

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

MÉTODOS RECURSIVOS PARA O CÁLCULO DA
INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

por

Mari Salete Zanella Taietti

Dissertação para a obtenção do Grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre, setembro de 2002

MÉTODOS RECURSIVOS PARA O CÁLCULO DA INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

por

Mari Salete Zanella Taietti
Pós-Graduada em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAP, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Nelson Zang

Co-orientador: Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo

Aprovada por:

Prof^a. Dra. Inês Ferreira Moraes - UFSM - Santa Maria, RS

Prof. Dr. Alberto Tamagna - UFRGS - Porto Alegre, RS

Prof^a. Dra. Liliane Barichello - UFRGS - Porto Alegre, RS

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen - UFRGS - Porto Alegre, RS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAP

Porto Alegre, setembro de 2002

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um método recursivo para a determinação da resposta forçada de sistemas de segunda ordem na forma de uma integral de convolução, proveniente da utilização de propriedades de transição da resposta impulso de tais sistemas. Descrevem-se também diversos métodos analíticos e numéricos desenvolvidos para o cálculo da resposta forçada, bem como as limitações de cada método.

As vantagens do método numérico recursivo proposto são notáveis, já que não é requerido o cálculo de autovalores das matrizes nem a redução à primeira ordem, e nem o uso de hipóteses adicionais sobre natureza dos coeficientes matriciais do sistema.

Como aplicação do método proposto, considera-se o cálculo da resposta dinâmica de estruturas flexíveis sujeitas a excitações arbitrárias tais como terremotos.

ABSTRACT

TITLE: “RECURSIVE METHODS FOR THE COMPUTATION OF THE CONVOLUTION INTEGRAL”

The main objective of this work is to present a recursive method for the determination of the forced response of second-order systems under the form of a convolution integral, arising from the utilization of transition properties of the impulse response of such systems. Various analytical and numerical methods developed for the computation of such forced response are described mentioning limitations for each one.

Advantages of the proposed method are notorious, since it is not required the computation of matrix eigenvalues, the reduction to first order, or the use of additional assumptions on the nature of the matrix coefficients.

As an application of the proposed method, it is considered the determination of the dynamic response of flexible structures subject to arbitrary excitations such as earthquakes.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	MÉTODOS CLÁSSICOS PARA O CÁLCULO DA RESPOSTA FORÇADA	3
2.1	Introdução	3
2.2	Métodos Analíticos	4
2.2.1	Redução à Primeira Ordem e Análise Modal	7
2.2.2	Análise Modal Direta	10
2.3	Métodos Numéricos	11
2.4	Métodos de Integração	12
2.4.1	Método de Runge-Kutta-Felhberg	12
2.4.2	Método de Houbolt	17
2.4.3	Método θ de Wilson	19
2.4.4	Método de Newmark	22
2.4.5	O Método α Generalizado	24
2.5	Métodos Recursivos	25
2.5.1	Método Invariante do Impulso	26
2.5.1.1	Caso $M = 1$ e $L = 1$	28

3	ABORDAGEM DIRETA PARA SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM	31
3.1	Introdução	31
3.2	Abordagem Direta	33
3.3	Fórmula Fechada para a Resposta Impulso Matricial	34
3.4	Relação com a Matriz Companheira	36
3.5	Comentários Finais	37
4	CÁLCULO RECURSIVO DIRETO DA INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO	38
4.1	Dedução do Método	38
4.2	Comentários Finais	40
5	SIMULAÇÕES E APLICAÇÕES	41
5.1	Simulação Simbólico-Numérica	41
5.2	Comentário Sobre a Ordem Computacional	44
5.3	Simulações Numéricas	44
5.3.1	Vibrações Transversais de uma Chaminé Alta	44
5.3.2	Prédio sujeito a uma Excitação Periódica	52
5.4	Controle Ativo: ATMD	56
5.4.1	Exemplo Numérico	61
5.5	Comentários Finais	66

6 CONCLUSÕES	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	68

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	<i>Componente Escalar do Impulso Unitário Discretizado</i>	27
Figura 5.1	<i>Componentes da entrada e componentes da saída: em vermelho a solução simbólica exata e em azul a solução numérica aproximada</i>	43
Figura 5.2	<i>Modelo idealizado de uma chaminé flexível, sobre uma fundação elástica, e as forças que agem em cada massa representativa . .</i>	46
Figura 5.3	<i>Histórico da aceleração de um sismo afetando uma chaminé com $n = 7$ graus de liberdade (dados reais do terremoto de Loma Prieta)</i>	50
Figura 5.4	<i>Deslocamentos das massas discretizadas de uma chaminé com 7 graus de liberdade</i>	51
Figura 5.5	<i>Modelo de vibração horizontal de um edifício de quatro andares e as forças restauradoras atuando em cada massa (andar)</i>	54
Figura 5.6	<i>Histórico da aceleração de um sismo (dados reais do terremoto de Loma Prieta)</i>	55
Figura 5.7	<i>Deslocamentos dos quatro andares de um prédio sujeito a uma excitação sísmica, $m=4000K$, $c=400$ N-s/m, $k=5000$ N/m . . .</i>	57
Figura 5.8	<i>Modelo Estrutural de um Prédio de n Andares com Sistema de Controle de Amortecedor Ativo de Massa Regulada (ATMD) . .</i>	58
Figura 5.9	<i>Registro no Domínio do Tempo e da Freqüência da Aceleração do Terremoto</i>	62
Figura 5.10	<i>Deslocamentos dos andares primeiro, segundo, quinto, nono e décimo de um prédio sem mecanismo de controle.</i>	64

Figura 5.11 *Deslocamentos dos andares primeiro, segundo, nono e décimo e da massa reguladora do controle.* 65

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1	<i>Freqüências naturais para a chaminé com $n = 7$ graus de liberdade</i>	49
Tabela 5.2	<i>Valores Numéricos dos Parâmetros Físicos envolvidos no modelo.</i>	63

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, são descritos vários métodos analítico-simbólicos e numéricos para o cálculo da integral de convolução proveniente da resposta forçada de equações diferenciais ordinárias matriciais de segunda ordem. As aplicações mais importantes estão dadas na dinâmica estrutural tanto nas áreas de engenharia mecânica, aeroespacial e civil bem como na área de processamento de sinais.

A resposta forçada de sistemas de segunda ordem tem sido calculada, no domínio do tempo, tipicamente pelos seguintes tipos de métodos:

1. Métodos analíticos modais que requerem o cálculo de autovalores da matriz de estado do sistema.
2. Métodos de diferenças finitas: tais como o de Newmark, Wilson, Houbolt, diferenças centrais, baseados no uso de esquemas aproximados para a velocidade e a aceleração do sistema.
3. Métodos recursivos, baseados na técnica de coeficientes indeterminados. Entre eles estão o método de Wolf, que é exato para certas funções de entrada, denominadas *funções de teste*.

No presente trabalho, o objetivo é apresentar um método recursivo alternativo, baseado na utilização das propriedades de transição da resposta impulso matricial (ou matriz fundamental). Tal método pode ser aplicado a uma ampla variedade de excitações com mais eficiência que os métodos tradicionais mencionados anteriormente.

Aqui, é mostrado que uma das aplicações importantes desta metodologia está na área de controle de estruturas na engenharia civil, para modelos com um número baixo e médio de graus de liberdade.

No capítulo 2, é feita uma coleta bibliográfica sobre os diversos métodos para o cálculo numérico da integral de convolução.

No capítulo 3, descreve-se uma abordagem direta apresentada em detalhe por Claeysen sobre a resposta impulso matricial, bem como os elementos e propriedades necessárias para estabelecer o método recursivo direto.

No capítulo 4, é apresentada a metodologia para o cálculo recursivo da integral de convolução, baseando-se em propriedades de transição da resposta impulso. Também, comparam-se de maneira qualitativa as metodologias até aqui descritas.

No capítulo 5, são feitas simulações numéricas que analisam e comprovam a eficiência analítica e computacional da metodologia proposta.

Por último, no capítulo 6, são enunciadas as conclusões pertinentes.

2 MÉTODOS CLÁSSICOS PARA O CÁLCULO DA RESPOSTA FORÇADA

2.1 Introdução

Na engenharia mecânica e estrutural, bem como na área de controle de sistemas e processamento de sinais, existem muitas aplicações práticas em que as equações governantes do modelo consistem de um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem lineares acopladas.

Considere-se, então, a equação diferencial matricial de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

sujeita às condições iniciais

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \quad (2.2)$$

Aqui, \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são matrizes escalares de ordem $n \times n$, $\mathbf{f}(t)$ é uma função vetorial $n \times 1$ conhecida e $\mathbf{q}(t)$ é a função vetorial incógnita $n \times 1$.

Analiticamente, a solução, $\mathbf{q}(t)$, do problema de valor inicial (2.1)-(2.2) é dada por

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{h}_0(t)\mathbf{q}_0 + \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 + \int_0^t \mathbf{h}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \quad (2.3)$$

sendo

$$\mathbf{h}_0(t) = \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{C} \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{h}(t)$ é a resposta impulsiva da equação (2.1), isto é, uma matriz $\mathbf{h}(t)$ que satisfaz a equação matricial homogênea com condições iniciais impulsivas

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(0) &= \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Quando as condições iniciais (2.2) são nulas, isto é,

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

a solução é dada por

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-s)\mathbf{f}(s)ds. \quad (2.7)$$

Neste caso, a solução $\mathbf{q}(t)$ é denominada a *resposta forçada* e a integral que forma esta solução é chamada de *integral de convolução*.

Neste capítulo, são apresentados diversos métodos analíticos e numéricos para o cálculo da resposta forçada $\mathbf{q}(t)$ descrita pela equação (2.7) (e portanto, de maneira indireta, para o cálculo da integral de convolução), que aparecem comumente na literatura, [BAT 76], [NEW 89].

2.2 Métodos Analíticos

Se $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{n \times n}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{n \times n}$, $\mathbf{K} = [k_{ij}]_{n \times n}$, $\mathbf{q}(t) = [q_i(t)]_{n \times 1}$ e $\mathbf{f}(t) = [f_i(t)]_{n \times 1}$, então a equação diferencial matricial (2.1) é, na verdade, um sistema de n equações diferenciais lineares com as incógnitas $q_i(t)$ acopladas:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) = f_i(t), \quad i = 1 : n, \quad (2.8)$$

e é sempre possível, em teoria, obter um conjunto de n equações diferenciais desacopladas, cada uma da forma

$$a_{i,2n} q_i^{(2n)}(t) + a_{i,2n-1} q_i^{(2n-1)}(t) + \cdots + a_{i,0} q_i(t) = g_i(t), \quad i = 1 : n, \quad (2.9)$$

onde cada $g_i(t)$ é uma combinação linear conhecida de $\frac{d^m f_j}{dt^m}$, $m = 0 : n$, $j = 1, n$.

Para isto, pode-se escrever a equação (2.1) na forma

$$\left[\mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d}{dt} + \mathbf{K} \right] \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.10)$$

onde os operadores diferenciais envolvidos são definidos como

$$\left[\mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} \right] \mathbf{q}(t) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t), \quad (2.11)$$

$$\left[\mathbf{C} \frac{d}{dt} \right] \mathbf{q}(t) = \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t). \quad (2.12)$$

Em termos do operador diferencial inverso, a solução da equação (2.10) é dada por

$$\mathbf{q}(t) = \left[\mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d}{dt} + \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{f}(t). \quad (2.13)$$

De acordo com a teoria dos operadores diferenciais matriciais, para obter o operador diferencial matricial inverso pode ser utilizada a igualdade

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}, \quad (2.14)$$

que conduz então ao resultado

$$\left(\det \left[\mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d}{dt} + \mathbf{K} \right] \right) \mathbf{q}(t) = \left(\text{adj} \left[\mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d}{dt} + \mathbf{K} \right] \right) \mathbf{f}(t). \quad (2.15)$$

Exemplo Ilustrativo: Considere-se um sistema com dois graus de liberdade ($n = 2$) cujas matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.16)$$

e

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

A equação correspondente a (2.13), que fornece a solução $\mathbf{q}(t)$, é dada por

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\frac{d^2}{dt^2} + 2c\frac{d}{dt} + 2k & -c\frac{d}{dt} - k \\ -c\frac{d}{dt} - k & m\frac{d^2}{dt^2} + 2c\frac{d}{dt} + 2k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

O operador diferencial matricial inverso que aparece em (2.18) pode ser calculado a partir do resultado (2.14):

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}.$$

Neste caso, o operador diferencial matricial adjunto é dada por

$$\begin{bmatrix} m\frac{d^2}{dt^2} + 2c\frac{d}{dt} + 2k & c\frac{d}{dt} + k \\ c\frac{d}{dt} + k & m\frac{d^2}{dt^2} + 2c\frac{d}{dt} + 2k \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

e o operador diferencial matricial determinante é expresso por

$$m^2 \frac{d^4}{dt^4} + 4mc \frac{d^3}{dt^3} + (4mk + 3c^2) \frac{d^2}{dt^2} + 6kc \frac{d}{dt} + 3k^2. \quad (2.20)$$

A equação diferencial que relaciona a variável $q_1(t)$ com as excitações $f_1(t)$ e $f_2(t)$ está dada pela primeira linha de (2.18) que, após utilizar os resultados anteriores (2.19) e (2.20), fica

$$m^2 \frac{d^4 q_1(t)}{dt^4} + 4mc \frac{d^3 q_1(t)}{dt^3} + (4mk + 3c^2) \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + 6kc \frac{dq_1(t)}{dt} + 3k^2 q_1(t) = m \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + 2c \frac{df_1(t)}{dt} + 2k f_1(t) + c \frac{df_2(t)}{dt} + k f_2(t). \quad (2.21)$$

Similarmente, para a variável $q_2(t)$, tem-se

$$m^2 \frac{d^4 q_2(t)}{dt^4} + 4mc \frac{d^3 q_2(t)}{dt^3} + (4mk + 3c^2) \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} + 6kc \frac{dq_2(t)}{dt} + 3k^2 q_2(t) = c \frac{df_1(t)}{dt} + k f_1(t) + m \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} + 2c \frac{df_2(t)}{dt} + 2k f_2(t). \quad (2.22)$$

Este procedimento, embora resolva teoricamente o problema (2.1), é pouco utilizado na prática, pois envolve o cálculo simbólico da inversa de um operador diferencial matricial. A dificuldade prática é similar à regra de Cramer para resolver sistemas de equações lineares.

2.2.1 Redução à Primeira Ordem e Análise Modal

As n equações diferenciais de segunda ordem acopladas (2.1) estão escritas em termos de um vetor $n \times 1$, $\mathbf{q}(t)$. Nesta subseção, descreve-se um procedimento para reduzir a equação diferencial (2.1) em uma equação diferencial de primeira ordem. A principal razão para esta redução (conhecida como a *redução de Hamilton*) é que a teoria dos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

conta com diversas ferramentas analíticas, que permitem a resolução desses sistemas de maneira completa. A desvantagem é que o tamanho do sistema é duplicado ($2n$), e importantes propriedades físicas podem ser perdidas.

É definido um novo vetor $n \times 1$, $\mathbf{w}(t)$, como segue

$$\mathbf{w}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (2.23)$$

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (2.24)$$

então a equação (2.1) pode ser re-escrita como

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{w}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.25)$$

que, no caso de \mathbf{M} não singular, resulta em

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{w}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t). \quad (2.26)$$

Definindo o vetor $2n \times 1$

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

e combinando (2.23) e (2.26) resulta a forma compacta

$$\boxed{\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}(t)} \quad (2.28)$$

onde a matriz \mathbf{A} de ordem $2n \times 2n$ é definida como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

e o novo vetor de excitação $\mathbf{g}(t)$ de ordem $2n \times 1$ está definido por

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

A equação (2.28) é conhecida comumente como a *formulação de estado* para a equação (2.1).

Após realizada a redução a primeira ordem da equação (2.1), procede-se a calcular a solução da equação (2.28) através da *análise modal*. Embora a análise modal pode ser aplicada no caso em que \mathbf{A} possui uma forma de Jordan, é considerado o caso que a matriz \mathbf{A} é diagonalizável. Neste caso, a equação diferencial homogênea

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) \quad (2.31)$$

tem solução

$$\mathbf{z}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \cdots + c_{2n} e^{\lambda_{2n} t} \mathbf{v}_{2n} \quad (2.32)$$

onde \mathbf{v}_i é o autovetor $2n \times 1$ correspondente ao autovalor λ_i , e c_i , $i = 1 : 2n$ são constantes arbitrárias. Define-se a *matriz modal* \mathbf{U} de ordem $2n \times 2n$ como a matriz cujas colunas são os autovetores \mathbf{v}_i , $i = 1 : 2n$. Assim, os autovalores são soluções de

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = 0 \quad (2.33)$$

e

$$\text{diag}[\lambda_j] = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}. \quad (2.34)$$

Definindo as coordenadas normais

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{z}(t) \quad (2.35)$$

consegue-se o sistema desacoplado

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = \text{diag}[\lambda_j]\mathbf{p}(t) + \mathbf{U}^{-1}\mathbf{g}(t) \quad (2.36)$$

cujas soluções podem ser calculadas individualmente para cada componente $p_i(t)$ de $\mathbf{p}(t)$. Então a solução $\mathbf{z}(t)$ pode ser escrita como

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{U} \left[\int_0^t \text{diag}[e^{\lambda_j(t-s)}] \mathbf{U}^{-1} \mathbf{g}(s) ds \right] \quad (2.37)$$

no caso de condições iniciais nulas, veja [NEW 89].

2.2.2 Análise Modal Direta

Considere-se o sistema homogêneo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

É sabido que a vibração livre onde um só modo é excitado, tem a forma

$$\mathbf{q}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (2.39)$$

onde os escalares λ são as raízes da equação característica

$$\det[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}] = 0 \quad (2.40)$$

e os vetores \mathbf{v} são as soluções não triviais de

$$[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

associadas a cada valor de λ . A equação (2.41) define um *problema de autovalor de segunda ordem*.

Na literatura clássica, não é possível, com as ferramentas disponíveis, tratar de maneira direta o problema geral de autovalor (2.41) e o único meio é a redução desse problema a primeira ordem.

Cabe mencionar que no caso conservativo, isto é, quando $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, o problema (2.41) pode ser reduzido ao problema de autovalor generalizado

$$[-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

onde $\lambda = i\omega$.

Em geral, o problema (2.41) é equivalente ao problema de “diagonalizar” simultaneamente as três matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , e isto pode ser feito se e somente se as matrizes $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ e $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ comutam, [NEW 89]. Esta restrição é muito séria pois exclui importantes casos práticos.

2.3 Métodos Numéricos

De maneira geral, os métodos tratados aqui podem ser classificados em dois grupos:

- os métodos de integração originados a partir de esquemas numéricos em diferenças, e
- os métodos recursivos, baseados na determinação algébrica de coeficientes matriciais de modo que o método resultante seja exato para algum tipo específico de função.

2.4 Métodos de Integração

2.4.1 Método de Runge-Kutta-Fehlberg

Um bom integrador de equações diferenciais ordinárias deve exercer algum controle sobre seu próprio desempenho, fazendo mudanças freqüentes no seu tamanho de passo. Em geral, o objetivo deste controle adaptativo sobre o tamanho de passo é atingir alguma precisão prescrita na solução com o menor esforço computacional. Tamanhos pequenos de passo são requeridos quando a função de entrada varia intensamente e tamanhos de passo maiores são requeridos quando tal função de entrada mostra pouca variação. O resultado assim obtido ganha enorme eficiência.

A implementação de um controle adaptativo no tamanho de passo requer informação sobre o desempenho do algoritmo e isto é feito mediante o cálculo de uma estimativa do erro de truncamento.

Este método faz parte dos métodos de tipo preditor-corretor com tamanho de passo variável, características muito desejáveis para a resolução de problemas freqüentemente encontrados em diversas áreas científicas.

Como foi visto anteriormente, o sistema $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$ pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}(t) \quad (2.43)$$

onde \mathbf{A} é a matriz companheira definida por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

e $\mathbf{g}(t)$ é o vetor definido por

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

no caso que a matriz \mathbf{M} é não-singular.

Seja \mathbf{z}_t a aproximação de $\mathbf{z}(t)$ e \mathbf{g}_t a aproximação de $\mathbf{g}(t)$. Temos o método de Runge-Kutta de ordem 5:

$$\hat{\mathbf{z}}_{t+\Delta t} = \mathbf{z}_t + \frac{16}{135}\mathbf{k}_1 + \frac{6656}{12825}\mathbf{k}_3 + \frac{28561}{56430}\mathbf{k}_4 - \frac{9}{50}\mathbf{k}_5 + \frac{2}{55}\mathbf{k}_6 \quad (2.46)$$

e o método de Runge-Kutta de ordem 4:

$$\mathbf{z}_{t+\Delta t} = \mathbf{z}_t + \frac{25}{216}\mathbf{k}_1 + \frac{1408}{2565}\mathbf{k}_3 + \frac{2197}{4104}\mathbf{k}_4 - \frac{1}{5}\mathbf{k}_5 \quad (2.47)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \Delta t [\mathbf{C}\mathbf{z}_t + \mathbf{g}_t], \\ \mathbf{k}_2 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{z}_t + \frac{1}{4}\mathbf{k}_1 \right) + \mathbf{g}_{t+\frac{1}{4}\Delta t} \right], \\ \mathbf{k}_3 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{z}_t + \frac{3}{32}\mathbf{k}_1 + \frac{9}{32}\mathbf{k}_2 \right) + \mathbf{g}_{t+\frac{3}{8}\Delta t} \right], \\ \mathbf{k}_4 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{z}_t + \frac{1932}{2197}\mathbf{k}_1 - \frac{7200}{2197}\mathbf{k}_2 + \frac{7296}{2197}\mathbf{k}_3 \right) + \mathbf{g}_{t+\frac{12}{13}\Delta t} \right], \\ \mathbf{k}_5 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{z}_t + \frac{439}{216}\mathbf{k}_1 - 8\mathbf{k}_2 + \frac{3680}{513}\mathbf{k}_3 - \frac{845}{4104}\mathbf{k}_4 \right) + \mathbf{g}_{t+\Delta t} \right], \\ \mathbf{k}_6 &= \Delta t \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{z}_t - \frac{8}{27}\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 - \frac{3544}{2565}\mathbf{k}_3 - \frac{1859}{4104}\mathbf{k}_4 - \frac{11}{40}\mathbf{k}_5 \right) + \mathbf{g}_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

Considerando que $\mathbf{z}_t \approx \mathbf{z}(t) \approx \hat{\mathbf{z}}_t$ e que o erro de truncamento local $\hat{\tau}(\Delta t; t + \Delta t)$ do método (2.46) pode ser desprezado com respeito ao erro de truncamento local $\tau(\Delta t; t + \Delta t)$ do método (2.47), obtém-se a seguinte aproximação:

$$\tau(\Delta t; t + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{z}}_{t+\Delta t} - \mathbf{z}_{t+\Delta t}). \quad (2.48)$$

Além disso, como (2.47) é um método de ordem 4, existe uma constante α tal que:

$$\tau(\Delta t; t + \Delta t) \approx \alpha \Delta t^4. \quad (2.49)$$

De (2.48) e (2.49) temos:

$$\alpha \Delta t^4 \approx \frac{1}{\Delta t} (\hat{\mathbf{z}}_{t+\Delta t} - \mathbf{z}_{t+\Delta t}). \quad (2.50)$$

A idéia do método de Runge-Kutta-Fehlberg é determinar um tamanho adequado $q\Delta t$, $q > 0$ de modo que o erro $\tau(q\Delta t; t + \Delta t)$ pode ser limitado por certa tolerância ϵ . Tem-se que:

$$\tau(q\Delta t; t + \Delta t) \approx \alpha(q\Delta t)^4 = q^4(\alpha \Delta t^4) \approx \frac{q^4}{\Delta t} (\hat{\mathbf{z}}_{t+\Delta t} - \mathbf{z}_{t+\Delta t}),$$

e se é requerido que $\|\tau(q\Delta t; t + \Delta t)\| \leq \epsilon$ deve-se ter que:

$$\frac{q^4}{\Delta t} \|\hat{\mathbf{z}}_{t+\Delta t} - \mathbf{z}_{t+\Delta t}\| \leq \epsilon,$$

isto é,

$$q \leq \left(\frac{\epsilon \Delta t}{\|\hat{\mathbf{z}}_{t+\Delta t} - \mathbf{z}_{t+\Delta t}\|} \right)^{1/4}. \quad (2.51)$$

O parâmetro q modifica Δt de modo que se tenha um passo muito pequeno em regiões irregulares e um passo maior quando não haja muita variação entre as aproximações (2.46) e (2.47).

Para o algoritmo apresentado a seguir, assume-se que:

$$q = \left(\frac{\epsilon \Delta t}{2\|\hat{\mathbf{z}}_{t+\Delta t} - \mathbf{z}_{t+\Delta t}\|} \right)^{1/4}.$$

O método de Runge-Kutta-Fehlberg é explícito, e por isso, uma vantagem computacional é a escolha de um tamanho de passo suficientemente pequeno.

Isto pode dificultar a resolução de problemas estruturais duros onde são envolvidas quantidades muito próximas de zero.

Algoritmo para o Método de Runge-Kutta-Fehlberg:

Objetivo: Aproximar a solução $\mathbf{q}(t)$, com um passo de tempo variável desde o instante de tempo $t = 0$ até o instante de tempo t_{final} , do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são matrizes de ordem $n \times n$ e $\mathbf{f}(t)$ é um vetor de ordem $n \times 1$ de funções que dependem de t .

Para facilitar a escrita do texto e para ajustar os passos do algoritmo à sua forma padronizada, define-se a função:

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{V}) = \mathbf{h}(t, V_1, \dots, V_{2n}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ \vdots \\ V_{2n} \end{bmatrix} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \end{bmatrix}.$$

Entrada: matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , vetor de funções $\mathbf{f}(t)$, passo máximo Δt_{max} , passo mínimo Δt_{min} , tolerância ϵ , instante de tempo final t_{final} .

Saída: Vetores aproximados \mathbf{q}_t , $\dot{\mathbf{q}}_t$ e $\ddot{\mathbf{q}}_t$ da solução $\mathbf{q}(t)$ e suas derivadas $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ desde 0 até t_{final} .

Passo 1: Fazer: $a_0 = \frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{3}{8}$, $a_2 = \frac{3}{32}$, $a_3 = \frac{9}{32}$, $a_4 = \frac{12}{13}$, $a_5 = \frac{1932}{2197}$,
 $a_6 = -\frac{7200}{2197}$, $a_7 = \frac{7296}{2197}$, $a_8 = \frac{439}{216}$, $a_9 = -8$, $a_{10} = \frac{3680}{513}$,
 $a_{11} = -\frac{845}{4104}$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{13} = -\frac{8}{27}$, $a_{14} = 2$, $a_{15} = -\frac{3544}{2565}$,
 $a_{16} = -\frac{1859}{4104}$, $a_{17} = -\frac{11}{40}$, $a_{18} = \frac{1}{360}$, $a_{19} = -\frac{128}{4275}$, $a_{20} = -\frac{2197}{75240}$,
 $a_{21} = \frac{1}{50}$, $a_{22} = \frac{2}{55}$, $a_{23} = \frac{25}{216}$, $a_{24} = \frac{1408}{2565}$, $a_{25} = \frac{2197}{4104}$, $a_{26} = -\frac{1}{5}$,

Passo 2: Fazer $t = 0$;

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\Delta t = \Delta t_{max};$$

$$Continuar = 1;$$

$$\text{Escrever } (t, \Delta t, \mathbf{z}_t(1 : n)) \approx (t, \Delta t, \mathbf{q}(t))$$

$$\text{Escrever } (t, \Delta t, \mathbf{z}_t(n + 1 : 2n)) \approx (t, \Delta t, \dot{\mathbf{q}}(t))$$

Passo 3: Entretanto $Continuar = 1$ fazer os passos 4-10:

$$\text{Passo 4: Fazer: } \mathbf{k}_1 = \Delta t \mathbf{h}(t, \mathbf{z}_t);$$

$$\mathbf{k}_2 = \Delta t(\mathbf{h}(t + a_0 \Delta t, \mathbf{z}_t + a_0 \mathbf{k}_1));$$

$$\mathbf{k}_3 = \Delta t(\mathbf{h}(t + a_1 \Delta t, \mathbf{z}_t + a_2 \mathbf{k}_1 + a_3 \mathbf{k}_2));$$

$$\mathbf{k}_4 = \Delta t(\mathbf{h}(t + a_4 \Delta t, \mathbf{z}_t + a_5 \mathbf{k}_1 + a_6 \mathbf{k}_2 + a_7 \mathbf{k}_3));$$

$$\mathbf{k}_5 = \Delta t(\mathbf{h}(t + \Delta t, \mathbf{z}_t + a_8 \mathbf{k}_1 + a_9 \mathbf{k}_2 + a_{10} \mathbf{k}_3 + a_{11} \mathbf{k}_4));$$

$$\mathbf{k}_6 = \Delta t(\mathbf{h}(t + a_{12} \Delta t, \mathbf{z}_t + a_{13} \mathbf{k}_1 + a_{14} \mathbf{k}_2 + a_{15} \mathbf{k}_3 + a_{16} \mathbf{k}_4 + a_{17} \mathbf{k}_5));$$

$$\text{Passo 5: Fazer: } R = \frac{\|a_{18} \mathbf{k}_1 + a_{19} \mathbf{k}_3 + a_{20} \mathbf{k}_4 + a_{21} \mathbf{k}_5 + a_{22} \mathbf{k}_6\|}{\Delta t}$$

$$\text{Passo 6: Fazer: } \delta = \left(\frac{\epsilon}{2R}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Passo 7: Se $R \leq \epsilon$ então :

$$\text{Fazer: } \mathbf{z}_{t+\Delta t} = \mathbf{z}_t + a_{23} \mathbf{k}_1 + a_{24} \mathbf{k}_3 + a_{25} \mathbf{k}_4 + a_{26} \mathbf{k}_5;$$

$$t = t + \Delta t;$$

$$\text{Escrever } (t, \Delta t, \mathbf{z}_t(1 : n)) = (t, \Delta t, \mathbf{q}(t)).$$

$$\text{Escrever } (t, \Delta t, \mathbf{z}_t(n + 1 : 2n)) = (t, \Delta t, \dot{\mathbf{q}}(t)).$$

Passo 8: Se $\delta \leq 0.1$ então $\Delta t = 0.1 \Delta t$;

do contrário, se $\delta \geq 4$ então fazer $\Delta t = 4 \Delta t$;

do contrário, fazer $\Delta t = \delta \Delta t$.

Passo 9: Se $\Delta t > \Delta t_{max}$ então fazer $\Delta t = \Delta t_{max}$.

Passo 10: Se $t \geq t_{final}$ então $Continuar = 0$;

do contrário, se $t + \Delta t > t_{final}$ então $\Delta t = t_{final} - t$;

do contrário, se $\Delta t < \Delta t_{min}$,

então $Continuar = 0$;

(Δt_{min} excedido).

Passo 11: Fim do Algoritmo.

2.4.2 Método de Houbolt

O método de Houbolt foi criado por J. C. Houbolt, [BAT 76], em 1950, para calcular as respostas estrutural de aeronaves sujeitas a cargas dinâmicas. Utiliza o conceito de diferença de deslocamentos equivalentes para aproximar as componentes de velocidade e aceleração, e portanto, estabelece uma relação de recorrência que pode ser usada para resolver a resposta da estrutura passo-a-passo. No método de Houbolt, a generalidade e os aspectos físicos do equilíbrio básico são preservados. Do ponto de vista da estabilidade e precisão, é incondicionalmente estável e de segunda ordem na precisão mas não é adequado para problemas dinâmicos de alta frequência. Uma desvantagem é a necessidade de utilizar um grande histórico de dados.

Este método usa as seguintes aproximações em diferenças finitas:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2\mathbf{q}_{t+\Delta t} - 5\mathbf{q}_t + \mathbf{q}_{t-\Delta t} - \mathbf{q}_{t-2\Delta t}) \quad (2.52)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - 18\mathbf{q}_t + 9\mathbf{q}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{q}_{t-2\Delta t}) \quad (2.53)$$

cujos erros são de ordem Δt^2 .

Para achar a solução no seguinte instante de tempo, considera-se a aproximação da equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$$

no tempo $t + \Delta t$, que resulta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t}. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.52) e (2.53) em (2.54) obtém-se a seguinte expressão para $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{q}_{t+\Delta t} &= \mathbf{f}_{t+\Delta t} + \left(\frac{5}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_t \\ &\quad - \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_{t-\Delta t} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{3\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_{t-2\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde é necessário conhecer previamente os vetores $\mathbf{q}_{\Delta t}$ e $\mathbf{q}_{2\Delta t}$ que podem ser calculados conhecendo \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ e $\ddot{\mathbf{q}}_0$, mediante algum método condicionalmente estável (por exemplo, o método de diferenças centrais ou o de Runge-Kutta, etc.) com passo de tempo igual a uma fração suficientemente pequena de Δt .

Algoritmo para o Método de Integração de Houbolt:

Objetivo: Aproximar a solução $\mathbf{q}(t)$ do problema com valor inicial:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

com um passo de tempo Δt e até o instante de tempo $N\Delta t$.

Entrada: matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , vetor de funções $\mathbf{f}(t)$, passo Δt , número N .

Saída: Vetores aproximados $\mathbf{q}_{i\Delta t}$, $\dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}$, $i = 1, \dots, N$ da solução $\mathbf{q}(t)$ e suas derivadas $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ nos pontos $t = i\Delta t$, $i = 1, \dots, N$.

Passo 1: Fazer: $a_0 = \frac{2}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{11}{6\Delta t}$, $a_2 = \frac{5}{\Delta t^2}$, $a_3 = \frac{3}{\Delta t}$, $a_4 = -2a_0$, $a_5 = \frac{-a_3}{2}$,
 $a_6 = \frac{a_0}{2}$, $a_7 = \frac{a_3}{9}$.

Passo 2: Obter $\mathbf{q}_{\Delta t}$ e $\mathbf{q}_{2\Delta t}$ mediante algum procedimento especial;

Escrever $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_{\Delta t}, \mathbf{q}_{2\Delta t})$.

Passo 3: Fazer: $\mathbf{K}^e = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$ (matriz de rigidez efetiva).

Passo 4: Para $i = 2 : N - 1$ efetuar os passos 5-7:

Passo 5: Fazer

$$\mathbf{F}_{(i+1)\Delta t}^e = \mathbf{F}_{(i+1)\Delta t} + \mathbf{M}(a_2\mathbf{q}_{i\Delta t} + a_4\mathbf{q}_{(i-1)\Delta t} + a_6\mathbf{q}_{(i-2)\Delta t})$$

$$+\mathbf{C}(a_3\mathbf{q}_{i\Delta t} + a_5\mathbf{q}_{(i-1)\Delta t} + a_7\mathbf{q}_{(i-2)\Delta t}).$$

Passo 6: Resolver:

$$\mathbf{K}^e\mathbf{q}_{(i+1)\Delta t} = \mathbf{F}_{(i+1)\Delta t}^e;$$

Escrever $(\mathbf{q}_{(i+1)\Delta t})$.

Passo 7: (Opcional) Avaliar acelerações e velocidades:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t} = a_0\mathbf{q}_{(i+1)\Delta t} - a_2\mathbf{q}_{i\Delta t} - a_4\mathbf{q}_{(i-1)\Delta t} - a_6\mathbf{q}_{(i-2)\Delta t},$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t} = a_1\mathbf{q}_{(i+1)\Delta t} - a_3\mathbf{q}_{i\Delta t} - a_5\mathbf{q}_{(i-1)\Delta t} - a_7\mathbf{q}_{(i-2)\Delta t}.$$

Passo 8: Fim do Algoritmo.

A equação (2.55) foi deduzida a partir de (2.54); esta última considera a aproximação da equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$$

no tempo $t + \Delta t$, e por este motivo o método de Houbolt é implícito, diferente do método considerado na subseção 2.4.1.

2.4.3 Método θ de Wilson

O método θ de Wilson é essencialmente uma extensão da aproximação da aceleração média em que a variação entre os instantes de tempo n e $n + 1$ é suposta linear. Quando $\theta = 1.4$ obtêm-se soluções mais precisas e estáveis.

Este método supõe que a aceleração é linear desde o instante t até o instante $t + \theta\Delta t$ com $\theta \geq 1$, quer dizer, se $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$, supomos:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{q}}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{q}}_t). \quad (2.56)$$

Se integramos (2.56) com respeito a τ , obtemos:

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\tau} = \dot{\mathbf{q}}_t + \ddot{\mathbf{q}}_t\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{q}}_t), \quad (2.57)$$

e integrando novamente:

$$\mathbf{q}_{t+\tau} = \mathbf{q}_t + \tau \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{1}{2} \tau^2 \ddot{\mathbf{q}}_t + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{q}}_t). \quad (2.58)$$

Fazendo $\tau = \theta\Delta t$ em (2.57) e (2.58) se chega às seguintes igualdades:

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{\mathbf{q}}_t), \quad (2.59)$$

$$\mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{q}_t + \theta\Delta t \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{q}}_t). \quad (2.60)$$

Resolvendo (2.59) e (2.60), considerando como incógnitas $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t}$ e $\dot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t}$, tem-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} (\mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{q}_t) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_t - 2\ddot{\mathbf{q}}_t, \quad (2.61)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (\mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{q}_t) - 2\dot{\mathbf{q}}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{q}}_t. \quad (2.62)$$

Agora, partindo da aproximação:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} = \bar{\mathbf{f}}_{t+\theta\Delta t}, \quad (2.63)$$

onde $\bar{\mathbf{f}}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{f}_t + \theta(\mathbf{f}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{f}_t)$, isto é, utiliza-se o vetor de forças externas como a projeção linear de \mathbf{f}_t . Substituindo (2.61) e (2.62) em (2.63) obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{\theta^2\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{q}_{t+\theta\Delta t} &= \bar{\mathbf{f}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{M} \left(\frac{6}{\theta^2\Delta t^2} \mathbf{q}_t + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_t + 2\ddot{\mathbf{q}}_t \right) \\ &\quad + \mathbf{C} \left(\frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{q}_t + 2\dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{q}}_t \right), \end{aligned}$$

e usando (2.56), (2.57) e (2.58) com $\tau = \Delta t$, são obtidos sucessivamente os valores de $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$, $\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ e, enfim, $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ que é a aproximação desejada.

A seguir, é apresentado o algoritmo usado em programação :

Algoritmo para o Método θ de Wilson:

Para aproximar a solução $\mathbf{q}(t)$ do problema com valores iniciais:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0},\end{aligned}$$

com um passo de tempo Δt e até o instante de tempo $N\Delta t$.

Entrada: matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , vetor de funções $\mathbf{f}(t)$, passo Δt , número N , parâmetro θ .

Saída: Vetores aproximados $\mathbf{q}_{i\Delta t}$, $\dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}$, $i = 1, \dots, N$ da solução $\mathbf{q}(t)$ e suas derivadas $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ nos pontos $t = i\Delta t$, $i = 1 : N$.

Passo 1: Fazer: $a_0 = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2}$, $a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t}$, $a_2 = -2a_1$, $a_3 = \frac{\theta \Delta t}{2}$, $a_4 = \frac{a_0}{\theta}$, $a_5 = \frac{-a_2}{\theta}$,
 $a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}$, $a_7 = \frac{\Delta t}{2}$, $a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$.

Passo 2: Fazer: $\mathbf{K}^e = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$ (matriz de rigidez efetiva).

Passo 3: Para $i = 0, \dots, N - 1$ efetuar os passos 4-6:

Passo 4: Fazer

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{(i+\theta)\Delta t}^e &= \mathbf{f}_{i\Delta t} + \theta(\mathbf{f}_{(i+1)\Delta t} - \mathbf{f}_{i\Delta t}) + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{q}_{i\Delta t} + a_2 \dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}) \\ &\quad + \mathbf{C}(a_1 \mathbf{q}_{i\Delta t} + 2\dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + a_3 \ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}).\end{aligned}$$

Passo 5: Resolver:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}_{(i+\theta)\Delta t} = \mathbf{f}_{(i+\theta)\Delta t}^e.$$

Passo 6: Fazer:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t} &= a_4(\mathbf{q}_{(i+\theta)\Delta t} - \mathbf{q}_{i\Delta t}) + a_5 \dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + a_6 \ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}; \\ \dot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + a_7(\ddot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t} + \ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}); \\ \mathbf{q}_{(i+1)\Delta t} &= \mathbf{q}_i + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + a_8(\ddot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}); \\ &\text{Escrever } \mathbf{q}_{(i+1)\Delta t}.\end{aligned}$$

Passo 7: Fim do Algoritmo.

2.4.4 Método de Newmark

Em 1959, Newmark apresentou um método implícito para a solução de problemas em dinâmica estrutural. O algoritmo assume que a aceleração média é constante sobre um passo de tempo de integração. Em 1983, Belytschko and Hughes, [BEL 83], documentaram a família β de Newmark conseguindo métodos implícitos ou explícitos dependendo das escolhas dos dois parâmetros livres que controlam a estabilidade e precisão dos algoritmos. Como esquema implícito, o método de Newmark é incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem. Como esquema explícito, o método de Newmark é só condicionalmente estável e com precisão de segunda ordem.

Este método, como o anterior, supõe que a aceleração $\ddot{\mathbf{q}}_t$ é linear, isto é,

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\beta\Delta t} = (1 - \beta)\ddot{\mathbf{q}}_t + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}, \quad \text{para } 0 < \beta < 1$$

e considera as seguintes equações que são aproximações de Taylor de primeira e segunda ordem da velocidade e do deslocamento no tempo $t + \Delta t$, respectivamente,

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + [(1 - \delta)\ddot{\mathbf{q}}_t + \delta\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}] \Delta t, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \dot{\mathbf{q}}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{q}}_t + \alpha \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \quad (2.65)$$

onde os parâmetros α e δ podem ser determinados de modo que se obtenha estabilidade e precisão. Se $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/6$, as equações (2.64) e (2.65) correspondem ao método θ de Wilson com $\theta = 1$ (ver as equações (2.59) e (2.60)). Com $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$ obtém-se um método incondicionalmente estável.

Utiliza-se a aproximação :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t}, \quad (2.66)$$

para determinar $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ do seguinte modo: a partir de (2.65) obtem-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_t, \quad (2.67)$$

e substituindo (2.67) em (2.64) tem-se:

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{\mathbf{q}}_t + \left(2 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \ddot{\mathbf{q}}_t, \quad (2.68)$$

por último substitui-se (2.67) e (2.68) em (2.66) para obter $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$.

Para controlar o amortecimento algorítmico, têm sido feitas extensões e/ou modificações utilizando a família Newmark de esquemas trapezoidais como ponto inicial. O método α de Hilber-Hughes-Taylor (HHT), [HIL 77], entre muitos outros, apresenta formulações com o propósito de controlar o amortecimento algorítmico.

O algoritmo computacional para o método de Newmark é apresentado a seguir:

Algoritmo para o Método de Newmark:

Objetivo: Aproximar a solução $\mathbf{q}(t)$ do problema com valores iniciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

com um passo de tempo Δt , desde o instante de tempo $t = 0$ até o instante de tempo $N\Delta t$.

Entrada: matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , vetor de funções $\mathbf{f}(t)$, passo Δt , número N , parâmetros δ e α .

(Se recomenda $\delta \geq 0.5$ e $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta^2)$.)

Saída: Vetores aproximados $\mathbf{q}_{i\Delta t}$, $\dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}$, $i = 1, \dots, N$ da solução $\mathbf{q}(t)$

e suas derivadas $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ nos pontos $t = i\Delta t$, $i = 1, \dots, N$.

Passo 1: Fazer: $a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}$, $a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}$, $a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$, $a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$,
 $a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$, $a_6 = \Delta t(1 - \delta)$, $a_7 = \delta\Delta t$.

Passo 2: Fazer: $\mathbf{K}^e = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$ (matriz de rigidez efetiva).

Passo 3: Para $i = 0, \dots, N - 1$ efetuar os passos 4-6:

Passo 4: Fazer

$$\mathbf{f}_{(i+1)\Delta t}^e = \mathbf{f}_{(i+1)\Delta t} + \mathbf{M}(a_0\mathbf{q}_{i\Delta t} + a_2\dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + a_3\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}) \\ + \mathbf{C}(a_1\mathbf{q}_{i\Delta t} + a_4\dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + a_5\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}).$$

Passo 5: Resolver:

$$\mathbf{K}^e\mathbf{q}_{(i+1)\Delta t} = \mathbf{f}_{(i+1)\Delta t}^e; \\ \text{Escrever } (\mathbf{q}_{(i+1)\Delta t}).$$

Passo 6: Fazer:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t} = a_0(\mathbf{q}_{(i+1)\Delta t} - \mathbf{q}_{i\Delta t}) - a_2\dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} - a_3\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t}; \\ \dot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + a_6(\ddot{\mathbf{q}}_{i\Delta t} + a_7\ddot{\mathbf{q}}_{(i+1)\Delta t}).$$

Passo 7: Fim do Algoritmo.

2.4.5 O Método α Generalizado

Na verdade, trata-se de uma família de algoritmos de integração no domínio do tempo apresentada por Chung e Hulbert, 1993, [BEL 83], que inclui vários algoritmos clássicos. Mediante a manipulação dos parâmetros deste método, pode-se controlar a dissipação numérica que acontece nos modos de altas frequências.

O método é dado pelas seguintes equações

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_t + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_t + \beta \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} \right), \quad (2.69)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} \right) \quad (2.70)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+(1-\alpha_m)\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+(1-\alpha_f)\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+(1-\alpha_f)\Delta t} = \mathbf{f}_{t+(1-\alpha_f)\Delta t} \quad (2.71)$$

onde

$$\mathbf{q}_{t+(1-\alpha_f)\Delta t} = (1 - \alpha_f)\mathbf{q}_{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{q}_t, \quad (2.72)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+(1-\alpha_f)\Delta t} = (1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \alpha_f\dot{\mathbf{q}}_t, \quad (2.73)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+(1-\alpha_f)\Delta t} = (1 - \alpha_f)\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \alpha_f\ddot{\mathbf{q}}_t, \quad (2.74)$$

e as condições iniciais são \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ e

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{q}_0. \quad (2.75)$$

A escolha adequada dos parâmetros α_m , α_f , β e γ reduz o método (2.69)-(2.71) para o método α -HHT, [HIL 77], o método α -WBZ, [WOO 81], e o método de Newmark.

2.5 Métodos Recursivos

A forma geral dos métodos recursivos é

$$\begin{aligned} \mathbf{q}((n+1)\Delta t) &= \mathbf{A}_1\mathbf{q}(n\Delta t) + \mathbf{A}_2\mathbf{q}((n-1)\Delta t) + \cdots + \mathbf{A}_M\mathbf{q}((n-M+1)\Delta t) \\ &\quad + \mathbf{B}_0\mathbf{f}(n\Delta t) + \mathbf{B}_1\mathbf{f}((n-1)\Delta t) + \cdots + \mathbf{B}_L\mathbf{f}((n-L)\Delta t) \end{aligned}$$

ou, de maneira compacta,

$$\mathbf{q}((n+1)\Delta t) = \sum_{k=1}^M \mathbf{A}_k\mathbf{q}((n-k+1)\Delta t) + \sum_{k=0}^L \mathbf{B}_k\mathbf{f}((n-k)\Delta t) \quad (2.76)$$

onde as matrizes \mathbf{A}_k , $k = 1, \dots, M$ e as matrizes \mathbf{B}_k , $k = 0, \dots, L$ são determinadas mediante certos critérios.

O esquema recursivo (2.76) calcula o valor “futuro” $\mathbf{q}((n+1)\Delta t)$ usando o valor “presente” $\mathbf{q}(n\Delta t)$, os $M-1$ valores anteriores $\mathbf{q}((n-k)\Delta t)$, $k = 1, \dots, M-1$ e a informação referente à carga.

A escolha dos coeficientes matriciais de uma equação recursiva de tipo (2.76) não é única. Uma opção pode ser o denominado *Método Invariante do Impulso*, [WOL 88], que estabelece os coeficientes \mathbf{A}_k e \mathbf{B}_k de maneira que a formulação recursiva resultante seja exata para um tipo específico de entrada $\mathbf{f}(t)$. O resultado é um sistema linear de equações com incógnitas \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k .

2.5.1 Método Invariante do Impulso

O objetivo é calcular a integral de convolução

$$\mathbf{q}_{n+1} \doteq \mathbf{q}((n+1)\Delta t) = \int_0^{(n+1)\Delta t} \mathbf{h}(t-s)\mathbf{f}(s)ds \quad (2.77)$$

mediante o conhecimento *a priori* das integrais

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n &\doteq \mathbf{q}(n\Delta t) = \int_0^{n\Delta t} \mathbf{h}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \\ \mathbf{q}_{n-1} &\doteq \mathbf{q}((n-1)\Delta t) = \int_0^{(n-1)\Delta t} \mathbf{h}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \\ &\vdots \\ \mathbf{q}_{n-M} &\doteq \mathbf{q}((n-M)\Delta t) = \int_0^{(n-M)\Delta t} \mathbf{h}(t-s)\mathbf{f}(s)ds \end{aligned}$$

e os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n &\doteq \mathbf{f}(n\Delta t), \\ \mathbf{f}_{n-1} &\doteq \mathbf{f}((n-1)\Delta t), \\ &\vdots \\ \mathbf{f}_{n-L} &\doteq \mathbf{f}((n-L)\Delta t). \end{aligned}$$

Especificamente, a formulação recursiva é

$$\mathbf{q}_{n+1} = \sum_{k=1}^M \mathbf{A}_k \mathbf{q}_{n-k+1} + \sum_{k=0}^L \mathbf{B}_k \mathbf{f}_{n-k} \quad (2.78)$$

onde \mathbf{A}_k e \mathbf{B}_k são matrizes a serem determinadas.

As $M + L + 1$ matrizes não conhecidas, \mathbf{A}_k e \mathbf{B}_k , na equação (2.78) são calculadas resolvendo um sistema de equações estabelecidas igualando a formulação exata e a recursiva para uma entrada de tipo impulso unitário discretizada.

A entrada de tipo impulso unitário discretizada pode ser aplicada na forma de um triângulo (zero em $t = \Delta t$, crescente linearmente até $t = \Delta t$ onde o valor é $\frac{1}{\Delta t}$ e depois decrescente linearmente até $t = 2\Delta t$ onde o valor é zero novamente), como é mostrado na figura 2.1 .

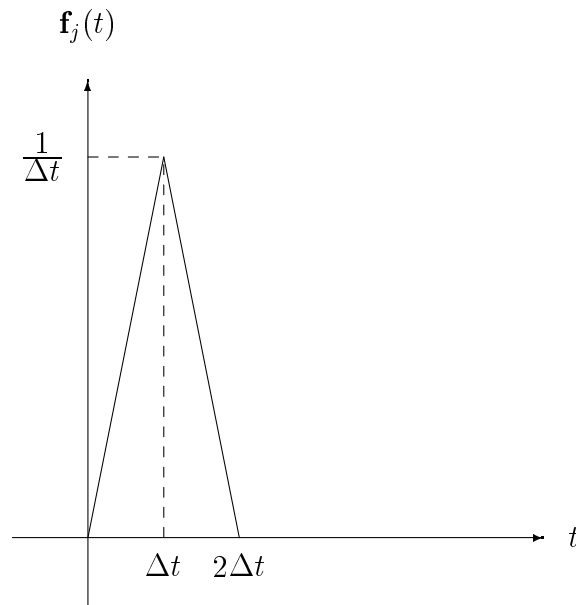


Figura 2.1 *Componente Escalar do Impulso Unitário Discretizado*

A forma algébrica da discretização do impulso unitário mediante um pulso triangular é

$$\mathbf{f}(t) = \frac{t}{\Delta t} [u(t) - u(t - \Delta t)] \begin{bmatrix} 1/\Delta t \\ \vdots \\ 1/\Delta t \end{bmatrix} + \left(1 - \frac{t - \Delta t}{\Delta t}\right) [u(t - \Delta t) - u(t - 2\Delta t)] \begin{bmatrix} 1/\Delta t \\ \vdots \\ 1/\Delta t \end{bmatrix}; \quad (2.79)$$

aqui, $u(t)$ é a função de Heaviside, isto é,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ 1, & \text{se } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.80)$$

Substituindo (2.79) em (2.77) consegue-se

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{S}_{n-1} \begin{bmatrix} 1/\Delta t \\ \vdots \\ 1/\Delta t \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

onde, para $n > 1$

$$\mathbf{S}_{n-1} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{h}(n\Delta t - s) \frac{s}{\Delta t} ds + \int_0^{\Delta t} \mathbf{h}((n-1)\Delta t - s) \left(1 - \frac{s}{\Delta t}\right) ds \quad (2.82)$$

e, para $n = 1$

$$\mathbf{S}_0 = \int_0^{\Delta t} \mathbf{h}(\Delta t - s) \frac{s}{\Delta t} ds \quad (2.83)$$

2.5.1.1 Caso $M = 1$ e $L = 1$

Quando $M = 1$ e $L = 1$, tem-se a recursão

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_n + \Delta t (\mathbf{B}_0 \mathbf{f}_n + \mathbf{B}_1 \mathbf{f}_{n-1}) \quad (2.84)$$

onde \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_1 são matrizes a serem determinadas utilizando a entrada descrita em (2.79).

Então, a partir de (2.84) tem-se

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad (2.85)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_0 + \Delta t \mathbf{B}_0 \mathbf{f}_1 + \Delta t \mathbf{B}_1 \mathbf{f}_0, \quad (2.86)$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_1 + \Delta t \mathbf{B}_0 \mathbf{f}_2 + \Delta t \mathbf{B}_1 \mathbf{f}_1, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_2 + \Delta t \mathbf{B}_0 \mathbf{f}_3 + \Delta t \mathbf{B}_1 \mathbf{f}_2, \quad (2.88)$$

e utilizando (2.81) no lado esquerdo das igualdades (2.86), (2.87) e (2.88) e os valores de $\mathbf{f}(t)$ dados por (2.79), obtem-se

$$\mathbf{S}_0 = \Delta t \mathbf{B}_0, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_0 + \Delta t \mathbf{B}_1, \quad (2.90)$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_1, \quad (2.91)$$

donde têm-se determinadas as matrizes:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S}_0, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{S}_0,] \quad (2.93)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1^{-1}. \quad (2.94)$$

Observação: O método invariante do impulso nem sempre é estável, porque as matrizes \mathbf{A}_k podem ter autovalores com valor absoluto maior que 1, fazendo com

que o método seja divergente. Tal é o caso quando são consideradas as matrizes,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -10 & 0 \\ -10 & 100 & -10 \\ 0 & -10 & 50 \end{bmatrix}. \quad (2.95)$$

Neste caso, para $\Delta t = 0.01$, a matriz \mathbf{A}_1 está dada por

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1.9809, & 0.1895 \times 10^{-2} & 0.9719 \times 10^{-6} \\ 0.1895 \times 10^{-2} & 1.9809 & 0.1896 \times 10^{-2} \\ 0.9719 \times 10^{-6} & 0.1896 \times 10^{-2} & 1.9859 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

cujos autovalores são 1.978776800, 1.982392319, 1.986621662, todos com valor absoluto maior que 1. Observa-se, portanto, que o método neste caso diverge. Para este exemplo, fizeram-se várias tentativas mudando o valor de Δt , chegando à conclusão que o método é muito sensível às mudanças de Δt pois se for muito pequeno ou muito grande, o método fica instável. Para $\Delta t = 0.001$ é atingida a estabilidade.

3 ABORDAGEM DIRETA PARA SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

3.1 Introdução

Em diversas aplicações da engenharia, os modelos vibratórios exibem amortecimento. Porém a ausência de um modelo matemático universal para representar as forças de amortecimento dificulta o seu entendimento. Um modelo comumente utilizado e muito restrito, proposto por Rayleigh, supõe que as velocidades generalizadas instantâneas são as únicas variáveis de estado relevantes. É importante observar que o modelo de Rayleigh não é o único modelo linear de amortecimento. Por exemplo, as forças de amortecimento podem depender de valores de outras magnitudes, ou equivalentemente, depender, mediante integrais de convolução, do registro passado do movimento, veja [WOO 98].

Este capítulo considera a dinâmica de um sistema linear de n graus de liberdade governado pela equação diferencial matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são as matrizes $n \times n$ de inércia, amortecimento e rigidez, respectivamente, e $\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ são vetores $N \times 1$ da resposta e excitação externa, respectivamente.

A abordagem mais comum para resolver a equação (3.1) tem sido a *análise modal*: supõe-se que as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{C} são reais, simétricas e definidas positivas e \mathbf{K} é real, simétrica e semidefinida positiva, de maneira que o sistema tem *modos* de corpo rígido. Um sistema possui *modos normais clássicos* quando é não-amortecido, isto é, quando $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Mediante uma transformação de coordenadas, a equação (3.1) é posta em um sistema de coordenadas em que as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} são diagonais. Este sistema de coordenadas é denominado *coordenadas*

modais. Neste caso, a resolução das equações é simplificada, pois as equações de movimento ficam desacopladas nas coordenadas modais. Cada uma das equações desacopladas pode ser tratada independentemente. Esta análise pode ser estendida ao caso amortecido se o amortecimento é clássico (quando uma transformação de coordenadas desacopla não só as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} como também a matriz \mathbf{C}). A condição para isto acontecer foi deduzida por Caughey, [CAU 60]: as matrizes $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ devem comutar. Isto foi ainda generalizado para sistemas contínuos por Caughey e O’Kelly, [CAU 65]: os operadores de rigidez e amortecimento devem comutar nas coordenadas modais. Para o amortecimento não clássico, é preciso um procedimento mais geral, [FOS 58]. É freqüente, neste caso, ignorar os termos fora da diagonal da matriz de amortecimento modal (amortecimento fracamente aproximado), [GAL 99].

A abordagem usual para estudar sistemas da forma (3.1) com coeficientes matriciais arbitrários tem sido a transformação em um sistema de primeira ordem equivalente. Porém, isto implica deixar de lado as coordenadas físicas que são de interesse nos problemas práticos, bem como perder propriedades intrínsecas do sistema, como por exemplo, a simetria quando os coeficientes matriciais são simétricos.

Do ponto de vista numérico, tem-se utilizado extensivamente os métodos diretos de integração tais como as famílias Houbolt, Wilson e Newmark, [BAT 76].

Na seção seguinte, descreve-se brevemente a abordagem de Claeysen, [CLA 90a], para a equação matricial de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.2)$$

sem o uso de redução de Hamilton a primeira ordem. Isto é feito através da resposta impulso matricial.

O tratamento dado aqui está baseado na transformada de Laplace. Isto permite relacionar diretamente a resposta impulso matricial à matriz de transferência. Uma formulação explícita é dada em termos de uma equação diferencial característica escalar e uma equação matricial discreta. Isto permite estabelecer várias propriedades de sistemas de segunda ordem. Por exemplo, permite estender propriedades tais como a identidade de Cayley-Hamilton, relações de tipo semi-grupo e uma caracterização de autovetores. Esta abordagem pode ser facilmente generalizada para sistemas contínuos e discretos de ordem superior.

3.2 Abordagem Direta

Nesta seção, descreve-se a abordagem direta para equações diferenciais matriciais de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.3)$$

sem reduzir a um sistema de primeira ordem mediante a formulação da matriz companheira.

A solução da equação (3.3) está dada por

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{h}_0(t)\mathbf{q}(0) + \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(0) + \int_0^t \mathbf{h}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \quad (3.4)$$

onde

$$\mathbf{h}_0(t) = \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{C}. \quad (3.5)$$

e a função $\mathbf{h}(t)$ é a *resposta impulso matricial*, isto é, uma função de valores matriciais que satisfaz a equação diferencial

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(0^+) &= \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}(0^+) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{C} + \mathbf{h}\mathbf{K}(t) &= \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{h}}(0^+)\mathbf{M} &= \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}(0^+) = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde \mathbf{I} denota a matriz identidade.

Do ponto de vista físico, o impulso matricial $\mathbf{f}(t) = \delta(t)\mathbf{I}$, aplicado a um sistema de segunda ordem inicialmente em repouso, produz uma mudança no momento. Portanto, a resposta impulso matricial pode ser idealizada como a resposta de um sistema em repouso quando $t < 0$ no qual foi aplicado um impulso unitário no instante $t = 0$, isto é

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) = \delta(t)\mathbf{I}, \quad \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}.\tag{3.8}$$

Os elementos $\mathbf{h}_{kj}(t)$ da resposta impulso matricial são interpretados como a resposta da k -ésima componente do sistema devido a um momento inicial (ou força impulso unitária) na j -ésima componente.

3.3 Fórmula Fechada para a Resposta Impulso Matricial

Mediante uma abordagem operacional [CLA 90a], [CLA 99], consegue-se a fórmula fechada para a resposta impulso matricial:

$$\boxed{\mathbf{h}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \mathbf{h}_{2n-j}}\tag{3.9}$$

onde

- Os escalares b_i são os coeficientes do polinômio característico associado à equação (3.3), isto é,

$$P(s) = \det [s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K}] = \sum_{i=0}^{2n} b_i s^{2n-i} \quad (3.10)$$

- A função escalar $d(t)$ é a solução da equação diferencial

$$b_0 d^{(2n)}(t) + b_1 d^{(2n-1)}(t) + \dots + b_{2n-1} d'(t) + b_{2n} d(t) = 0, \quad (3.11)$$

com os valores iniciais impulsivos

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(2n-2)}(0) = 0, \quad b_0 d^{(2n-1)}(0) = 1. \quad (3.12)$$

- As matrizes escalares \mathbf{h}_j são solução da recursão matricial

$$\mathbf{M}\mathbf{h}_j = -\mathbf{C}\mathbf{h}_{j-1} - \mathbf{K}\mathbf{h}_{j-2}, \quad (3.13)$$

com os valores iniciais

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}\mathbf{h}_1 = \mathbf{I}.$$

Também tem-se uma fórmula fechada para as derivadas da resposta impulso matricial

$$\mathbf{h}^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \mathbf{h}_{2n-j+k} \quad (3.14)$$

3.4 Relação com a Matriz Companheira

A *matriz companheira* da equação de segunda ordem (3.3) é uma matriz de ordem $2n \times 2n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

De acordo com [CLA 99],

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0(t) & \mathbf{h}(t)\mathbf{M} \\ \dot{\mathbf{h}}_0(t) & \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Derivando a matriz exponencial na origem, obtém-se a seguinte representação em blocos para as potências da matriz companheira

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{0,k} & \mathbf{h}_k\mathbf{M} \\ \mathbf{h}_{0,k+1} & \mathbf{h}_{k+1}\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

onde $\mathbf{h}_{0,k} = \mathbf{h}_0^{(k)}(0)$ satisfaz a equação diferencial em diferenças

$$\mathbf{M}\mathbf{h}_{0,k} = -\mathbf{C}\mathbf{h}_{0,k-1} - \mathbf{K}\mathbf{h}_{0,k-2}$$

com valores iniciais $\mathbf{h}_{0,0} = \mathbf{I}$ and $\mathbf{h}_{0,1} = \mathbf{0}$.

São enunciadas, a seguir, duas propriedades de translação para a resposta impulso, que são uma extensão da propriedade exponencial de semigrupos para sistemas de primeira ordem

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(t+s) &= \mathbf{h}_0(t)\mathbf{h}(s) + \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(s), \\ \dot{\mathbf{h}}(t+s) &= \dot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{h}(s) + \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(s). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Essas propriedades são uma extensão daquelas para as funções matriciais seno e cosseno que aparecem em sistemas conservativos ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$)

As propriedades (3.18) são denominadas aqui as *propriedades de semi-grupos estendidas* para sistemas de segunda ordem.

3.5 Comentários Finais

A determinação analítica da resposta impulso matricial $\mathbf{h}(t)$ nem sempre é possível tentando o uso da abordagem espectral (análise modal), pois as matrizes $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ e $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ em geral não são comutáveis. Tal determinação só seria possível com a redução de Hamilton à primeira ordem, que aumenta a dificuldade do problema, por duplicar o número de graus de liberdade e por perder a simetria do sistema.

Com o uso da abordagem de Claeysen, esta dificuldade é satisfatoriamente superada, pois não há hipótese alguma sobre a matriz de amortecimento \mathbf{C} . Isto resolve o problema de maneira analítica.

4 CÁLCULO RECURSIVO DIRETO DA INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

Neste capítulo, o objetivo também é calcular a integral de convolução

$$\mathbf{q}_n \equiv \mathbf{q}(n\Delta t) = \int_0^{n\Delta t} \mathbf{h}(t-s)\mathbf{f}(s)ds \quad (4.1)$$

através das propriedades de translação enunciadas na equação (3.18).

4.1 Dedução do Método

A recursão obtida é exata para qualquer tipo de termo forçante, $\mathbf{f}(t)$, sendo esta a diferença principal com respeito ao método de Wolf apresentado na subseção 2.5.1.

Denotando por

$$\mathbf{q}_n \equiv \int_0^{n\Delta t} \mathbf{h}(n\Delta t - s)\mathbf{f}(s)ds \quad (4.2)$$

e

$$\dot{\mathbf{q}}_n \equiv \int_0^{n\Delta t} \dot{\mathbf{h}}(n\Delta t - s)\mathbf{f}(s)ds \quad (4.3)$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \int_0^{(n+1)\Delta t} \mathbf{h}((n+1)\Delta t - s)\mathbf{f}(s)ds \\ &= \int_0^{n\Delta t} \mathbf{h}(\Delta t + n\Delta t - s)\mathbf{f}(s)ds + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{h}((n+1)\Delta t - s)\mathbf{f}(s)ds \\ &= \mathbf{h}_0(\Delta t) \int_0^{n\Delta t} \mathbf{h}(n\Delta t - s)\mathbf{f}(s)ds + \mathbf{h}(\Delta t)\mathbf{M} \int_0^{n\Delta t} \dot{\mathbf{h}}(n\Delta t - s)\mathbf{f}(s)ds \\ &\quad + \int_0^{\Delta t} \mathbf{h}(\Delta t - s)\mathbf{f}(s + n\Delta t)ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde, para obter a última igualdade, tem-se utilizado a primeira das propriedades (3.18).

Portanto,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{h}_0(\Delta t)\mathbf{q}_n + \mathbf{h}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_n + \int_0^{\Delta t} \mathbf{h}(\Delta t - s)\mathbf{f}(s + n\Delta t)ds. \quad (4.5)$$

Similarmente,

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{h}}_0(\Delta t)\mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{h}}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_n + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{h}}(\Delta t - s)\mathbf{f}(s + n\Delta t)ds. \quad (4.6)$$

Consegue-se, enfim, o seguinte esquema recursivo analítico

$$\begin{array}{l} \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{h}_0(\Delta t)\mathbf{q}_n + \mathbf{h}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_n + \int_0^{\Delta t} \mathbf{h}(\Delta t - s)\mathbf{f}(s + n\Delta t)ds \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{h}}_0(\Delta t)\mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{h}}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_n + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{h}}(\Delta t - s)\mathbf{f}(s + n\Delta t)ds \end{array} \quad (4.7)$$

Estas equações recursivas devem ser utilizadas simultaneamente. Observe-se que $\mathbf{q}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ e que \mathbf{q}_1 é a integral de convolução de 0 a Δt que pode ser calculada aproximadamente por quadratura ou pelas fórmulas de Newton-Cotes. O vetor $\dot{\mathbf{q}}_1$ também pode ser calculado de maneira análoga.

As integrais das equações recursivas para $n \geq 1$ podem ser calculadas também mediante integração numérica. Por exemplo, pode-se utilizar a aproximação trapezoidal nos pontos $t = 0$ e $t = \Delta t$:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{h}(\Delta t - s)\mathbf{f}(s + n\Delta t)ds \approx \frac{\Delta t}{2}\mathbf{h}(\Delta t)\mathbf{f}(n\Delta t) \quad (4.8)$$

e

$$\int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{h}}(\Delta t - s)\mathbf{f}(s + n\Delta t)ds \approx \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{h}}(\Delta t)\mathbf{h}(\Delta t)\mathbf{f}(n\Delta t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}((n+1)\Delta t)) \quad (4.9)$$

Substituindo as equações (4.8) e (4.9) no esquema (4.7), obtém-se um método recursivo aproximado:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{h}_0(\Delta t)\mathbf{q}_n + \mathbf{h}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{h}(\Delta t)\mathbf{f}_n \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{h}}_0(\Delta t)\mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{h}}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{h}}(\Delta t)\mathbf{h}(\Delta t)\mathbf{f}_n + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde

$$\mathbf{f}_n \doteq \mathbf{f}(n\Delta t) \quad (4.11)$$

4.2 Comentários Finais

O método exposto neste capítulo não torna-se restrito pela condição de ser exato para um tipo específico de entrada. Pode-se observar que o esquema (4.7) é exato independentemente do tipo da função $\mathbf{f}(t)$.

As integrais (4.8) e (4.9) podem ser calculadas mediante esquemas aproximados de integração mais sofisticados para atingir maior precisão. Por exemplo, tem-se as fórmulas de Newton-Cotes de ordem 8, disponíveis em softwares numéricos, ou os esquemas de quadratura de Gauss, que podem ser encontrados na literatura.

Uma vantagem computacional notável do esquema (4.10) é que só se precisa o conhecimento do registro $\mathbf{h}(t)$ desde $t = 0$ até $t = \Delta t$.

5 SIMULAÇÕES E APLICAÇÕES

Neste capítulo, são apresentadas simulações numérico-simbólicas de pequeno porte para verificar a exatidão do método recursivo apresentado no capítulo anterior.

Além disso, são apresentados modelos de parâmetros concentrados para diversas estruturas da engenharia civil, com aplicação de mecanismos de controle da vibração.

5.1 Simulação Simbólico-Numérica

Para fins de verificação teórica, são consideradas as matrizes,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & 10 & 0 \\ 10 & 100 & 10 \\ 0 & 10 & 50 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

que podem ser deduzidas a partir de modelos massa-mola-amortecedor com três graus de liberdades.

O programa de computador escolhido foi o *Maple V5*, pela familiaridade da autora com o programa. Vale a pena mencionar que poderia ter sido escolhido qualquer outro software simbólico tal como o *Mathematica*.

A figura 5.1 mostra as três componentes da saída (solução) da equação diferencial matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$$

com condições iniciais nulas, sendo a função $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t/4} \cos(10t) \\ \frac{(t^2 + 2) \cos(5t)}{t^2 + 1} \\ \frac{t \operatorname{sen}(10t)}{t^4 + 1} \end{bmatrix}$

Para a implementação computacional foi utilizado o Maple V5, sendo calculada a fórmula fechada de $\mathbf{h}(t)$:

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \mathbf{h}_{2n-j}.$$

Neste caso, devido ao tamanho do problema e à ordem de grandeza das quantidades envolvidas, conseguiu-se calcular simbolicamente a função $d(t)$ e suas derivadas, resolvendo a equação diferencial (3.11)-(3.12). Os coeficientes b_i do polinômio característico foram calculados facilmente a partir do $\det [s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K}]$ e as matrizes \mathbf{h}_j foram obtidas utilizando a relação recursiva (3.13).

Após calcular $\mathbf{h}(t)$ simbolicamente, utilizou-se o esquema 4.10

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{h}_0(\Delta t) \mathbf{q}_n + \mathbf{h}(\Delta t) \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{h}(\Delta t) \mathbf{f}_n$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{h}}_0(\Delta t) \mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{h}}(\Delta t) \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{h}}(\Delta t) \mathbf{h}(\Delta t) \mathbf{f}_n + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_{n+1})$$

com um tamanho de passo $\Delta t = 0.01$.

A solução “exata” foi calculada mediante a avaliação direta dos componentes da integral de convolução

$$\int_0^t \mathbf{h}(t-s) \mathbf{f}(s) ds.$$

Devido à forma funcional das componentes de $\mathbf{f}(t)$, a avaliação exata não é possível. Foi necessário o uso de um esquema aproximado de integração (o esquema de Simpson com 500 pontos).

A superposição dos gráficos azul (solução aproximada) e vermelho (solução “exata”) da resposta $q_j(t)$, $j = 1 : 3$ na figura 5.1 mostra a validade analítica do método.

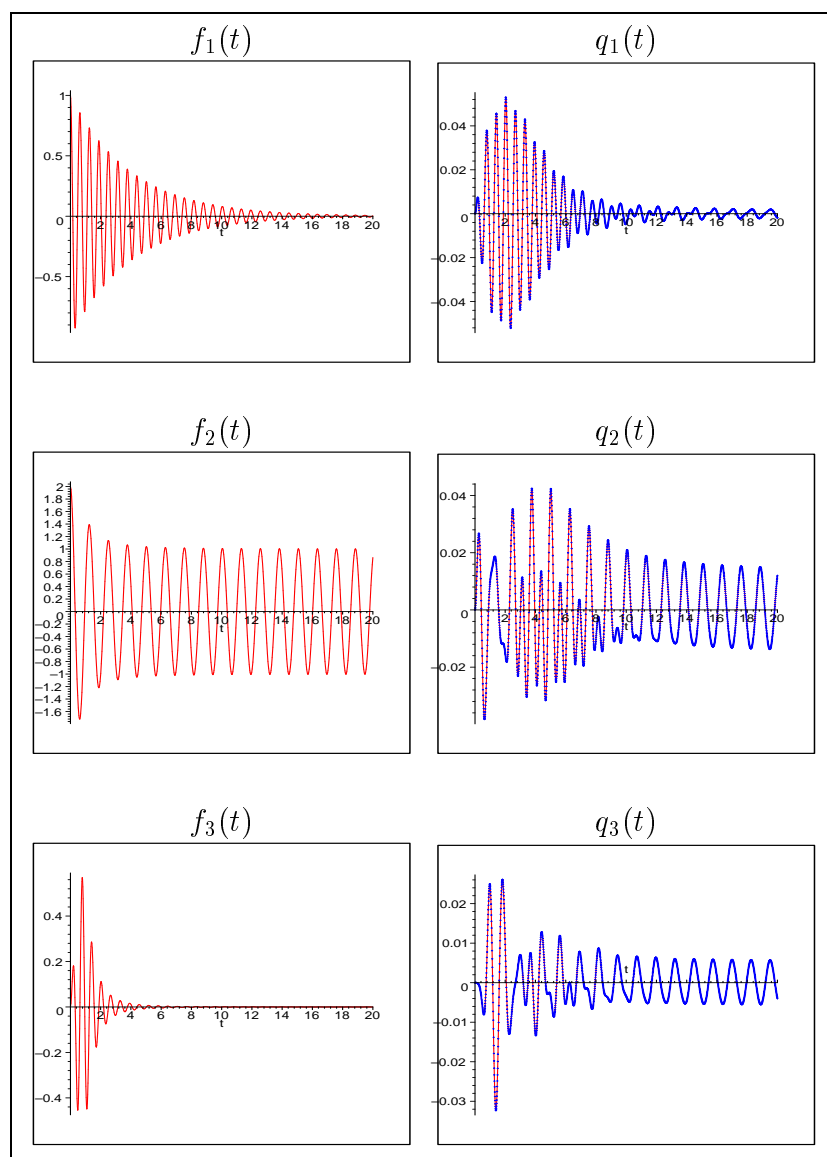


Figura 5.1 Componentes da entrada e componentes da saída: em vermelho a solução simbólica exata e em azul a solução numérica aproximada

5.2 Comentário Sobre a Ordem Computacional

Nesta seção, fazem-se alguns comentários relevantes sobre os diversos métodos encontrados na literatura e na prática e o método recursivo proposto.

Quanto aos métodos comumente utilizados na engenharia, globalmente resumidos no método α generalizado apresentado na subseção 2.4.5, pode-se dizer que a ordem computacional é quadrática, isto é, $\mathcal{O}(n^2)$, pois envolve em cada passo a resolução de um sistema linear de equações pelo esquema de eliminação de Gauss. O método iterativo proposto também é de ordem quadrática, pois só envolve multiplicação matricial. Este fato implica em alguma redução do tempo computacional para sistemas médios e grandes.

Porém, o esquema recursivo de Wolf, apresentado na seção 2.5 também é de ordem quadrática, $\mathcal{O}(n^2)$. Mas o fato desse esquema ser exato só para um certo tipo de funções, diminui o tamanho de passo Δt para atingir convergência, como é mostrado por [CAN 00]. Vale a pena mencionar que o método de Wolf também requer o conhecimento da resposta impulso $\mathbf{h}(t)$ do sistema, e portanto requer a utilização da fórmula (3.9). Esta é uma dificuldade séria para implementar o algoritmo de Wolf pelos métodos clássicos.

5.3 Simulações Numéricas

Nesta seção são apresentadas algumas aplicações obtidas a partir do Maple e do Matlab.

5.3.1 Vibrações Transversais de uma Chaminé Alta

Considere um problema prático: a vibração de uma chaminé industrial alta. Devido ao seu baixo amortecimento, as chaminés são propensas a oscilar

ao vento. Existe uma tendência para que um vento constante gere vórtices que se formam regularmente em lados opostos da chaminé. Conforme os vórtices se formam e desaparecem, desenvolvem uma força alternada sobre a chaminé, e a frequência com que isto ocorre depende da velocidade do vento. Quando a frequência de formação de vórtices está próxima de uma das frequências naturais da chaminé, então as vibrações ganham uma amplitude que, se continuam por muito tempo e a estrutura for metálica, quebram a chaminé devido a fadiga do metal.

Se existe suficiente amortecimento, as oscilações não progredirão embora a frequência de formação de vórtices e a frequência natural da chaminé seja a mesma. Um método de aumentar artificialmente o amortecimento na chaminé é construir a chaminé sobre uma fundação elástica com plataformas de suporte feitas com material de alto amortecimento. Quando a chaminé flexiona, a fundação elástica se deforma e seu alto amortecimento aumenta a taxa de dissipação de energia da chaminé.

Newland, [NEW 89], calcula as frequências naturais e formas modais de um modelo de parâmetros agrupados, com sete graus de liberdade, para uma chaminé na ausência e diante de amortecimento na base. Aqui, considera-se este problema para n graus de liberdade.

A figura 5.2 mostra um modelo de parâmetros concentrados no qual a chaminé é modelada mediante n barras rígidas e sem massa, enlaçadas umas às outras. Em cada junta do modelo, κ representa a rigidez de flexão, m a massa de cada elemento localizada no centro de cada barra, e é igual à massa total da chaminé dividida em n partes, u_i , $i = 1, \dots, n$, são os deslocamentos transversais nos extremos das barras e l representa o comprimento de cada barra e é igual à longitude total da chaminé L dividida em n partes.

O método usado para determinar as equações de movimento do sistema está baseado no Princípio de d'Alembert e considera o equilíbrio rotacional ao redor

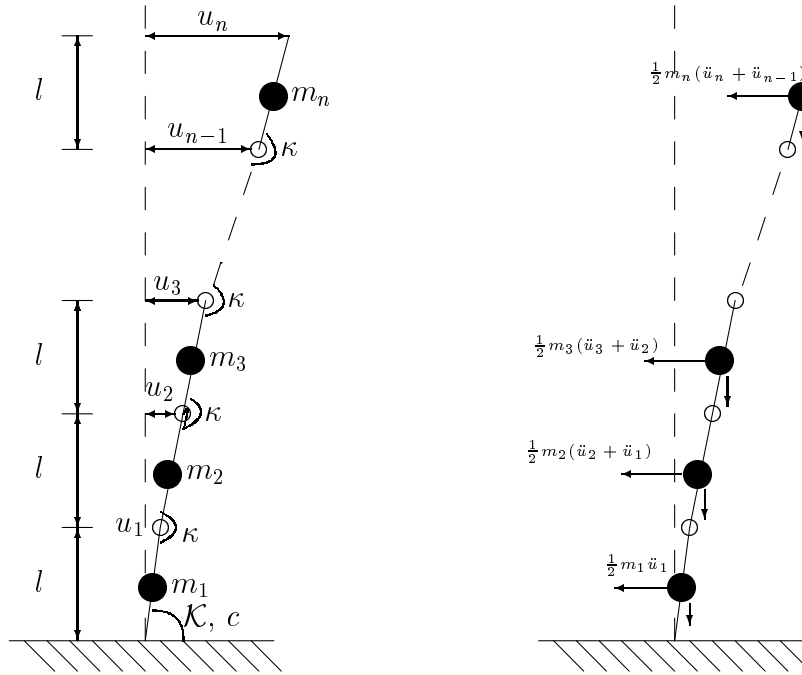


Figura 5.2 *Modelo idealizado de uma chaminé flexível, sobre uma fundação elástica, e as forças que agem em cada massa representativa*

de juntas sucessivas, começando pelo n -ésimo elemento. O Princípio de d'Alembert permite que o problema seja reduzido a um problema estático, supondo que atuem forças (massa \times aceleração) estáticas em cada massa, com direções opostas às das acelerações de cada massa.

Para a barra superior, o equilíbrio rotacional ao redor do enlace requer que

$$\frac{mg}{2}(u_n - u_{n-1}) - \frac{ml}{4}(\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n-1}) = \kappa \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{l} - \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{l} \right); \quad (5.2)$$

para o equilíbrio rotacional das i barras superiores juntas, $i = 2, \dots, n-2$, ao redor da i -ésima junta, contada desde a parte superior é necessário que

$$mg \sum_{j=0}^{i-2} \left(\frac{u_{n-j} + u_{n-j-1}}{2} - u_{n-i} \right) + \frac{mg}{2}(u_{n-i+1} - u_{n-i})$$

$$-\frac{ml}{4} \sum_{j=0}^{i-1} [2(i-j) - 1] (\ddot{u}_{n-j} + \ddot{u}_{n-j-1}) = \kappa \left(\frac{u_{n-i+1} - u_{n-i}}{l} - \frac{u_{n-i} - u_{n-i-1}}{l} \right) \quad (5.3)$$

e, para a $(n-1)$ -ésima barra, contada desde a parte superior deve-se ter que:

$$\begin{aligned} mg \sum_{j=0}^{n-3} \left(\frac{u_{n-j} + u_{n-j-1}}{2} - u_1 \right) + \frac{mg}{2} (u_2 - u_1) \\ - \frac{ml}{4} \sum_{j=0}^{n-2} [2(n-j) - 3] (\ddot{u}_{n-j} + \ddot{u}_{n-j-1}) = \kappa \left(\frac{u_2 - u_1}{l} - \frac{u_1}{l} \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para o n -ésimo elemento contado, desde a parte superior

$$\begin{aligned} \frac{mg}{2} \sum_{j=0}^{n-2} (u_{n-j} + u_{n-j-1}) + \frac{mg}{2} u_1 \\ - \frac{ml}{4} \sum_{j=0}^{n-2} [2(n-j) - 1] (\ddot{u}_{n-j} + \ddot{u}_{n-j-1}) = \mathcal{K} \frac{u_1}{l} - c \frac{\dot{u}_1}{l}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

As equações (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5) escritas em forma matricial, são

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (5.6)$$

onde os coeficientes matriciais da equação diferencial são

$$\mathbf{M} = \frac{ml}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 8 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 4(n-5) & 4(n-4) & 4(n-3) & 2n-5 \\ 1 & 4 & 8 & \cdots & 4(n-4) & 4(n-3) & 4(n-2) & 2n-3 \\ 4 & 8 & 12 & \cdots & 4(n-3) & 4(n-2) & 4(n-1) & 2n-1 \end{bmatrix} \text{ Kg,}$$

$$\mathbf{K} = \frac{mg}{2} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2\kappa}{mgl} & \left(-\frac{4\kappa}{mgl} + 1\right) & \left(\frac{2\kappa}{mgl} - 1\right) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2\kappa}{mgl} & \left(-\frac{4\kappa}{mgl} + 3\right) & \left(\frac{2\kappa}{mgl} - 2\right) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(-\frac{4\kappa}{mgl} + 5\right) & \left(\frac{2\kappa}{mgl} - 2\right) & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2\kappa}{mgl} & -\left(\frac{4\kappa}{mgl} + 2n - 5\right) & \left(\frac{2\kappa}{mgl} - 2\right) & \cdots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ \left(-\frac{4\kappa}{mgl} + 2n - 3\right) & \left(\frac{2\kappa}{mgl} - 2\right) & -2 & \cdots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ \left(\frac{2\kappa}{mgl} - 2\right) & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{N-s,}$$

a matriz \mathbf{C} tem todos seus elementos nulos, exceto $c_{n,1} = c/l$ N-s/m, o vetor $\mathbf{q}(t)$ é definido por

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

e $\mathbf{f}(t)$ é a excitação externa.

São fornecidos valores numéricos aos parâmetros do sistema. Analogamente a Newland, [NEW 89], suponha-se uma chaminé de $L = 42$ m de altura, diâmetro $D = 2.25$ m, espessura da parede $\varepsilon = 6.8$ mm e um peso total de 21 tons.

Para achar a rigidez rotacional κ , entre barras adjacentes, é sabido que, de acordo com a teoria de vigas de Euler-Bernoulli: $\phi = \frac{Ml}{EI}$, onde ϕ é o ângulo de deflexão rotacional dos dois extremos de uma viga de comprimento l sujeita a um momento flector M , E é o módulo de Young e I é o segundo momento de área da seção transversal da viga dada por $I = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4]$. Então, substituindo-se a última igualdade na anterior, segue que

$$\kappa = \frac{M}{\phi} = \frac{EI}{l} = \frac{\pi E}{64 l} [D^4 - (D - 2t)^4],$$

com

$$\rightarrow E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\rightarrow D = 2.25 \text{ m}$$

$$\rightarrow \varepsilon = 6.8 \text{ mm}$$

$$\rightarrow l = \frac{42}{n} \text{ m; e, para os outros parâmetros:}$$

$$\rightarrow m = \frac{21000}{n} \text{ Kg}$$

$$\rightarrow \kappa = 1.05 \times 10^8 \text{ N m/rad}$$

$$\rightarrow \mathcal{K} = 2\kappa,$$

$$\rightarrow c = 0 \text{ ou } 5.85 \times 10^7 \text{ N m s/rad}$$

Para comparação com os resultados enunciados em [NEW 89], foram calculadas as frequências naturais para $n = 7$, utilizando o MATLAB, e os resultados são mostrados na tabela 5.1. A diferença existente entre os resultados deve-se

Modo	Autovalor Calculado	Autovalor de Newland
1	7.03	6.84
2	44.23	43.06
3	126.77	123.43
4	263.89	256.92
5	497.41	484.27
6	991.03	964.86
7	3237.52	3152.0

Tabela 5.1 *Frequências naturais para a chaminé com $n = 7$ graus de liberdade*

à maneira que o MATLAB e o programa utilizado por [NEW 89] calcularam os autovalores da matriz companheira associada à equação (5.6).

A seguir, são mostrados resultados gráficos conseguidos para o sistema com $n = 7$ graus de liberdade. A excitação sísmica tem uma duração de 100 seg, tal como se aprecia na figura 5.3.

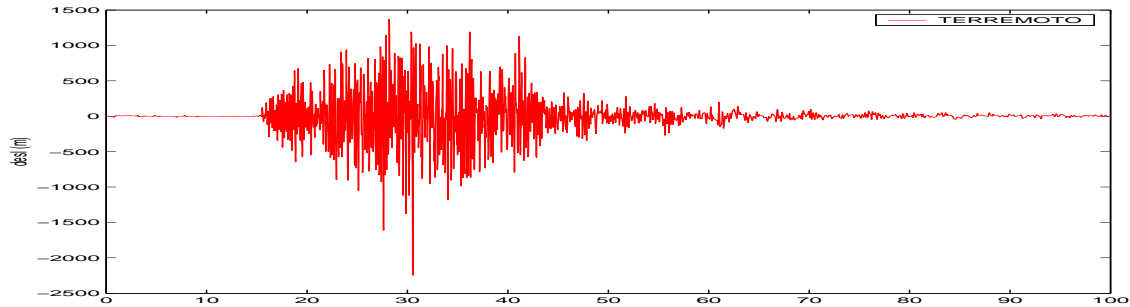


Figura 5.3 *Histórico da aceleração de um sismo afetando uma chaminé com $n = 7$ graus de liberdade (dados reais do terremoto de Loma Prieta)*

Na figura 5.4 podem-se apreciar os deslocamentos dos diversos elementos da chaminé discretizada.

As matrizes $\mathbf{h}(\Delta t)$, $\mathbf{h}_0(\Delta t)$, $\dot{\mathbf{h}}(\Delta t)$ e $\dot{\mathbf{h}}_0(\Delta t)$ foram calculados no Maple, utilizando o método *LSODE* (*Livermore Stiff Ordinary Differential Equations*), desenhado exclusivamente para problemas ‘duros’. A necessidade da utilização deste método é evidente pois problema é duro. Observa-se que as quantidades envolvidas para o cálculo da função $d(t)$ eram da ordem de 10^{-63} enquanto que a ordem dos resultados foi 10^{-7} . Conseguir esses valores mediante um ODE solver numérico clássico é uma tarefa muito complicada e às vezes impossível já que a manipulação de tais quantidades compromete seriamente o desempenho do computador.

Na figura 5.4, pode-se observar que o deslocamento da massa j tende a equilibrar o deslocamento da massa $j + 1$ ficando exatamente no lado oposto, para evitar a quebra do material.

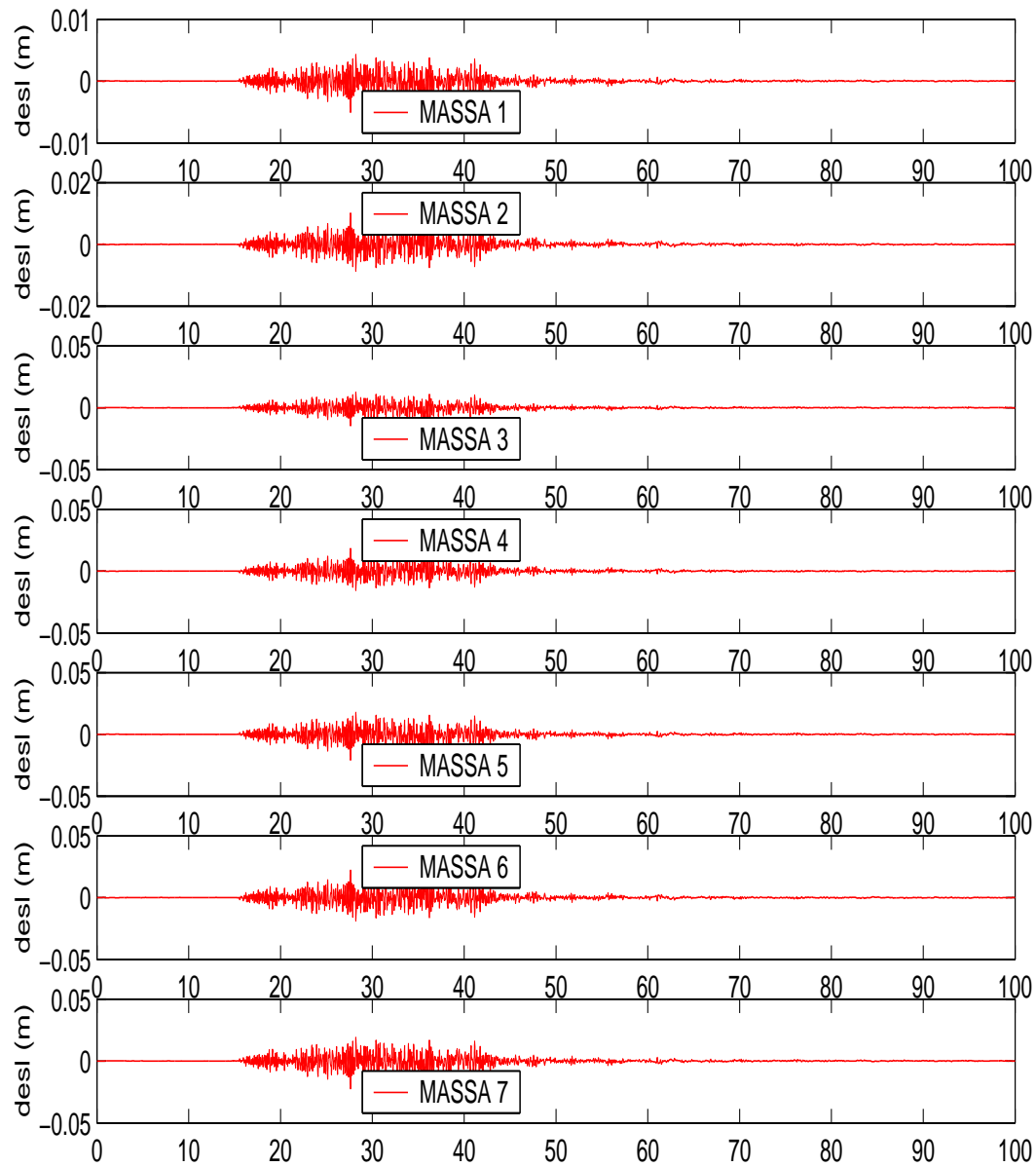


Figura 5.4 *Deslocamentos das massas discretizadas de uma chaminé com 7 graus de liberdade*

5.3.2 Prédio sujeito a uma Excitação Periódica

Considere-se um prédio, como um sistema de elementos com massa distribuída e elasticidade, sujeito a forças de controle u_i e excitações externas w_i e com as seguintes suposições simplificativas:

1. a massa de cada andar está concentrada ao nível do chão;
2. a elasticidade entre as colunas e as paredes é linear;
3. não se considera a rotação entre as massas, portanto, a resposta estrutural é descrita por um deslocamento e uma força em cada andar;
4. o amortecimento externo de cada andar é zero.

Um prédio com n andares, pode ser representado por um modelo de parâmetros concentrados, por exemplo, de 4 andares como é mostrado na figura 5.5.

A equação diferencial matricial que governa o deslocamento dos andares é da forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t)$$

onde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \text{ Kg,}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix} \text{ N/m,}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & c_n \end{bmatrix} \text{ N-s/m,}$$

Numericamente, supõe-se que $m_1 = m_2 = m_3 = \cdots = m_n = 4000$ Kg e $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 5000$ N/m, e $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 400$ N-s/m.

A seguir, mostram-se resultados numéricos para um prédio de quatro andares submetido a uma aceleração sísmica como a que aparece na figura 5.6

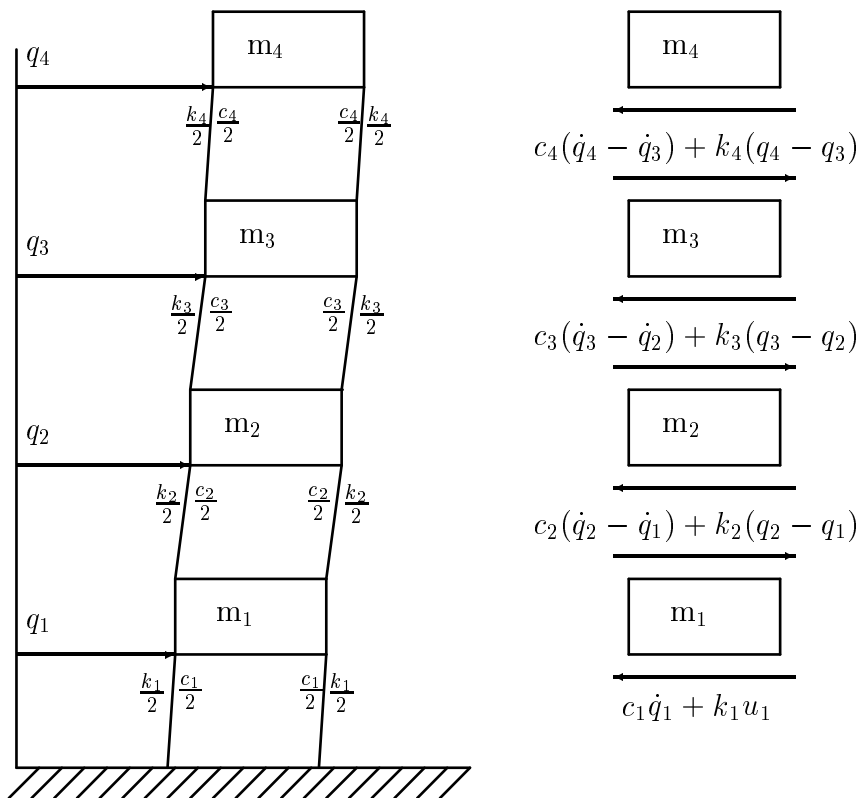


Figura 5.5 Modelo de vibração horizontal de um edifício de quatro andares e as forças restauradoras atuando em cada massa (andar)

As matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4000 \end{bmatrix} \text{ Kg}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 800 & -400 & 0 & 0 \\ -400 & 800 & -400 & 0 \\ 0 & -400 & 800 & -400 \\ 0 & 0 & -400 & 400 \end{bmatrix} \text{ N-s/m}, \quad (5.9)$$

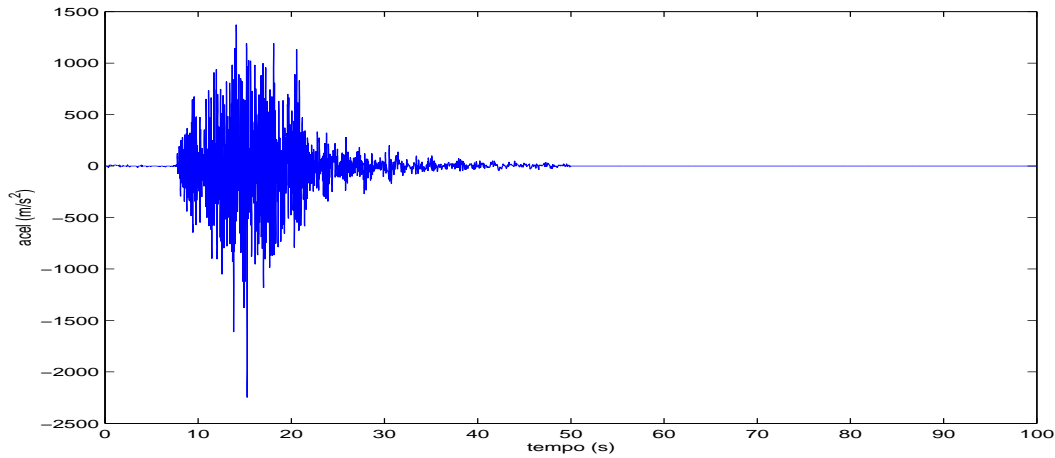


Figura 5.6 *Histórico da aceleração de um sismo (dados reais do terremoto de Loma Prieta)*

e

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10000 & -5000 & 0 & 0 \\ -5000 & 10000 & -5000 & 0 \\ 0 & -5000 & 10000 & -5000 \\ 0 & 0 & -5000 & 5000 \end{bmatrix} \text{ N/m.} \quad (5.10)$$

Para um tamanho de passo $\Delta t = 0.005$ tem-se estabilidade, e os valores numéricos (sem unidades físicas) de $\mathbf{h}(\Delta t)$, $\dot{\mathbf{h}}(\Delta t)$, $\mathbf{h}_0(\Delta t)$ e $\dot{\mathbf{h}}_0(\Delta t)$ são:

$$\mathbf{h}(\Delta t) = \begin{bmatrix} .1249362427 \cdot 10^{-5} & .3185428 \cdot 10^{-9} & .1052 \cdot 10^{-12} & .29 \cdot 10^{-14} \\ .3185428 \cdot 10^{-9} & .1249362497 \cdot 10^{-5} & .3186601 \cdot 10^{-9} & .1043 \cdot 10^{-12} \\ .1052 \cdot 10^{-12} & .3186601 \cdot 10^{-9} & .1249362524 \cdot 10^{-5} & .3186518 \cdot 10^{-9} \\ .29 \cdot 10^{-14} & .1043 \cdot 10^{-12} & .3186518 \cdot 10^{-9} & .1249681135 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{h}_0(\Delta t) = \begin{bmatrix} .9999687625 & .1561440219 \cdot 10^{-4} & .3517353 \cdot 10^{-8} & .56241 \cdot 10^{-10} \\ .1561434313 \cdot 10^{-4} & .9999687703 & .156120 \cdot 10^{-4} & .2774326 \cdot 10^{-8} \\ .3418013 \cdot 10^{-8} & .156120 \cdot 10^{-4} & .9999687683 & .1562178615 \cdot 10^{-4} \\ .56183 \cdot 10^{-10} & .2773783 \cdot 10^{-8} & .1562188669 \cdot 10^{-4} & .9999843799 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\dot{\mathbf{h}}(\Delta t) = \begin{bmatrix} .2497423501 \cdot 10^{-3} & .1287760973 \cdot 10^{-6} & .327053596 \cdot 10^{-10} & .25939 \cdot 10^{-13} \\ .1287760973 \cdot 10^{-6} & .2497423837 \cdot 10^{-3} & .12877553 \cdot 10^{-6} & .32561302 \cdot 10^{-10} \\ .327053596 \cdot 10^{-10} & .12877553 \cdot 10^{-6} & .2497423833 \cdot 10^{-3} & .1288098887 \cdot 10^{-6} \\ .25939 \cdot 10^{-13} & .32561302 \cdot 10^{-10} & .1288098887 \cdot 10^{-6} & .2498711586 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

e

$$\dot{\mathbf{h}}_0(\Delta t) = \begin{bmatrix} -.1249203155 \cdot 10^{-1} & .6243627230 \cdot 10^{-2} & .1591678071 \cdot 10^{-5} & .5114 \cdot 10^{-9} \\ .6243627053 \cdot 10^{-2} & -.1249043895 \cdot 10^{-1} & .6243626401 \cdot 10^{-2} & .1592777004 \cdot 10^{-5} \\ .159224987 \cdot 10^{-5} & .6243626546 \cdot 10^{-2} & -.1249043868 \cdot 10^{-1} & .6245219362 \cdot 10^{-2} \\ .4927 \cdot 10^{-9} & .1592229498 \cdot 10^{-5} & .6245219682 \cdot 10^{-2} & -.6246812419 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

A matriz de amplificação do método recursivo tem todos os seus autovalores com valor absoluto menor que 1, e este fato, portanto, garante a convergência do método.

Na figura 5.7 são mostrados os resultados gráficos dos deslocamentos dos andares.

Pode-se observar que o deslocamento é maior no quarto andar, e isto confirma o fato que os movimentos sísmicos são sentidos com maior intensidades nos andares mais altos.

Cabe salientar que os valores de $\mathbf{h}(\Delta t)$, $\dot{\mathbf{h}}(\Delta t)$, $\mathbf{h}_0(\Delta t)$ e $\dot{\mathbf{h}}_0(\Delta t)$ foram obtidos pela substituição direta $t = \Delta t$ na forma fechada (3.9).

5.4 Controle Ativo: ATMD

Nesta seção é considerado o controle por um *amortecedor ativo de massa regulada* (ATMD), como se mostra na figura 5.8, [YAN 82], [YAO 84], [YAN 87].

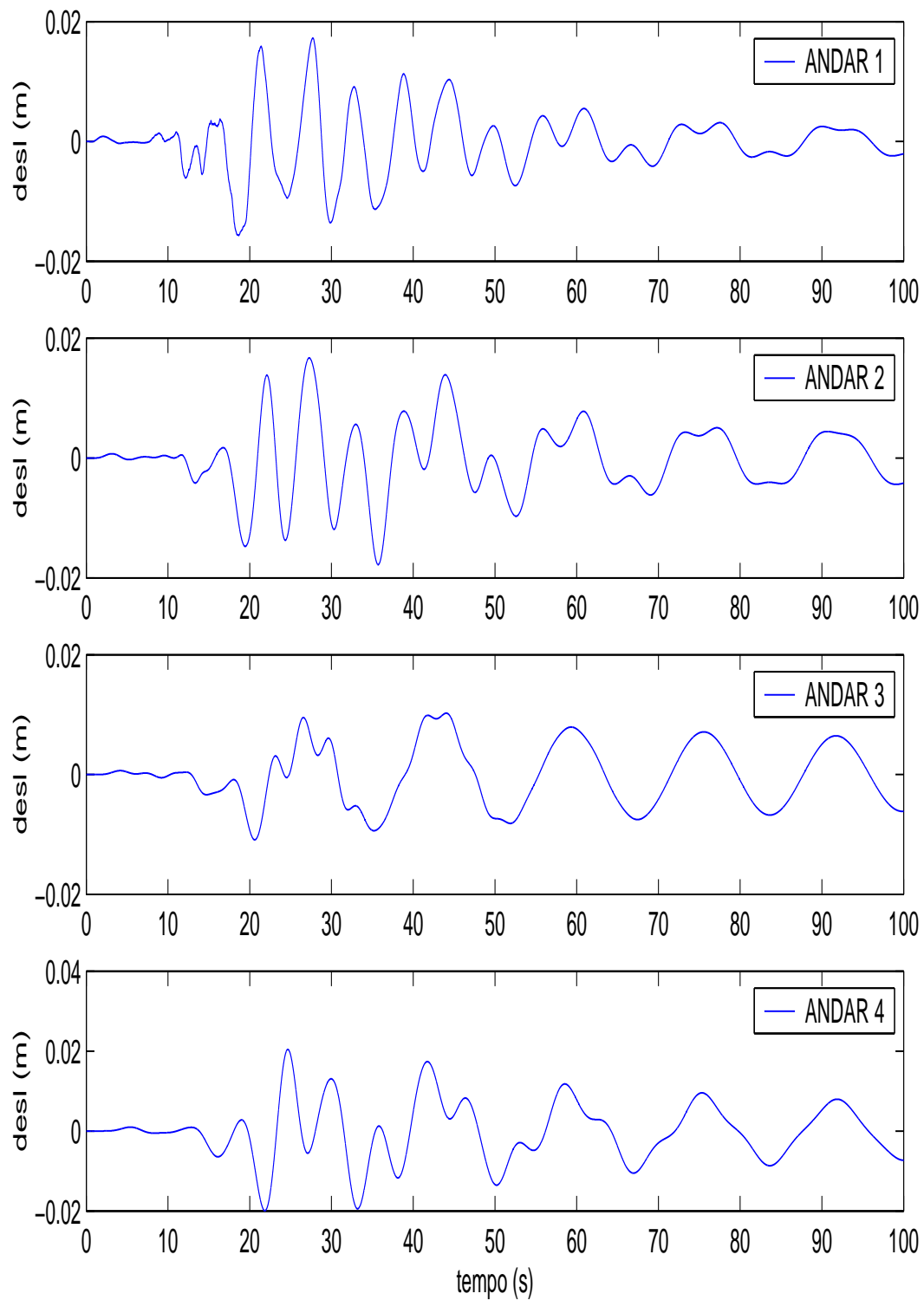


Figura 5.7 Deslocamentos dos quatro andares de um prédio sujeito a uma excitação sísmica, $m=4000K$, $c=400$ N-s/m, $k=5000$ N/m

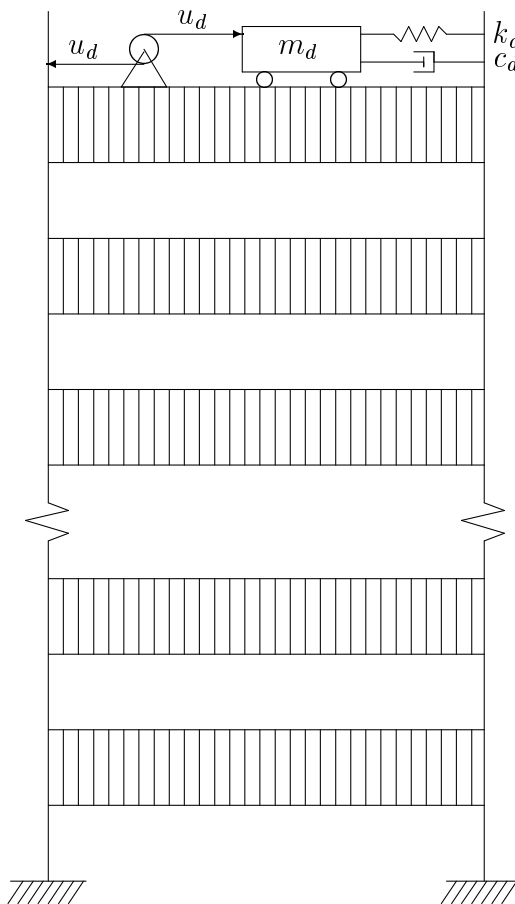


Figura 5.8 *Modelo Estrutural de um Prédio de n Andares com Sistema de Controle de Amortecedor Ativo de Massa Regulada (ATMD)*

As equações diferenciais dos deslocamentos dos andares relativos à base são

$$\begin{aligned}
 m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{X}_g) + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= 0, \\
 m_j(\ddot{x}_j + \ddot{X}_g) + c_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1}) + c_{j+1}(\dot{x}_j - \dot{x}_{j+1}) + k_j(x_j - x_{j-1}) + k_{j+1}(x_j - x_{j+1}) &= 0, \\
 j = 2, \dots, n-1, & \quad (5.15) \\
 m_n(\ddot{x}_n + \ddot{X}_g) + c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + c_d(\dot{x}_n - \dot{x}_d) + k_n(x_n - x_{n-1}) + k_d(x_n - x_d) &= -u_d, \\
 m_d(\ddot{x}_d + \ddot{X}_g) + c_d(\dot{x}_d - \dot{x}_n) + k_d(x_d - x_n) &= u_d,
 \end{aligned}$$

que podem ser escritas na forma matricial como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g}^{u_d} + \mathbf{M}\mathbf{v}\ddot{X}_g(t), \quad (5.16)$$

onde:

- $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix}$ é o vetor $(n+1) \times 1$ de deslocamentos relativos à

base das massas dos andares e da massa ativa; bem como, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{q}(t)$ é o vetor de velocidades correspondentes e $\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{q}(t)$ é o vetor de acelerações absolutas;

- \mathbf{M} é a matriz $(n+1) \times (n+1)$ de massas

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_n & & \\ & & & & m_d & \end{bmatrix},$$

sendo m_i a massa do i -ésimo andar, $i = 1, \dots, n$, e m_d a massa do amortecedor;

- \mathbf{C} é a matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ de amortecimento interno,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & & & & & \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & & & & \\ & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -c_n & c_n + c_d & -c_d \\ & & & & & -c_d & c_d \end{bmatrix},$$

sendo c_i o amortecimento interno do i -ésimo andar, $i = 1, \dots, n$, e c_d o amortecimento do ATMD;

- \mathbf{K} é a matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ de rigidez lateral,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & & & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -k_n & k_n + k_d & -k_d \\ & & & & & -k_d & k_d \end{bmatrix},$$

sendo k_i a rigidez lateral do i -ésimo andar, $i = 1, \dots, n$, e k_d a rigidez do ATMD;

- $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é o vetor $(n + 1) \times 1$ de localização do controlador (neste caso, acima do n -ésimo andar);

- u_d é a força ativa do controlador;

- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$ é um vetor $(n + 1) \times 1$; e
- $\ddot{X}_g(t)$ é o registro da aceleração do terremoto.

Utilizando leis de controle ótimo instantâneo com índice de desempenho quadrático, que é uma medida da eficácia do controle (menor esforço, menor deslocamento e velocidade), [BRO 91], [YAN 87], [YAN 91], isto é,

$$J(t) = \dot{\mathbf{q}}^T(t) \mathbf{Q}_{21} \mathbf{q}(t) + \dot{\mathbf{q}}^T(t) \mathbf{Q}_{22} \dot{\mathbf{q}}(t) + R(u_d(t))^2 \quad (5.17)$$

onde as matrizes \mathbf{Q}_{21} e \mathbf{Q}_{22} de ordem $(n + 1) \times (n + 1)$ e o escalar R são escolhidos mediante certos critérios, a força de controle $u_d(t)$ é dada por

$$u_d(t) = -\frac{\Delta t}{3R} \mathbf{g}^T (\mathbf{M}^{-1})^T (\mathbf{Q}_{21} \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}_{22} \dot{\mathbf{q}}(t)) \quad (5.18)$$

de acordo com [YAN 87], [YAN 91].

5.4.1 Exemplo Numérico

Na tabela 5.2, são apresentados os dados numéricos utilizados na simulação numérica. Considera-se um prédio com 10 andares.

Mostrar-se-á, também, a seguir, os resultados gráficos da simulação. Na figura 5.9, é feito o registro da aceleração do terremoto junto com seu espectro de frequência.

Na figura 5.10, são mostrados os deslocamentos de alguns andares de um prédio sem controle. Pode-se observar que o deslocamento de um andar j é compensado pelos deslocamentos dos andares vizinhos, $j + 1$ e $j - 1$.

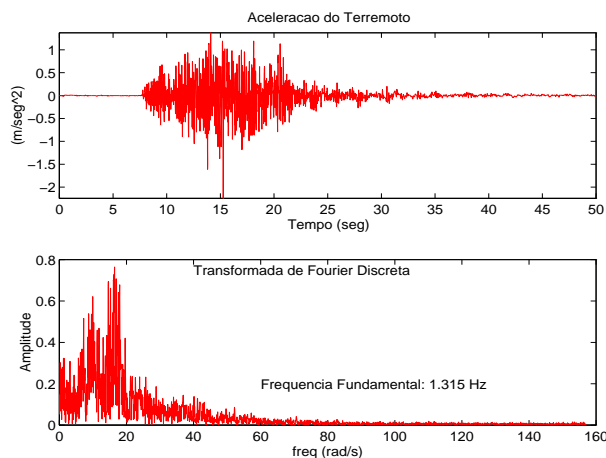


Figura 5.9 *Registro no Domínio do Tempo e da Freqüência da Aceleração do Terremoto*

Na figura 5.11, são mostrados os deslocamentos de alguns andares e da massa reguladora do controle. Pode-se observar que o deslocamento de um andar j é equilibrado de alguma maneira pelos deslocamentos dos andares vizinhos, $j + 1$ e $j - 1$.

Observando as figuras 5.10 e 5.11, pode-se perceber o resultado de aplicar um controle sobre uma estrutura, na redução da amplitude do deslocamento. Isto deve-se ao fato que o mecanismo de controle aumenta de alguma maneira o amortecimento global do sistema, permitindo que a energia vinda do movimento sísmico seja rapidamente dissipada.

Este problema envolve o manuseio de quantidades da ordem 10^{-50} , motivo pelo qual o cálculo numérico pode ser impreciso. A escolha do ‘ODE solver’ deve ser cuidadosa para o tratamento numérico do problema. Aqui, tem-se utilizado o método *lsode*, incluído no Maple.

Parâmetro do Sistema	Valor do Parâmetro
n	10
M	$m_i = 345.6 \text{ ton}, i = 1, \dots, n$ $m_d = 29.63 \text{ ton}$
C	$c_i = 2937 \text{ ton/s}, i = 1, \dots, n$ $c_d = 25 \text{ ton/s}$
K	$k_i = 3.404 \times 10^5 \text{ kN/m}, i = 1, \dots, n$ $k_d = 957.2 \text{ kN/m}$
Q₂₁	$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times (n+1)} \\ * \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -33.5 & -33.5 \\ -67 & -67 \\ -100.5 & -100.5 \\ -134 & -134 \\ -167.5 & -167.5 \\ -201 & -201 \\ -234.5 & -234.5 \\ -268 & -268 \\ -301.5 & -301.5 \\ -335 & -335 \\ 375.6 & 32.2 \end{bmatrix}^T$ $* = 6.7$
Q₂₂	$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times (n+1)} \\ ** \end{bmatrix} ** \begin{bmatrix} 67.5 & 5.8 \\ 135 & 11.6 \\ 202.5 & 17.4 \\ 270 & 23.2 \\ 338.5 & 29 \\ 405 & 34.7 \\ 472.5 & 40.5 \\ 540 & 46.3 \\ 607.5 & 52.2 \\ 675 & 58 \\ 32.2 & 5.7 \end{bmatrix}^T$ $** = 6.7$
R	10^{-3}

Tabela 5.2 Valores Numéricos dos Parâmetros Físicos envolvidos no modelo.

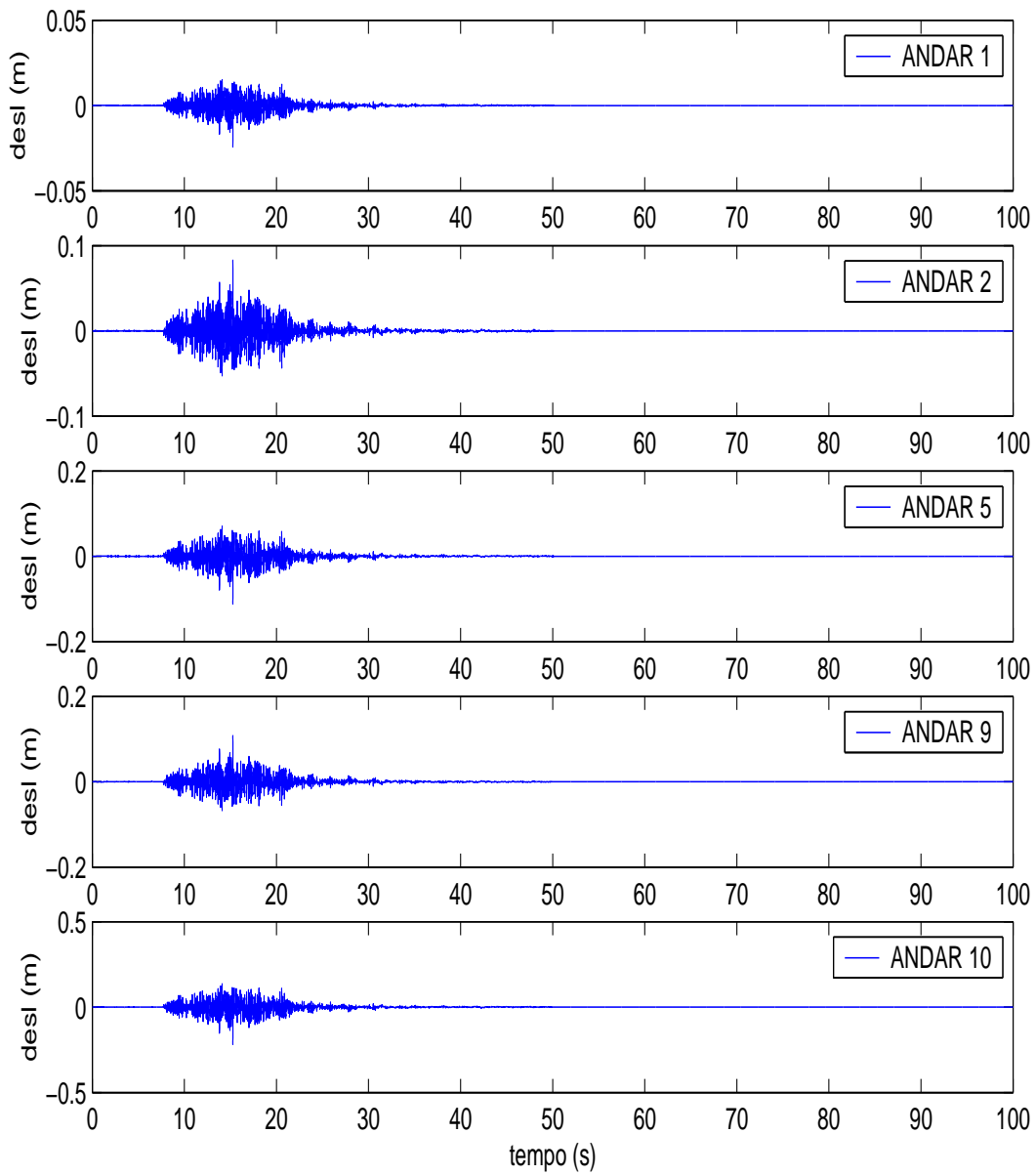


Figura 5.10 *Deslocamentos dos andares primeiro, segundo, quinto, nono e décimo de um prédio sem mecanismo de controle.*

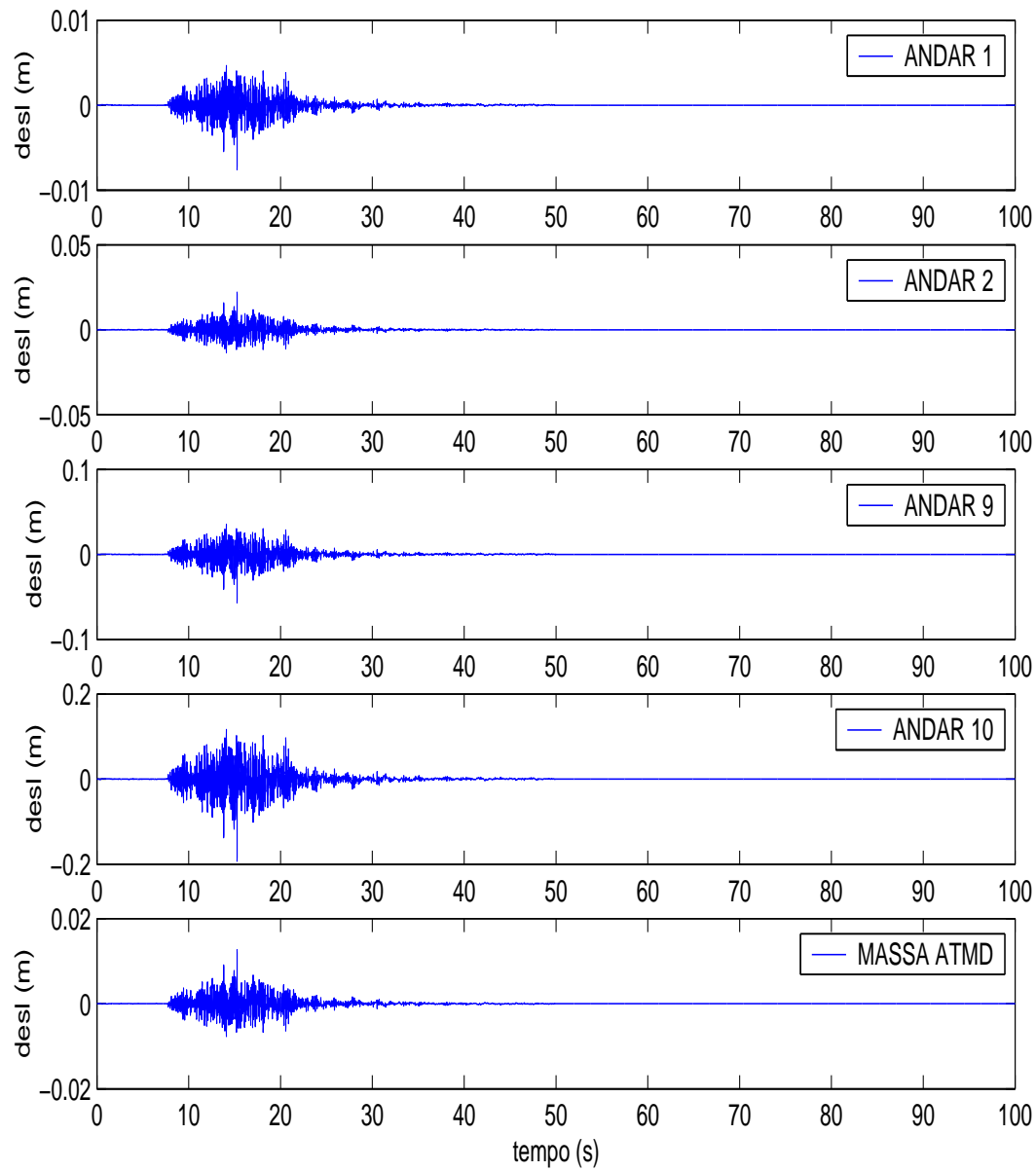


Figura 5.11 *Deslocamentos dos andares primeiro, segundo, nono e décimo e da massa reguladora do controle.*

5.5 Comentários Finais

O método exposto neste capítulo não está restrito pela condição de ser exato para um tipo específico de entrada. Pode-se observar que o esquema (4.7) é exato independentemente do tipo da função $\mathbf{f}(t)$.

As integrais (4.8) e (4.9) podem ser calculadas mediante esquemas aproximados de integração mais sofisticados para atingir maior precisão. Por exemplo, tem-se as fórmulas de Newton-Cotes de ordem 8, disponíveis em softwares numéricos, ou os esquemas de quadratura de Gauss, que podem ser encontrados na literatura.

Para calcular $\mathbf{h}(t)$ é necessário o uso de um ‘ODE solver’, e deve ser escolhido cuidadosamente, para poder tratar de maneira precisa o problema em questão. Os problemas tratados neste capítulo são ‘duros’ (*stiff problems*), e após várias tentativas observou-se que o método *lsode* é o mais adequado para este tipo de situações.

Uma vantagem computacional notável do esquema (4.10) é que só se precisa o conhecimento do registro $\mathbf{h}(t)$ desde $t = 0$ até $t = \Delta t$.

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho desenvolveu um método recursivo proveniente da utilização de propriedades de transição da resposta impulso, para o cálculo da integral de convolução como resposta forçada de sistemas de segunda ordem.

Tal método é vantajoso em relação a outros métodos analíticos e numéricos pelo fato que ele não requer o cálculo numérico direto dos autovalores como é o caso da análise modal ou de suposições restritivas para a matriz de amortecimento, tais como a hipótese de Rayleigh.

A vantagem numérica observada em relação aos métodos de integração tais como os de Newmark e Wilson, deve-se ao fato que o método proposto está baseado em resultados analíticos, enquanto que os outros partem de esquemas em diferenças aproximados para a velocidade e aceleração ($\dot{\mathbf{q}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{q}}(t)$).

A dificuldade maior neste método está no fato que há necessidade de calcular a resposta impulso. Para sistemas pequenos pode ser utilizada a fórmula fechada, [CLA 99], e para sistemas de médio e grande porte deve ser escolhido um método numérico eficiente.

Como trabalho futuro, propõe-se a utilização do método recursivo em outras aplicações. No aspecto analítico sugere-se a generalização do método para sistemas de ordem n .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ABD 80] ABDEL-ROHMAN, M., QUINTANA, V. H. & LEIPHOLZ, H. H. Optimal Control of Civil Engineering Structures. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, V. 106, 1, Feb, 1980.
- [BAT 76] BATHE, K., WILSON, E. *Numerical Methods for Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [BAT 82] BATHE, K., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- [BEL 83] BELYTSCHKO, T. & HUGHES, T.J.R. (1983), *Computational Methods in Transient Analysis*, North Holland, 1983.
- [BRO 91] BROGAN, W. L. *Modern Control Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [CAN 95a] CANAHUALPA, G.R. A Solução Dinâmica em Sistemas Mecânicos Amortecidos. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre, 1995.
- [CAN 00] CANAHUALPA, G.R. A Resposta Impulso em Problemas Vibratórios Evolutivos e Modais. *Tese de Doutorado*, UFRGS/PROMECA, Porto Alegre, 2000.
- [CAU 60] CAUGHEY, T.K., Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*. Vol. 27, pp. 269-271, 1960.
- [CAU 65] CAUGHEY, T.K., O'KELLEY, M.E. Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*. Vol. 32, pp. 583-588, 1965.

- [CHO 95] CHOPRA, A. K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [CLA 82] CLAEYSSSEN, J.C.R. *Equações Diferenciais Matriciais. Instituto de Matemática*, UFRGS, Porto Alegre, 1982
- [CLA 88] CLAEYSSSEN, J.C.R. *Introdução às Funções Matriciais. Bol. Soc. Paran. Mat.*, 2^a. sér. v. 9, 59-76, 1988
- [CLA 90a] CLAEYSSSEN, J.C.R. *On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. Journal of Sound and Vibration*, 140(1): 73-84, 1990.
- [CLA 90b] CLAEYSSSEN, J.C.R., TSUKAZAN, T. *Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations. Quarterly of Applied Mathematics*, vol. XLVIII, N^o 1, 1990.
- [CLA 99] CLAEYSSSEN, J. C. R., SUAZO, G. C., JUNG, C., *A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations. Applied Numerical Mathematics*, Vol 39, p. 65-78, 1999.
- [CLA 02a] CLAEYSSSEN, J. C. R., CHIWIACOWSKY, L. D., SUAZO, G. C., *The Impulse Response in the Symbolic Computing of Modes for Beams and Plates. Applied Numerical Mathematics*, Vol 40, p. 119-135, 2002.
- [CLO 93] CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [COP 02] COPETI, R. *Respostas Forçadas em Sistemas Distribuídos e Concentrados através da Análise Modal Adjunta. Tese de Doutorado*, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre, 2002.
- [DEN 56] DEN HARTOG, J. P., *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, New York, 1988.

- [EWI 95] EWINS, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*. 5th. ed., Research Studies Press Ltd and John Wiley and Sons Ltd., Taunton, Somerset, England, 1995.
- [FOS 58] FOSS, K. A. Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 25, pp. 361-364, 1958.
- [GAL 99] GALLICCHIO, E. Sistemas Vibratórios: Um Enfoque através da Solução Dinâmica e a Matriz de Transferência. *Tese de Doutorado*, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre, 1999.
- [HIL 77] HILBER, H.M., HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L., Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, pp. 99-118, 1977.
- [INM 89] INMAN, D. *Vibration, with Control, Measurement, and Stability*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [INM 94] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [MEI 75] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. Mc Graw - Hill, Inc., 1975
- [MOR 02] MORAES, I. F. A Resposta Dinâmica em Sistemas Concentrados, Discretos e Distribuídos. *Tese de Doutorado*, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre, 2002.
- [NEW 89] NEWLAND, D.E. *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical, New York, 1989.
- [NEW 93] NEWLAND, D.E. *Random Vibration, Spectral and Wavelet Analysis*, Longman Scientific & Technical, London, 1993

- [VEL 86] VELETSOS, A. S., VENTURA, C. E., Modal Analysis of Non-Classically Damped Linear Systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 14, pp. 217-243, 1986.
- [WOL 88] WOLF, J. *Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [WOO 81] WOOD, W.L., BOSSAK, M., ZIENKIEWICZ, O.C., An Alpha Modification of Newmark's Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 1562-1566, 1981.
- [WOO 98] WOODHOUSE, J., Linear Damping Models for Structural Vibration. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, pp. 547-569, 1998.
- [YAN 91] YAN, J.N., Li, Z., Instantaneous Optimal Control for Linear, Non-linear and Hysteretic Structures: Stable Controllers. *Tech. Report NCEER-TR-91-0020*, National Center for Earthquake Engineering Research, Buffalo, New York, 1991.
- [YAN 82] YANG, J. N., Control of Tall Buildings under Earthquake Excitations. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 108, 5, pp. 833-849, 1982.
- [YAN 85] YANG, J., AKBARPOUR, A. & GHAEMMAGHAMI, P., Optimal Control Algorithms for Earthquake-Excited Building. *Proceeding of 2nd International Symposium on Structural Control*, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1985.
- [YAN 87] YANG, J., AKBARPOUR, A., GHAEMMAGHAMI, P., Instantaneous Optimal Control Algorithms for Structures under Seismic Excitations. *National Center for Earthquake Engineering Research*, Technical Report NCEER-87-0007, 1987.

[YAO 84] YAO, J.T.P., SOONG, T.T., Importance of Experimental Studies in Structural Control. *Reprint 84-010*, ASCE, Atlanta Convention, Atlanta, pp. 14-18, 1984.