

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

LUÍS FELIPE BOEFF

**Modelagem e Controle de Sistemas Veiculares
de Suspensão Ativa**

Porto Alegre

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

LUÍS FELIPE BOEFF

**Modelagem e Controle de Sistemas Veiculares de
Suspensão Ativa**

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para Graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior

Porto Alegre

2016

LUÍS FELIPE BOEFF

Modelagem e Controle de Sistemas Veiculares de Suspensão Ativa

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para Graduação em Engenharia Elétrica

**Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva
Junior**
Orientador - UFRGS

Prof. Dr. Ály Ferreira Flores Filho
Chefe do Departamento de Engenharia
Elétrica (DELET) - UFRGS

Aprovado em 12 de dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira
UFRGS

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores
UFRGS

Me. Luciano Gonçalves Moreira
UFRGS

A toda minha Família, a todos meus Amigos e a todos meus Professores.

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que contribuíram para o sucesso de meu diploma e que me ajudaram durante esta etapa importantíssima da minha vida. Em especial, a Deus, por ter estado sempre comigo e por todas as grandes oportunidades que tenho recebido nesta longa jornada.

Sou eternamente grato por todo o apoio, confiança, força e compreensão que recebi de minha família durante toda esta caminhada, mesmo naqueles momentos mais difíceis. Em especial, aos meus pais, Maria Nelci Boeff e José Flávio Boeff, a minha irmã Daiana Daniele Boeff, a minha namorada Thaís Franciele Texeira, aos meus avós Meno Boeff, Teonilla Maria Boeff, Maria Valesca Dapper (in memoriam) e Evaldo Dapper (in memoriam).

Agradeço muito a todos os Professores, Colegas e Amigos que me deram suporte e confiança durante o curso de Engenharia Elétrica da UFRGS, lembranças que levarei para a minha vida inteira. Aproveito também para agradecer muito ao meu orientador, Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior, pela oportunidade de iniciar este trabalho durante o meu duplo diploma com a França e por todo o suporte que recebi durante o mesmo, com o qual obtive experiências muito valiosas a respeito de sistemas de controle e sobre o mundo acadêmico da pesquisa e do desenvolvimento.

Um muito obrigado a todos!

"Ce que nous connaissons est peu de chose, ce que nous ignorons est immense."

Pierre-Simon LAPLACE, *Éloge Historique de Monsieur le Marquis de Laplace*

Resumo

Este relatório se refere às atividades desenvolvidas pelo estudante ao longo do Projeto de Diplomação do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), localizada na cidade de Porto Alegre, RS. O objetivo deste projeto foi desenvolver controladores por realimentação de estados para um sistema veicular de suspensão ativa, de modo a atenuar, com rapidez, vibrações ao nível do corpo do veículo produzidas por perturbações sobre a superfície da rodovia, trazendo, assim, um melhor conforto aos seus passageiros, comparado ao que é obtido com o uso de suspensões passivas (não controladas). Para tanto, modelizou-se o sistema veicular de suspensão ativa a partir do modelo de um quarto de carro, também conhecido como Modelo *Quarter-car*. Em seguida, derivaram-se as equações dinâmicas do sistema, para o qual foi encontrada uma representação na forma de espaço de estados. A partir desta representação, técnicas modernas de Sistemas de Controle foram aplicadas, tais como Alocação de Pólos e Regulador Linear Quadrático (LQR), de modo a tornar o sistema controlado mais rápido e menos oscilante que o sistema passivo. Além disso, foi projetado um observador de estados de ordem completa para o sistema controlado, de modo a se verificar como seria o comportamento do controlador por realimentação de estados caso alguns estados, por algum motivo, não pudessem ser mensurados, mas, sim, estimados. Para validar o projeto, simulações foram realizadas com o auxílio da plataforma MATLAB/Simulink, desenvolvida pela MathWorks Inc., e testes experimentais foram realizados com a planta de suspensão ativa *QUARC*, similar ao modelo *quarter-car* considerado e fabricada pela Quanser Inc. Como resultado, o objetivo de performance desejada pôde ser alcançado a partir das técnicas de controle desenvolvidas, levado em conta todo o conservadorismo existente entre o modelo teórico considerado e a planta real de suspensão ativa utilizada nos experimentos.

Palavras-chave: Alocação de Pólos, LQR, Observador de Estados, Sistemas de Controle, Suspensão Ativa.

Abstract

This report refers to the activities developed by the student during its Degree Project in Electrical Engineering from Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), located in Porto Alegre, RS - Brazil. The objective of this project was to develop state feedback controllers for an active suspension vehicle system in order to rapidly attenuate vibrations caused by disturbances on the road surface at the vehicle's body, improving passengers' comfort, if compared to what is obtained when using passive suspensions. The active suspension system was modeled using the *Quarter-car* Model. Then, the dynamic equations of this system were derived, for which a state-space representation was found. Using this representation, modern control techniques were applied, such as Pole Placement and Linear-Quadratic Regulator (LQR), in order to make the controlled system faster and less oscillating than the passive one. In addition, a full order state observer was designed for the controlled system, in order to check the state feedback controller behavior when some states, for some reason, cannot be measured, but estimated. In order to validate the project, simulations were performed using MATLAB/Simulink (developed by MathWorks Inc.) and experimental tests were performed with the active suspension plant *QUARC* (developed by Quanser Inc.), which is very similar to the *quarter-car* model considered. The final results showed that the performance objectives can be reached using the control techniques applied in this work, given the conservatism between the theoretical model and the actual active suspension plant.

Keywords: Active Suspension, Control, LQR, Pole Placement, State Observer.

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Modelo <i>quarter-car</i> considerado na modelagem do sistema de suspensão ativa. | 14 |
| Figura 2 – Diagrama de blocos de um sistema em malha aberta, conforme sua representação na forma de espaço de estados. | 17 |
| Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada, conforme sua representação na forma de espaço de estados. | 18 |
| Figura 4 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada que utiliza um observador de estados de ordem completa. | 23 |
| Figura 5 – Diagrama de corpo livre da massa M_s do modelo <i>quarter-car</i> da Figura 1. | 27 |
| Figura 6 – Diagrama de corpo livre da massa M_{us} do modelo <i>quarter-car</i> da Figura 1. | 27 |
| Figura 7 – Funções de transferência $Z_s(s)/Z_r(s)$ e $Z_{us}(s)/Z_r(s)$ em termos da magnitude. | 40 |
| Figura 8 – Diagrama de blocos utilizado no MATLAB/Simulink para se obter dados do sistema de suspensão ativa. A chave <i>Manual Switch</i> na posição “0” indica que o esforço de controle aplicado ao sistema é nulo (sistema em malha aberta); a chave na outra posição indica que o sistema é controlado por uma realimentação de estados. | 41 |
| Figura 9 – Resposta temporal do sistema em malha aberta a um sinal $z_r(t)$ senoidal de amplitude constante e frequência variando de 1 Hz a 15 Hz em 30 segundos. | 42 |
| Figura 10 – Resposta do sistema em malha aberta a um pulso em $z_r(t)$. Comparação entre resultados de simulação e experimentais. | 42 |
| Figura 11 – Resultados experimentais obtidos com o Método de Alocação de Pólos em resposta a um pulso em $z_r(t)$ | 44 |
| Figura 12 – Resultados experimentais obtidos com o Método LQR em resposta a um pulso em $z_r(t)$ | 47 |
| Figura 13 – Resultados experimentais obtidos com o Método LQR em resposta a um <i>bump</i> em $z_r(t)$ | 48 |
| Figura 14 – Diagrama de blocos utilizado no MATLAB/Simulink para se obter dados do sistema de suspensão ativa implementado com o controlador LQR e o observador de estados de ordem completa. | 49 |
| Figura 15 – Resultados experimentais obtidos com o controlador LQR da Seção 4.3 implementado com o Observador de Estados de Ordem Completa projetado (<i>Controlador LQG</i>) em resposta a um <i>bump</i> em $z_r(t)$ | 50 |
| Figura 16 – Planta <i>QUARC</i> de suspensão ativa considerada ao longo deste trabalho. | 55 |

Lista de Abreviaturas e Siglas

| | |
|-------|--|
| LQE | Estimador Linear Quadrático (<i>Linear-Quadratic Estimator</i>) |
| LQG | Regulador Linear Quadrático Gaussiano (<i>Linear-Quadratic-Gaussian Control</i>) |
| LQR | Regulador Linear Quadrático (<i>Linear-Quadratic Regulator</i>) |
| LTI | Linear e Invariante no Tempo (<i>Linear Time-Invariant</i>) |
| SISO | Única Entrada, Única Saída (<i>Single-Input, Single-Output</i>) |
| UFRGS | Universidade Federal do Rio Grande do Sul |

Lista de Símbolos

| | |
|---------------------------|--|
| \mathbb{R}^n | espaço Euclidiano de dimensão n |
| $\mathbb{R}^{n \times m}$ | espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$ |
| t | instante de tempo qualquer |
| t_0 | instante de tempo inicial |
| v_i | i -ésimo autovetor v |
| λ_i | i -ésimo autovalor λ |
| V | matriz dos n autovetores v |
| Λ | matriz diagonal dos n autovalores λ |
| C^T | transposta da matriz C |
| A^{-1} | inversa da matriz A |
| A^2 | multiplicação da matriz A por ela mesma |
| I | matriz identidade, de ordem compatível |
| s | variável complexa de Laplace |
| $P > 0$ | matriz P positiva definida |
| $Q \geq 0$ | matriz Q positiva semidefinida |
| $\det(A)$ | determinante da matriz A |
| C_b | matriz de controlabilidade |
| O_b | matriz de observabilidade |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 12 |
| 2 | PRELIMINARES E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 14 |
| 2.1 | Modelo <i>Quarter-car</i> em Sistemas de Suspensão Ativa | 14 |
| 2.2 | Representação de Sistemas Lineares em Espaço de Estados | 15 |
| 2.3 | Controladores por Realimentação de Estados | 16 |
| 2.3.1 | Método de Alocação de Pólos | 18 |
| 2.3.2 | Método LQR | 20 |
| 2.4 | Observador de Estados de Ordem Completa | 22 |
| 3 | METODOLOGIA | 25 |
| 3.1 | Modelagem do Sistema de Suspensão Ativa | 26 |
| 3.2 | Representação do Sistema em Espaço de Estados | 29 |
| 3.3 | Análise de Funções de Transferência | 31 |
| 3.4 | Projeto do Controlador por Realimentação de Estados | 33 |
| 3.4.1 | Projeto do Controlador pelo Método de Alocação de Pólos | 34 |
| 3.4.2 | Projeto do Controlador pelo Método LQR | 35 |
| 3.5 | Projeto do Observador de Estados de Ordem Completa | 36 |
| 4 | RESULTADOS | 38 |
| 4.1 | Análises do Sistema de Suspensão Ativa em Malha Aberta | 38 |
| 4.2 | Análises do Controlador por Alocação de Pólos | 43 |
| 4.3 | Análises do Controlador LQR | 45 |
| 4.4 | Análises do Observador de Estados de Ordem Completa | 48 |
| 5 | CONCLUSÕES | 51 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 52 |
| | ANEXOS | 54 |
| | ANEXO A – PLANTA QUARC | 55 |

1 Introdução

Em sistemas automotivos, suspensões controladas podem ser utilizadas para tornar mais suave o movimento (ou balanço) vertical de veículos com relação a perturbações encontradas sobre a superfície de rodovias. Calombos e buracos são perturbações bastante comuns em estradas e podem provocar vibrações de pequenas a grandes amplitudes no corpo de automóveis, influenciando diretamente na sensação de conforto dos seus passageiros.

Atualmente, o tipo de suspensão mais encontrado em veículos ainda é o de suspensão passiva, o qual é utilizado para amortecer vibrações sem qualquer tipo de controle sobre as mesmas. De fato, suspensões passivas atuam como simples dissipadores de energia mecânica. Por outro lado, suspensões do tipo ativa permitem uma realimentação controlada do sistema de amortecimento do veículo, de modo que as vibrações possam ser atenuadas com melhor performance do ponto de vista do conforto dos passageiros (SAVARESI et al., 2010). Suspensões ativas podem eficientemente reduzir o tempo de resposta do sistema de amortecimento, além de atenuar consideravelmente a amplitude efetiva das vibrações absorvidas pelo corpo do veículo. Portanto, se comparadas às suspensões não controladas, suspensões do tipo ativa podem proporcionar ao automóvel um maior nível de conforto (MILLER, 1988).

Para então se alcançar o objetivo de reduzir os efeitos de vibrações em veículos equipados de suspensões ativas, pode-se aplicar o projeto de controladores utilizando técnicas modernas de sistemas de controle com realimentação de estados (ESMAILZADEH; BATENI, 1992), tais como Alocação de Pólos e Regulador Linear Quadrático (LQR, do inglês *Linear-Quadratic Regulator*). Para tanto, é necessária uma modelagem físico-matemática do sistema de suspensão ativa na forma de espaço de estados.

Um modelo frequentemente aplicado em projetos de controladores para sistemas de suspensão, quando utilizadas técnicas de controle por realimentação de estados, é o modelo um quarto de carro, ou modelo *quarter-car* (ZIN et al., 2008). Este modelo simplifica o sistema a ser considerado, pois envolve apenas a dinâmica dos elementos contidos em um quarto do porte do veículo, isto é, somente uma das suas quatro rodas com o respectivo sistema de amortecimento envolvido.

A partir do modelo do sistema de suspensão ativa na forma de espaço de estados, pode-se então realizar o projeto de controladores de modo a se alcançar o objetivo de performance desejado. Por se tratarem de controladores que operam por realimentação de estados, os estados do modelo devem ser conhecidos em cada instante de tempo em que o esforço de controle é atualizado. Contudo, nem sempre isso é possível, visto que

determinados estados do sistema podem não ser mensuráveis. No entanto, pode-se tentar obter estimativas dos mesmos em tempo real com o desenvolvimento de Observadores de Estado, o que também será tratado durante este trabalho.

Os controladores desenvolvidos serão simulados em computador e implementados na planta de suspensão ativa *QUARC* (Anexo A), desenvolvida pela empresa Quanser, a qual se aproxima, com um certo conservadorismo, do modelo teórico *quarter-car*. Portanto, para fins de cálculos, os parâmetros do modelo *quarter-car* a serem utilizados serão estes fornecidos pela fabricante da planta *QUARC*. Extrema atenção deve ser dada para que os limites físicos da planta de suspensão ativa sejam respeitados.

No ilustre meio da pesquisa e desenvolvimento, diversos pesquisadores já se interessaram por sistemas de controle voltados a performances de amortecimento em automóveis: (ESMAILZADEH; BATENI, 1992) investigaram sistemas de suspensão ativa com controladores ótimos para automóveis; (ELMADANY, 1992) abordou o uso do controle integral por realimentação de estados para sistemas de suspensão ativa considerando o modelo de um meio de carro (modelo *half-car*); (SHANNAN; VANDERPLOEG, 1989) consideraram o movimento lateral e longitudinal do veículo para o modelo completo do automóvel (modelo *full-car*) e implementaram o projeto de um controlador ótimo linear; (ZIN et al., 2008) empregaram métodos mais avançados de controle (*Robust LPV- H_∞ Control*) para garantir melhores performances de conforto e segurança em automóveis; (RAJAMANI; HEDRICK, 1993) desenvolveram observadores de estados adaptativos para sistemas de suspensão ativa; (LEE; FLORES, 2014) desenvolveram controladores repetitivos de alta ordem aplicados a uma planta de suspensão ativa, buscando-se rejeitar um sinal sinusoidal com frequência variante.

As principais contribuições deste estudo envolvem a modelagem do sistema de suspensão ativa utilizando o modelo *quarter-car* e o estudo de suas características, a simulação e a verificação experimental do comportamento da planta de suspensão ativa *QUARC* em malha aberta com relação a diferentes sinais de perturbação (imperfeições sobre a superfície da rodovia), o projeto de controladores por realimentação de estados baseados nas técnicas de Alocação de Pólos e LQR, sua simulação e implementação na planta *QUARC*, e, por fim, o projeto de um observador de estados de ordem completa, seguido de sua implementação com o controlador LQR e da validação experimental do sistema completo.

2 Preliminares e Revisão Bibliográfica

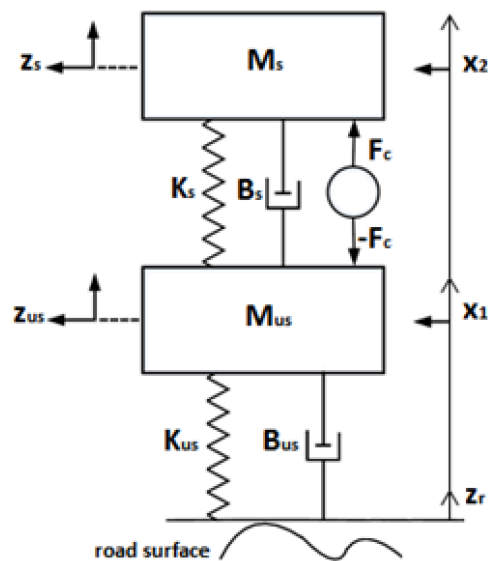
Neste capítulo, uma breve revisão bibliográfica sobre a modelagem de sistemas de suspensão ativa será apresentada, bem como uma revisão sobre técnicas modernas de projeto de controladores por realimentação de estados - Alocação de Pólos e LQR - e de observadores de estados de ordem completa.

2.1 Modelo *Quarter-car* em Sistemas de Suspensão Ativa

Para se buscar alcançar o objetivo de atenuar vibrações verticais, produzidas por imperfeições na superfície de rodovias, sobre o corpo de veículos equipados de suspensões ativas, foi proposto o projeto de dois controladores por realimentação de estados. Para tanto, deve-se buscar uma representação do sistema de suspensão ativa na forma de espaço de estados, o que exige que tal sistema seja matematicamente modelado conforme suas características físicas.

Segundo (ZIN et al., 2008), um sistema veicular de suspensão ativa pode ser modelado a partir do modelo *quarter-car*, ilustrado na Figura 1, o qual considera apenas um quarto do corpo do veículo.

Figura 1 – Modelo *quarter-car* considerado na modelagem do sistema de suspensão ativa.



Nota-se que o modelo *quarter-car* da Figura 1 consiste em duas massas, cada uma suportada por uma mola e um amortecedor. O parâmetro M_s (*sprung mass* ou massa suspensão) representa o equivalente a um quarto da massa do corpo do veículo, enquanto

que M_{us} (*unsprung mass* ou massa não suspensa) representa o pneu de uma das quatro rodas consideradas. A mola K_s e o amortecedor B_s suportam o peso do corpo do veículo sobre o pneu. Já a mola K_{us} e o amortecedor B_{us} são utilizados para modelar a rigidez do pneu em contato com a superfície da rodovia. O parâmetro $\pm F_c$ representa a força aplicada pela suspensão ativa, que, neste caso, define o atuador do sistema a fim de se estabilizar o corpo do veículo.

Com base nestas considerações, pode-se deduzir que o sistema *quarter-car* apresentado na Figura 1 é um sistema de quarta ordem, uma vez que existem quatro elementos de armazenamento de energia em tal sistema: suas duas massas e suas duas molas.

O modelo *quarter-car* é frequentemente utilizado em técnicas de projeto de sistemas de controle por permitir a otimização de conjuntos variados de critérios de desempenho, os quais são formulados a partir de conceitos físicos transformados em representações matemáticas. Alguns dos objetivos de desempenho frequentemente estudados em sistemas de suspensão automotiva, segundo (SAVARESI et al., 2010), são:

- Conforto (*Ride Comfort*): relacionado a como o movimento vertical do corpo do veículo é sentido pelos seus passageiros. O nível de conforto pode ser monitorado pela medida da aceleração da massa suspensa M_s da Figura 1, ou seja, por \ddot{z}_s ;
- Deflexão da Suspensão (*Suspension Travel*): refere-se ao deslocamento vertical relativo entre o corpo do veículo (massa suspensa) e o pneu (massa não suspensa). Segundo o modelo da Figura 1, a medida de deflexão da suspensão pode ser determinada por $(z_s - z_{us})$;
- Aderência à Rodovia (*Road Holding*): associada a deformações verticais do pneu, causadas por forças de contato entre a superfície da rodovia e o veículo. Segundo o modelo da Figura 1, tal deformação pode ser monitorada pela medida de $(z_{us} - z_r)$.

2.2 Representação de Sistemas Lineares em Espaço de Estados

De acordo com (MOORE, 1976), o projeto de um controlador por realimentação de estados requer uma representação do sistema na forma de espaço de estados. Um espaço de estados é composto por um conjunto de equações diferenciais lineares, as quais descrevem matematicamente as dinâmicas do sistema considerado. Segundo (OGATA, 2010), sistemas lineares e invariantes no tempo (*LTI systems*) podem ser representados de acordo com a Equação (2.1).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ se refere ao vetor de entrada de controle (atuador), $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa o vetor de saída do sistema e A , B , C e D são matrizes constantes e de dimensões compatíveis, conforme as dimensões dos vetores $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$.

Usualmente, em espaços de estados como o da Equação (2.1), o vetor de estados $x(t)$ é definido de tal modo que reflita os parâmetros do sistema a serem otimizados. Além disso, $x(t)$ representa o menor conjunto de variáveis tais que, conhecendo-se os seus valores em um dado instante de tempo $t = t_0$ e sendo conhecido o vetor de entrada $u(t)$ para todo $t \geq t_0$, será possível se determinar completamente o comportamento de tal sistema para qualquer instante tempo $t \geq t_0$.

De fato, devido à existência de quatro elementos armazenadores de energia no modelo *quarter-car* da Figura 1 (duas molas e duas massas), o sistema de suspensão ativa poderá ser aproximado por um modelo matemático de ordem quatro. Haverá, portanto, um total de quatro variáveis de estado na representação deste sistema na forma de espaço de estados.

2.3 Controladores por Realimentação de Estados

Atualmente, com diversos avanços tecnológicos significativos nas áreas de sistemas de controle, suspensões e atuadores, existe uma alta demanda na busca de melhores performances de conforto e de segurança em sistemas veiculares. Assim, neste trabalho, optou-se por considerar como objetivo de desempenho a melhoria do nível de conforto dos passageiros do veículo, levando-se em conta as limitações físicas do atuador do sistema.

De modo geral, deseja-se obter um sistema de controle que seja estável, o qual deverá ainda satisfazer a certas restrições adicionais, como, por exemplo: manter a resposta transitória dentro de um certo valor de tempo, rejeitar certas perturbações e respeitar as limitações impostas sobre o sinal de controle, de modo que o mesmo não sature.

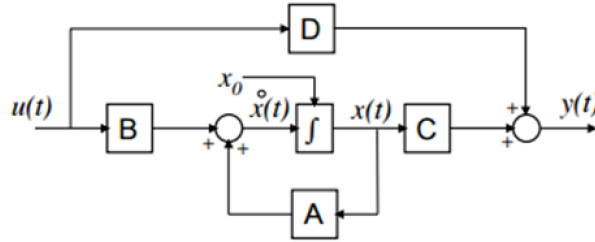
Segundo (OGATA, 2010), um sistema na forma de espaço de estados é *controlável* se e somente se sua matriz de controlabilidade C_b tem posto completo. Em outras palavras, isto ocorre se o posto desta matriz é igual ao número de estados do sistema considerado. A matriz de controlabilidade C_b de um espaço de estados qualquer pode ser calculada pela Equação (2.2).

$$C_b = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{(n-1)}B \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

em que A e B são matrizes constantes dadas pela representação do sistema em forma de espaço de estados, conforme apresentado na Equação (2.1), e n equivale à ordem ou número de estados do sistema.

O espaço de estados descrito pelo Sistema (2.1) pode ser representado pelo diagrama de blocos da Figura 2, em que $u(t)$ representa o vetor de entrada do sistema em malha aberta e $y(t)$ a sua saída.

Figura 2 – Diagrama de blocos de um sistema em malha aberta, conforme sua representação na forma de espaço de estados.



As estruturas de sistemas de controle podem ser classificadas de acordo com o tipo de informação que é utilizado pelo controlador. Em sistemas em que o sinal de controle utiliza medidas dos estados da planta do sistema, diz-se que o sistema de controle é do tipo “realimentação de estados” (ou *state feedback*). Já nos sistemas em que o sinal de controle utiliza informações fornecidas diretamente pelo sinal de saída, diz-se que o sistema de controle é do tipo “realimentação de saída” (ou *output feedback*).

Uma possível estratégia de controle por realimentação de estados considera a lei de controle demonstrada na Equação (2.3) (MOORE, 1976), a qual representa uma realimentação de controle negativa e estática para os estados do sistema considerado.

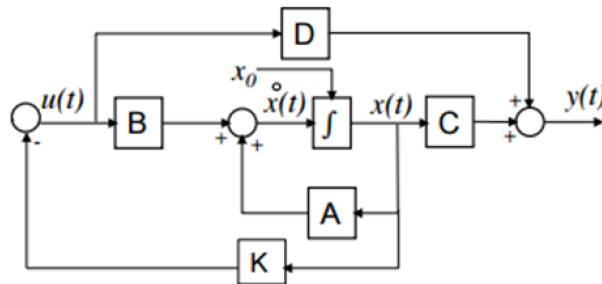
$$u(t) = -Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.3)$$

Substituindo-se a lei de controle da Equação (2.3) no espaço de estados da Equação (2.1), será obtido o sistema em malha fechada da Equação (2.4), o qual pode ser representado pelo diagrama de blocos da Figura 3.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \\ y(t) = (C - DK)x(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Dado que o Sistema (2.4) é linear, sua estabilidade será definida pelos autovalores da matriz $(A - BK)$. Assim, para um sistema controlável e estabilizável, o ganho de realimentação K poderá ser escolhido de forma que os autovalores de $(A - BK)$ estejam posicionados no semi-plano esquerdo do plano complexo conforme a performance desejada para o sistema controlado. Para tanto, existem diversas técnicas diferentes, sendo abordadas neste trabalho os métodos de Alocação de Pólos e Regulador Linear Quadrático (LQR).

Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada, conforme sua representação na forma de espaço de estados.



É importante salientar que a *controlabilidade* do sistema é mantida pela aplicação de uma realimentação de estados. Caso o sistema em malha aberta seja não controlável, não será possível a livre alocação dos pólos de $(A - BK)$. Nesse caso, os autovalores não controláveis do sistema em malha aberta serão obrigatoriamente autovalores do sistema em malha fechada.

Geralmente, os pólos de um sistema em malha fechada são escolhidos de modo a tornar o tempo de resposta do sistema mais rápido do que quando em malha aberta. Para que isso ocorra, a parte real dos pólos do sistema controlado deve ser “mais negativa” do que a parte real dos pólos de malha aberta. Ou seja, os pólos de malha fechada devem estar localizados à esquerda dos pólos de malha aberta no semi-plano esquerdo do plano complexo, de modo ainda que o sistema seja estável em malha fechada.

Outra característica frequentemente desejada para um sistema controlado é de se obter menos oscilações na resposta temporal do sistema. Isso pode ser feito fazendo-se com que o módulo da componente imaginária dos pólos de malha fechada seja inferior ao módulo da respectiva componente real desses pólos.

2.3.1 Método de Alocação de Pólos

Controladores por realimentação de estados (também chamados de controladores *feedback*) podem ser projetados pela simples alocação dos pólos do sistema em malha fechada em locais pré-determinados do plano complexo s , no qual as transformadas de Laplace são graficamente representadas. A localização dos pólos corresponde diretamente aos autovalores do sistema e definem características importantes da sua resposta temporal (estabilidade, transiente, entre outros).

Os pólos do sistema em malha fechada, representado pelo Sistema (2.4), são dados pelo cálculo dos autovalores da matriz $(A - BK)$, conforme demonstra a Equação (2.5), em que $\det[\cdot]$ é a função determinante, s representa o operador complexo de Laplace e I é

uma matriz identidade de ordem compatível.

$$\det[sI - (A - BK)] = \det[sI - A + BK] = 0 \quad (2.5)$$

Portanto, os autovalores de $(A - BK)$ são dados pelas raízes da Equação (2.5).

A ideia fundamental do método de Alocação de Pólos é determinar o vetor de ganho K necessário para se posicionar os pólos do sistema em malha fechada em determinadas posições desejadas, de modo que os objetivos de performance do projeto sejam satisfeitos. Existem diversas técnicas para se alocar os pólos de um sistema, tais como o Método da Equação Característica, o Método da Forma Canônica e o Método de Moore.

Por escolha arbitrária, decidiu-se utilizar neste trabalho a técnica do Método de Moore (MOORE, 1976), a qual concede a liberdade de se atribuírem simultaneamente os autovalores de malha fechada e os respectivos autovetores associados, a fim, então, de se atingir a performance desejada. A liberdade de se poder escolher os autovetores de malha fechada pode ser usada de forma a aprimorar características da resposta transitória do sistema controlado.

O Método de Moore surge da equação autovalor-autovetor do sistema em malha fechada, como demonstra a Equação (2.6).

$$(A - BK)v_i = v_i\lambda_i \quad (2.6)$$

em que v_i representa o i -ésimo autovetor do sistema em malha fechada e λ_i representa o i -ésimo autovalor correspondente.

A correspondente forma matricial da Equação (2.6) é demonstrada na Equação (2.7), na qual V é a matriz dos autovetores do sistema em malha fechada e Λ é uma matriz diagonal (ou na forma de Jordan) que contém os respectivos autovalores associados.

$$(A - BK)V = V\Lambda \quad (2.7)$$

Em sistemas SISO (*Single-Input, Single-Output*), ou seja, sistemas com um único sinal de entrada e um único sinal de saída, pode-se utilizar a mudança de variável descrita na Equação (2.8).

$$K = WV^{-1} \quad (2.8)$$

em que $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $W = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$, $W \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $V = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Substituindo a Equação (2.8) na Equação (2.6), obtém-se a Equação (2.9).

$$\begin{aligned} (A - BWV^{-1})v_i &= v_i\lambda_i \\ \therefore (\lambda_i - A)v_i &= -BWV^{-1}v_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nota-se, na Equação (2.9), que $WV^{-1}v_i = 1$. Assim, obtém-se a Equação (2.10).

$$v_i = -(\lambda_i I - A)^{-1}B \quad (2.10)$$

Portanto, segundo o Método de Moore, os autovetores v_i do Sistema (2.4) podem ser determinados de acordo com os autovalores λ_i escolhidos (i.e., os pólos desejados para o sistema controlado), conforme a Equação (2.10). No entanto, o conjunto de autovalores λ_i deve ser diferente dos autovalores da matriz A .

Por fim, segundo a Equação (2.8), tendo-se determinado todos os autovetores v_i do sistema em malha fechada, o ganho K necessário para se alocar os pólos do sistema controlado nas posições desejadas poderá ser determinado pela Equação (2.11).

$$K = WV^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.11)$$

2.3.2 Método LQR

O Método de Alocação de Pólos da Seção 2.3.1 permite que o projetista fixe os pólos do sistema em malha fechada de acordo com o desempenho desejado. No entanto, realimentações de estados não afetam os zeros do sistema em malha aberta (OGATA, 2010). Logo, a resposta em malha fechada pode ser fortemente degradada pela presença dos zeros do sistema, os quais não são levados em conta na utilização do Método de Alocação de Pólos. Nesses casos, escolher adequadamente a posição dos pólos de malha fechada não é nada trivial.

O Método do Regulador Linear Quadrático (LQR, do inglês *Linear-Quadratic Regulator*), ao invés de utilizar a localização dos pólos como critério de projeto, baseia-se em minimizar uma função de custo quadrática, associada à energia dos estados do sistema e das entradas de controle projetadas (JOHNSON; GRIMBLE, 1987).

A energia E de um sinal vetorial $x(t) \in \mathbb{R}^n$ pode ser determinada a partir da Equação (2.12), a qual corresponde à soma das energias de todas as suas i -ésimas componentes.

$$E = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n x_i(t)^2 dt = \int_0^\infty x(t)^T x(t) dt \quad (2.12)$$

Portanto, quanto maior a amplitude e a duração do sinal $x(t)$, maior sua energia. No entanto, quanto maior a energia do sinal $x(t)$, mais oscilatório e/ou lento será seu comportamento ao longo do tempo.

Considerando-se o Sistema (2.1), deseja-se, idealmente, que a energia consumida pelos seus estados e pelo sinal de controle seja a mínima possível. Deste modo, o sistema em malha fechada responderá de forma rápida, pouco oscilatória e com baixo consumo energético do ponto de vista de seus atuadores. No entanto, o sistema controlado só se tornará mais rápido que quando em malha aberta graças aos esforços de controle, de tal

modo que quanto maior a energia consumida pelos seus atuadores, mais rápido o regime permanente será alcançado.

A filosofia por trás do Método LQR é estabelecer um compromisso entre as energias dos estados do sistema ($x(t)$) com os seus sinais de controle ($u(t)$) a partir da minimização da função de custo quadrática J , descrita na Equação (2.13), em que $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada positiva semi-definida ($Q = Q^T \geq 0$) que penaliza os estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz quadrada positiva definida ($R = R^T > 0$) que penaliza o sinal de controle $u(t) \in \mathbb{R}^m$ do sistema.

$$J = \int_0^{\infty} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (2.13)$$

Aplicando-se ao sistema a lei de controle do tipo realimentação de estados da Equação (2.3), o sistema a ser controlado deverá ser estabilizável: se houverem pólos não controláveis no sistema em malha aberta, os mesmos deverão ser pólos estáveis, ou seja, pólos com parte real negativa. Esta condição está diretamente relacionada à *controlabilidade* do sistema, definida na Equação (2.2). Sendo assim, para um sistema estabilizável, a solução do problema ótimo de controle pelo Método LQR será garantida (BRYSON; HO, 1975).

Segundo (JOHNSON; GRIMBLE, 1987), o ganho estático $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ da lei de controle da Equação (2.3), a qual estabilizará o sistema (2.1) a partir da minimização da função de custo quadrática da Equação (2.13), pode ser determinado a partir da Equação (2.14).

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.14)$$

em que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz simétrica positiva definida ($P = P^T > 0$), é a única solução da *Equação de Riccati* (2.15).

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.15)$$

Portanto, em resumo, a técnica de controle do Método LQR consiste na escolha adequada das matrizes Q e R (geralmente matrizes diagonais). Os elementos de Q e R são definidos, assim, a critério do projetista, e devem penalizar as variáveis do sistema de acordo com o(s) objetivo(s) de performance desejado(s). Em seguida, o ganho ótimo K pode ser determinado a partir da solução das Equações (2.15) e (2.14). Isso pode ser feito de maneira simples com o auxílio do software MATLAB, utilizando-se a função *lqr*.

Torna-se interessante realizar simulações com o sistema controlado para se verificar se o ganho K , resultante da minimização realizada, é adequado ou não para a aplicação considerada. Caso o desempenho obtido não seja bom o suficiente, pode-se tentar diferentes escolhas de Q e/ou R e, então, simular novamente o sistema em malha fechada.

De acordo com (OGATA, 2010) e (JOHNSON; GRIMBLE, 1987), o Método LQR apresenta uma margem de fase de pelo menos 60 graus. No caso SISO, o sistema de controle irá apresentar uma atenuação de -20 dB/década para altas frequências, o que em muitos casos pode ser insuficiente para uma boa rejeição de ruídos e/ou de dinâmicas não modeladas.

2.4 Observador de Estados de Ordem Completa

Um controlador por realimentação de estados necessita, ao longo do tempo, conhecer os valores dos estados do sistema a ser controlado. Em simulações virtuais, isso pode ser bastante simples de se fazer. Contudo, em experimentos reais, pode ser muito caro ou nem mesmo possível medir alguns dos estados de tal sistema, dada a inexistência de captores ou a impossibilidade de se acoplar um sensor em determinados locais de interesse.

Felizmente, pode-se tentar estimar os estados não mensuráveis a partir de cálculos utilizando informações apenas das saídas e entradas do sistema. Este procedimento é conhecido como o projeto de um Observador de Estados (OGATA, 2010). No caso em que todos os estados do sistema são estimados, o termo Observador de Estados de Ordem Completa (*Full-State Observer*) é utilizado.

Segundo (OGATA, 2010), um observador de estados de ordem completa pode ser projetado se e somente se todos os estados do sistema forem *detectáveis* (ou *observáveis*). Por definição, um sistema é *observável* se e somente se sua matriz de observabilidade O_b tem posto completo, i.e., o *rank* desta matriz é igual ao número de estados do sistema considerado. A matriz de observabilidade O_b de um observador de estados de ordem completa pode ser calculada pela Equação (2.16).

$$O_b = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{(n-1)} C^T \end{bmatrix}^T \quad (2.16)$$

em que C e A são matrizes constantes, definidas na representação do sistema em forma de espaço de estados segundo a Equação (2.1), e n equivale à ordem ou número de estados do sistema.

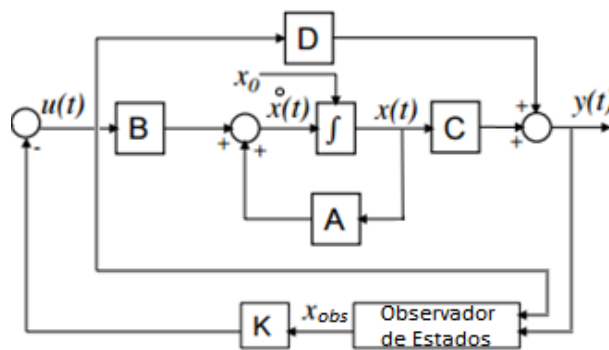
Matematicamente, um observador de estados de ordem completa pode ser representado pelo Sistema (2.17), em que $x_{obs}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados estimados, $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é a matriz de ganho do observador, $y_{obs}(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do observador de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle do sistema e $C_{obs} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma

matriz identidade. A e B correspondem às matrizes da representação do sistema na forma de espaço de estados.

$$\begin{cases} \dot{x}_{obs}(t) = Ax_{obs}(t) + Bu(t) + L(y(t) - y_{obs}(t)) \\ y_{obs}(t) = C_{obs}x_{obs}(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

A finalidade do observador de estados de ordem completa é fornecer estimativas do vetor de estados $x(t)$ do sistema em estudo, como demonstrado na Figura 4, de forma a tornar possível a implementação de um controlador por realimentação de estados no caso em que um ou mais estados de tal sistema não podem ser mensurados de forma direta.

Figura 4 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada que utiliza um observador de estados de ordem completa.



A precisão das estimativas irá depender da matriz de ganho L , a qual necessita ser determinada. Para tanto, o método do Estimador Linear Quadrático (LQE, do inglês *Linear-Quadratic Estimator*) pode ser utilizado, o qual se baseia na aplicação do Filtro de Kalman (KARIMI, 2011). Nesta abordagem, a matriz de ganho L é determinada com base nos valores de matrizes de ponderação, relacionadas com a covariância do ruído sobre os estados e a covariância do ruído sobre as saídas.

Outro método interessante para se determinar a matriz de ganho L é dado pela simples alocação dos pólos do Sistema (2.17) em posições desejadas, utilizando-se, para tanto, qualquer método de alocação de pólos (como o da Seção 2.3.1, por exemplo). O objetivo deve ser o de tornar nulo o erro dinâmico $e(t)$ entre o vetor de estados $x(t)$ e o vetor de estados estimados $x_{obs}(t)$, o mais rápido possível. O erro dinâmico de estimação é determinado pela Equação (2.18).

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (2.18)$$

Os pólos do sistema da Equação (2.18) são equivalentes aos autovalores da matriz $(A - LC)$, os quais dependem, portanto, da matriz de ganho L a ser determinada.

Pela abordagem do Filtro de Kalman, a determinação da matriz de ganho L deve resultar em estimativas ótimas, obtidas, portanto, com mínimo erro quadrático (KALMAN, 1960). Esta abordagem consiste em minimizar a covariância do erro estimado quando condições presumidas são satisfeitas. O erro quadrático médio das estimativas, $S_e(t)$, pode ser determinado a partir da Equação (2.19), em que E se refere ao cálculo da esperança matemática e $E[(x(t) - x_{obs}(t))^T y(t)] = 0$.

$$S_e(t) = E[(x(t) - x_{obs}(t))^T (x(t) - x_{obs}(t))] \quad (2.19)$$

Nesta abordagem, a matriz de ganho ótimo L poderá ser determinada pela Equação (2.20), associada à Equação de Riccati (2.21).

$$L = S_e C^T N^{-1} \quad (2.20)$$

$$-M = (S_e A^T + A S_e) - S_e C^T N^{-1} C S_e \quad (2.21)$$

em que $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada semi-definida positiva que representa a covariância do ruído sobre os estados e $N \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é uma matriz quadrada definida positiva que representa a covariância do ruído sobre as saída do sistema.

Segundo (KARIMI, 2011), se as matrizes de covariância M e N não podem ser determinadas a partir de informações experimentais sobre o sistema em estudo, torna-se necessário executar um processo de *tuning* (sintonia empírica), ou seja, realizar diversos testes com valores diferentes para os componentes das matrizes M e N , procurando-se obter os melhores resultados de estimação.

3 Metodologia

Neste capítulo, serão abordados os métodos e cálculos aplicados durante o projeto dos controladores por realimentação de estados e do observador de estados de ordem completa para o sistema de suspensão ativa. O objetivo de performance adotado neste trabalho considera apenas o aumento do nível de conforto dos passageiros do veículo equipado de suspensões ativas. Para tanto, os seguintes tópicos serão estudados:

- Modelagem físico-matemática do sistema de suspensão ativa, considerando-se o modelo *quarter-car* da Figura 1;
- Representação do sistema em malha aberta na forma de espaço de estados e análise de sua estabilidade;
- Análise de funções de transferência;
- Desenvolvimento de controladores por realimentação de estados a partir do modelo do sistema de suspensão ativa na forma de espaço de estados e da utilização dos métodos de Alocação de Pólos e Regulador Linear Quadrático (LQR);
- Desenvolvimento de um observador de estados de ordem completa para o sistema de suspensão ativa;
- Testes em simulação para verificar se as especificações do projeto são atendidas sem qualquer saturação do atuador do sistema;
- Implementação prática dos controladores e do observador de estados desenvolvidos, utilizando, para tanto, a planta de suspensão ativa QUARC (Anexo A), a fim de se avaliar o desempenho real do sistema controlado em resposta a diferentes tipos de perturbação sobre a superfície da rodovia.

Em resumo, inicialmente serão projetados dois controladores por realimentação de estados, assumindo-se que todos os seus estados podem ser monitorados (isto é, quantificados) para todo instante de tempo $t \geq t_0$. No entanto, em um sistema real, um ou mais estados podem ser imensuráveis. De fato, esta é uma situação bastante comum em diversos processos industriais. Logo, de modo a exemplificar esta situação com a planta real de suspensão ativa QUARC, um observador de estados de ordem completa (no qual todos os estados do sistema são estimados a partir da medida dos vetores de entrada de controle e de saída do sistema) será também desenvolvido.

3.1 Modelagem do Sistema de Suspensão Ativa

O projeto de controladores por realimentação de estados necessita de um modelo matemático do sistema automotivo de suspensão ativa. Para tanto, equações dinâmicas podem ser derivadas do modelo *quarter-car* da Figura 1, obtendo-se, assim, um sistema linear de equações diferenciais ordinárias. A partir destas equações dinâmicas, será possível simular um modelo teórico aproximado do sistema, para se verificar o funcionamento do sistema em malha fechada antes de implementá-lo, de fato, na planta real de suspensão ativa *QUARC*. Assim, pode-se verificar se os controladores atendem ao objetivo de performance como desejado. Além disso, evitam-se resultados inesperados que poderiam danificar a planta utilizada.

As equações dinâmicas que descrevem o sistema de suspensão ativa podem ser então utilizadas para se determinar uma representação do sistema na forma de espaço de estados, na qual os estados do sistema serão definidos de tal modo que reflitam os parâmetros de desempenho a serem investigados durante este trabalho.

Considerando-se, portanto, o modelo *quarter-car* da Figura 1, o sistema de suspensão ativa pode ser modelado como uma dupla estrutura massa-mola-amortecedor. Para se obter as equações de movimento deste sistema, o método do diagrama de corpo livre pode ser aplicado. Nesta abordagem, as entradas do sistema da Figura 1 serão escolhidas como sendo o esforço de controle do atuador da suspensão ativa, $F_c(t)$, e a variação da posição relativa da superfície da rodovia, $\dot{z}_r(t)$. Além disso, define-se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ coordenadas de valor absoluto, as quais representarão, respectivamente, o deslocamento vertical do pneu (massa não suspensa M_{us}) e o deslocamento vertical do corpo do veículo (massa suspensa M_s), ambas com relação à superfície da rodovia. As seguintes hipóteses serão adotadas:

- O comportamento das molas e dos amortecedores é linear;
- As rodas do veículo estão sempre em contato com a superfície da rodovia;
- Os efeitos de atrito e demais forças externas podem ser negligenciados;
- Não há movimento rotacional sobre a roda e o corpo do veículo.

Levando-se em conta tais considerações, a aplicação da *Segunda Lei de Newton* para cada uma das massas do modelo *quarter-car* da Figura 1, como ilustrado nas Figuras 5 e 6, resulta no sistema de equações diferenciais da Equação (3.1), em que g é a aceleração gravitacional no meio e L (R) o comprimento nominal da mola K_s (K_{us}).

$$\begin{cases} M_s \ddot{x}_2(t) = -M_s g + F_c(t) - K_s [x_2(t) - x_1(t) - L] - B_s [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] \\ M_{us} \ddot{x}_1(t) = -M_{us} g - F_c(t) + K_s [x_2(t) - x_1(t) - L] + B_s [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + \dots \\ \quad \quad \quad -K_{us} [x_1(t) - z_r(t) - R] - B_{us} [\dot{x}_1(t) - \dot{z}_r(t)] \end{cases} \quad (3.1)$$

Figura 5 – Diagrama de corpo livre da massa M_s do modelo *quarter-car* da Figura 1.

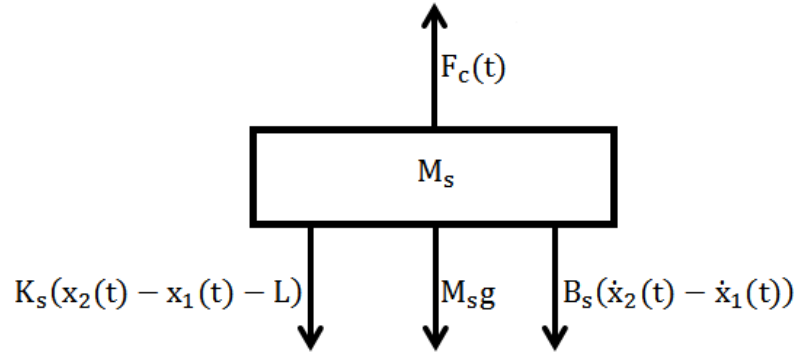
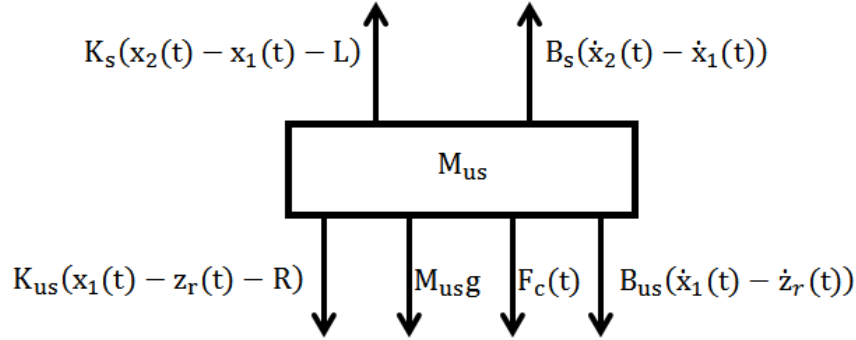


Figura 6 – Diagrama de corpo livre da massa M_{us} do modelo *quarter-car* da Figura 1.



De fato, a força gravitacional presente no Sistema (3.1) altera apenas os pontos de equilíbrio do sistema de suspensão ativa, sem influenciar no seu comportamento dinâmico. Além disso, deve-se salientar que as coordenadas absolutas adotadas para se obter as equações de movimento do modelo *quarter-car* da Figura 1 são tais que as molas K_s e K_{us} estarão relaxadas apenas quando $x_2(t) - x_1(t) = L$ e $x_1(t) - z_r(t) = R$, respectivamente.

Na prática, no entanto, as molas K_s e K_{us} jamais estarão em suas posições de relaxamento, devido aos pesos das massas M_s e M_{us} sobre elas. Em outras palavras, devido à aceleração da gravidade, os pontos de equilíbrio das coordenadas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, dados respectivamente por x_{1eq} e x_{2eq} , jamais estarão localizados sobre a posição em que as molas estão relaxadas (descarregadas), mas, sim, onde um equilíbrio estático entre os pesos das massas e as forças das molas existir.

Uma maneira simples de se determinar os pontos de equilíbrio x_{1eq} e x_{2eq} do Sistema (3.1) é a partir da substituição de suas derivadas de primeira e segunda ordem por zero, dado que não há variações no sistema quando o mesmo se encontra em equilíbrio. Para tanto, será considerado que $z_{req} = 0$, isto é, os desvios sobre a superfície da rodovia ($z_r(t)$) são referenciados à origem, e que $F_c(t) = 0$ quando o sistema se encontra em equilíbrio.

Fazendo-se tais substituições nas equações do Sistema (3.1), obtém-se o Sistema (3.2).

$$\begin{cases} M_s(0) = -M_s g + (0) - K_s [x_{2_{eq}} - x_{1_{eq}} - L] - B_s [(0) - (0)] \\ M_{us}(0) = -M_{us} g - (0) + K_s [x_{2_{eq}} - x_{1_{eq}} - L] + B_s [(0) - (0)] + \dots \\ \qquad \qquad \qquad -K_{us} [x_{1_{eq}} - (0) - R] - B_{us} [(0) - (0)] \end{cases} \quad (3.2)$$

Assim, realizando-se algumas manipulações matemáticas nas equações do Sistema (3.2), obtém-se os pontos de equilíbrio $x_{1_{eq}}$ e $x_{2_{eq}}$ do sistema de suspensão ativa da Figura 1, apresentados na Equação (3.3).

$$\begin{aligned} x_{1_{eq}} &= R - g \left(\frac{M_s + M_{us}}{K_{us}} \right) \\ x_{2_{eq}} &= L + R - g \left(\frac{M_s + M_{us}}{K_{us}} \right) - g \left(\frac{M_s}{K_s} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Um modelo linear e invariante no tempo pode então ser determinado para o sistema de suspensão ativa, considerado o comportamento do sistema em torno dos pontos de equilíbrio $x_{1_{eq}}$ e $x_{2_{eq}}$ definidos na Equação (3.3). Para tanto, será adotada uma mudança de variáveis, em que $z_s(t)$ ($z_{us}(t)$) representa as variações do movimento vertical da massa suspensa M_s (massa não suspensa M_{us}) em torno do ponto de equilíbrio $x_{2_{eq}}$ ($x_{1_{eq}}$), de acordo com a Equação (3.4).

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1_{eq}} + z_{us}(t) \\ x_2(t) &= x_{2_{eq}} + z_s(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por fim, substituindo-se as variáveis das Equações (3.4) e (3.3) no Sistema (3.1), obtém-se o Sistema (3.5), um sistema linear e invariante no tempo que representa as dinâmicas do modelo *quarter-car* da Figura 1. Por questões de brevidade, a notação de dependência temporal será omitida.

$$\begin{cases} M_s \ddot{z}_s = F_c - K_s (z_s - z_{us}) - B_s (\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) \\ M_{us} \ddot{z}_{us} = -F_c + K_s (z_s - z_{us}) + B_s (\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) + \dots \\ \qquad \qquad \qquad -K_{us} (z_{us} - z_r) - B_{us} (\dot{z}_{us} - \dot{z}_r) \end{cases} \quad (3.5)$$

O Sistema (3.5) será, portanto, utilizado para se projetar os controladores por realimentação de estados para o sistema de suspensão ativa.

3.2 Representação do Sistema em Espaço de Estados

As matrizes de um espaço de estados representam um conjunto de equações diferenciais que descrevem a dinâmica de um dado sistema. Uma vez que as equações dinâmicas do Sistema (3.5) são equações lineares e invariantes no tempo, o sistema de suspensão ativa pode ser reescrito na forma de espaço de estados da Equação (2.1).

Para tanto, definiu-se que o vetor de entrada $u(t)$ será dado pela Equação (3.6). Nota-se, assim, que a primeira entrada do sistema se refere à velocidade com que a superfície da rodovia varia ao longo do tempo ($\dot{z}_r(t)$). De fato, esta variável se comporta como uma entrada de perturbação no sistema, já que é a partir dela que vibrações são provocadas no corpo do automóvel. A segunda entrada do sistema se refere à ação de controle da suspensão ativa ($F_c(t)$), a qual será vista como o atuador dos controladores.

$$u(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_r(t) & F_c(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O vetor de estados $x(t)$ do sistema de suspensão ativa será composto por quatro estados, conforme a Equação (3.7). O primeiro estado de $x(t)$ representa a deflexão da suspensão ativa no modelo da Figura 1, a qual resume a medida de performance a ser otimizada neste trabalho, de modo que vibrações sobre o corpo do automóvel sejam devidamente atenuadas. O segundo estado de $x(t)$ representa a velocidade do deslocamento vertical do corpo do veículo. O terceiro estado representa a deformação do pneu do automóvel e o quarto estado representa a velocidade com que a roda se desloca verticalmente com relação à superfície da rodovia.

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

O vetor de saída $y(t)$ do sistema é apresentado na Equação (3.8). A primeira saída de medição representa a deflexão da suspensão ativa (equivalente ao primeiro estado do vetor $x(t)$). A segunda saída de medição representa a aceleração do corpo do automóvel ($\ddot{z}_s(t)$). As duas saídas de $y(t)$ serão posteriormente utilizadas a fim de se projetar um observador de estados de ordem completa para o sistema controlado.

$$y(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \ddot{z}_s(t) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Assim, a partir das equações dinâmicas de $\ddot{z}_s(t)$ e $\ddot{z}_{us}(t)$ do Sistema (3.5) e dos vetores $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ definidos nas Equações (3.6), (3.7) e (3.8), respectivamente, as matrizes da Equação (2.1), que correspondem à representação do sistema de suspensão

ativa na forma de espaço de estados, serão dadas pelas matrizes A , B , C e D das Equações (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-K_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & \frac{-K_{us}}{M_{us}} & \frac{-(B_s+B_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \\ -1 & 0 \\ \frac{B_{us}}{M_{us}} & \frac{-1}{M_{us}} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Agrupando-se os resultados, pode-se obter a representação completa do sistema de suspensão ativa na forma de espaço de estados, apresentada no Sistema (3.13), em que $x(t)$ é o vetor de estados da Equação (3.7).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-K_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & \frac{-K_{us}}{M_{us}} & \frac{-(B_s+B_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \\ -1 & 0 \\ \frac{B_{us}}{M_{us}} & \frac{-1}{M_{us}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_r(t) & F_c(t) \end{bmatrix} \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_r(t) & F_c(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

A fim de se investigar a estabilidade do Sistema (3.5) em malha aberta, pode-se analisar os pólos do sistema a partir de sua representação em espaço de estados. Sabe-se que a equação característica do sistema em malha aberta pode ser obtida pelo cálculo de $\det(sI-A)=0$, em que $\det(\cdot)$ representa a função determinante, s é o operador de Laplace e I é uma matriz identidade de ordem igual a do sistema. Portanto, os pólos do sistema em malha aberta correspondem aos autovalores da matriz A do espaço de estados, definida na

Equação (3.9). Ao se calcular o seu determinante, obtém-se o resultado da Equação (3.14).

$$\det(sI - A) = \frac{1}{M_s M_{us}} \left[(M_s M_{us}) s^4 + (P_3) s^3 + (P_2) s^2 + (P_1) s + K_s K_{us} \right] = 0 \quad (3.14)$$

em que P_1 , P_2 e P_3 são constantes descritas na Equação (3.15), calculadas a partir dos parâmetros do sistema de suspensão ativa.

$$\begin{cases} P_1 = K_s B_{us} + K_{us} B_s \\ P_2 = M_s K_s + M_s K_{us} + M_{us} K_s + B_s B_{us} \\ P_3 = M_s B_s + M_s B_{us} + M_{us} B_s \end{cases} \quad (3.15)$$

Assim, nota-se que a equação característica do sistema, segundo as Equações (3.14) e (3.15), é uma equação polinomial de quarta ordem. Uma vez que todos os seus coeficientes são positivos, todas as suas quatro raízes serão números não-positivos. No entanto, como o sistema não contém pólos em $s = 0$, pode-se concluir que todas as quatro raízes serão negativas e, portanto, todos os pólos do sistema em malha aberta estarão localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo de Laplace. Logo, pode-se concluir que o sistema de suspensão ativa em malha aberta é estável.

3.3 Análise de Funções de Transferência

Do Sistema (3.5), as funções de transferência das Equações (3.16) e (3.17) podem ser determinadas, em que P_1 , P_2 e P_3 são constantes determinadas pela Equação (3.15).

$$\frac{Z_s(s)}{Z_r(s)} = \frac{(B_s B_{us}) s^2 + (K_s B_{us} + K_{us} B_s) s + K_s K_{us}}{(M_s M_{us}) s^4 + (P_3) s^3 + (P_2) s^2 + (P_1) s + K_s K_{us}} \quad (3.16)$$

$$\frac{Z_{us}(s)}{Z_r(s)} = \frac{(M_s B_{us}) s^3 + (M_s K_{us} + B_s B_{us}) s^2 + (K_s B_{us} + K_{us} B_s) s + K_s K_{us}}{(M_s M_{us}) s^4 + (P_3) s^3 + (P_2) s^2 + (P_1) s + K_s K_{us}} \quad (3.17)$$

Analisando-se as duas funções de transferência, nota-se que:

- $\frac{Z_s(s)}{Z_r(s)}$ tem ganho estático unitário e sua magnitude tende a zero com declividade de -40 dB por década à medida que a frequência aumenta. Portanto, assumindo-se que as perturbações sobre a superfície da rodovia tendam, de certa forma, para um valor constante, a posição relativa do corpo do veículo deverá convergir para o mesmo valor constante após um certo intervalo de tempo, dado o ganho estático unitário;
- $\frac{Z_{us}(s)}{Z_r(s)}$ tem ganho estático unitário e sua magnitude tende a zero com declividade de -20 dB por década à medida que a frequência aumenta. Assim, uma vez que o ganho

estático entre a superfície da rodovia e o deslocamento vertical da roda é unitário e assumindo que a superfície da rodovia tenda a um valor constante, a posição vertical relativa da roda do veículo deverá convergir para o mesmo valor constante;

- Se $B_s = B_{us} = 0$, o sistema remanescente será composto unicamente por massas e molas. Neste caso, o denominador de ambas funções de transferência será dado por:

$$D(s) = (M_s M_{us})s^4 + (M_s K_s + M_s K_{us} + M_{us} K_s)s^2 + K_s K_{us} \quad (3.18)$$

para o qual todos os coeficientes são positivos. De fato, isso caracteriza um sistema puramente oscilatório, com dois picos de ressonância (um para cada massa).

Torna-se interessante analisar também as funções de transferência que podem ser derivadas diretamente do Sistema (3.13). Como tal sistema se encontra na forma de espaço de estados, as funções de transferência $T(s)$ entre o vetor $u(t)$ e o vetor $y(t)$ podem ser calculadas diretamente pela aplicação da Equação (3.19).

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.19)$$

em que $\det(\cdot)$ representa a função determinante, s é o operador de Laplace e I é uma matriz identidade de ordem igual a do sistema.

Para tanto, serão consideradas as definições da Equação (3.20).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{z_s(t) - z_{us}(t)}{\dot{z}_r(t)} \right\} &= \frac{Z_s(s) - Z_{us}(s)}{sZ_r(s)} \equiv \frac{Z_{def}(s)}{sZ_r(s)} \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{z_s(t) - z_{us}(t)}{F_c(t)} \right\} &= \frac{Z_s(s) - Z_{us}(s)}{F_c(s)} \equiv \frac{Z_{def}(s)}{F_c(s)} \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{\ddot{z}_s(t)}{\dot{z}_r(t)} \right\} &= \frac{s^2 Z_s(s)}{sZ_r(s)} \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{\ddot{z}_s(t)}{F_c(t)} \right\} &= \frac{s^2 Z_s(s)}{F_c(s)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assim, a partir da aplicação da Equação (3.19) com o Sistema (3.13), obtém-se as funções de transferência das Equações (3.21), (3.22), (3.23) e (3.24), novamente com P_1 , P_2 e P_3 dados pela Equação (3.15).

$$\frac{Z_{def}(s)}{sZ_r(s)} = \frac{-s[(M_s B_{us})s + (M_s K_{us})]}{(M_s M_{us})s^4 + (P_3)s^3 + (P_2)s^2 + (P_1)s + K_s K_{us}} \quad (3.21)$$

$$\frac{Z_{def}(s)}{F_c(s)} = \frac{(M_s + M_{us})s^2 + (B_{us})s + K_{us}}{(M_s M_{us})s^4 + (P_3)s^3 + (P_2)s^2 + (P_1)s + K_s K_{us}} \quad (3.22)$$

$$\frac{s^2 Z_s(s)}{s Z_r(s)} = \frac{s[(B_s B_{us})s^2 + (K_s B_{us} + K_{us} B_s)s + (K_s K_{us})]}{(M_s M_{us})s^4 + (P_3)s^3 + (P_2)s^2 + (P_1)s + K_s K_{us}} \quad (3.23)$$

$$\frac{s^2 Z_s(s)}{F_c(s)} = \frac{s^2[(M_{us})s^2 + (B_{us})s + K_{us}]}{(M_s M_{us})s^4 + (P_3)s^3 + (P_2)s^2 + (P_1)s + K_s K_{us}} \quad (3.24)$$

Analisando-se estas funções de transferência, observa-se que:

- $\frac{Z_{def}(s)}{s Z_r(s)}$ possui ganho estático nulo e tende a zero com uma declividade de -40 dB por década à medida que a frequência aumenta;
- $\frac{Z_{def}(s)}{F_c(s)}$ possui ganho estático igual a $1/K_s$ e tende a zero com uma declividade de -40 dB por década à medida que a frequência aumenta;
- $\frac{s^2 Z_s(s)}{s Z_r(s)}$ possui ganho estático nulo e tende a zero com uma declividade de -20 dB por década à medida que a frequência aumenta;
- $\frac{s^2 Z_s(s)}{F_c(s)}$ possui ganho estático nulo e tende a $1/M_s$ à medida que a frequência aumenta;

Logo, assumindo-se que o esforço de controle $F_c(t)$ e as variações sobre a superfície da rodovia $\dot{z}_r(t)$ tendam, de certa forma, para valores constantes ao longo do tempo, as seguintes conclusões podem ser realizadas:

- A deflexão da suspensão ativa ($z_{def}(t) = z_s(t) - z_{us}(t)$) irá convergir para zero após um dado intervalo de tempo, dado que o ganho estático entre $Z_{def}(s)$ e $s Z_r(s)$ é nulo. O mesmo pode ser concluído considerando-se a aceleração do corpo do veículo ($\ddot{z}_s(t)$), em relação a $\dot{z}_r(t)$ e a $F_c(t)$;
- Dado que o ganho estático entre $Z_{def}(s)$ e $F_c(s)$ é igual a $1/K_s$, a deflexão da suspensão ativa ($z_{def}(t)$) deverá convergir para um valor constante “ K_s vezes menor” que o atuador.

3.4 Projeto do Controlador por Realimentação de Estados

Durante o projeto do sistema de controle, os seguintes desafios serão enfrentados:

- Simulação e análise do funcionamento do sistema em malha aberta;
- Implementação dos controladores para minimizar as vibrações do corpo do veículo produzidas por perturbações sobre a superfície da rodovia;
- Garantir que o esforço de controle se mantenha dentro da sua faixa de saturação.

Conforme a representação do sistema em malha fechada apresentada na Figura 3, neste trabalho as condições iniciais do sistema (vetor x_0) serão arbitrariamente consideradas nulas. Os pólos do sistema em malha aberta dependerão apenas dos valores próprios da matriz A e os pólos do sistema em malha fechada dependerão dos valores próprios de $(A - B_{F_c}K)$, em que B_{F_c} representa a segunda coluna da matriz B da Equação (3.10), referindo-se à entrada de controle $F_c(t)$ do vetor $u(t)$ da Equação (3.6). A matriz B_{F_c} é apresentada na Equação (3.25).

$$B_{F_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ \frac{-1}{M_{us}} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Conforme definido na Seção 2.3, um sistema é *controlável* se e somente se sua matriz de controlabilidade C_b tem posto completo. Isto ocorre se o *rank* desta matriz for igual ao número de estados do sistema considerado. A matriz de controlabilidade C_b do Sistema (3.13) de suspensão ativa será calculada a partir da Equação (2.2), sendo que, neste caso, considera-se que $B = B_{F_c}$. Assim, substituindo-se as matrizes A e B_{F_c} das Equações (3.9) e (3.25) na Equação (2.2), encontra-se o resultado da Equação (3.26).

$$C_b = [B_{F_c} \quad AB_{F_c} \quad A^2B_{F_c} \quad A^3B_{F_c}] \quad \therefore \quad \text{rank}\{C_b\} = 4 \quad (3.26)$$

Portanto, o Sistema (3.13) de suspensão ativa é *controlável*.

3.4.1 Projeto do Controlador pelo Método de Alocação de Pólos

No projeto do controlador por realimentação de estados utilizando o Método de Alocação de Pólos, diferentes conjuntos ou matrizes Λ correspondentes aos “pólos desejados” podem ser testados, conforme apresentado na Seção 2.3.1. De fato, para cada escolha diferente de pólos para o sistema em malha fechada, diferentes ganhos K serão obtidos.

O objetivo é atenuar as vibrações sobre o corpo do veículo ao se perturbar o sistema com variações na superfície da rodovia. Para tanto, deve-se alocar os pólos de malha fechada em posições mais à esquerda do semi-plano complexo de Laplace, se comparadas às posições dos pólos em malha aberta, de modo que o sistema controlado atenuar os efeitos causados por perturbações sobre o veículo de forma mais rápida do que ocorre para o sistema não controlado (sistema passivo). Além disso, de forma a se obter resultados pouco oscilantes, deseja-se que a razão $\frac{\text{Im}\{\text{pólo}\}}{\text{Re}\{\text{pólo}\}}$ seja pequena, de modo que os efeitos de pólos muito oscilantes na resposta temporal do sistema sejam atenuados o mais rápido possível.

No entanto, deve-se ressaltar que quanto mais rápido for o sistema controlado em comparação com o sistema em malha aberta, maior deverá ser o vetor de ganho K a ser aplicado. Logo, maior será o esforço de controle $F_c(t)$ do sistema de suspensão ativa, podendo levá-lo à saturação. Portanto, simulações com o sistema controlado serão realizadas, para se verificar se o comportamento esperado do sistema em malha fechada é atingido sem problemas antes de implementá-lo na planta *QUARC* de suspensão ativa.

3.4.2 Projeto do Controlador pelo Método LQR

No projeto do controlador por realimentação de estados a partir do Método LQR, necessita-se definir as matrizes Q e R da Equação (2.13), as quais serão utilizadas no cálculo do ganho ótimo K a partir da solução da Equação de Riccati, segundo as Equações (2.14) e (2.15). Para tanto, torna-se necessário avaliar como penalizar os estados $x(t)$ e a entrada de controle $F_c(t)$ do sistema, de forma que os efeitos causados pelas perturbações sejam atenuados o mais rapidamente possível. Isso pode ser feito de maneira iterativa, alterando-se os elementos das matrizes Q e R e, então, com o respectivo ganho K calculado, simulando-se o sistema em malha fechada.

O primeiro elemento de $x(t)$, o qual representa a deflexão da suspensão ativa ($z_s(t) - z_{us}(t)$), é considerado um elemento importante a ser penalizado, dado que se deseja que a diferença entre a posição relativa da massa M_s com a posição relativa da massa M_{us} seja nula em regime permanente, o que fisicamente pode ocorrer se ambas as massas estiverem em equilíbrio, ou seja, se o veículo estiver em repouso (perturbações atenuadas). Assim, deseja-se que a energia do estado ($z_s(t) - z_{us}(t)$) seja bastante limitada, para que tal estado pouco possa variar ao longo do tempo. Logo, deve-se penalizar tal estado de maneira mais acentuada. Uma interpretação similar pode ser dada ao terceiro elemento do vetor de estados do sistema, o qual representa a deformação do pneu do automóvel ($z_{us}(t) - z_r(t)$).

Já o segundo e o quarto estados de $x(t)$, dados por $\dot{z}_s(t)$ e $\dot{z}_{us}(t)$, respectivamente, não devem ser tão penalizados quanto os outros dois estados, pois estes representam a velocidade de deslocamento das duas massas do modelo *quarter-car*. Em outras palavras, para que as massas possam rapidamente se deslocar e atingir novamente o equilíbrio após o veículo ser atingido por uma dada perturbação sobre a superfície da rodovia, não se deve penalizar tanto os estados que limitam a velocidade com que isso pode ocorrer.

Logo, uma boa escolha para a matriz Q , que penaliza os estados de $x(t)$, pode ser feita, inicialmente, definindo-a como uma matriz diagonal, e, em seguida, fazendo-se o primeiro e o terceiro elemento da diagonal serem de valor (ou ordem de grandeza) superior ao valor do segundo e quarto elementos.

Deve-se, ainda, analisar os efeitos de penalidade sobre o único esforço de controle do sistema, representado por $F_c(t)$, diretamente associado à matriz R , sendo esta, portanto, uma matriz de ordem um. Como o objetivo do projeto é de controlar o sistema de suspensão ativa, é importante que o atuador do sistema seja o menos possível limitado, para que mais rapidamente as perturbações possam ser atenuadas devido ao esforço de controle. Assim, teoricamente, pode-se facilmente concluir que o único elemento da matriz R , o qual irá penalizar a entrada $F_c(t)$, deve possuir um valor menor que os pesos estabelecidos aos estados $x(t)$. Caso contrário, se a entrada $F_c(t)$ for bastante penalizada, os efeitos de controle no sistema em malha fechada serão minimizados e o seu comportamento será muito próximo do comportamento do sistema em malha aberta (“sistema de suspensão passiva”). No entanto, deve-se ter cuidado, pois se houver total liberdade ao esforço de controle, pode ocorrer saturação.

Outra alternativa seria utilizar as informações do vetor de saída $y(t)$ para penalizar os estados do sistema, já que, no caso em estudo, $y(t)$ reflete parâmetros de interesse a serem minimizados (deflexão da suspensão ativa e aceleração da massa suspensa: o quanto antes a energia destes parâmetros for atenuada, antes os efeitos da perturbação o serão também). Assim, poderia-se, inicialmente, considerar $Q = C^T C$. Em seguida, se necessário, os elementos desta matriz Q poderiam ser ajustados para a obtenção de uma performance ainda mais rápida.

Assim, torna-se interessante testar diferentes valores para os quatro elementos da matriz Q e para o único elemento da matriz R , segundo as análises realizadas. Pode-se, então, simular o sistema em malha fechada para cada diferente ganho K calculado, de modo a se verificar se o objetivo de performance é alcançado como desejado.

3.5 Projeto do Observador de Estados de Ordem Completa

A estimação dos quatro estados do sistema de suspensão ativa será realizada com o projeto de um Estimador Linear Quadrático (LQE), baseado no Filtro de Kalman e na representação do sistema na forma de espaço de estados.

De acordo com a Seção 2.4, um sistema representado na forma de espaço estados é *observável* se e somente se sua matriz de observabilidade O_b possui *rank* igual ao número de estados do sistema. Substituindo-se as matrizes A e C das Equações (3.9) e (3.11) na Equação (2.16) para o cálculo do *rank* de O_b , encontra-se o resultado da Equação (3.27).

$$O_b = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & (A^T)^{(3)} C^T \end{bmatrix}^T \quad \therefore \quad \text{rank}\{O_b\} = 4 \quad (3.27)$$

Portanto, o Sistema (3.13) de suspensão ativa é *observável* e um observador de estados de ordem completa pode ser projetado.

As saídas a serem medidas para o processo de estimação são dadas por $y(t)$ na Equação (3.8), sendo elas a deflexão da suspensão ativa ($z_s(t) - z_{us}(t)$) e a aceleração do deslocamento vertical do corpo do veículo ($\ddot{z}_s(t)$). De fato, as saídas a serem monitoradas foram escolhidas a critério do projetista. No entanto, em um sistema veicular real, é difícil utilizar sensores para se medir os outros estados do sistema (deflexão do pneu, $z_{us}(t) - z_r(t)$, e velocidade do deslocamento vertical do pneu, $\dot{z}_{us}(t)$), pois se verifica ser mais simples instrumentar o corpo do veículo do que a sua roda. Além disso, em um sistema veicular real, pode ser complicado medir $z_r(t)$ para se ter a medida da deflexão do pneu.

Além disso, verifica-se ser muito complicado determinar as matrizes M (matriz de covariância do ruído sobre os estados) e N (matriz de covariância do ruído sobre as saídas) a partir de medições diretas dos níveis de ruído médio sobre a planta *QUARC* de suspensão ativa. No entanto, pode-se tentar determinar os elementos de M e N de acordo com resultados experimentais e de simulação da estrutura, procedimento similar ao da Seção 3.4.2, em que as matrizes Q e R do controlador LQR são determinadas por um processo de sintonia empírica (*tuning*).

4 Resultados

Neste capítulo, serão apresentados resultados experimentais e de simulação obtidos durante o projeto do sistema de controle de suspensão ativa, de modo a verificar se as performances de atenuação das vibrações sobre o corpo do veículo são atendidas como desejado. Todas as simulações foram realizadas na plataforma MATLAB/Simulink (desenvolvida pela MathWorks, Inc.), versão 7.12.0 (R2011a). Os testes experimentais foram realizados com a planta de suspensão ativa *QUARC* (fabricada pela Quanser, Inc. - Anexo A), a fim de se avaliar o desempenho real do sistema controlado em resposta a diferentes tipos de perturbação. Segundo sua fabricante, a faixa de operação limite do atuador da planta *QUARC*, para que não ocorra saturação, é de ± 98 N.

4.1 Análises do Sistema de Suspensão Ativa em Malha Aberta

Para se projetar os controladores por realimentação de estados e o observador de estados de ordem completa, é necessário conhecer os valores dos parâmetros físicos do sistema de suspensão ativa, dados os elementos característicos obtidos com sua modelagem. Para tanto, serão considerados os parâmetros da planta *QUARC*, os quais são apresentados na Equação (4.1) e que foram fornecidos pela própria fabricante.

$$\begin{cases} M_s = 2,45 \text{ kg} & M_{us} = 1 \text{ kg} \\ K_s = 900 \text{ N/m} & K_{us} = 2500 \text{ N/m} \\ B_s = 7,5 \text{ N/(m/s)} & B_{us} = 5 \text{ N/(m/s)} \end{cases} \quad (4.1)$$

Substituindo-se os parâmetros da Equação (4.1) na representação do sistema na forma de espaço de estados, segundo o Sistema (3.13), obtém-se o Sistema (4.2), o qual representa numericamente o sistema de suspensão ativa em malha aberta.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,3 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,408 \\ -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_r(t) \\ F_c(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -367,3 & -3,061 & 0 & 3,061 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,408 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_r(t) \\ F_c(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.2)$$

Portanto, as correspondentes matrizes numéricas da Equação (2.1) serão dadas pelas matrizes A , B , C e D das Equações (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,3 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,408 \\ -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -367,3 & -3,061 & 0 & 3,061 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,408 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Uma vez que a matriz A é de dimensão 4×4 , o sistema de suspensão ativa é de ordem quatro e possui quatro pólos. Avaliando-se os autovalores da matriz A da Equação (4.3), os pólos de malha aberta podem ser determinados a partir do cálculo de $polos_{ma} = \det(sI - A)$. O resultado é apresentado na Equação (4.7).

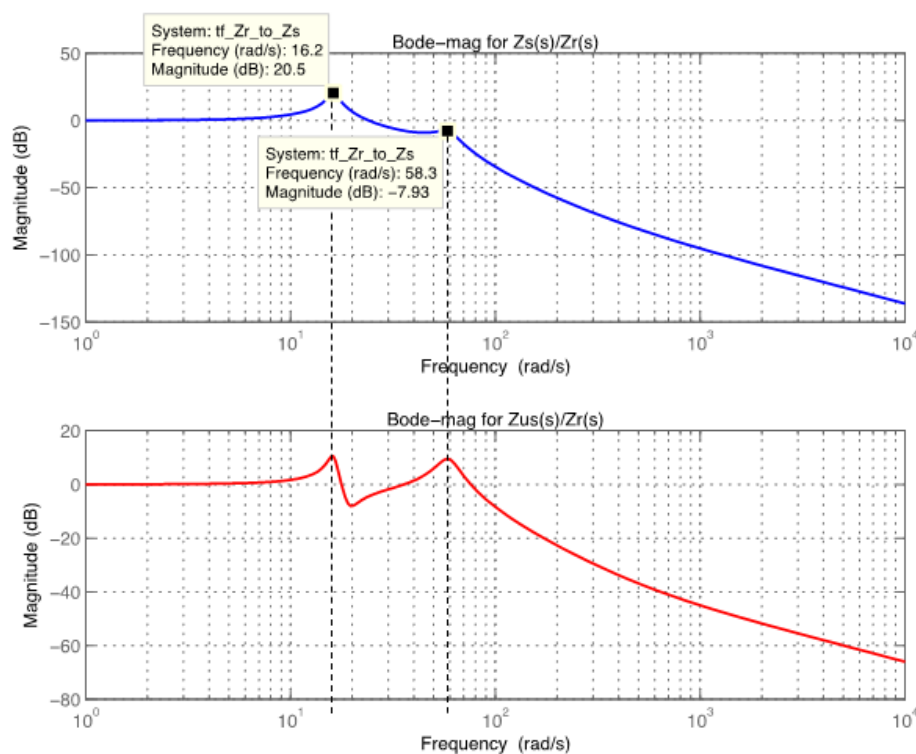
$$polos_{ma} = [-6.94 \pm i58.72 \quad -0.83 \pm i16.18] \quad (4.7)$$

Nota-se, pela Equação (4.7), que a parte real dos dois pares de pólos complexos é negativa. Portanto, o sistema de suspensão ativa em malha aberta é estável, como previsto ao final da Seção 3.2. No entanto, observa-se que o par de pólos dominante $(-0.83 \pm i16.18)$ é bastante “lento”, visto que o valor da parte real está muito próximo do eixo imaginário do plano s (i.e., muito próximo de 0 sobre o eixo real). Além disso, o módulo da razão entre a parte imaginária e a parte real de cada pólo resulta em um valor “expressivo”, muito maior que um. Combinando-se estes efeitos, o sistema em malha aberta deve se demonstrar oscilante e pouco amortecido.

Estas informações devem ser levadas em conta durante o projeto dos controladores por realimentação de estados, buscando-se determinar o ganho K adequado para que a resposta temporal do sistema controlado seja mais rápida e, ao mesmo tempo, menos oscilante que a resposta temporal do sistema passivo.

Pode-se também avaliar as funções de transferência $Z_s(s)/Z_r(s)$ e $Z_{us}(s)/Z_r(s)$, dadas pelas Equações (3.16) e (3.17), para se verificar o comportamento da posição relativa do corpo do veículo e da posição relativa do pneu com relação às variações sobre a superfície da estrada. O resultado é ilustrado na Figura 7, a qual apresenta a magnitude destas funções de transferência com relação à frequência.

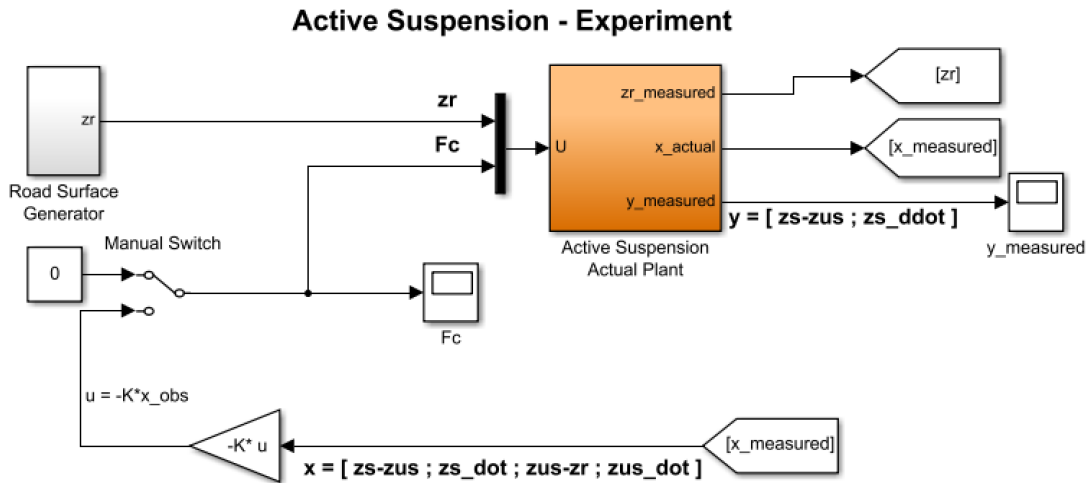
Figura 7 – Funções de transferência $Z_s(s)/Z_r(s)$ e $Z_{us}(s)/Z_r(s)$ em termos da magnitude.



De acordo com os dois diagramas de Bode da Figura 7, verifica-se que existem duas frequências de ressonância no sistema de suspensão ativa: uma próxima de 16,2 rad/s e outra próxima de 58,3 rad/s. Portanto, para perturbações na superfície da rodovia que possuam componente frequencial de valor próximo a estes picos de ressonância, as oscilações verticais no corpo do veículo ou no pneu serão amplificadas, quando comparadas com outras faixas de frequência. Além disso, nota-se que, para ambas as funções de transferência, o ganho estático é igual a um (ou zero decibéis), conforme esperado pela análise realizada na Seção 3.3.

Para se observar os efeitos dos picos de ressonância, pode-se simular o sistema em malha aberta com auxílio do software MATLAB/Simulink, segundo o diagrama de blocos da Figura 8. Para tanto, a perturbação de entrada (perfil da superfície da rodovia) pode ser escolhida como um sinal sinusoidal de amplitude constante e frequência variando dentro de um intervalo de interesse, por exemplo, entre 1 Hz (≈ 6 rad/s) e 15 Hz (≈ 95

Figura 8 – Diagrama de blocos utilizado no MATLAB/Simulink para se obter dados do sistema de suspensão ativa. A chave *Manual Switch* na posição “0” indica que o esforço de controle aplicado ao sistema é nulo (sistema em malha aberta); a chave na outra posição indica que o sistema é controlado por uma realimentação de estados.



rad/s), o qual inclui ambos os picos ressonantes encontrados na análise da Figura 7. Os resultados obtidos com este teste são apresentados na Figura 9, em que um intervalo de tempo de 30 segundos foi considerado, durante o qual a frequência do sinal de entrada $z_r(t)$ variou linearmente entre 1 Hz e 15 Hz.

Analisando-se as curvas da Figura 9, verifica-se que quando a frequência do sinal de entrada $z_r(t)$ possui valor próximo ao valor dos picos ressonantes, as amplitudes das oscilações de $z_s(t)$ e $z_{us}(t)$ são mais acentuadas do que para outras faixas de frequência. Percebe-se também que a frequência de ressonância próxima a 58,3 rad/s é mais efetiva sobre o deslocamento vertical do pneu ($z_{us}(t)$) do que sobre o deslocamento do corpo do veículo ($z_s(t)$). Isto pode ser inferido da Figura 7, comparando-se as amplitudes dos picos de ressonância, a qual é muito maior para $Z_{us}(s)/Z_r(s)$ do que para $Z_s(s)/Z_r(s)$ nesta frequência. Fisicamente, isso se deve ao fato de que o corpo do veículo é mais pesado do que o pneu e que a mola K_s é mais leve do que a mola K_{us} .

Para que posteriormente se possa comparar os resultados de desempenho em malha aberta com o desempenho obtido em malha fechada, foi definido um sinal de perturbação para a superfície da rodovia $z_r(t)$: um pulso de amplitude de 0,02 m, frequência de 0,33 Hz com 50% de largura de pulso e 0,1 segundo de atraso (já implementado na estrutura da planta *QUARC*). Assim, para se comparar os resultados de simulação aos ensaios experimentais obtidos com o sistema não controlado, utilizou-se este mesmo formato de perturbação na entrada do sistema. Os resultados são apresentados na Figura 10.

Figura 9 – Resposta temporal do sistema em malha aberta a um sinal $z_r(t)$ senoidal de amplitude constante e frequência variando de 1 Hz a 15 Hz em 30 segundos.

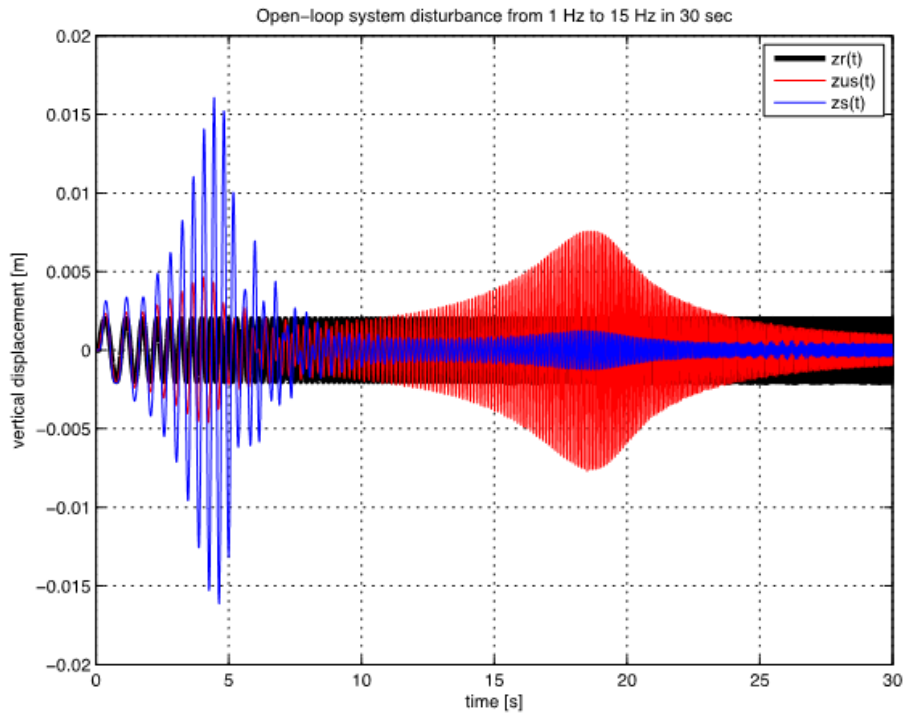
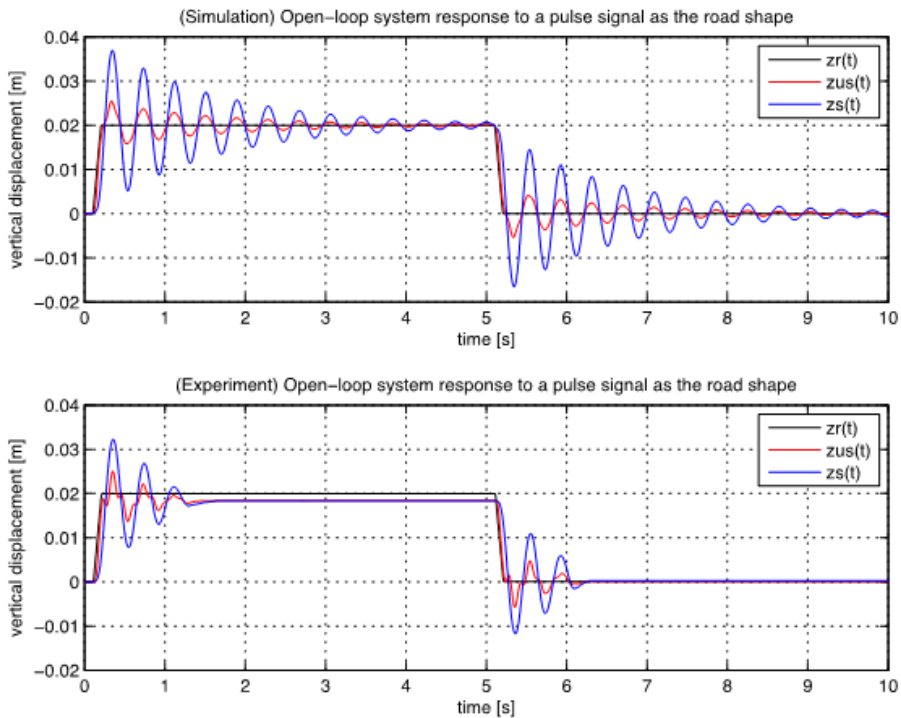


Figura 10 – Resposta do sistema em malha aberta a um pulso em $z_r(t)$. Comparação entre resultados de simulação e experimentais.



Observa-se, pela Figura 10, que a resposta temporal obtida com a simulação do sistema não controlado realmente é bastante oscilante e pouco amortecida, levando cerca de 5 segundos para se atingir o equilíbrio novamente após cada pulso de perturbação injetado.

Devido às forças de atrito na planta real de suspensão ativa *QUARC*, as oscilações reais em malha aberta são fortemente amortecidas quando comparadas com as oscilações do sistema simulado. De fato, o modelo *quarter-car* utilizado neste trabalho não considera forças externas (como forças de atrito) e não-linearidades nas molas. No entanto, os resultados de simulação e os resultados experimentais são bastante similares durante um curto intervalo de tempo, logo após o sinal de perturbação ser aplicado, durante o qual fortes oscilações ocorrem. Portanto, pode-se concluir que a abordagem utilizada continua sendo interessante para se buscar atingir o objetivo de projeto como desejado.

4.2 Análises do Controlador por Alocação de Pólos

Durante o projeto do controlador por realimentação de estados utilizando o método de Alocação de Pólos, foram testados vários conjuntos diferentes de pólos desejados em malha fechada (logo, diferentes ganhos K para o controlador), a fim de se obter menos oscilações no corpo do veículo ao se perturbar o sistema de suspensão ativa com variações sobre $z_r(t)$.

Um exemplo de conjunto de pólos desejados que resultou em boas performances para o sistema controlado é dado por $polos_{ap}$, na Equação (4.8), escolhido a partir das considerações feitas na Seção 3.4.1. Como o sistema em malha fechada deve ser estável, a parte real dos quatro pólos do sistema deve ser negativa.

$$polos_{ap} = [-100 \quad -50 \quad -30 + i20 \quad -30 - i20] \quad (4.8)$$

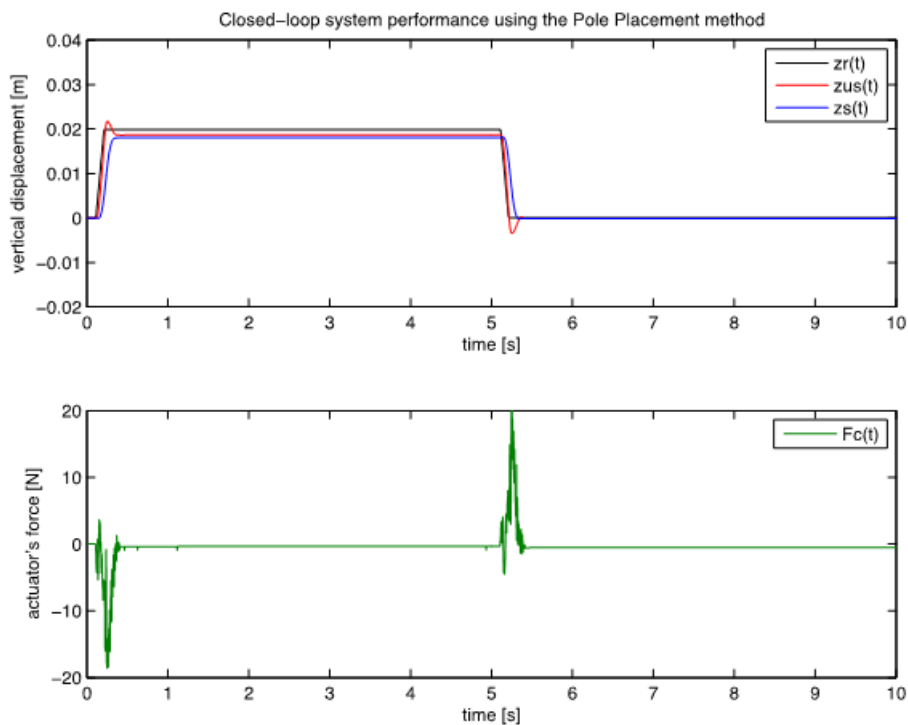
Comparando-se os pólos de malha fechada $polos_{ap}$ com os pólos de malha aberta $polos_{ma}$ da Equação (4.7), observa-se que o sistema controlado deve ser “mais rápido” que o sistema passivo, visto que a relação $\text{Re}\{polos_{ap}\} < \text{Re}\{polos_{ma}\}$ é verificada para todos os quatro pólos em malha fechada. Em outras palavras, como a parte real dos quatro pólos do sistema controlado é mais negativa que a parte real dos quatro pólos do sistema em malha aberta, o sistema em malha fechada deverá atingir o regime permanente em menos tempo, i.e., os efeitos de vibração causados pelas perturbações em $z_r(t)$ serão atenuados antes do que no sistema passivo. Além disso, a resposta temporal do sistema controlado deverá ser muito menos oscilante que a do sistema passivo, uma vez que a relação $\text{Im}\{polos_{ap}\}/\text{Re}\{polos_{ap}\}$ é bastante inferior a $\text{Im}\{polos_{ma}\}/\text{Re}\{polos_{ma}\}$ para todos os quatro pólos.

O vetor de ganho relacionado ao conjunto de pólos desejados $polos_{ap}$ da Equação (4.8) é apresentado na Equação (4.9), o qual foi determinado a partir do Método de Moore da Seção 2.3.1. De modo a se verificar o resultado numérico obtido, calculou-se o ganho do controlador também a partir da função *place* do MATLAB, chegando-se ao mesmo resultado.

$$K_{ap} = [5470 \quad 464,86 \quad -2866 \quad -4.7] \quad (4.9)$$

Os resultados obtidos experimentalmente a partir do método de Alocação de Pólos (após a verificação em simulação) são apresentados na Figura 11, para os quais foi aplicado uma perturbação na forma de pulso em $z_r(t)$, utilizando-se, desta vez, o diagrama de blocos da Figura 8 com a chave *Manual Switch* na posição de controle por realimentação de estados.

Figura 11 – Resultados experimentais obtidos com o Método de Alocação de Pólos em resposta a um pulso em $z_r(t)$.



Verifica-se, a partir da Figura 11, que o objetivo de desempenho é alcançado como desejado com o método de Alocação de Pólos: as oscilações no corpo do veículo (deslocamentos verticais relativos de $z_s(t)$) são rapidamente amortecidas quando comparadas às vibrações do sistema de suspensão ativa em malha aberta (Figura 10). Além disso, como desejado, não ocorre saturação do atuador $F_c(t)$.

Contudo, nota-se que existe um erro de regime permanente não nulo no sistema controlado, bem como na resposta temporal do experimento com o sistema passivo, como ilustrado na Figura 10. De fato, isso não era esperado, dada a análise das funções de transferência da Seção 4.1, em que se verificou que o ganho estático entre $Z_s(s)/Z_r(s)$ e entre $Z_{us}(s)/Z_r(s)$ seria unitário. Simulando-se o sistema controlado, o erro em regime permanente, de fato, é nulo.

Portanto, para tentar resolver este problema, foram testadas diferentes técnicas, tais como: controle integral, adição de um sinal de *Dither* ao sinal de controle $F_c(t)$, e a simples lubrificação da estrutura. No entanto, nenhuma das técnicas aplicadas resolveu o problema.

Assim, levantaram-se as seguintes hipóteses: existe uma zona morta sobre a ação do atuador da suspensão ativa $F_c(t)$, o qual não consegue levar as massas M_s e M_{us} até as posições finais de equilíbrio; ou, existem dinâmicas não modeladas da planta real de suspensão ativa *QUARC* que devem ser levadas em conta para que melhores resultados experimentais possam ser alcançados; ou, existe algum problema relacionado aos sensores que monitoram o sistema.

4.3 Análises do Controlador LQR

No projeto do controlador por realimentação de estados utilizando o método LQR, diversos testes com diferentes escolhas de matrizes Q e R foram realizados, buscando-se a melhor minimização da energia dos estados do sistema de suspensão ativa em malha fechada. Uma escolha de matrizes que proporcionou bons resultados em termos de performance é apresentada na Equação (4.10), a qual foi encontrada a partir das considerações realizadas na Seção 3.4.2.

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad R = [0, 01] \quad (4.10)$$

em que Q foi escolhida como uma matriz diagonal definida positiva de dimensão quatro, uma vez que o sistema possui quatro estados, e R uma matriz diagonal definida positiva de ordem um, dado que existe uma única entrada de controle no sistema considerado.

Aplicando-se as matrizes Q e R da Equação (4.10) nas Equações (2.15) e (2.14), obtém-se o vetor de ganho da Equação (4.11) para o controlador LQR.

$$K_{lqr} = [53, 94 \quad 149, 71 \quad -2349, 46 \quad -61, 31] \quad (4.11)$$

Os correspondentes pólos de malha fechada são dados pela aplicação de K_{lqr} na Equação (2.5), obtendo-se, como resultado, o conjunto de pólos da Equação (4.12) para o sistema controlado.

$$p_{lqr} = \left[-80,03 \quad -8,31 \quad -24,82 + i29,13 \quad -24,82 - i29,13 \right] \quad (4.12)$$

Nota-se, pela Equação (4.12), que a comparação entre os pólos de malha fechada, obtidos com o método LQR, com os pólos do sistema em malha aberta da Equação (4.7) trazem conclusões semelhantes às que foram levantadas a respeito dos pólos determinados com o método de Alocação de Pólos: novamente, observa-se que o sistema controlado deve ser “mais rápido” que o sistema passivo, visto que a relação $\text{Re}\{p_{lqr}\} < \text{Re}\{p_{ma}\}$ se verifica para os quatro pólos do sistema. Portanto, os efeitos de vibração causados pelas perturbações em $z_r(t)$ deverão ser atenuados mais rapidamente no sistema em malha fechada do que no sistema passivo. Inclusive, a resposta temporal do sistema controlado pelo método LQR deverá ser menos oscilante do que a do sistema passivo, observado que a relação $\text{Im}\{p_{lqr}\}/\text{Re}\{p_{lqr}\}$ é inferior a $\text{Im}\{p_{ma}\}/\text{Re}\{p_{ma}\}$ para todos os quatro pólos.

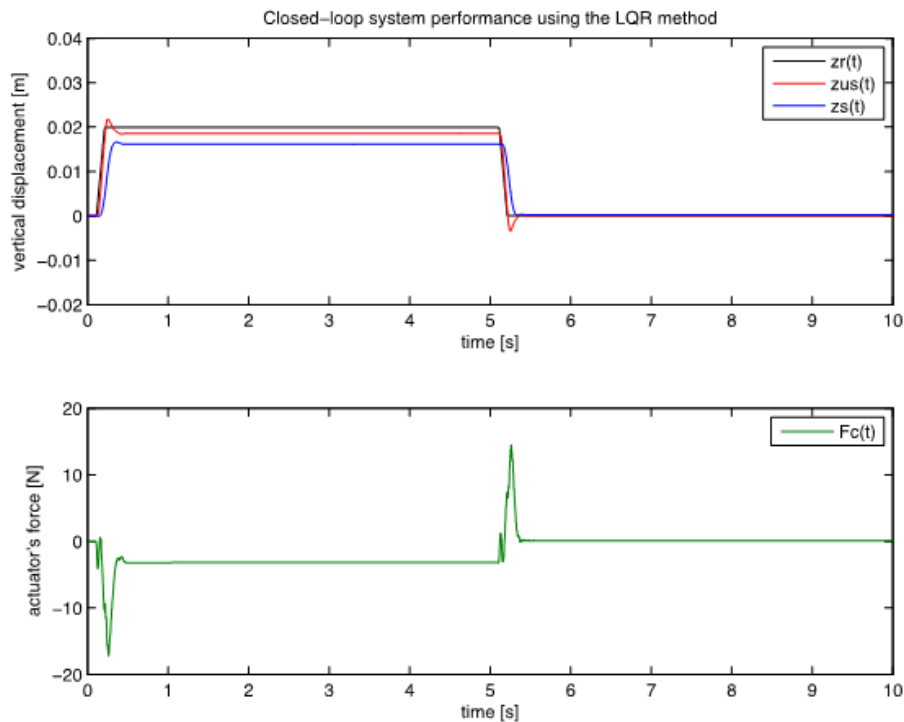
Os resultados de desempenho alcançados com o controlador projetado a partir do método LQR são ilustrados na Figura 12, para os quais foi aplicado uma perturbação na forma de pulso em $z_r(t)$. Para tanto, utilizou-se, novamente, o diagrama de blocos da Figura 8, com a chave *Manual Switch* na posição de controle por realimentação de estados.

As curvas da Figura 12 demonstram que os resultados obtidos com o método LQR se parecem bastante com os que foram obtidos pelo método de Alocação de Pólos, apresentados na Figura 11. No entanto, o vetor de ganho K_{lqr} da Equação (4.11) é um tanto diferente do vetor de ganho K_{ap} da Equação (4.9), embora, para ambos os casos, o objetivo de performance desejado seja alcançado, sem ocorrer qualquer saturação no atuador $F_c(t)$ da suspensão ativa. Assim, verifica-se que as oscilações sobre a massa M_s (corpo do veículo) são fortemente amortecidas, se comparadas aos resultados obtidos com o sistema não controlado.

Analisando-se o esforço de controle $F_c(t)$ das curvas apresentadas nas Figuras 11 e 12, pode-se concluir que os resultados alcançados com o método LQR são ligeiramente melhores, uma vez que, com esse método, os picos de amplitude de $F_c(t)$ foram menores e menos ruidosos do que com o método de Alocação de Pólos. Assim, para os experimentos seguintes, será considerado apenas o controlador LQR desenvolvido.

Outro formato de perturbação comumente utilizado no estudo de sistemas veiculares de suspensão é o chamado *bump*. Frequentemente, dispositivos com este formato são colocados de forma proposital sobre as estradas, visando acalmar o tráfego. Um *bump*

Figura 12 – Resultados experimentais obtidos com o Método LQR em resposta a um pulso em $z_r(t)$.

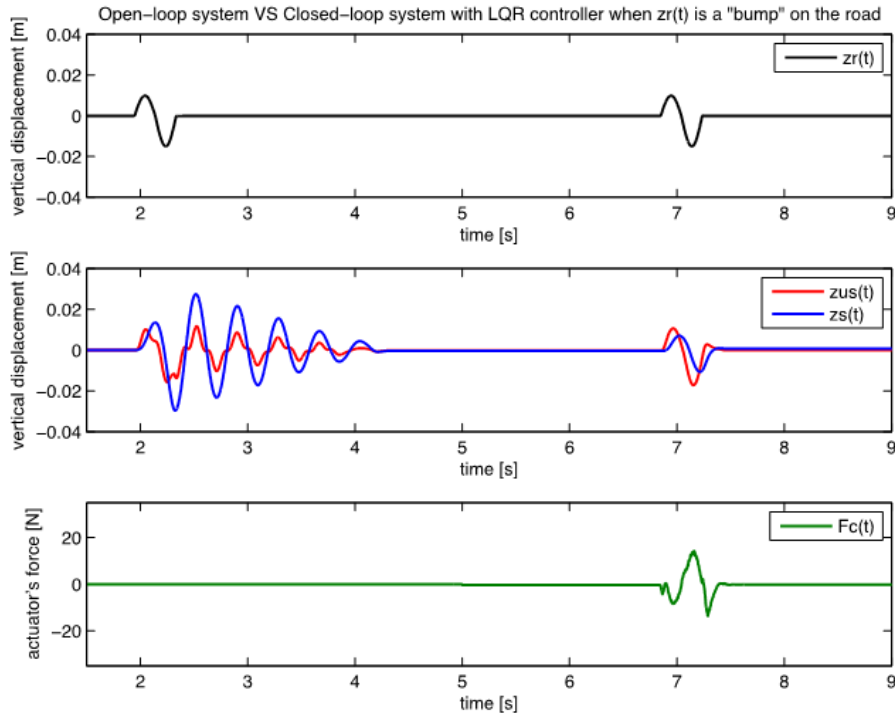


irá provocar oscilações no corpo dos veículos para que estes reduzam sua velocidade, com o intuito de reforçar as condições de segurança nestes trechos da rodovia. Torna-se interessante, portanto, analisar o desempenho do sistema implementado com o controlador LQR submetido a este outro tipo de perturbação. Os respectivos resultados experimentais são demonstrados na Figura 13.

Nota-se que os resultados apresentados na Figura 13 permitem comparar o desempenho do sistema de suspensão ativa em malha aberta (intervalo de tempo entre 0 e 5 segundos) com o desempenho em malha fechada (entre 5 e 9 segundos), com os quais se observa que o controlador LQR novamente atinge o objetivo de performance desejado: as vibrações no corpo do veículo ($z_s(t)$) são fortemente amortecidas quando o sistema é controlado, ainda que com oscilações de amplitude reduzida. Verifica-se que o tempo para se atenuar completamente as oscilações causadas pela perturbação é cerca de quatro vezes menor com o sistema controlado do que com o sistema em malha aberta.

Dadas todas estas considerações, o controlador por realimentação de estados projetado a partir do método LQR apresentou bons resultados, permitindo-se atingir o objetivo do trabalho para as formas de perturbação consideradas.

Figura 13 – Resultados experimentais obtidos com o Método LQR em resposta a um *bump* em $z_r(t)$.



4.4 Análises do Observador de Estados de Ordem Completa

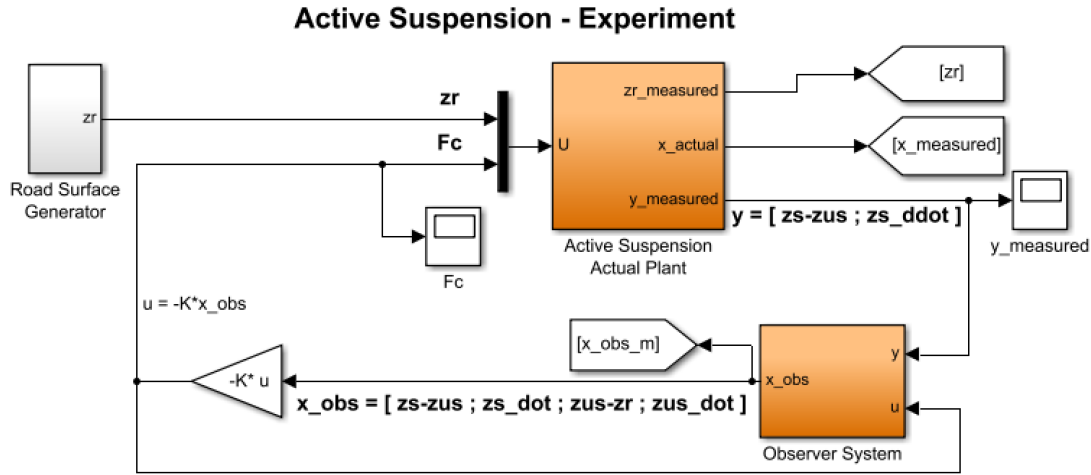
De acordo com a metodologia abordada na Seção 3.5 e as considerações teóricas apresentadas na Seção 2.4, realizou-se o projeto do observador de estados de ordem completa pelo método do Estimador Linear Quadrático (LQE), em que as matrizes M (matriz de covariância do ruído sobre os estados) e N (matriz de covariância do ruído sobre as saídas) foram determinadas a partir do processo de sintonia empírica. Para tanto, foi utilizado o diagrama de blocos da Figura 14 no ambiente MATLAB/Simulink.

Uma escolha de matrizes M e N que apresentou bons resultados de performance é apresentada na Equação (4.13), obtida a partir de testes experimentais com a planta *QUARC* de suspensão ativa e o controlador LQR.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Consideradas as matrizes M e N da Equação (4.13), calcula-se o vetor de ganho L do observador com as Equações (2.21) e (2.20), obtendo-se, como resultado, a matriz de

Figura 14 – Diagrama de blocos utilizado no MATLAB/Simulink para se obter dados do sistema de suspensão ativa implementado com o controlador LQR e o observador de estados de ordem completa.



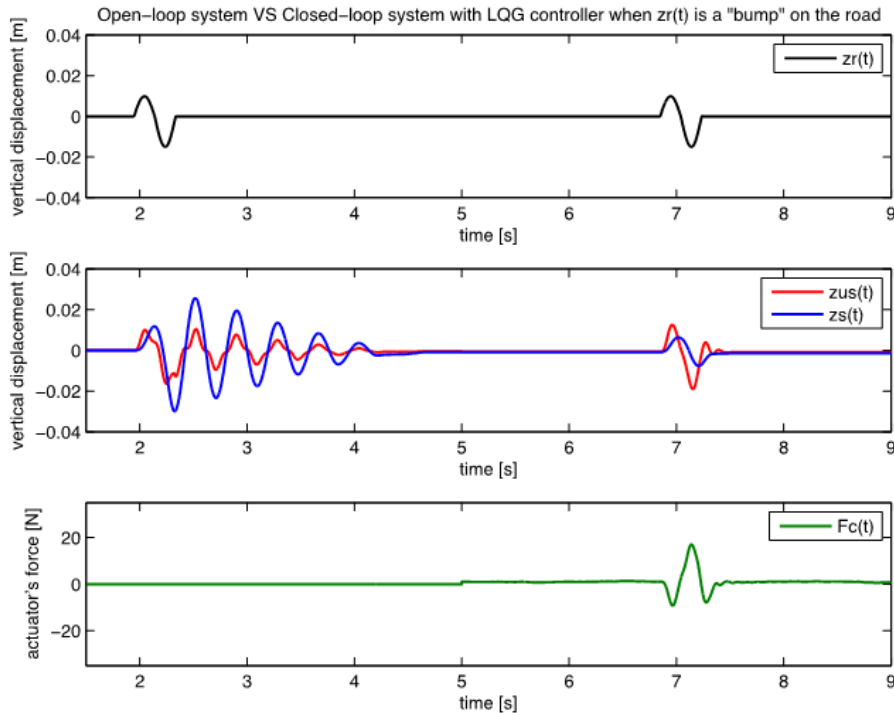
ganho L_{obs} da Equação (4.14). Este ganho pode ser calculado também a partir da função *kalman* do MATLAB, chegando-se ao mesmo resultado.

$$L_{obs} = \begin{bmatrix} 0,448 & -1,341 \\ -1,112 & 0,001 \\ -0,012 & -0,102 \\ 8.868 & 7.432 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Os resultados experimentais obtidos com a implementação do controlador LQR juntamente com o observador de estados de ordem completa (resultando em um *Controlador LQG*) são apresentados na Figura 15, os quais foram gerados a partir da aplicação de uma perturbação do tipo *bump* em $z_r(t)$. Os experimentos só foram realizados após a validação em simulação do sistema completo, em que se obteve uma rápida convergência entre os estados estimados e os estados medidos quando consideradas as matrizes M e N da Equação (4.13).

Ao se comparar o desempenho obtido com o controlador LQG (o qual depende das estimativas dos estados do sistema), segundo a Figura 15, com os resultados de desempenho alcançados com o controlador LQR (que utiliza medidas diretas de todos os quatro estados do sistema), segundo a Figura 13, para um mesmo tipo de perturbação, verifica-se que ambos os controladores satisfazem o objetivo de performance desejado. Para ambos os casos, as respostas temporais dos sistemas são bastante semelhantes, tanto em malha aberta quanto em malha fechada, mostrando que o observador de estados de ordem completa desenvolvido neste trabalho foi corretamente projetado e implementado.

Figura 15 – Resultados experimentais obtidos com o controlador LQR da Seção 4.3 implementado com o Observador de Estados de Ordem Completa projetado (*Controlador LQG*) em resposta a um *bump* em $z_r(t)$.



Assim, ao invés de se utilizar diversos sensores para a realização de medidas em tempo real dos quatro estados do sistema de suspensão ativa, de forma a se aplicar um controle por realimentação de estados, poderia-se utilizar o observador de estados de ordem completa que foi projetado. O mesmo necessita apenas das medidas da deflexão da suspensão ativa ($z_s(t) - z_{us}(t)$) e da aceleração do deslocamento vertical do corpo do veículo ($\ddot{z}_s(t)$), além, é claro, da medida do esforço de controle $F_c(t)$, para conseguir estimar todos os quatro estados do sistema. Isso poderia reduzir os custos do projeto e deixá-lo mais robusto contra a falha de captors, sendo que os estados do sistema poderiam ser estimados caso houvesse pane em determinados sensores.

5 Conclusões

O projeto de controladores por realimentação de estados para um sistema veicular de suspensão ativa pôde ser realizado com a utilização do modelo *quarter-car*, o qual representou, com um certo conservadorismo, dinâmicas importantes de um quarto do corpo do veículo. Os experimentos realizados com a estrutura *QUARC* de suspensão ativa demonstraram a grande importância em se ter um sistema controlado, de forma a ser possível atenuar, com maior rapidez, oscilações sobre o corpo do veículo devido a certas perturbações sobre a superfície da rodovia, o que foi verificado a partir de comparações realizadas entre as respostas temporais do sistema controlado com as do sistema em malha aberta (suspensão em modo passivo). Salienta-se, ainda, que não houve saturação do atuador no projeto, o que provocaria efeitos de não-linearidades indesejados.

Pôde-se também estudar e implementar um observador de estados de ordem completa no sistema controlado, o que poderia trazer uma certa redução de custos em um projeto real: visto que alguns estados do sistema seriam apenas estimados, menos sensores seriam necessários. Além disso, utilizar um observador de estados pode agregar um certo nível extra de segurança ao sistema: caso um ou mais captadores fossem danificados durante a operação da planta, o sistema poderia automaticamente identificar que houve uma falha grave e que tal ou tais estados deveriam, então, ser estimados para que o controle por realimentação de estados pudesse continuar sendo realizado.

O estudo aprofundado sobre sistemas de controle e das técnicas de Alocação de Pólos, LQR e LQE, juntamente com a implementação e o funcionamento do projeto em tempo real, se demonstraram muito interessantes e trouxeram grandes oportunidades para se continuar trabalhando nesta grandiosa área da pesquisa e do desenvolvimento. As atividades realizadas demonstraram também o quão bom e gratificante foi participar de um programa de duplo diploma (BRAFITTEC), durante o qual pôde-se expandir muito os conhecimentos e experiências dentro das áreas de Sistemas, Automação e Informação, para que fosse, então, realizado este projeto. Além do mais, os ganhos pessoais sobre aspectos sociais e culturais foram incríveis e serão levados para a vida inteira.

Como trabalhos futuros, pode-se desenvolver controladores a partir de estratégias de controle ainda mais avançadas, tais como Controle H_∞/H_2 (já em andamento) e Controle Robusto. Além disso, pode-se investigar o problema dos desvios verificados na resposta temporal do sistema controlado quando em regime permanente, não corrigido durante este trabalho. Por fim, pode-se realizar uma modelagem mais completa do sistema de suspensão ativa e, então, aplicar diferentes técnicas de controle ao mesmo. Para tanto, poderia-se considerar o Modelo *Half-car*, o Modelo *Full-car* ou, ainda, modelos não-lineares.

Referências Bibliográficas

- BRYSON, A. E.; HO, Y.-C. . *Applied Optimal Control*. [S.l.]: Taylor Francis, 1975. Citado na página 21.
- ELMADANY, M. M. Integral and State Variable Feedback Controllers for Improved Performance in Vehicles. *Computers and Structures*, v. 42, n. 2, p. 237–244, 1992. Citado na página 13.
- ESMAILZADEH, E.; BATENI, H. Optimal Active Vehicle Suspensions with Full State Feedback Control. *Society of Automotive Engineers*, v. 101, n. 1, p. 781–795, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- JOHNSON, M. J.; GRIMBLE, M. A. Recent Trends in Linear Optimal Quadratic Multivariable Control System Design. *IEE Proceedings, Part D: Control Theory and Applications*, v. 134, n. 1, p. 53–71, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.
- KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960. Citado na página 24.
- KARIMI, H. R. LQG Control Design for Balancing an Inverted Pendulum Mobile Robot. *Intelligent Control and Automation*, v. 2, p. 160–166, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- LEE, A. L.; FLORES, J. V. *Aplicação de Controladores Repetitivos de Alta Ordem em um Sistema de Suspensão Ativa*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014. Citado na página 13.
- MILLER, L. R. Tuning Passive, Semiactive, and Fully Active Suspension Systems. *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, v. 3, p. 2047–2053, 1988. Citado na página 12.
- MOORE, B. On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 21, n. 5, p. 689–692, 1976. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 19.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 5. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 20 e 22.
- RAJAMANI, R.; HEDRICK, J. K. Adaptive Observer for Active Automotive Suspensions. *IEEE Proceedings of the 1993 American Control Conference - Part 3*, p. 706–710, 1993. Citado na página 13.
- SAVARESI, S. M. et al. *Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles*. [S.l.]: Elsevier Ltd., 2010. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.
- SHANNAN, J. E.; VANDERPLOEG, M. J. A Vehicle Handling Model with Active Suspensions. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, v. 111, n. 3, p. 375–381, 1989. Citado na página 13.

ZIN, A. et al. Robust LPV-Hinf Control for Active Suspensions with Performance Adaptation in view of Global Chassis Control. *Vehicle System Dynamics*, v. 46, n. 10, p. 889–912, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 14.

Anexos

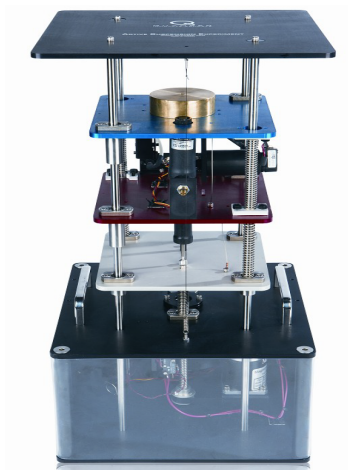
ANEXO A – Planta *QUARC*

A planta *QUARC* é uma estrutura de bancada utilizada para emular o comportamento dinâmico de um modelo duplo de massa-mola-amortecedor controlado por um atuador de suspensão ativa. A estrutura, desenvolvida pela Quanser Inc., consiste de três diferentes placas, associadas umas às outras de forma similar a um modelo de um quarto de carro (*quarter-car*), como demonstra a Figura 16.

A placa superior (azul) representa a massa de um quarto do corpo do veículo, suspensa pelo total de duas molas, consideradas lineares. Um motor DC está acoplado entre a massa superior e a massa intermediária, de cor vermelha (que representa o pneu do veículo), e exerce o papel de atuador do sistema de suspensão ativa (esforço máximo de ± 98 N). A massa superior é equipada com um acelerômetro para que se possa medir o que seria a aceleração do corpo do veículo em relação à superfície da rodovia (representada pela massa inferior de cor cinza). Esta massa inferior fornece a excitação da entrada de perturbação do sistema e está conectada a um motor DC de resposta rápida, para que o projetista possa emular diferentes perfis de perturbação com maior confiabilidade.

O movimento das duas placas inferiores é monitorado diretamente por dois codificadores ópticos de alta resolução, enquanto que um terceiro codificador monitora o movimento da placa superior em relação à intermediária. A velocidade com que a massa superior se desloca é determinada a partir de um filtro, em que se calcula a derivada da sua posição relativa. O mesmo ocorre para a massa intermediária, com respeito a sua posição relativa. Tem-se, assim, o sensoriamento dos quatro estados do sistema.

Figura 16 – Planta *QUARC* de suspensão ativa considerada ao longo deste trabalho.



Fonte: Quanser Inc.