento a ser imposto. Nesta abordagem, todos os pontos do contorno contribuem para o cálculo do movimento da malha, em que a ponderação de sua importância é dada pela distância Euclidiana e o tipo de função de base radial empregada. Além disto, neste contexto, o tamanho do problema a ser resolvido para determinar o campo de deslocamentos é proporcional a aproximadamente o quadrado do número de nós do contorno, enquanto que técnicas que usam as conectividades da malha como informação são problemas proporcionais ao número total de nós da malha, sendo esta informação uma dimensão muito maior que o quadrado do total dos nós do contorno (de Boer et al., 2007).

Para o movimento da malha, emprega-se neste trabalho um função de base radial com suporte compacto. O valor a ser adotado para o tamanho do raio suporte  $r$  influencia o problema. Valores muito pequenos tornam a influência dos nós mais localizada no contexto da interpolação, enquanto que valores mais elevados tornam o campo de interpolação mais preciso, porém também tornam a matriz da Eq. (3.45) a ser resolvida mais densa e portanto mais custoso computacionalmente.

Várias funções de base radial com suporte compacto podem ser construídas. Neste trabalho, utiliza-se para o movimento nodal uma função de base radial polinomial do tipo:

$$\psi(\xi) = (1 - \xi)^4 (4\xi + 1) \quad (3.46)$$

onde  $\xi = |\mathbf{x} - \mathbf{c}|/r$  se  $0 \leq \mathbf{x} \leq 1$ , e  $\xi = 0$  se  $\mathbf{x} > 1$ , btendo-se continuidade  $C^2$  ao longo da função interpolada. Esta função é condicionalmente positiva-definida e portanto pode-se empregar polinômios  $p$  lineares (de grau  $M = 1$ , portanto) para se obter uma solução de interpolação única do problema (Beckert e Wendland, 2001). Além disto, utilizando estes polinômios lineares, movimentos de corpo rígido do tipo translação movimentam a malha como um processo reversível. Por fim, para mover a malha, o problema é resolvido para cada uma das  $d$  dimensões espaciais independentemente. A consideração do movimento da malha sobre as equações governantes do problema é evitada empregando-se uma técnica de transferência de solução, mantendo, portanto, um referencial Euleriano.

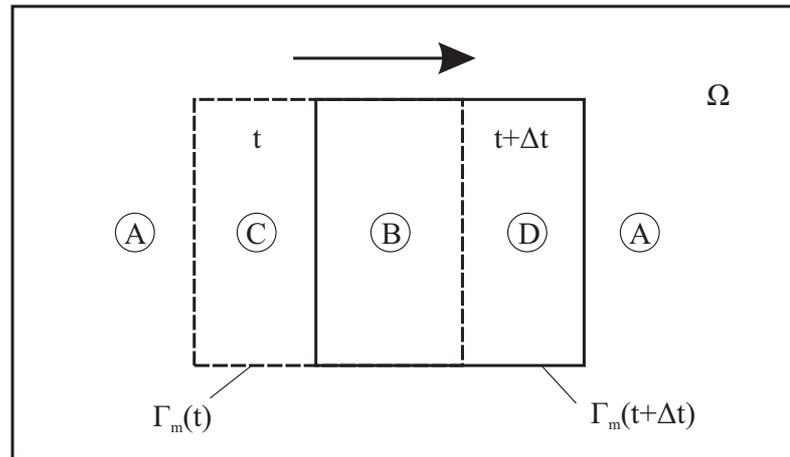


Figura 3.10: Contornos móveis.

A Fig. 3.10 mostra um corpo genérico com contornos móveis  $\Gamma_m$  que se desloca do instante  $t$  para o instante  $t + \Delta t$  imerso no domínio de fluido  $\Omega$ . Assim como em problemas de interface, quatro tipos distintos de regiões ocorrem:

- (A) - Fluido permanece fluido. Neste caso há apenas um problema de interpolação entre malhas a ser resolvido;
- (B) - Sólido permanece sólido. Aqui permanece a solução estrutural do corpo;
- (C) - Sólido passa a ser fluido. Este é o caso mais complicado. Os valores das variáveis do fluido na região nova devem ser interpolados com valores de seu entorno;
- (D) - Fluido passa a ser sólido. Aqui também permanece a solução estrutural do corpo.

Portanto, movendo-se os contornos do sólido, o domínio do corpo sólido não oferece problemas de interpolação. Tais problemas ocorrem na interface fluido-sólido e no interior do domínio do fluido. A seguir, a técnica de interpolação é detalhada.

### 3.6 Transferência de Solução

Existem dois casos em que transfere-se a solução do escoamento de uma malha para outra neste trabalho. O primeiro ocorre conjuntamente ao emprego de malhas dinâmicas em um referencial Euleriano, onde a solução é projetada na malha obtida após o movimento nodal,

evitando-se assim alterar o referencial Euleriano para um do tipo Arbitrário Lagrangeano-Euleriano (ALE), o que implicaria em modificar as equações governantes. O segundo momento em que tem-se a necessidade de transferência de solução entre malhas distintas é em problemas de interação fluido-estrutura. Nestes casos, tem-se malhas distintas que transferem valores de variáveis entre si.

Deseja-se interpolar a solução de uma malha inicial  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_0$  de  $\Omega$  em um dado ponto  $P$  com coordenadas  $\mathbf{x}_P$  contido em uma malha nova  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_1$  de  $\Omega$ , dado que a topologia do domínio  $\Omega$  se mantém inalterada. O primeiro passo é determinar em qual elemento  $\mathcal{T}_0$  da malha inicial o ponto  $P$  se encontra. Uma maneira simples de determinar se um ponto  $P$  encontra-se no interior de um dado elemento  $\mathcal{T}_0$  é determinando as funções de forma de  $P$  com relação às coordenadas dos vértices  $\mathbf{x}_i$  de  $\mathcal{T}_0$  (Löhner, 2008):

$$\mathbf{x}_P = \sum_i \mathbf{N}_i \mathbf{x}_i \quad (3.47)$$

Para triângulos em duas dimensões e tetraedros em três dimensões, tem-se, respectivamente, duas equações para três funções de forma e três equações para quatro funções de forma. A propriedade das funções de forma:

$$\sum_i \mathbf{N}_i = 1 \quad (3.48)$$

completa a equação faltante para ambos os casos, tornando possível calcular as funções de forma para o seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

ou, em notação simplificada:

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{XN} \quad (3.50)$$

sendo esta formulação para um tetraedro e a modificação para triângulos é direta. Por fim, o ponto  $P$  está no interior do elemento  $\mathcal{T}_0$  se:

$$\min(N_i, 1 - N_i)|_{\mathcal{T}_0} > 0 \quad \forall i \quad (3.51)$$

Basta, portanto, procurar em qual elemento da malha inicial esta condição é verificada. Com isto, interpola-se as variáveis de conservação no nó  $P$  da malha  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_1$  de acordo

com as variáveis de conservação que os vértices do elemento  $\mathcal{T}_0$  na malha  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_0$  apresenta. Emprega-se a interpolação de base radial para isto. A função  $s(\mathbf{x})$  de interpolação da Eq. (3.42) é utilizada novamente, sendo que ela é aplicada para interpolar os 3 ou 4 vértices do elemento  $\mathcal{T}_0$  da malha  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_0$  para, respectivamente, problemas de duas e três dimensões. Portanto tem-se  $N = 3$  ou  $N = 4$  e  $f_i = u(\mathbf{x}_i)$  para a Eq. 3.44, onde  $u$  é cada uma das variáveis de conservação do escoamento (4 para duas dimensões e 5 para três dimensões).

A Fig. 3.11 ilustra o procedimento. Nesta figura, tem-se duas malhas sobrepostas em (a). A malha na cor preta é a malha de base inicial  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_0$  de onde é feita a interpolação para a malha  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_1$ , representada na cor azul, em um domínio  $\Omega$  que não varia sua topologia. Para cada nó  $P$  de  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_1$ , determina-se em qual elemento da malha de base ele está através da Eq. (3.51). Em (b) este elemento é representado em amarelo. Após isto, os coeficiente da função de interpolação e do polinômio interpolador de  $s(\mathbf{x})$  da Eq. (3.42) são calculados para cada variável de conservação do problema através da interpolação dos nós deste elemento determinado, como representado em (c). Por fim, em (d), com os coeficiente da função de interpolação de base radial todos calculados, é determinado o valor da função  $s(\mathbf{x})$  no ponto  $P$ , que é o valor da variável de conservação. A função de base radial empregada neste procedimento é a mesma (do tipo polinomial de suporte compacto) da Eq. 3.46, que garante continuidade não só da função como de suas derivadas. Este tipo de procedimento já foi empregado de forma muito próxima da aqui proposta com grande sucesso em diversas aplicações, incluindo dinâmica de fluidos computacional (Quon e Smith, 2015; Costin e Allen, 2011).

Para o caso de malhas que cobrem domínios que apresentam topologias diferentes, a estratégia é a mesma. Este é o caso requerido quando aplicado o movimento por malhas dinâmicas. Entretanto, pode ocorrer que para algum ponto  $P$  na nova malha  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_1$  não exista elemento correspondente na malha  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_0$  ao qual pertença. Neste caso, procede-se por um método de extrapolação por interpolação de funções de base radial, onde todos os nós dos elementos que possuem conectividades com o nó  $P$  na malha  $(\mathcal{N}, \mathcal{T})|_0$  são empregados para gerar a interpolação. A Fig. 3.12 ilustra o procedimento.

Em (a), temos que a topologia das malhas diferem. O ponto  $P$  requer o procedimento de extrapolação. Para isto todos os elementos que possuem conectividade com  $P$  na malha

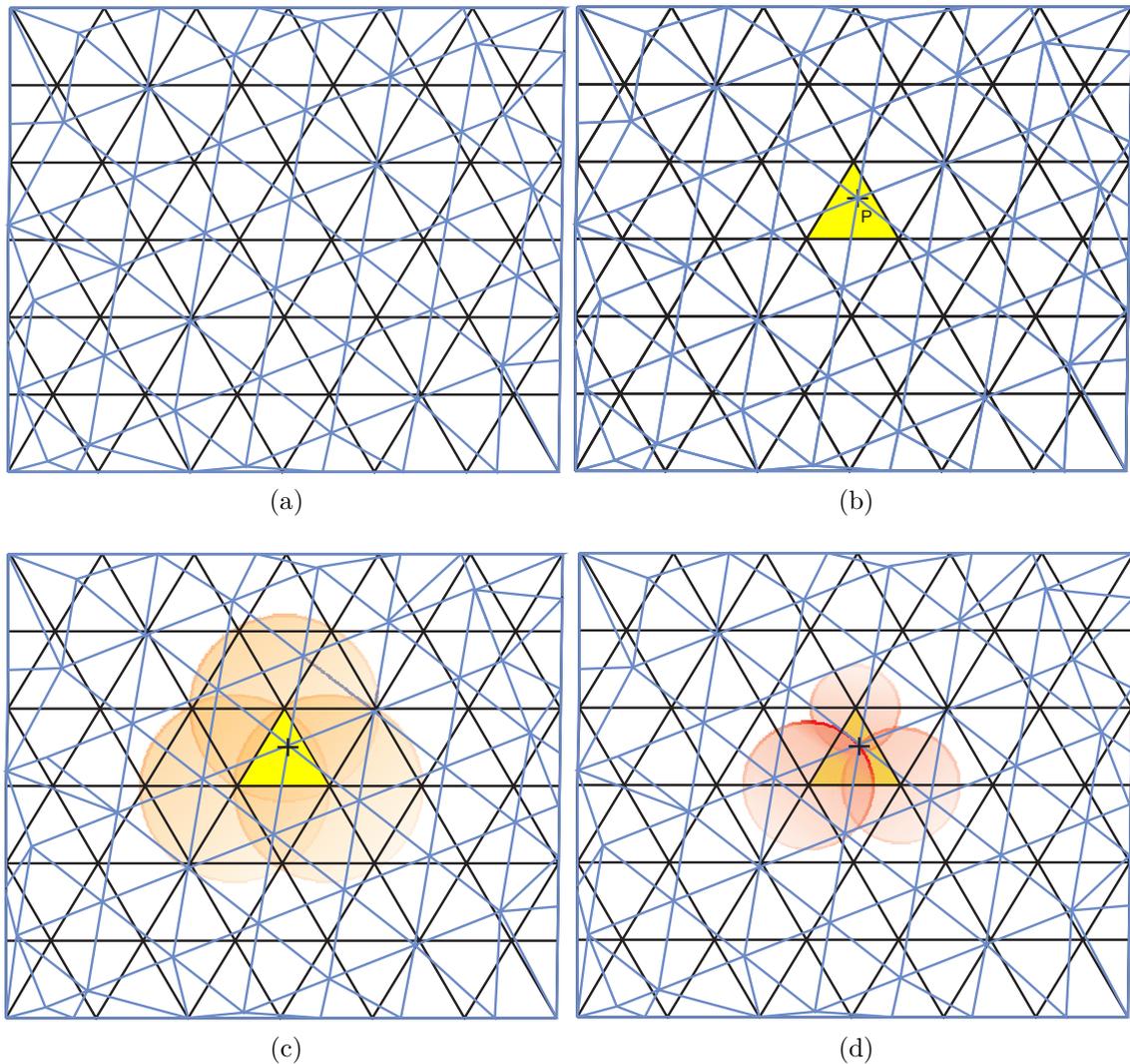


Figura 3.11: Procedimento de transferência de solução entre malhas cobrindo um domínio de mesma topologia através de interpolação de funções de base radial.

de base são empregados, indicados na cor amarela em (b). Os coeficiente da função de interpolação e do polinômio interpolador de  $s(\mathbf{x})$  da Eq. 3.42 são calculados para cada variável de conservação do problema através da interpolação de todos os nós pertencentes ao elemento da cor amarela, como representado em (c). Finalmente, em (d), com os coeficiente da função de interpolação de base radial todos calculados, é determinado o valor da função  $s(\mathbf{x})$  no ponto  $P$ , que é o valor da variável de conservação.

Uma simulação envolvendo topologias móveis pode ser descrita resumidamente pelas seguintes etapas:

1. Atualização da posição do contorno móvel  $\Gamma_m$  do domínio do fluido;

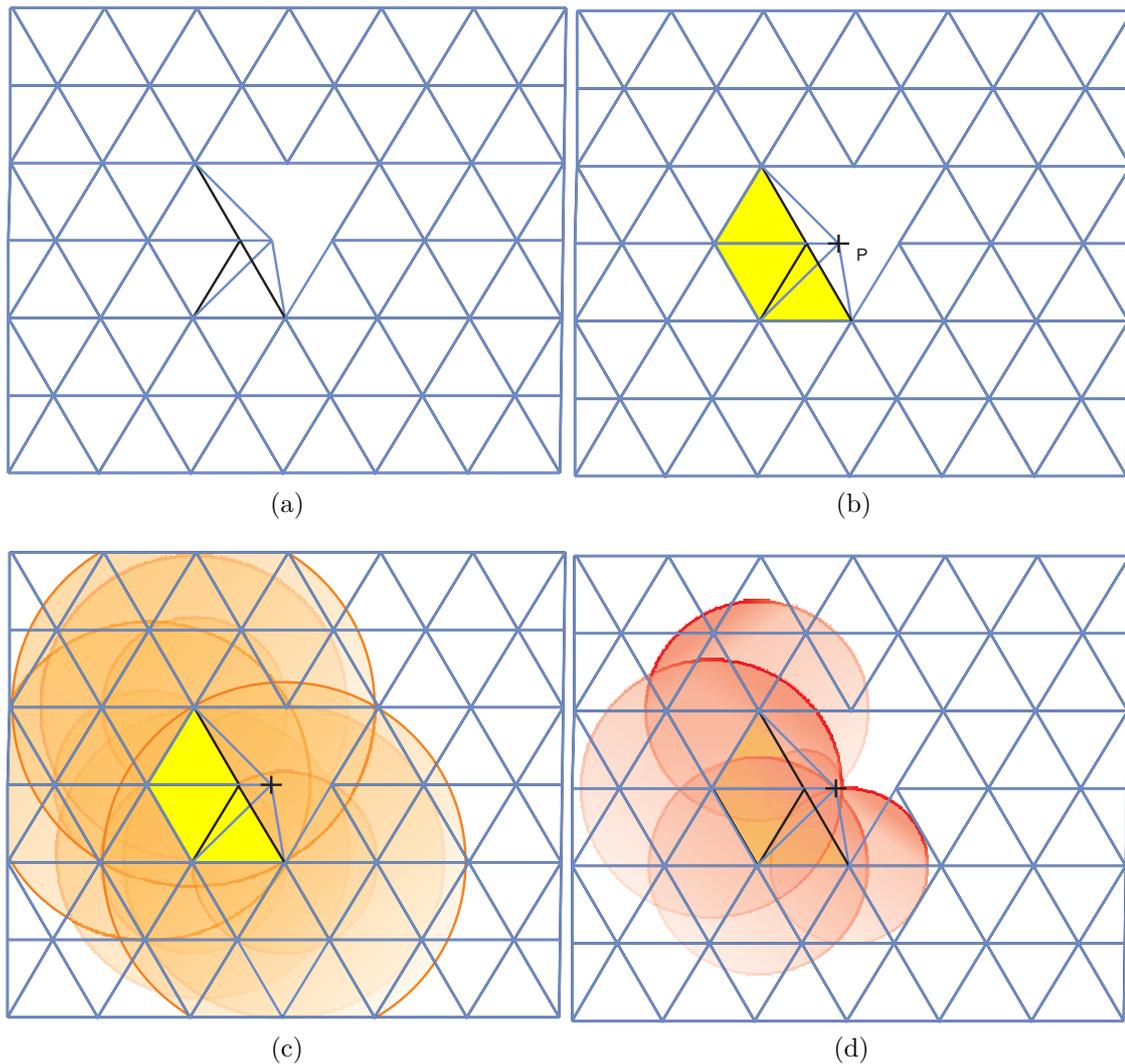


Figura 3.12: Procedimento de transferência de solução entre malhas cobrindo domínios com topologias diferentes através de interpolação de funções de base radial.

2. Atualização da posição dos nós no interior do domínio  $\Omega$  empregando-se funções de base radial que satisfazem as condições de contorno impostas em todo  $\Gamma_m$ ;
3. Atualização das variáveis de conservação do escoamento nos nós da malha após o movimento interpolando-se ou extrapolando-se a partir dos valores da malha antes do movimento. Emprega-se funções de base radial que satisfazem as condições de contorno de interpolação entre o elemento hospedeiro e elemento projetado;

as quais são repetidas a cada incremento de tempo.

---

# Capítulo 4

## Interação Fluido-Estrutura

O código CBS é acoplado a um elemento estrutural de cascas poliédricas para simular problemas de interação fluido-estrutura. O elemento e o acoplamento são descritos nesta seção.

### 4.1 Dinâmica Não-Linear em Mecânica de Sólidos

Considera-se o movimento de um corpo em um sistema cartesiano (fixo) de coordenadas, conforme mostra a Fig. 4.1. Todas as variáveis cinemáticas e estáticas são medidas neste sistema de coordenadas. As coordenadas de um ponto genérico  $P$  do corpo no tempo 0 são dadas por  ${}^0x_i$ ; no tempo  $t$  são dadas por  ${}^tx_i$  e no tempo  $t + \Delta t$  são dadas por  ${}^{t+\Delta t}x_i$ , onde o sobrescrito esquerdo indica a configuração do corpo e o sub-índice direito indica as componentes segundo os eixos coordenados, com  $i = 1,2,3$ .

A notação para os deslocamentos do corpo é feita de forma similar à empregada para as coordenadas: no tempo  $t$ , os deslocamentos são  ${}^tu_i$ , e, no tempo  $t + \Delta t$ , os deslocamentos são  ${}^{t+\Delta t}u_i$ , com  $i = 1,2,3$ .

Durante o movimento do corpo, o seu volume, área de superfície, massa específica, tensões e deformações modificam-se continuamente. Denota-se a massa específica, área e o volume do corpo nos tempos 0,  $t$  e  $t + \Delta t$  por:  ${}^0\rho$ ,  ${}^t\rho$ ,  ${}^{t+\Delta t}\rho$ ;  ${}^0\Gamma$ ,  ${}^t\Gamma$ ,  ${}^{t+\Delta t}\Gamma$ ; e  ${}^0\Omega$ ,  ${}^t\Omega$ ,  ${}^{t+\Delta t}\Omega$ , respectivamente.

Uma vez que a configuração do corpo no tempo  $t + \Delta t$  é desconhecida, as forças aplicadas,

---

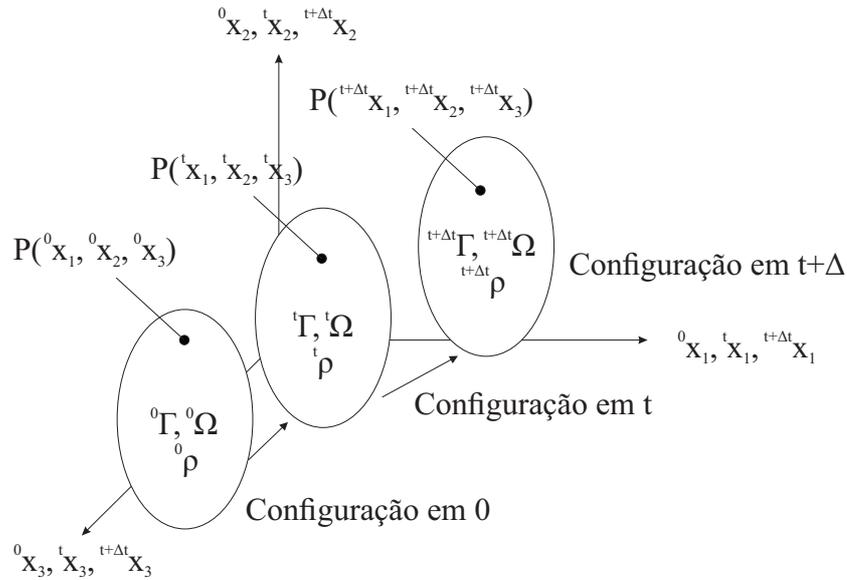


Figura 4.1: Movimento de um corpo em um sistema de coordenadas cartesianas estacionárias.

tensões e deformações são referenciadas a uma configuração de equilíbrio conhecida. De forma análoga à notação empregada para coordenadas e deslocamentos, um sobrescrito à esquerda indica em que configuração a quantidade (força de campo, tração de superfície, tensão, etc.) ocorre. Em adição, um sub-índice à esquerda indica a configuração a partir da qual a quantidade é mensurada. Por exemplo, as componentes de força de superfície no tempo  $t + \Delta t$ , mas medidas na configuração 0, são:  ${}^0_{t+\Delta t} f_i^\Gamma$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Adota-se como excessão a notação de uma quantidade considerada na qual ocorre na mesma configuração na qual é mensurada. Neste caso, o sub-índice esquerdo não é apresentado, como, por exemplo, em:  ${}^{t+\Delta t} \rho \equiv {}^0_{t+\Delta t} \rho$ .

A mudança de configuração do corpo pode ser determinada definindo-se medidas auxiliares de tensão e deformação. O tensor de deformação de Green-Lagrange pode ser empregado como medida de deformação, sendo suas componentes calculadas por (Malvern, 1969):

$${}^0_{t+\Delta t} E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^{t+\Delta t} u_i}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} u_j}{\partial {}^0 x_i} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} u_k}{\partial {}^0 x_i} \frac{\partial {}^{t+\Delta t} u_k}{\partial {}^0 x_j} \right) \quad (4.1)$$

onde  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Para as deformações, tem-se também que  ${}^0_{t+\Delta t} E_{ij} = {}^0_t \Delta E_{ij}$ , sendo a deformação incremental decomposta em:

$${}^0_t \Delta E_{ij} = {}^0_t \Delta \varepsilon_{ij} + {}^0_t \Delta \eta_{ij} \quad (4.2)$$

onde as componentes lineares  ${}^0_t \Delta \varepsilon_{ij}$ , na configuração  $t$ , são dadas por:

$${}^0_t \Delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^0 x_i} \right) \quad (4.3)$$

e as componentes não-lineares,  ${}^t\Delta\eta_{ij}$ , por:

$${}^t\Delta\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial^t x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^t x_j} \right) \quad (4.4)$$

O conjugado com relação ao trabalho do tensor de deformação de Green-Lagrange é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, cujas componentes são dadas por:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} \left( \frac{\partial^t x_i}{\partial^{t+\Delta t} x_m} \right) \left( \frac{\partial^t x_j}{\partial^{t+\Delta t} x_n} \right) {}^{t+\Delta t}\tau_{mn} \quad (4.5)$$

onde  $\tau_{mn}$  são as componentes do tensor de tensões de Cauchy e  $i, j, m, n = 1, 2, 3$ . De forma incremental,  ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$  pode se re-escrito através de:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^t\tau_{ij} + {}^t\Delta S_{ij} \quad (4.6)$$

onde  ${}^t\Delta S_{ij}$  é a tensão incremental referenciada à configuração  $t$ .

Na mecânica do contínuo, a equação de equilíbrio dinâmico não-linear em uma formulação Lagrangeana incremental pode ser obtida através do princípio dos trabalhos virtuais. Este princípio requer que no tempo  $t + \Delta t$  (Bathe, 1996):

$$\begin{aligned} \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i (\delta u_i) {}^{t+\Delta t} d\Omega + \int_{{}^t\Omega} ({}^t\Delta S_{ij}) (\delta_t \Delta \varepsilon_{ij}) {}^t d\Omega + \\ \int_{{}^t\Omega} ({}^t\tau_{ij}) (\delta_t \Delta \eta_{ij}) {}^t d\Omega = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}^t\Omega} ({}^t\tau_{ij}) (\delta_t \Delta e_{ij}) {}^t d\Omega \end{aligned} \quad (4.7)$$

com  $i, j = 1, 2, 3$ , onde o primeiro termo à esquerda corresponde às forças de inércia,  $\delta u_i$  são as componentes do vetor de deslocamentos virtuais,  $\delta_t \Delta \varepsilon_{ij}$  são os incrementos virtuais das componentes do tensor de Green-Lagrange referenciados à configuração no tempo  $t$  (sendo que estes incrementos virtuais são decompostos nas componentes de incrementos de deformação lineares  $\delta_t \Delta e_{ij}$  e não-lineares  $\delta_t \Delta \eta_{ij}$ ), e  ${}^{t+\Delta t}R$  é o trabalho virtual externo no tempo  $t + \Delta t$ , dado por:

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} ({}^{t+\Delta t}f_i^\Omega) (\delta u_i) {}^{t+\Delta t} d\Omega + \int_{{}^{t+\Delta t}\Gamma} ({}^{t+\Delta t}f_i^\Gamma) (\delta u_i^\Gamma) {}^{t+\Delta t} d\Gamma \quad (4.8)$$

onde  $f_i^\Omega$  e  $f_i^\Gamma$  são as componentes dos vetores de forças de campo e de superfície aplicadas no corpo, respectivamente, e  $\delta \Delta x_i^\Gamma$  são as componentes do deslocamento virtual calculadas na superfície. Empregando-se uma relação constitutiva para o material da forma:

$${}^t\Delta S_{ij} = ({}^tC_{ijmn}) ({}^t\Delta e_{mn}) \quad (4.9)$$

com  $i, j, m, n = 1, 2, 3$ , onde  ${}^tC_{ijmn}$  é o tensor incremental de propriedades do material na configuração  $t$ , obtido considerando-se a aproximação  $\delta_t \Delta E_{ij} = \delta_t \Delta \varepsilon_{ij}$ . Desta forma, a

Eq. (4.7) pode ser re-escrita na sua forma linearizada da seguinte forma:

$$\int_{t+\Delta t\Omega} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i (\delta u_i)^{t+\Delta t} d\Omega + \int_{t\Omega} ({}^t C_{ijmn}) ({}^t \Delta e_{mn}) (\delta_t \Delta e_{ij})^t d\Omega + \int_{t\Omega} ({}^t \tau_{ij}) (\delta_t \Delta \eta_{ij})^t d\Omega = {}^{t+\Delta t} R - \int_{t\Omega} ({}^t \tau_{ij}) (\delta_t \Delta e_{ij})^t d\Omega \quad (4.10)$$

onde os pontos acima da variável indicam derivadas temporais.

## 4.2 Elemento Triangular de Placas Finas e Cascas

Analisa-se uma estrutura de placa fina (ou casca poliédrica) sujeita a esforços que atuam no plano médio da placa (esforços de membrana) e esforços de flexão. Considera-se que tais deformações são independentes e assume-se que as hipóteses da teoria de flexão de placas de Kirchhoff são válidas, de forma que as componentes incrementais de deslocamentos podem ser expressas da forma (Bathe e Ho, 1981):

$$\Delta u_i^z = \Delta u_i - \frac{\partial \Delta w}{\partial x_i} z \quad (4.11)$$

e:

$$\Delta w^z = \Delta w \quad (4.12)$$

onde  $w$  indica o deslocamento transversal,  $z$  é o valor da coordenada na direção do eixo normal ao plano médio, e  $\Delta w$  é seu incremento, referenciado a esse plano, onde  $i, j = 1, 2$ .

Substituindo-se a Eq. (4.11) e Eq. (4.12) nas Eq. (4.3) e Eq. (4.4), obtém-se, respectivamente:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x_i \partial x_j} z \quad (4.13)$$

e:

$$\Delta \eta_{ij}^z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta w}{\partial x_j} \right) \quad (4.14)$$

onde  $i, j, k = 1, 2$ .

O elemento triangular considerado está ilustrado na Fig. 4.2, contendo 3 nós e 6 graus de liberdade por nó. A matriz de rigidez total do elemento é obtida através da superposição da matriz de membrana com a matriz de flexão.

Um elemento de membrana possui 2 graus de liberdade de translação e um de rotação (ver Fig. 4.2), sendo que os deslocamentos membranais, considerado-se a rotação no plano

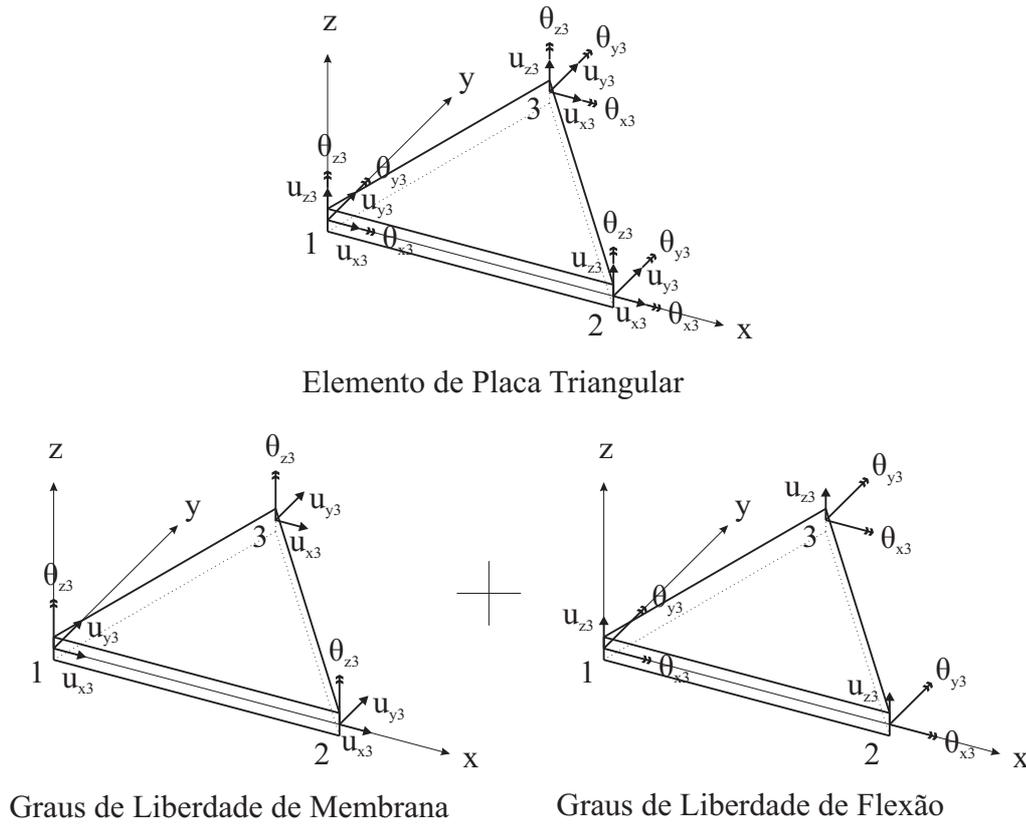


Figura 4.2: Elemento de placa e graus de liberdade considerados.

da superfície média do elemento (*drilling*), são:

$$\mathbf{q}_{mi}^e = [u_{xi}, u_{yi}, \theta_{zi}]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.15)$$

onde  $u_{xi}$  e  $u_{yi}$  são os graus de liberdade de translação e  $\theta_{zi}$  o grau de liberdade rotação. Portanto, os deslocamentos de membrana podem ser expressos por:

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{N}_m \Delta \mathbf{q}_m \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{N}_m$  é matriz de função de interpolação de membrana (Qun et al., 1998) e:

$$\mathbf{u}_m = [u_x, u_y]^T \quad (4.17)$$

Os graus de liberdade de flexão para uma placa delgada são (ver Fig. 4.2):

$$\mathbf{q}_{bi}^e = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.18)$$

onde  $w_i$  são os deslocamentos transversais nodais e  $\theta_{xi}$  e  $\theta_{yi}$  são as rotações nodais no entorno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. A deflexão é calculada por (Qun et al., 1998):

$$w = \mathbf{N}_b \Delta \mathbf{q}_b \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{N}_b$  é a matriz de função de interpolação de flexão.

Os incrementos de deformações lineares dados pela Eq. (4.3) são decompostos em incrementos de deformações lineares de membrana  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m$  e incrementos de deformação de flexão  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_b$  (curvaturas), dados por, respectivamente:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\Delta u_x/\partial x \\ \partial\Delta u_y/\partial y \\ \partial\Delta u_x/\partial y + \partial\Delta u_y/\partial x \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \Delta k_x \\ \Delta k_y \\ \Delta k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial^2\Delta w/\partial x^2 \\ \partial^2\Delta w/\partial y^2 \\ \partial^2\Delta w/\partial x\partial y \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Substituindo-se a Eq. (4.16) na Eq. (4.20), obtém-se o vetor de incrementos de deformações de membrana em função dos deslocamentos de membrana nodais, na seguinte forma:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}_m\Delta\mathbf{q}_m^e \quad (4.22)$$

onde  $\mathbf{B}_m$  é a matriz relação deformação-deslocamento de membrana. Os incrementos de deformação de flexão podem ser obtidos em função dos deslocamentos nodais de flexão. Empregando-se a Eq. (4.18) na Eq. (4.21) obtém-se:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b\Delta\mathbf{q}_b^e \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{B}_b$  é a matriz relação deformação-deslocamento de flexão.

### 4.3 Formulação Lagrangeana Atualizada

A equação incremental dos trabalhos virtuais em uma formulação lagrangeana atualizada descrita na Eq. (4.10) e empregada no elemento triangular de cascas poliédricas, desconsiderando-se os termos de inércia, conduz à seguinte equação (Qun et al., 1998):

$$I_1 + I_2 = I_3 - I_4 \quad (4.24)$$

onde:

$$I_1 = \int_{t\Omega} ({}_tC_{ijmn}) ({}_t\Delta e_{mn}) (\delta_t\Delta e_{ij})^t d\Omega \quad (4.25)$$

$$= \int_{t\Gamma} \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^t d\Gamma + \int_{t\Gamma} \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_b^t d\Gamma \quad (4.26)$$

é o incremento linear dos trabalhos virtuais e as matrizes constitutivas incrementais de membrana e de flexão são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{D}_m = \frac{Et}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{D}_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde  $h$  é a espessura da placa, admitida como constante,  $E$  é módulo de elasticidade isotrópico e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

$$I_2 = \int_{t\Omega} ({}^t\tau_{ij}) (\delta_t \Delta \eta_{ij})^t d\Omega \quad (4.29)$$

$$= \int_{t\Gamma} \delta \Delta \eta_G^T {}^t\mathbf{T} \eta_G^t d\Gamma \quad (4.30)$$

corresponde aos termos não-lineares, onde as forças internas de membrana são dadas por:

$${}^t\mathbf{T} = \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m {}^t\mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{T}_{xx} & {}^t\mathbf{T}_{xy} \\ {}^t\mathbf{T}_{yx} & {}^t\mathbf{T}_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

e:

$$\Delta \eta_G = \begin{bmatrix} \partial \Delta w / \partial x \\ \partial \Delta w / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{G}_G \Delta \mathbf{u}_b^e \quad (4.32)$$

onde  $\mathbf{G}_G$  é a matriz geométrica do elemento.

$$I_3 = {}^{t+\Delta t} R = \int_{t+\Delta t\Omega} ({}^{t+\Delta t} f_i^\Omega) (\delta u_i)^{t+\Delta t} d\Omega + \int_{t+\Delta t\Gamma} ({}^{t+\Delta t} f_i^\Gamma) (\delta u_i^\Gamma)^{t+\Delta t} d\Gamma \quad (4.33)$$

é o incremento de trabalho virtual realizado pelas forças externas no instante  $t + \Delta t$ .

$$I_4 = \int_{t\Omega} ({}^t\tau_{ij}) (\delta_t \Delta e_{ij})^t d\Omega \quad (4.34)$$

$$= \int_{t\Gamma} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T {}^t\mathbf{Q}^t d\Gamma + \int_{t\Gamma} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T {}^t\mathbf{M}_b^t d\Gamma \quad (4.35)$$

é o incremento de trabalho virtual devido às forças internas no instante  $t$ , onde:

$${}^t\mathbf{Q} = [{}^t\mathbf{T}_{xx} \quad {}^t\mathbf{T}_{yy} \quad {}^t\mathbf{T}_{xy}]^T \quad (4.36)$$

é o vetor de forças nodais correspondentes às forças internas de membrana e:

$${}^t\mathbf{M}_b = [{}^t\mathbf{M}_{xx} \quad {}^t\mathbf{M}_{yy} \quad {}^t\mathbf{M}_{xy}]^T = \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b^t {}^t\mathbf{u}_b \quad (4.37)$$

são os momentos de flexão do elemento.

As equações de equilíbrio incrementais para um problema estático (omitindo-se a matriz de rigidez não-linear para simplificar o equacionamento), discretizadas pela técnica de elementos finitos para o modelo descrito, ficam da seguinte forma:

- Parte de membrana:

$$\mathbf{K}_m \Delta \mathbf{u}_m = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_m - {}^t \mathbf{F}_m \quad (4.38)$$

onde a matriz de rigidez referente aos efeitos de membrana é dada por:

$$\mathbf{K}_m = \int_{t d\Gamma} \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m {}^t d\Gamma \quad (4.39)$$

e o vetor de forças nodais externas, referentes aos efeitos de membrana é dado por:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_m = \int_{t d\Gamma} \mathbf{N}_m^T \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_x \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_y \end{bmatrix} {}^t d\Gamma \quad (4.40)$$

onde  $\mathbf{R}_x$  e  $\mathbf{R}_y$  são as forças externas nodais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e:

$${}^t \mathbf{F}_m = \int_{t d\Gamma} \mathbf{B}_m^T \mathbf{Q} {}^t d\Gamma \quad (4.41)$$

é o vetor contendo as forças nodais equivalentes devido às forças internas no instante de tempo  $t$ , correspondente aos efeitos de membrana. Para o cálculo de  ${}^t \mathbf{Q}$  utiliza-se as componentes de deslocamentos totais de membrana  ${}^t \mathbf{u}_m$  em um instante de tempo  $t$ . Estes deslocamentos são calculados pela diferença entre as coordenadas locais do elemento no instante  $t$  e 0 (Bathe e Ho, 1981).

- Parte de flexão:

$$\mathbf{K}_b \Delta \mathbf{u}_b = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_b - {}^t \mathbf{F}_b \quad (4.42)$$

onde:

$$\mathbf{K}_b = \int_{t d\Gamma} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b {}^t d\Gamma \quad (4.43)$$

é a matriz de rigidez referente aos efeitos de flexão. O vetor de forças nodais externas referentes aos efeitos de flexão é dado por:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_b = \int_{t d\Gamma} \mathbf{N}_b^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_z {}^t d\Gamma \quad (4.44)$$

onde  $\mathbf{R}_z$  é o vetor de forças externas nodais na direção  $z$  e o vetor de forças nodais equivalentes devido às forças internas no instante  $t$ , correspondente aos efeitos de flexão, é dado por:

$${}^t \mathbf{F}_b = \int_{t d\Gamma} \mathbf{B}_b^T \mathbf{M}_b {}^t d\Gamma \quad (4.45)$$

Enquanto que as forças internas de membrana no instante  $t$  são calculadas através dos deslocamentos totais de membrana, os momentos de flexão do elemento são calculados por incrementos:

$${}^t \mathbf{M}_b = {}^{t-\Delta t} \mathbf{M}_b + {}_{t-\Delta t} \Delta \mathbf{M}_b \quad (4.46)$$

onde os momentos de flexão incrementais são dados por:

$${}_{t-\Delta t}\Delta\mathbf{M}_b = \mathbf{D}_b\mathbf{B}_{bt-\Delta t}\Delta\mathbf{u}_b \quad (4.47)$$

sendo  ${}_{t-\Delta t}\Delta\mathbf{u}_b$  o vetor de deslocamentos incrementais de flexão na configuração  $t - \Delta t$ .

O sistema de equações a ser solucionado, considerando-se os efeitos da não-linearidade geométrica, fica da forma:

$${}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}-{}^t\mathbf{F} \quad (4.48)$$

onde:

$$\Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_1 \\ \Delta\mathbf{u}_2 \\ \Delta\mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta\mathbf{u}_i^T = [\Delta u_{xi} \quad \Delta u_{yi} \quad \Delta w_i \quad \Delta\theta_{xi} \quad \Delta\theta_{yi} \quad \Delta\theta_{zi}] \quad (4.49)$$

em que  ${}^t\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL}$ , sendo  $\mathbf{K}_L$  a matriz de rigidez linear formada pelas matrizes  $\mathbf{K}_m$  e  $\mathbf{K}_b$  e  $\mathbf{K}_{NL}$  é a matriz de rigidez não-linear (Bathe e Ho, 1981).

Para solução das equações de equilíbrio incrementais, procede-se com uma técnica padrão de elementos finitos, onde emprega-se um sistema de referência global, sendo, portanto, necessário realizar uma transformação de coordenadas para montagem da rigidez global da estrutura (Bathe, 1996).

## 4.4 Solução Iterativa das Equações de Equilíbrio Incrementais

Adicionando-se às equações de equilíbrio incrementais, descritas pela Eq. (4.48), os efeitos das forças de amortecimento e de inércia, obtém-se o seguinte sistema a ser solucionado (Bathe, 1996):

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} + {}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}-{}^t\mathbf{F} \quad (4.50)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento,  ${}^t\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez que inclui as matrizes de rigidez linear e não-linear,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$  é o vetor de forças externas aplicadas no instante de tempo  $t + \Delta t$ ,  ${}^t\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais equivalentes no instante  $t$ ,  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$  e  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$  são os vetores nodais de acelerações e velocidades, respectivamente, e  $\Delta\mathbf{u}$  é o vetor de incremento de deslocamentos nodais do instante  $t$  ao instante  $t + \Delta t$ .

O sistema dado pela Eq. (4.50) deve ser solucionado a cada passo de tempo usando-se um esquema de integração numérica. Neste trabalho, emprega-se o método clássico (trapezoidal) de Newmark (Clough e Penzien, 1975). O método emprega passos de tempo uniformes e a convergência do processo iterativo é verificada por um critério em termos de deslocamentos (Bathe, 1996). O método iterativo dos gradientes conjugados com pré-condicionamento diagonal (Hestenes e Stiefel, 1952) é empregado para solução dos incrementos de deslocamentos.

## 4.5 Acoplamento Fluido-Estrutura

Um problema de interação fluido-estrutura é definido pelo acoplamento dinâmico entre um corpo móvel rígido ou deformável que interage com o fluido onde está imerso. Na formulação clássica da interação fluido-estrutura, tem-se que na interface  $\Gamma_{FS}$  entre o fluido e a estrutura a seguinte relação cinemática é satisfeita (Lombardi et al., 2013):

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_S \quad \text{em} \quad \Gamma_{FS} \quad (4.51)$$

a qual expressa a compatibilidade dos campos de deslocamentos do fluido  $\mathbf{u}_F$  e da estrutura  $\mathbf{u}_S$ , que deve ser contínua na interface  $\Gamma_{FS}$ , adicionando-se a seguinte condição dinâmica:

$$\boldsymbol{\tau}_F \mathbf{n}_F = \boldsymbol{\tau}_S \mathbf{n}_S \quad \text{em} \quad \Gamma_{FS} \quad (4.52)$$

a qual garante o equilíbrio de forças, onde  $\boldsymbol{\tau}_{F,S}$  e  $\mathbf{n}_{F,S}$  denotam os tensores de tensões e o vetor normal unitário, respectivamente.

Embora abordagens monolíticas possam ser empregadas, utiliza-se um modelo particionado neste trabalho, de forma que o algoritmo estrutural de cascas e o de escoamentos são empregados separadamente e acoplados através de condições de interface. No modelo clássico de decomposição de domínios de Dirichlet-Neumann, o qual é considerado neste trabalho, o campo de deslocamentos na interface é transferido da estrutura para o fluido, enquanto que as forças geradas pelo escoamento são aplicadas na estrutura através da relação definida na Eq. (4.52).

Considera-se o caso geral onde as malhas do fluido e da estrutura não são coincidentes na interface, de forma que interpolações (ou projeções) são necessárias para transferir

a informação entre os dois domínios. Um esquema particionado convencional de acoplamento fraco é empregado. Os passos do algoritmo são descritos a seguir (Teixeira, 2001):

1. Estabelecimento de condições iniciais para a estrutura e o fluido;
2. Atualização das variáveis da estrutura;
3. Atualização da topologia do domínio do fluido;
4. Atualização do escoamento do fluido na nova topologia;
5. Atualização da estrutura com novas cargas devido à pressão e tensões viscosas do fluido;
6. Repetição a partir do passo (3), até os objetivos da simulação serem alcançados

Observa-se que o esquema é idêntico ao empregado para variação topológica do domínio do fluido excetuando-se a transferência ao longo da interface. Esta transferência é realizada empregando-se a técnica de interpolação de funções de base radial. A principal vantagem do emprego de RBF é que a interpolação fica definida para todo o domínio espacial, podendo facilmente ser empregado em malhas não-coincidentes.

A informação da estrutura para fluido é transferida empregando-se o deslocamento de todos os nós da estrutura  $\mathbf{u}_S$  conjuntamente aos contornos fixos do fluido para definir um campo de deslocamentos nos nós do fluido com interpolação RBF. As pressões e tensões viscosas são projetadas na estrutura também com interpolação RBF, onde estes valores nodais definidos em  $\boldsymbol{\tau}_F$  são usados para construir o mapeamento.

---

## Capítulo 5

# Visualização Científica, Pós-Processamento e Computação Paralela

Uma simulação numérica geralmente é constituída de três etapas fundamentais: pré-processamento, cálculo numérico e pós-processamento. O pós-processamento engloba vários temas incluindo visualização científica e determinação de parâmetros tais como coeficientes aerodinâmicos. Para o caso de escoamentos turbulentos compressíveis, a visualização científica desempenha um papel fundamental para compreensão do escoamento, visualização de vórtices, ondas de choque, compressibilidade, trajetória das partículas do escoamento, distribuição de pressão, dentre outras tantas informações a serem geradas a partir de um banco de dados numérico obtido como resultado da simulação. Como o cálculo numérico envolve uma quantidade muito grande de dados a serem processados, torna-se fundamental o emprego de técnicas de computação paralela para acelerar o cálculo da simulação.

### 5.1 Visualização Científica de Escoamentos Compressíveis Turbulentos

Entre os efeitos compressíveis turbulentos a serem caracterizados por uma técnica de visualização científica, certamente o nível de compressibilidade do fluido, os vórtices formados, a trajetória das partículas do fluido no escoamento, bem como a formação e posição de ondas de choque são de grande interesse para escoamentos compressíveis.

---

### 5.1.1 Visualização de Compressibilidade e Identificação de Ondas de Choque

Do ponto de vista físico, as ondas de choque possuem uma forma curvada ou plana descontínua no escoamento. Manipulações tradicionais de soluções básicas do escoamento, tais como plotar contornos de variáveis de conservação, iso-superfícies, vetores ou linhas de corrente muitas vezes se mostram insuficientes para detectar tais efeitos. Existem muitas técnicas específicas para tal finalidade, tais como métodos característicos ou baseados em normalização de número de Mach (Lovely e Haines, 1999). Entretanto, optou-se por empregar neste trabalho a magnitude do gradiente de massa específica no escoamento. Desta forma, tem-se plotado de forma objetiva as regiões onde verificam-se efeitos de compressibilidade (Ziniu et al., 2013). É interessante observar que este método é bastante próximo de técnicas empregadas experimentalmente tais como o método Schlieren de fotografias (Ulrych, 2004), as quais detectam variações de densidade no fluido em seções de corte. Optou-se por empregar uma paleta de cores monocromática neste trabalho, pois desta forma tem-se maior clareza quanto à interpretação de variação de cores de acordo com a variação de compressibilidade no fluido.

### 5.1.2 Identificação de Vórtices

Embora pareça razoável acreditar que saibamos identificar ou reconhecer um vórtice, é difícil de se encontrar uma definição matemática não-ambígua para tal. A dificuldade reside em que o conceito intuitivo geral de vórtice é vago, e pode ser descrito por um movimento de circulação presente no fluido. O problema é maior caso se deseje compreender os limites do vórtice, isto é, entendendo o vórtice como uma estrutura finita, é difícil concordar em definitivo onde o vórtice inicia e onde termina.

Desde o descobrimento de estruturas vorticais na turbulência, pesquisas na área de identificação de vórtices têm sido de extremo interesse. A identificação de vórtices pode ser compreendida como uma ferramenta que auxilia na compreensão de fenômenos complexos. Mais do que isso, possui aplicações práticas na indústria. Por exemplo, o controle de escoamentos necessita de uma compreensão precisa das estruturas presentes no fluido.

Jeong e Hussain (1995) enfatizam a necessidade de empregar-se um critério de identificação de vórtices que possua invariância de Galileu, isto é, que seja invariante para todos os sistemas de referência inerciais. Considerando-se as componentes do campo de velocidades tridimensional  $u_i(t)$  como suaves, pode-se fundamentar os critérios de identificação de vórtices com tal invariância através da seguinte decomposição do tensor de gradientes de velocidades:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = S_{ij} + \Omega_{ij} \quad (5.1)$$

onde:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.2)$$

sendo  $S_{ij}$  o tensor de taxa de deformação (parte simétrica) e  $\Omega_{ij}$  o tensor de vorticidade (parte anti-simétrica). Diversos critérios podem ser formulados empregando-se tal decomposição. Um deles, que corresponde ao empregado neste trabalho, é o critério  $Q$ , o qual define um vórtice como uma região espacial conectada na qual o segundo invariante do gradiente de velocidades é positivo, isto é (Hunt et al., 1988):

$$Q = \frac{1}{2} \left( |\Omega|^2 - |S|^2 \right) \quad (5.3)$$

onde  $|\Omega| = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2}$  é a norma euclidiana de  $\Omega_{ij}$  e  $|S| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$  é a norma euclidiana de  $S_{ij}$ . O critério  $Q$ , portanto, representa o balanço local entre tensões de taxa de cisalhamento e magnitude de vorticidade, definindo os vórtices como áreas onde a magnitude da vorticidade é maior que a magnitude da taxa de deformação do fluido.

Outras metodologias populares de identificação de vórtices são o critério  $\lambda_2$  (Jeong e Hussain, 1995) e o critério  $\Delta$  (Chong et al., 1990), embora outros critério possam ser adotados (Haller, 2005).

## 5.2 Coeficientes Aerodinâmicos

As forças aerodinâmicas atuantes em um corpo podem ser decompostas em uma parcela normal  $F_{x_N}$  e outra axial  $F_{x_A}$  com respeito à geometria. Por exemplo, para um aerofólio (Fig. 5.1), o parâmetro geométrico de referência empregado é a linha da corda. As forças aerodinâmicas são a resistência oferecida pelo corpo ao escoamento, sendo portanto a força exercida pelo fluido no corpo em condições de equilíbrio. Existe uma parcela de

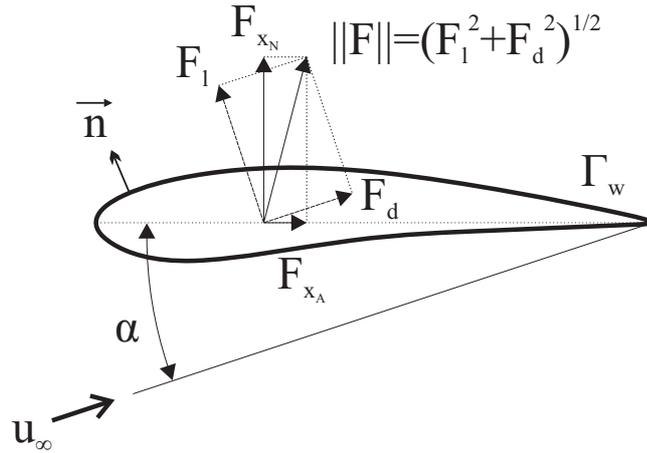


Figura 5.1: Forças de arrasto, sustentação, normais e axiais.

contribuição da pressão  $p$  e outra das forças viscosas atuantes no corpo. Por exemplo, tomando-se a referência axial e normal como alinhadas com as direções cartesianas  $x_i$ , tem-se que:

$$F_{x_i} = \int (\tau_{ij}n_j - pn_i) d\Gamma_w \quad (5.4)$$

A força de arrasto  $F_d$  e de sustentação  $F_l$  são as parcelas da força resultante atuante na direção do escoamento e perpendicular ao mesmo, respectivamente. Uma forma usual de definir estas forças é usando-se a direção da velocidade de corrente livre  $u_\infty$  e o ângulo de ataque  $\alpha$  (Fig. 5.1). Sabendo-se a força normal e axial, pode-se calcular a força de sustentação:

$$F_l = F_{x_N} \cos \alpha - F_{x_A} \sin \alpha \quad (5.5)$$

e a de arrasto:

$$F_d = F_{x_N} \sin \alpha + F_{x_A} \cos \alpha \quad (5.6)$$

Assim, não importa o ângulo de ataque, a força de arrasto e de sustentação sempre se mantêm na mesma orientação do escoamento.

Os coeficientes adimensionais de arrasto  $C_d$  e de sustentação  $C_l$  são definidos por:

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 A_r} \quad \text{e} \quad C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 A_r} \quad (5.7)$$

onde  $A_r$  corresponde à área frontal na direção do escoamento tomada como referência.

Por fim, o coeficiente de pressão  $c_p$  é definido por:

$$c_p = \frac{2(p_i - p_\infty)}{\rho_\infty u_\infty^2} \quad (5.8)$$

onde  $p_i$  é a pressão avaliada no ponto  $i$ .

## 5.3 Computação Paralela

Devido à grande demanda de recursos computacionais envolvidos, principalmente no caso de simulações tridimensionais, torna-se indispensável o uso da Computação de Alto Desempenho - *High Performance Computing* (HPC). Neste sentido, implementou-se o código visando otimizar o uso do *hardware* disponível e de forma a se adequar automaticamente para computadores de memória compartilhada utilizando diretivas OpenMP de computação paralela. Breves comentários são feitos quanto às particularidades de implementação empregadas no presente código desenvolvido. Uma exposição ampla sobre a linguagem de programação Fortran 90/95 é encontrado em [Chapman \(2007\)](#) e uma descrição concisa de programação de alto desempenho e programação paralela OpenMP pode ser encontrada em [Chapman et al. \(2007\)](#) e [Hager e Wellein \(2011\)](#).

Em todas as etapas do código desenvolvido, as seguintes otimizações seqüenciais básicas são sempre empregadas ([Linn, 2013](#)):

- Redução de trabalho dispensável;
- Eliminação de sub-cálculos comuns;
- Evitar ramificações condicionais;
- Uso de intrínsecos;
- Simplificação de operações;
- Uso de subrotinas e funções.

Para otimização de acesso à memória, há dificuldades muito grandes devido ao tipo de problema abordado: malhas não-estruturadas transientes. As técnicas empregadas são ([Tuszynski e Löhner, 1998](#)):

- Acesso à arranjos evitando *cache-miss*;
- Uso massivo de listas de informações em formato vetorial

sendo que as listas de informações dinâmicas incluem ([Löhner, 1988](#)):

- Elementos que pertençam a um nó;
- Nós vizinhos a um dado nó;
- Elementos vizinhos a outros elementos;
- Conectividades de cada aresta;
- Arestas de um elemento.

Verifica-se que não foi listada uma etapa geralmente importante: renumeração nodal [Löhner \(1998\)](#). Esta renumeração aumenta a eficiência do cálculo do escoamento uma vez que otimiza o acesso à memória. Porém, uma vez que atualiza-se a malha constantemente na simulação transiente, resulta que é mais custoso ficar renumerando os nós do que empregar a malha com numeração aleatória, pelo menos nos testes realizados empregando-se técnicas do tipo frente de avanço (*advancing-front* ou também *wave-renumbering*). Um estudo mais aprofundado de técnicas de renumeração particulares para adaptação de malhas em problemas transientes não deve ser descartado, contudo, para trabalhos futuros.

A paralelização empregada é do tipo OpenMP, portanto facilmente programada com mínimas alterações no código seqüencial. Em particular, para os algoritmos de adaptação, atenção especial deve ser tomada. Não é possível mover nós, remover elementos e outros procedimentos de forma paralela direta, pois os dados vizinhos influenciam a seqüência de operações. Trata-se de um problema clássico de paradigma de conjuntos independentes, comumente tratado por algoritmos de coloração de grafos ([JaJa, 1992](#)). A [Fig. 5.2](#) ilustra o procedimento adotado, onde uma malha é apresentada e um número (cor) é associado a cada nó. Verifica-se que todos os nós com mesma numeração são independentes entre si, isto é, podem se mover sem alterar a geometria de elementos no entorno de outros nós com mesma numeração. Portanto, pode-se distribuir um conjunto de nós de mesma coloração entre os processadores para otimização da malha em paralelo. Finalizado um grupo de coloração, envia-se o próximo até que o último seja finalizado. Pode parecer não significativo em problemas bidimensionais, mas, em problemas tridimensionais, mover cada nó da malha constantemente sem uso de uma técnica paralela é completamente inviável. Basta verificar que para malhas tetraédricas cada nó geralmente possui em

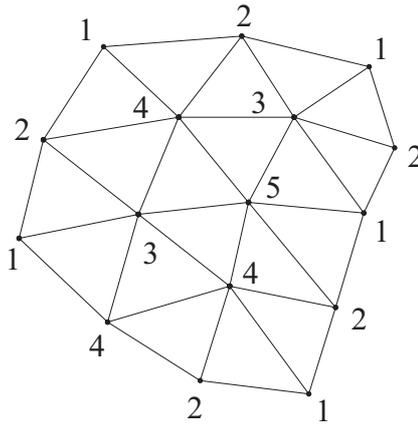


Figura 5.2: Coloração de nós para adaptação de malhas em computação paralela.

média 15 nós vizinhos. Se é modificada uma malha de 1 milhão de nós 1000 vezes ao longo de uma simulação, lembrando que no algoritmo desenvolvido são empregadas 3 etapas de movimento por adaptação, e que cada ciclo inclui calcular a qualidade de cada elemento circundante ao nó, bem como volume orientado, além de interpolação linear e atualização de métrica, chega-se à mastodôntica soma na casa de trilhões de cálculos a serem realizados, apenas para mover os nós constantemente.

Para refinar malhas, a paralelização é direta, pois uma operação não influi no elemento vizinho uma vez que um padrão pode ser obtido. O desrefinamento segue a mesma metodologia do movimento, onde uma técnica de coloração é empregada

---

# Capítulo 6

## Resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos empregando-se as metodologias desenvolvidas de adaptação de malhas e movimento para solução de problemas turbulentos compressíveis e de interação fluido-estrutura. São estudadas aplicações do algoritmo bidimensional e tridimensional tanto para problemas analíticos quanto acoplados aos algoritmos de elementos finitos desenvolvidos. Os problemas analíticos investigados visam esclarecer e analisar com mais detalhes as propriedades dos algoritmos de adaptação e movimento enquanto que o acoplamento destes algoritmos com o código CBS e de dinâmica não-linear de estruturas são aplicações diretas e constituem estudos de caso. Considera-se o fluido como sendo o ar, onde o valor de número de Prandtl de corrente-livre adotado vale  $Pr_\infty = 0,72$  e a relação entre o coeficiente de calor específico à pressão e volume constante vale  $\gamma = 1,40$ . Considera-se também que a temperatura de corrente-livre do escoamento vale  $T_\infty = 256K$ . Para todas as simulações, as condições iniciais são as de corrente-livre.

### 6.1 Adaptação de Malhas Bidimensionais e Tridimensionais para Campos Analíticos

Um domínio quadrado bidimensional  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  é primeiramente considerado com uma malha inicial contendo 61 nós e 100 elementos (Fig. 6.1a). Um campo analítico  $u_1(x,y)$  dado por (Hetmaniuk e Knupp, 2011):

$$u_1(x,y) = \sin \left[ 5(2x - 1,2)^3 (4y^2 - 6y + 3) \right] \quad (6.1)$$

---

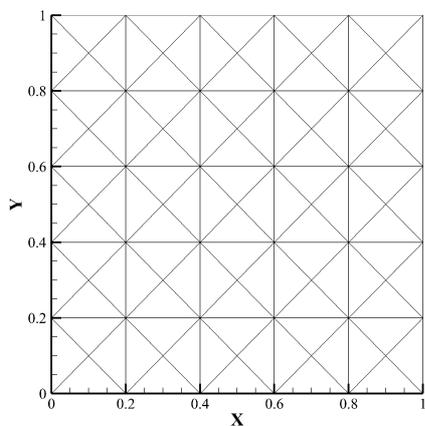
é imposto e primeiramente considerado (Fig. 6.1f). O presente algoritmo de adaptação de malhas é executado ao longo de 10 iterações para três valores de erro de interpolação objetivado  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2}$ : 0,15, 0,10 e 0,05, medidos na norma  $\mathbf{L}^p$  com  $p = 2$ . Apesar da baixa qualidade (e resolução) promovida pela malha inicial, as malhas adaptadas exibem elementos altamente anisotrópicos e eles são apresentados nas Fig. 6.1b, Fig. 6.1c e Fig. 6.1d. Os elementos ao longo de  $x = 0,6$  encontram-se totalmente alinhados ao longo da direção do eixo  $y$  desde o extremo da borda superior até o extremo oposto na borda inferior. Os outros elementos encontram-se alinhados segundo as direções senoidais do campo imposto. Um detalhe do canto inferior esquerdo da malha obtida para o caso  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0,05$  é apresentada na Fig. 6.1e, mostrando os elementos alinhados.

O erro médio das arestas ao longo de cada iteração de adaptação é mostrado na Fig. 6.2a, onde pode-se observar que o erro de interpolação objetivado é alcançado aproximadamente na quinta iteração para os três casos. A Fig. 6.2b mostra um comparativo da variância do erro das arestas para cada iteração de adaptação. A variância do erro das arestas é uma medida de equidistribuição do erro e pode-se observar que seu valor diminui ao diminuirmos o valor de erro de adaptação objetivado. O tamanho da malha para os três casos é indicado na Fig. 6.2c, onde uma malha composta por 2 510, 701 e 342 nós é obtida para os casos de erro de interpolação objetivo nos valores de 0,05, 0,10 e 0,15, respectivamente.

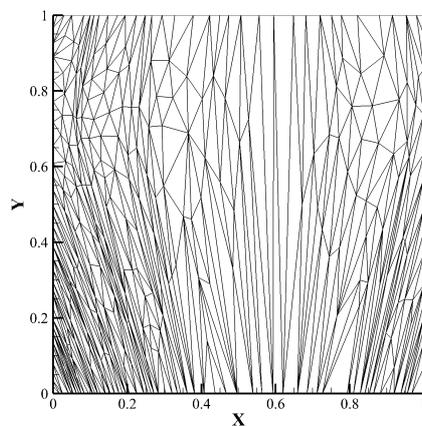
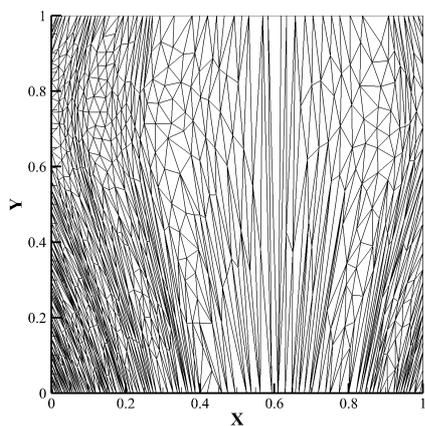
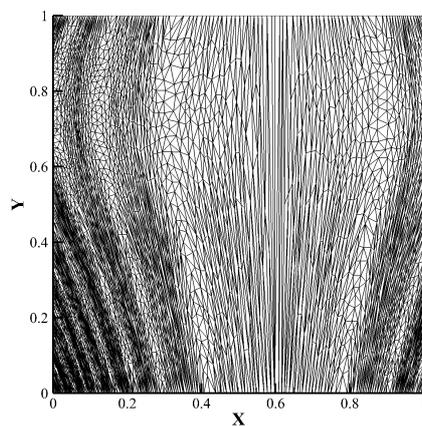
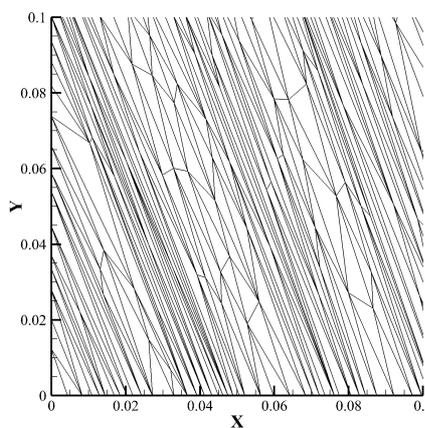
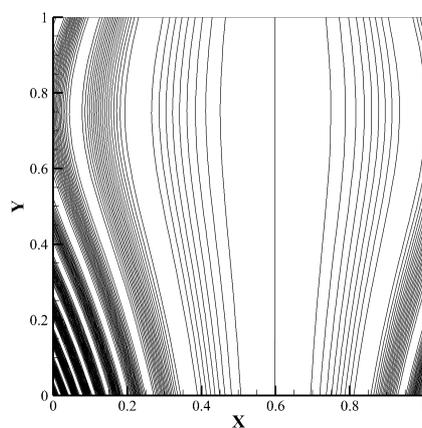
Para estudar o algoritmo de adaptação desenvolvido em malhas tridimensionais contendo elementos tetraédricos, um domínio em formato de paralelepípedo  $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$  é empregado. O campo analítico imposto  $u_2(x,y,z)$  é dado por Tam et al. (2000):

$$u_2(x,y,z) = \arctan \left[ 1000 \left( x^4 y^4 z^4 - \frac{1}{256} \right) \right] \quad (6.2)$$

A malha inicial contendo 817 nós (Fig. 6.3a) é adaptada para um erro de interpolação objetivo de  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0,20$ . A influência do número de sub-divisões de arestas  $w$  do algoritmo de suavização nodal é investigada para três diferentes valores: 1, 4 e 8; os quais são empregados ao longo de 10 iterações de adaptação. A malha anisotrópica adaptada para o caso  $w = 8$  é apresentada na Fig. 6.3b e as respectivas isolinhas do campo de solução na Fig. 6.3c. Uma seção de corte da malha é apresentada na Fig. 6.4, onde verifica-se a anisotropia também no interior do domínio.



(a) Malha inicial

(b) Malha adaptada para  $\varepsilon_{L^2} = 0,15$ (c) Malha adaptada para  $\varepsilon_{L^2} = 0,10$ (d) Malha adaptada para  $\varepsilon_{L^2} = 0,05$ (e) Detalhe da malha adaptada para  $\varepsilon_{L^2} = 0,05$ (f) Isolinas de  $u_1$ Figura 6.1: Malha inicial e adaptada para o campo analítico  $u_1$ .

O erro médio, a variância do erro e o tamanho da malha para cada iteração de adaptação são apresentados na Fig. 6.5. Pode-se observar que ao final da décima iteração, os valores de erro médio e tamanho da malha são todos muito próximos uns dos outros, sendo a variância do erro um pouco maior para o caso de  $w = 1$ , o que é esperado, pois este é mais impreciso devido às limitadas possibilidades de movimento dos vértices. Pode-se também observar que o tamanho da malha torna-se inicialmente maior antes da convergência ao tomarmos um número de menor de possibilidades de sub-divisão das arestas.

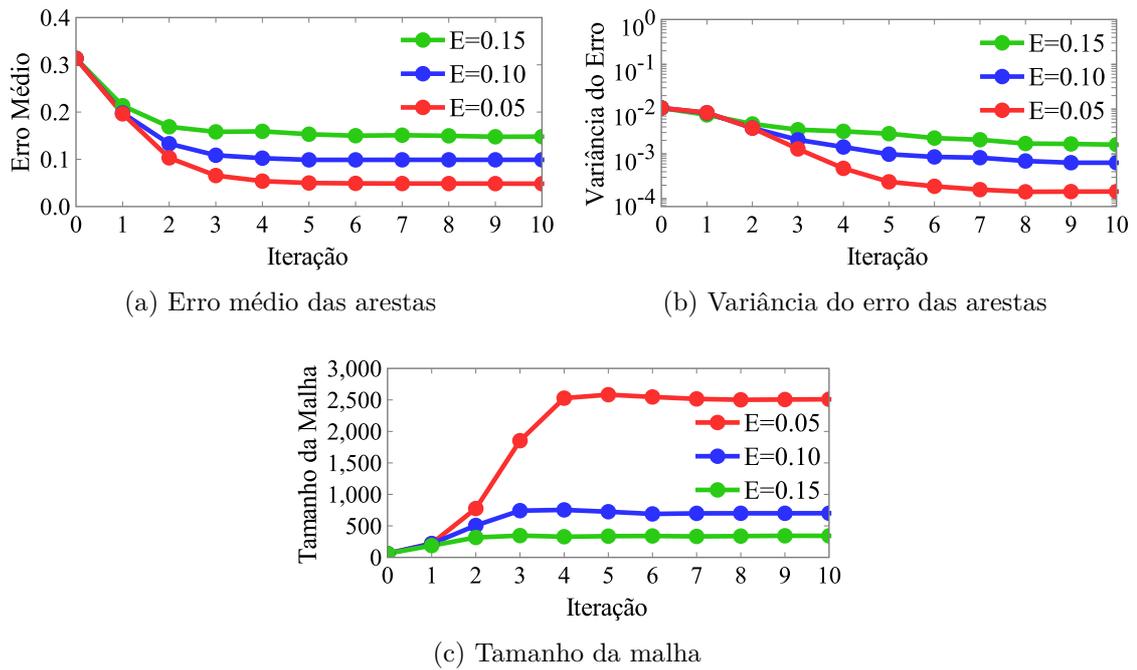


Figura 6.2: Dados das malhas obtidas para a adaptação do campo analítico  $u_1$ .

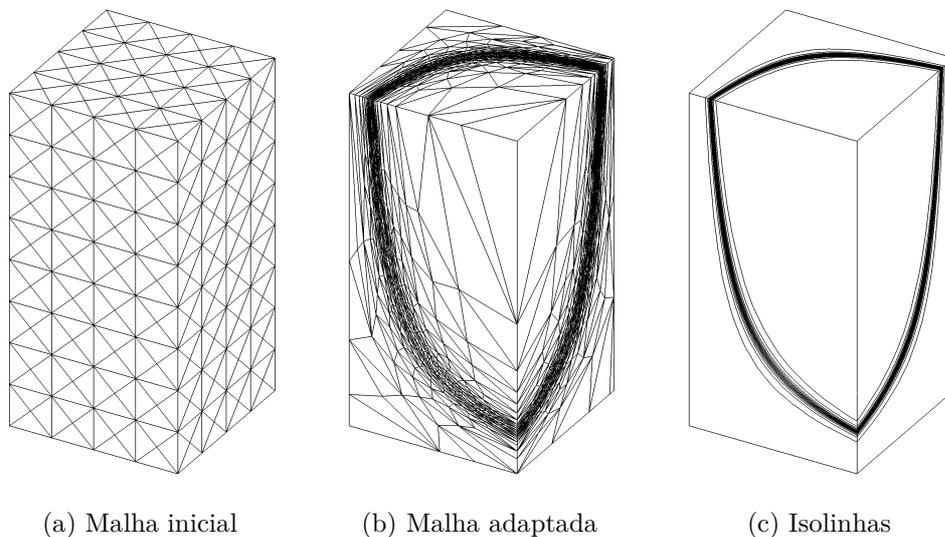


Figura 6.3: Malha inicial, malha adaptada e isolinhas para o campo  $u_2$ .

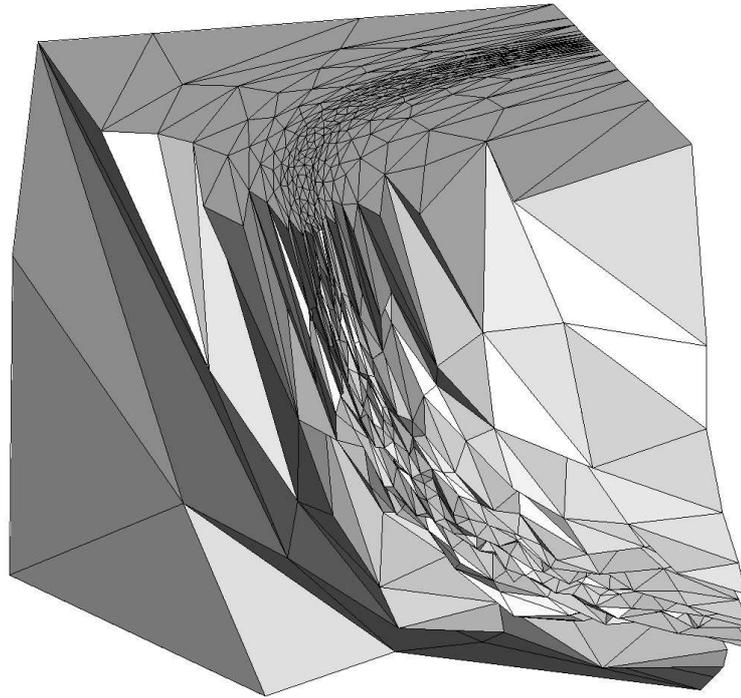


Figura 6.4: Seção de corte da malha adaptada.

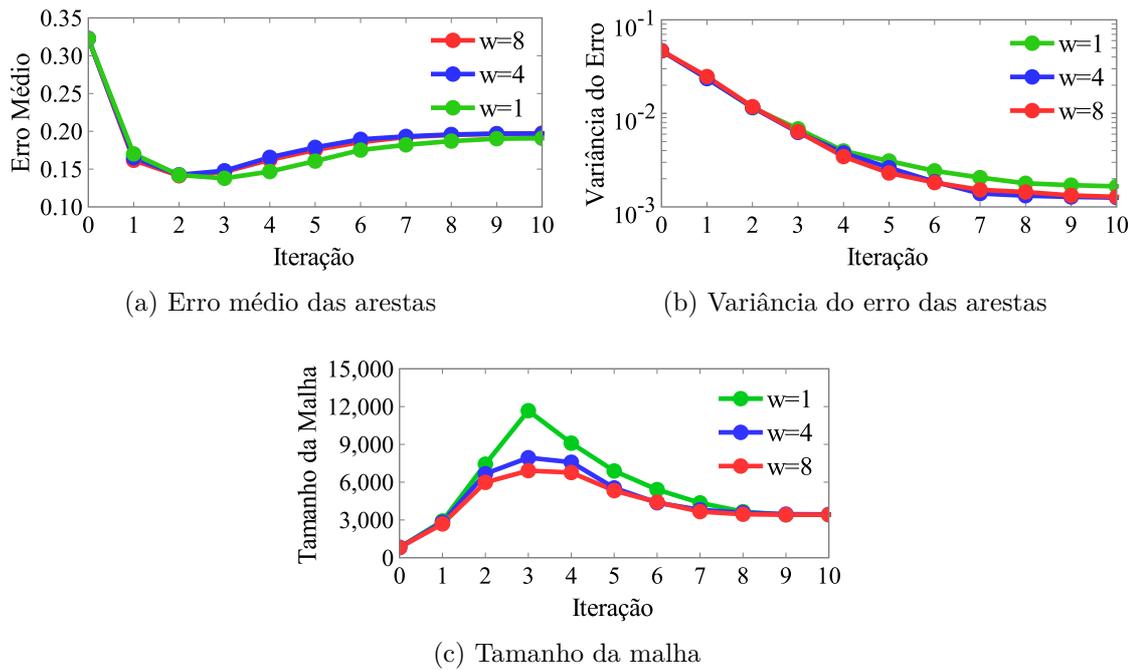


Figura 6.5: Dados das malhas obtidas para a adaptação do campo analítico  $u_2$ .

## 6.2 Movimento Prescrito no Contorno de Malhas Bidimensionais e Tridimensionais

Demonstra-se as capacidades de movimento dinâmico de malhas bidimensionais devido ao movimento relativo de seus contornos móveis através de um exemplo que consiste de um domínio quadrado  $\Omega = [0,25] \times [0,25]$  com um bloco retangular centrado neste domínio de dimensões  $5 \times 1$  unidades de comprimento. O contorno externo do domínio é imposto como fixado (imóvel) enquanto que o contorno interno do bloco retangular é móvel. A malha contém 1 380 nós e 2 626 elementos triangulares. A posição inicial do bloco e malha são mostradas na Fig. 6.6. Três casos de movimento são estudados: translação, rotação e deformação, sendo este estudo baseado no trabalho apresentado por [Bogaers et al. \(2011\)](#) (observar que não há escoamento considerado neste exemplo, apenas o movimento da malha, de forma que os campos de deslocamentos aqui referenciados são os dos nós da malha).

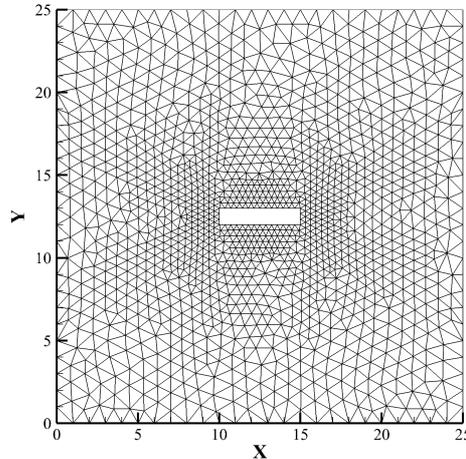
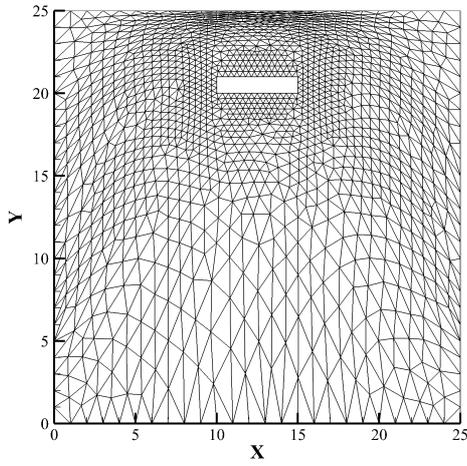
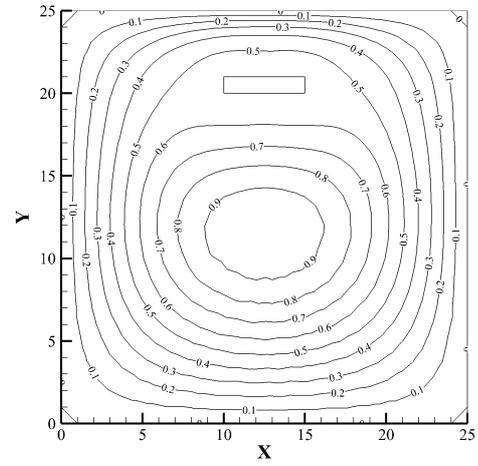
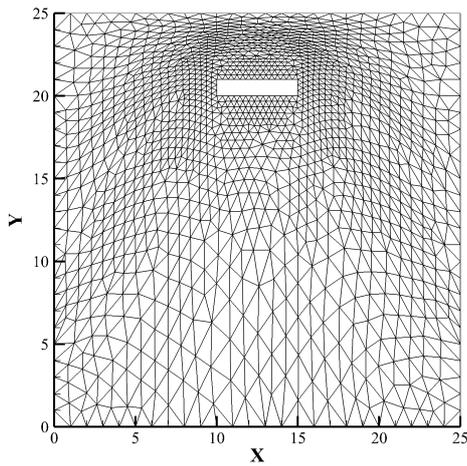
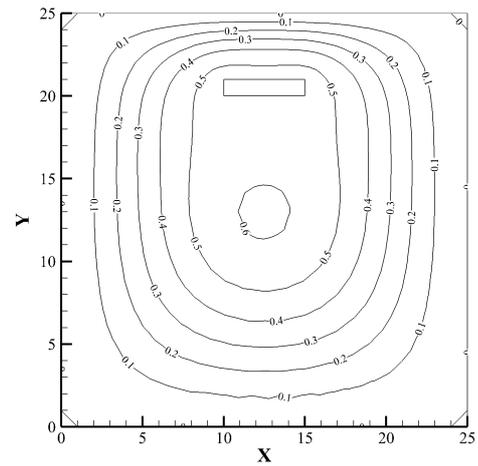
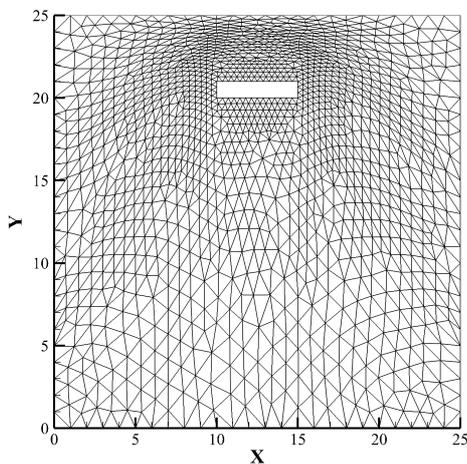
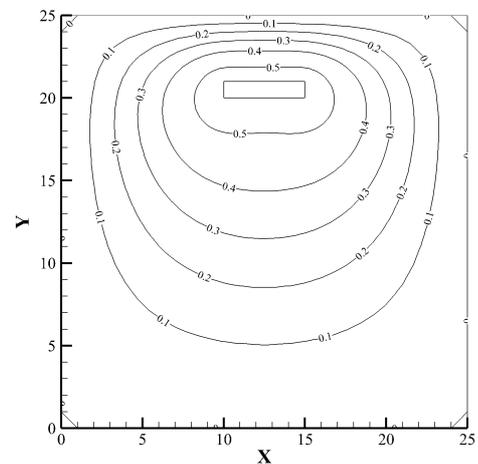


Figura 6.6: Malha e geometria utilizada para o domínio bidimensional.

**Translação:** O primeiro caso aborda o movimento de corpo rígido de translação. O bloco é transladado verticalmente para cima 8 unidades de comprimento. O movimento é realizado ao longo de 15 incrementos de deslocamento. Três variações de suporte compacto  $r$  são estudadas para o movimento, com dimensões de 1, 10 e 100 unidades. O resultado da malha final para cada um destes casos e o campo de velocidades verticais da malha ao final do último incremento de deslocamento é mostrado na Fig. 6.7.

(a)  $r = 1$  (Malha)(b)  $r = 1$  (Isolinhas de deslocamentos verticais)(c)  $r = 10$  (Malha)(d)  $r = 10$  (Isolinhas de deslocamentos verticais)(e)  $r = 100$  (Malha)(f)  $r = 100$  (Isolinhas de deslocamentos verticais)

Pode-se observar que o aumento do suporte compacto melhora a interpolação de deslocamentos na malha. Com um suporte compacto  $r = 1$ , a influência dos nós do contorno torna-se muito restrita a uma região muito próxima dos mesmos, resultando em uma interpolação menos adequada para guiar o movimento dos nós mais afastados do contorno. Isto pode ser observado na região entre a aresta superior do bloco e o contorno superior do domínio, onde claramente tem-se uma malha mal distribuída entre os contornos. O campo de deslocamentos verticais deste caso de suporte compacto também revela problemas na assimilação do deslocamento dos nós, pois o deslocamento dos nós encontra-se mal distribuído no domínio. Para um aumento de suporte compacto para  $r = 10$ , tem-se um cenário de malha mais adequada. Entretanto, o campo de deslocamentos verticais mostra que a interpolação não está bem representada na região compreendida entre a aresta inferior do bloco e o contorno inferior do domínio, levando a deslocamentos da malha maiores que o necessário nesta região. Novamente, isto decorre do valor do suporte compacto ser muito pequeno para cobrir uma porção do domínio de dimensões muito superiores. O terceiro caso utiliza um suporte compacto que cobre com folga todo o domínio,  $r = 100$ . A malha é muito próxima da obtida para o caso de  $r = 10$ , mas com melhor graduação na região inferior, onde observa-se um campo de deslocamentos verticais mais adequado para o movimento prescrito. O aumento do suporte compacto tem por conseqüências a melhor qualidade da interpolação e do movimento, mas também trás o inconveniente de tornar densa a matriz contendo o sistema de equações lineares que deve ser solucionado para determinar o deslocamento. Suportes compactos menores tornam a matriz mais esparsa, podendo ser solucionada de forma mais rápida.

**Rotação:** Utilizando-se  $r = 100$  e 15 incrementos de deslocamento, o bloco é rotacionado  $180^\circ$  no sentido anti-horário. A Fig. 6.8 mostra o movimento para quatro instantes diferentes. É possível observar que todos os nós do domínio realizam um movimento de rotação em conjunto do bloco, onde a velocidade diminui radialmente à medida que se afasta do centro do bloco. O algoritmo de movimento da malha comporta grandes rotações sem violar a topologia da malha.

**Deformação:** Utilizando-se também  $r = 100$  e 15 incrementos de deslocamento, o bloco é agora deformado na direção vertical, onde a cada incremento de deslocamento aplica-se um deslocamento de valor  $-3|x - 12,5|/100$  na direção  $y$ . O resultado é mostrado

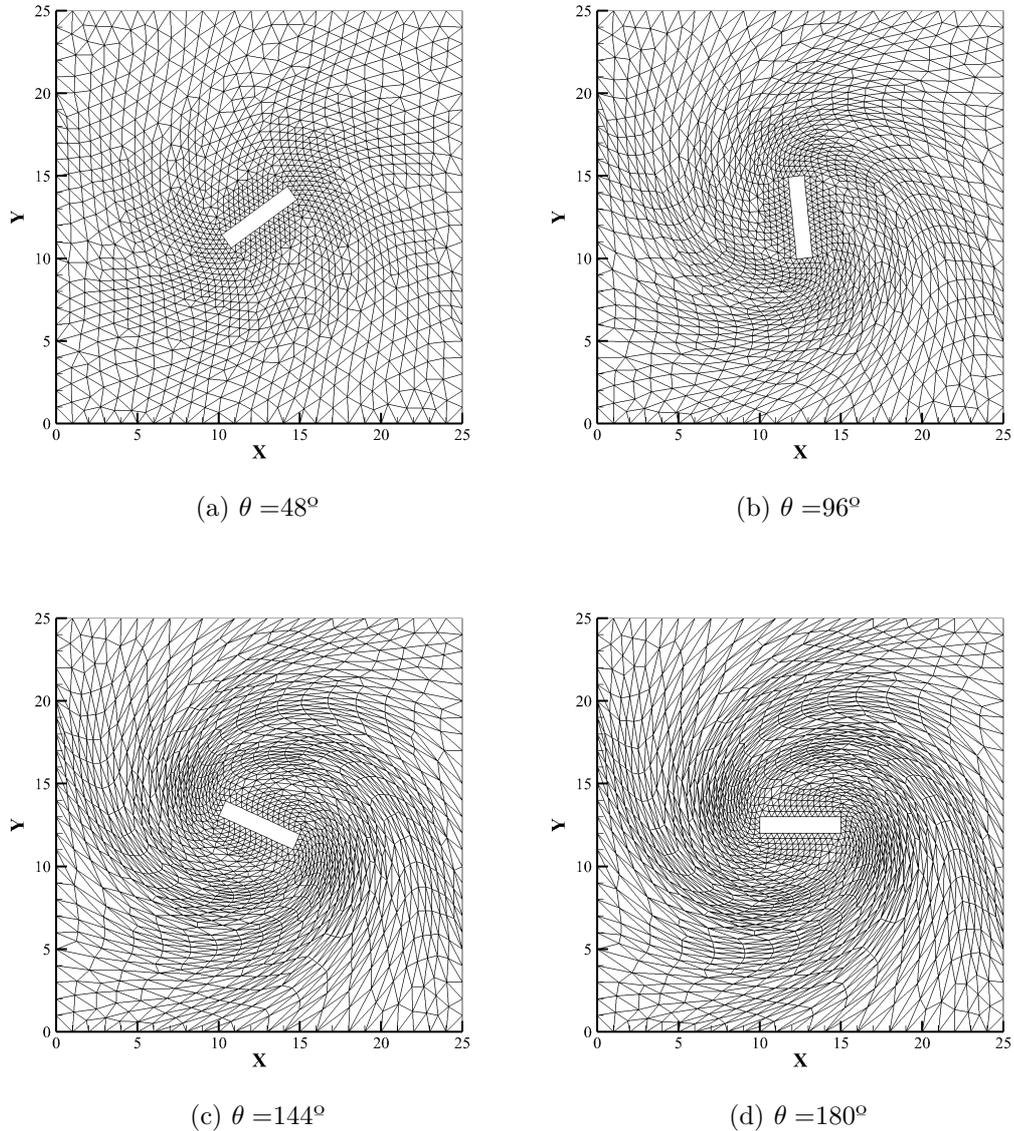


Figura 6.8: Malha em diferentes instantes durante a rotação.

na Fig. 6.9, onde o bloco encontra-se curvado. O método de movimento de malhas, portanto, pode ser utilizado tanto para movimentos de corpos rígidos quanto para corpos deformáveis.

Para demonstrar o uso da metodologia em malhas tridimensionais, o algoritmo de movimento de contornos com interpolação de funções de base radial é empregado aqui em uma geometria de uma hélice de raio unitário (Fig. 6.10a). A hélice encontra-se imersa em um domínio esférico de raio  $R = 5$ , contendo 128 993 nós e 713 833 elementos. A geometria é então forçada a executar uma rotação completa no entorno do eixo  $x$ . O movimento é realizado ao longo de 50 incrementos de deslocamento, onde um suporte

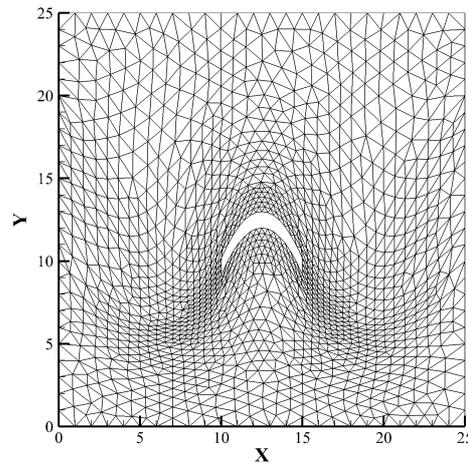


Figura 6.9: Malha após deformação.

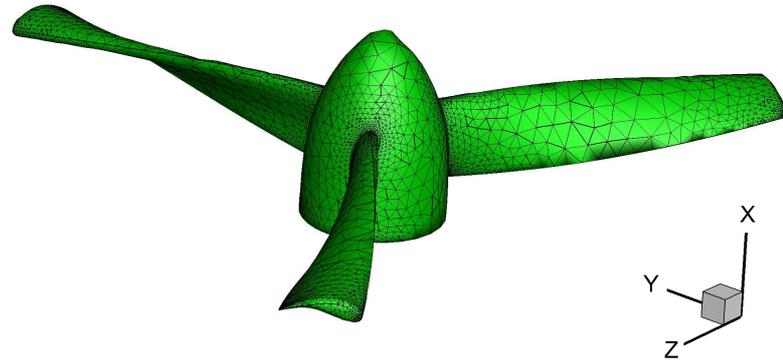
compacto  $r = 100$  é empregado. Nas Fig. 6.10b e Fig. 6.10c são mostradas as malhas em diferentes posições do movimento prescrito. Assim como para o caso bidimensional, tem-se um movimento bem distribuído dos nós no interior do domínio, comportando grandes deslocamentos.

## 6.3 Aerodinâmica em Regime Permanente

Alguns estudos do emprego do algoritmo de adaptação para simulação de escoamentos transônicos e supersônicos não-viscosos (equações de Euler) em regime permanente são apresentados aqui.

### 6.3.1 Escoamento Permanente Transônico Não-Viscoso no Entorno de Aerofólio NACA-0012

Este exemplo demonstra a capacidade do algoritmo de adaptação de malhas em um problema bidimensional de escoamento no entorno de um aerofólio NACA-0012. Um número de Mach de corrente livre  $M_\infty = 0,85$ , um ângulo de ataque  $\alpha = 1^\circ$  e um comprimento de corda  $c$  unitário são considerados em um domínio circular com valor de raio  $25c$ . A densidade e velocidade de corrente-livre são tomadas como  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente. Cinco iterações de adaptação são efetuadas para um valor objetivo de erro de interpolação  $\varepsilon_{L^2}$  de valor 0,10. A malha inicial e adaptada são mostradas



(a) Geometria e malha

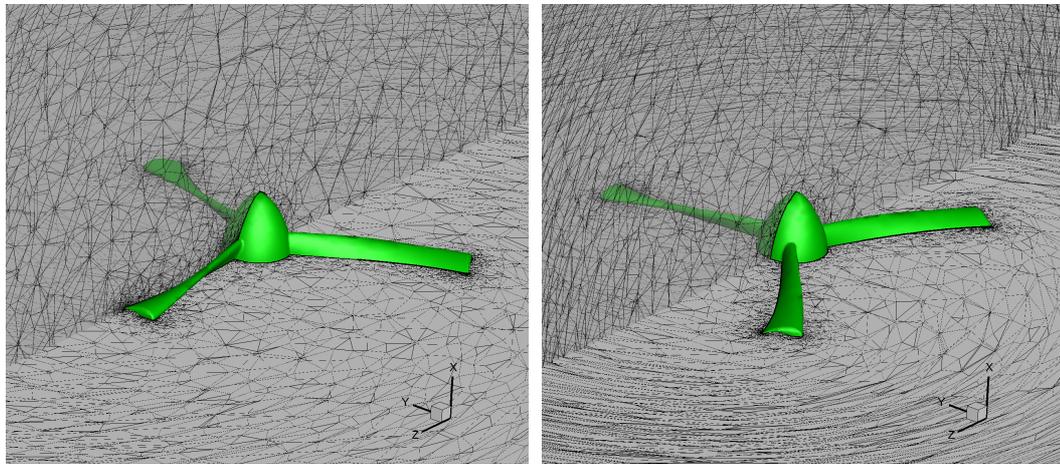
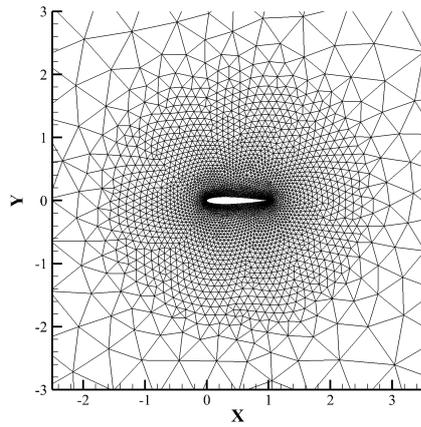
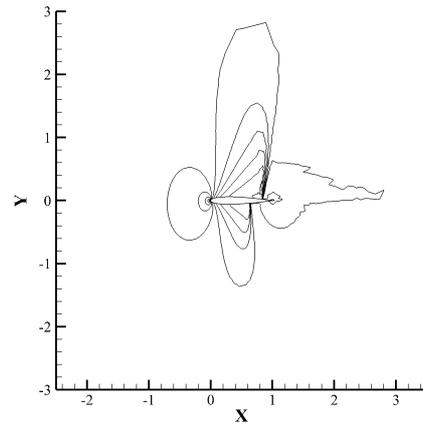
(b)  $\theta = 101^\circ$ (c)  $\theta = 252^\circ$ 

Figura 6.10: Malha em diferentes instantes durante a rotação.

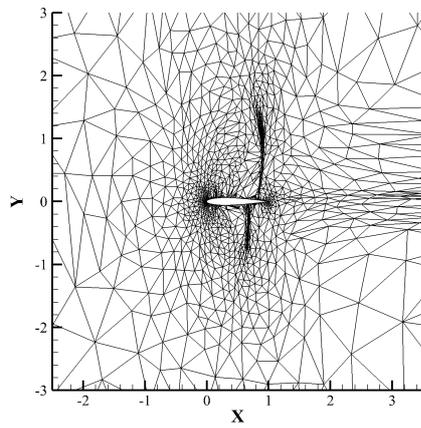
na Fig. 6.11 juntamente de suas respectivas isolinhas de valor de número de Mach. As duas ondas de choque presentes no escoamento são capturadas, sendo a malha adaptada alinhada com estes choques. Uma resolução melhor da distribuição do coeficiente de pressão  $C_p$  próximo das discontinuidades é obtido e pode ser observado na Fig. 6.12, onde um comparativo com dados experimentais (Yoshihara e Sacher, 1985) é apresentado. Além disto, a zona de sucção, que é uma região de intensidade muitas vezes inferior a das zonas de ondas choque, pode ser observada mais proeminentemente na malha adaptada, à direita do aerofólio. A malha adaptada final contém 2 217 nós, enquanto que a malha inicial contém um número maior, de 3 753 nós. Cabe ressaltar que o uso de um domínio maior é mais indicado para esta simulação.



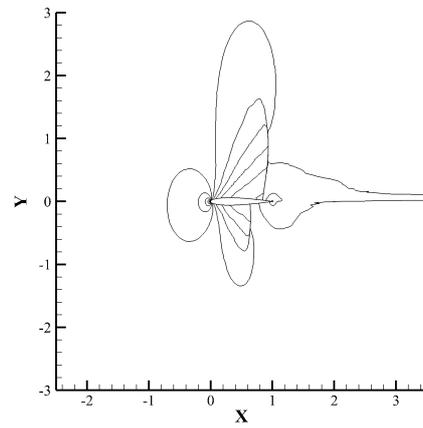
(a) Malha inicial



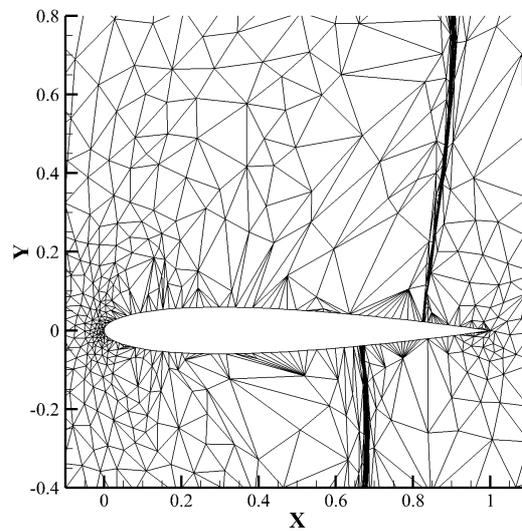
(b) Isolinhas de número de Mach na malha inicial



(c) Malha adaptada



(d) Isolinhas de número de Mach na malha adaptada



(e) Detalhe da malha adaptada

Figura 6.11: Malha inicial e adaptada e respectivas isolinhas de número de Mach.

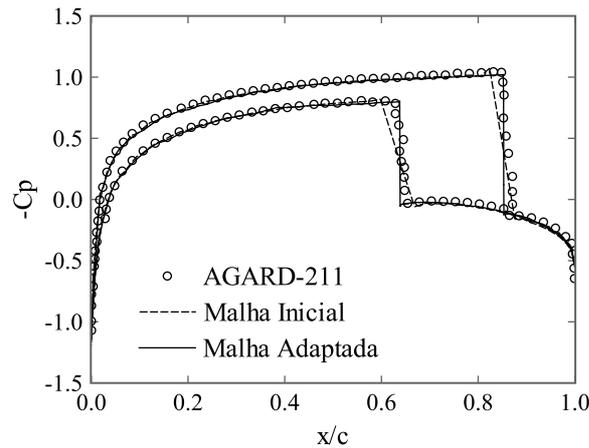


Figura 6.12: Distribuição do coeficiente de pressão.

### 6.3.2 Escoamento Permanente Supersônico Não-Viscoso no Entorno de Esfera

O algoritmo de adaptação é aqui aplicado em um escoamento supersônico com número de Mach de corrente livre  $M_\infty = 2$  no entorno de uma esfera. Apesar da simples geometria, um escoamento complexo se desenvolve, o qual é caracterizado por um choque tridimensional separado e curvado em frente à esfera e um escoamento misto de regiões subsônicas e supersônicas presentes atrás da linha sônica. Uma esfera com diâmetro unitário é considerado, com massa específica e velocidade de corrente-livre com valores  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente. Uma quarta parte da esfera é considerada na simulação com o uso de condições de contorno de simetria e 10 iterações de adaptação de malha são realizadas para um erro de interpolação objetivo  $\varepsilon_{L^2} = 0,10$ . A malha final adaptada e a malha inicial são mostradas na Fig. 6.13 conjuntamente dos respectivos campos de pressão. Primeiramente, pode-se observar que tanto a malha inicial quanto a malha adaptada capturam o choque frontal em frente à esfera, entretanto, devido à malha insuficiente, a onda de choque se difunde progressivamente até praticamente desaparecer atrás da esfera na malha inicial. As ondas de choque são devidamente capturadas na malha adaptada até o fim do domínio computacional. O escoamento atrás da esfera também é capturado e a Fig. 6.14 exhibe a malha adaptada na superfície da esfera, mostrando a malha anisotrópica enquanto que a aproximação geométrica inicial do domínio é mantida.

O coeficiente de arrasto calculado para cada iteração de adaptação é apresentado na Tab. 6.1. Como pode ser observado, a malha final adaptada contém aproximadamente

Tabela 6.1: Dados da malha e coeficiente de arrasto  $C_d$  para a esfera supersônica.

#Iter	#Nós	#Elementos	$C_d$
0	43 638	268 277	0,897
1	31 371	177 223	0,923
2	56 071	309 181	0,968
3	53 682	285 742	0,974
4	46 948	245 001	0,994
5	43 136	223 279	0,992
6	40 105	205 884	0,993
7	38 883	198 592	0,991
8	39 021	199 018	0,989
9	39 888	203 337	0,989
10	40 294	204 999	0,991

40 000 nós, 200 000 elementos e um valor de coeficiente de arrasto de 0,991. O valor de referência experimental é de aproximadamente  $C_d \approx 1$  (Miller e Bailey, 1979; Spearman e Brawell, 1993; Bailey e Hiatt, 1971), sendo que alguns autores apresentam um valor levemente maior, e outros, um valor levemente menor, dependendo de parâmetros testados, tais como número de Reynolds, intensidade de turbulência e rugosidade da esfera. Em todos os casos, tem-se que a pressão da onda de choque dita o valor do coeficiente de arrasto, de forma que os valores numéricos obtidos desconsiderando-se a viscosidade conduzem a uma boa estimativa do coeficiente experimental. Um valor de 1.008 é apresentado por Nazarov e Hoffman (2012) utilizando uma estratégia de adaptação orientada à melhorar a precisão da determinação do arrasto calculado. Deve-se comentar que uma estratégia orientada ao cálculo de arrasto apresenta excelentes resultados para o escoamento na região próxima à superfície da esfera, onde a zona de estagnação de pressão e ondas de choque sobre a superfície devem ser corretamente resolvidas pelo algoritmo para uma determinação precisa do valor de coeficiente de arrasto. Entretanto, a propagação da onda de choque para trás da esfera não é devidamente capturada por tal tipo de abordagem, diferentemente da estratégia aqui desenvolvida.

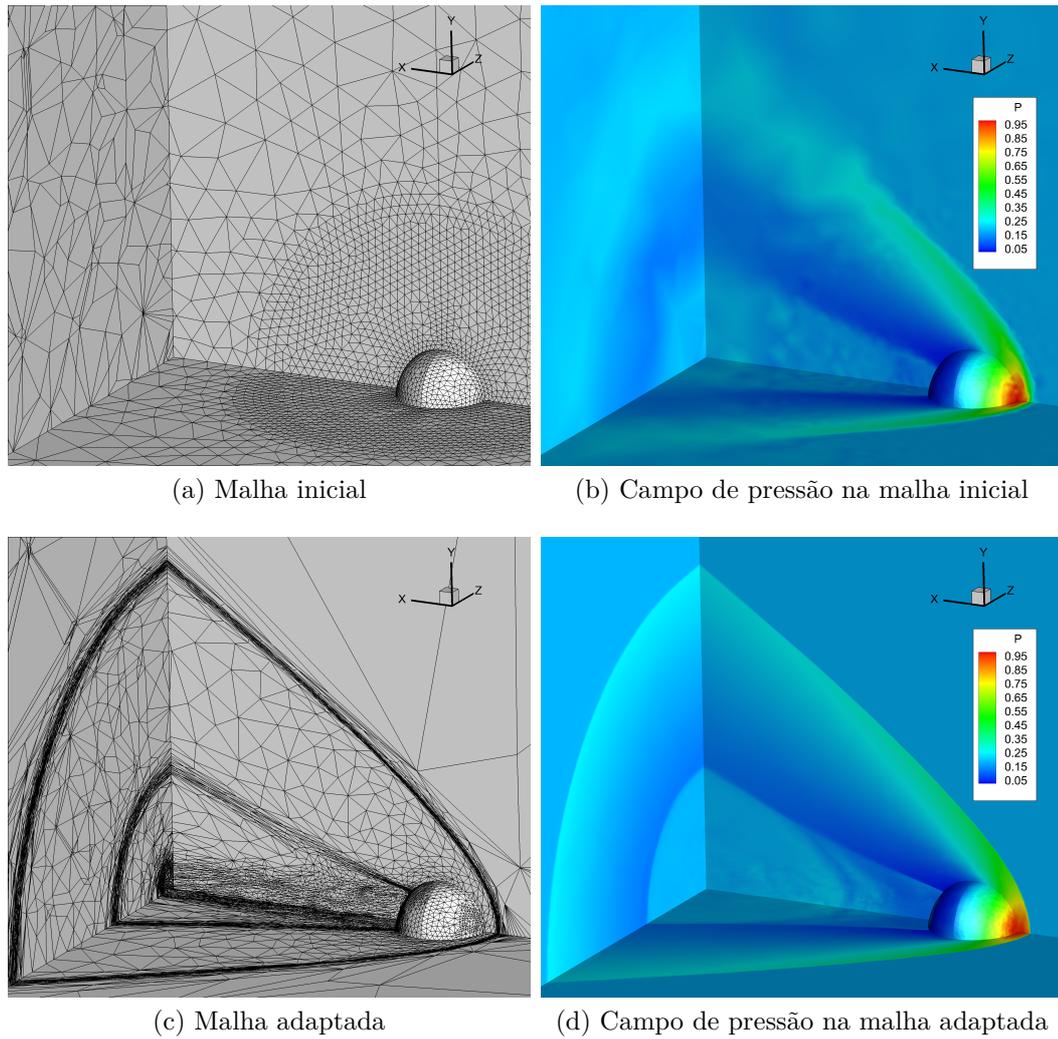


Figura 6.13: Malha inicial e adaptada com respectivos campos de pressão.

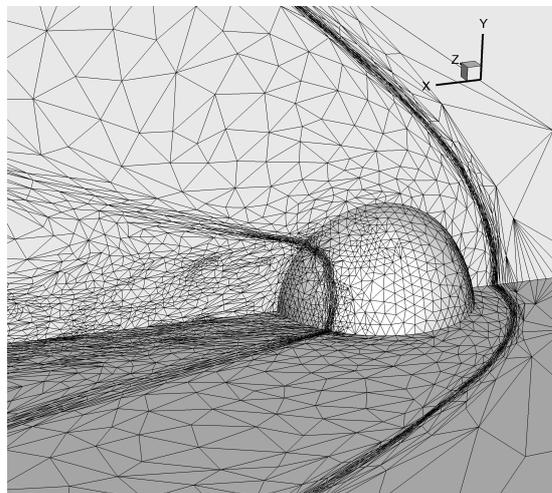


Figura 6.14: Detalhe da malha adaptada atrás da esfera.

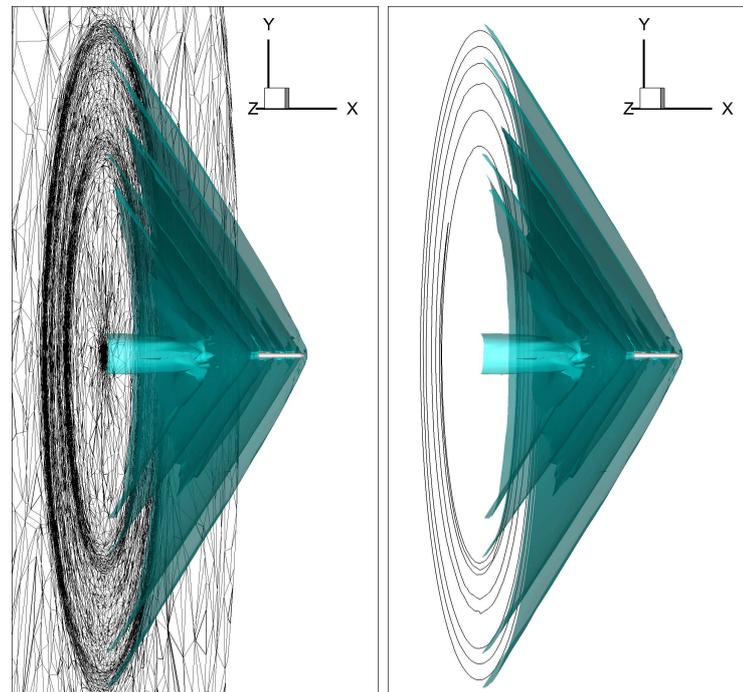
### 6.3.3 Escoamento Permanente Supersônico Não-Viscoso no Entorno de Míssil AGM-114 Hellfire

Um complexo míssil supersônico AGM-114 Hellfire é aqui investigado com a presente metodologia de adaptação de malhas. O míssil possui quatro profundores simetricamente dispostos e quatro estabilizadores. Os engates do míssil são considerados na geometria. Esta região de engate tipicamente produz um chamado arrasto parasita que atinge porções consideráveis do arrasto total. O número de Mach de corrente-livre considerado é  $M_\infty = 1,20$  em um ângulo de ataque  $\alpha = 0^\circ$ . A massa específica e velocidade de referência são  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente. Um valor de erro de interpolação objetivo  $\varepsilon_{L^2} = 0,10$  é considerado ao longo de 15 iterações de adaptação. A geometria completa é empregada, sem considerações de simetria, com uma malha inicial composta de 57 660 nós. O domínio considerado é esférico, com diâmetro de valor igual a 100 vezes o comprimento do míssil e a malha final adaptada obtida contém 424 851 nós.

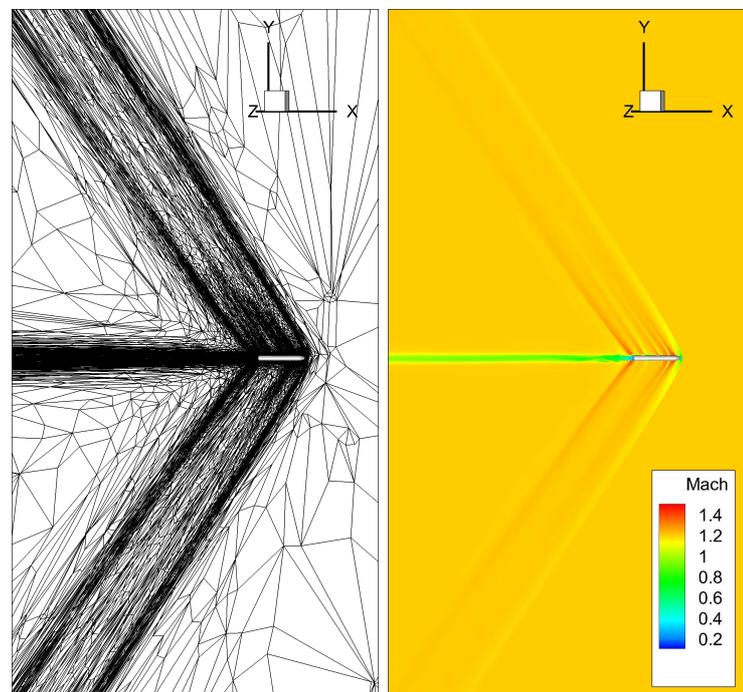
A Fig 6.15a mostra uma vista lateral do míssil conjuntamente com a iso-superfície de valor  $Mach = 1,199$ . O escoamento complexo no entorno da geometria exhibe uma interação não-simétrica de ondas de choque em três dimensões que é difícil de ser capturada sem o emprego de técnicas de adaptação de malha. Uma seção de corte da malha atrás do míssil também é apresentada na Fig 6.15a, onde tanto a zona de sucção central quanto o padrão de ondas de choque cônicas (circulares no plano de corte) podem ser observadas. A boa resolução do campo de pressão nesta mesma seção pode ser vista na Fig 6.15b, onde as isolinhas de pressão se apresentam suaves. Um corte lateral da malha é apresentado na Fig 6.15c e o respectivo campo de número de Mach é mostrado na Fig 6.15d. As ondas de choque e a zona de sucção são propagadas até o limite do domínio computacional.

Uma perspectiva da malha adaptada na superfície do míssil é apresentada na Fig 6.16a. Embora a aproximação geométrica inicial do domínio seja preservada, pode-se observar regiões desrefinadas anisotropicamente nas regiões planas dos profundores e no entorno das zonas dos engates. Uma zona de sucção atrás dos estabilizadores e ondas de choque refletidas na superfície do míssil também tornam-se evidentes na malha.

O campo de número de Mach na superfície do míssil é apresentado na Fig 6.16b. Um seção de corte mostrando a malha nas proximidades da superfície do míssil é mostrada



(a) Seção de corte da malha e iso-superfície de número de Mach (b) Isolinhas de pressão na seção de corte e iso-superfície de número de Mach



(c) Malha

(d) Campo de número de Mach

Figura 6.15: Uma vista lateral do míssil com uma seção de corte mostrando a malha atrás do míssil, isolinhas de pressão neste corte, iso-superfície para o número de Mach de valor  $Mach = 1,199$ , a malha e o campo de número de Mach.

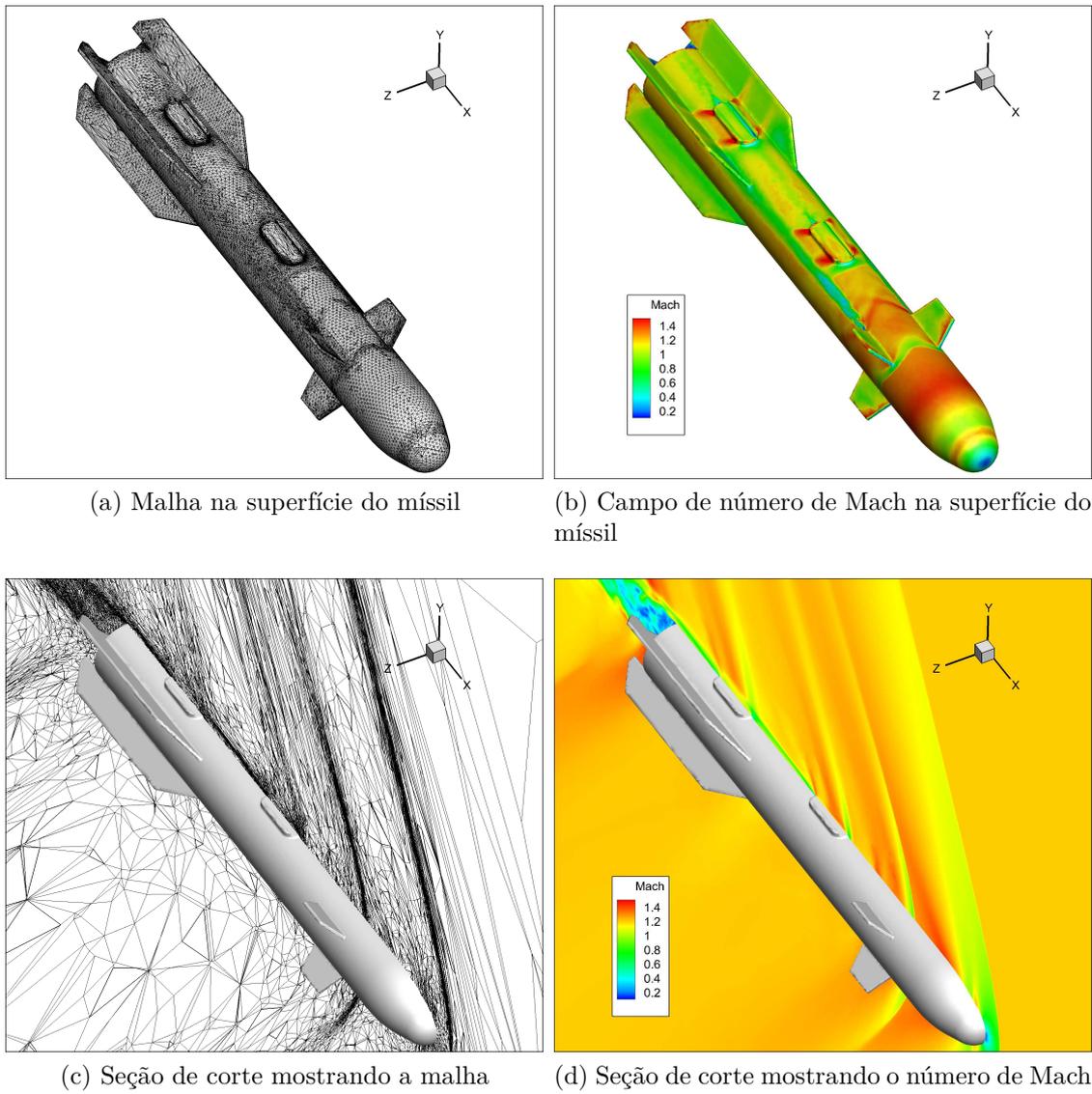


Figura 6.16: A malha e o campo de número de Mach na superfície da geometria do míssil e em uma seção de corte no entorno da superfície.

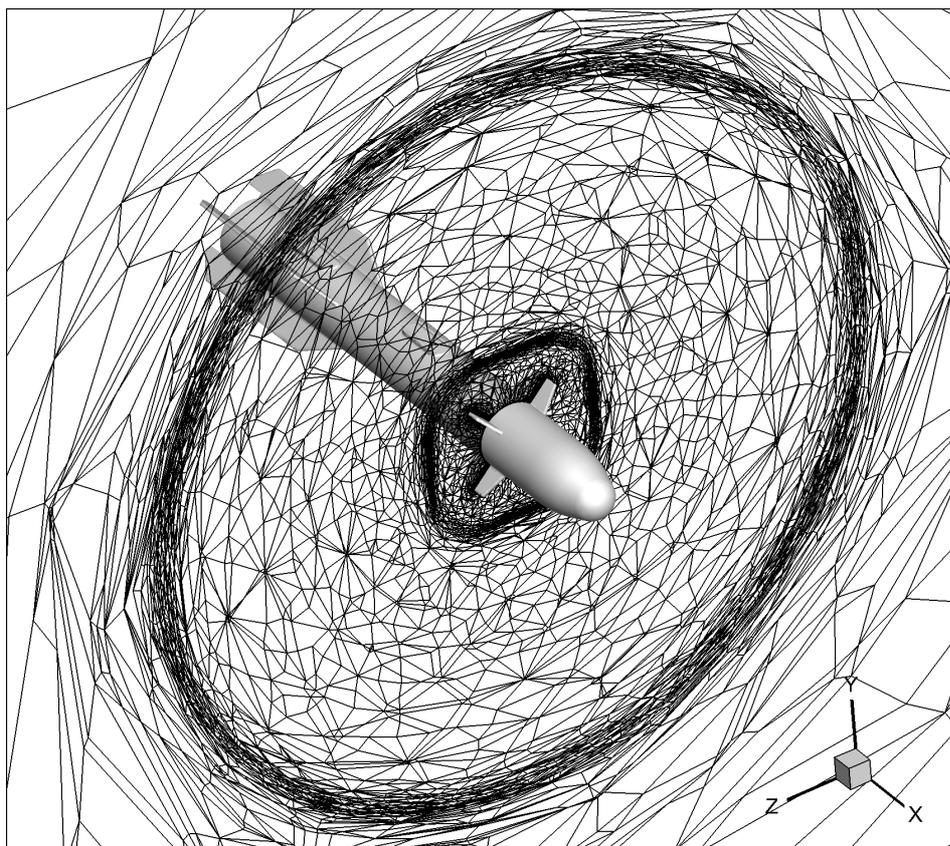


Figura 6.17: Seção de corte mostrando um detalhe da malha adaptada no entorno da região dos estabilizadores.

na Fig 6.16c e o respectivo campo de Mach na Fig 6.16d, onde a interferência sobre as ondas de choque presentes no escoamento devido à presença dos engates, profundores e estabilizadores pode ser apreciada. A Fig 6.17 destaca a adaptação de malha capturando a região de grande interferência de arrasto no entorno dos estabilizadores.

Embora este exemplo seja apenas qualitativo, ele mostra o potencial do algoritmo de adaptação de malhas acoplado ao código de escoamentos compressíveis CBS. Esta mesma simulação foi anteriormente realizada pelo autor (Linn, 2013; Linn e Awruch, 2013, 2016b) empregando uma adaptação na norma  $L^\infty$  e sem as capacidades de suavização nodal. O resultado obtido anteriormente, comparando-se com este atual, foi de uma resolução pior, na qual os efeitos de ondas de choque não eram propagados ao longo de todo o domínio, e uma malha massivamente maior e mal-distribuída, contendo 19 860 325 nós, quase 50 vezes mais que o presente resultado e cobrindo uma região muito menor do domínio, conforme pode ser observado na Fig 6.18.

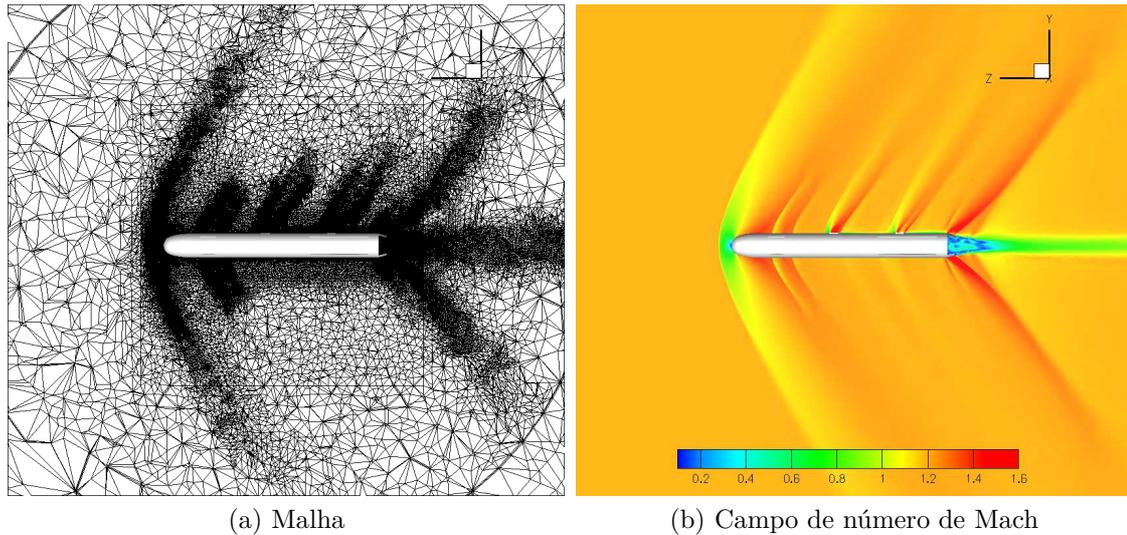


Figura 6.18: A malha e o campo de número de Mach em uma vista lateral obtida por [Linn \(2013\)](#) empregando-se adaptação anisotrópica do tipo  $h$  e avaliação do erro na norma  $L^\infty$ .

## 6.4 Aerodinâmica em Regime Transiente e Turbulento

Estudos de problemas envolvendo turbulência em domínios contendo contornos fixos são apresentados nesta seção. O modelo de turbulência de Smagorinsky dinâmico é empregado em todos os casos.

### 6.4.1 Escoamento Turbulento Supersônico no Entorno de Cilindro Circular em Canal

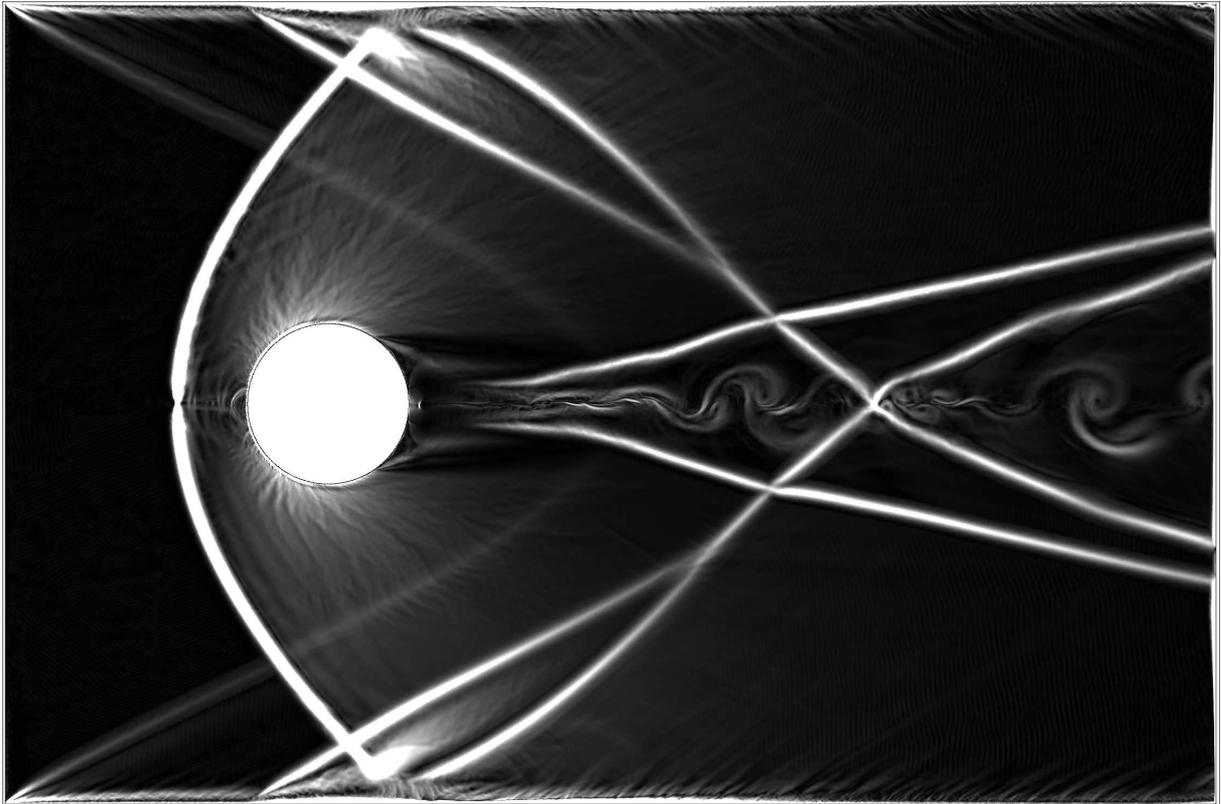
Este exemplo é um estudo qualitativo de um escoamento complexo que apresenta diversos efeitos compressíveis da turbulência. O estudo é realizado para demonstrar a capacidade do método CBS em conjunto com a modelagem LES de capturar todos estes efeitos na simulação. Considera-se neste exemplo um domínio retangular  $\Omega = [0,3] \times [0,2]$  com um cilindro circular (círculo, pois o exemplo é bidimensional) de diâmetro  $D = 0,40$  cujo centro encontra-se localizado em  $x = 0,80$ ,  $y = 1,00$ . O contorno esquerdo é a localização do contorno de entrada, o da direita o de saída do escoamento e os contornos superiores, inferiores e no entorno do cilindro configuram os contornos de parede sólida. O número de Mach de corrente-livre empregado vale  $M_\infty = 2,52$  e o número de Reynolds de corrente-livre  $Re_\infty = 1 \times 10^6$ , sendo o ângulo de ataque nulo ( $\alpha = 0$ ). O número de nós da

---

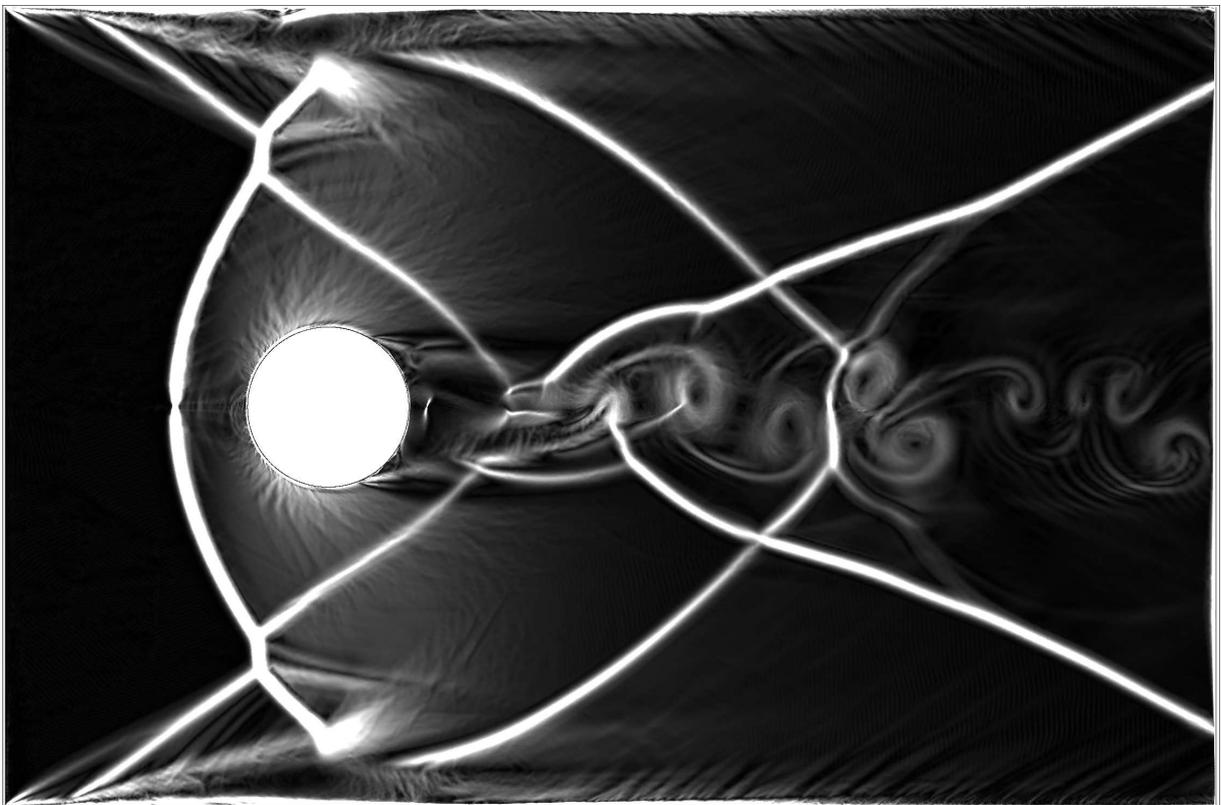
malha é 450 000, sendo a distância do nó de um contorno sólido até o nó mais próximo de aproximadamente  $h = 0,0005D$ . A simulação é realizada até o tempo adimensional final  $T = 25$  empregando-se  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ .

A Fig. 6.19 e Fig. 6.20 apresentam os contornos da magnitude do gradiente da massa específica para dois instantes de tempo diferentes. Uma onda de choque forte curvada se desenvolve isoladamente em frente ao cilindro até ser refletida pelas paredes superiores e inferiores. Ao mesmo tempo, tem-se a formação de ondas de choque decorrentes do início dos contornos sólidos superiores e inferiores no domínio. Na região onde a onda de choque frontal isolada atinge a camada limite dos bordos superiores e inferiores tem-se uma interação do choque com a camada limite. Devido à separação do escoamento nessa região, tem-se a formação de um sistema de choque em formato de *lambda*. Mais adiante, tem-se, adicionalmente, a interação entre as ondas de choque, alterando seu posicionamento e sua interação com o escoamento.

Este problema foi analisado qualitativamente também por [Nazarov e Hoffman \(2013\)](#), mas para um caso de escoamento do tipo Euler não-viscoso, não havendo, portanto, a formação de uma camada limite turbulenta e interação de onda de choque com camada limite. Outra diferença importante sobre a dinâmica do escoamento com a consideração da viscosidade está na variação da posição das ondas de choque, as quais oscilam e se curvam com as flutuações do escoamento na presente simulação, diferentemente da obtida por [Nazarov e Hoffman \(2013\)](#).

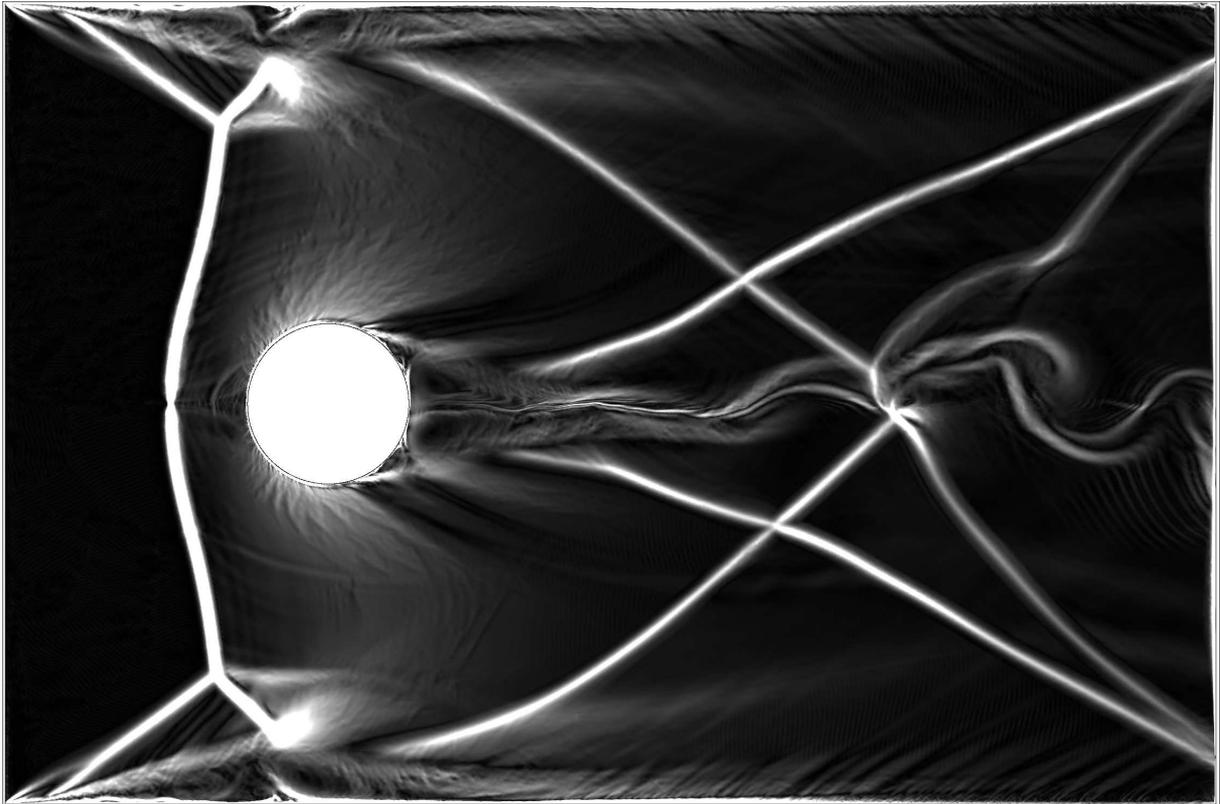


(a) Magnitude do gradiente de massa específica,  $t = 5$

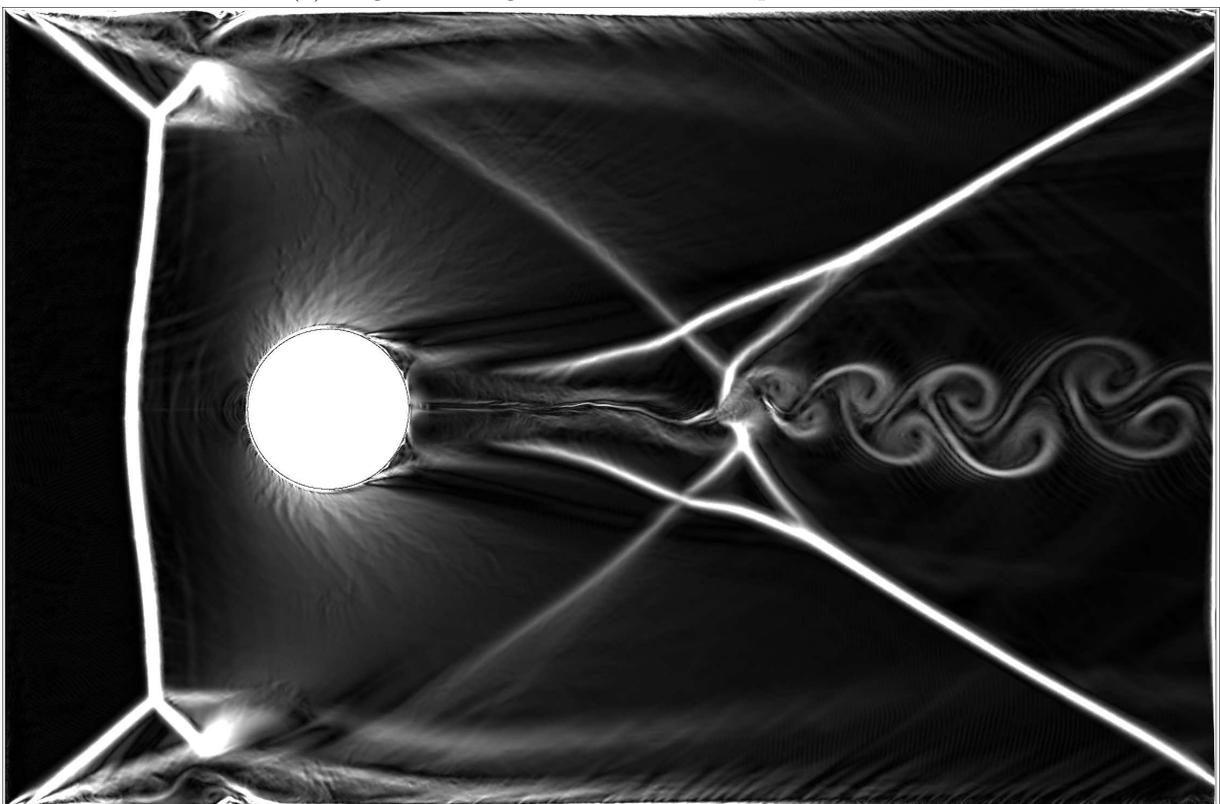


(b) Magnitude do gradiente de massa específica,  $t = 10$

Figura 6.19: Diferentes instantes da solução do escoamento (A).



(a) Magnitude do gradiente de massa específica,  $t = 15$



(b) Magnitude do gradiente de massa específica,  $t = 25$

Figura 6.20: Diferentes instantes da solução do escoamento (B).

## 6.4.2 Escoamento Turbulento Transônico no Entorno de Cilindro Circular

O estudo de escoamentos turbulentos transônicos no entorno de cilindros circulares é importante para diversas aplicações envolvendo escoamentos não-permanentes tais como aerodinâmica de componentes de aeronaves e mísseis. Apesar da importância, há uma quantidade de investigações significativamente inferior ao caso incompressível. A complexidade do escoamento desenvolvido torna sua determinação uma tarefa desafiadora tanto experimentalmente quanto numericamente, incluindo efeitos de ondas de choque não-permanente e interações de efeitos de viscosidade com choques a serem capturados. Alguns trabalhos experimentais podem ser encontrados incluindo medições em vôos de teste (Welsh, 1953), determinação de frequência de desprendimento de vórtices (Murthy e Rose, 1977) e a determinação de coeficientes aerodinâmicos e de distribuição de pressão não-permanentes (Murthy e Rose, 1977; Rodriguez, 1984). A investigação numérica presente na literatura inclui principalmente a solução das equações compressíveis não-viscosas de Euler (Pandolfi e Larocca, 1989) empregando o método das diferenças finitas, o cálculo empregando funções potenciais (Hafez e Wahba, 2004), simulação espectral empregando o método da colocação de Chebyshev (Don e Gottlieb, 1990), simulações bidimensionais empregando o método dos vórtices desprendidos (DES) (Miserda e Leal, 2009; Leal e Miserda, 2005; Xu et al., 2009), simulações tridimensionais utilizando um método de viscosidade artificial residual (Nazarov e Hoffman, 2013) e simulação de grandes escalas (LES) (Xu et al., 2010). Devido à dificuldade da simulação, a grande maioria das investigações numéricas disponível na literatura é baseada em formulações não-viscosas, com as quais não é possível capturar muitos dos efeitos complexos de interação entre viscosidade e choques. A malha altamente refinada necessária para realizar a simulação para se conseguir determinar informações de flutuações e efeitos de turbulência impõe requerimentos computacionais drásticos para tal investigação, os quais podem ser aliviados ao empregar-se um modelo de turbulência, tal como LES, combinado com uma técnica de adaptação de malhas, o qual é aqui apresentado.

A estratégia desenvolvida é empregada neste problema para estudar o escoamento considerando-se o domínio tanto bidimensional quanto tridimensional. O estudo de caso bidimensional é empregado como um estudo preliminar no qual investiga-se os diferentes

parâmetros do algoritmo de adaptação de malhas tais como o erro de interpolação objetivo e o tamanho mínimo de aresta permitido na malha. A seguir, uma investigação completa tridimensional é realizada. Considera-se um cilindro circular de diâmetro unitário  $D = 1$ , um número de Mach de corrente-livre  $M_\infty = 0,80$  e um número de Reynolds de corrente-livre  $Re_\infty = 5 \times 10^5$ . Nestas condições, o escoamento desenvolve uma camada limite turbulenta. A densidade e a velocidade de corrente-livre de referência são tomadas como  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente. A simulação é realizada até o tempo adimensional de valor 50. A malha é adaptada a cada 20 iterações do código CBS.

### Simulação Bidimensional

A simulação bidimensional é realizada em um domínio circular de diâmetro  $100D$  no qual aplica-se as condições de contorno de entrada e de saída nos contornos da esquerda e da direita, respectivamente. Dois valores de erro de interpolação objetivado  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2}$  são considerados para adaptação:  $0,15D$  e  $0,10D$ . Para cada caso, dois valores de tamanho mínimo permitido de aresta na malha  $h_{min}$  são considerados:  $0,01D$  e  $0,05D$ .

Os coeficientes aerodinâmicos de arrasto  $C_d$  e de sustentação  $C_l$  não-permanentes são apresentados nas Fig. 6.21a e Fig. 6.21b, respectivamente. A malha menos refinada, que corresponde ao caso onde emprega-se  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0,15D$  e  $h_{min} = 0,05D$ , é incapaz de capturar os efeitos viscosos nas proximidades do cilindro e devido à isto o coeficiente de arrasto obtido neste caso possui baixa precisão, apresentando apenas pequenas oscilações. O caso oposto, o qual corresponde à malha mais refinada empregando-se  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0,10D$  e  $h_{min} = 0,01D$ , por outra vez, é capaz de capturar corretamente os efeitos de interação entre viscosidade e choques nas proximidades do cilindro, e oscilações maiores são observadas ao longo da evolução do coeficiente de arrasto ao longo do tempo. Utilizando-se a mesma interpretação, o caso de  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0,15D$  com  $h_{min} = 0,01D$  exibe melhor capacidade de capturar efeitos viscosos do que o caso empregando  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0,10D$  e  $h_{min} = 0,05D$ . Os valores médios de coeficiente de arrasto calculados são apresentados na Tab. 6.2. Os resultados obtidos para as simulações bidimensionais estão próximos do valor 1.70, enquanto que o valor experimental de referência é 1,50 (Murthy e Rose, 1977). O valor médio de coeficiente de arrasto calculado para o mesmo problema utilizando o método dos vórtices desprendidos (DES) para um problema bidimensional apresentado por Miserda e

Leal (2009) é 1,87.

A variação do tamanho da malha (número de nós) ao longo do tempo para as simulações realizadas é apresentada na Fig. 6.21c e o número médio de nós e elementos é referenciado na Tab. 6.2. Quanto menor o erro de interpolação permitido na malha  $\varepsilon_{\mathbf{L}^2}$  para a simulação, maior o tamanho da malha obtido. Entretanto, o tamanho da malha é limitado pelo tamanho mínimo permitido na malha  $h_{min}$ . Valores menores de  $h_{min}$  permitem que mais escalas do escoamento sejam resolvidas, entretanto, também aumenta severamente o custo computacional da simulação porque não apenas o tamanho da malha aumenta, mas também o passo de tempo diminui. O tempo total das simulações é também apresentado na Tab. 6.2, sendo as simulações realizadas empregando-se um processador Intel Xeon E5-2697 2.60GHz e os valores de CPU referenciados correspondem ao tempo total decorrido (tempo físico) usando-se OMP.

Uma análise no domínio de frequências para o coeficiente de sustentação é apresentado na Fig. 6.21d, na qual o espectro de potência  $P_l$  em função do número de Strouhal é indicado. Os valores de pico pronunciados de número de Strouhal no entorno de 0,18 são observados para as malhas onde utiliza-se  $h_{min} = 0,01D$ , enquanto que valores de pico levemente menores são obtidos para os casos com  $h_{min} = 0,05D$ . Os valores exatos são apresentados na Tab. 6.2 e estão de acordo com as referências.

O coeficiente de pressão médio  $C_p$  para o cilindro é indicado na Fig. 6.22, onde o ângulo é medido a partir do ponto frontal de estagnação. Os resultados obtidos com malhas empregando  $h_{min} = 0,01D$  são bastante próximos e estão de acordo com os resultados experimentais observados (Murthy e Rose, 1977), enquanto que os resultados obtidos com as malhas que empregam  $h_{min} = 0,05D$  se desviam significativamente na região próxima do ponto de estagnação e após o ponto de separação da camada limite, que ocorre próximo de  $75^\circ$ .

As malhas em um dado instante para as simulações são apresentadas na Fig. 6.23 em uma vista geral e em uma vista na região próxima do cilindro enquanto que as respectivas soluções de campo de magnitude de gradiente de massa específica são apresentadas na Fig. 6.24. A visão geral mostra a capacidade de capturar a esteira de von Kármán desenvolvida concomitantemente com efeitos compressíveis mais fortes, tais como os choques que

Tabela 6.2: Valores calculados para o cilindro com  $M_\infty = 0,80$  e  $Re_\infty = 5 \times 10^5$ .

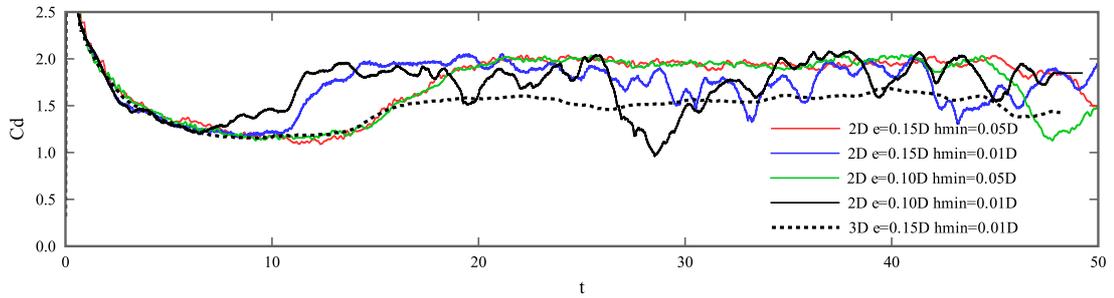
Caso	#Nós	#Elementos	$C_d$	$St$	CPU
2D LES $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0.15D$ , $h_{min} = 0,05D$	14 420	28 467	1,771	0,160	00h08
2D LES $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0.15D$ , $h_{min} = 0,01D$	20 228	39 702	1,712	0,174	00h21
2D LES $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0.10D$ , $h_{min} = 0,05D$	40 227	79 774	1,754	0,173	00h32
2D LES $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0.10D$ , $h_{min} = 0,01D$	64 316	12 7650	1,719	0,181	01h13
3D LES $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0.15D$ , $h_{min} = 0,01D$	1 512 457	7 808 008	1,511	0,177	79h48
2D DES Miserda e Leal (2009)	-	453 600	1,870	0,180	-
3D LES Xu et al. (2010) <sup>1</sup>	31 843 449	-	1,568	0,190	-
Experimental Murthy e Rose (1977)	-	-	1,500	0,180	-

conectam os vórtices com rotação em sentidos opostos. Estes vórtices maiores são bem capturados em todas as simulações bidimensionais. A combinação do erro calculado na norma  $\mathbf{L}^p$  e a adaptação de malhas baseada em arestas é capaz de capturar o efeito transiente dos vórtices ao longo da simulação. A Fig. 6.25 mostra esta capacidade em detalhes.

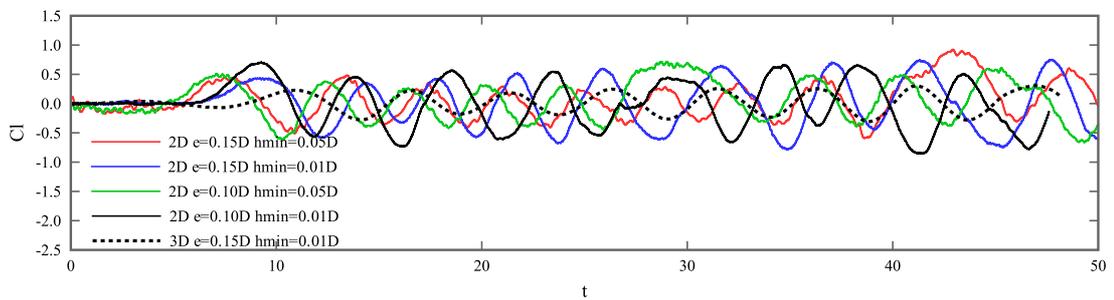
Embora uma estimativa de erro anisotrópica seja empregada, diversas interseções de métrica são efetuadas no intuito de controlar simultaneamente o erro de interpolação dos campos de massa específica, velocidades e energia, e a malha adaptada resultante que cobre todos estes erros de interpolação torna-se bastante isotrópica, com poucas regiões nas quais se pode observar anisotropia na malha. Esta forte perda de anisotropia é esperada quando tantas métricas são interceptadas simultaneamente (Castro-Díaz et al., 1997).

A malha na região próxima do cilindro é significativamente pouco refinada para os casos em que emprega-se um limite mínimo de tamanho de aresta de valor  $h_{min} = 0,05D$ , e, de fato, não há uma camada limite na região, explicando a falta de precisão para determinar o coeficiente de arrasto e a distribuição do coeficiente de pressão médio nestes casos. As malhas onde utiliza-se  $h_{min} = 0,01D$  são capazes de capturar efeitos transientes das interações entre viscosidade e choques presentes durante e após a separação da camada limite turbulenta. Outros efeitos complexos tais como interações do tipo onda de choque-*lambda* com diferentes intensidades e escalas, choques ortogonais a zonas de cisalhamento nas proximidades do cilindro e interações transientes entre ondas de choque podem ser observadas.

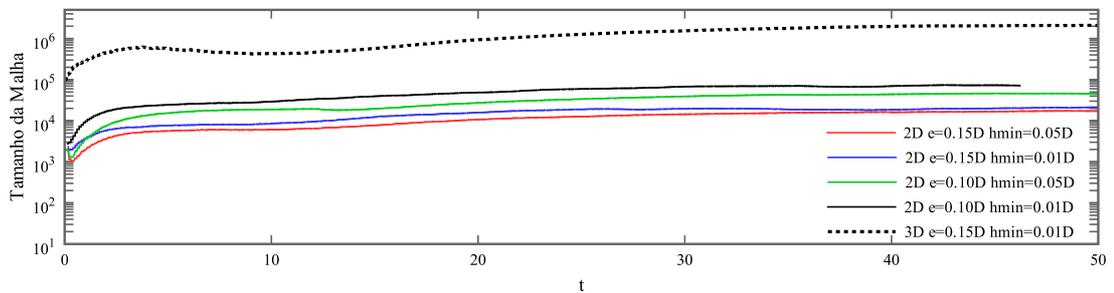
<sup>1</sup>( $M_\infty = 0,75$ ,  $Re_\infty = 2 \times 10^5$ )



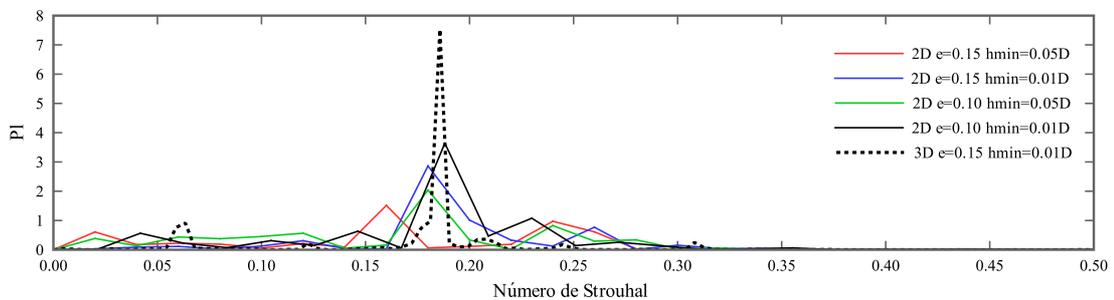
(a) Coeficiente de arrasto transiente



(b) Coeficiente de sustentação transiente



(c) Tamanho da malha



(d) Espectro de potência do coeficiente de sustentação em função do número de Strouhal

Figura 6.21: Solução temporal e no domínio de frequências para o cilindro em regime transônico.

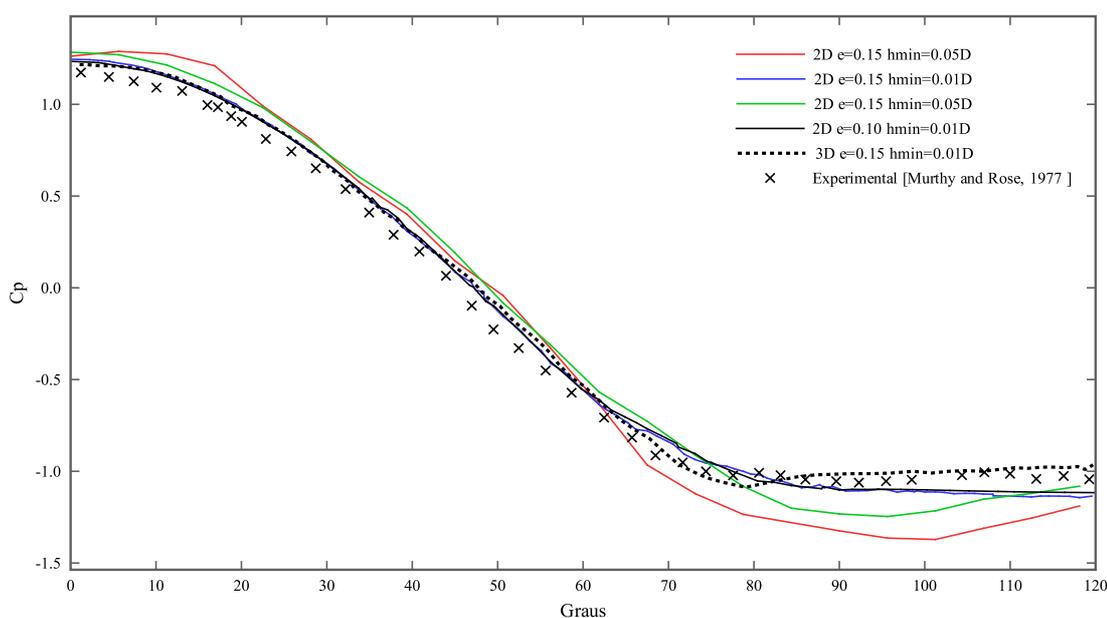


Figura 6.22: Coeficiente de pressão médio na superfície do cilindro.

É notável que as simulações para este problema empregando-se malhas fixas normalmente fazem uso de malhas com topologia do tipo  $O$ , a qual apresenta elementos que se alargam radialmente a partir do centro, onde encontra-se o cilindro. Este tipo de malha fixa é normalmente bastante refinada próximo ao cilindro e pouco refinada longe do mesmo, resultando em perda progressiva de resolução para capturar esteiras de vórtices. Embora os efeitos viscosos sejam mais fortes na região próxima do cilindro, a dinâmica desempenhada pelos vórtices desprendidos interfere na dinâmica dos vórtices à barlavento através da formação, destruição ou ajustamento de ondas de choque e velocidades no escoamento. Portanto, a determinação correta da esteira de vórtices também desempenha um papel importante na dinâmica global do escoamento no entorno do cilindro.

### Simulação Tridimensional

Embora a investigação bidimensional do escoamento turbulento transônico no entorno do cilindro possa ser empregada como fonte preliminar de informação e compreensão do escoamento e dos parâmetros da estratégia de adaptação, os efeitos reais da turbulência sobre o escoamento são essencialmente fenômenos tridimensionais. A investigação tridimensional para o mesmo escoamento é aqui realizada em um domínio circular obtido por extrusão ortogonal de um comprimento de  $2D$  ao longo de uma terceira direção que

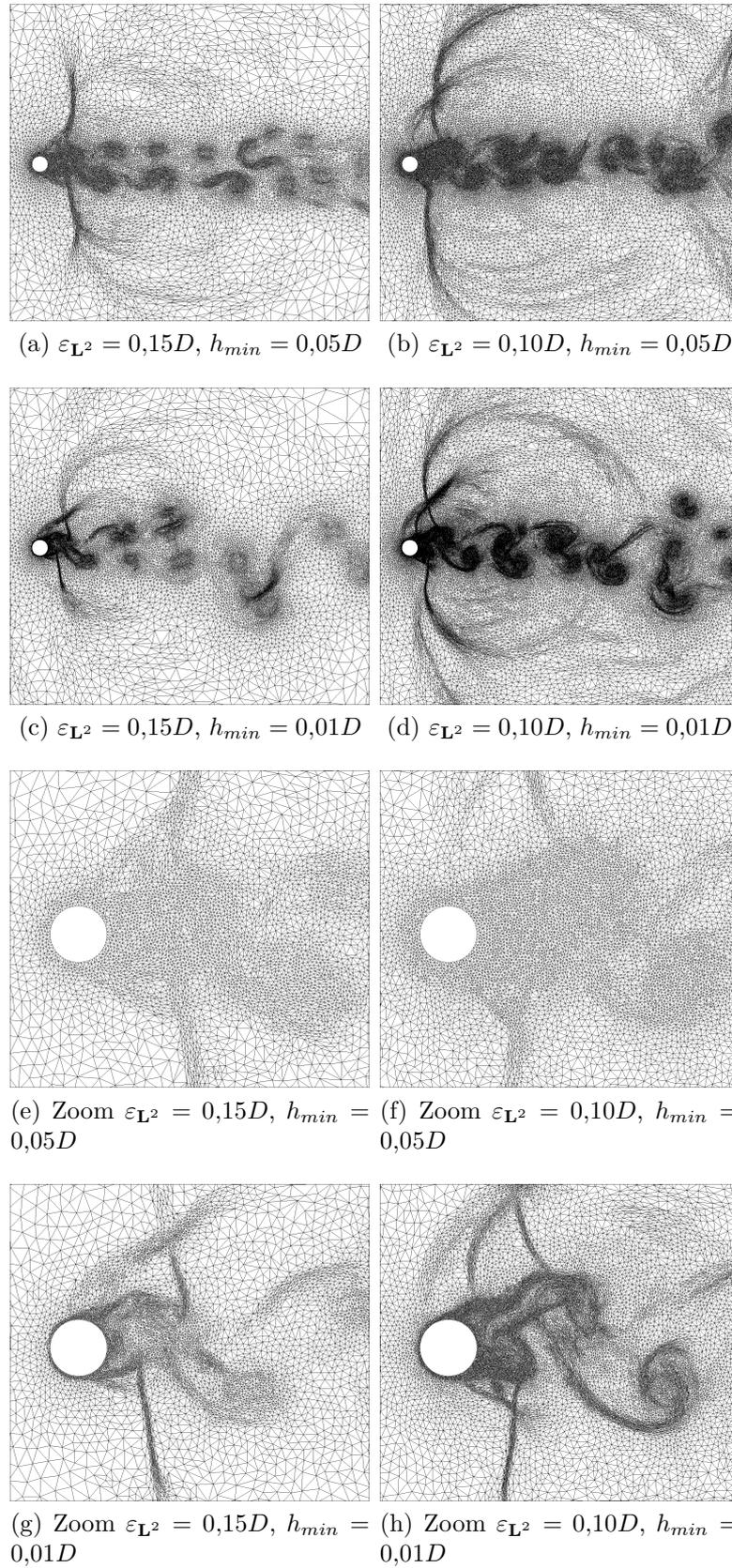


Figura 6.23: Malha em um dado tempo computacional.

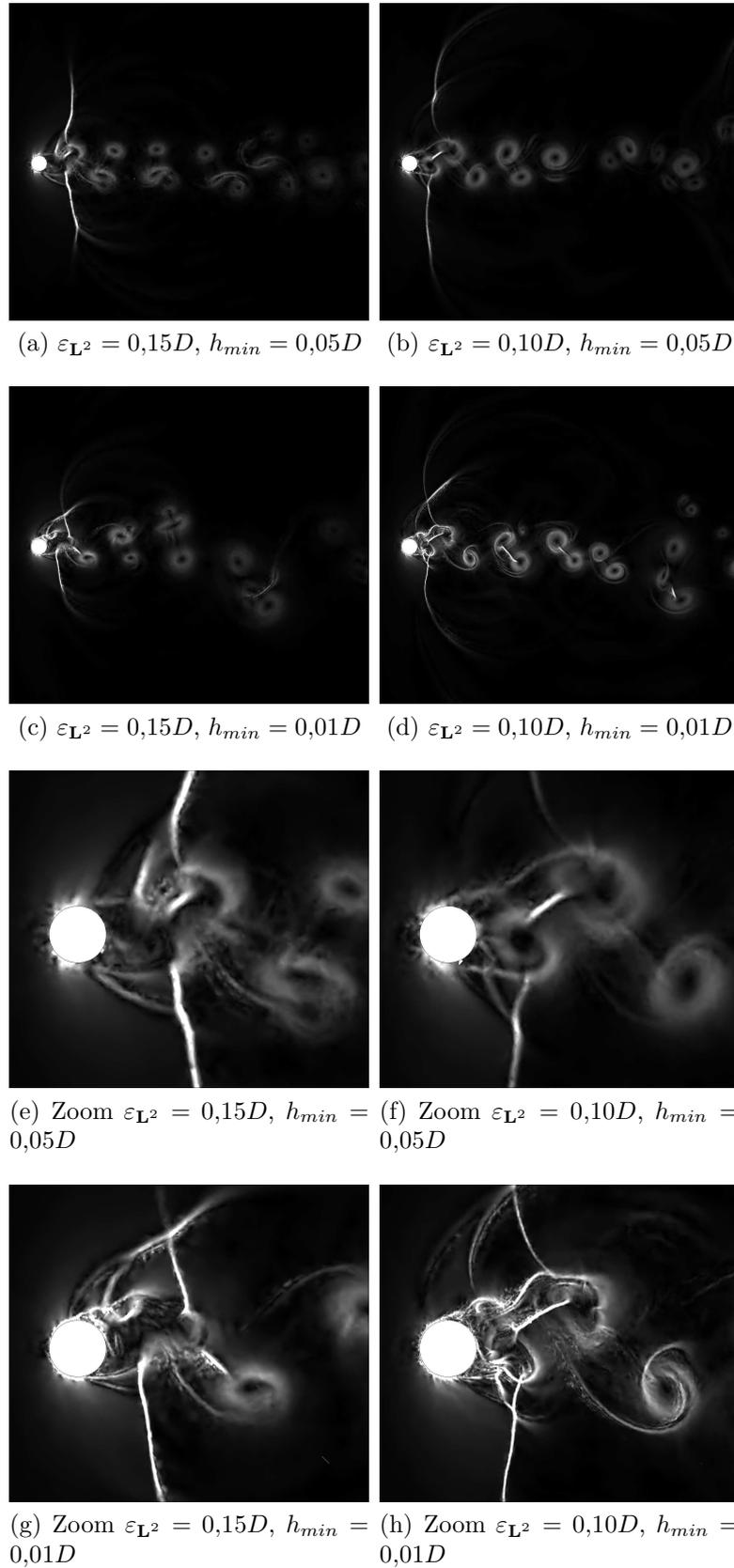
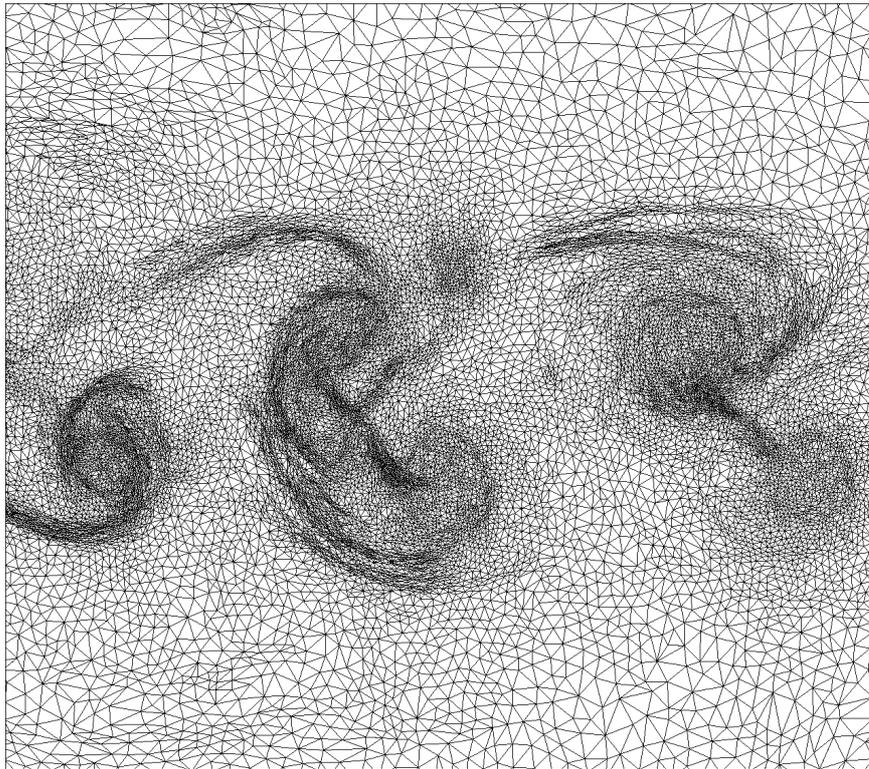


Figura 6.24: Magnitude do gradiente de massa específica em um dado tempo computacional.



(a) Malha



(b) Magnitude do gradiente de massa específica

Figura 6.25: Detalhe da malha adaptada capturando vórtices desprendido atrás do cilindro e efeitos compressíveis com  $\varepsilon_{L^2} = 0,10D$ ,  $h_{min} = 0,01D$ .

coincide com a do eixo do cilindro. Condições de contorno de simetria são aplicadas nas paredes normais ao eixo do cilindro e a simulação é conduzida empregando-se um erro de interpolação objetivo  $\varepsilon_{L^2} = 0,15D$  e um tamanho mínimo de aresta permitido  $h_{min} = 0,01D$ .

O coeficiente de arrasto não-permanente para a simulação tridimensional apresentado na Fig. 6.21a mostra um valor médio menor que os obtidos nas simulações bidimensionais. O coeficiente de arrasto médio obtido é 1,511 e é mais próximo do valor experimental observado Murthy e Rose (1977) e de outras simulações numéricas empregando-se LES Xu et al. (2010). Os resultados encontram-se sumarizados na Tab. 6.2.

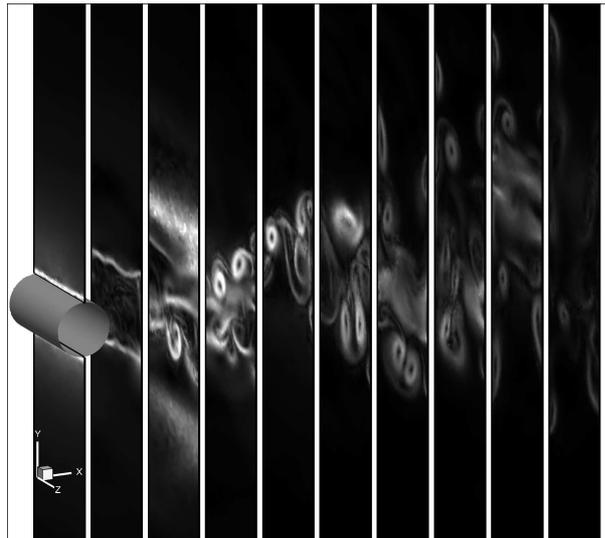
O coeficiente de sustentação não-permanente (Fig. 6.21b) e sua análise no domínio de frequências (Fig. 6.21d) exibem os mesmos valores de pico próximos de 0.18 para o número de Strouhal enquanto que o tamanho da malha (Fig. 6.21c) apresenta um valor médio de aproximadamente  $1.5M$  nós.

A distribuição média do coeficiente de pressão na superfície do cilindro é mostrada na Fig. 6.22. A força desenvolvida pela pressão desempenha um papel predominante na composição das forças atuantes sobre o cilindro e, devido a um pequeno acréscimo de pressão que é obtido após o ponto de separação da camada limite no entorno do ângulo de  $75^\circ$  no caso tridimensional, tem-se também um coeficiente de arrasto médio menor nas simulações tridimensionais.

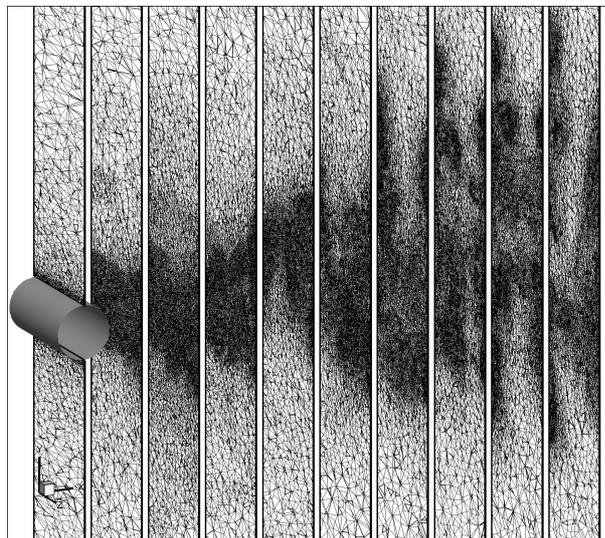
Uma seqüência de dez cortes igualmente espaçados ao longo da direção do escoamento (plano de corte perpendiculares ao eixo  $x$ ) a partir da posição inicial  $x = 0$  até a posição final  $x = 8D$  é apresentada na Fig. 6.26. A complexidade do escoamento tridimensional se torna evidente nestes cortes, onde efeitos turbulentos viscosos, tais como vórtices, adquirem estruturas helicoidais em detrimento às estruturas planares circulares obtidas em simulações bidimensionais. Ondas de choque móveis interagem com o escoamento e pequenas ondas de choque (*shocklets*) oriundas de flutuações de vórtices turbulentos surgem como regiões com alta dilatação negativa, as quais introduzem uma grande intensidade de turbulência na esteira do escoamento. Na Fig. 6.27, cortes ao longo da direção do eixo do cilindro são também apresentados.

As estruturas coerentes em forma de vórtices no escoamento são mostradas na Fig. 6.28a,

onde são mostradas isosuperfícies do escoamento empregando-se o critério  $Q$ . Linhas de corrente são mostradas na Fig. 6.28b, evidenciando o escoamento turbulento complexo desenvolvido. No ponto  $A$ , interações entre efeitos de viscosidade com ondas de choque estão presentes e o escoamento descolado se desenvolve em uma estrutura destacada helicoidal que emerge de uma porção de dentro do escoamento deslocado (ponto  $B$ ). O ponto  $C$  compreende um estágio inicial do mesmo efeito observado em  $B$ .



(a) Magnitude do gradiente de massa específica



(b) Malha

Figura 6.26: Campo de solução e malha para diversas seções de corte ao longo do eixo  $x$ .

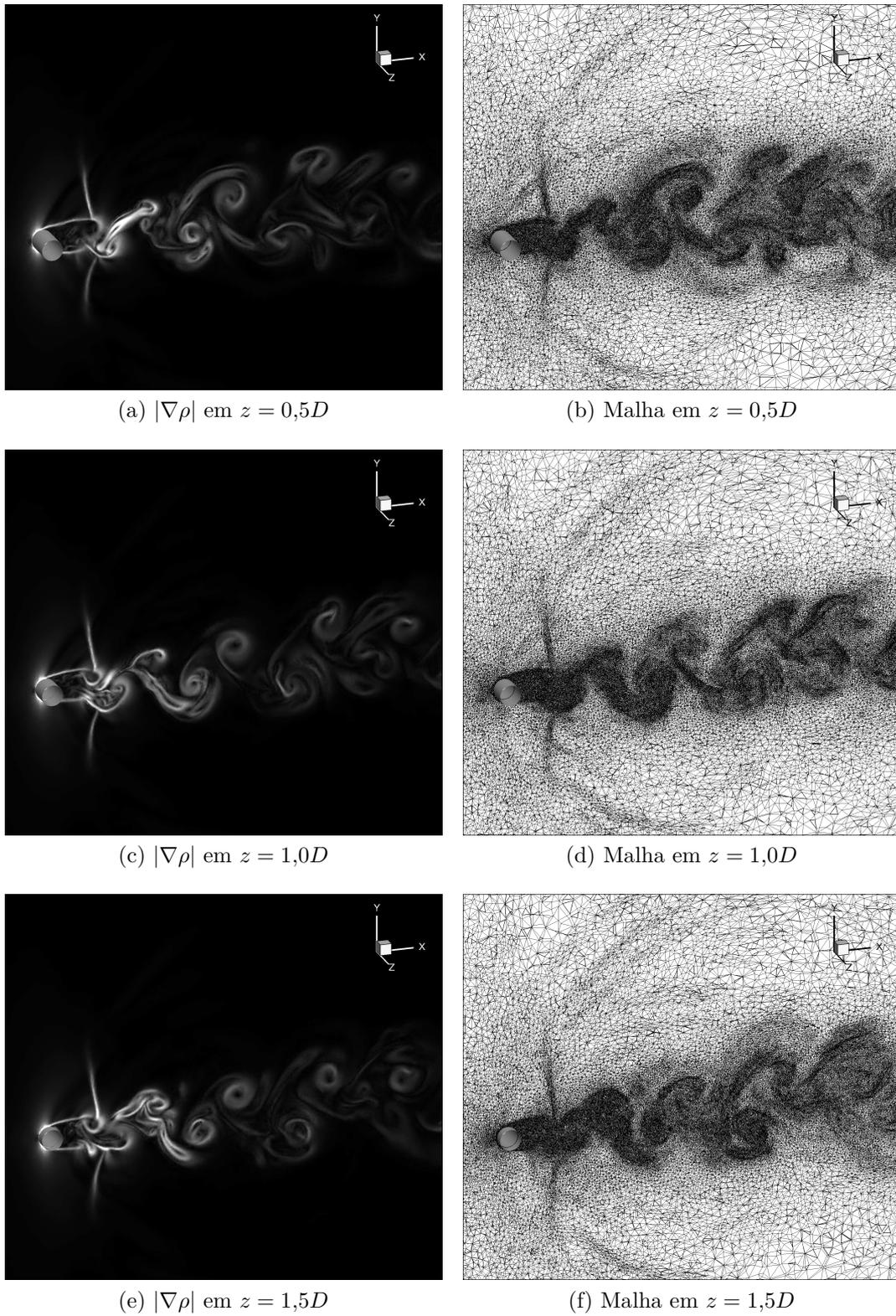
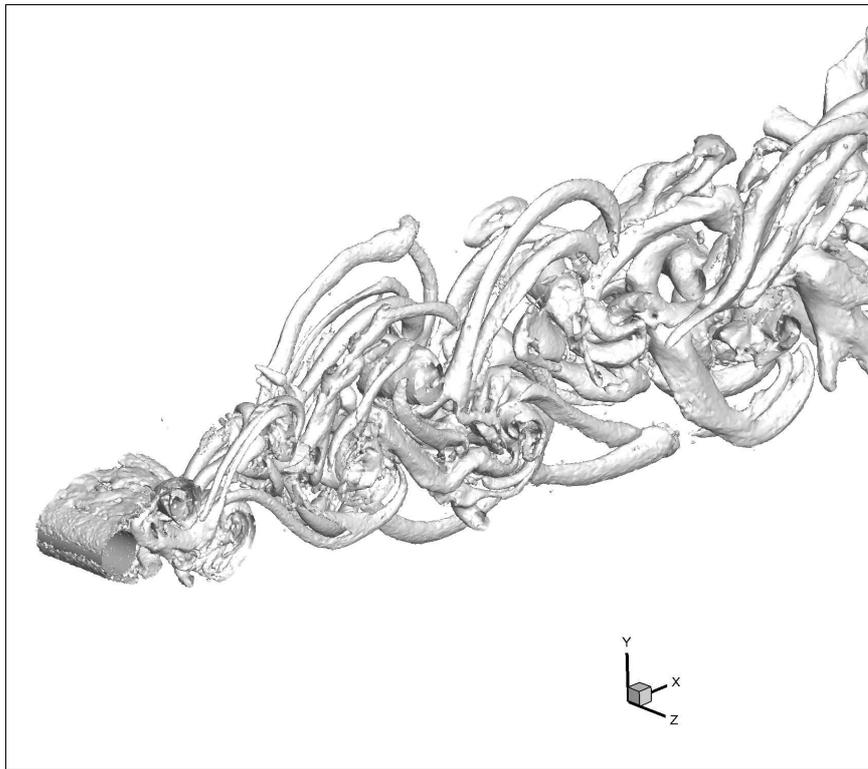
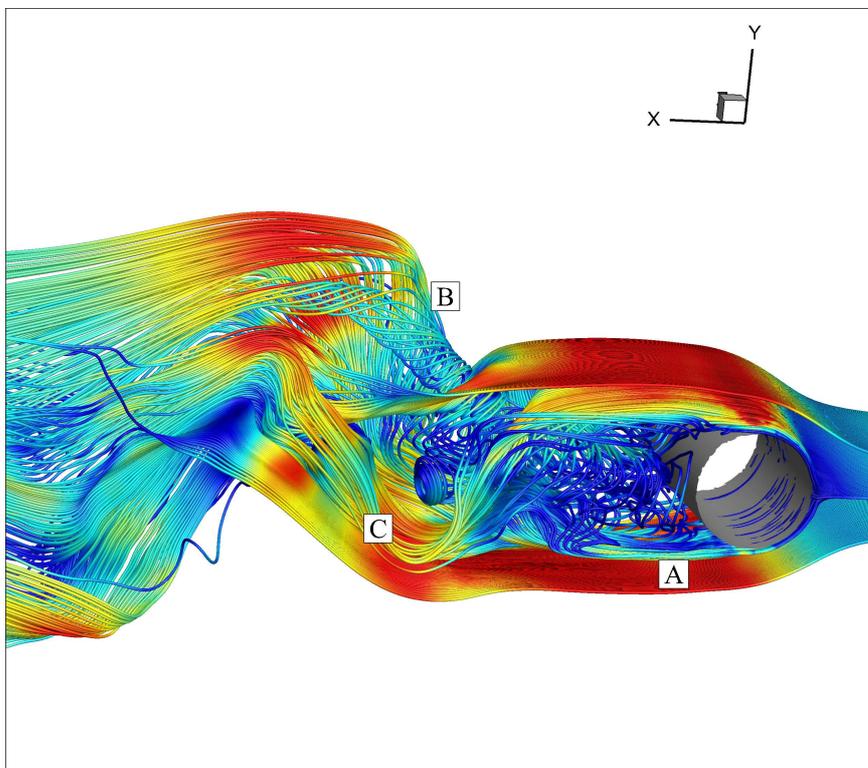


Figura 6.27: Campo de solução e malha para duas seções de corte ao longo do eixo  $z$ .



(a) Isosuperfícies utilizando-se o critério  $Q$  e adaptação de malha



(b) Linhas de corrente do escoamento coloridas pela magnitude de velocidade

Figura 6.28: Isosuperfícies e linhas de corrente do escoamento no entorno do cilindro

### 6.4.3 Escoamento Transônico Laminar com Martelamento em Aerofólio NACA-0012

O martelamento (em inglês: *buffeting*) em regime transônico é o fenômeno caracterizado por fortes oscilações de ondas de choques. Em asas de aviões e aerofólios, o fenômeno causa fortes vibrações de alta frequência que se intensificam com o aumento do ângulo de ataque. O fenômeno de martelamento pode ocorrer a baixas e a altas velocidades. No caso de altas velocidades, o escoamento se separa atrás da onda de choque quando a asa aumenta seu ângulo de ataque neste regime de velocidades. Como resultado, a posição da onda de choque começa a oscilar, levando a aeronave a vibrar. Com o aumento progressivo do ângulo de ataque, o avião entra em estado de estol. O martelamento transônico afeta não apenas a parte estrutural, mas principalmente as capacidades de vôo, uma vez que produz fortes oscilações no coeficiente de sustentação (Crouch et al., 2009).

Em 1930 um trágico acidente com um avião monoplano Junker F-13 ocorreu em Meopham, na Inglaterra. O avião caiu, matando todos passageiros a bordo, e inúmeras investigações foram conduzidas para entender a causa do desastre, a qual foi atribuída a efeitos de martelamento não previstos na cauda do avião (British, 1931). Os estudos iniciais da aviação estavam concentrados principalmente na resposta aerodinâmica horizontal da cauda imersa na esteira do vento, ou no efeito de rajadas e turbulência na vibração de asas (Lee, 2001). A introdução de asas supercríticas no início da década de 70 renovou o interesse neste assunto, embora estudos iniciais do efeito de martelamento transônico tenham sido conduzidos nos laboratórios da NACA já em meados da década de 50 (Coe e Mellenthin, 1954; Skopinski e Huston, 1956).

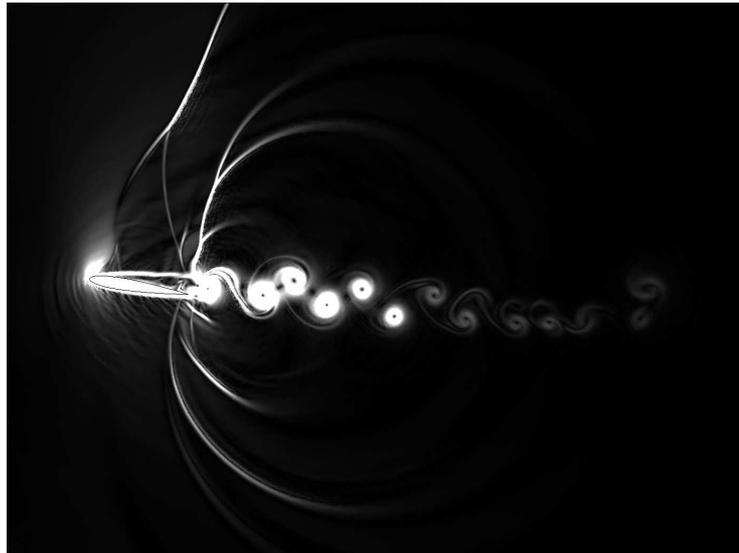
A simulação numérica bidimensional do escoamento transônico no entorno do aerofólio NACA-0012 é realizada aqui para um ângulo de ataque alto  $\alpha = 9^\circ$  e um número de Mach de corrente-livre  $M_\infty = 0,80$ . O número de Reynolds de corrente-livre considerado é  $Re_\infty = 1 \times 10^4$ . Nestas condições, tem-se uma camada limite laminar com formação de fortes interações entre a camada limite e ondas de choque. Esta interação aeroacústica é difícil de ser simulada pois a difusão artificial empregada na estabilização do algoritmo numérico compressível geralmente dissipa tais oscilações. Mesmo empregando-se técnicas de adaptação de malhas tem-se uma dificuldade grande em controlar a malha em tais

regiões, uma vez que a tendência é desrefinar ou não refinar regiões que não são ondas de choque, tais como zonas sob efeitos de grandes tensões cisalhantes. A adaptação multi-escalas torna-se imprescindível nesta situação. Um comprimento de corda  $c$  unitário é considerado em um domínio circular com valor de raio  $25c$ . A densidade e velocidade de corrente-livre são tomadas como  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente. A simulação é realizada aqui empregando-se o algoritmo de adaptação a cada 20 iterações do código CBS para controlar o erro de interpolação usando-se os seguintes parâmetros:  $\varepsilon_{L^2} = 0,02c$  e  $h_{min} = 0,005c$ . A simulação é realizada até o tempo adimensional final de valor 50.

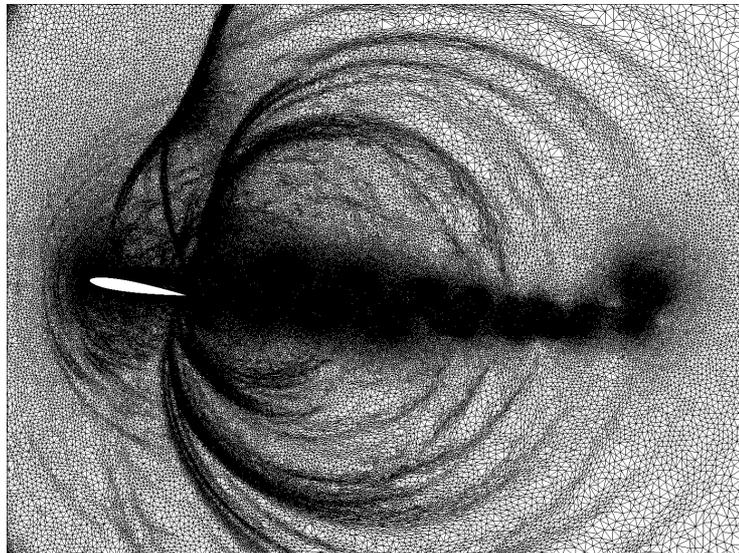
A Fig. 6.29, Fig. 6.30 e Fig. 6.31 mostram a complexidade do escoamento desenvolvido em diferentes instantes e a respectiva malha adaptada. É possível visualizar as ondas acústicas geradas pela separação da camada limite tanto na porção superior quanto inferior do aerofólio e a subsequente esteira de vón Kármán. Fortes ondas de choque instáveis também se formam e pequenas interações do tipo *lambda* surgem na porção superior, conforme pode ser observado no detalhe da Fig. 6.32. Visualiza-se também a malha adaptada conseguindo capturar os efeitos aeroacústicos mesmo na presença de fortes singularidades tais como ondas de choque que usualmente desviam a estimativa do erro da simulação.

Este martelamento devido à variação das ondas de choque pode ser também visualizado na evolução temporal dos coeficientes aerodinâmicos de arrasto e sustentação, apresentados na Fig. 6.33 juntamente do tamanho da malha e análise de frequências. O valor médio de coeficiente de sustentação obtido nesta simulação é 0,41, o qual oscila entre os valores de 0,36 e 0,48. A mesma simulação bidimensional foi realizada por Miserda et al. (2004) sem empregar nenhum modelo de turbulência mas utilizando-se uma malha muito refinada no entorno do aerofólio, e os valores apresentados para o coeficiente de sustentação se mostram oscilando entre 0,22 e 0,38. Os resultados se mostram completamente diferentes dos apresentados por Bouhadji e Braza (2003), o qual emprega simulação bidimensional também sem modelo de turbulência. A malha empregada parece ser também insuficiente neste caso, onde ondas de choque se mostram completamente difusas ou inexistentes, resultando em uma oscilação do coeficiente de sustentação no entorno dos valores de  $-0,10$  e  $0,10$ . Barakos e Drikakis (2000) simularam o aerofólio NACA-0012 transônico empregando diversos modelos de turbulência RANS para um número de

Reynolds ligeiramente superior, número de Mach de corrente-livre  $M_\infty = 0,725$  e ângulo de ataque mais baixo  $\alpha = 4^\circ$ , com o coeficiente de sustentação variando entre os valores de 0,18 e 0,26. Os resultados experimentais se apresentam em geral também dispersos para esta faixa de altos ângulo de ataque e número de Mach (Lee, 1990, 2001). Por fim, o número de Strouhal obtido neste trabalho possui um pico bem definido no valor de 0,94.

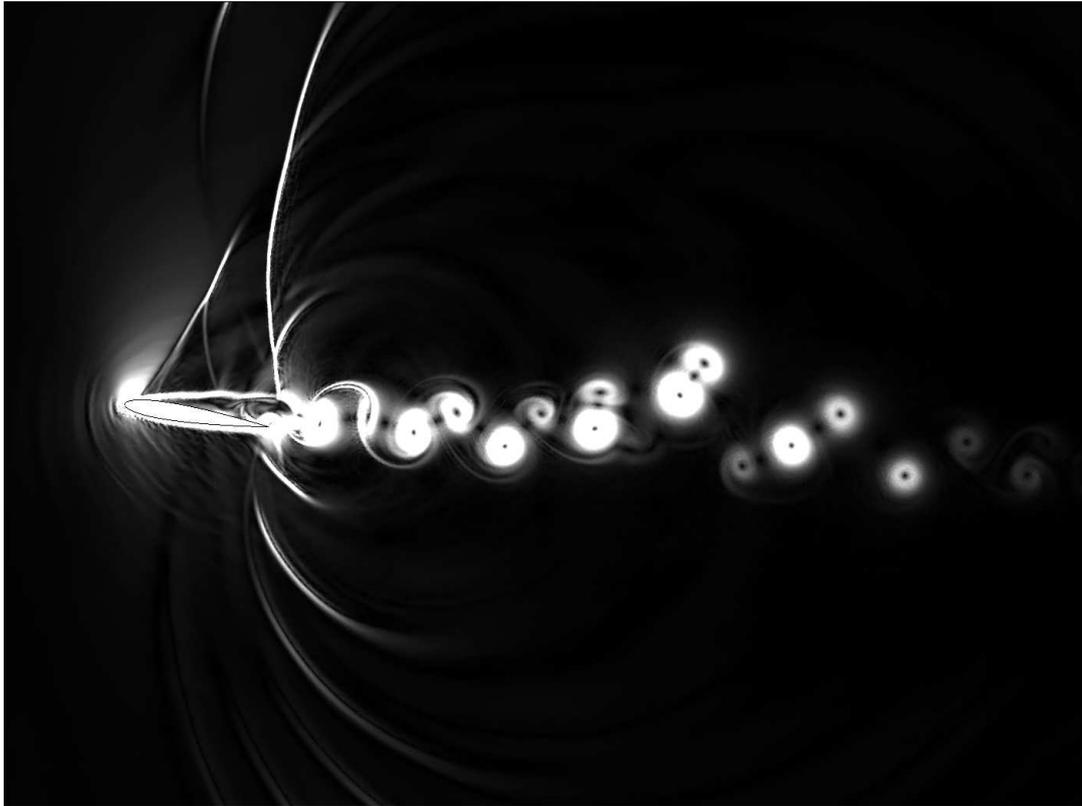


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

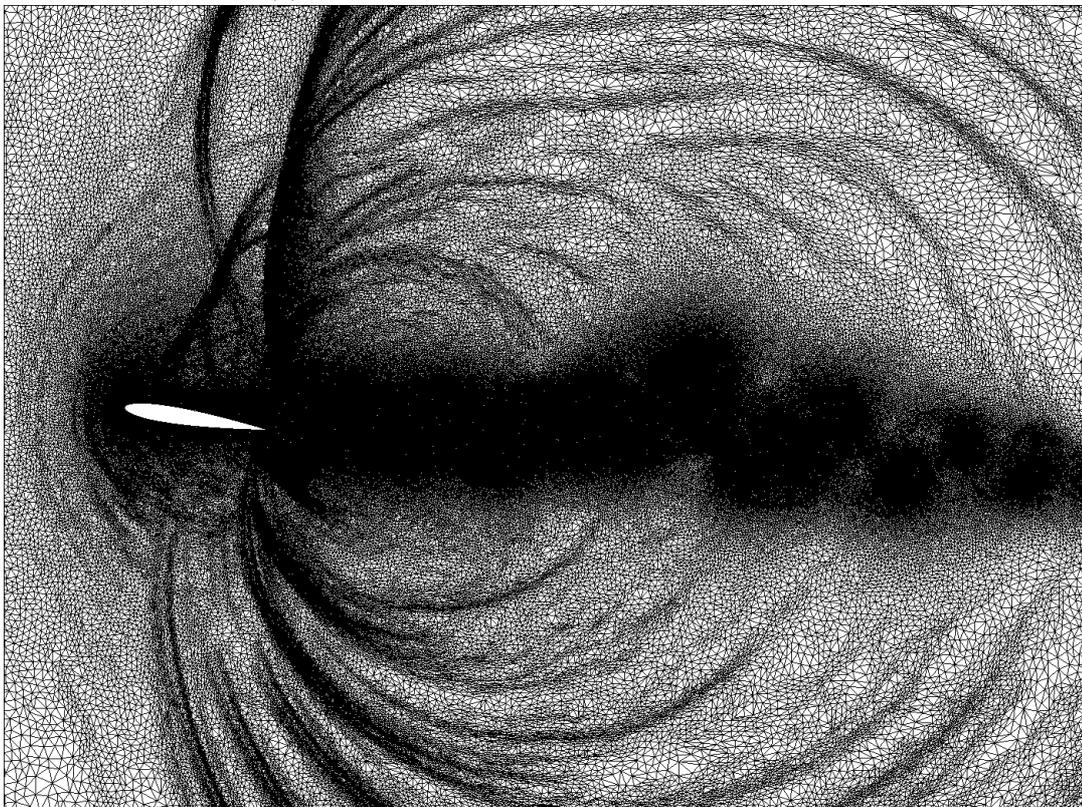


(b) Malha adaptada

Figura 6.29: Escoamento transônico transiente com martelamento em diferentes estágios e respectiva malha adaptada (A).

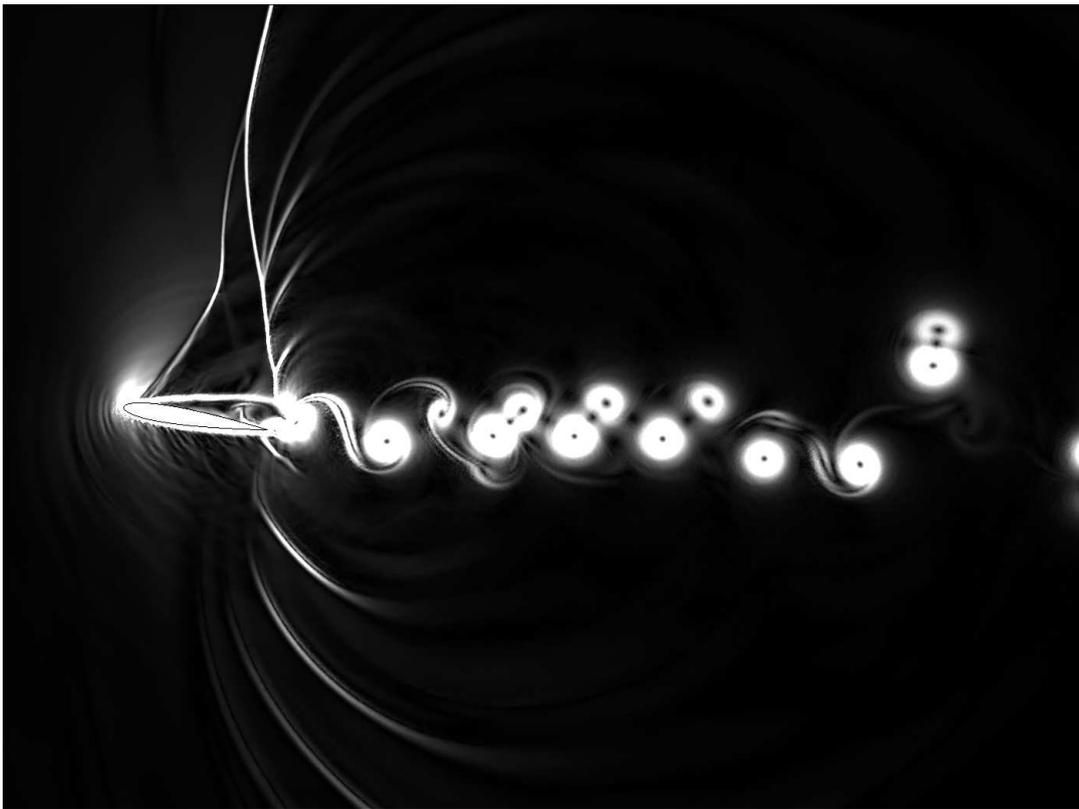


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

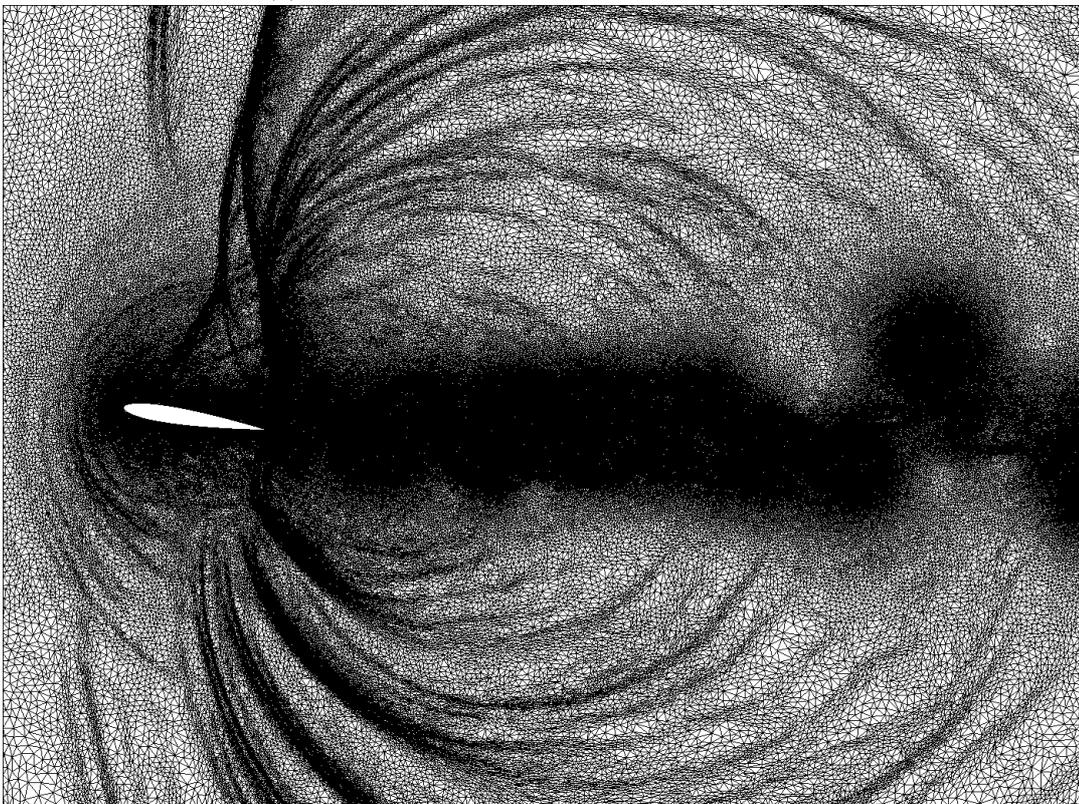


(b) Malha adaptada

Figura 6.30: Escoamento transônico transiente com martelamento em diferentes estágios e respectiva malha adaptada (B).

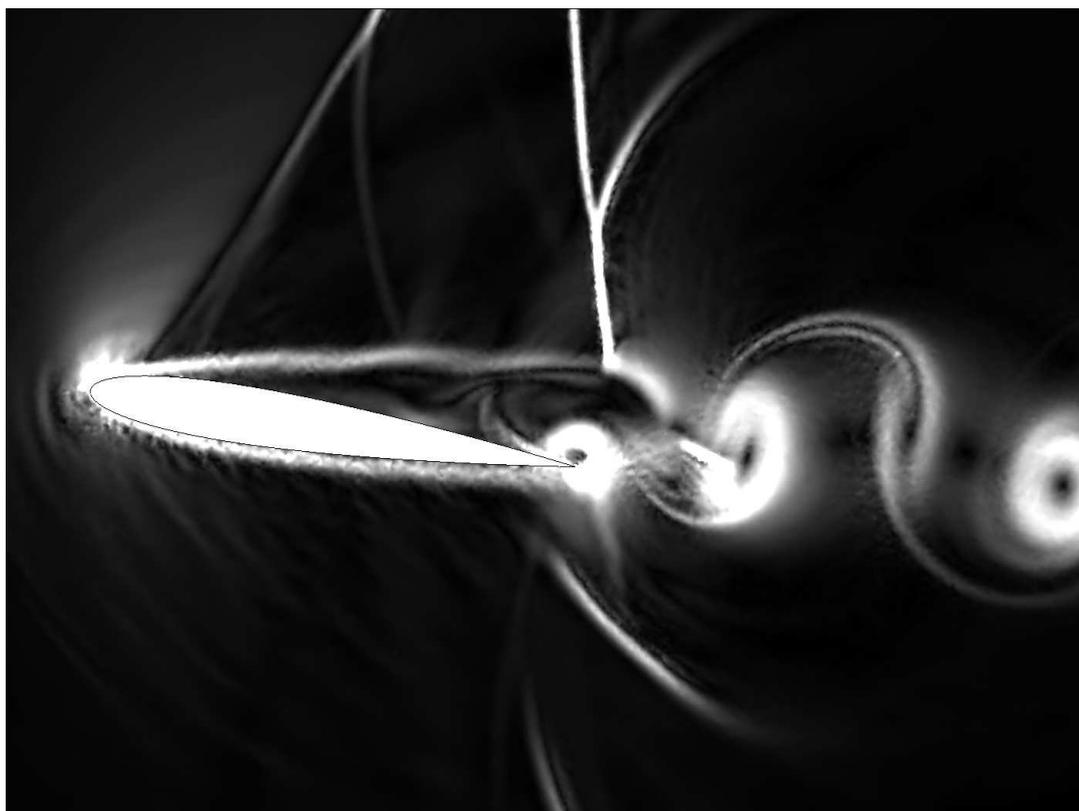


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

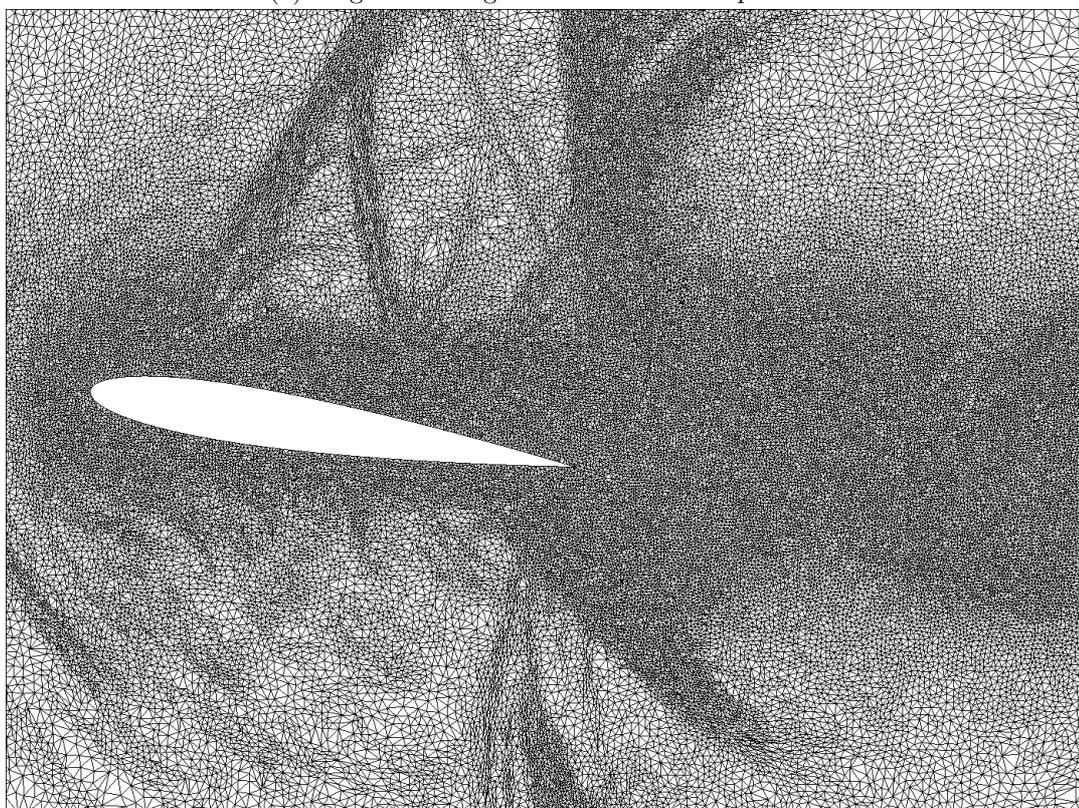


(b) Malha adaptada

Figura 6.31: Escoamento transônico transiente com martelamento em diferentes estágios e respectiva malha adaptada (C).

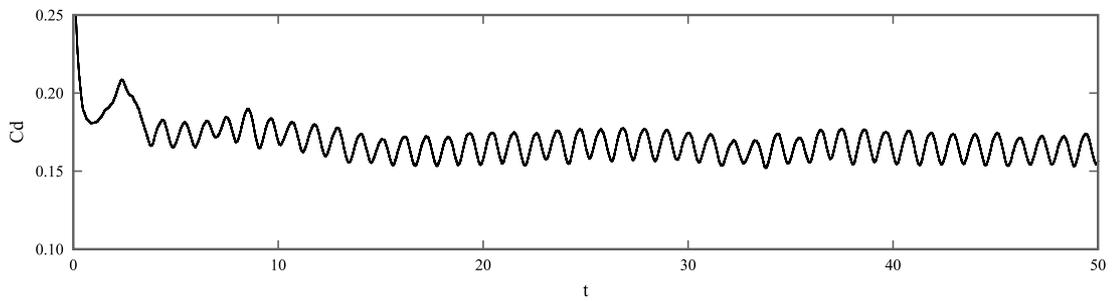


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

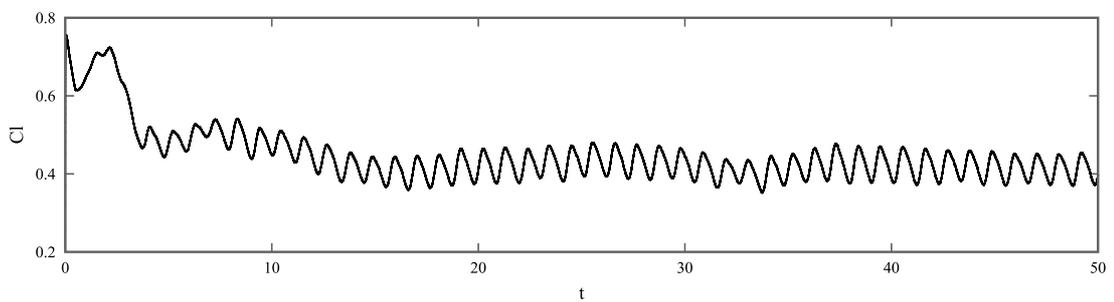


(b) Malha adaptada

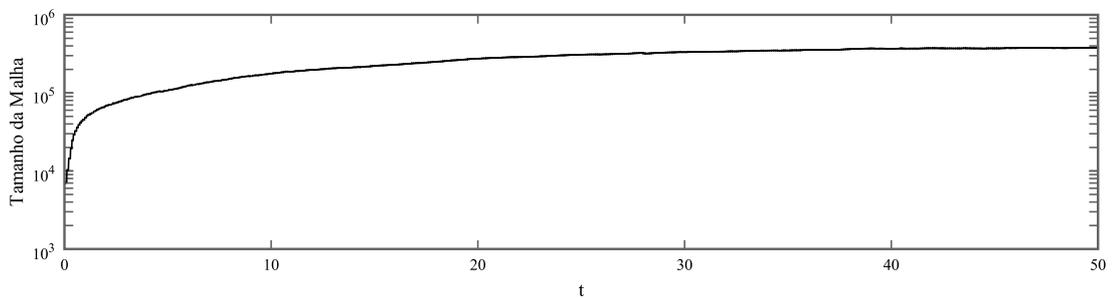
Figura 6.32: Detalhe do escoamento transônico transiente com martelamento próximo do aerofólio e respectiva malha adaptada.



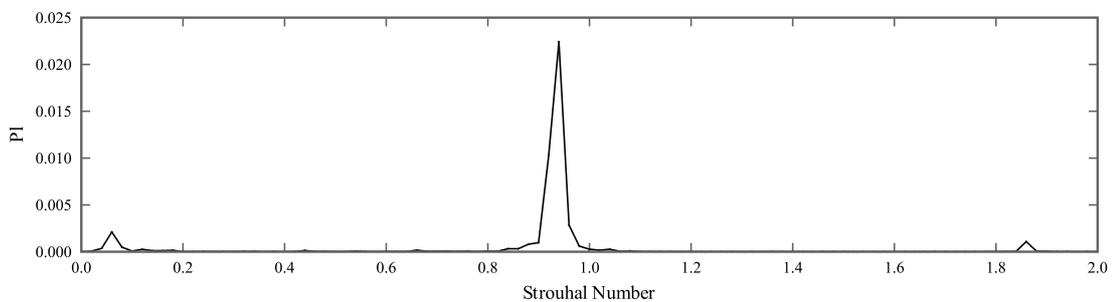
(a) Coeficiente de arrasto transiente



(b) Coeficiente de sustentação transiente



(c) Tamanho da malha



(d) Espectro de potência do coeficiente de sustentação em função do número de Strouhal

Figura 6.33: Solução temporal e no domínio de frequências para o aerofólio NACA em regime transônico.

#### 6.4.4 Escoamento Turbulento Supersônico no Entorno de Modelo Rombudo Esfera-Cilindro-Cone-Cilindro

O presente caso investiga um escoamento altamente supersônico no entorno de um corpo rombudo sob um grande ângulo de ataque empregando a presente estratégia de adaptação conjuntamente a LES. Esta é uma aplicação aeroespacial típica empregada em estágio de desenvolvimento de espaçonaves de re-entrada atmosférica e lançadores avançados (Reddy e Sinha, 2009). O escoamento nestas condições é caracterizado pela presença de fortes choques curvados, regiões de separação e formação de vórtices, interação de ondas de choque com camada limite e entre ondas de choque, além de altas taxas de aquecimento do fluido nas regiões próximas às descontinuidades na superfície do corpo. Os efeitos complexos tri-dimensionais a serem capturados resultam em uma tarefa desafiadora tanto para investigações numéricas quanto experimentais. Além disto, quando o corpo encontra-se em um alto ângulo de ataque, o escoamento desenvolvido em seu entorno apresenta zonas de separação com forte presença de flutuações no campo de velocidades, a qual influencia a pressão desenvolvida na superfície do corpo.

A presente investigação engloba um modelo axissimétrico, consistindo em um cilindro com cabeça esférica, um alargamento cônico em um ângulo de  $30^\circ$  e um cauda cilíndrica (veja Fig. 6.34), sendo ele comparado com resultados obtidos experimentalmente em túnel de vento e com resultados desconsiderando efeitos de viscosidade (Euler) realizados por Houtman et al. (1995).

Um número de Mach de corrente-livre  $M_\infty = 4,04$  e um número de Reynolds de corrente-livre  $Re_\infty = 5 \times 10^6$  são considerados conjuntamente com um ângulo de ataque  $\alpha = 20^\circ$ . A massa específica e a velocidade de corrente-livre de referência consideradas são iguais a  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente e a simulação é conduzida até o tempo adimensional de 30, sendo a adaptação executada a cada 20 iterações do método CBS. A geometria completa é considerada, sem tomar em consideração simetrias. O erro objetivo de interpolação considerado vale  $\varepsilon_{L^2} = 0,15L$  e o tamanho mínimo permitido de aresta vale  $h_{min} = 0,005L$ .

A magnitude do gradiente de massa específica instantânea é mostrada na Fig. 6.35 para uma seção de corte na posição média ao longo do eixo  $z$  conjuntamente com a respectiva

malha adaptada. Várias características transientes do escoamento podem ser observadas na porção do lado a sotavento, caracterizado pela presença de separação do escoamento a partir do cilindro. Na porção do lado a barlavento, tem-se a presença da camada limite turbulenta interagindo com o choque de expansão. Uma interação entre ondas de choque também se forma na porção do lado a barlavento, onde a forte onda de choque frontal curvada, a onda de choque de expansão e a onda de choque de ajuste são visíveis como zonas de alto gradiente de massa específica. O número médio de nós empregado ao longo da simulação é 2 519 173, enquanto que o número médio de elementos é de 14 241 091.

A influência da viscosidade não se limita apenas à região nas proximidades do corpo. Uma zona de sucção desenvolve-se atrás da geometria, e a esteira formada pode ser melhor percebida na Fig. 6.36, na qual a magnitude do gradiente de massa específica e a respectiva malha são mostradas para três diferentes seções de corte ao longo do eixo  $x$ . Na posição  $x = 0,779L$  e  $x = 2,000L$ , torna-se distinguível a presença de dois vórtices que giram em sentidos opostos e se originam da zona de separação na região do lado a sotavento do modelo.

As linhas de corrente do escoamento são apresentadas na Fig. 6.37. O ponto A indica a posição inicial de separação na região a sotavento do cilindro, diretamente após a semi-esfera. Vórtices emergindo podem ser observados na posição B e o escoamento reconecta-se ao corpo do modelo nas proximidades da posição C em ambos os lados da zona central contendo vórtices. Nesta posição C, tem-se também que o escoamento despreendido originado na porção a barlavento entrelaça-se com o escoamento separado originado na porção a sotavento (A). Finalmente, no ponto D, uma esteira turbulenta é observada, a qual não está presente nos resultados experimentais de Houtman et al. (1995), pois o modelo é suspenso no túnel de vento através de uma haste nesta posição posterior.

A distribuição do coeficiente de pressão média ( $p/p_\infty$ ) calculada na posição central ao longo do plano  $z = 0$  é mostrada na Fig. 6.38 conjuntamente com dados experimentais e numéricos (Euler) obtidos por Houtman et al. (1995). A solução de Euler de referência concorda muito bem com os valores experimentais de distribuição de pressão apenas nas regiões que não são dominadas por efeitos viscosos – o lado a barlavento no entorno da cabeça esférica e a parte inicial do cilindro. Por outro lado, os efeitos viscosos são

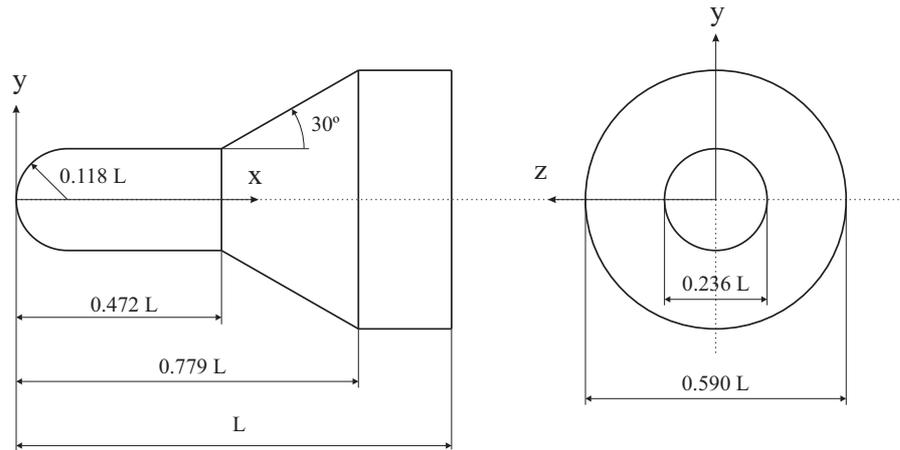
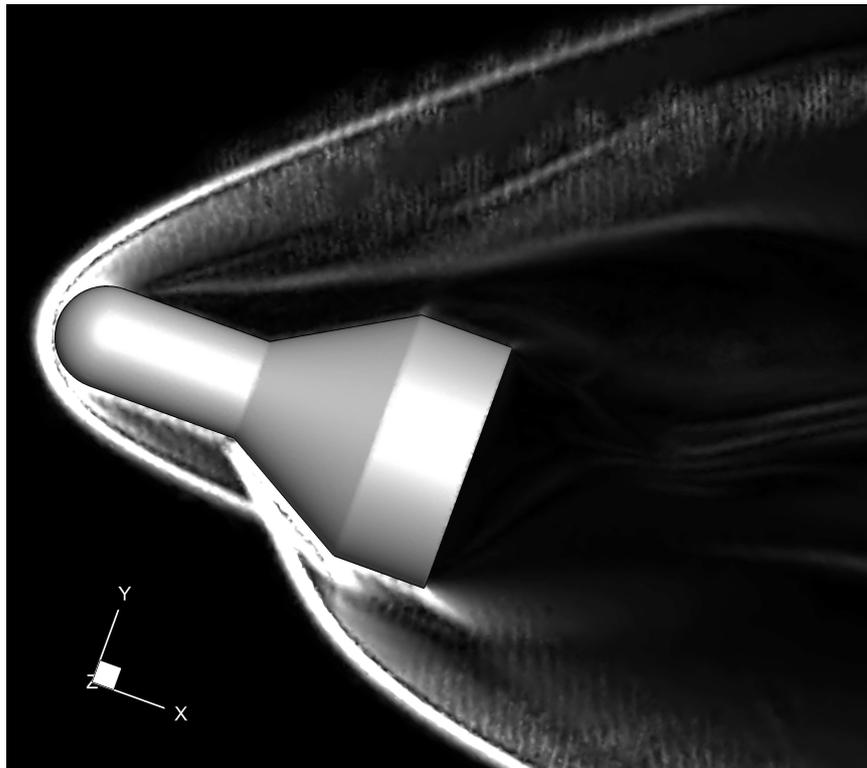


Figura 6.34: Geometria e sistema de coordenadas.

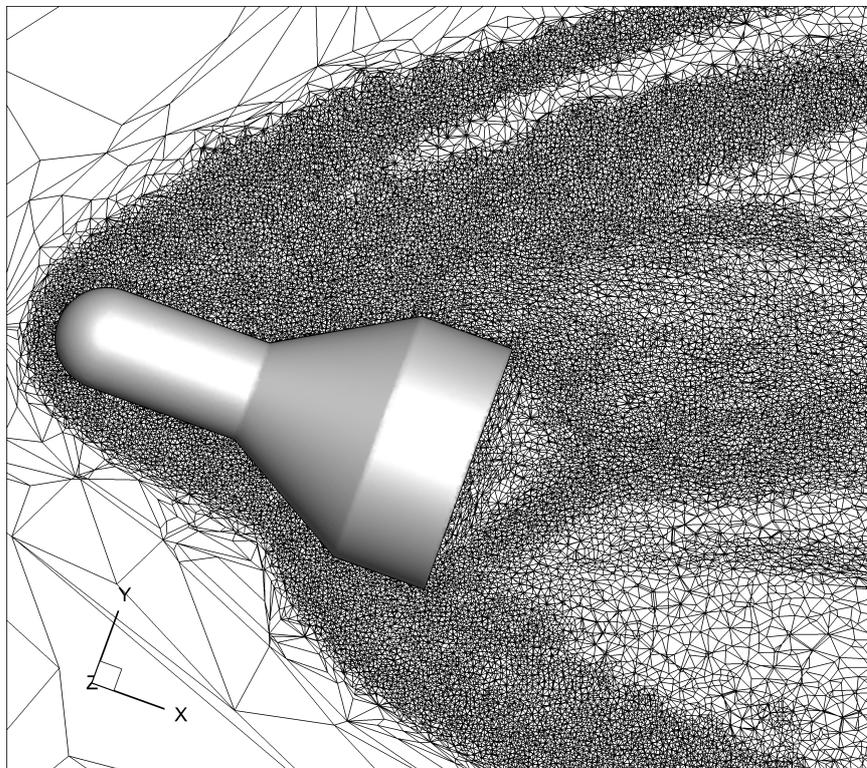
devidamente capturados pela presente solução empregando-se LES e adaptação de malhas.

Na porção a sotavento do modelo, o escoamento é dominado pela presença de uma zona de separação e produção de vórtices. Nesta região tem-se que a separação induzida pela presença de ondas de choque no início do cilindro acaba por difundir a flutuação da pressão na superfície do cone. Como resultado, a solução das equações de Euler exibem uma concordância fraca com os dados experimentais de incremento de pressão nesta zona devido à presença irreal de choques ao final do cone. Por outro lado, empregando-se a simulação LES, os efeitos da zona de separação são devidamente capturada na presente solução.

Na região a barlavento do escoamento, os efeitos de interações entre ondas de choque na distribuição da pressão podem ser observados pela significativa expansão que ocorre logo após o choque, e, após, reflete na superfície do modelo. Como resultado, três picos de pressão são observados. O segundo pico de pressão obtido experimentalmente é levemente mais alto que o obtido aqui, mas os outros dois estão muito próximos.



(a) Magnitude do gradiente de massa específica



(b) Malha

Figura 6.35: Seção de corte no plano médio do eixo  $z$ .

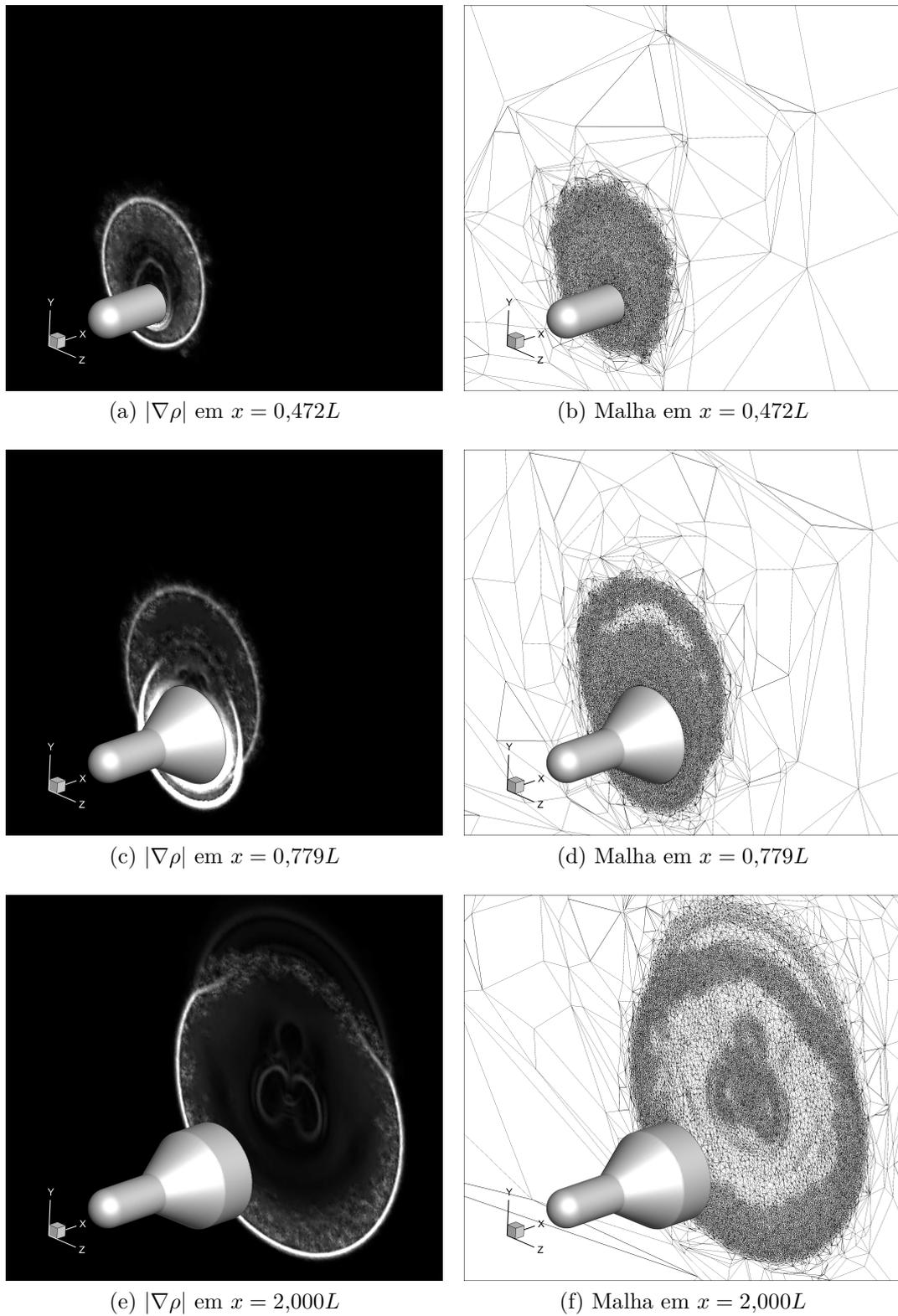


Figura 6.36: Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas em planos de corte ao longo do eixo  $x$ .

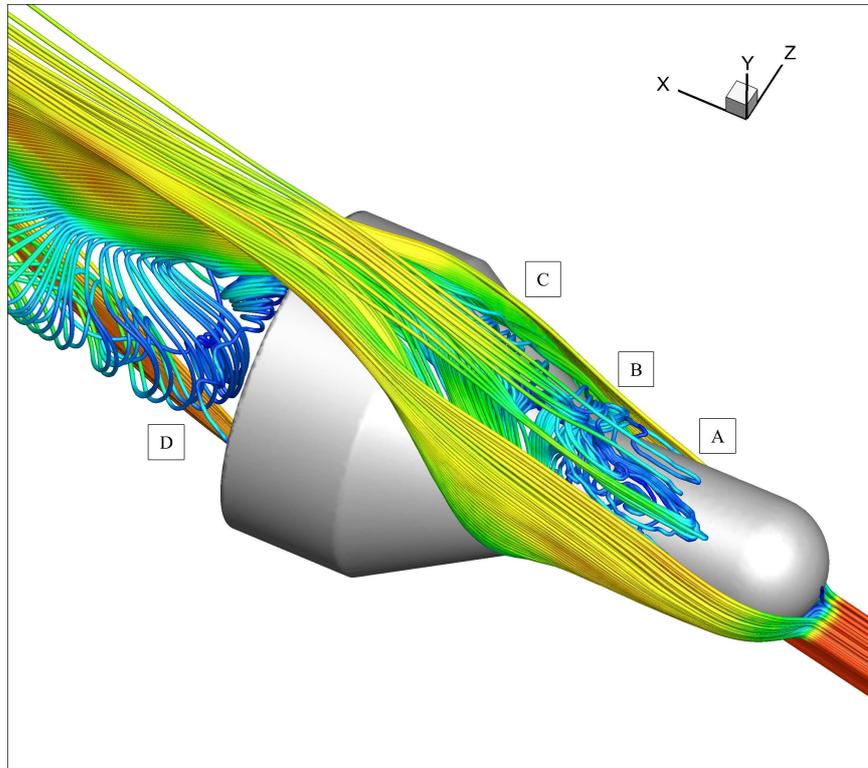


Figura 6.37: Linhas de corrente coloridas pela magnitude de velocidades.

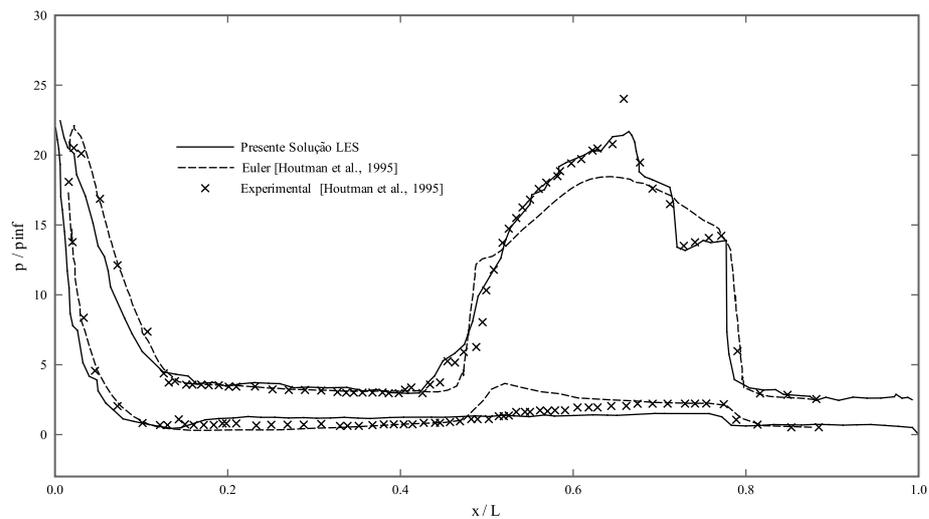


Figura 6.38: Distribuição de pressão média ( $p/p_\infty$ ) no plano  $xy$  em  $z = 0$ .

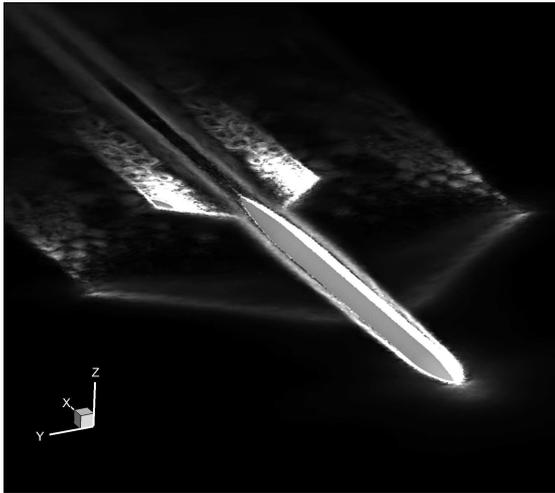
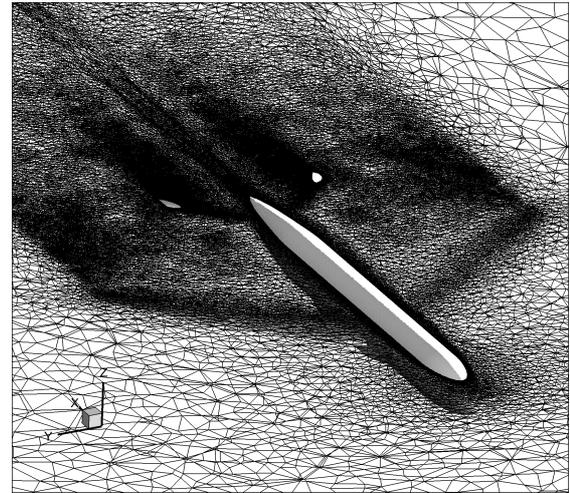
### 6.4.5 Escoamento Turbulento Transônico no Entorno de Avião Civil CRM-NASA

Neste exemplo, emprega-se o algoritmo desenvolvido para simular o escoamento turbulento transônico no entorno de um avião civil. O avião escolhido corresponde ao *Common Research Model* (CRM-NASA) desenvolvido pela NASA em parceria com a empresa de aviação Boeing. O modelo apresenta uma geometria suficientemente desafiadora para predições aerodinâmicas relevantes, tendo sido desenvolvido para ajudar a conduzir validações de códigos de CFD. O modelo CRM-NASA consiste de uma asa supercrítica com design contemporâneo e uma fuselagem que é representativa de um avião comercial (Vassberg et al., 2008).

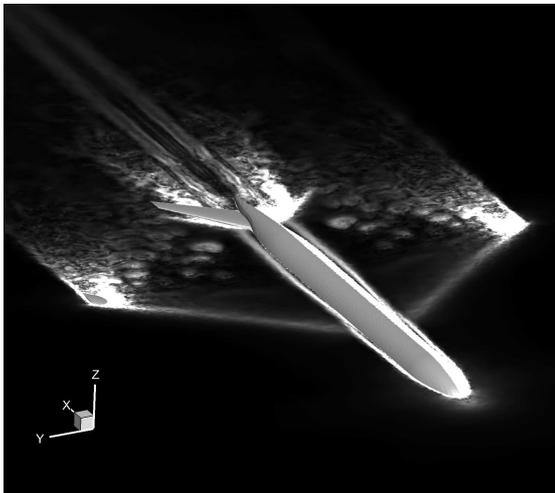
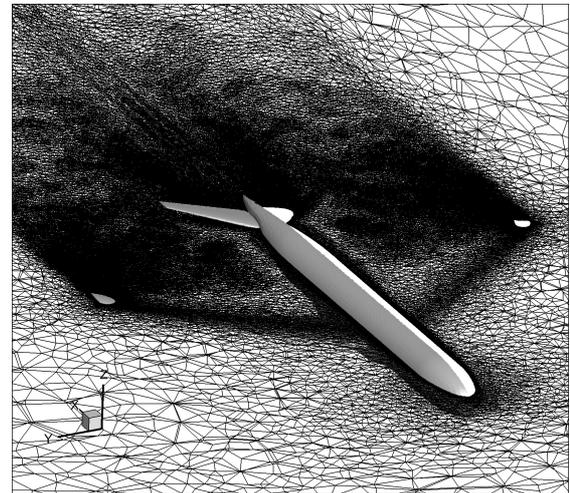
A simulação numérica do escoamento transônico no entorno do avião é realizada para um ângulo de ataque  $\alpha = 2^\circ$  e um número de Mach de corrente-livre  $M_\infty = 0,85$ . O número de Reynolds de corrente-livre considerado é  $Re_\infty = 5 \times 10^6$ . Considera-se a metade simétrica da geometria do avião. A densidade e velocidade de corrente-livre são tomadas como  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente. A simulação é realizada aqui empregando-se o algoritmo de adaptação a cada 20 iterações do código CBS para controlar o erro de interpolação usando-se os seguintes parâmetros:  $\varepsilon_{L^2} = 0,001E$  e  $h_{min} = 0,01E$ , onde  $E$  é o valor da envergadura das asas. A massa específica e a velocidade de corrente-livre de referência consideradas são, respectivamente,  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ . A simulação é realizada até o tempo adimensional final de valor 10.

A Fig. 6.39 mostra algumas seções de corte ao longo do eixo  $z$ , mostrando tanto a malha adaptada como o campo de gradiente de massa específica. Na Fig. 6.40, tem-se a distribuição do coeficiente de pressão médio obtido para a porção superior e inferior do avião e na Fig. 6.41 são representadas as linhas de corrente. Das linhas de correntes percebe-se que o escoamento se mantém colado à asa desde o bordo de ataque até uma região quase no bordo de fuga, a partir da qual tem-se pequenas recirculações na direção perpendicular ao do escoamento de corrente-livre.

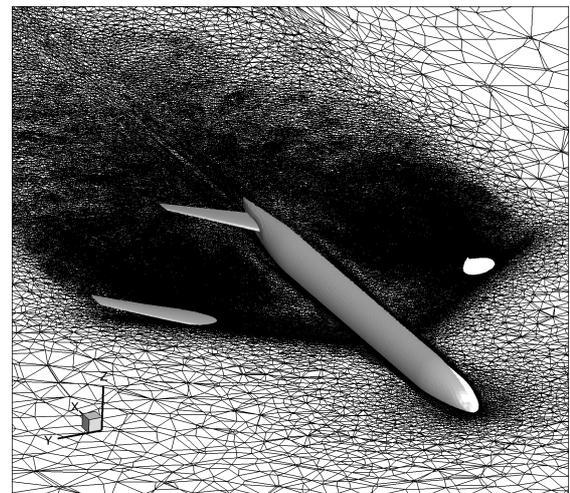
A estrutura dos vórtices formados no entorno do avião é mostrada na Fig. 6.42. O número médio de nós da malha ao longo da simulação é 2 419 374.

(a)  $|\nabla\rho|$ 

(b) Malha

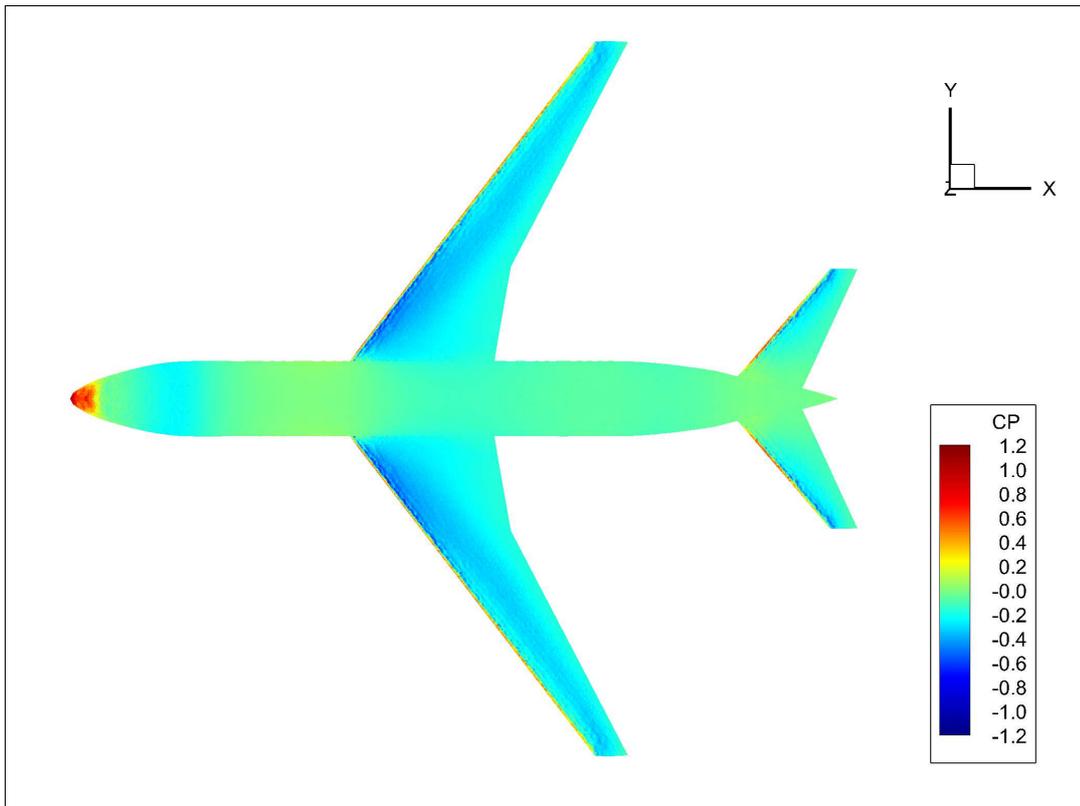
(c)  $|\nabla\rho|$ 

(d) Malha

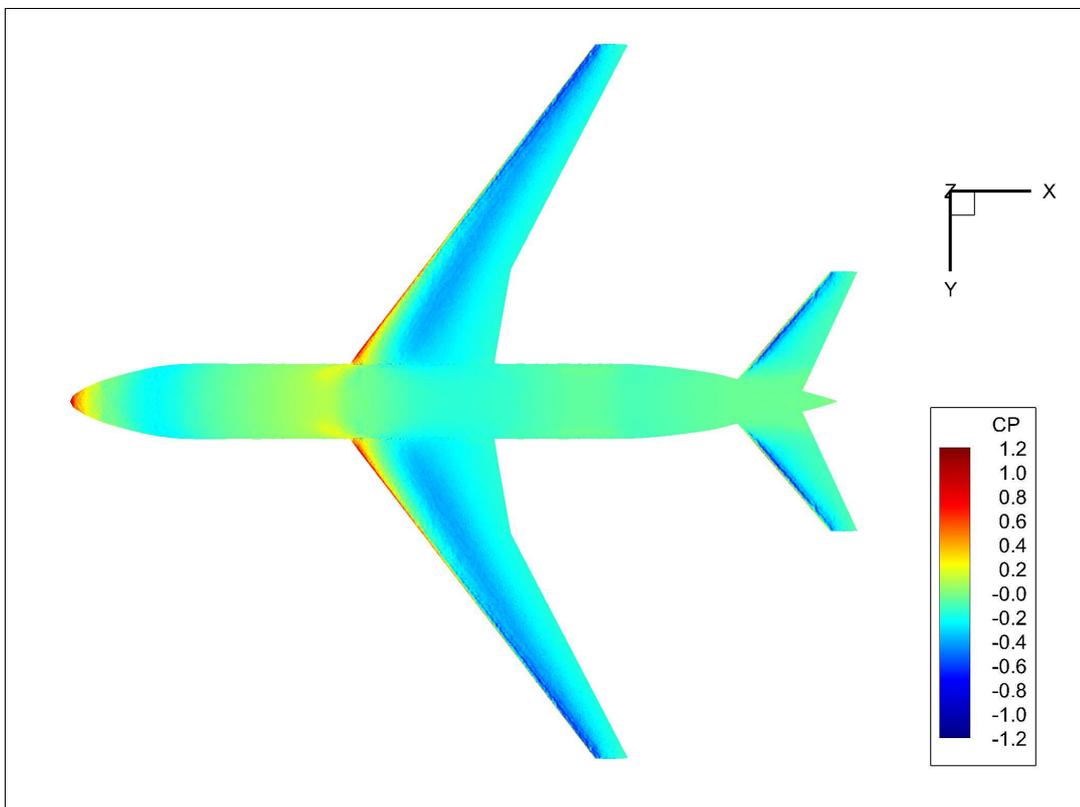
(e)  $|\nabla\rho|$ 

(f) Malha

Figura 6.39: Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas em planos de corte ao longo do eixo  $z$  para  $\alpha = 2^\circ$ .

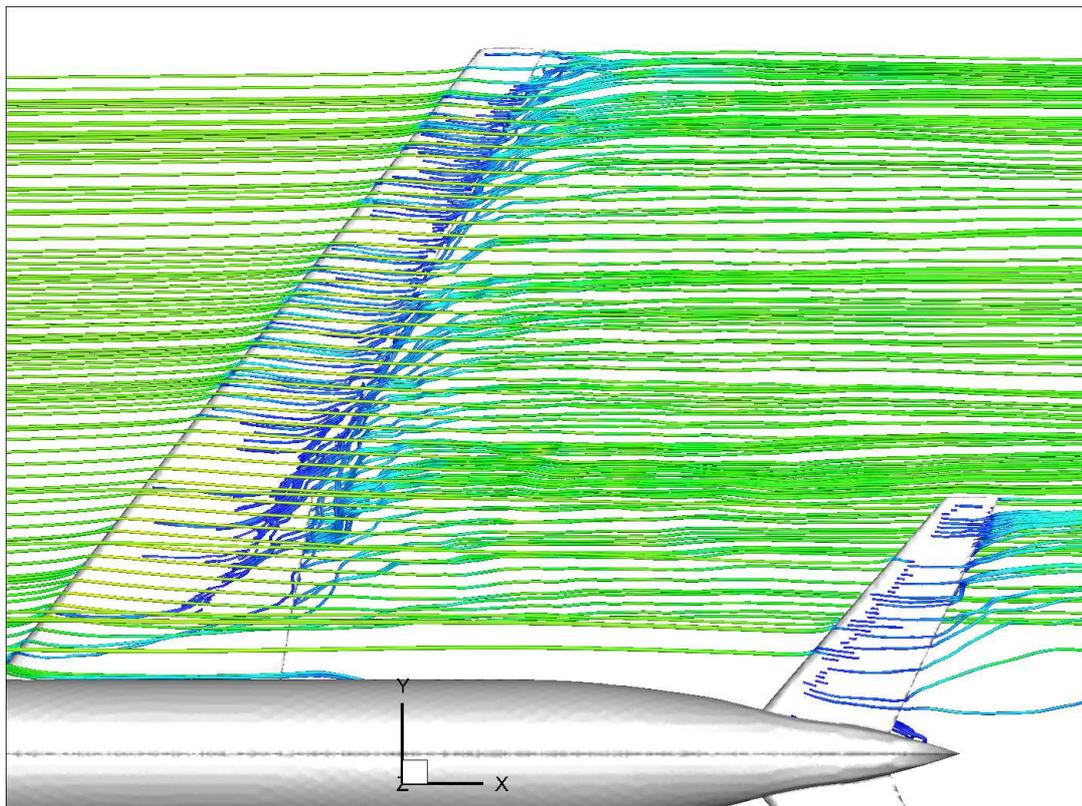


(a) Parte superior do avião

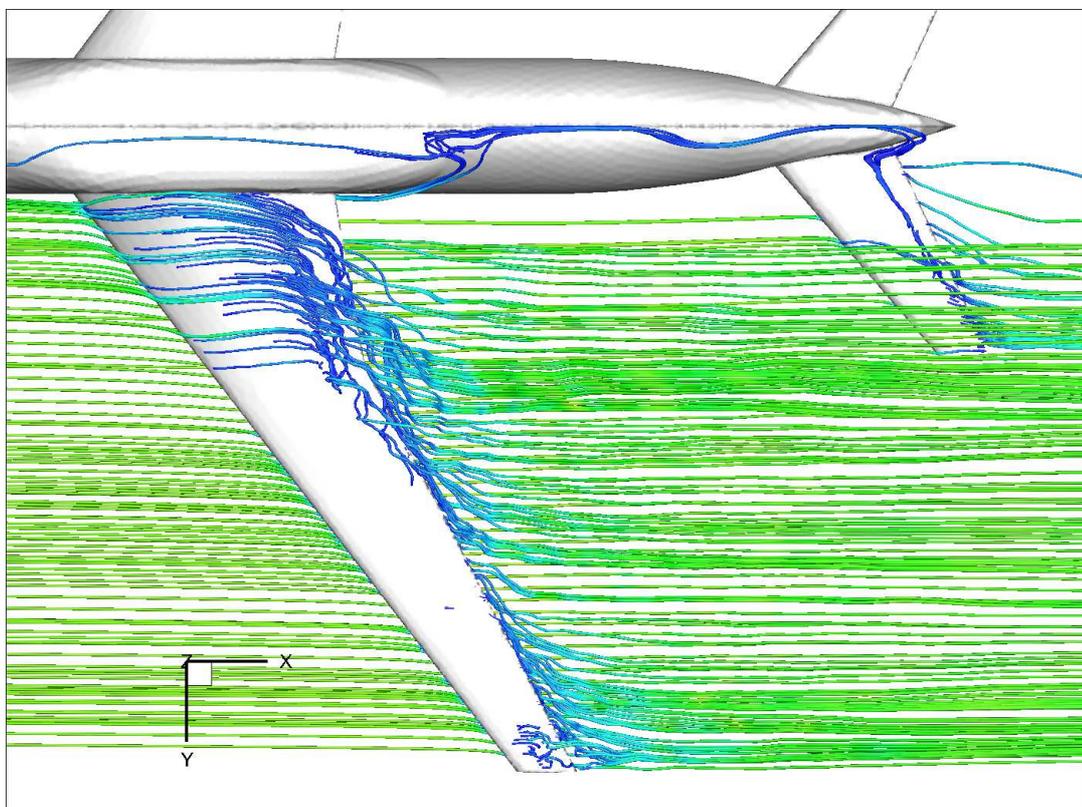


(b) Parte inferior do avião

Figura 6.40: Vista superior e inferior da distribuição do coeficiente de pressão para  $\alpha = 2^\circ$ .



(a) Parte superior do avião



(b) Parte inferior do avião

Figura 6.41: Linhas de corrente coloridas pelo magnitude de velocidade para  $\alpha = 2^\circ$ .

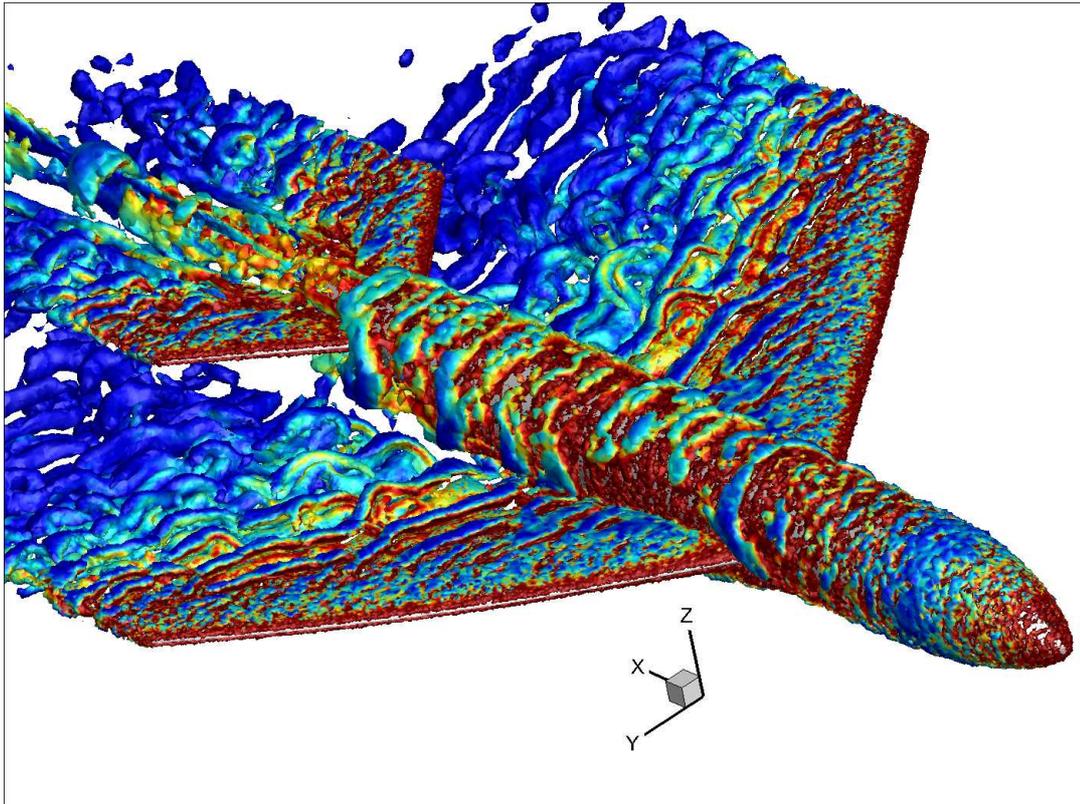


Figura 6.42: Estrutura do escoamento pelo critério  $Q$  para  $\alpha = 2^\circ$ .

Uma variação da simulação é também conduzida adicionalmente para o caso de um ângulo de ataque grande  $\alpha = 30^\circ$ . Nestas condições, tem-se uma grande separação do escoamento, conforme é possível observar na Fig. 6.43, onde apresenta-se a magnitude do gradiente de massa específica e a malha adaptada. As linhas de corrente são mostradas na Fig. 6.44a e a estrutura do escoamento na Fig. 6.44b.

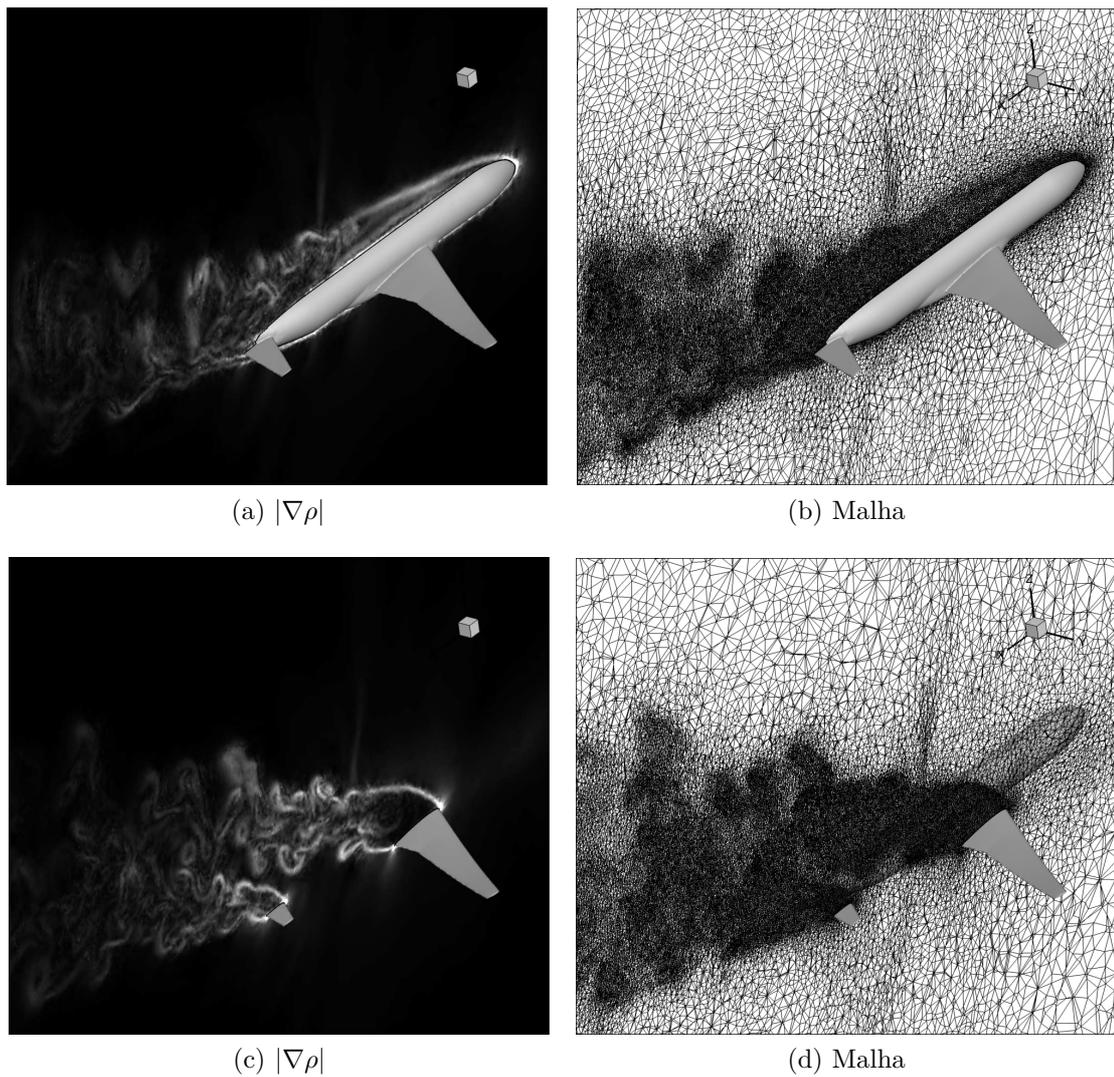
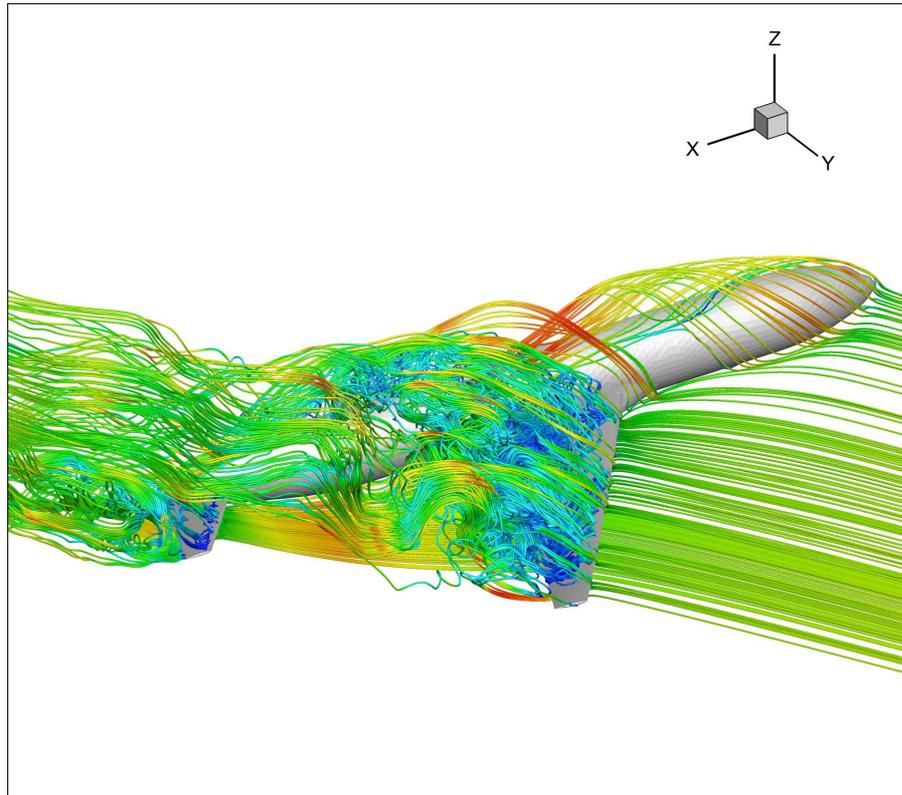


Figura 6.43: Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas em planos de corte ao longo do eixo  $y$  para  $\alpha = 30^\circ$ .



(a) Linhas de corrente

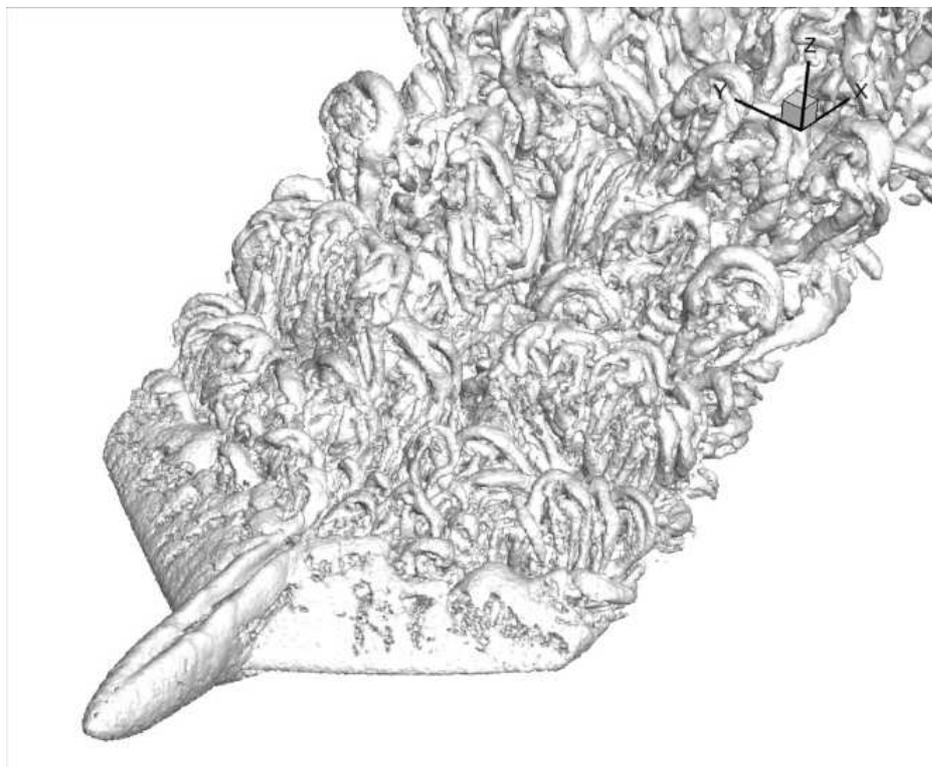
(b) Estrutura do escoamento pelo critério  $Q$ 

Figura 6.44: Linhas de corrente coloridas pelo magnitude de velocidade e estrutura do escoamento para  $\alpha = 30^\circ$ .

## 6.5 Aerodinâmica de Problemas Envolvendo Topologia Móvel

Estudos de problemas envolvendo domínios com contornos móveis são apresentados nesta seção.

### 6.5.1 Escoamento Transônico Não-Viscoso no Entorno de Aerofólio NACA 0012 Oscilante

O escoamento no entorno de corpos que possuem movimento relativo com relação ao escoamento são importantes para uma grande variedade de problemas, tais como os que envolvem o fenômeno de *Flutter* quando se considera o problema aeroelástico. Por exemplo, para o caso de um aerofólio que oscila, [Kousen e Bendiksen \(1988\)](#) determinaram que o efeito da oscilação altera a posição dos choques na superfície do aerofólio, interagindo dinamicamente com o movimento do próprio aerofólio. Portanto, capturar corretamente e precisamente o efeito sobre o campo de escoamento devido ao movimento relativo (e, posteriormente, o efeito aeroelástico acoplado) é um fator crucial como critério de projeto de estruturas submetidas a escoamentos em regimes transônicos e supersônicos. Esta determinação pode ser conduzida experimentalmente ou numericamente, ambas exibindo dificuldades particulares.

Para o caso particular do estudo de um aerofólio do tipo NACA 0012 oscilante, pode-se citar a investigação experimental de [AGARD \(1982\)](#), onde captura-se o efeito transiente não-estacionário do coeficiente de sustentação do aerofólio devido à oscilação do mesmo. Existem alguns problemas nesta análise experimental, citando-se, por exemplo, o movimento do aerofólio, o qual é feito por incrementos discretos e não em um movimento contínuo ao longo da experimentação. Além disto, o relatório indica que existem incertezas de ordem de  $\pm 0,1$  graus na experimentação. Considerando que a oscilação estudada é de pequenos ângulos (cerca de  $\pm 2,54$  graus), isto resulta em uma incerteza de quase 5% da inclinação real do aerofólio ao longo dos resultados medidos. Apesar disto, este relatório consiste em um dos estudos pioneiros e bem conduzidos no assunto.

Exemplos de simulações numéricas do aerofólio NACA 0012 oscilante incluem, por

exemplo, a realizada por [Willcox e Peraire \(1997\)](#) utilizando malhas não-estuturadas com uma formulação de volumes finitos para solucionar as equações de Euler compressíveis com um esquema explícito do tipo preditor-corretor. [Teixeira \(2001\)](#) e [Almeida \(2012\)](#) empregaram o método dos elementos finitos em uma formulação de Taylor-Galerkin de dois passos para também resolver as equações de Euler compressíveis. [Crumpton e Giles \(1997\)](#) apresentam resultados deste problema usando um algoritmo do tipo *Multigrid* não-estruturado, com um procedimento de solução iterativa das equações que surgem da discretização temporal implícita das equações transientes de Euler. Todas estas simulações numéricas fazem uso de uma formulação Arbitrária-Lagrangeana-Euleriana (ALE) para considerar o movimento relativo do aerofólio com relação ao escoamento e empregam um movimento nodal simplificado com informações apenas locais das velocidades no entorno dos nós da malha.

Estudos considerando a turbulência para o caso do aerofólio NACA 0012 oscilando também existem, podendo-se citar o trabalho de [Cinnella e Lerat \(2001\)](#), o qual emprega um modelo RANS de turbulência, entretando, em configurações de oscilação e escoamento diferentes das estudadas pelos outros trabalhos citados anteriormente.

Para desassociar o efeito da modelagem da turbulência e da adaptação de malhas do movimento relativo do corpo imerso no escoamento, estuda-se neste exemplo um aerofólio NACA 0012 oscilante em um escoamento transônico governado pelas equações de Euler (sem turbulência e sem efeitos viscosos) para comparar diretamente a performance do método CBS em conjunto com a técnica de interpolação de base radial empregada neste trabalho com as soluções apresentadas por outros autores para o mesmo problema nas mesmas condições.

Considera-se neste exemplo o aerofólio com corda unitária  $c = 1$ , cuja oscilação se dá no entorno de um ponto localizado a um quarto da sua corda. O domínio  $\Omega$  é do tipo circular com raio  $R = 15c$ . O número de Mach de corrente-livre empregado é  $M_\infty = 0,775$ . O ângulo de ataque variável no tempo é dado por:

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t) \quad (6.3)$$

onde  $\omega$  é definido em termos da frequência reduzida  $k_c$ :

$$k_c = \frac{\omega c}{2u_\infty} \quad (6.4)$$

onde  $\alpha_m = 0,016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2,51^\circ$  e  $k_c = 0,0814$  para o presente caso e  $u_\infty = 1,00$  é a velocidade de corrente-livre. A malha empregada contém 3 753 nós. A simulação é conduzida da seguinte forma: primeiramente, converge-se para a solução estacionária do problema para um ângulo de ataque fixo de  $\alpha = 0,016^\circ$ , utilizando-se como critério de convergência um resíduo  $R_T = 1 \times 10^{-5}$ . A partir deste ponto, procede-se com a análise transiente do problema oscilatório, conduzindo a simulação até o tempo adimensional final  $T = 150$ . O movimento da malha é atualizado a cada incremento de tempo da simulação utilizando-se um suporte compacto de magnitude  $r = 5R$ .

Na Fig. 6.45 são mostrados contornos de pressão e de número de Mach para a posição inicial obtida para a solução estacionária, onde  $\alpha = 0,016^\circ$ , e para outros dois valores de ângulo de ataque,  $\alpha = 2,493^\circ$  e  $\alpha = -2,522^\circ$ , os quais correspondem aos ângulos máximos e mínimos da curva de histerese apresentada na Fig. 6.46. Pode-se observar a variação da posição da onda de choque na superfície do aerofólio, o que modifica seu coeficiente de sustentação à medida que o aerofólio oscila.

A Fig. 6.46 apresenta um gráfico de histerese do coeficiente de sustentação do aerofólio em função do ângulo de ataque do mesmo obtido com a presente formulação empregando interpolação de base radial para o movimento da malha e o método CBS conjuntamente com o resultado numérico obtido por dois outros autores empregando formulação ALE, e, também, um resultado experimental. A presente formulação apresenta melhor correlação com os resultados experimentais em comparação com os outros dois resultados numéricos apresentados, sendo a curva de histerese obtida neste trabalho uma curva intermediária entre as outras duas numéricas. A malha empregada por Willcox e Peraire (1997) contém 4 258 nós e a empregada por Teixeira (2001) contém 5 150 nós.

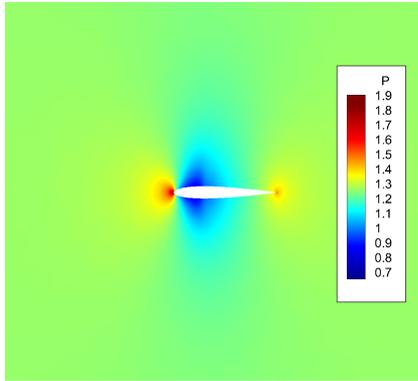
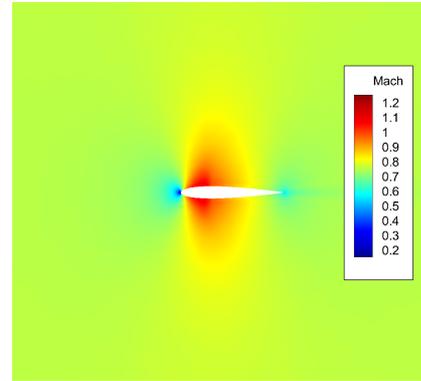
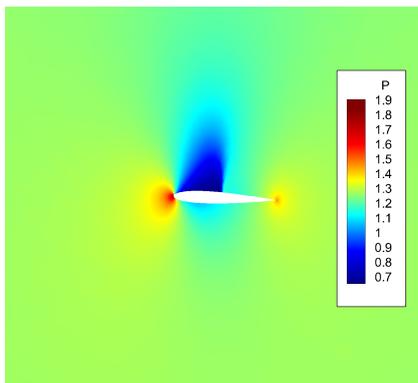
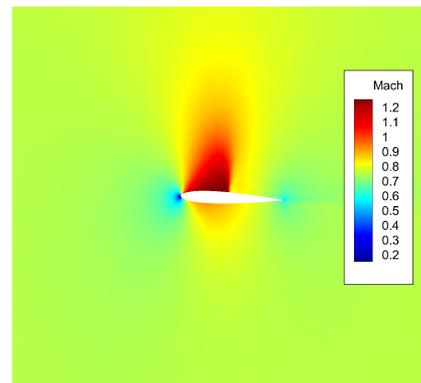
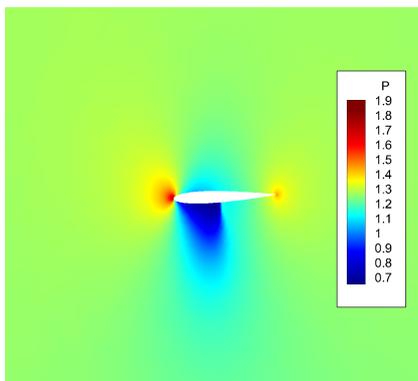
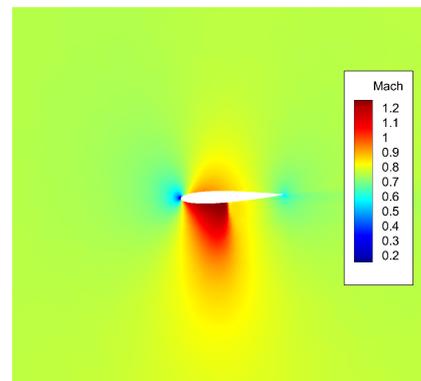
(a) Contornos de Pressão,  $\alpha = 0,016^\circ$ (b) Contornos de Número de Mach,  $\alpha = 0,016^\circ$ (c) Contornos de Pressão,  $\alpha = -2,522^\circ$ (d) Contornos de Número de Mach,  $\alpha = -2,522^\circ$ (e) Contornos de Pressão,  $\alpha = 2,493^\circ$ (f) Contornos de Número de Mach,  $\alpha = 2,493^\circ$ 

Figura 6.45: Contornos de pressão e número de Mach para diferentes ângulos de ataque ao longo da simulação do aerofólio NACA-0012 oscilante.

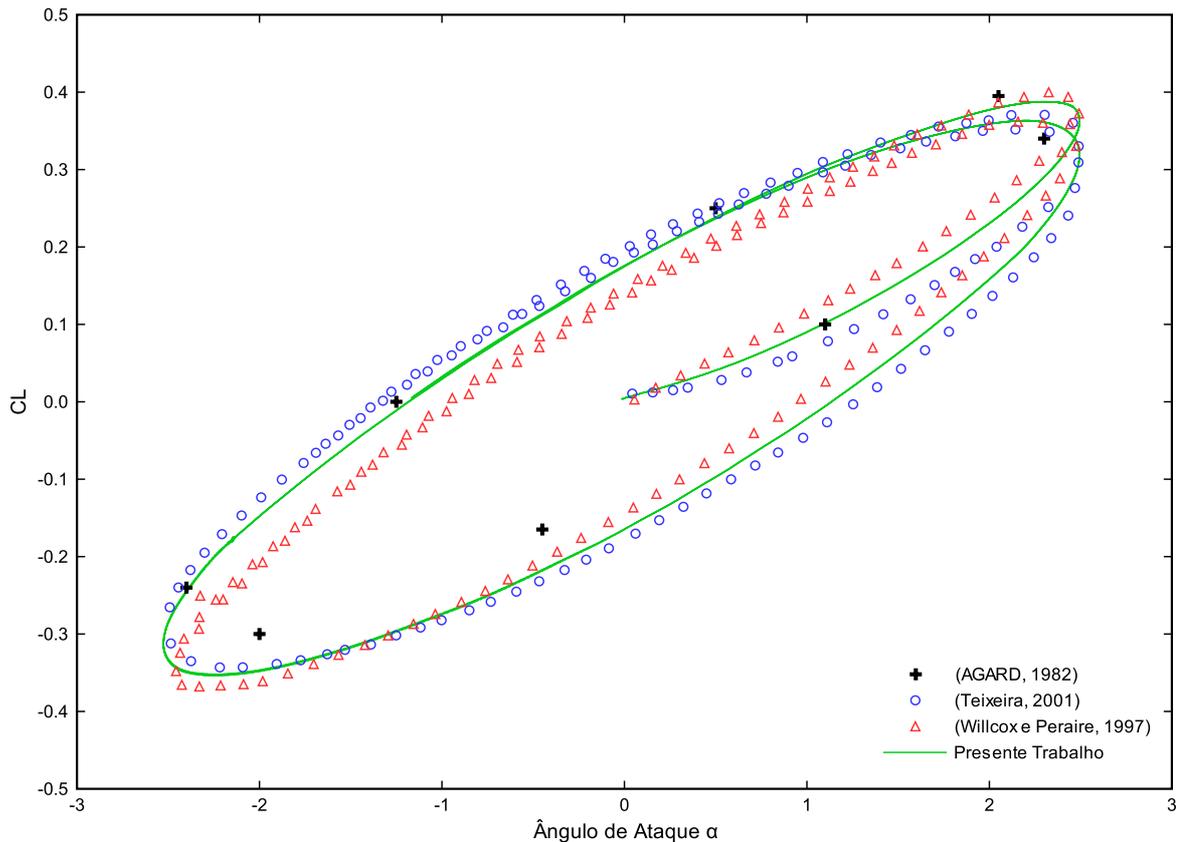


Figura 6.46: Coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque do aerofólio NACA-0012 oscilante.

### 6.5.2 Efeito Magnus em escoamento supersônico turbulento no Entorno de Cilindro Quadrado Realizando Grandes Rotações

O exemplo anterior demonstra que o método desenvolvido para movimento da malha considerando contornos móveis funciona. Entretanto, as oscilações consideradas na simulação eram pequenas, sendo que tal tipo de problema pode ser solucionado com metodologias mais simples. Para demonstrar o potencial do método de movimento desenvolvido, examina-se um escoamento supersônico turbulento no entorno de um cilindro de seção quadrada de lado  $D = 1$  cujo centro encontra-se localizado em  $x = 0$ ,  $y = 0$ , o qual realiza grandes rotações. O domínio  $\Omega$  é do tipo circular com raio  $R = 30D$ . O número de Mach de corrente-livre empregado vale  $M_\infty = 1,20$  e o número de Reynolds de corrente-livre  $Re_\infty = 1 \times 10^5$ , sendo o ângulo de ataque nulo ( $\alpha = 0$ ).

O cilindro bidimensional executa uma rotação no entorno do seu baricentro com uma

velocidade angular  $\omega$  constante no tempo, dada por:

$$\omega = \frac{2\pi\omega_0}{T} \quad (6.5)$$

onde  $T = 50$  é o tempo adimensional final da simulação e  $\omega_0$  indica o número total de rotações completas realizadas ao longo do período  $T$ . Três situações são estudadas aqui:  $\omega_0 = 0$  (cilindro sem executar rotação),  $\omega_0 = 1$  e  $\omega_0 = 2$  para os casos em que o cilindro executa  $360^\circ$  e  $720^\circ$  de rotação ao longo do tempo de simulação  $T$ . A massa específica e a velocidade de corrente-livre de referência consideradas são  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente, sendo a adaptação executada a cada 20 iterações do método CBS. O erro objetivo de interpolação considerado vale  $\varepsilon_{L^2} = 0,10D$  e o tamanho mínimo permitido de aresta vale  $h_{min} = 0,005D$ .

Nestas condições de simulação, o cilindro quadrado rotacionando gera um efeito aerodinâmico chamado efeitos Magnus. Como o objeto rotaciona em relação ao escoamento, o corpo desloca o escoamento em uma dada direção, e, como reação, o ar empurra o corpo em uma direção contrária, alterando sua sustentação e arrasto. O problema torna-se mais complexo uma vez que a camada limite pode se separar do corpo em alguns pontos de forma não-linear com relação à velocidade de rotação e posição do corpo frente ao escoamento, podendo alterar a suposta direção de deflexão esperada pelo efeito. O efeito Magnus pode ser encontrado em diversos esportes, tais como futebol (o chamado chute de trivela), golfe, futebol americano, dentre outros. O efeito Magnus também encontra-se utilizado em modelos de propulsão e estabilização de embarcações e aviões (Salter et al., 2008). No regime compressível, é importante para o campo da balística.

Simulações numéricas do efeitos Magnus podem ser encontradas na literatura (Li et al., 2015), assim como investigações experimentais em túneis de vento (Briggs, 1959). Entretanto, a experimentação em túnel de vento para corpos realizando rotações de grande velocidade em escoamentos compressíveis é muito difícil de ser realizada, sendo particularmente dispendiosas e restrita a instituições militares (Sahu, 2005; Kokes et al., 2006).

A Fig. 6.47, Fig. 6.48 e Fig. 6.49 mostram o campo de gradiente de massa específica e a respectiva malha para cada um dos três casos de velocidade de rotação  $\omega_0$  estudados: 0, 1 e 2, respectivamente, no tempo de simulação  $T = 25$ . Embora a orientação do cilindro

quadrado aparente coincidir em todos os casos, convém lembrar que no tempo  $T = 25$  o caso  $\omega_0 = 0$  permaneceu estático,  $\omega_0 = 1$  completou  $180^\circ$  de rotação e  $\omega_0 = 2$  completou  $360^\circ$  de rotação. Da mesma forma, as Fig. 6.50, Fig. 6.51 e Fig. 6.52 mostram as mesmas informações, mas para o tempo  $T = 30$ .

Para o caso sem rotação, isto é,  $\omega_0 = 0$  (Fig. 6.47 e Fig. 6.50), observa-se a formação de uma onda de choque frontal forte, simétrica e curvada. O formato não-aerodinâmico nesta posição fixa produz uma intensa zona de recirculação atrás da geometria, a qual deriva em uma esteira de von Kármán e ao mesmo tempo aparecem ondas de choque de menor inclinação para trás do escoamento. A esteira, no entanto, interage com estes choques novos formados, criando uma zona de momentânea oscilação entre a dissipação de onda de choque e a sucessiva reformação da mesma.

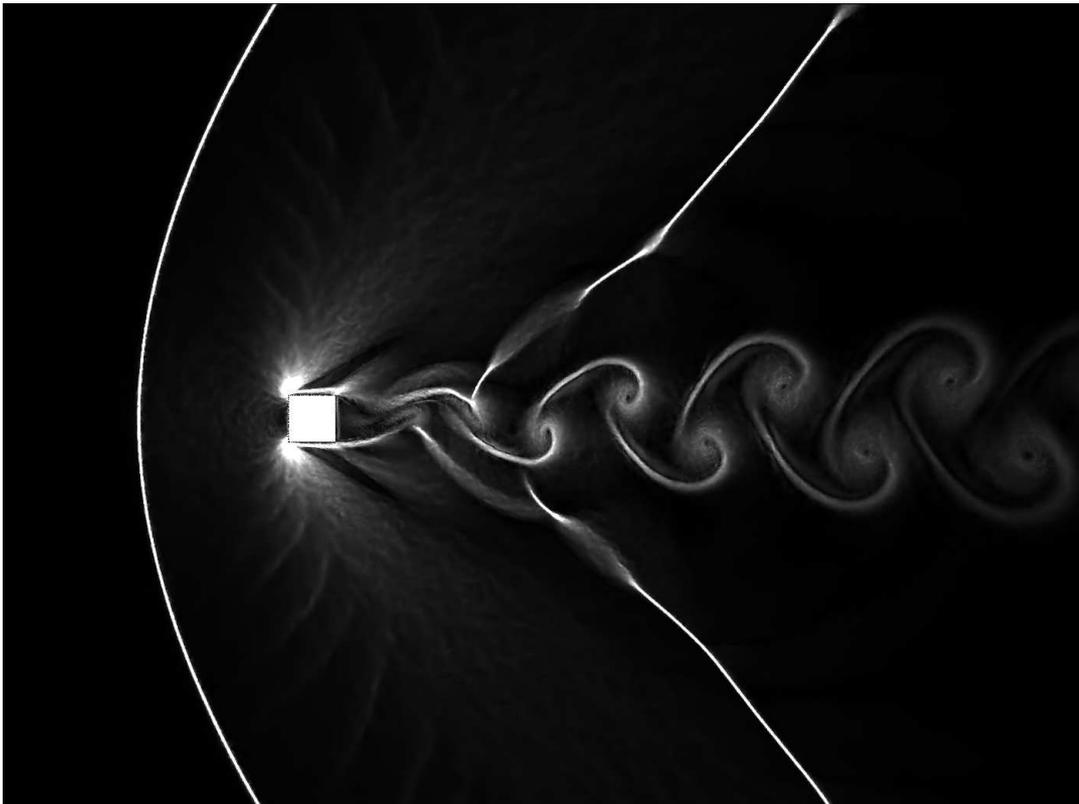
No caso em que  $\omega_0 = 1$  (Fig. 6.48 e Fig. 6.51), a zona de recirculação aumenta e achata-se, produzindo uma esteira com vórtices mais irregulares. Como a geometria é um quadrado, a rotação faz o corpo oscilar entre posições de corpo rombudo (escoamento na direção perpendicular a um dos lados) e de corpo aerodinâmico (escoamento na direção perpendicular à diagonal interna).

Finalmente, para o caso em que  $\omega_0 = 2$  (Fig. 6.49 e Fig. 6.52), a velocidade de rotação é muito maior, criando uma oscilação na forma e posição da onda de choque frontal. Além disto, grande parte da esteira se achata ainda mais, deslocando e curvando os choques secundários para posições mais afastadas do corpo.

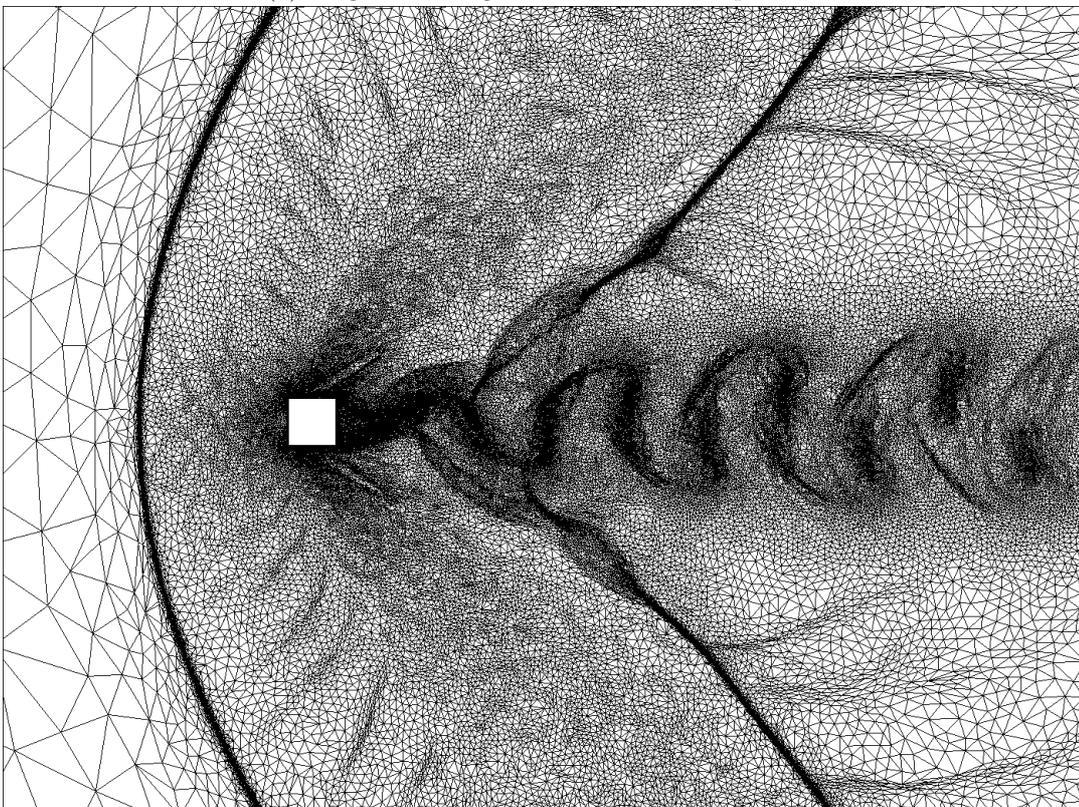
A variação dos coeficientes de arrasto e de sustentação ao longo do tempo é apresentada na Fig. 6.53, onde a área de referência é tomada como fixa (o lado  $D = 1$  do cilindro), embora deva-se observar que a rotação altera a dimensão na direção do escoamento. O coeficiente de arrasto se apresenta praticamente limitado inferiormente pelo caso sem rotação, onde quanto maior a velocidade angular, maior a frequência de variação do coeficiente. O coeficiente de sustentação se mostra praticamente nulo para o caso sem rotação, enquanto que o efeito Magnus faz o coeficiente oscilar entorno de zero, sendo ligeiramente mais intenso para cima (sustentação positiva) do que para baixo. Percebe-se também que o aumento da velocidade de rotação desloca a frequência de desprendimento de vórtices, sendo a transição temporária de uma camada limite turbulenta para laminar em algumas

regiões nas proximidades do contorno sólido uma possível explicação para tal.

Para  $\omega_0 = 0$ , a frequência predominante ocorre para o número de Strouhal de 0.275, com um segundo pico em 0.100. Para o caso de  $\omega_0 = 1$ , a frequência predominante desloca-se para o número de Strouhal de 0.025 e a secundária para 0.050. Para o caso de rotação mais alta, com  $\omega_0 = 2$ , as frequências predominantes e secundárias encontram-se nos números de Strouhal de 0.075 e 0.150.

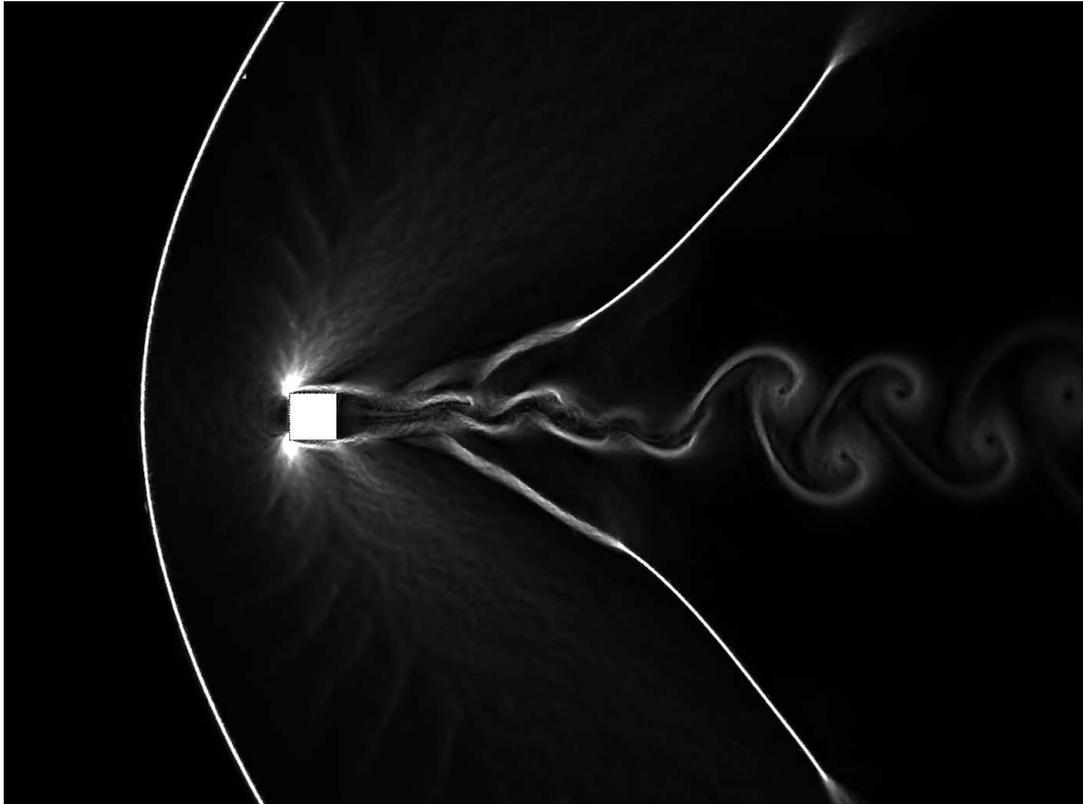


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

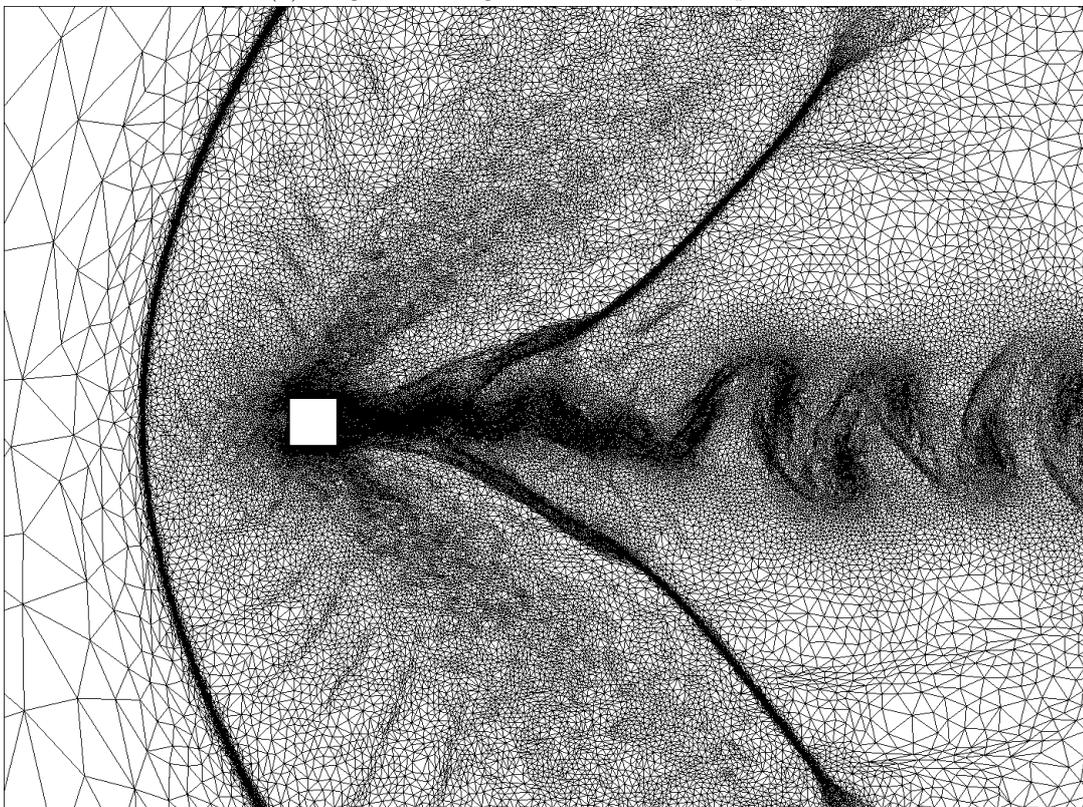


(b) Malha adaptada

Figura 6.47: Escoamento e respectiva malha para o caso  $\omega_0 = 0$  em  $T = 25$ .

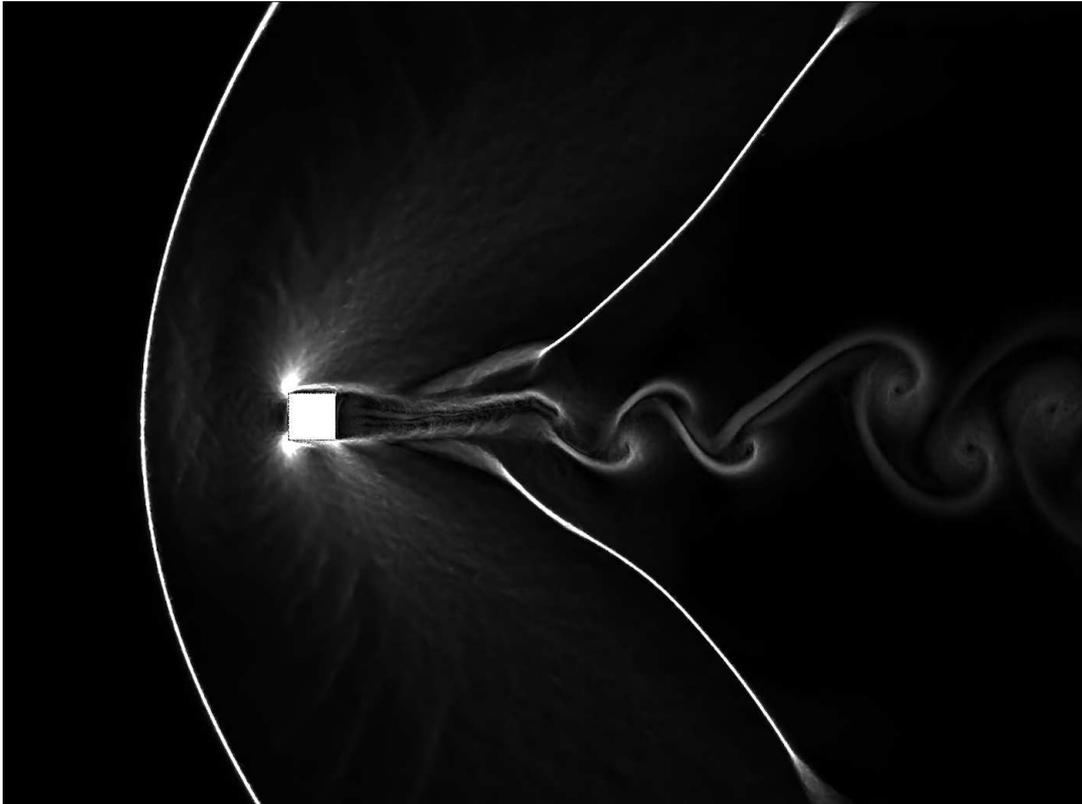


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

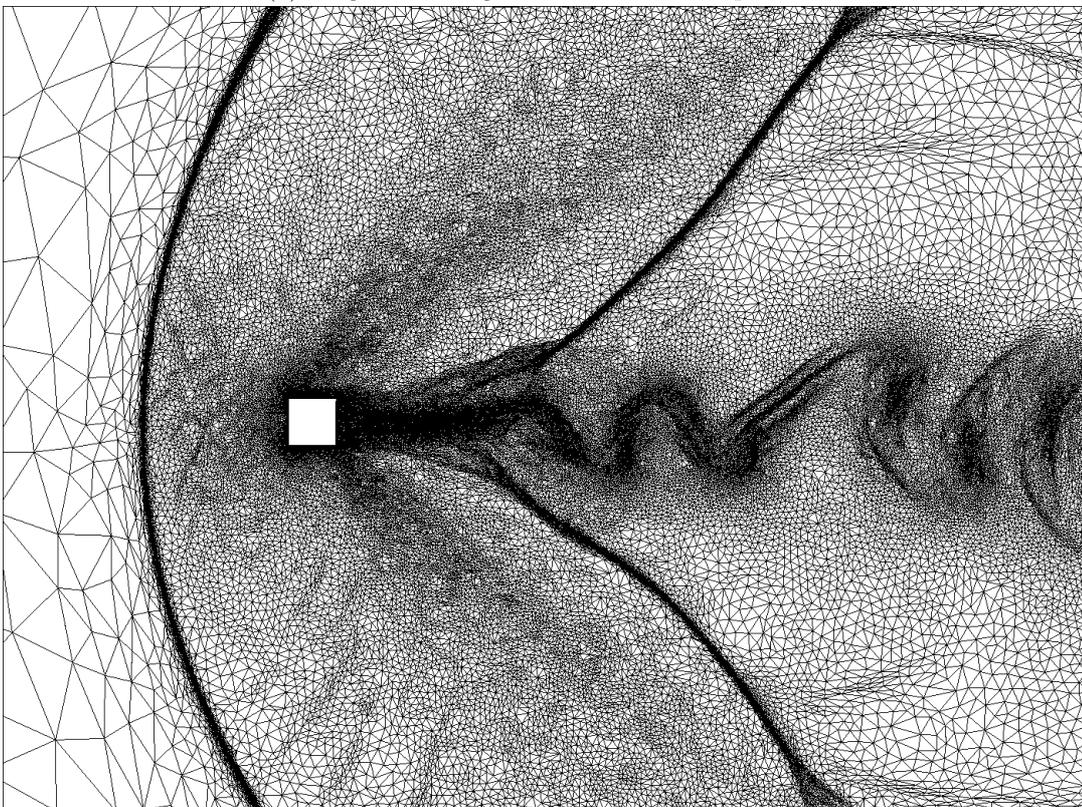


(b) Malha adaptada

Figura 6.48: Escoamento e respectiva malha para o caso  $\omega_0 = 1$  em  $T = 25$ .

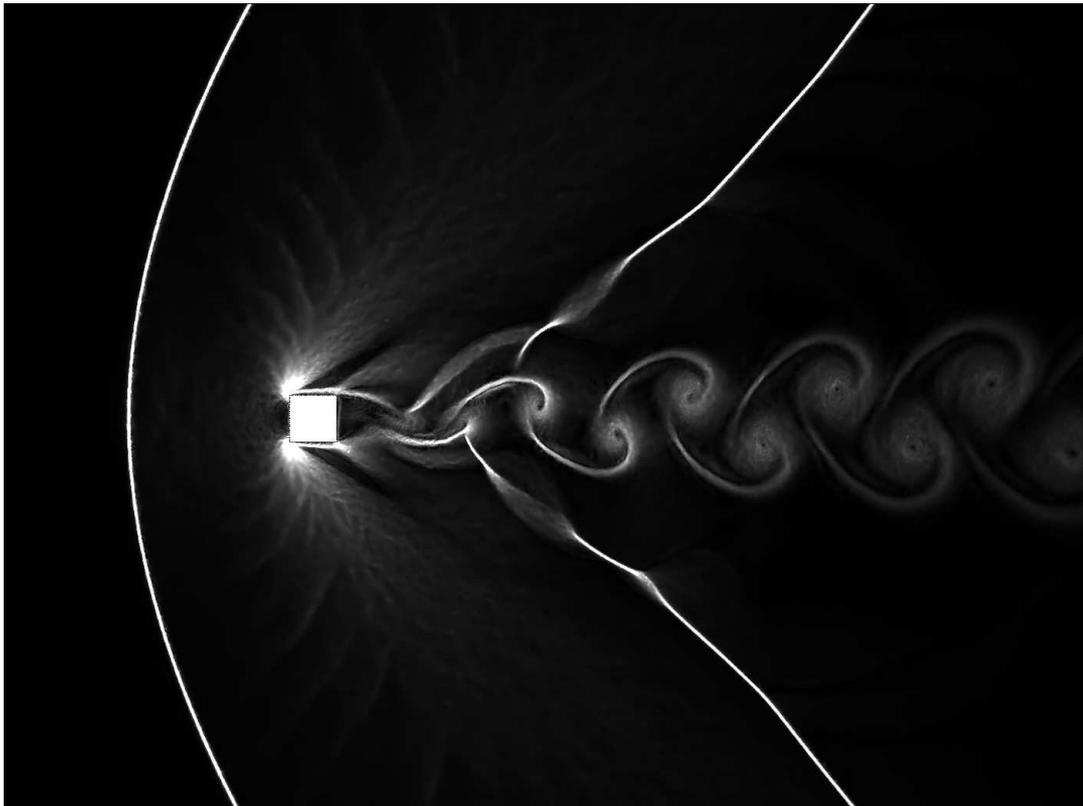


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

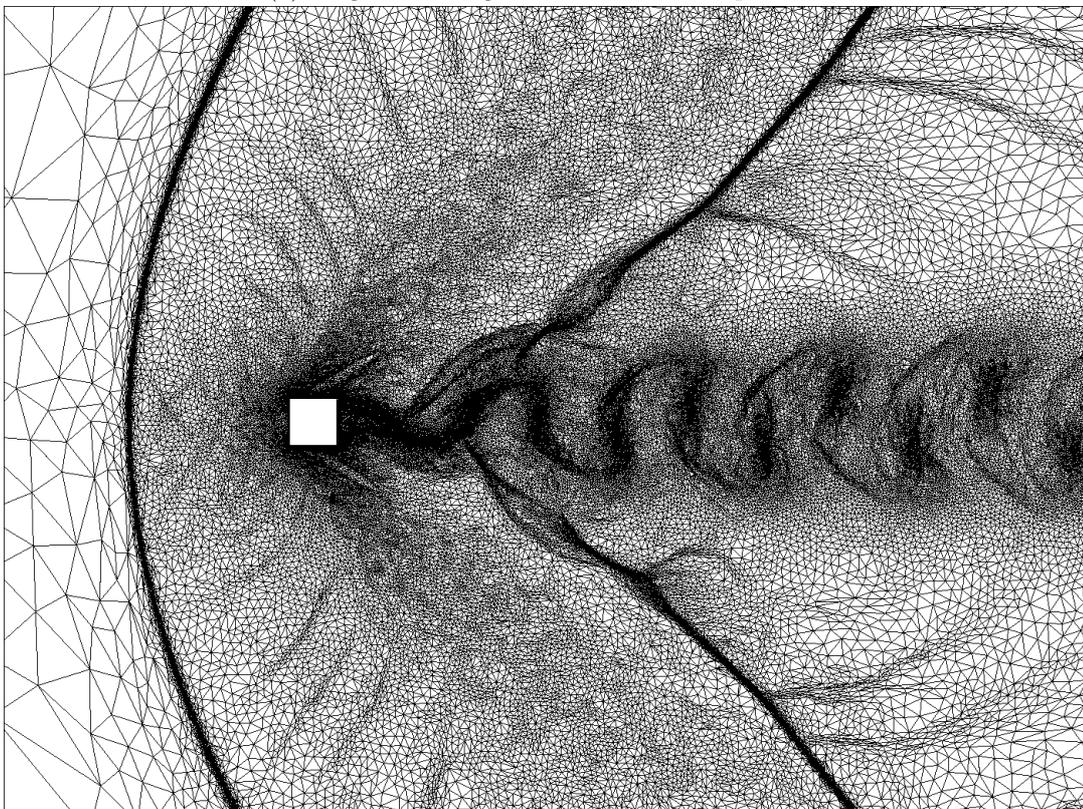


(b) Malha adaptada

Figura 6.49: Escoamento e respectiva malha para o caso  $\omega_0 = 2$  em  $T = 25$ .

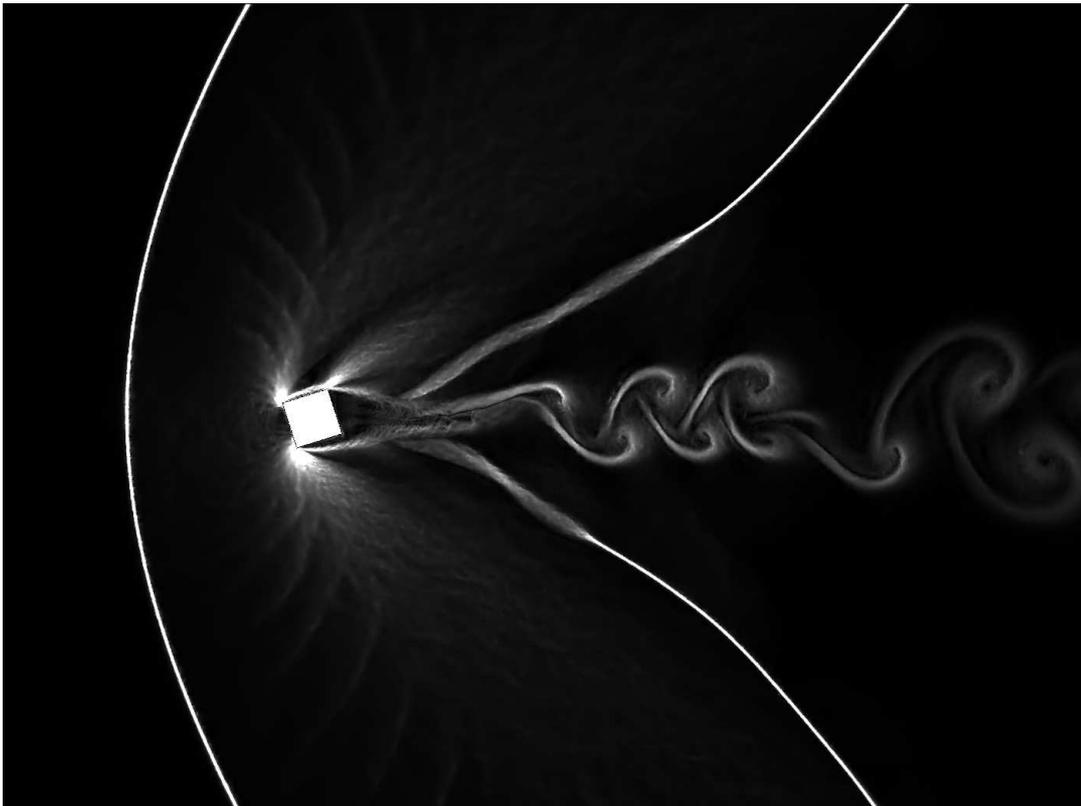


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

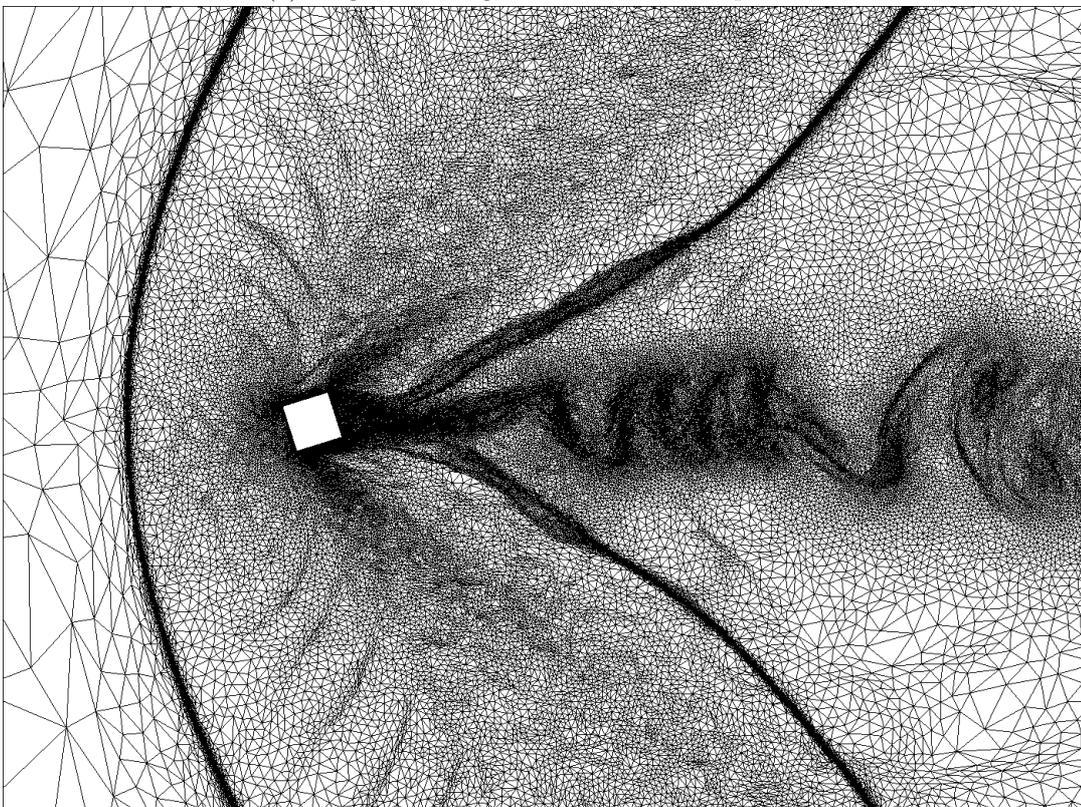


(b) Malha adaptada

Figura 6.50: Escoamento e respectiva malha para o caso  $\omega_0 = 0$  em  $T = 30$ .

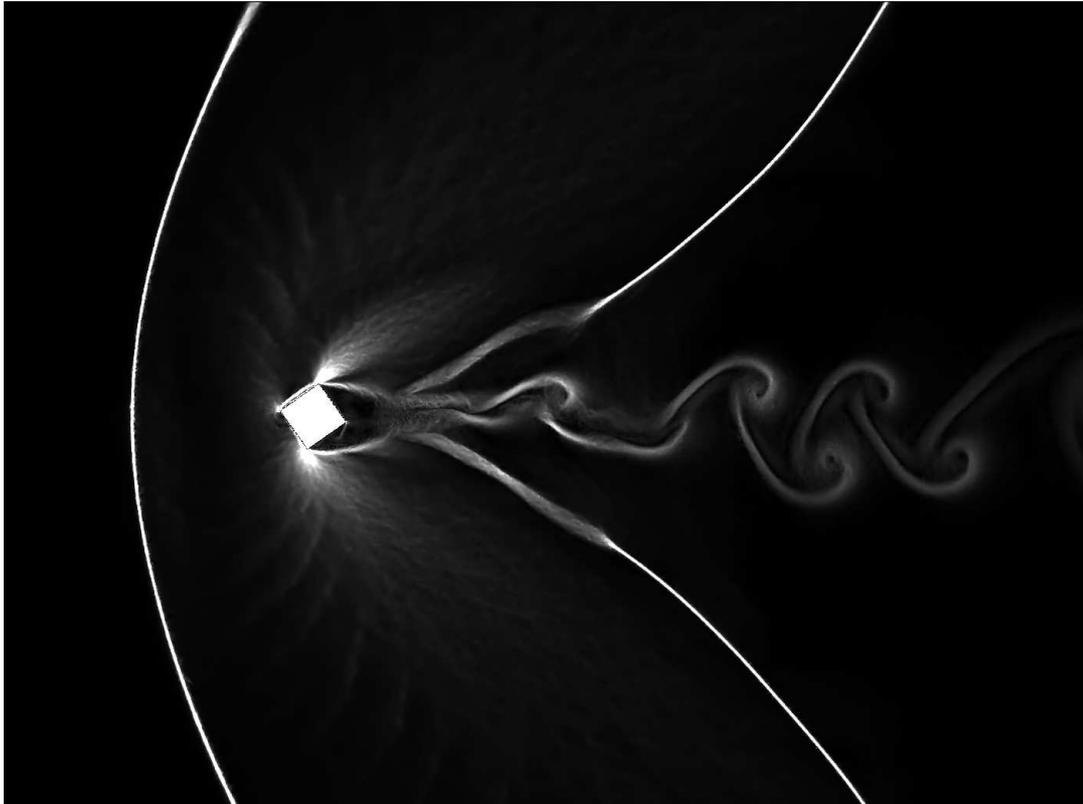


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

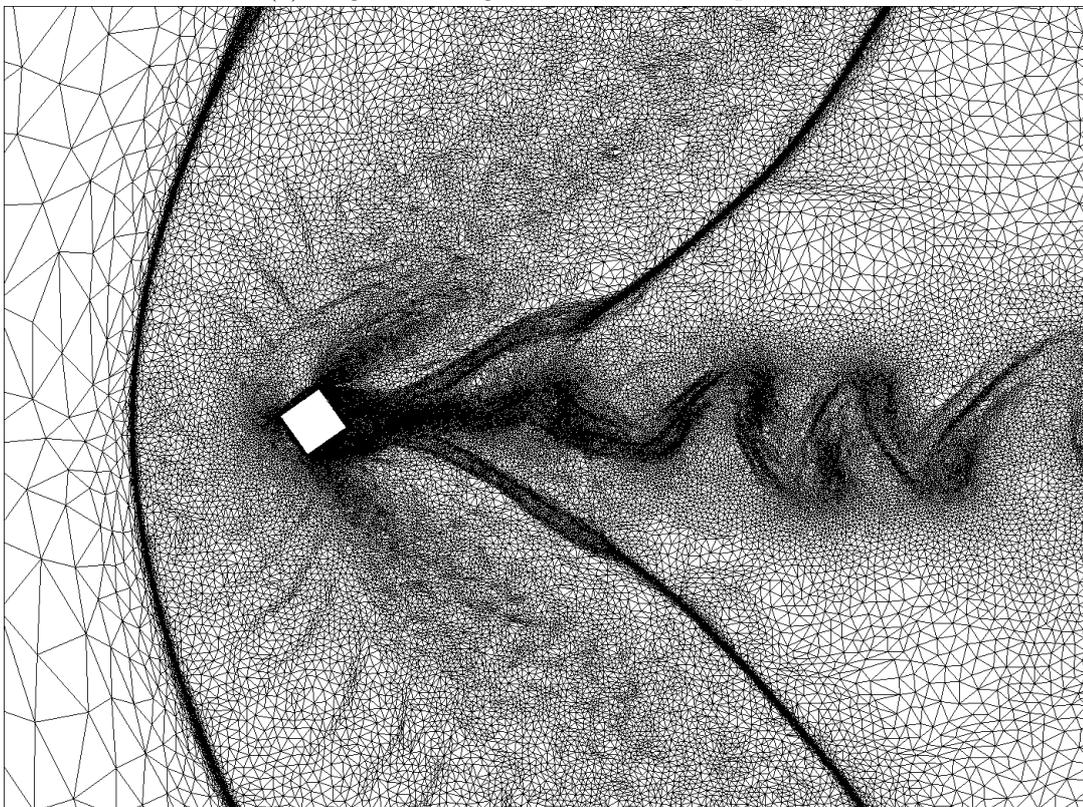


(b) Malha adaptada

Figura 6.51: Escoamento e respectiva malha para o caso  $\omega_0 = 1$  em  $T = 30$ .

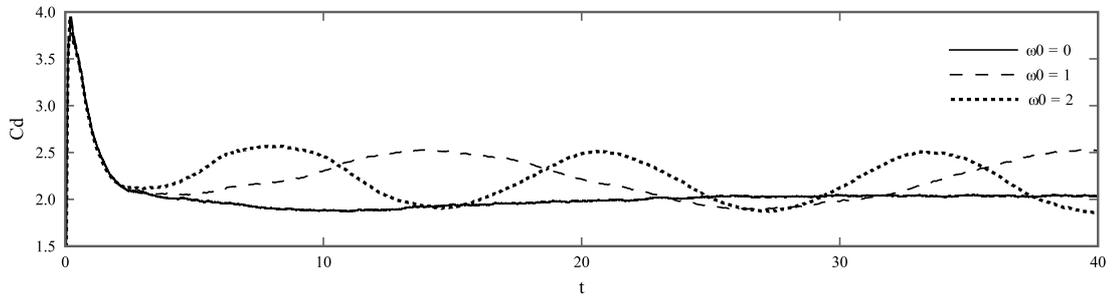


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

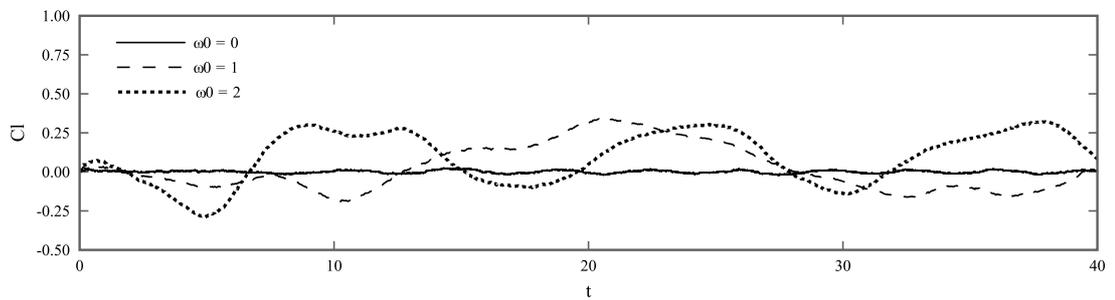


(b) Malha adaptada

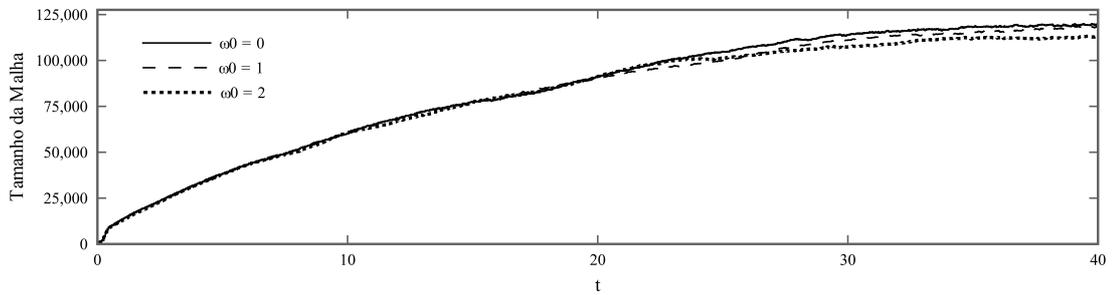
Figura 6.52: Escoamento e respectiva malha para o caso  $\omega_0 = 2$  em  $T = 30$ .



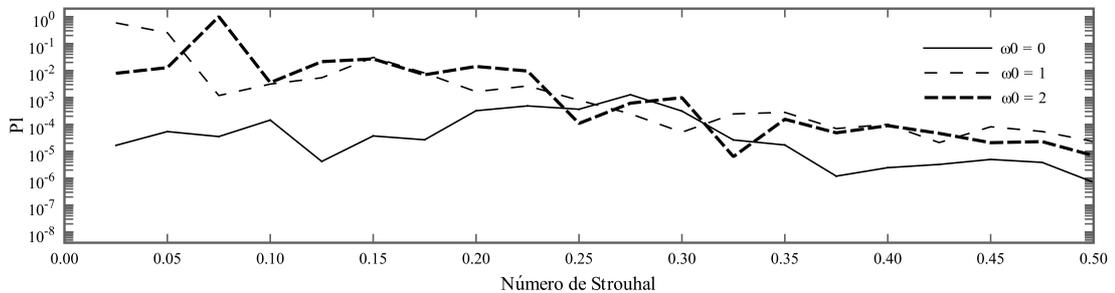
(a) Coeficiente de arrasto transiente



(b) Coeficiente de sustentação transiente



(c) Tamanho da malha



(d) Espectro de potência do coeficiente de sustentação em função do número de Strouhal

Figura 6.53: Solução temporal e no domínio de frequências para o cilindro quadrado supersônico.

### 6.5.3 Acionamento de *Spoiler* em um Aerofólio NACA-0012

*Spoilers* ou *speedbrakes* são peças móveis posicionadas sobre as asas de aviões, com a função de diminuir a sustentação de uma aeronave. *Spoilers* abrem-se sobre o extradorso das asas, descolando o escoamento e criando um estol controlado na asa atrás de si e reduzindo a sustentação naquela região da asa. São usados em aeronaves comerciais também para realizar procedimentos de descida sem ganho de velocidade. O uso de *spoilers* para esta função, porém, é limitado, devido à ocorrência de ruído e vibração causados pelo escoamento turbulento na região da asa localizada atrás do *spoiler* aberto.

Podem ser empregados com a função de reduzir a sustentação da asa, usualmente utilizados em duas situações: em vôo, quando não são abertos totalmente, na intenção de se reduzir a velocidade e/ou altitude, mais rapidamente, e em procedimentos de pouso, onde é acionado totalmente após o avião tocar a pista, para reduzir rapidamente a sustentação da aeronave, fazendo com que ela não suba novamente e perca velocidade. Usado dessa forma, ele ainda apresenta uma vantagem adicional: pode criar uma força de sustentação no sentido inverso, isto é, uma força de sustentação negativa, assim como acontece nos carros da Fórmula 1, facilitando, assim, o trabalho dos freios que são colocados nos trens de pouso da aeronave. Alternativamente, eles também podem ser empregados com função de auxiliar nas curvas, tendo a mesma função dos *aileron*s.

Também em turbinas eólicas tem-se um sistema muito parecido com o dos *spoilers*. Rotores modernos contam com componentes móveis projetados para controlar ativamente a eficiência da turbina através da redução de flutuações por meio de superfícies de controle que modificam o perfil aerodinâmico (Barlas e Kuik, 2010).

O presente exemplo trata do estudo bidimensional do acionamento rápido de um *Spoiler* em um perfil NACA-0012 empregando-se LES. Considera-se um aerofólio de corda unitária  $c = 1$ , onde o *spoiler* se localiza na porção superior do aerofólio, entre  $c = 0,7$ ,  $c = 0,8$ , conforme indica a Fig. 6.54. Além disto, o ângulo  $\beta$  formado com a direção paralela ao aerofólio em  $c = 0,7$  é denominado de inclinação do *spoiler*.

O escoamento é turbulento, com número de Reynolds de corrente-livre de  $Re_\infty = 3.5 \times 10^5$ , sendo o ângulo de ataque nulo ( $\alpha = 0$ ). A simulação é conduzida até o tempo adimensional

de  $T = 20$ , dividida da seguinte forma: a parte inicial é conduzida até  $t_1 = 5,5$  para desenvolver o escoamento no perfil aerodinâmico, mantendo o *spoiler* na inclinação inicial (fechada)  $\beta(t_1) = 0$ . Após, o *spoiler* começa a se abrir, rotacionando no entorno de seu ponto mais à esquerda até a posição final  $\beta(t_2) = 90^\circ$  no tempo  $t_2 = 10$  através da seguinte variação (Yeung et al., 1997):

$$\beta(t) = \beta(t_2) \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \pi \right) \right) \quad (6.6)$$

Por fim, a simulação é continuada até o tempo final mantendo-se o *spoiler* acionado na posição máxima. A densidade e velocidade de corrente-livre são tomadas com os valores  $\rho_\infty = 1$  e  $u_\infty = 1$ , respectivamente e o problema é analisado para três valores de número de Mach: 0,4 (subsônico), 0,8 (transônico) e 1,2 (supersônico). O caso subsônico é comparado com a análise experimental incompressível conduzida por Yeung et al. (1997) e a análise numérica empregando-se um modelo tridimensional e LES apresentada por Favre et al. (2014).

A adaptação de malhas é empregada a cada 20 iterações do algoritmo CBS com os seguintes parâmetros: erro objetivo de interpolação  $\varepsilon_{L^2} = 0,05c$  e tamanho mínimo permitido de aresta  $h_{min} = 0,001c$ . O algoritmo de movimento de malhas é empregado com suporte compacto de magnitude  $r = 0,5c$

A Fig. 6.55, Fig. 6.56 e Fig. 6.57 mostram três instantes do escoamento e respectivas malhas ao longo do acionamento do *spoiler* no aerofólio e as Figs. 6.58, 6.59 e 6.60 mostram em mais detalhes o escoamento no entorno do aerofólio no momento de abertura total do *spoiler*. A Fig. 6.61 mostra a variação temporal dos coeficientes aerodinâmicos e da evolução do tamanho da malha.

No estágio inicial ( $\beta = 0$ ), tanto o caso subsônico quanto o supersônico apresentam um escoamento sem separação da camada limite, diferentemente do caso transônico, o qual apresenta naturalmente instabilidades. No estágio intermediário ( $\beta = 45^\circ$ ), o escoamento se separa em todas as situações, gerando um forte vórtice atrás do *spoiler*. Esta zona onde forma-se o vórtice é uma zona de baixa pressão, onde para valores muito pequenos de inclinação do *spoiler* há uma leve indução momentânea de aumento do coeficiente de sustentação. Este aumento logo é suprimido quando o vórtice desloca-se mais para baixo e a pressão sobe na região à frente do *spoiler*, causando o efeito de grande redução do

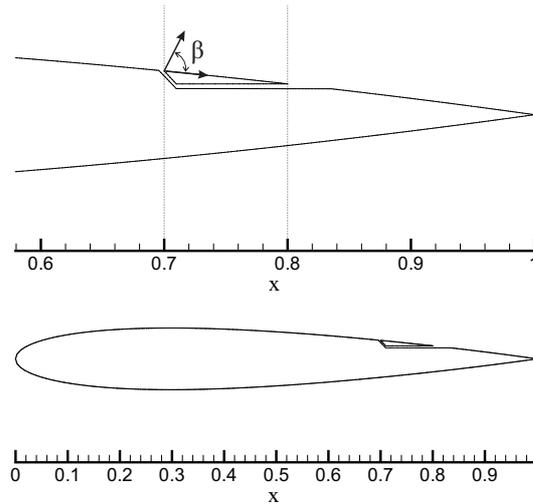


Figura 6.54: *Spoiler* superior no aerofólio NACA-0012.

coeficiente de sustentação. Para o caso supersônico, uma onda de expansão é formada na extremidade do *spoiler*, diminuindo a recirculação na região traseira, o que impacta em menor grau a redução do coeficiente de sustentação e também proporciona um maior coeficiente de arrasto, bem como a formação de novas ondas de choque. Quando o *spoiler* está praticamente todo acionado ( $\beta = 70^\circ$  em diante), o escoamento continua a se separar a partir de sua extremidade. Este escoamento separado interage com a camada cisalhante formada no bordo de fuga do aerofólio, induzindo o desprendimento periódico de vórtices.

Observa-se que o presente caso simulado para  $Mach = 0.40$  possui razoável aproximação com os resultados incompressíveis experimentais (Yeung et al., 1997) e numéricos (Favre et al., 2014) para o coeficiente de sustentação. Claramente, existem diferenças em alguns pontos, entretanto convém lembrar que a presente solução é levemente compressível e bidimensional. Até mesmo a solução LES tridimensional incompressível apresentada por Favre et al. (2014) possui discrepâncias com a solução experimental incompressível de Yeung et al. (1997). O coeficiente de arrasto, por sua vez, apresenta uma discrepância com o resultado incompressível no estágio inicial de acionamento do *spoiler*, embora apresente boa concordância no período de total abertura. Observa-se a partir da evolução dos coeficientes aerodinâmicos que, para o presente caso estudado, o regime de velocidades transônicas produz mais instabilidades dos coeficientes aerodinâmicos.

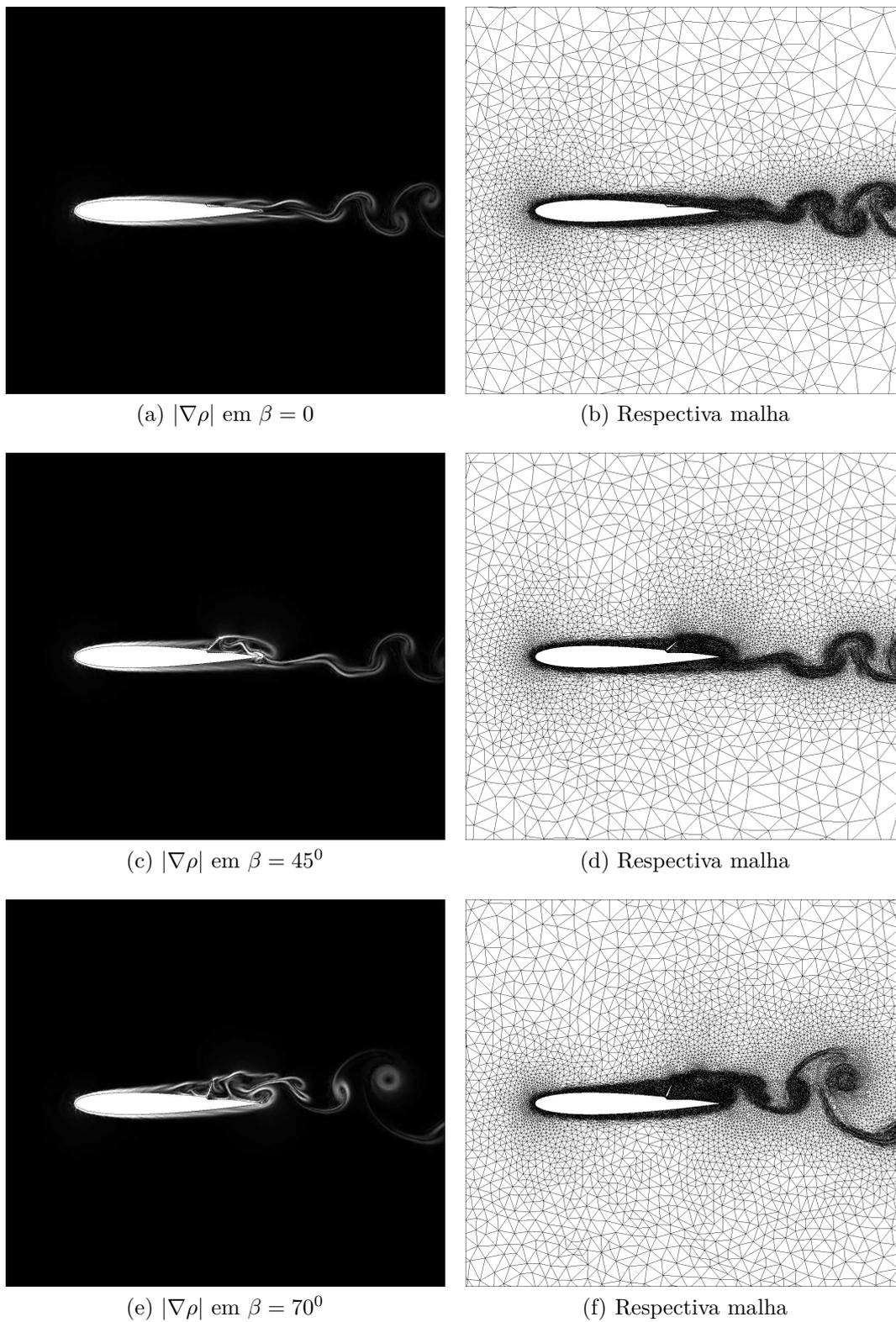


Figura 6.55: Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas para o caso subsônico com  $Mach = 0,4$

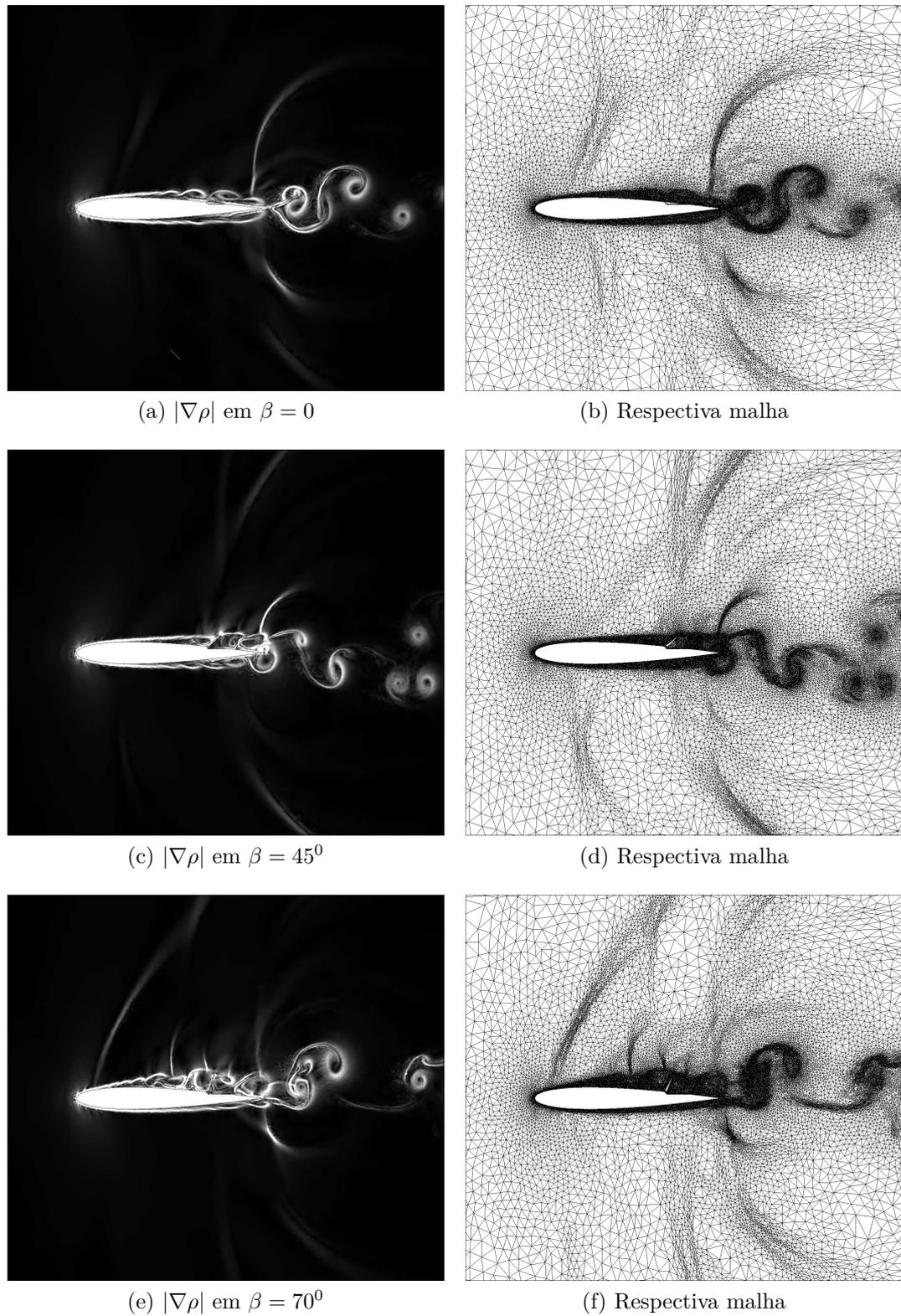


Figura 6.56: Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas para o caso transônico com  $Mach = 0,8$

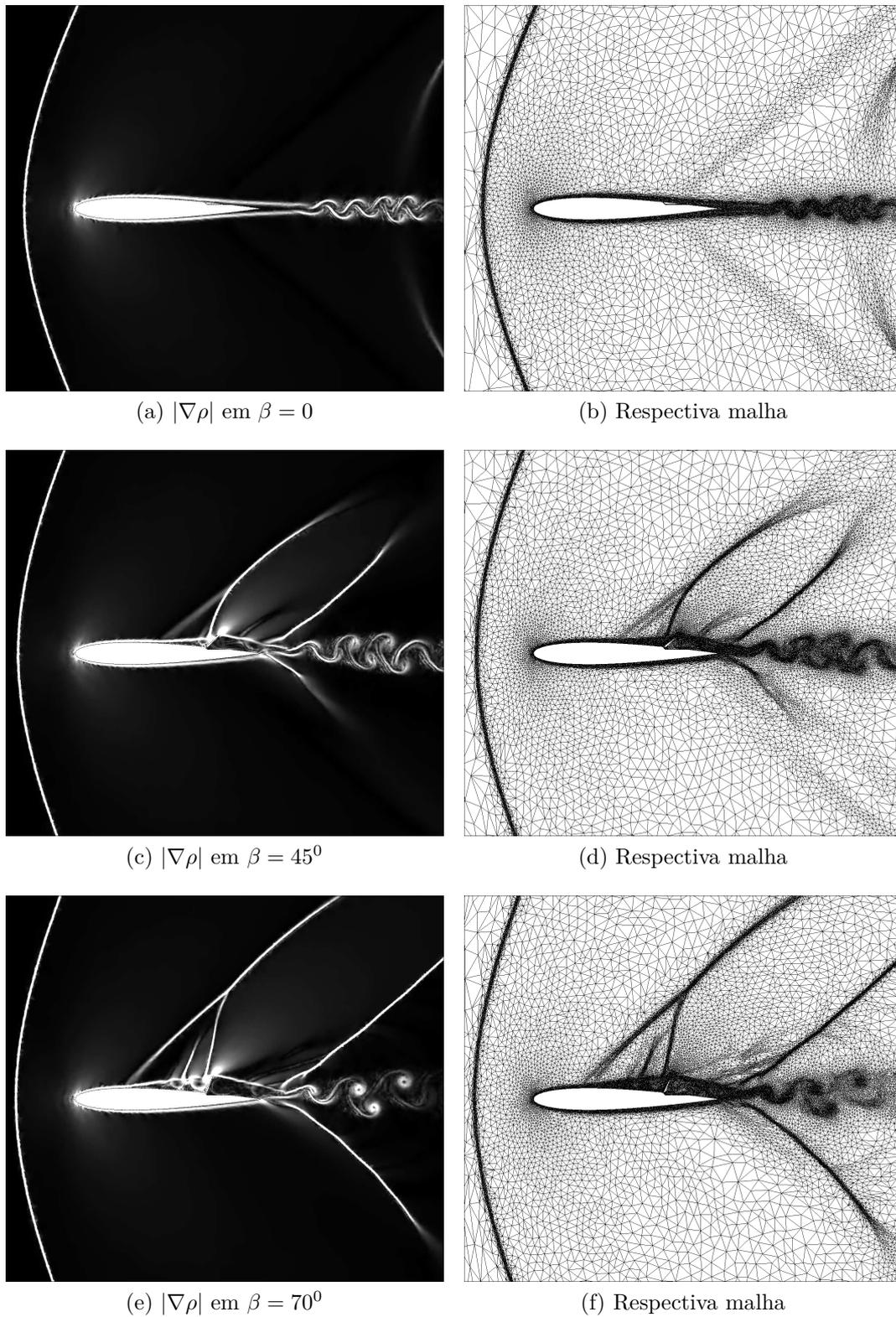
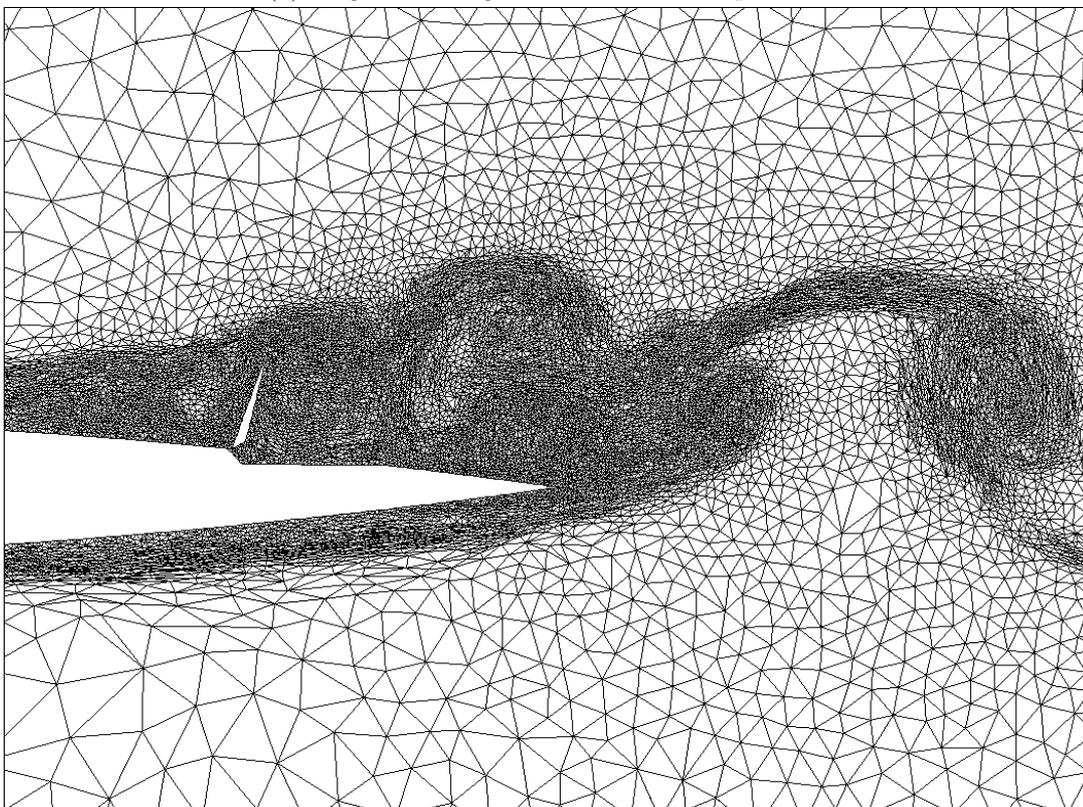


Figura 6.57: Magnitude do gradiente de massa específica e malhas adaptadas para o caso supersônico com  $Mach = 1,2$



(a) Magnitude do gradiente de massa específica

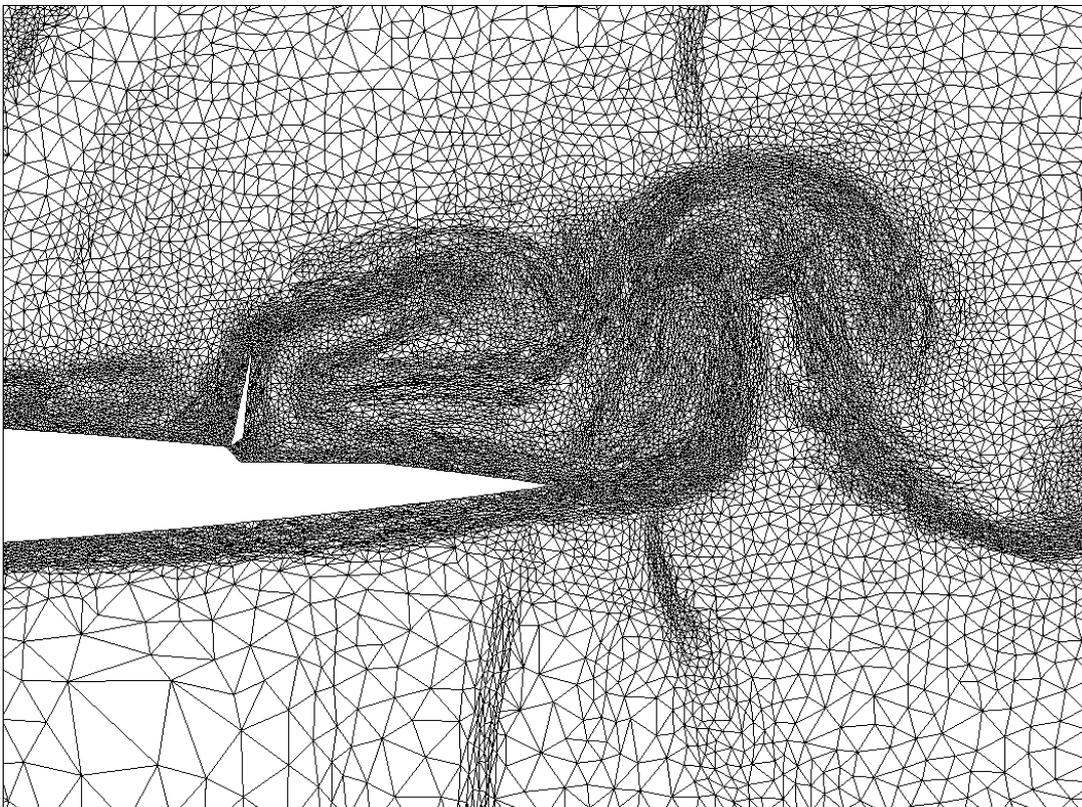


(b) Malha adaptada

Figura 6.58: Caso subsônico com  $Mach = 0,4$  e  $\beta = 90^0$ .



(a) Magnitude do gradiente de massa específica

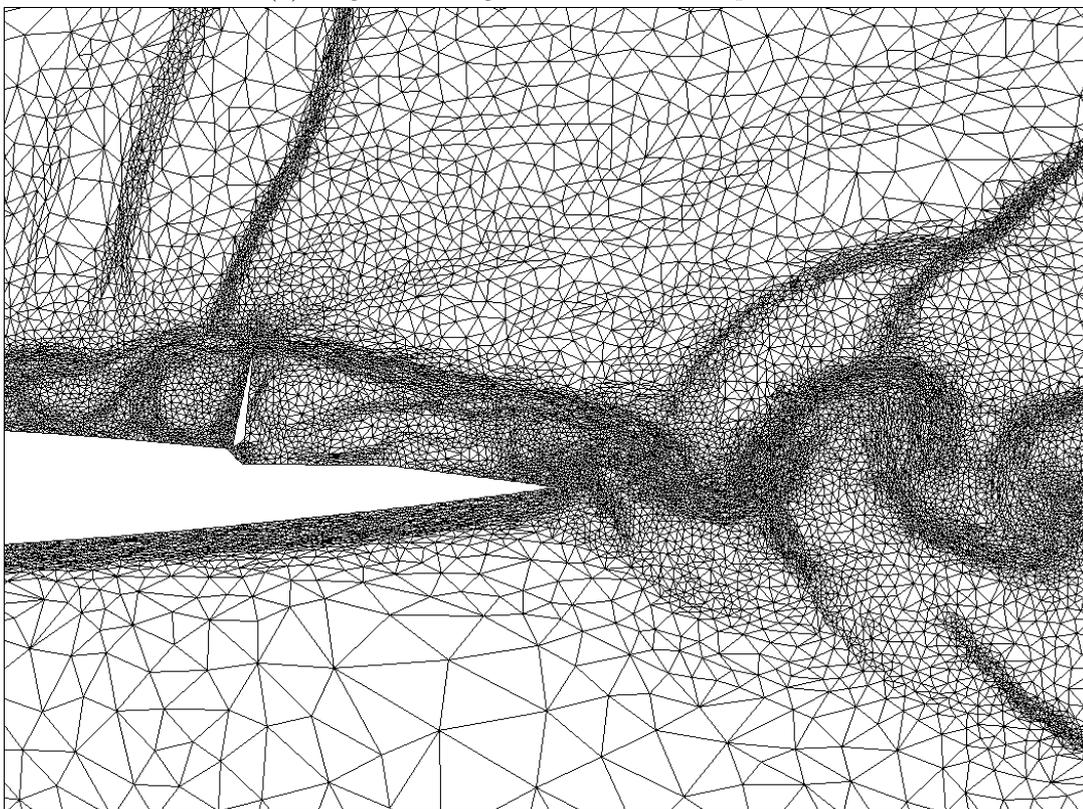


(b) Malha adaptada

Figura 6.59: Caso transônico com  $Mach = 0,8$  e  $\beta = 90^\circ$ .

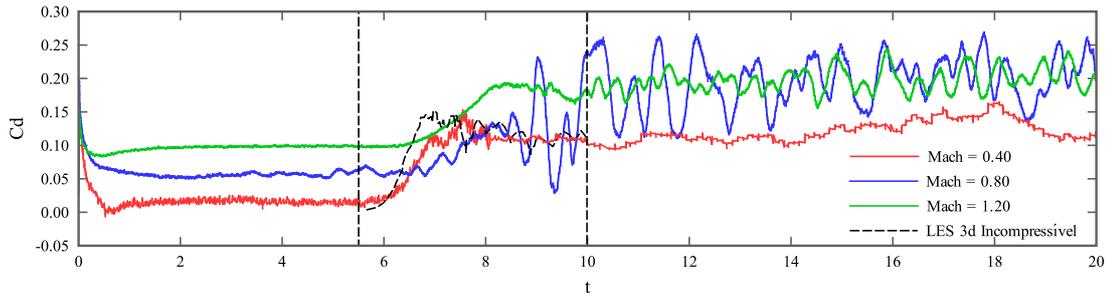


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

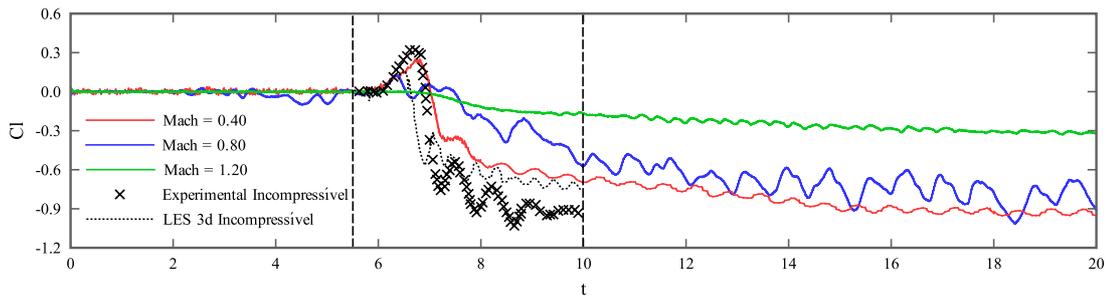


(b) Malha adaptada

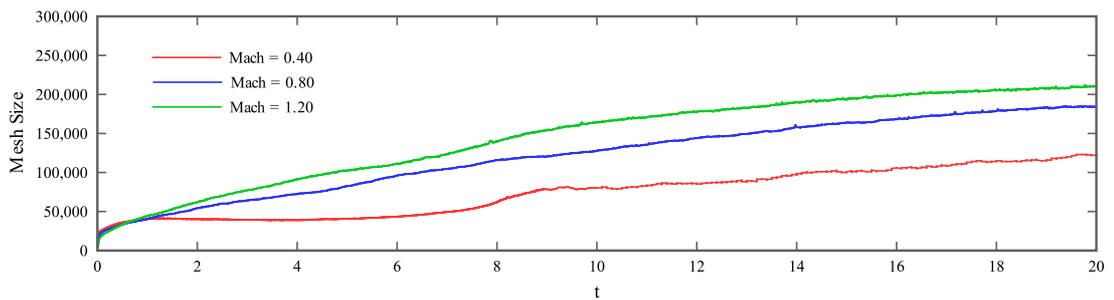
Figura 6.60: Caso supersônico com  $Mach = 1,2$  e  $\beta = 90^{\circ}$ .



(a) Coeficiente de arrasto transiente



(b) Coeficiente de sustentação transiente



(c) Tamanho da malha

Figura 6.61: Solução temporal para o acionamento do *spoiler* no aerofólio NACA-0012.

### 6.5.4 Escoamento Turbulento Supersônico no Entorno do Projétil Giratório M910

As investigações numéricas de problemas de aerodinâmica de projéteis eram inicialmente estudos com demasiadas simplificações geométricas, físicas e numéricas em decorrência dos limitados recursos computacionais disponíveis em suas épocas (Sturek e Schiff, 1982; Nietubicz et al., 1983; Sahu, 1991). Entretanto, os recursos disponíveis atualmente permitem a obtenção de uma maior precisão nestes itens: a geometria pode ser modelada com fidelidade, o escoamento transiente turbulento pode ser considerado e efeitos de rotação que induzem o efeito Magnus podem ser levados em consideração na simulação. Exemplos de simulações contendo tais complexidades podem ser encontrados em DeSpírito e Heavey (2006); Doraiswamy e Candler (2008)

O projétil analisado aqui é o M910 de 25mm do tipo TPDS-T (Plostins et al., 1991). Este projétil é empregado em munições de perfuração de armaduras em armas do tipo canhão de cadeia (*Chain Gun*) que encontram-se acoplados em tanques, helicópteros e navios de guerra. O projétil M910 é ilustrado na Fig. 6.62. A cabeça tem 0,22cm e é facetada, sendo seguida da ogiva cônica de 4,12cm de extensão. O corpo do projétil é cilíndrico, possuindo 3,27cm de comprimento e 1,62cm de diâmetro (calibre 1). Um chanfro de 0,2cm forma a base do projétil.

A presente simulação baseia-se no estudo apresentado por DeSpírito e Heavey (2006). O escoamento turbulento considerado contém número de Reynolds de corrente-livre de  $Re_\infty = 5,83 \times 10^7$ , sendo o ângulo de ataque nulo ( $\alpha = 0$ ) e o número de Mach de corrente-livre  $M_\infty = 2,5$ . Considera-se também uma temperatura elevada de corrente-livre  $T_\infty = 648K$  na superfície do projétil. Considera-se que o projétil rotaciona no

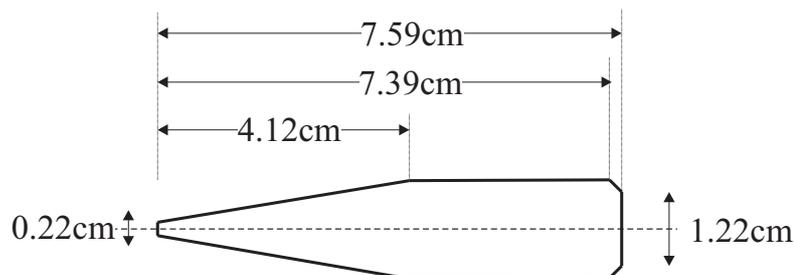


Figura 6.62: Geometria do projétil M910.

entorno do seu eixo a uma velocidade angular constante de  $\omega = 8944 \text{rad/s}$ . A velocidade de corrente-livre vale  $u_\infty = 850,5 \text{m/s}$  e o problema é simulado até o tempo final de  $T = 0,005 \text{s}$  (que corresponde a aproximadamente 7 ciclos de rotações completas).

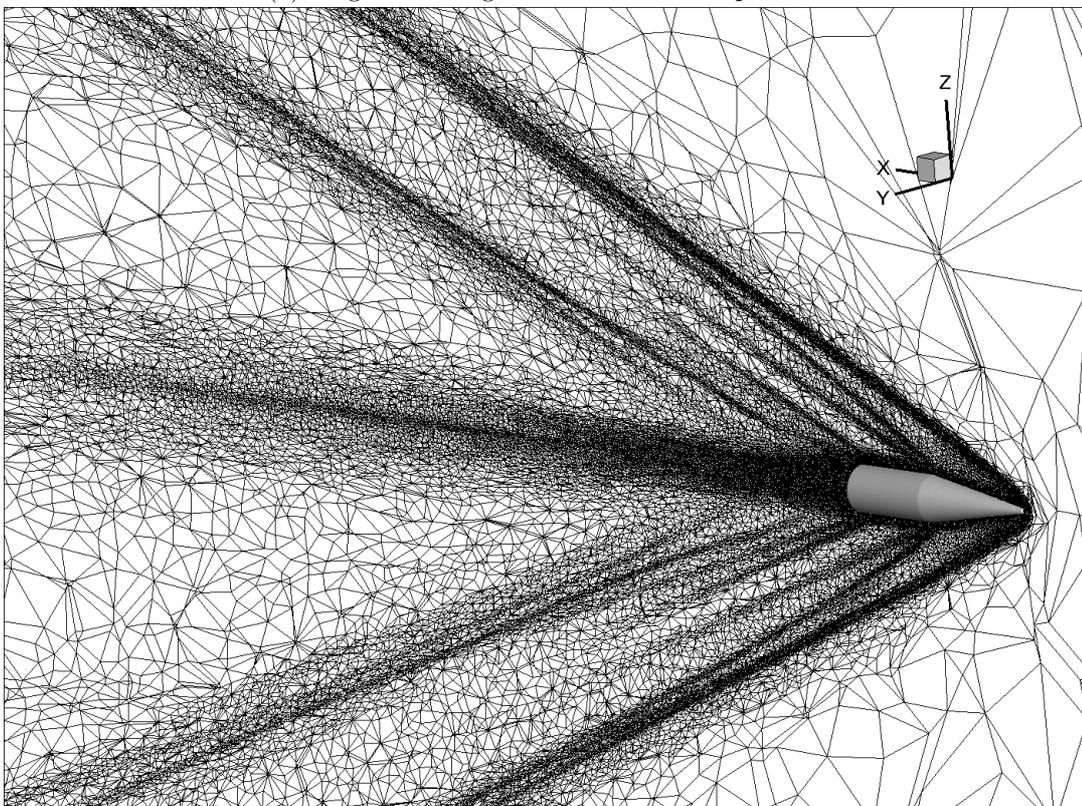
A adaptação de malhas é empregada a cada 20 iterações do algoritmo CBS com os seguintes parâmetros: erro objetivo de interpolação  $\varepsilon_{L^2} = 0,20$  e tamanho mínimo permitido de aresta  $h_{min} = 0,05 \text{cm}$ . O algoritmo de movimento de malhas é empregado com suporte compacto de magnitude  $r = 5 \text{cm}$ .

A Fig. 6.63 mostra uma seção de corte ao longo da posição  $y = 0$  enquanto que a Fig. 6.64 em  $x = 20 \text{cm}$ . Nestas figuras, a magnitude do gradiente de massa específica e a respectiva malha são apresentadas. É possível verificar a onda de choque frontal, bem como as ondas secundárias que partem do fim da ogiva cônica ( $x = 5 \text{cm}$ ) e da parte final do projétil. Existe também uma esteira localizada atrás do projétil, a qual oscila na região próxima ao contorno sólido. Essa zona pode ser melhor observada na Fig. 6.65, onde a componente da velocidade na direção  $z$  é mostrada.

A Fig. 6.66 mostra a evolução temporal dos coeficientes aerodinâmicos e do tamanho da malha ao longo da simulação. O coeficiente de arrasto se desloca para o valor de 0,33 enquanto que o valor experimental fornecido por Plostins et al. (1991) vale 0,30. O valor numérico obtido empregando-se uma técnica de simulação DES tridimensional considerando o efeito Magnus através do método das fronteiras imersas apresentado por DeSpirito e Heavey (2006) vale 0,28. Também observa-se que o tempo considerado de simulação situa-se na faixa transiente do escoamento, onde as ondas de choque se desenvolvem. A consideração de um tempo maior de simulação talvez seja necessária para melhorar a aproximação do coeficiente de arrasto.

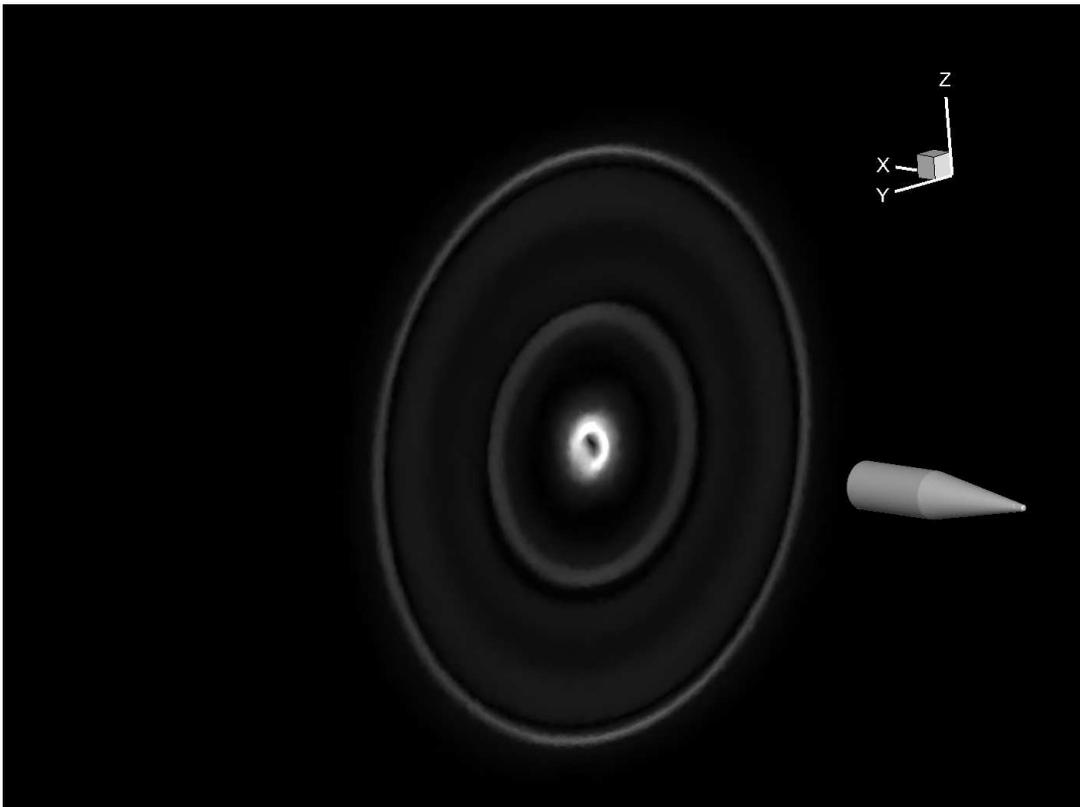


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

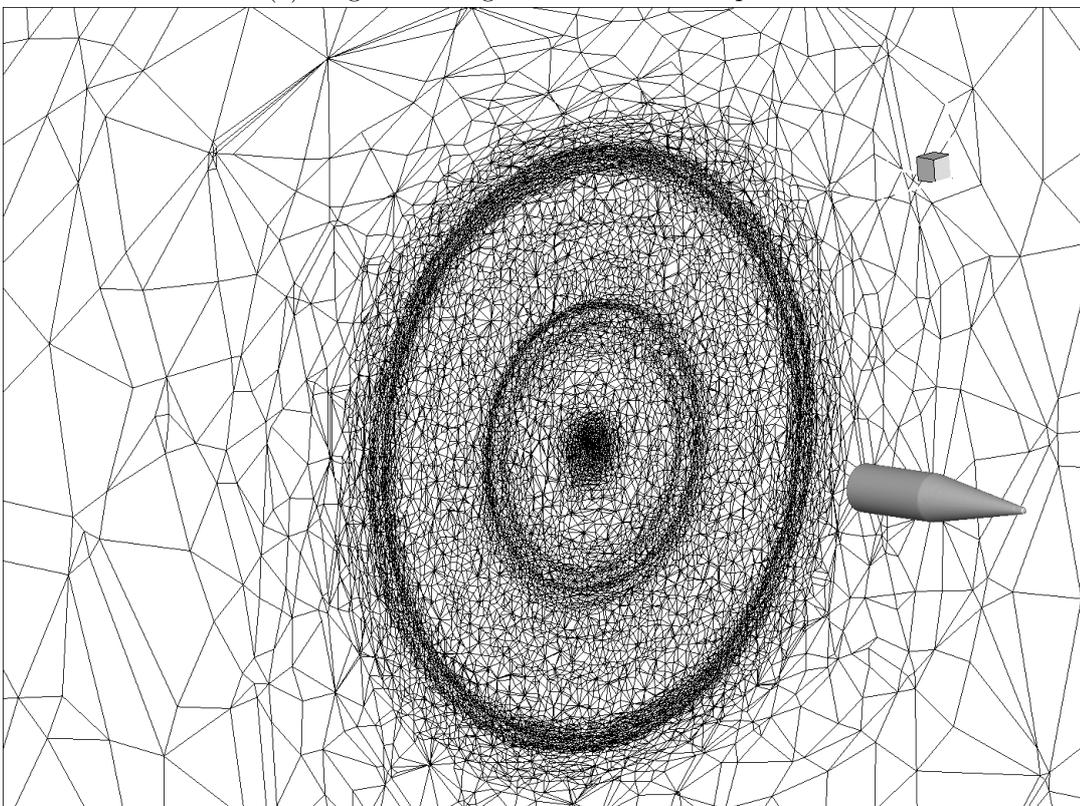


(b) Malha adaptada

Figura 6.63: Escoamento e respectiva malha para o projétil em um plano de corte localizado em  $y = 0\text{cm}$ .

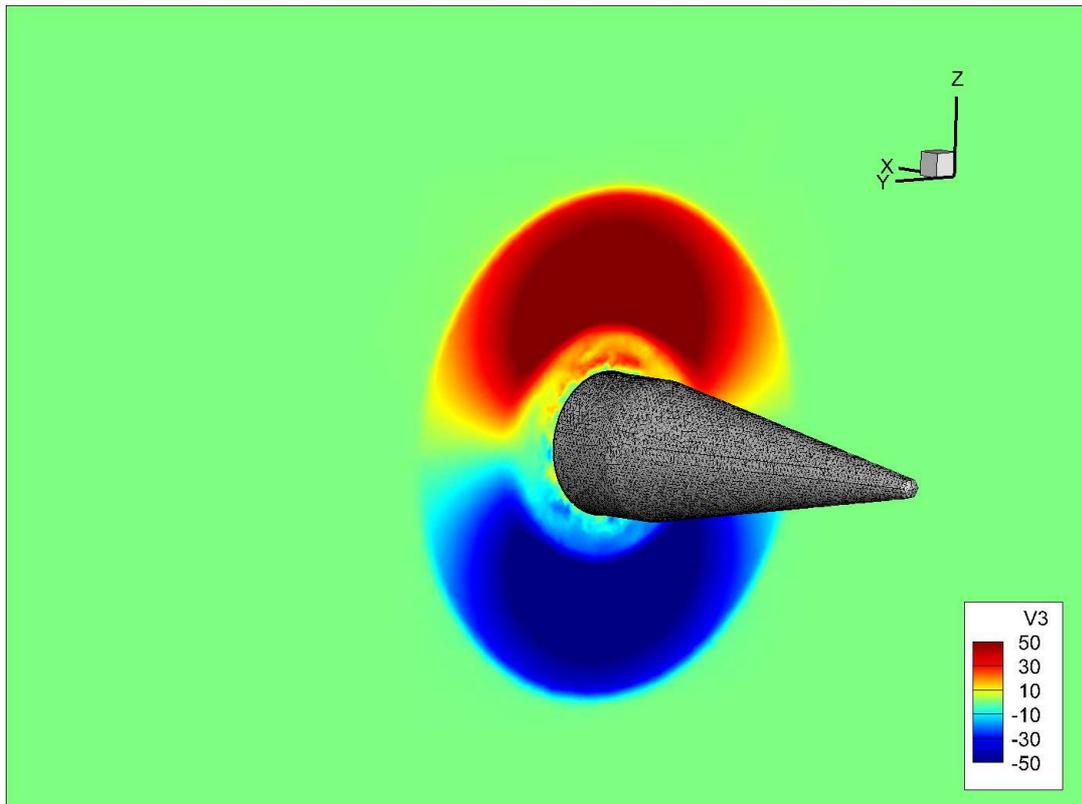


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

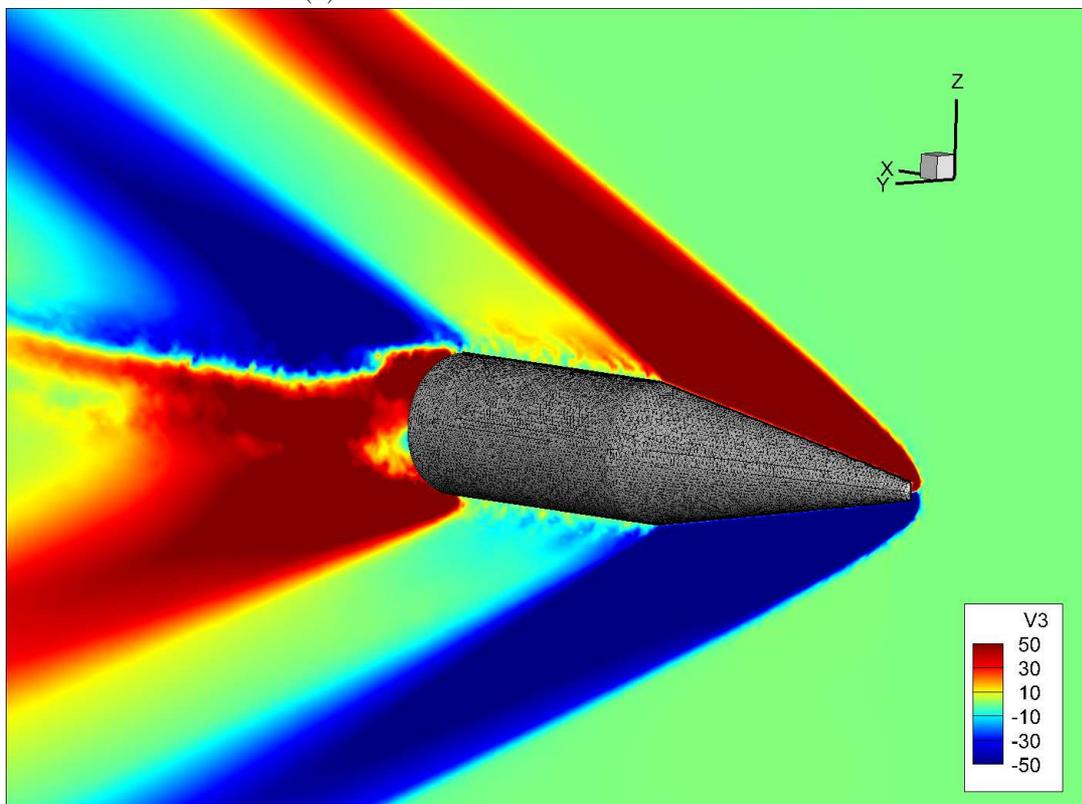


(b) Malha adaptada

Figura 6.64: Escoamento e respectiva malha para o projétil em um plano de corte localizado em  $x = 20$ .

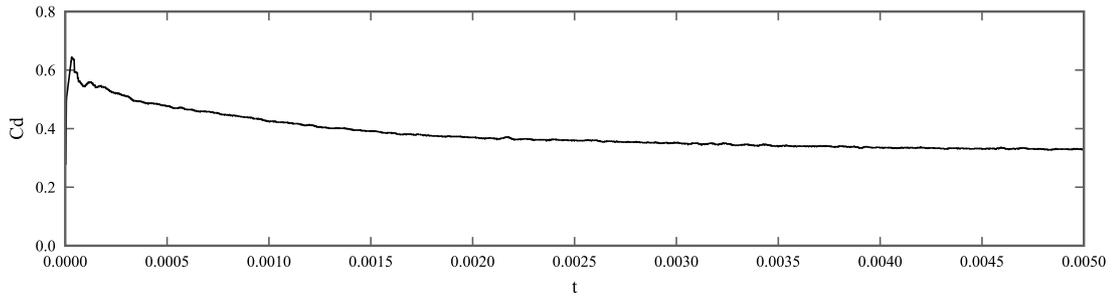


(a) Plano de corte localizado em  $x = 5\text{cm}$

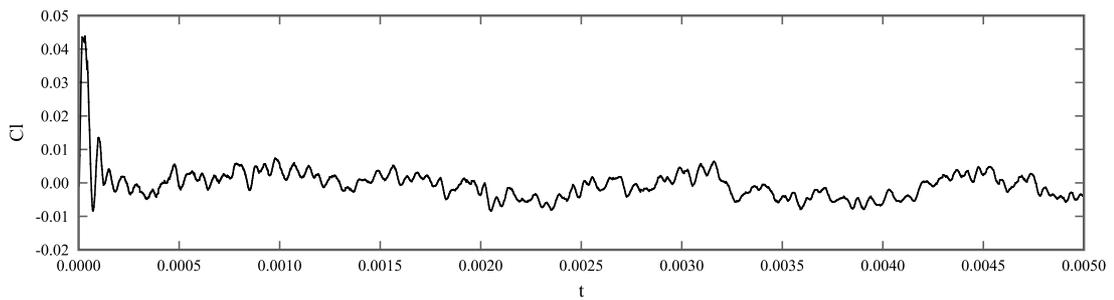


(b) Plano de corte localizado em  $y = 0$

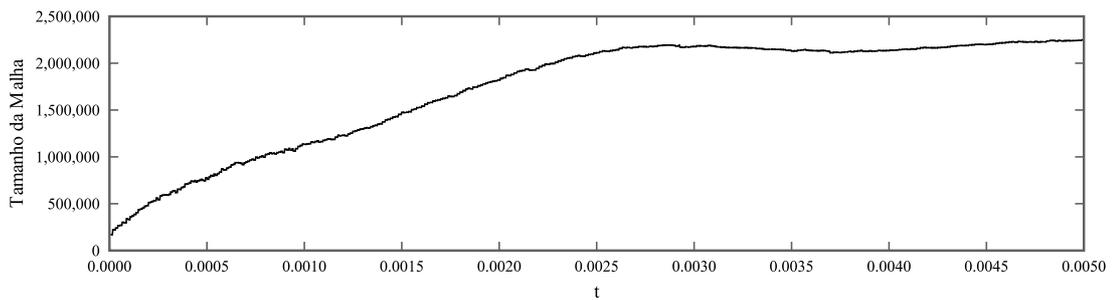
Figura 6.65: Componentes da velocidade na direção  $z$  para o projétil.



(a) Coeficiente de arrasto transiente



(b) Coeficiente de sustentação transiente



(c) Tamanho da malha

Figura 6.66: Solução temporal para o projétil.

### 6.5.5 Escoamento Turbulento Transônico em *Turbofan*

A interação entre os diferentes componentes de uma turbina de aviões e jatos representa um aspecto importante no processo de desenvolvimento de tais componentes mecânicos. Alta taxas de variação de densidade do fluido induzidos por zonas de separação e ondas de pressão interagem com vórtices originados pelas pás que giram na zona de admissão do ar, bem com nas pás dos compressores. Tem-se também altas temperaturas interagindo de forma transiente nos primeiros estágios da turbina.

Neste exemplo, simula-se o escoamento passando através das pás de admissão de um *turbofan* em alta rotação. Embora exemplos envolvendo geometrias mais reais possam ser encontradas na literatura (Muir e Friedmann, 2013), bem como exemplos considerando os diversos estágios de compressores (Medic et al., 2007), escolheu-se um modelo genérico, simplificado, apenas para demonstrar a capacidade do algoritmo desenvolvido em lidar com mecanismos complexos em grandes velocidades.

O modelo estudado contém 40 pás torcidas com um raio  $R = 1,6m$  que rotacionam no entorno do eixo  $z$  (Fig. 6.67). Considera-se o escoamento de corrente-livre transônico, com número de Mach de corrente-livre  $M_\infty = 0,7$ . A velocidade de rotação considerada é de  $\omega = 3000rpm$ , onde estes dados geométricos, cinemáticos e de velocidade são compatíveis com os empregados em turbinas de aeronaves em velocidades próximas das de cruzeiro. Por exemplo, a turbina Rolls-Royce RB211-535E4 opera com 22 pás de  $0,94m$  de raio em aeronaves Boeing-757, enquanto que as turbinas Engine Alliance GP7000 são usadas em aeronaves Airbus A380 com 24 pás de  $1,58m$  de raio, sendo que a velocidade de rotação varia dependendo da força de empuxo fornecida.

A velocidade de corrente-livre considerada vale  $u_\infty = 240m/s$  e o número de Reynolds de corrente-livre considerado vale  $Re_\infty = 5 \times 10^5$ , sendo o ângulo de ataque nulo ( $\alpha = 0$ ). A simulação é conduzida até o tempo final  $T = 0,12s$  (que corresponde a aproximadamente 6 ciclos de rotações completas).

A adaptação de malhas é empregada a cada 20 iterações do algoritmo CBS com os seguintes parâmetros: erro objetivo de interpolação  $\varepsilon_{L^2} = 0,20$  e tamanho mínimo permitido de aresta  $h_{min} = 0,02m$ . O algoritmo de movimento de malhas é empregado

com suporte compacto de magnitude  $r = 0,1m$ .

A Fig. 6.69 e a Fig. 6.70 mostram o campo de magnitude de gradiente de massa específica em uma seção de corte no plano  $xy$  enquanto que a Fig. 6.71 mostra para o plano  $xz$ . O escoamento na extremidade externa das pás possui maior velocidade, criando uma zona de separação do escoamento que se encontra com o escoamento que passa pelo orifício central, gerando, ao mesmo tempo, um efeito de turbilhonamento e compressão. Este efeito de interação de flutuações de turbulência pode também ser percebido na Fig. 6.72, onde diversos cortes de planos  $xy$  ao longo do eixo  $z$  são mostrados.

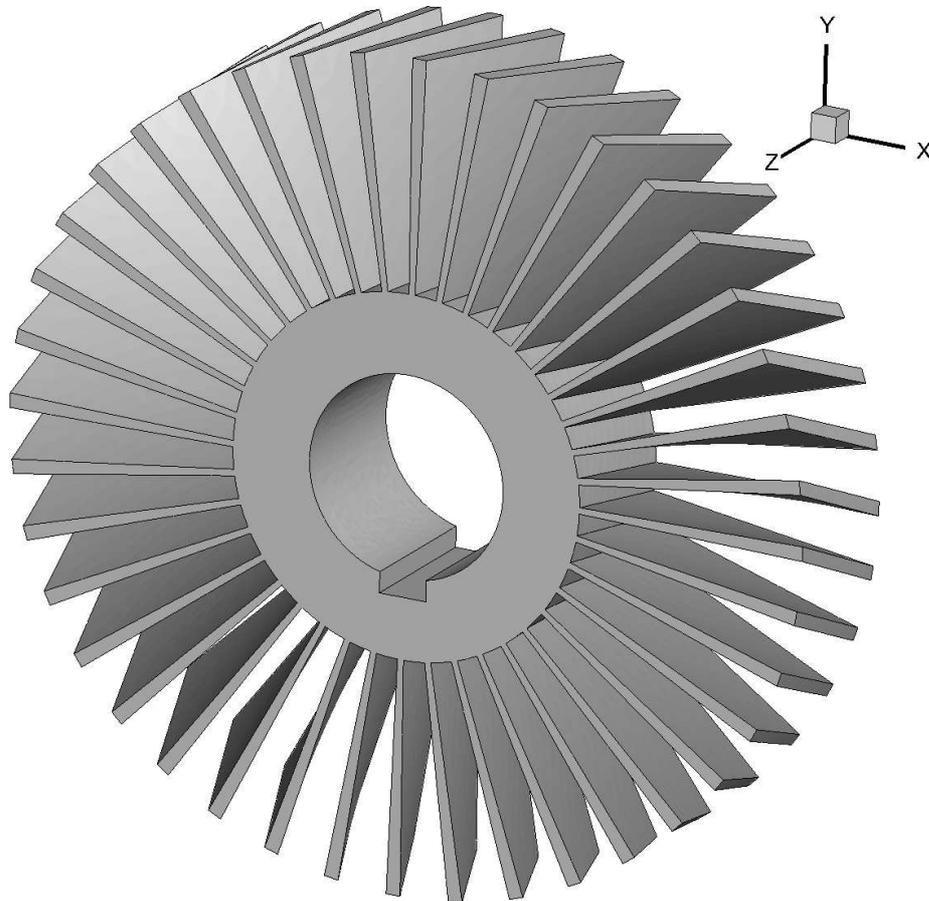


Figura 6.67: Geometria das pás de admissão do *turbofan* considerado.

A estrutura do escoamento no instante final da simulação é mostrada na Fig. 6.68, onde o efeito de rotação fica aparente através do formato torcido dos vórtices. A Fig. 6.73 mostra a complexidade das linhas linha de corrente que se desenvolvem atrás do *turbofan* em dois diferentes estágios. No tempo que corresponde a uma rotação completa ( $t = 0,02s$ ), o escoamento está em estágio inicial de perturbação, com grande formação de turbilhões que giram no entorno do contorno da circunferência. Já no tempo que corresponde a seis

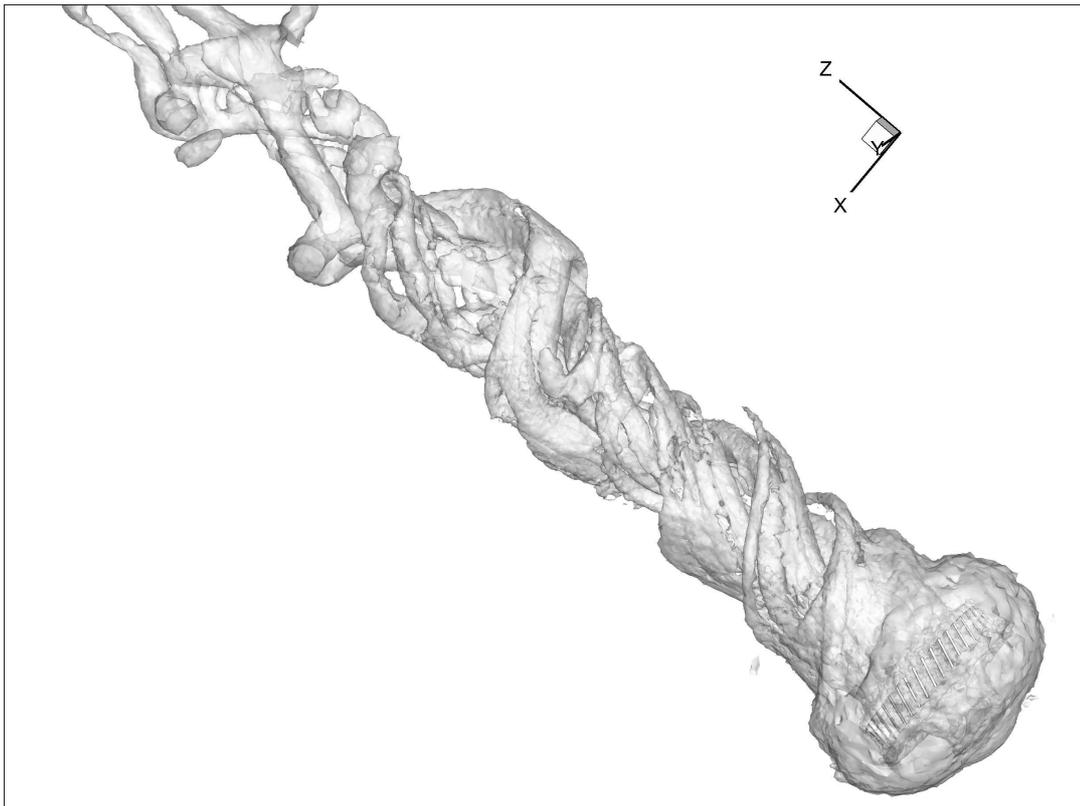


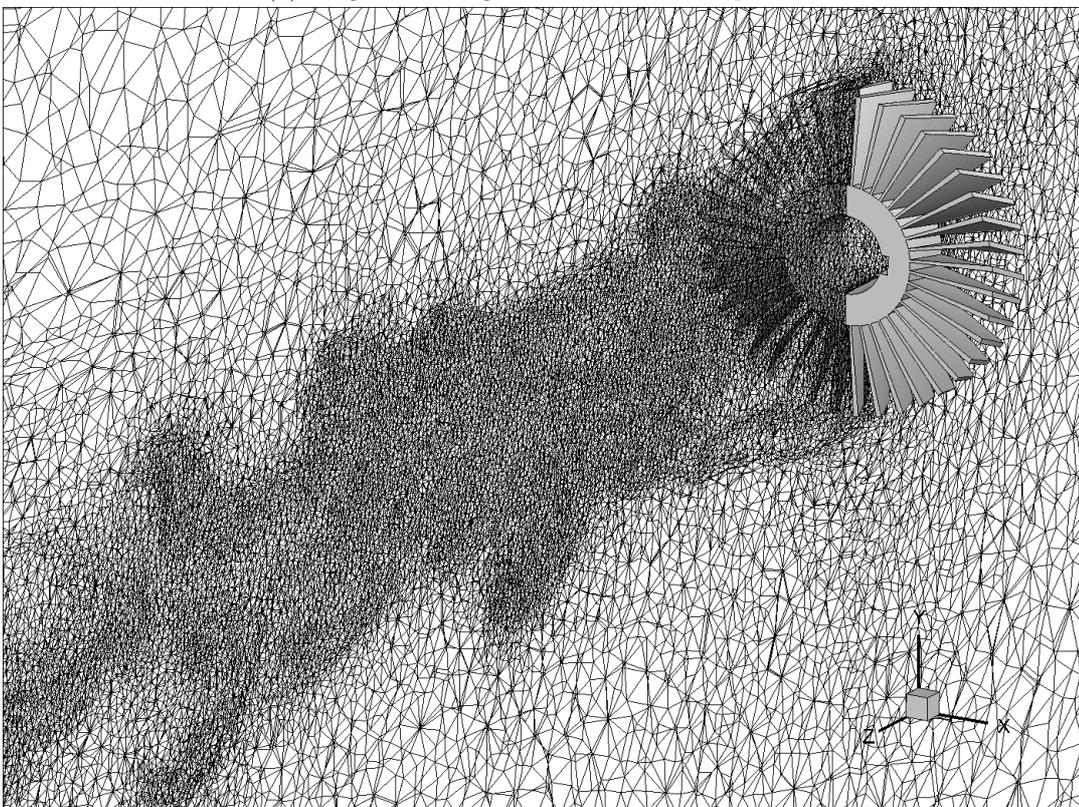
Figura 6.68: Estrutura do escoamento pelo critério  $Q$ .

rotações completas ( $t = 0,12s$ ), os turbilhões diminuem de raio e um comportamento de rotação se torna mais evidente pelo alongamento do passo de rotação na direção positiva do eixo  $z$ .

A Fig. 6.74a mostra o coeficiente de sustentação variável ao longo da simulação, onde a área de referência foi tomada como unitária. Uma análise no domínio das frequências para este coeficiente é mostrada na Fig. 6.74c, onde percebe-se o pico do número de Strouhal no valor de  $43Hz$ , correspondendo a um valor de  $86\%$  da velocidade angular do corpo. Por fim, o tamanho da malha ao longo da simulação é apresentado na Fig. 6.74b.



(a) Magnitude do gradiente de massa específica

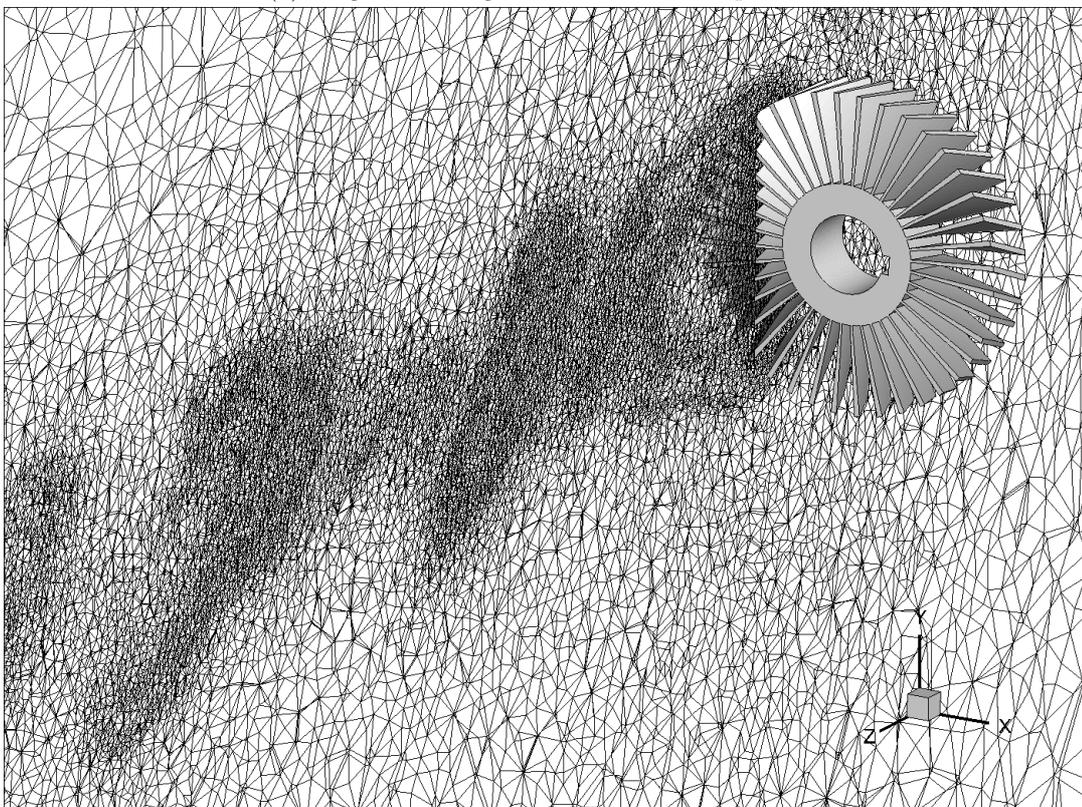


(b) Malha adaptada

Figura 6.69: Seção de corte no plano  $yz$  em  $x = 0$ .



(a) Magnitude do gradiente de massa específica

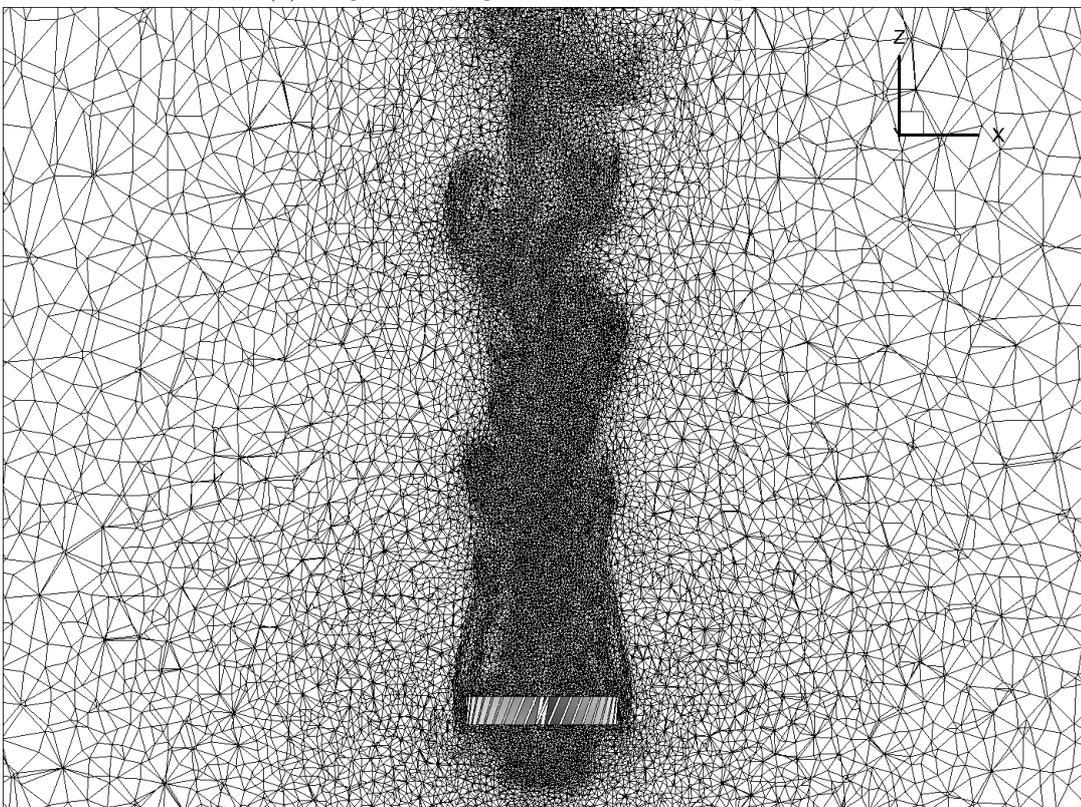


(b) Malha adaptada

Figura 6.70: Seção de corte no plano  $yz$  em  $x = -1m$ .

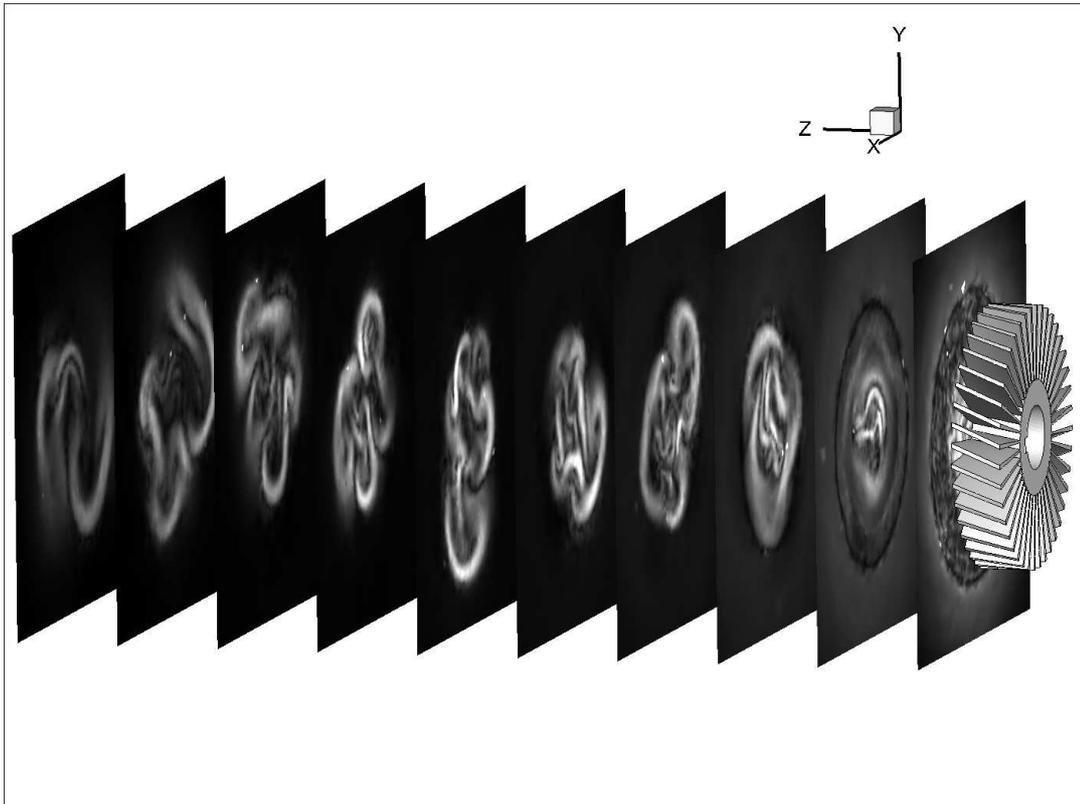


(a) Magnitude do gradiente de massa específica

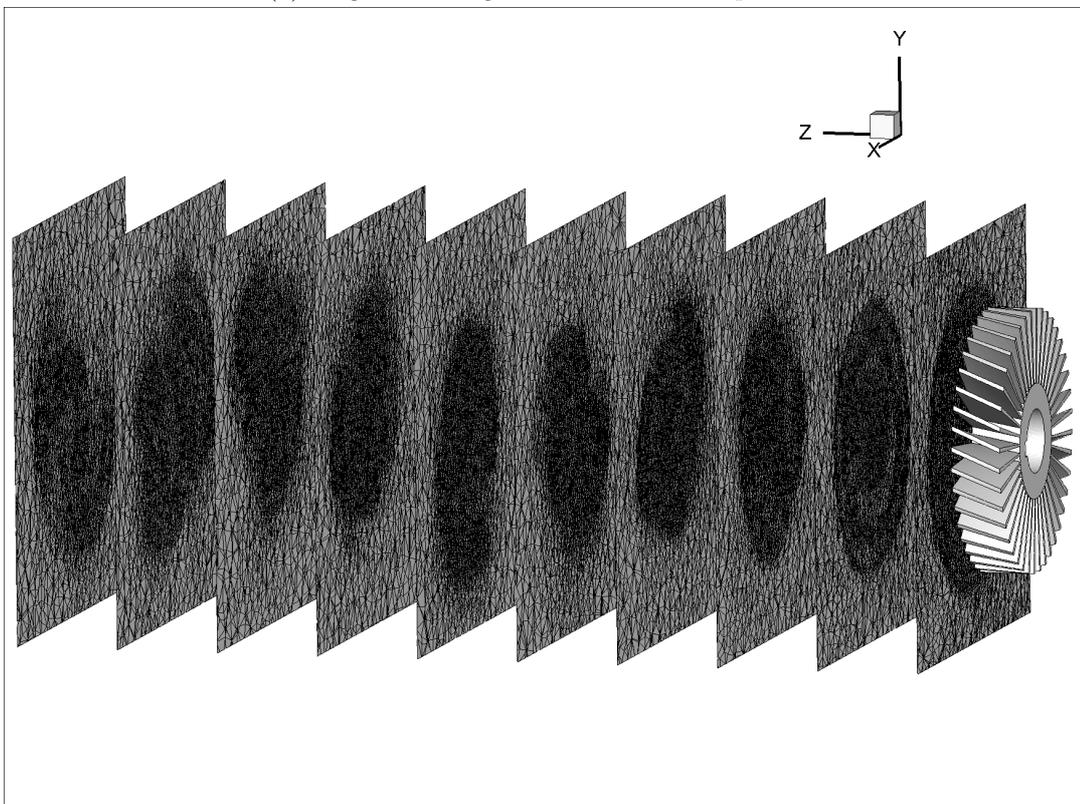


(b) Malha adaptada

Figura 6.71: Seção de corte no plano  $xz$  em  $y = 0$ .



(a) Magnitude do gradiente de massa específica



(b) Malha adaptada

Figura 6.72: Seções de corte no plano  $xy$ .

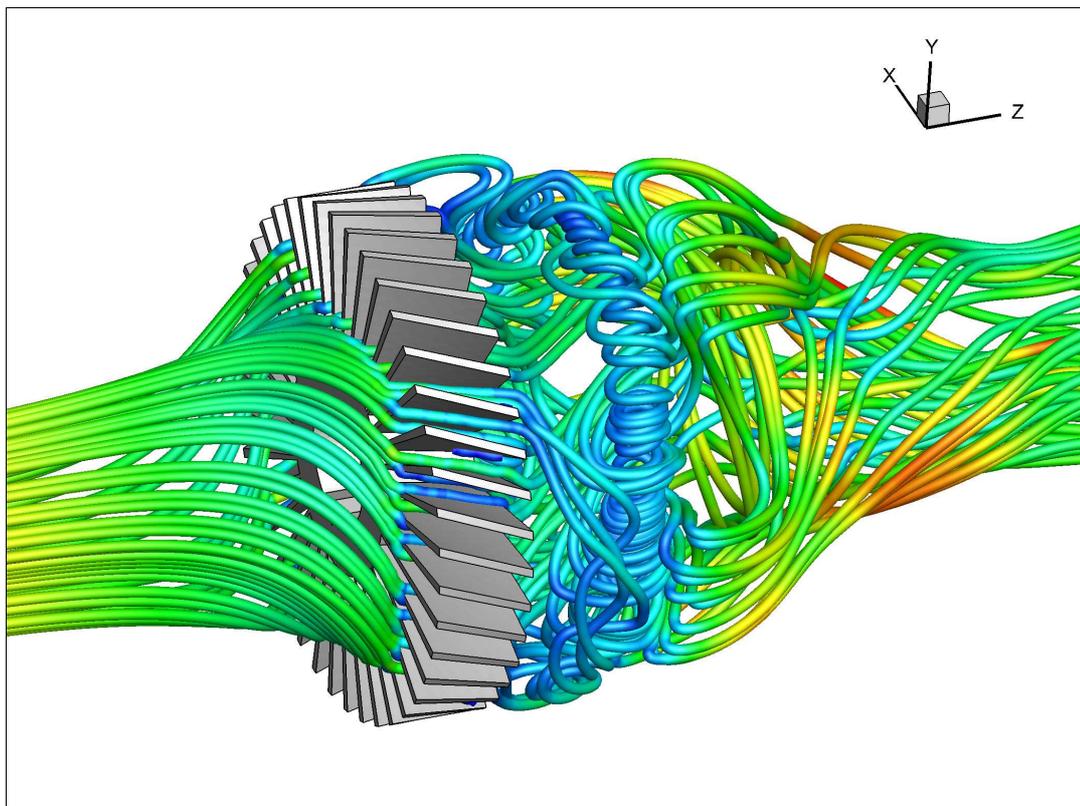
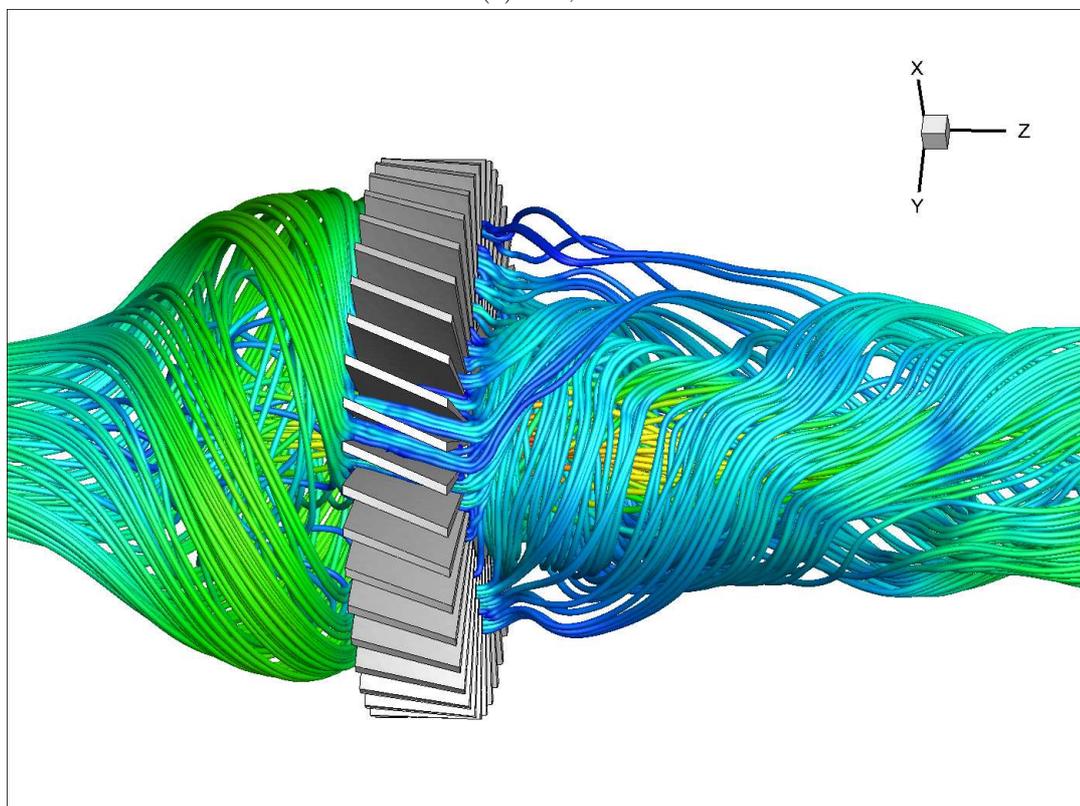
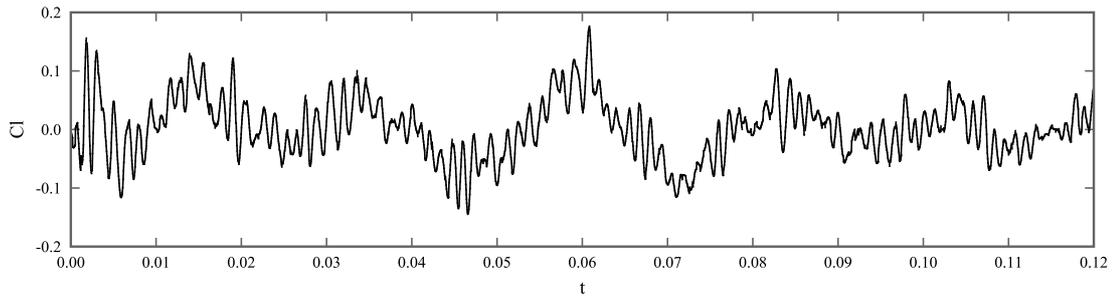
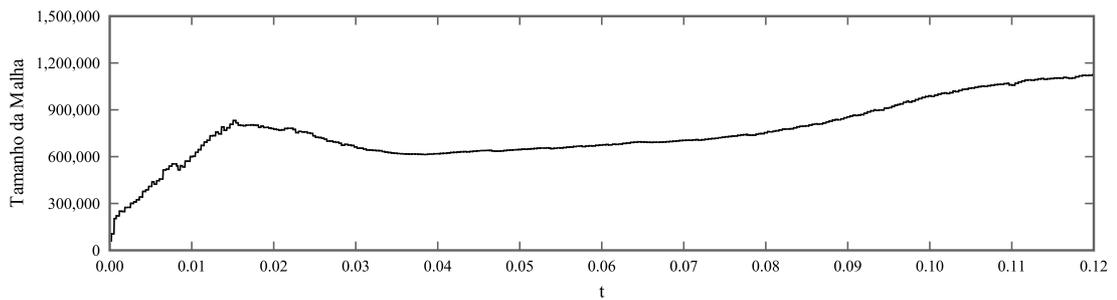
(a)  $t=0,02s$ (b)  $t=0,12s$ 

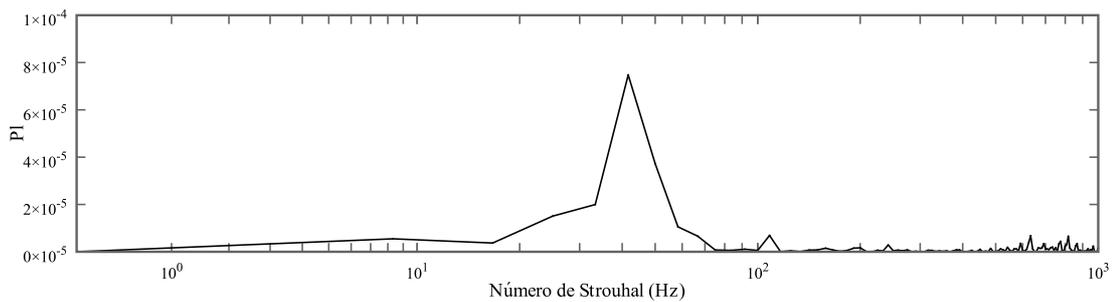
Figura 6.73: Linhas de corrente coloridas pelo magnitude de velocidade.



(a) Coeficiente de sustentação transiente



(b) Tamanho da malha



(c) Espectro de potência do coeficiente de sustentação em função do número de Strouhal

Figura 6.74: Solução temporal e no domínio de frequências para o *turbofan* em regime transônico.

## 6.5.6 Problemas Dinâmicos e Aerolásticos

Simulações envolvendo corpos elásticos deformáveis e sua interação com o escoamento são analisados a seguir.

### Resposta Dinâmica Não-Linear de Placa Elástica

Neste exemplo inicial, um problema de mecânica dos sólidos é analisado isoladamente para validar o código de dinâmica não-linear. Uma placa de comprimento  $L = 508mm$ , largura  $b = 25,4mm$  e espessura  $h = 3,175mm$  é analisada. As propriedades do material são: módulo de elasticidade  $E = 206,7GPa$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0$  e massa específica  $\rho = 2714,81Kg/m^3$ . A estrutura encontra-se engastada em ambas as extremidades de seu comprimento, tendo, portanto, deslocamentos e rotações nulas nestas regiões. Aplica-se uma carga degrau de valor  $P = 2848N$  no centro da placa até o tempo final da simulação  $T = 0,005s$ , onde o passo de tempo adotado vale  $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ .

A Fig. 6.75 apresenta o deslocamento  $w$  na direção da carga aplicada para o ponto central da estrutura comparativamente com o resultado obtido por Mondkar e Powell (1977). Os resultados obtidos são muito próximos dos da referência, incluindo-se a predição de valores de pico de deslocamento e o instante em que ocorrem. O efeito não-linear dinâmico pode ser observado também na Fig. 6.76, onde é apresentado a estrutura deformada em diferentes instantes da solução.

### Escoamento Supersônico Sobre Placa Plana

Este exemplo estuda a interação do escoamento com uma placa plana engastada em suas extremidades, como mostra a Fig. 6.77. A placa tem comprimento de  $0,5m$ , largura de  $0,2m$  e espessura de  $1,35mm$ . O escoamento é considerado não-viscoso com número de Mach de corrente-livre  $M_\infty = 2,3$ . A velocidade de corrente-livre vale  $u_\infty = 782m/s$ , correspondendo a uma pressão de corrente-livre de valor  $p_\infty = 28kPa$ . A placa está sujeita a pressões iguais em ambos os lados. Instantaneamente, faz-se a pressão do lado inferior da placa cair em  $0,1\%$  e mantém-se nessa condição por  $4\mu s$ , causando deslocamentos na placa e perturbações no escoamento. Após este período, a pressão volta à  $25kPa$ .

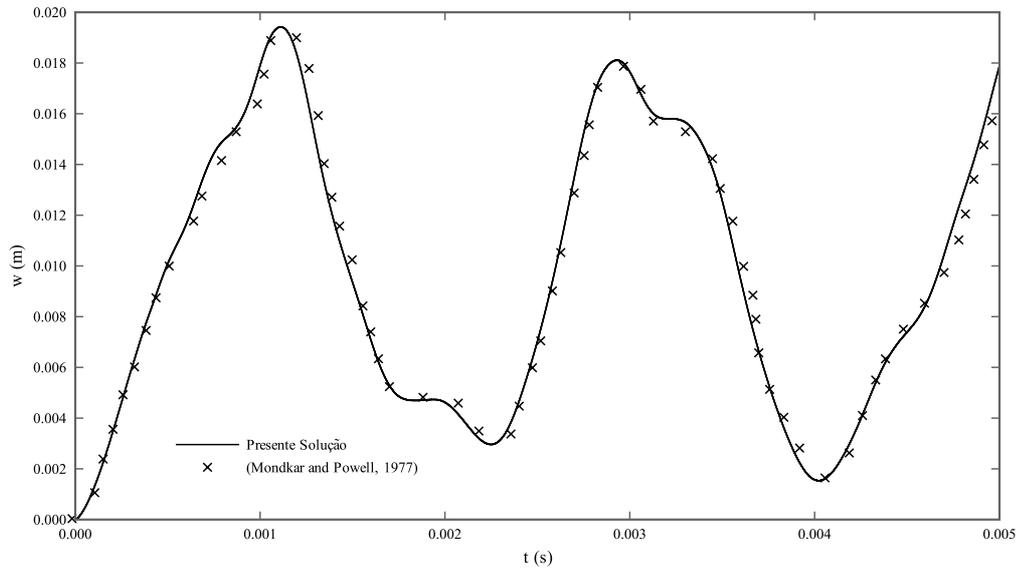


Figura 6.75: Deslocamentos na direção  $w$  no ponto central da estrutura.

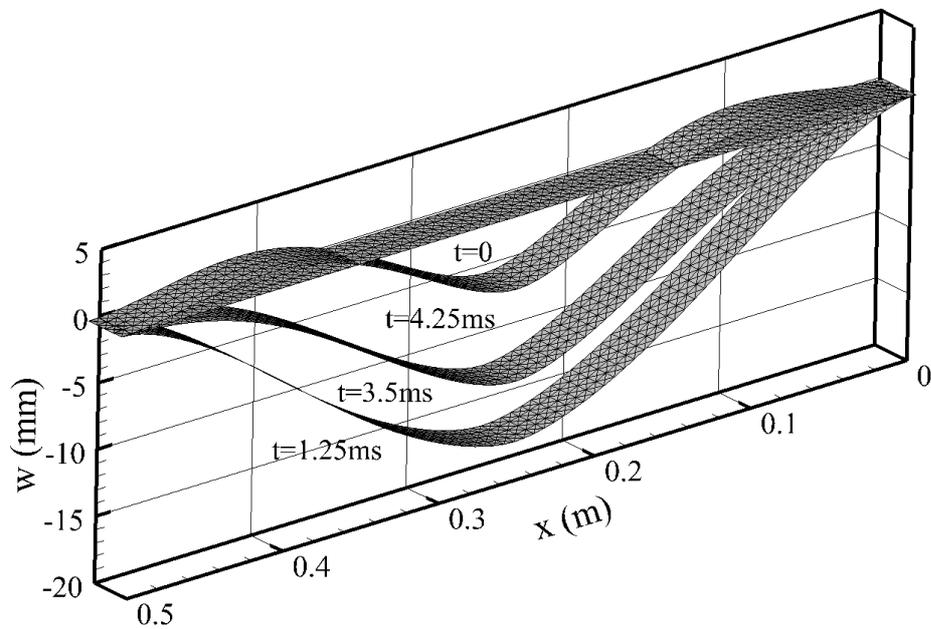


Figura 6.76: Deslocamentos da placa em diferentes instantes de tempo.

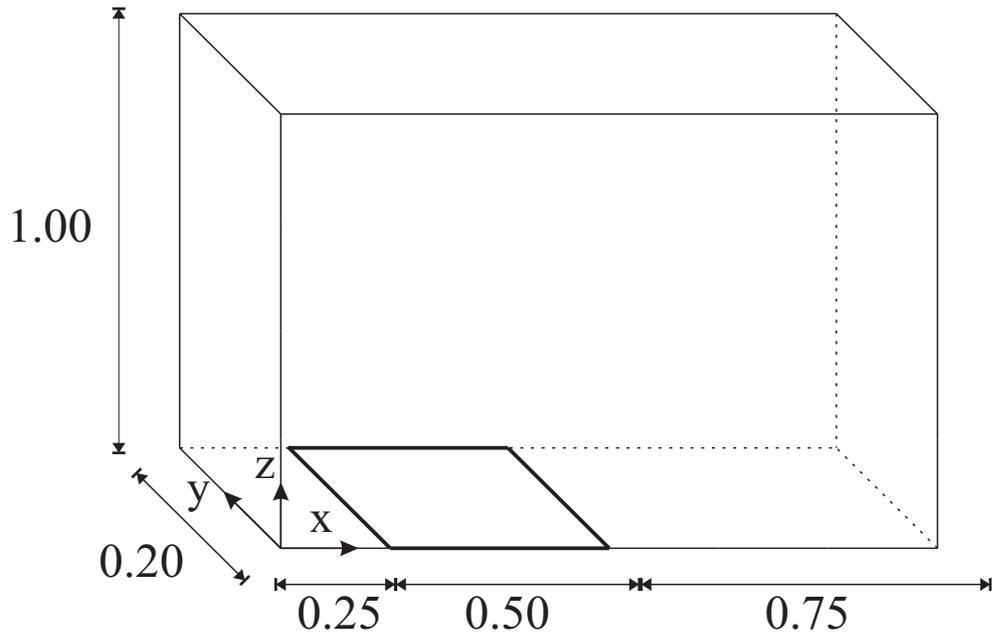


Figura 6.77: Geometria do problema.

As propriedades mecânicas da placa são: módulo de elasticidade  $E = 77,28\text{GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,33$  e massa específica  $\rho = 27101\text{Kg}/\text{m}^3$ . A malha empregada contém 17 641 nós, contendo apenas uma camada de elementos ao longo do eixo  $y$ .

A Fig. 6.78 mostra o campo de número de Mach e a malha no instante  $t = 0,12\text{s}$ . A variação do deslocamento na direção  $z$  da placa na posição  $x = 0,35\text{m}$  ao longo do tempo é apresentada na Fig. 6.79 conjuntamente a valores obtidos por Teixeira (2001). É possível observar que a evolução do deslocamento concorda bem até o tempo  $t = 0,06\text{s}$ , sendo que, após este tempo, as amplitudes se diferenciam levemente.

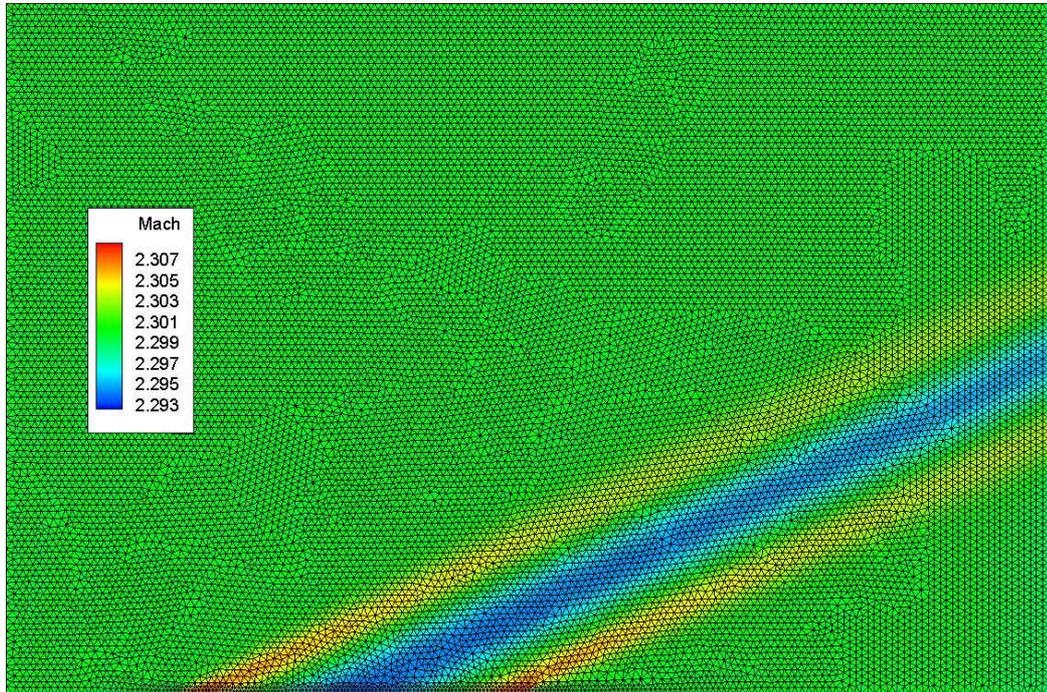


Figura 6.78: Malha e campo de número de Mach para o instante  $t = 0,1s$ .

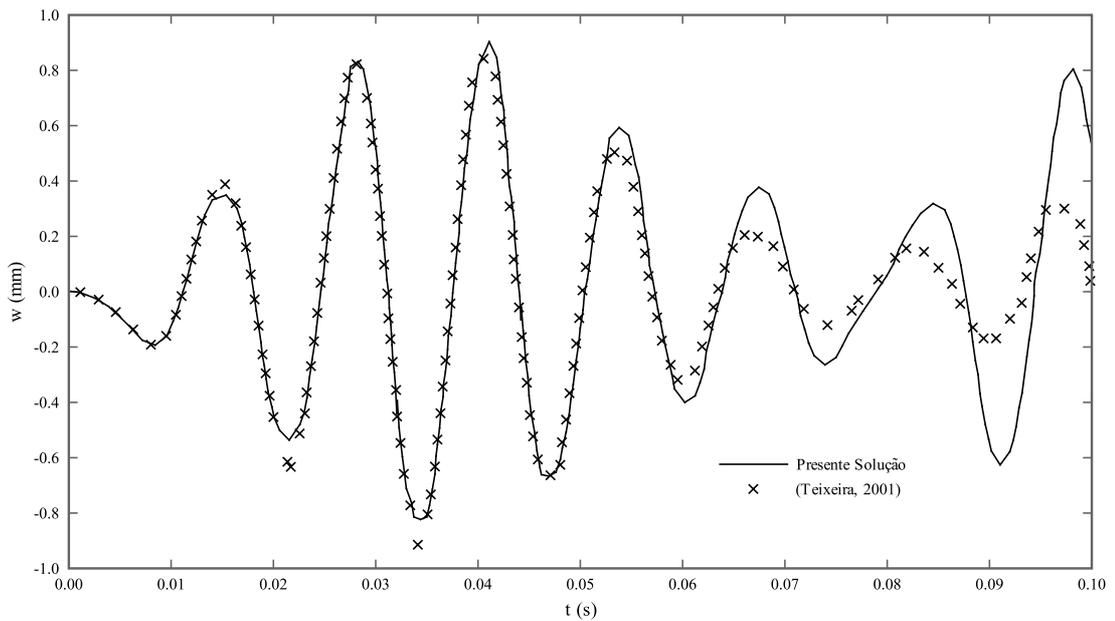


Figura 6.79: Deslocamentos da placa em  $x = 0,35m$  em diferentes instantes de tempo.

---

# Capítulo 7

## Conclusões

Como resultado da metodologia desenvolvida, foram simulados numericamente diversos problemas de aerodinâmica em regime transônico e supersônico. Problemas de escoamentos estacionários, escoamentos turbulentos transientes, escoamentos turbulentos envolvendo geometrias móveis e problemas aeroelásticos envolvendo deformações de sólidos foram investigados. Aplicações em geometrias simples e complexas, tais como aerofólios, cilindros, aviões completos e mísseis foram empregados. Os resultados demonstram o potencial do emprego de técnicas adaptativas conjuntamente com modelos de turbulência para conseguir simular problemas transientes envolvendo geometrias complexas em tempos computacionais razoáveis. Alguns dos resultados já encontram-se publicados em periódicos e anais de congressos ([Linn e Awruch, 2017](#), [2016b,a](#), [2013](#)), enquanto que outros ainda encontram-se em processo de revisão.

Uma metodologia adaptativa para simular escoamentos compressíveis transientes no entorno de corpos que podem apresentar componentes móveis e deformáveis foi desenvolvida e apresentada neste trabalho. O efeito da turbulência no escoamento foi modelado empregando-se uma técnica de simulação de grandes escalas (LES) que faz uso de um modelo compressível dinâmico de Smagorinsky para incorporar o efeitos das menores escalas sobre as escalas resolvidas do escoamento. O algoritmo número CBS foi empregado para a solução das equações governantes do escoamento através do método dos elementos finitos. Uma metodologia de adaptação de malhas transiente capaz de capturar efeitos de turbulência e realizar as operações de modificação de malhas de forma eficiente foi apresentada, gerando bons resultados. A consideração dos contornos móveis

---

foi incorporada ao modelo através de um método híbrido que faz uso de interpolação de funções com base radial. A consideração da deformação da estrutura é realizada através do acoplamento do algoritmo de escoamentos com um modelo de elementos finitos para cascas poliédricas. Diversas aplicações foram investigadas. As principais contribuições são discutidas a seguir.

## 7.1 Adaptação de Malhas

O algoritmo de adaptação desenvolvido é capaz de simular problemas transientes através de repetidas adaptações espaciais ao longo da simulação. Como o algoritmo emprega métrica Riemanniana para estimar o erro, tem-se também a capacidade de controlar não apenas o erro de interpolação da malha, mas também o tamanho mínimo de cada areta diretamente. Esta propriedade se mostra essencial para simular problemas transientes, além de permitir uma abordagem nova de simulação, uma vez que controla-se diretamente a qualidade da resolução da malha e escalas resolvidas, ao contrário da simulação padrão, a qual consiste em usar uma malha estática cujo erro de interpolação é variável no domínio.

Para problemas turbulentos, as flutuações são difíceis de serem capturadas com estimativas tradicionais de erro de interpolação. Entretanto, a avaliação do erro na norma  $L^p$  permite capturar diversas escalas do escoamento simultaneamente. A consideração do erro de interpolação de todas as variáveis de conservação através de interseções multi-métricas complementam a capacidade de controlar o erro das equações de Navier-Stokes.

Há perdas consideráveis de anisotropia para problemas transientes em comparação com os permanentes devido às interseções multi-métricas. Porém, a perda de anisotropia da malha vai de encontro com as tentativas de simulação adaptativa de problemas turbulentos apresentadas na literatura, onde as mesmas observações são obtidas. Basta observar que as regiões mais anisotrópicas, as ondas de choque, possuem flutuações quando considerado o efeito da turbulência. Estas flutuações acabam por reduzir severamente a anisotropia local da malha.

As técnicas de refinamento, desrefinamento, alternância de arestas, faces e suavização nodal desenvolvidas se mostraram estáveis e computacionalmente eficientes. Malhas com

---

milhões de nós e adaptadas milhares de vezes ao longo da simulação são conduzidas sem qualquer erro nestes procedimentos. Uma única falha em alguma operação de modificação da malha falha é suficiente para anular toda a simulação, ressaltando a estabilidade obtida. Além disto, tantas operações só podem ser realizadas repetidas vezes se o algoritmo é computacionalmente eficiente.

## 7.2 Escoamentos Compressíveis Turbulentos

O modelo de Smagorinsky dinâmico compressível para a técnica LES acoplado ao algoritmo CBS se mostrou capaz de simular as simulações investigadas com boa relação entre precisão e custo computacional. Investigações bidimensionais e tridimensionais foram realizadas para problemas turbulentos compressíveis. Apesar do método numérico empregado ser de baixa ordem espacial, os resultados obtidos exibem boa concordância com outras simulações numéricas e observações experimentais, demonstrando a capacidade de capturar diversos efeitos turbulentos compressíveis, tais como interações entre ondas de choque *lambda*, interações viscosas, esteiras de Von Kármán, separação de escoamentos, *shocklets*, choques de ajustamento, choques de expansão, entre outros. As simulações foram conduzidas com baixos recursos computacionais em tempos razoáveis, mas o problema é também automaticamente escalonável para se adequar a mais recursos computacionais através do controle de erro de interpolação e das escalas resolvidas com o uso da técnicas de adaptação de malhas.

## 7.3 Malhas Móveis

A capacidade de considerar a topologia do domínio móvel foi incorporada através de uma técnica híbrida desenvolvida. O uso de funções de base radial se mostrou capaz de produzir deslocamentos contínuos ao longo do domínio da malha através da informação contida em seu contorno. A interpolação entre malhas em instantes distintos ao invés da formulação ALE permite que a malha comporte grandes deslocamentos de translação, rotação e deformação.

O movimento dos contornos da malha pode ser diretamente imposto ou também ser obtido

---

como parte de uma solução estrutural. Neste último caso, tem-se o caso da interação fluido-estrutura, que pode ser contornada diretamente através da interpolação de funções de base radial para transferir a informação da malha do fluido para a da estrutura, e vice-versa. Um modelo de elementos finitos de cascas foi empregado para obtenção da solução estrutural.

## 7.4 Simulações Estacionárias

As simulações estacionárias apresentadas demonstram o potencial da técnica adaptativa para geometrias complexas e efeitos anisotrópicos de grandes dimensões, tal como a propagação de ondas de choque longe do corpo. A técnica permite estudar, por exemplo, além de problemas estacionários clássicos de aerodinâmica, problemas de estrondo sônico no solo provocados por aeronaves em vôo, os quais são inviáveis empregando-se malhas uniformes.

## 7.5 Simulações Transientes Turbulentas

A técnica adaptativa para malhas não-estruturadas conjuntamente com o modelo LES produz uma ferramenta capaz de estudar o escoamento turbulento no entorno de geometrias complexas. Por exemplo, o escoamento no entorno de um avião, um corpo rombudo e um cilindro são apresentados. Mesmo na geometria mais simples, os efeitos complexos, tais como ondas de choque transientes, requerem boa resolução para correta captura dos efeitos. Empregando-se uma malha uniforme tem-se que cobrir todas as sucessivas posições que estas ondas ocupam no espaço ao longo da simulação, resultando em malhas muito densas e computacionalmente dispendiosas. A técnica adaptativa alivia esta restrição, permitindo o emprego de malhas otimizadas.

---

## 7.6 Simulações Transientes Turbulentas com Contornos Móveis

A adaptação de malhas opera em conjunto com o técnica de movimento de malha, extendendo as capacidades de otimização de recursos para os problemas de topologia móvel. Os problemas simulados envolvem componentes móveis, tais como *spoilers*, problemas de balística, bem como de turbo-maquinário em funcionamento. Como o algoritmo pode lidar com geometrias complexas em movimentos arbitrários, tem-se um amplo espectro de simulações que podem ser conduzidas. Por exemplo, pode-se incluir os diversos mecanismos móveis em conjunto com o movimento da asa de um avião. Pode-se simular o escoamento no entorno de um helicóptero considerando-se o movimento do rotor. O efeitos transiente em manobras de combate podem ser simuladas. A consideração da incorporação do efeitos aero-elásticos ampliam ainda mais estas possibilidades. Pode-se simular a deformação induzida nos componentes anteriormente citados, bem como sua interação com o escoamento.

## 7.7 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Algumas sugestões para trabalhos a serem realizados futuramente:

- Tentar incorporar uma estimativa de projeção temporal do erro para reduzir a frequência de adaptações de malha ao longo da simulação. Técnicas adjuntas podem ser empregadas para esta finalidade;
- Incorporar o erro da representação geométrica no processo de adaptação;
- Simular escoamentos hipersônicos não-isentrópicos, incorporando-se a consideração de reações químicas, excitação vibracional das moléculas e desequilíbrio térmico;
- Simular escoamentos multi-fásicos;
- Trabalho em conjunto com túnel de vento.

---

## 7.8 Epílogo

As técnicas de adaptação e de modelagem LES, embora distintas, compartilham uma característica em comum: ambas tentam reduzir os custos computacionais de uma simulação no intuito de produzir o resultado correto. A adaptação de malhas otimiza o emprego do método numérico ao passo que o modelo LES alivia os efeitos da física do problema. É notório que resultados obtidos tanto com o emprego de adaptação quanto com LES são alcançados uma ou até mesmo duas décadas antes dos recursos computacionais para tal simulação estarem plenamente disponíveis. Pode-se questionar se não haverá um ponto no qual os recursos computacionais disponíveis não serão suficientes para suprimir o emprego de tais técnicas. A resposta é que para alguns tipos de investigações isto torna-se verdade. Porém, quando os recursos computacionais estiverem disponíveis para simular o escoamento no entorno de um avião empregando-se DNS, provavelmente estaremos interessados em incorporar o escoamento de grande parte do espaço aéreo conjuntamente. Da mesma forma, quando (e se) isto também for possível, pode-se sempre incorporar progressivamente uma escala ainda maior de espaço infinitamente, onde, novamente, as técnicas adaptativas terão um papel. Da mesma, forma pode-se incorporar escalas infinitamente menores na simulação. Assim, as técnicas adaptativas e de modelagem deverão estar presentes em gerações futuras, assim como estiveram presentes em gerações anteriores e presentes.

---

# Referências Bibliográficas

- Aftosmis, M., Berger, M., e Murman, S. (2004). Applications of space-filling curves to cartesian methods for cfd. Em *Proceedings of the 42th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA-2004-1232.
- AGARD (1982). Compendium of unsteady aerodynamic measurements. Report no. 702, North Atlantic Treaty Organization Advisory Group for Aerospace Research and Development.
- Agui, J. H., Briassulis, G., e Andreopoulos, Y. (2005). Studies of interactions of a propagating shock wave with decaying grid turbulence: velocity and vorticity fields. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 524, No. 1, pp. 143–195.
- Alauzet, F. (2014). A changing-topology moving mesh technique for large displacements. *Engineering with Computers*, Vol. 30, No. 2, pp. 175–200.
- Alauzet, F., George, P. L., Mohammadi, B., Frey, P., e Borouchaki, H. (2003). Transient fixed point-based unstructured mesh adaptation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 43pp. 729–745.
- Alauzet, F. e Loseille, A. (2016). A decade of progress on anisotropic mesh adaptation for computational fluid dynamics. *Computer-Aided Design*, Vol. 72, No. 1, pp. 13–39.
- Alauzet, F. e Mehrenberger, M. (2010). P1-conservative solution interpolation on unstructured triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 84, No. 13, pp. 1552–1588.
- Alkisar, M. B., Lourenco, L. M., e Krothapalli, A. (2000). Stereoscopic piv measurements of a screeching supersonic jet. *Journal of Visualization*, Vol. 3, No. 2, pp. 135–143.
- Almeida, F. S. (2012). *Desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise de interação fluido-estrutura incluindo não-linearidade geométrica*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Andreis, G. S. L. (2011). *Solução via LES de chamas difusivas de metano, metanol e etanol*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Andreopoulos, Y., Agui, J. H., e Briassulis, G. (2000). Shock wave-turbulence interactions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 32, No. 1, pp. 309–345.
-

- Astorino, M., Chouly, F., e Fernández, M. (2009). Robin-based semi-implicit coupling in fluid-structure interaction: stability analysis and numerics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 31, No. 6, pp. 4041–4060.
- Aymone, J. L. F. (1996). Implementação de estratégia de refinamento tipo h, sem formação de nós irregulares, no sistema gaeli. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Aymone, J. L. F. (2000). *Remanejo de malhas em problemas tridimensionais de grandes deformações*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Bailey, A. B. e Hiatt, J. (1971). Free-flight measurements of sphere drag at subsonic, transonic, supersonic, and hypersonic speeds for continuum, transition, and near-free-molecular flow conditions. Rep. aedc-tr-70-291, Arnold Engng. Development Ctr., Arnold Air Force Station, TN, Rep., Massachusetts.
- Baker, T. e Cavallo, P. (1999). Dynamic adaptation for deforming tetrahedral meshes. *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 1, pp. 2699–3553.
- Balck, R. L. (1969). High-speed store separation - correlation between wind-tunnel and flight-test data. *Journal of Aircraft*, Vol. 6, No. 1, pp. 42–45.
- Barakos, G. e Drikakis, D. (2000). Numerical simulation of transonic buffet flows using various turbulent closures. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 21, No. 5, pp. 620–626.
- Barlas, T. K. e Kuik, G. A. M. V. (2010). Review of state of the art in smart rotor control research for wind turbines. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 46, No. 1, pp. 1–27.
- Bathe, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, 1st edition.
- Bathe, K. J. e Ho, L. W. (1981). A simple and effective element for analysis of general shell structures. *Computers & Structures*, Vol. 13, No. 1, pp. 673–681.
- Batina, J. (1990). Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 8, pp. 1381–1388.
- Baum, J., Luo, H., e Löhner, R. (1994). A new ale adaptive unstructured methodology for the simulation of moving bodies. Em *Proceedings of the 32th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Baum, J., Luo, H., Löhner, R., Goldberg, E., e Feldhun, A. (1997). Application of unstructured adaptative moving body methodology to the simulation of fuel tank separation from a f16 c-d. Em *Proceedings of the 35th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Baum, J., Luo, H., Löhner, R., Yang, C., Pelessone, D., e Charman, C. (1996). A coupled fluid-structure modeling of shock interaction with a truch. Em *Proceedings of the 34th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Beckert, A. e Wend, H. (2001). Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 5, No. 2, pp. 125–134.

- Beckert, A. e Wendland, H. (2001). Multivariate interpolation for fluid-structure-interactions problemas using radial basis functions. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 5, No. 2, pp. 125–134.
- Benard, P., Balarac, G., Moureau, V., Dobrzynski, C., Lartigue, G., e D'Angelo, Y. (2015). Mesh adaptation for large-eddy simulation in complex geometries. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 81, No. 12, pp. 719—740.
- Benek, J., Buning, P., e Steger, J. (1985). A 3d chimera grid embedding technique. Em *Proceedings of the 7th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA-1523.
- Bey, J. (1995). Tetrahedral grid refinement. *Journal of Computing*, Vol. 55, No. 4, pp. 355–378.
- Bogaers, A. E. J., Kok, S., e Malan, A. G. (2011). Highly efficient optimization mesh movement method based on proper orthogonal decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 86, No. 8, pp. 935–952.
- Bono, G. (2004). Adaptação via movimento de malhas em escoamentos compressíveis. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Bono, G. (2008). *Simulação Numérica de Escoamentos em Diferentes Regimes Utilizando o Método dos Elementos Finitos*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Borouchaki, H., George, P. L., Hecht, F., Laug, P., e Saltel, E. (1997). Delaunay mesh generation governed by metric specifications—part i: Algorithms. *Finite Element Analysis and Design*, Vol. 25, No. 1–2, pp. 61–83.
- Bottasso, C. (2004a). Anisotropic mesh adaptation by metric-driven optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 60, No. 3, pp. 597–639.
- Bottasso, C., Detomi, D., e Serra, R. (2005). The ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 4, pp. 4244–4264.
- Bottasso, C. L. (2004b). Anisotropic mesh adaptation by metric-driven optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 60, No. 3, pp. 597–639.
- Bouhadji, A. e Braza, M. (2003). Organized modes and shock-vortex interaction in unsteady viscous transonic flows around and airfoil part i: Mach number effect. *Computers & Fluids*, Vol. 32, No. 9, pp. 1233–1260.
- Boussinesq, M. J. (1877). *Essai sur la Théorie des eaux ourantes*. In: *Mémoires Présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences*. Imprimerie Nationale, Paris, France, tome xxiii, p. 43–47 edition.
- Braun, A. L. (2002). Um modelo para a simulação numérica da ação do vento sobre seções de ponte. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

- Braun, A. L. (2007). *Simulação numérica na engenharia do vento incluindo efeitos de interação fluido-estrutura*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Brezzi, F., Lions, J., e Pironneau, O. (2001). Analysis of a chimera method. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, Vol. 332, No. 7, pp. 655–660.
- Briggs, L. J. (1959). Effect of spin and speed on the lateral deflection (curve) of a baseball; and the magnus effect for smooth spheres. *American Journal of Physics*, Vol. 27, No. 8, pp. 589–596.
- British, A. R. C. (1931). Technical report of the accidents investigation subcommittee on the accident to the aeroplane g.aazk at meopham, kent on 21st july, 1930. R & m no. 1360, British Aeronautical Research Committee.
- Brunet, V. e Deck, S. (2008). Zonal-detached eddy simulation of transonic buffet on a civil aircraft type configuration. Em *Proceedings of the 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, AIAA-4152.
- Buarque, D. C. (2007). *Simulação numérica direta de um escoamento turbulento em um canal com fundo ondulado*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Buhmann, M. D. (2000). Radial basis functions. *Acta Numerica*, Vol. 9, No. 1, pp. 1–38.
- Burbridge, H. P. (1999). O esquema explícito de taylor-galerkin na simulação numérica de escoamentos compressíveis tridimensionais utilizando elementos finitos hexaédricos de oito nós. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Buscaglia, G. e Dari, E. (1997). Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 22, pp. 4119–4136.
- Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1st edition.
- Carr, J. C., Beatson, R. K., McCallum, B. C., Fright, W. R., McLennan, T. J., e Mitchell, T. J. (2003). Smooth surface reconstruction from noisy range data. Em *Proceedings of the First International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Springer-Verlag.
- Castro-Díaz, M. J., Hecht, F., Mohammadi, B., e Pironneau, O. (1997). Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 25, No. 4, pp. 475–49.
- Chapman, B., Jost, G., e van van der Pas, R. (2007). *Using OpenMP: Portable Shared Memory Parallel Programming*. MIT Press, 1st edition.
- Chapman, S. (2007). *Fortran 95/2003 for Scientists & Engineers*. McGraw-Hill, 3rd edition.

- Chitale, K. C. (2013). *Anisotropic Mesh Adaptivity for Turbulent Flows With Boundary Layers*. PhD thesis, University of Colorado, Department of Aerospace Engineering Sciences, USA.
- Chong, M. S., Perry, A. E., e Cantwell, B. J. (1990). A general classification of three-dimensional flow field. *Physics of Fluids A*, Vol. 2, No. 1, pp. 765–777.
- Chu, B. T. e Kovásznyai, L. S. G. (1958). Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 3, No. 5, pp. 494–514.
- Cinnella, P. e Lerat, A. (2001). A study of turbulent compressible flows over oscillating airfoils using a high-order numerical scheme. *Computational Fluid Dynamics Journal*, Vol. 9, No. 1, pp. 90–104.
- Claisse, A., Ducrot, V., e Frey, P. (2009). Levelsets and anisotropic mesh adaptation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Vol. 23, No. 1–2, pp. 165–183.
- Clough, R. W. e Penzien, J. (1975). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, 1st edition.
- Coe, C. F. e Mellenthin, J. A. (1954). Buffet forces on two-dimensional airfoils as affected by thickness and thickness distribution. Naca rm a53k24, National Advisory Committee for Aeronautics.
- Costin, W. e Allen, C. B. (2011). Radial basis function interpolation for data transfer across a mesh interface. Em *Proceedings of the 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, pgs. 1–17.
- Crouch, J. D., Garbaruk, A., Magidov, D., e Travin, A. (2009). Origin of transonic buffet on aerofoils. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 628, No. 1, pp. 357–369.
- Crumpton, P. I. e Giles, M. B. (1997). Implicit time-accurate solutions on unstructured dynamic grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 25, pp. 1285–1300.
- de Boer, A., van der Schoot, M. S., e Bijl, H. (2007). Mesh deformation based on radial basis function interpolation. *Computers and Structures*, Vol. 85, No. 11-14, pp. 784–795.
- de Boer, A., Zuijlen, A. H., e Bijl, H. (2008). Comparison of conservative and consistent approaches for the coupling of non-matching meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, No. 1, pp. 4284–4297.
- de Cougny, H. L. e Shephard, M. S. (1999). Parallel refinement and coarsening of tetrahedral meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 6, pp. 1101–1125.
- Deardorff, J. W. (1970). A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large reynolds numbers. *Journal of Fluids Mechanics*, Vol. 41, No. 2, pp. 453–480.
- Deng, S., Xiao, T., van Oudheusden, B., e Bijl, H. (2016). A dynamic mesh strategy applied to the simulation of flapping wings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 106, No. 8, pp. 664–680.

- DeSpirito, D. e Heavey, K. R. (2006). Cfd computation of magnus moment and roll damping moment of a spinning projectile. Arl-rp-131, U.S. Army Ballistic Research Laboratory.
- Dindar, M., Shephard, M., Flaherty, J., e Jansen, K. (2000). Adaptive cfd analysis for rotorcraft aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 189, No. 4, pp. 1055–1076.
- Dolejsí, V. e Felcman, J. (2004). Anisotropic mesh adaptation for numerical solution of boundary value problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 20, No. 4, pp. 576–608.
- Dompierre, J., Vallet, M., Fortin, M., Bourgault, Y., e Habashi, W. (1997). Anisotropic mesh adaptation: towards a solver and user independent cfd. Em *Proceedings of the 35th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, AIAA-1997-0861.
- Don, W. S. e Gottlieb, D. (1990). Spectral simulations of an unsteady compressible flow past a circular cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 80, No. 1–3, pp. 39–58.
- Doraiswamy, S. e Candler, G. V. (2008). Detached eddy simulations and reynolds-averaged navier-stokes calculations of a spinning projectile. *AIAA Journal of Spacecrafts and Rockets*, Vol. 45, No. 5, pp. 935–945.
- Dubois, T., Domaradzki, J. A., e Honein, A. (2002). The subgrid scale estimation model applied to large eddy simulations of compressible turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 14, No. 5, pp. 1781–1801.
- Eidson, T. M. (1985). Numerical simulation of the turbulent rayleigh-bénard problem using subgrid modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 158, No. 1, pp. 245–268.
- Farhat, C., Degrand, C., Koobus, B., e Lesoinne, M. (1998). Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 163, No. 1–4, pp. 231–245.
- Favre, A. (1971). Equations statistiques aux fluctuations turbulentes dans les Écoulements compressibles: cas des vitesses et des températures. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 273, No. 1, pp. 1289–1294.
- Favre, F., Antepará, O., Lehmkuhl, O., Borrell, R., e Oliva, A. (2014). On the fast transient spoiler deployment in a naca0012 profile using les techniques combined with amr and imb methods. Em *Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics*, WCCM XI.
- Felippa, C. A. e Farhat, C. (2001). Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No. 1, pp. 3347–3270.
- Formaggia, L., Quarteroni, A., e Veneziani, A. (2009). *Cardiovascular Mathematics: Modeling and Simulation of the Circulatory System, Vol 1*. Springer, New York, modelling, simulations and applications edition.

- Freitag, L. A. e Ollivier-Gooch, C. (1997). Tetrahedral mesh improvement using swapping and smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 21, pp. 3979–4002.
- Frey, P. e George, P. (2008). *Mesh Generation. Application to Finite Elements*. ISTE Ltd e John Wiley & Sons, 2nd edition.
- Frey, P. J. (2004). Generation and adaptation of computational surface meshes from discrete anatomical data. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 60, No. 6, pp. 1049–1074.
- Frey, P. J. e Alauzet, F. (2005). Anisotropic mesh adaptation for cfd computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 48–49, pp. 5068–5082.
- Gageik, M., Klioutchnikov, I., e Oliviera, H. (2015). Comprehensive mesh study for a direct numerical simulation of the transonic flow at  $rec = 500,000$  around a naca 0012 airfoil. *Computers & Fluids*, Vol. 122, No. 20, pp. 153–164.
- Galante, G. (2006). Métodos multigrid paralelos em malhas não estruturadas aplicados à simulação de problemas de dinâmica de fluidos computacional e transferência de calor. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Garnier, E., Adams, N., e Sagaut, P. (2009). *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Springer, 1st edition.
- Garnier, E., Sagaut, P., e Deville, M. (2002). Large-eddy simulation of the shock/boundary layer interaction. *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 10, pp. 1935–1944.
- George, P., Hecht, F., e Vallet, M. (1991). Creation of internal points in voronoi's type method. control and adaptation. *Advances in Engineering Softwares*, Vol. 13, No. 5–6, pp. 303–312.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., e Cabot, W. H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy-viscosity model. *Physics of Fluids A*, Vol. 3, No. 7, pp. 1760–1765.
- Ghoreyshi, M. e Cummings, R. M. (2014). Unsteady aerodynamics modeling for aircraft maneuvers: A new approach using time-dependent surrogate modeling. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 39, No. 1, pp. 222–242.
- Gruau, C. (2004). *Génération de Métriques Pour Adaptation Anisotrope de Maillages, Applications à la Mise en Forme des Matériaux*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Gumorov, N. e Duraiswami, R. (2007). Fast radial basis function interpolation via preconditioned krylov iteration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 29, No. 5, pp. 1876–1899.
- Habashi, W. G., Dompierre, J., Bourgault, Y., Ait-Ali-Yahia, D., Fortin, M., e Vallet, M. G. (2000). Anisotropic mesh adaptation: Towards user-independent, mesh-independent and solver independent cfd. part i: General principles. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 32, No. 6, pp. 725–744.

- Hafez, M. e Wahba, E. (2004). Inviscid flows over a cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 21–22, pp. 1981–1995.
- Hager, G. e Wellein, G. (2011). *Introduction to High Performance Computing for Scientists and Engineers*. Chapman & Hall, 1st edition.
- Haller, G. (2005). An objective definition of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 525, No. 1, pp. 1–26.
- Hassan, O., Morgan, K., e Weatherill, N. (2016). Unstructured mesh methods for the solution of the unsteady compressible flow equations with moving boundary components. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 365, No. 1, pp. 2531–2552.
- Hassan, O., Sorensen, K., Morgan, K., e Weatherill, N. P. (2007). A method for time accurate turbulent compressible fluid flow simulation with moving boundary components employing local remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 53, No. 8, pp. 1243–1266.
- Hecht, H. e Mohammadi, B. (1997). Mesh adaptation by metric control for multi-scale phenomena and turbulence. Em *Proceedings of the 35th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, AIAA-1997-0859.
- Hertel, C. e Frölich, J. (2011). Error reduction in les via adaptive moving grids. Em *In: Salvetti M., Geurts B., Meyers J., Sagaut P. (eds) Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations II*, ERCOFTAC series, pgs. 309–318.
- Hestenes, M. R. e Stiefel, E. (1952). Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 49, No. 6, pp. 409–436.
- Hetmaniuk, U. e Knupp, P. (2011). A mesh optimization algorithm to decrease the maximum interpolation error of linear triangular finite elements. *Engineering With Computers*, Vol. 27, No. 1, pp. 3–15.
- Hirsch, C. (1988). *Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 1, Fundamentals of Numerical Discretization*. Wiley, 1st edition.
- Hoffman, J. (2005). Computation of mean drag for bluff body problems using adaptive dns/les. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 27, No. 1, pp. 184–207.
- Hoffman, J., Jansson, J., e de Abreu, R. V. (2011). Adaptive modeling of turbulent flow with residual based turbulent kinetic energy dissipation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, No. 37–40, pp. 2758–2767.
- Houtman, E. M., Bannink, M. J., e Timmerman, B. H. (1995). Experimental and computational study of a blunt cylinder-flare model in high supersonic flow. Report lr-796, Delft University of Technology, Faculty of Aerospace Engineering.
- Hunt, J. C. R., Wray, A. A., e Moin, P. (1988). Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. Report ctr-s88, Center for Turbulence Research.

- Jacquín, L., Cambon, C., e Blin, E. (1993). Turbulence amplification by a shock wave and rapid distortion theory. *Physics of Fluids A*, Vol. 5, No. 1, pp. 2539–2550.
- JaJa, J. (1992). *An Introduction to Parallel Algorithms*. Addison-Wesley: Reading MA, 1st edition.
- Jameson, A. e Ou, K. (2011). 50 years of transonic aircraft design. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 47, No. 5, pp. 308–318.
- Jamme, S., Cazalbou, J., Torres, F., e Chassaing, P. (2002). Direct numerical simulation of the interaction between a shock wave and various types of isotropic turbulence. *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 68, No. 3, pp. 227–268.
- Jeong, J. e Hussain, F. (1995). On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 285, No. 1, pp. 69–94.
- Justo, D. A. R. (2001). *Geração de malhas, condições de contorno e discretização de operadores para dinâmica de fluidos computacional*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Kessler, M. P. (1995). Simulação numérica de processos de conformação mecânica através da formulação da mecânica dos fluidos com função de penalidade utilizando o método dos elementos finitos. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Klein, R. I. (1999). Star formation with 3-d adaptive mesh refinement: The collapse and fragmentation of molecular clouds. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 109, No. 1–2, pp. 123–152.
- Kokes, J., Costello, M., e Sahu, J. (2006). Generating an aerodynamic model for projectile flight simulation using unsteady, time accurate computational fluid dynamic results. Arl-cr-577, Army Research Laboratory.
- Kosovic, B., Pullin, D. I., e Samtaney, R. (2002). Subgrid-scale modeling for large eddy simulation of compressible turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 14, No. 4, pp. 1511–1522.
- Kousen, K. e Bendiksen, O. (1988). Nonlinear aspects of the transonic aeroelastic stability problem. Em *Proceedings of the 29th AIAA Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Kovácsnay, L. S. G. (1953). Turbulence in supersonic flow. *Journal of Aerospace Sciences*, Vol. 20, No. 10, pp. 657–674.
- Küttler, U. e Wolfgang, A. W. (2008). Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 1, pp. 61–72.
- Labbé, O., Sagaut, P., e Montreuil, E. (2002). Large-eddy simulation of heat transfer over a backward-facing step. *International Journal for Numerical Methods in Heat Transfer A*, Vol. 42, No. 1–2, pp. 73–90.
- Larchevêque, L., Sagaut, P., Lê, T. H., e Comte, P. (2004). Large-eddy simulation of a compressible flow in a three-dimensional open cavity at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 516, No. 1, pp. 265–301.

- Leal, R. G. e Miserda, R. F. B. (2005). Dettached eddy simulation of the transonic flow over a circular cylinder. Em *Proceedings of the 18th International Congress of Mechanical Engineering*, COBEM, ABCM.
- Lee, B. H. K. (1990). Transonic buffet on a supercritical aerofoil. *The Aeronautical Journal*, Vol. 94, No. 935, pp. 143–152.
- Lee, B. H. K. (2001). Self-sustained shock oscillations on airfoils at transonic speeds. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 37, No. 2, pp. 147–196.
- Lee, S., Lele, S. K., e Moin, P. (1997). Interaction of isotropic turbulence with shock waves: Effect of shock strength. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 340, No. 1, pp. 225–247.
- Lele, S. K. (1994). Compressibility effects on turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 26, No. 1, pp. 211–254.
- Lesieur, M. e Métais, O. (1996). New trends in large eddy simulations of turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 28pp. 45–82.
- Lesoinne, M. e Farhat, C. (1993). Stability analysis of dynamic meshes for transient aeroelastic computations. Em *Proceedings of the 11th Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA-33-3325, pgs. 309–329.
- Löhner, R. (1988). Some useful data structures for the generation of unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Vol. 4, No. 1, pp. 123–135.
- Löhner, R. (1989). Adaptive remeshing for transient problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 75, No. 1–3, pp. 195–214.
- Löhner, R. (1990). Three-dimensional fluid-structure interaction using a finite element solver and adaptive remeshing. *Computing Systems in Engineering*, Vol. 1, No. 2–4, pp. 257–272.
- Löhner, R. (1998). Renumbering strategies for unstructured-grid solvers operating on shared-memory, cache-based parallel machines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 163, No. 1–4, pp. 95–109.
- Löhner, R. (2008). *Applied CFD Techniques. An Introduction Based on Finite Element Methods*. Wiley, 2th edition.
- Löhner, R. e Baum, J. D. (1990). Numerical simulation of shock interactions with complex geometry three-dimensional structures using a new adaptive h-refinement scheme on unstructured grids. Em *Proceedings of the 28th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, AIAA-90-0700.
- Löhner, R. e Baum, J. D. (1992). Adaptive h-refinement on 3d unstructured grids for transient problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 14, No. 12, pp. 1407–1419.
- Löhner, R. e Parikh, P. (1988). Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, No. 10, pp. 1097–0363.

- Löhner, R. e Yang, C. (1996). Improved ale mesh velocities for moving bodies. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 10, pp. 599–608.
- Li, J., Tsubokura, M., Tsunoda, M., e Ikeda, J. (2015). Large-eddy simulation for golf ball aerodynamics: The effect of surface roughness on the drag crisis and the magnus effect. Em *Proceedings of the 9th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, TSFP-9, pgs. 1–5.
- Lijewski, L. E. e Suhs, N. (1992). Chimera-eagle store separation. Em *Proceedings of the Astrodynamics Conference, Guidance, Navigation, and Control*, AIAA-4569.
- Lily, D. K. (1992). A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A*, Vol. 4, No. 3, pp. 633–635.
- Linn, R. V. (2013). Simulação computacional de escoamentos compressíveis utilizando adaptação de malhas anisotrópica. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Linn, R. V. e Awruch, A. M. (2013). Unstructured anisotropic mesh adaptation for compressible flows using refinement and coarsening strategies. *Mecánica Computacional*, Vol. 32, No. 15, pp. 1213–1237.
- Linn, R. V. e Awruch, A. M. (2016a). Large eddy simulation of turbulent compressible flows using the characteristic based split scheme and mesh adaptation. Em *Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, ECCOMAS.
- Linn, R. V. e Awruch, A. M. (2016b). Simulation of high-speed transonic and supersonic flows with anisotropic mesh refinement and coarsening strategies. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, Vol. 43, No. 6, pp. 489–502.
- Linn, R. V. e Awruch, A. M. (2017). Edge-based anisotropic mesh adaptation of unstructured meshes with applications to compressible flows. *Engineering with Computers*, Vol. XX, No. X, pp. XXX–XXX.
- Liu, A. e Joe, B. (1996). Quality local refinements of tetrahedral meshed based on 8-subtetrahedron subdivision. *Mathematics and Computers*, Vol. 65, No. 215, pp. 1183–1200.
- Lombardi, M., Parolini, N., e Quarteroni, A. (2013). Radial basis functions for inter-grid interpolation and mesh motion in fsi problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 49, No. 1, pp. 117–131.
- Loseille, A. (2008). *Adaptation de Maillage Anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides: Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- Loseille, A. e Alauzet, F. (2009). Optimal 3d highly anisotropic mesh adaptation based on the continuous mesh framework. Em *Proceedings of 18th International Meshing Roundtable*, Springer-Verlag, pgs. 575–594.

- Loseille, A. e Alauzet, F. (2011). Continuous mesh framework - part i: Well-posed continuous interpolation error. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 49, No. 1, pp. 38–60.
- Loseille, A. e Frey, P. J. (2003). Estimateur d’erreur géométrique et métrique anisotropes pour l’adaptation de maillage. partie i : Aspects théoriques. Rr-4759, INRIA.
- Loseille, A. e Löhner, R. (2009). On 3d anisotropic local remeshing for surface, volume, and boundary layers. Em *Proceedings of 18th International Meshing Roundtable*, Springer-Verlag, pgs. 611–630.
- Lovely, D. e Haines, R. (1999). Shock detection from computational fluid dynamics results. Em *Proceedings of the 14th Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA-99-3285, pgs. 296–311.
- Luke, E., Collins, E., e Blades, E. (2012). A fast mesh deformation method using explicit interpolation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, No. 2, pp. 586–601.
- Lynch, D. e O’Neill, K. (1980). *Elastic Grid Deformation for Moving Boundary Problems in Two Space Dimensions*. In: Wang S. Editor, finite element in water resources edition.
- Madalozzo, D. M. S. (2012). Simulação numérica da dispersão de poluentes em zonas urbanas considerando efeitos térmicos. Master’s thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Mahesh, K., Lele, S. K., e Moin, P. (1997). The influence of entropy fluctuations on the interaction of turbulence with a shock wave. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 334, No. 1, pp. 353–379.
- Malvern, L. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, 1st edition.
- Manshadi, M. D., Mostofizade, A. R., e Vaziri, M. A. J. (1969). Experimental set-up for 2d cargo release test in subsonic wind tunnel. *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 42, No. 5, pp. 2157–2166.
- Maronga, B., Gryschka, M., Heinze, R., Hoffmann, F., Kanani-Sühring, F., Keck, M., Ketelsen, K., Letzel, M. O., Sühring, M., e Raasch, S. (2015). The parallelized large-eddy simulation model (palm) version 4.0 for atmospheric and oceanic flows: model formulation, recent developments, and future perspectives. *Geoscientific Model Development*, Vol. 8, No. 8, pp. 2515–2551.
- Martín, M. P., Piomelli, U., e Candler, G. V. (2000). Sub-grid scale models for compressible large eddy simulations. *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, Vol. 13, No. 5, pp. 361–376.
- Mary, I. (2003). Large eddy simulation of vortex breakdown behind a delta wing. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 24, No. 4, pp. 596–605.
- Masuro, J. R. (2009). *Computação Paralela na Análise de Problemas de Engenharia Utilizando o Método dos Elementos Finitos*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

- Maubach, J. M. (1995). Local bisection refinement for n-simplicial grids generated by reflection. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 16, No. 1, pp. 210–227.
- Mavriplis, D. (1990). Adaptive mesh generation for viscous flows using delaunay triangulation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 90, No. 2, pp. 271–291.
- Mavriplis, D. J. (2000). Adaptive meshing techniques for viscous flow calculations on mixed element unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 34, No. 2, pp. 93–111.
- Meakin, R. L. (1992). Unsteady simulation of the viscous flow about a v-22 rotor and wing in hover. Em *Proceedings of the 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA-3463-CP.
- Medic, G., Kalitzin, G., You, D., Herrmann, M., Ham, F., van der Weide, Pitsch, H., e Alonso, J. (2007). Integrated rans/les computations of turbulent flow through a turbofan jet engine. Em *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea, and Air. Volume 6: Turbo Expo 2007, Parts A and B*, International Gas Turbine Institute.
- Miller, D. G. e Bailey, A. B. (1979). Sphere drag at mach numbers from 0.3 to 20 at reynolds numbers approaching  $10^7$ . *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 93, No. 3, pp. 449–464.
- Miserda, R. F. B., Jalowitzki, J. R., Queiroz, R. L., e Mendonça, A. F. (2004). Numerical simulation of the laminar trasonic buffet in airfoils. Em *Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering – ENCIT 2004*, No. 10, pgs. 1–11.
- Miserda, R. F. B. e Leal, R. G. (2009). Numerical simulation of the unsteady aerodynamic forces over a circular cylinder in transonic flow. Em *Proceedings of the 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA.
- Moin, P. e Mahesh, K. (1998). Direct numerical simulation: A tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 30pp. 539–578.
- Moin, P., Squires, K., Cabot, W., e Lee, S. (1991). A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Physics of Fluids A*, Vol. 3, No. 11, pp. 2746–2757.
- Mondkar, D. P. e Powell, G. H. (1977). Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 499–520.
- Muir, E. R. e Friedmann, P. P. (2013). Unsteady aerodynamic analysis of a bird-damaged turbofan. Em *Proceedings of the 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, AIAA 1773.
- Murthy, W. S. e Rose, C. (1977). From drag, skin friction and vortex shedding frequencies for subsonic and transonic cross flows on circular cylinder. Em *Proceedings of the 10th AIAA Fluid and Plasmodynamics Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, pgs. 677–687.
- Nakahashi, K., Togashi, F., e Sharov, D. (2000). Intergrid-boundary definition method for overset unstructured grid approach. *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 11, pp. 2077–2084.

- Nazarov, M. e Hoffman, J. (2012). An adaptative finite element method for inviscid compressible flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 64, No. 10, pp. 1102–1128.
- Nazarov, M. e Hoffman, J. (2013). Residual-based artificial viscosity for simulation of turbulent compressible flow using adaptative finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 71pp. 339–357.
- Nietubicz, C. J., Sturek, W. B., e Heavey, K. R. (1983). Computations of projectile magnus effect at transonic velocities. Brl-tr-02515, aberdeen proving ground, md, U.S. Army Ballistic Research Laboratory.
- Nithiarasu, P., Codina, R., e Zienkiewicz, O. C. (2006). The characteristic-based split (cbs) scheme - a unified approach to fluid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, No. 10, pp. 1514–1546.
- Nithiarasu, P., Zienkiewicz, O. C., Satya-Sai, B. V. K., Morgan, K., e Vázquez, M. (1998). Shock capturing viscosities for the general fluid mechanics algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 28, No. 9, pp. 1325–1353.
- Ollivier-Gooch, C. (2003). Coarsening unstructured meshes by edge contraction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, No. 3, pp. 391–414.
- Padilla, E. L. M. e Silveira-Neto, A. (2003). Influência de diferentes tipos de filtros para modelagem dinâmica em simulação de grandes escalas. Em *Proceedings of XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, CILAMCE 2003, pgs. 1–10.
- Page, G. J. e McGuirk, J. J. (2009). Large eddy simulation of a complete harrier aircraft in ground effect. *The Aeronautical Journal*, Vol. 113, No. 1140, pp. 99–106.
- Pain, C. C., Umpleby, A. P., Oliveira, C. R. E., e Goddard, A. J. H. (2001). Tetrahedral mesh optimization and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No. 29, pp. 3371–3796.
- Pandolfi, M. e Larocca, F. (1989). Transonic flow about a circular cylinder. *Computer and Fluids*, Vol. 17, No. 1, pp. 205–220.
- Papadogiannis, D., Duchaine, F., Sicot, F., Gicquel, L., Wang, G., e Moreau, S. (2014). Large eddy simulation of a high pressure turbine stage: Effects of sub-grid scale modeling and mesh resolution. Em *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2014: Power for Land, Sea, and Air. Volume 2B: Turbo Expo 2014, Volume 2B Turbomachinery*, International Gas Turbine Institute.
- Peçanha, N. L. G. (2000). Simulação numérica de camadas de mistura compressíveis através de esquemas de alta precisão. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Peraire, J., Peiro, J., e Morgan, K. (1992). Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 103, No. 2, pp. 269–285.

- Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K., e Zienkiewicz, O. (1987). Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 72, No. 2, pp. 449–466.
- Petry, A. P. (2002). *Análise Numérica de escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método dos Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Piperno, S., Farhat, C., e Larrouturou, B. (1995). Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems part i: Model problem, theory and two-dimensional application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 124, No. 1–2, pp. 79–112.
- Plostins, P., McCoy, R. L., e Wagoner, B. A. (1991). Aeroballistic performance of the 25mm m910 tpd-s-t range limited training projectile. Brl-mr-3886, aberdeen proving ground, md, U.S. Army Ballistic Research Laboratory.
- Popielek, T. L. (2005). *Análise de escoamentos incompressíveis utilizando simulação de grandes escalas e adaptação de malhas*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Puigt, G., Gazaix, M., Montagnac, M., Pape, M.-C. L., de la Llave Plata, M., Marmignon, C., Boussuge, J. F., e Couaillier, V. (2011). Development of a new hybrid compressible solver inside the cfd elsa software. Em *Proceedings of the 41st AIAA fluid dynamics conference and exhibit*, AIAA-2011-3048.
- Qun, Z., Mu, L., e Wenqi, K. (1998). Geometric non-linear analysis of space shell structures using generalized conforming flat shell elements - for space shell structures. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 941–957.
- Quon, E. W. e Smith, M. J. (2015). Advanced data transfer strategies for overset computational methods. Em *Proceedings of the 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, pgs. 1–17.
- Ragab, S. A., Sheen, S.-C., e Sreedhar, M. (1992). An investigation of finite-difference methods for large-eddy simulation of a mixing layer. *AIAA Paper 92-0554*, Vol. 1, No. 1, pp. 0–0.
- Rassineux, A., Breikopf, P., e Villon, P. (2003). Simultaneous surface and tetrahedron mesh adaptation using mesh-free techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, No. 1, pp. 371–389.
- Raverdy, B., Mary, I., Sagaut, P., e Liamis, N. (2003). High resolution large-eddy simulation of the flow around a low-pressure turbine blade. *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 3, pp. 390–397.
- Reddy, D. S. K. e Sinha, K. (2009). Hypersonic turbulent flow simulation of fire ii reentry vehicle afterbody. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 46, No. 4, pp. 745–757.
- Rendall, T. C. e Allen, C. B. (2008). Unified fluid-structure interpolation and mesh motion using radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, No. 10, pp. 1519–1559.

- Rivara, M. C. (1989). Selective refinement/derefinement algorithms for sequences of nested triangulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 12, pp. 2889–2906.
- Rivara, M. C. (1997). New longest-edge algorithms for the refinement and/or improvement of unstructured triangulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 18, pp. 3313–3324.
- Rodriguez, O. (1984). The circular cylinder in subsonic and transonic flow. *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 12, pp. 1713–1718.
- Rogallo, R. S. e Moin, P. (1984). Numerical simulation of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 16pp. 99–137.
- Ruprecht, D. e Muller, H. (1998). A scheme for edge-based adaptive tetrahedron subdivision. Em Hege, H.-C. e Polthier, K., editores, *Mathematical Visualization*, pgs. 61–70. Springer Berlin Heidelberg.
- Sagaut, P. (2006). *Large-Eddy Simulation for Incompressible Flow*. Springer, Berlin, 3rd edition.
- Sagaut, P. e Deck, S. (2009). Large eddy simulation for aerodynamics: status and perspectives. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 367, No. 1, pp. 2849–2860.
- Sahu, J. (1991). Transonic navier-stokes computations for a spinning body of revolution. Brl-tr-3265, aberdeen proving ground, md, U.S. Army Ballistic Research Laboratory.
- Sahu, J. (2005). Time-accurate numerical prediction of free flight aerodynamics of a finned projectile. Arl-tr-3603, Army Research Laboratory.
- Salter, S., Sortino, G., e Latham, J. (2008). Sea-going hardware for the cloud albedo method of reversing global warming. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 366, No. 1882, pp. 3989–4006.
- Santhanam, S., Lele, S. K., e Ferziger, J. H. (2003). A robust high-order compact method for large-eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 191, No. 2, pp. 392–419.
- Sastry, S. P. e Shontz, S. M. (2012). Performance characterization of nonlinear optimization methods for mesh quality improvement. *Engineering with Computers*, Vol. 28, No. 3, pp. 269–286.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 6th edition.
- Scotti, A., Meneveau, C., e Lilly, D. (1993). Generalized smagorinsky model for anisotropic grids. *Physics of Fluids A*, Vol. 5, No. 9, pp. 2306–2308.
- Selmin, V. e Formaggia, L. (1992). Simulation of hypersonic flows on unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, No. 2, pp. 569–606.

- Sengupta, K., Jacobs, G. B., e Mashayek, F. (2009). Large-eddy simulation of compressible flows using a spectral multi-domain method. *Internation Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 61, No. 3, pp. 311–340.
- Sesterhenn, J., Dohogne, J. F., e Friedrich, R. (2005). Direct numerical simulation of the interaction of isotropic turbulence with a shock wave using shock-fitting. *Comptes Rendus de Mecanique*, Vol. 333, No. 1, pp. 87–94.
- Shaw, J. A. e Weatherill, N. P. (1992). Automatic topology generation for multiblock grids. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 52, No. 2, pp. 355–388.
- Shyam, V., Ameri, A., Luk, D., e Chen, J. P. (2010). Three-dimensional unsteady simulation of a modern high pressure turbine stage using phase lag periodicity: Analysis of flow and heat transfer. Nasa/tm-2010-216064, NASA Glenn Research Center.
- Skopinski, T. H. e Huston, W. B. (1956). A semi-empirical procedure for estimating wing buffet loads in the transonic region. Naca rm l56e01, National Advisory Committee for Aeronautics.
- Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, Vol. 91, No. 3, pp. 99–164.
- Smits, A. J. e Dussauge, J. P. (1969). *Turbulent Shear Layers in Supersonic Flows*. Springer, 2nd edition.
- Spearman, M. L. e Brawell, D. O. (1993). Aerodynamics of a sphere and an oblate spheroid for mach numbers from 0.6 to 10.5 including some effects of test conditions. Nasa technical memorandum im-109016, NASA, Hampton, Virginia.
- Speziale, C. G. (1991). Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 23pp. 107–157.
- Spyropoulos, E. T. e Blaisdell, G. A. (1996). Evaluation of the dynamic model for simulations of compressible decaying isotropic turbulence. *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 5, pp. 990–998.
- Squires, K. D. (1991). Dynamic subgrid scale modeling of compressible turbulence. Annual research brief, Stanford University.
- Stein, E. e Rust, W. (1991). Mesh adaptations for linear 2d finite-element discretizations in structural mechanics, especially in thin shell analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 36, No. 1, pp. 107–129.
- Stein, K., Benney, R., Kalro, V., Tezduyar, T. E., Leonard, J., e Accorsi, M. (2000). Parachute fluid–structure interactions: 3-d computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No. 3–4, pp. 373–386.
- Stein, K., Tezduyar, T., e Benney, R. (2003). Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, No. 1, pp. 58–63.
- Sturek, W. B. e Schiff, L. B. (1982). Computations of the magnus effect for slender bodies in supersonic flow. *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 12, pp. 1724–1731.

- Sutherland, W. (1893). The viscosity of gases and molecular force. *Philosophical Magazine Series 5*, Vol. 36, No. 223, pp. 507–531.
- Tam, A., Ait-Ali-Yahia, D., Robichaud, M. P., Moore, M., Kozel, V., e Habashi, W. G. (2000). Anisotropic mesh adaptation for 3d flows on structured and unstructured grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 189, No. 4, pp. 1025–1230.
- Teixeira, F. G. (2003). *Modelamento paramétrico e geração de malha em superfícies para aplicações em engenharia*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Teixeira, P. R. F. (2001). *Simulação Numérica da Interação de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis e Incompressíveis e Estruturas Deformáveis Usando o Método dos Elementos Finitos*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Thomas, C. G. e Nithiarasu, P. (2004). The characteristic based split (cbs) approach for inviscid compressible flow problems. effect of element size in the streamline direction. Em *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, ECCOMAS, pgs. 1–19.
- Thomas, P. e Lombard, C. (1979). Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 10, pp. 1030–1037.
- Tijdemand, H. e Seebass, R. (1980). Transonic flows past oscillating airfoils. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 181–222.
- Togashi, F., Yto, Y., Murayama, M., Nakahashi, K., e Kato, T. (2001). Flow simulation of flapping wings of an insect using overset unstructured grid. Em *Proceedings of the 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA-2619.
- Tuszynski, J. e Löhner, R. (1998). Parallelizing the construction of indirect access arrays for shared-memory machines. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 773–781.
- Ulrych, J. (2004). Analysis of unsteady transonic flow fields by means of the colour streak schlieren method. *Acta Polytechnica: Journal of Advanced Engineering*, Vol. 44, No. 3, pp. 3–7.
- Vallet, M. G. (1992). *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France.
- Vallet, M. G., Manole, C. M., Dompierre, J., Dufour, S., e Guibault, F. (2007). Numerical comparison of some hessian recovery techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 72, No. 8, pp. 987–1007.
- Vassberg, J. C., DeHaan, M. A., Rivers, S. M., e Wahls, R. A. (2008). Development of a common research model for applied cfd validation studies. Paper-6919, AIAA.
- Vincent, A. e Meneguzzi, M. (1994). The dynamics of vorticity tubes in homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 258, No. 1, pp. 245–254.

- Vreman, B. (1995). *Direct and Large Eddy Simulation of the Compressible Turbulent Mixing Layer*. PhD thesis, University of Twente, Twente.
- Vreman, B., Geurts, B., e Kuerten, H. (1995a). A priori tests of large eddy simulation of the compressible plane mixing layer. *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 29, No. 4, pp. 299–327.
- Vreman, B., Geurts, B., e Kuerten, H. (1995b). Subgrid-modeling in les of compressible flow. *Applied Science Research*, Vol. 54, No. 3, pp. 191–203.
- Vreman, B., Geurts, B., e Kuerten, H. (1997). Large eddy simulation of turbulent mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 339, No. 1, pp. 357–390.
- Walter, M. A. T., Abdu, A. A. Q., da Silva, L. F. F., e Azevedo, J. L. (2005). Evaluation of adaptive mesh refinement and coarsening for the computation of compressible flow on unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 49, No. 9, pp. 999–1014.
- Waltz, J. (2004). Parallel adaptive refinement for unsteady flow calculations on 3d unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 46, No. 1, pp. 37–57.
- Weatherill, N. P. e Hassan, O. (1994). Efficient three-dimensional delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 12, pp. 2005–2039.
- Welsh, C. J. (1953). The drag of finite length cylinders determined from flight tests at high reynolds numbers fora mach number range from 0.5 to 1.3. Naca-tn-2941, National Advisory Committee for Aeronautics. Langley Aeronautical Lab.
- White, F. W. (1991). *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, 2th edition.
- Willcox, K. e Peraire, J. (1997). Aeroelastic computations in the time domain using unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40pp. 2413–2431.
- Xavier, C. M. (2013). *Análise experimental e numérica de escoamentos turbulentos em canais compostos empregando simulação de grandes escalas*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Xu, C. Y., Chen, L. W., e Lu, X. Y. (2009). Numerical simulation of shock wave and turbulence interaction over a circular cylinder. *Modern Physics Letters B*, Vol. 23, No. 3, pp. 233–236.
- Xu, C. Y., Chen, L. W., e Lu, X. Y. (2010). Large-eddy simulation of the compressible flow past a wavy cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 665, No. 1, pp. 238–273.
- Yang, Z. e Mavriplis, D. (2007). High-order time integration schemes for aeroelastic applications on unstructured meshes. *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 1, pp. 138–150.
- Yerry, M. A. e Shephard, M. S. (1984). Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 11, pp. 1965–1990.

- Yeung, W. W. H., Xu, C., e Gu, W. (1997). Reduction of transient adverse effects of spoilers. *Journal of Aircraft*, Vol. 34, No. 4, pp. 478–484.
- Yoshihara, H. e Sacher, P. (1985). Test cases for inviscid flow field methods. Agard-ar-221, Paris.
- Yoshizawa, A. (1986). Statistical theory for compressible turbulent shear flows with the application to subgrid modeling. *Physics of Fluids*, Vol. 29, No. 7, pp. 2152–2164.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., e Nithiarasu, P. (2011). *The Finite Element Method For Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 6th edition.
- Ziniu, W., Yizhe, X., Wenbin, W., e Ruifeng, H. (2013). Review of shock wave detection method in cfd post-processing. *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 23, No. 3, pp. 501–513.
- Zyluk, A. (2005). Experimental validation of mathematical model describing external stores separation. *Journal of theoretical and applied mechanics*, Vol. 43, No. 4, pp. 855–873.