

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA NÃO RÍGIDA PARA A SOLUÇÃO DAS
EQUAÇÕES DE CINÉTICA PONTUAL DE NÊUTRONS CONSIDERANDO
RETROALIMENTAÇÃO DE TEMPERATURA E UMA EXTENSÃO
ESTOCÁSTICA.

por

Milena Wollmann da Silva

Tese para obtenção do Título de
Doutora em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro 2017

UMA REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA NÃO RÍGIDA PARA A SOLUÇÃO DAS
EQUAÇÕES DE CINÉTICA PONTUAL DE NÊUTRONS CONSIDERANDO
RETROALIMENTAÇÃO DE TEMPERATURA E UMA EXTENSÃO
ESTOCÁSTICA.

por

Milena Wollmann da Silva

Mestre

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutora em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Bardo Ernst Bodmann

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Ricardo BarrosUERJ

Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves UFPEL

Prof. Dr. Ruben VargasPUCRS

Prof. Dr. Volnei Vargas UFRGS

Prof. Dr. Jackson Vassoler

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 27 de Janeiro de 2017

À memória de Maria Matildes Wollmann e Celanira Prestes,
seus ensinamentos serão eternos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro para a elaboração desta pesquisa.

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), em particular ao Programa de Pós- Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC) pela formação e pelo espaço oferecidos.

Agradeço à todos professores que participaram de minha formação, em especial aos professores Marco Vilhena, Bardo Bodmann, Richard Vasques, e Daniela Buske.

Agradeço aos meus pais por sua dedicação, apoio, e suporte; e aos amigos Luiz Felipe F. C. Barcellos; Jerônimo J. A. Silva, André Scislewski pelo auxílio e apoio.

RESUMO

Nesta tese temos por objetivo desenvolver uma representação semi-analítica para as ECPN, considerando não somente seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, como também retroalimentação de temperatura. Essa representação é obtida utilizando o método da decomposição com diagonalização, desenvolvido e utilizado em trabalhos anteriores. Dessa forma, aplicando o método em questão a um problema rígido e não linear. Em seguida o mesmo método é combinado com um método de Monte Carlo matemático para que se obtenha uma extensão estocástica do problema linear. Os resultados obtidos em cada uma das situações propostas (determinística e estocástica) são comparados com resultados estabelecidos na literatura.

Palavras-chave: retroalimentação, cinética, pontual, nêutrons .

ABSTRACT

In this thesis we aim to develop a semi-analytical representation for the ECPN, considering not only six groups of delayed neutron precursors, but also temperature feedback. This representation is obtained using the decomposition with diagonalization, developed and used in previous works. Then applying the method in question to a stiff and non-linear problem. Then the same method is combined with a mathematical Monte Carlo model to obtain a stochastic extension of the linear problem. The results obtained in each of the proposed situations (deterministic and stochastic) are compared with results established in the literature.

Keywords: feedback,point kinetics,neutron

Zusammenfassung

In dieser Dissertation wollen wir eine semi-analytische Darstellung für das ECPN entwickeln, unter Berücksichtigung nicht nur sechs Gruppen von verzögerten Neutronenvorläufern, sondern auch Temperaturrückkopplung. Diese Darstellung wird unter Verwendung der Separierung mit Diagonalisierung, entwickelt und verwendet in früheren Arbeiten. Anschließend wird das betreffende Verfahren auf ein steifes und nichtlineares Problem angewendet. Dann wird die gleiche Methode mit einem mathematischen Monte Carlo kombiniert, um eine stochastische Erweiterung des linearen Problems zu erhalten. Die Ergebnisse, die in jeder der vorgeschlagenen Situationen (deterministisch und stochastisch) erhalten werden, werden mit Ergebnisse in der Literatur verglichen.

Keywords: Rückkopplung, Neutron, Punktkinetik.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Revisão Bibliográfica	2
1.1.1	Abordagens lineares	2
1.1.2	Abordagens não lineares	4
1.2	Objetivos	6
1.3	Estrutura Desta Tese	6
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	7
2.1	As Equações da Cinética Pontual de Nêutrons-ECPN	7
2.1.1	Método da decomposição com diagonalização - MDD	8
2.2	Não Linearidade e as ECPN	15
2.2.1	Coefficiente de reatividade devido à temperatura	17
2.2.2	Coefficiente de reatividade devido à potência	17
2.3	Modelagem da Retroalimentação de Temperatura	18
2.4	ECPN Não Linear Abordagem Segundo o MDD	21
2.5	Convergência e Parada do Método	25
2.5.1	Crítério de convergência de Lyapunov	25
2.5.2	O Crítério de parada	26
3	RESULTADOS DO MODELO DETERMINÍSTICO	27
3.1	Casos Considerando um Grupo de Precursores	27
3.1.1	$\rho = 0, 8\beta$	28
3.1.2	$\rho = 0, 5\beta$	29
3.1.3	$\rho = 0, 2\beta$	30
3.2	Casos Considerando Seis Grupos de Precursores	31
3.2.1	Inserção de degrau reatividade	31
3.2.2	Inserção de rampa compensada de reatividade	38

4	MODELAGEM DO PROBLEMA ESTOCÁSTICO	43
4.1	Estudo dos Efeitos Causados nas ECPN por Flutuações Estocásticas . .	43
4.1.1	Hipóteses para a inserção das flutuações	43
4.1.2	As ECPN estocásticas: dedução, um grupo de precursores	44
4.1.3	As ECPN estocásticas: número qualquer de precursores	46
4.1.4	As ECPN caso especial: seis grupos de precursores	47
4.2	Solução das ECPN Estocásticas via MDD	48
5	RESULTADOS DA MODELAGEM ESTOCÁSTICA	51
5.1	Reatividades Constantes	51
5.1.1	Primeiro teste	51
5.1.2	Segundo teste	52
5.2	Reatividades Dependentes do Tempo	53
5.2.1	Reatividade linear	53
5.2.2	Reatividade senoidal	55
6	CONCLUSÕES	57
6.1	Sugestões para Trabalho Futuros	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Fluxograma referente à computação do MDD.	14
Figura 2.2	Fluxograma referente à computação do MDD	24
Figura 3.1	Lyapunov X Recursões, no tempo de pico quando $\rho = 1\beta$	33
Figura 3.2	Lyapunov X Recursões, no tempo de pico quando $\rho = 1,5\beta$	34
Figura 3.3	Lyapunov X Recursões, no tempo de pico quando $\rho = 2,0\beta$	35
Figura 3.4	Lyapunov X Recursões, em $t = 2,9, a = 0,003s^{-1}$	41
Figura 3.5	Lyapunov X Recursões, em $t = 0,5, a = 0,1s^{-1}$	42
Figura 4.1	Fluxograma referente à computação do MDD no caso estocástico .	50
Figura 5.1	Média, amostras e resultado determinístico, reatividade linear . . .	54
Figura 5.2	Amostras, média, e resultado determinístico, reatividade senoidal .	55
Figura 5.3	Comparação entre amostras, média, reatividade senoidal	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	$\mathcal{P}(t)$ para o caso $\rho = 0,8\beta$	28
Tabela 3.2	$T(t)$ expressa em $[K]$ para o caso $\rho = 0,8\beta$	28
Tabela 3.3	$\mathcal{P}(t)$ para o caso $\rho = 0,5\beta$	29
Tabela 3.4	$T(t)$ expressa em $[K]$ para o caso $\rho = 0,5\beta$	29
Tabela 3.5	$\mathcal{P}(t)$ para o caso $\rho = 0,2\beta$	30
Tabela 3.6	$T(t)$ expressa em $[K]$ para o caso $\rho = 0,2\beta$	30
Tabela 3.7	Constantes β_i e λ_i para um Reator $U^{235} - grafite$	32
Tabela 3.8	Pico, e tempo respectivo para $\rho = 1,0\%$ e $\rho = 1,5\%$	32
Tabela 3.9	Pico, e tempo respectivo para $\rho = 2,0\%$	34
Tabela 3.10	$\rho(t)$ na inserção tipo degrau.	36
Tabela 3.11	Densidade de Nêutrons para $\rho_0 = 1,0\%$	37
Tabela 3.12	Densidade de Nêutrons para $\rho_0 = 1,5\%$	37
Tabela 3.13	Densidade de Nêutrons para $\rho_0 = 2,0\%$	38
Tabela 3.14	Constantes β_i e λ_i para um Reator $U^{235} - grafite$	39
Tabela 3.15	Pico, e tempo respectivo para $a = 0,003s^{-1}$ e $b = 10^{-11}\frac{cm^3}{s}$	39
Tabela 3.16	Pico, e tempo respectivo para $a = 0,1s^{-1}$ e $b = 10^{-11}\frac{cm^3}{s}$	40
Tabela 3.17	Densidade de nêutrons e reatividade com $a = 0,003s^{-1}$	40
Tabela 3.18	Densidade de nêutrons e reatividade com $a = 0,1s^{-1}$	41
Tabela 5.1	Resultados para um grupo de precursores e reatividade constante.	52
Tabela 5.2	Resultado para reatividade subcrítica, $\rho = 0.003$	52
Tabela 5.3	Resultado para reatividade supercrítica, $\rho = 0.007$	53
Tabela 5.4	Constantes características de cada grupo de precursores	53
Tabela 5.5	Constantes características de cada grupo de precursores	55

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

<i>AEM</i>	Analytical Exponential Method
<i>CATS</i>	Converged Accelerated Taylor Series
<i>DM</i>	Decomposition Method
<i>DDM</i>	Diagonalization Decomposition Method
<i>ECPN</i>	Equações de Cinética Pontual de Nêutrons
<i>ET – BE</i>	Efficient Technique Backward Euler
<i>ET – CN</i>	Efficient Technique Crank-Nicholson
<i>ITS2</i>	Integral Taylor Series 2
<i>GAEM</i>	Generalized Analytical Exponential Method
<i>GRK</i>	Generalized Runge-Kutta Method
<i>MDD</i>	Método da Decomposição com Diagonalização
<i>MD</i>	Método da Decomposição
<i>NAM</i>	New Analytical Method
<i>PCA</i>	Piecewise Constant Approximation
<i>PROMECA</i>	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
<i>PUCRS</i>	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
<i>PWS</i>	Power Series Solution
<i>SCM</i>	Stiff Confinement Method
<i>TL</i>	Transformada de Laplace
<i>TLC</i>	Teorema do Limite Central
<i>UERJ</i>	Universidade Estadual do Rio de Janeiro
<i>UFPEL</i>	Universidade Federal de Pelotas
<i>UFRGS</i>	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
<i>VAL – EDDDM</i>	Value Expected of the Double Diagonalization Decomposition Method

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

Capítulo 2

$^{\circ}\text{C}$	Temperatura em graus Celsius
$C(t)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados no tempo t , cm^{-3}
$C_i(t)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados do grupo i
$f(x)$	função qualquer
\mathcal{F}	Fonte matemática do problema decomposto
$H(t)$	Kernel caracterizante do modelo de temperatura, relativo à densidade de potência
k	Solução exata
k_j	Solução da j -ésima soma referente à decomposição
k_{eff}	Coefficiente de multiplicação efetivo
$K(t)$	Kernel caracterizante do modelo de temperatura, relativo à potência
l	Tempo médio de vida do nêutron, s
$n(t)$	Densidade de nêutrons no tempo t , cm^{-3}
$n(0)$	Densidade de nêutrons no tempo $t = 0$, cm^{-3}
$n_j(t)$	Densidade de nêutrons na recursão j , cm^{-3}
$\mathcal{P}(t)$	Densidade de potência do reator num dado tempo t , $\frac{\text{MeV}}{s \cdot \text{cm}^3}$
$\mathcal{P}_0(t)$	Densidade de potência do reator em $t = 0$, $\frac{\text{MeV}}{s \cdot \text{cm}^3}$
P^{239}	Plutônio Isótopo 239
$\mathcal{Q}(t)$	Termo de fonte externa
R	Ordem de truncamento do problema transformado
t	Tempo, s
T	Tempo máximo de simulação, s
\mathcal{T}	Temperatura, K

T_F	Temperatura do combustível, K
T_c	Temperatura do refrigerante, K
v	Velocidade do nêutron, $\frac{cm}{s}$
U_{92}^{233}	Urânio Isótopo 233
U_{92}^{235}	Urânio Isótopo 235
U_{92}^{238}	Urânio Isótopo 238
w_f	Energia média liberada por cada nêutron na fissão, MeV
w_i	Peso da quadratura
x_i	Abscissa da quadratura
\mathcal{Y}_j	Solução da j-ésima recursão do problema linear
$\mathcal{Y}(t)$	Vetor solução final do problema determinístico linear
\mathcal{U}_0	Solução da inicialização da recursão do problema não linear
\mathcal{U}_j	Solução da j-ésima recursão do problema não linear
$\mathcal{U}(t)$	Vetor solução final do problema determinístico não linear
Capítulo 3	
a	Taxa de inserção de reatividade
$A(t)$	Função que relaciona a densidade de nêutrons à den- sidade de potência
b	Coefficiente de desligamento
B	Constante de proporcionalidade
$C(0)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados quando $t = 0$
d	Desvio relativo percentual entre o método anterior e o MDD
dt'	Diferencial de tempo
H	Recíproco da capacidade térmica
K_c	Capacidade térmica

L	Tempo de vida médio de um nêutron na criticalidade
$n(0)$	Densidade de nêutrons quando $t = 0$
t'	Tempo
$T(0)$	Temperatura expressa em K quando $t = 0$
Capítulo 4	
a_i	Elemento da matriz $\hat{\mathbf{B}}$
\mathbf{A}	Matriz com entradas constantes e variáveis
$\hat{\mathbf{A}}$	Matriz de componentes estocásticas
$b_{i,j}$	Elemento da matriz $\hat{\mathbf{B}}$
$\hat{\mathbf{B}}$	Matriz de componentes estocásticas
b	Constante referente à taxa de produção de nêutrons
d	Constante relacionando a taxa de de produção de nêutrons ao tempo de vida médio
dW_i	Incremento discretizado no tempo de um processo de Wiener
E	Valor esperado, média
E_i	Evento do tipo i
\mathcal{F}	Fonte matemática do problema decomposto
N	Quantidade de passo na discretização do tempo
$N(0, 1)$	Distribuição normal de média zero e variância 1
$P(\Delta E_i)$	Probabilidade de ocorrência do evento E_i
$\mathcal{Q}(t)$	Termo de fonte
s	Tempo prescrito
t	Tempo prescrito
t_i	Tempo discretizado
T	Tempo
\mathcal{T}	Tempo máximo de simulação
u	Tempo prescrito
v	Tempo prescrito

Var	Variância
$W(s)$	Processo de Wiener estimado no tempo prescrito s
$W(t)$	Processo de Wiener estimado no tempo prescrito t
$W(t_i)$	Processo de Wiener estimado no tempo prescrito t_i
$W(u)$	Processo de Wiener estimado no tempo prescrito u
$W(v)$	Processo de Wiener estimado no tempo prescrito v
$\mathcal{Y}(t)$	Solução do problema estocástico
$\mathcal{Y}_0(t)$	Solução da recursão inicial do problema estocástico
$\mathcal{Y}_j(t)$	Solução da j -ésima recursão do problema estocástico

Símbolos Gregos

Capítulo 2

α	Expoente da quadratura de Gauss-Laguerre
α_p	Coefficiente de reatividade devido à potência
α_T	Coefficiente de reatividade devido à temperatura
β	Fração de nêutrons atrasados
β_i	Fração de nêutrons atrasados para o grupo i de precursores
Γ_R	Soma das soluções de todas as recursões
$\delta\rho_f$	Incremento de reatividade, oriundo da retroalimentação
$\delta\rho_{ext}$	Incremento de reatividade externo ao sistema
δp	Incremento de potência
$\delta_{i,j}$	Função delta de Kronecker
δZ_0	Solução da recursão inicial
δZ_R	Diferença máxima entre as soluções obtidas considerando a soma seguinte e prévia das recursões
Λ	Tempo médio de geração entre o “nascimento” do nêutron e posterior absorção, s
λ	Constante de decaimento, s^{-1}
λ_i	Constante de decaimento para o grupo i de precursores de nêutrons atrasados, s^{-1}
ν	Número médio de nêutrons produzidos na fissão
ξ	Coefficiente de Lyapunov
ρ	Reatividade
ρ_0	Reatividade parte constante
$\rho_1(t)$	Reatividade parte exclusivamente dependente do tempo
$\rho_f(\mathcal{T}, (t))$	Reatividade advinda da retroalimentação
Σ_a	Seção de choque macroscópica de absorção, cm^{-1}

Σ_f	Seção de choque macroscópica de fissão, cm^{-1}
Ω	Matriz diagonal de entradas constantes
Ξ	Matriz dos elementos de fora da diagonal, com entradas dependentes do tempo
ζ	Elemento da matriz de $\hat{\mathbf{B}}$
$\ \cdot\ $	Norma Máxima
Capítulo 4	
α	Recíproco da velocidade do nêutron
γ	Coefficiente que multiplica a densidade de nêutrons no elemento na posição (1,1) na matriz $\hat{\mathbf{B}}$
δt	Intervalo infinitesimal de tempo
ΔC_i	Varição da concentração de precursores de nêutrons atrasados do grupo i
Δt	Varição de tempo
Δn	Varição de densidade de nêutrons
η_1	Variável aleatória sorteada com base na $N(0, 1)$
η_2	Variável aleatória sorteada com base na $N(0, 1)$

1 INTRODUÇÃO

A geração de energia em um reator nuclear ocorre à potência constante, nesse estado, o nível de potência é constante e a taxa de nêutrons produzida na reação de fissão está em equilíbrio com a taxa de nêutrons que são “perdidos”. Qualquer desvio dessa condição gera dependência temporal de população de nêutrons no núcleo e, portanto, também da potência do reator. Tal desvio pode alterar o nível de potência modificando temporariamente o fator multiplicativo, seja por esgotamento do combustível, acúmulo de isótopos, ou por alterações no refrigerante. O estudo dos processos transientes, sejam esses lineares ou não lineares, é objeto de interesse tanto da cinética quanto da dinâmica de reatores nucleares.

A cinética dos reatores estuda a dependência do comportamento temporal dos processos e grandezas envolvidas na determinação do fator multiplicativo, o que usualmente envolve modelagem mais detalhada de acordo com Duderstadt e Hamilton, 1976.

A cinética de reatores nucleares, de acordo com Duderstadt e Hamilton, 1976, é comumente aplicada na análise de transientes rápidos e na interpretação de dados de medições experimentais no núcleo do reator, cujas técnicas estejam baseadas na indução de mudanças no fator multiplicativo do mesmo. A mais rigorosa aplicação da cinética é o estudo de cenários de acidentes (hipotéticos), nos quais as inserções de reatividade são muito altas (vários \$¹) e transientes muito rápidos, contudo para o estudo desse tipo de cenário, apenas a consideração da neutrônica do processo não é suficiente, sendo analisados outros modelos termo-hidráulicos e de acordo com a severidade do acidente simulado podem ser necessários cálculos para o deslocamento do núcleo ou de dispersão de poluentes.

Nesta tese assume-se, tal como na dedução eurística das Equações de Cinética Pontual de Nêutrons (ECPN) apresentada em Duderstadt e Hamilton, 1976, que a forma do fluxo de nêutrons não muda ao longo do tempo e, portanto, trata-se de um problema dependente apenas do tempo. Cumpre ressaltar que o modelo de cinética pontual possui diversas limitações seja a simplicidade de sua constituição, dada as simplificações impostas pela sua dedução (essa limitação em particular pode ser reduzida ao deduzir-se o modelo

¹A reatividade necessária pra que um reator passe imediatamente a um estado crítico, a saber $\rho = \beta$, é chamada, especialmente nos EUA, uma reatividade de *dóllar*; um centésimo dessa reatividade fica, portanto, conhecido como *cent*. Cumpre destacar que tal unidade não é de forma alguma absoluta, e depende tanto do combustível como da taxa de perda de nêutrons do reator.

diretamente a partir das equações de transporte Akcasu et al., 1971); o fato do modelo não considerar a diferença entre os níveis de energia em que nêutrons prontos e nêutrons atrasados trafegam; como as frações de precursores de nêutrons atrasados serem estimadas a partir da média ponderada sobre os isótopos físséis de maior relevância na mistura do combustível, e o modelo de cinética pontual considera essas frações constantes, e ainda essas frações apresentam dependência temporal, uma vez que se alteram com o consumo do combustível.

As ECPN são um conjunto de sete equações diferenciais ordinárias acopladas, que descrevem a dependência temporal da população de nêutrons no núcleo de um reator, e o decaimento dos precursores de nêutrons atrasados. Discussões mais detalhadas sobre as ECPN serão desenvolvidas no decorrer da presente tese.

1.1 Revisão Bibliográfica

1.1.1 Abordagens lineares

No campo da cinética de reatores, inicialmente considerando apenas os processos lineares temos, as ECPN, que modelam as alterações dependentes do tempo na população de nêutrons e também nas concentrações de precursores de nêutrons atrasados. Essa equação possui, no caso de reatividade constante, solução analítica conhecida já apresentada por Aboanber e Nahla, 2004, e considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados solução analítica já determinada por Li et al., 2010. Contudo no caso de reatividade dependente do tempo requer procedimentos apropriados de solução, por tratar-se de um problema do tipo rígido, também referido como *Stiff*. Neste tipo de problema o tamanho do passo de tempo precisa ser rigorosamente controlado para que a estabilidade numérica da solução seja assegurada. O problema de caráter rígido requer métodos apropriados de solução como, por exemplo, os métodos A-estáveis de Devooght e Mund, 1985.

1.1.1.1 Modelos Determinísticos

Existem diversas investigações sobre o tratamento do problema de rigidez em questão, como métodos numéricos citamos: o de integração usando a regra de Simpson Keepin e Cox, 1960, o método dos elementos finitos de Kang e Hansen, 1973, e Zhiyuan, 1981, o método de Runge Kutta usado por Allred e Carter, 1958, Sanchez, 1989, o método

quase-estático usado por Ott e Meneley, 1969, e Koclas et al., 1996 o método singular de perturbação usado por Goldstein e Shotkin, 1969, e Błęński et al., 1978, o método de diferenças finitas usado por Brown, 1957. E ainda o método das derivadas fracionárias utilizado por Polo-Labarrrios e Espinosa-Paredes, 2012 na solução das ECPN.

A maioria desses métodos funcionam com sucesso em alguns problemas específicos, mas possuem desvantagens, como foi mostrado por Vigil, 1967. Tais limitações concentram-se no tamanho do passo do tempo máximo permitido para assegurar a estabilidade computacional das simulações.

Com intuito de contornar esse problema, Chao e Attard, 1985 desenvolveram o método de confinamento da rigidez (*SCM-Stiffness Confinement Method*). Os autores Basken e Lewins, 1996, Aboanber e Hamada, 2003 determinaram a solução das ECPN por meio de uma série de potências com a reatividade dependente o tempo. E Ganapol, 2013 utilizando séries de Taylor e algoritmos de alta precisão

Isso posto, cabe ressaltar que até este ponto foram mencionadas apenas soluções obtidas por meio de técnicas numéricas, para o tratamento das ECPN, bem como o problema de rigidez.

Diferentemente da vasta literatura sobre a abordagem numérica das ECPN, existe uma quantidade menor, mas não menos importante sobre o tratamento analítico e semi-analítico dessas equações. Pode-se destacar Petersen, 2011, Ceolin, 2010, Bodmann et al., 2010, Seliverstov e Shvedov, 1998, e entre outros como Haofeng et al., 2007, Zhang et al., 2008, de Vilhena et al., 2008, que fazem uso de transformadas integrais. Menciona-se também Aboanber, 2014 que fazendo uso do método da decomposição proposto por Petersen, 2011 combinado com aproximações de Padé, aborda a questão da rigidez das ECPN. Menciona-se ainda Da Silva et al., 2014, que fez uso do método da decomposição e transformadas integrais e Leite et al., 2014 que faz uso de aproximações semi-analíticas. Diversos outros métodos têm sido implementados por diversos pesquisadores, tais como Da Nobrega, 1971 usando de aproximações de Padé modificadas ou ainda Hamada, 2015 por meio séries de Fourier.

1.1.1.2 Modelos Estocásticos

É possível a extensão do problema determinístico a um problema estocástico. Sendo essa viabilizada por meio de considerações relativas à natureza estocástica do de-

caimento dos nêutrons.

As abordagens estocásticas das ECPN diferem basicamente quanto à variável na qual é feita a inserção das flutuações estocásticas no modelo e também quanto à forma de solução.

Na literatura encontram-se flutuações inseridas: (i) nos parâmetros físicos, como por exemplo nas seções de choque tal como em Vãth, 1975; (ii) na reatividade, seja na forma de um ruído branco² tal como em Behringer e Piñeyro, 1994, uma distribuição gaussiana Rodriguez et al., 1984, ou ainda um ruído não branco como em Saito, 1979; (iii) também encontram-se inserções realizadas na população total de nêutrons e na concentração de precursores de nêutrons atrasados assim como feito por Hayes e Allen, 2005; Ray e Patra, 2013.

Os métodos para obtenção de uma solução, encontrados na literatura, são variados. Encontram-se desde o uso de séries de potência Taylor e Euler-Maruyama Ray, 2012, as transformadas integrais em um passo de tempo discretizado de Saito, 1979, a linearização e aproximações de Bourret em Quabili e Karasulu, 1979, Monte Carlo dos autores Hayes e Allen, 2005; Ray e Patra, 2013, e diversos outros métodos como os que podem ser encontrados como nas obras de Saito, 1979; Karmeshu, 1981; Ayyoubzadeh e Vosoughi, 2014.

É importante ressaltar que, excetuando-se, é claro, os casos modelados na ausência de precursores de nêutrons atrasados ou na presença de um único grupo de precursores de nêutrons atrasados, o caráter rígido do problema mantém-se mesmo na abordagem estocástica.

1.1.2 Abordagens não lineares

Os fenômenos abordados na física de reatores são, em sua maioria, modelados por equações não lineares. Na modelagem desses fenômenos, em geral, consideram-se os parâmetros do reator como dependentes tanto do tempo como de propriedades termo-hidráulicas.

As ECPN correspondem a um sistema de equações diferenciais não lineares aco-

²No processamento de sinal, o ruído branco é um sinal aleatório com intensidade igual em diferentes frequências, o que faz com que o espectro da densidade de potência seja constante Carter [2009]. Nesta tese “ruído branco” refere-se a um modelo estatístico para sinais e fontes de sinal, ao invés de qualquer sinal específico.

pladas, no qual são consideradas equações que descrevem a população de nêutrons, a reatividade, uma quantidade arbitrária de precursores de nêutrons atrasados definida pelas propriedades do núcleo em estudo e as propriedades termo-hidráulicas de interesse.

No que diz respeito às propriedades termo-hidráulicas do reator, essa pesquisa foca sua atenção na temperatura, em especial, na influência da realimentação de temperatura na população de nêutrons. A presença da realimentação de temperatura é útil, não somente por conferir mais realismo ao sistema, como também por proporcionar uma estimativa do comportamento transiente do reator, considerando variáveis fortemente acopladas.

Diversas modelagens considerando a influência da temperatura já foram propostas na literatura. Fuchs, 1946 e Hansen, 1952 almejaram uma solução em forma fechada para passos de tempo grandes, considerando que a inserção de reatividade ocorre na queima adiabática de combustível, na qual as perdas de calor foram negligenciadas, visto que as flutuações de potência que ocorrem na região de pronto criticalidade eram de curta duração. Chernick, 1951 adotou uma aproximação do diagrama de fase para um estudo qualitativo e uma forma alternativa do método da perturbação para o tratamento analítico de um modelo newtoniano de realimentação de temperatura. Frohlich e Johnson, 1969 obtiveram uma solução usando um modelo de remoção constante de calor para uma reatividade tipo rampa.

Em Gupta e Trasi, 1986 obteve-se uma solução assintoticamente estável para a população de nêutrons considerando uma inserção de reatividade tipo degrau. Chen, 1990 estudou um caso de cinética não linear dependente do tempo com uma realimentação atrasada de temperatura. Aboanber e Nahla, 2002 apresentaram uma solução para as ECPN considerando realimentação newtoniana de temperatura usando diversos aproximantes de Padé e a inversão analítica. Aboanber e Hamada, 2003 aplicaram o método das séries de potência considerando realimentação de temperatura. Haofeng et al., 2007 derivaram representações analíticas para a reatividade e a potência para um estado de super pronto-criticalidade com realimentação de temperatura, levando em conta a inserção de grandes degraus de reatividade.

Chen et al., 2007 obtiveram soluções aproximadas para um processo super-crítico atrasado durante a inserção de pequenos degraus de reatividade. Nahla, 2009 apresentou uma solução analítica para as ECPN considerando realimentação de temperatura e um

grupo de precursores de nêutrons atrasados.

Silva et al., 2014, em prosseguimento ao apresentado em Petersen, 2011, apresenta a realimentação de temperatura introduzida como uma perturbação de primeira ordem na equação da reatividade considerando um grupo de precursores.

Existem também abordagens estocásticas do caso não linear como as apresentadas por Williams, 1983, Postnikov, 1992, Akcasu e Karasulu, 1976.

Cumprе ressaltar que mesmo nesse caso mantém-se ainda o caráter rígido do problema.

1.2 Objetivos

Nesta tese temos por objetivo desenvolver uma representação semi-analítica para as ECPN, considerando não somente seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, como também retroalimentação de temperatura. Essa representação é obtida utilizando o método da decomposição com diagonalização, desenvolvido por Petersen, 2011, e também utilizado em Da Silva et al., 2014. Dessa forma aplicando o método em questão a um problema rígido e não linear. Em seguida o mesmo método é combinado com um método de Monte Carlo matemático para que se obtenha uma extensão estocástica do problema linear.

1.3 Estrutura Desta Tese

No segundo capítulo apresentaremos a discussão do sistema de equações a ser modelado, bem como do método utilizado em Da Silva et al., 2014 e as adaptações necessárias ao método para que os problemas determinísticos propostos sejam desenvolvidos.

No terceiro capítulo apresentamos os resultados obtidos utilizando o método da decomposição com diagonalização aplicados a diversos problemas determinísticos envolvendo retroalimentação de temperatura e considerando tanto um grupo de precursores como seis grupos de precursores, comparando esses resultados a outros da literatura.

No quarto capítulo mostramos uma extensão da aplicação do mesmo método a um problema estocástico. No quinto apresentamos os resultados dessa simulação.

No sexto capítulo resumizamos nossas conclusões e apresentamos propostas de futuras atividades

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 As Equações da Cinética Pontual de Nêutrons-ECPN

As ECPN, como mencionado anteriormente, modelam a variação temporal da densidade da população de nêutrons, bem como do decaimento dos precursores de nêutrons atrasados.

As ECPN tem sua representação mais comum dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i C_i(t) \end{aligned}, \quad (2.1)$$

na qual $i = 1$ até $i = m$. Na equação acima $n(t)$ representa a densidade da população de nêutrons ($[cm^{-3}]$), λ_i é a constante de decaimento radioativo do grupo i de precursores de nêutrons atrasados ($[s^{-1}]$), β_i representa a fração de nêutrons produzida do grupo i de precursores, β corresponde a fração total de nêutrons atrasados produzida ($\beta = \sum_i^m \beta_i$); e finalmente $C_i(t)$ representa a concentração de precursores de nêutrons atrasados do grupo i .

A equação (2.1) prevê que sejam contabilizados tantos nêutrons prontos; os quais são produzidos instantaneamente na fissão, segundo Duderstadt e Hamilton, 1976 dentro de cerca de 10^{-14} segundo após o evento de fissão; como também contabiliza os nêutrons atrasados, sendo esses também emitidos após o evento da fissão, porém com significativo atraso. Os nêutrons prontos $(1 - \beta)$, quando em regime térmico apresentam uma vida média da ordem de 10^{-4} segundo. Já os nêutrons atrasados apresentam, também em regime térmico, uma vida média da ordem de 10^{-1} . Dessa forma, devido à diferença nas escalas de tempo, os nêutrons atrasados propiciam o tempo necessário para que, de acordo com Duderstadt e Hamilton, 1976, a reação em cadeia seja sustentada de forma controlável.

Portanto, para que as ECPN sejam simuladas as constantes características de cada grupo de precursores de nêutrons atrasados devem ser conhecidas. Essas constantes, (λ_i, β_i) , são determinadas considerando uma média ponderada sobre os elementos que compõem o combustível, bem como de seus isótopos físeis relevantes, que ao longo do período de funcionamento do reator passam a fazer parte da composição do elemento

combustível. A fim de determinar-se o número m total de precursores a ser utilizado em uma determinada simulação leva-se em conta a composição do reator. De acordo com Duderstadt e Hamilton, 1976, quando considera-se um reator térmico com combustíveis baseados em U^{233} ou P^{239} , dada a quantidade de isótopos físeis e a faixa de energia em que opera o reator seis grupos de precursores são suficientes. Já no caso de considerar-se um reator rápido de combustíveis U^{238} e P^{239} , será necessário que sejam considerados trinta e seis grupos de precursores de nêutrons, que, mediante diversas técnicas de agrupamento dos isótopos de menor relevância, poderão ser reduzidos à trinta grupos. Porém ainda seria necessário resolver um sistema de trinta e uma equações acopladas, e se considerada a retroalimentação, trinta e uma equações acopladas não lineares.

Uma vez resolvido o sistema de equações acopladas, para que a solução obtida, por um determinado método, seja corroborada, é necessário que seja confrontada com os demais resultados existentes na literatura. Para este fim, em alguns casos, é conveniente utilizar, conforme Duderstadt e Hamilton, 1976, a transformação abaixo

$$n(t) \rightarrow \mathcal{P}(t) = w_f v \Sigma_f n(t), \quad (2.2)$$

em que w_f é energia liberada no evento da fissão ($[MeV]$), v é a velocidade do nêutron ($[\frac{cm}{s}]$), Σ_f corresponde a seção de choque macroscópica de fissão ($[cm^{-1}]$), portanto $\mathcal{P}(t)$ representa a densidade de potência ($[\frac{MeV}{s \cdot cm^3}]$).

Os resultados desta tese são, quando apropriado, apresentados segundo a transformação acima.

2.1.1 Método da decomposição com diagonalização - MDD

Como um modelo de cinética pontual trabalhado nesta pesquisa considera-se o sistema abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i C_i(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

na qual $i = 1$ até $i = 6$, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} n(0) &= n_0 \\ C_i(0) &= \frac{\beta_i n_0}{\Lambda \lambda_i}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

com $i = 1$ até $i = 6$, $n(0)$ é a densidade de nêutrons em $t = 0s$, e $C_i(0)$ é a concentração do precursor i em $t = 0s$. Essas condições preveem uma quantidade inicial de nêutrons distribuída no volume do reator, bem como concentrações iniciais de precursores de nêutrons atrasados, essas concentrações dependem não somente de suas constantes características (λ_i, β_i) , como também da densidade inicial de nêutrons e do tempo de vida média (Λ) .

Por meio do método da decomposição, expandem-se tanto a densidade de nêutrons como a concentração de precursores em séries, na forma:

$$\begin{aligned} n(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) \\ C_i(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Com o objetivo, posterior, de desenvolver aplicações numéricas para a solução obtida, trunca-se a série em um determinado R ditado pelo critério de estabilidade e pelo critério de parada utilizados nas simulações numéricas. Contudo para que o formalismo aqui desenvolvido seja exato, mantemos, por hora, as séries de decomposição de 0 até ∞ . Substituindo a equação (2.5) na equação (2.3), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) &= \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}(t) \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) - \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

para $i = 1$ até $i = 6$. Em seguida, considerando a reatividade como expressa por $\rho(t) = \rho_0 + \rho_1(t)$, na qual ρ_0 representa um valor constante e ρ_1 uma função dependente do tempo, é fácil ver que o sistema definido na equação (2.6), quando truncado representará um sistema indeterminado, isto é, haverá $7 \times R$ incógnitas e apenas 7 equações.

Tal situação pode ser contornada de forma similar ao apresentado em Petersen, 2011, contudo tal artifício usado como em Petersen, 2011, apesar de tornar o sistema determinado, ainda requer o uso da técnica de continuação analítica, ou seja, uma solução

obtida dessa forma manteria o caráter rígido da solução, assim propõe-se uma modificação na estrutura da matriz principal do sistema, que corresponde ao lado esquerdo da igualdade do sistema proposto na equação (2.6). Realiza-se, então, uma decomposição da matriz em uma soma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}\right) \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) &= \frac{\rho_1}{\Lambda} \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}(t) \\ \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

O sistema acima pode ser re-escrito de forma matricial como

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} - \Omega\mathbf{Y}(t) = \Xi(t)\mathbf{Y}(t). \quad (2.8)$$

Assim por conveniência introduzimos as matrizes:

$$\mathbf{Y}_j(t) = (n_j(t), C_{1,j}(t), C_{2,j}(t), C_{3,j}(t), C_{4,j}(t), C_{5,j}(t), C_{6,j}(t))^T, \quad (2.9)$$

$$\Omega = \text{diag}\left(\frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4, -\lambda_5, -\lambda_6\right), \quad (2.10)$$

e

$$\Xi = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1(t)}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_4}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

Formalmente a equação (2.8) pode ser resolvida pela técnica da Transformada de Laplace (TL), sendo essa solução da forma

$$\mathbf{Y}(t) = \exp(\Omega t)\mathbf{Y}(0) + \int_0^t \exp(\Omega(t - \tau))\Xi(\tau)\mathbf{Y}(\tau)d\tau. \quad (2.12)$$

Note que a integral contém a parte da reatividade que é dependente do tempo juntamente com as constantes de decaimento que deram origem ao caráter rígido do problema. Em geral, para reatividades dependentes de tempo específicas, as soluções

analíticas da integral existem, a fim de resolver a integral para uma dependência arbitrária qualquer de tempo em $\rho(t)$ tem-se que recorrer a outras técnicas.

Para esse fim, decompõe-se a equação integral (2.12), conforme o método de decomposição proposto em Da Silva et al., 2014, isto é, o problema original é convertido num esquema recursivo, em que a inicialização pode ser resolvida diretamente e as demais equações são resolvidas por um método de integração. Em Da Silva et al., 2014, o método de integração utilizado foi a quadratura de Gauss-Legendre [Press, 2011]. Esse método pode ser descrito da seguinte forma

$$\int_0^t f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(x_i), \quad (2.13)$$

em que os w_i são os pesos da quadratura, e x_i as raízes dos polinômios associados. Em seguida, em Da Silva et al., 2014, para que a integral obtida fosse exata, foi necessário aproximar o produto $\exp(\Omega(t - \tau))\Xi(\tau)\mathbf{Y}(\tau)$ utilizando polinômios cúbicos (*splines* cúbicos naturais). Dessa forma são criados diversos pontos entre os pontos que se deseja interpolar, formando curvas, cujas integrais se anulam. Permanecendo ao final do processo apenas os valores da integral nos pontos de interesse. Essa técnica, para que a integral convirja, requer um passo de tempo da ordem de 10^{-3} .

Ao aplicarmos a mesma integral técnicas numéricas, como, por exemplo, a fórmula de Newton-Cotes fechada (regra do trapézio) [Press, 2011], foi necessário que o passo de tempo fosse da ordem de 10^{-5} .

Assim tornou-se evidente que a técnica de integração utilizada influenciava para a convergência da integral acima, e subsequentemente a quantidade de recursões necessárias para a convergência e estabilidade do método.

Dentre todos os testes realizados, obtivemos o menor passo de tempo (10^{-1}) utilizando a quadratura de Gauss-Laguerre. Sendo a quadratura de Gauss-Laguerre [Press, 2011] expressa por:

$$\int_0^t x^\alpha e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(x_i), \quad (2.14)$$

em que os w_i são os pesos da quadratura, e x_i as raízes dos polinômios associados. Adotando $\alpha = 0$ temos:

$$\int_0^t e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(x_i), \quad (2.15)$$

cuja a forma do *kernel* de integração é similar a $\exp(\Omega(t-\tau))\Xi(\tau)\mathbf{Y}(\tau)$, dispensando assim a necessidade de que esse produto seja aproximado por uma interpolação polinomial para que a integral $\int_0^t \exp(\Omega(t-\tau))\Xi(\tau)\mathbf{Y}(\tau)d\tau$ seja estimada. Logo, nesta tese fazemos uso da quadratura de Gauss-Laguerre. E o número de passos de recursão é determinado a partir da precisão numérica desejada. Note ainda que $\exp(\Omega t)$ é facilmente determinado uma vez que Ω é uma matriz diagonal [Lipschutz, 1994].

Assim, a fim de determinar cada termo da expansão de :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_i \mathbf{Y}_i, \quad (2.16)$$

e a primeira recursão terá a forma

$$\frac{d\mathbf{Y}_0(t)}{dt} - \Omega\mathbf{Y}_0(t) = 0, \quad (2.17)$$

que de maneira expandida é expressa por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_0(t) &= \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}n_0(t) \\ \frac{d}{dt}C_{1,0}(t) &= -\lambda_1 C_{1,0}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}C_{6,0}(t) &= -\lambda_6 C_{6,0}(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

E a instrução de recursão para a solução em sua forma fechada, para $i > 1$, é dada por

$$\frac{d\mathbf{Y}_i(t)}{dt} - \Omega\mathbf{Y}_i(t) = \Xi(t)\mathbf{Y}_{i-1}(t), \quad (2.19)$$

que pode ser escrita de forma expandida como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_j(t) &= \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{1,j-1} + \frac{\rho_1}{\Lambda}n_{j-1}(t) \\ \frac{d}{dt}C_{1,j}(t) &= -\lambda_1 C_{1,j}(t) + \frac{\beta_1}{\Lambda}n_{j-i}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}C_{6,j}(t) &= -\lambda_6 C_{6,j}(t) + \frac{\beta_6}{\Lambda}n_{j-i}(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como a TL, nesse caso em particular, existe, é conhecida, e a transformação é

inversível, tal transformação comportar-se-á como um operador linear, como a equação (2.12) ser linear, a solução por TL pode ser empregada diretamente no formalismo de recursão mantendo o esquema exato.

Cabe ressaltar que, embora não seja única, essa decomposição é feita de tal maneira que o sistema (2.3) seja satisfeito, a menos nos termos $\frac{\rho_1}{\Lambda}, \frac{\beta_i}{\Lambda}$ com $i = 1$ até $i = 6$, e $\sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i$ que não estão presentes na equação (2.18). Enfatiza-se que a solução das equações (2.3) e (2.20) são determinadas a partir de técnicas já estabelecidas pela teoria de sistemas de equações [Lipschutz, 1994] e de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, como variação de parâmetros, método dos coeficientes à determinar, entre outros [Boyce, 2006].

A operacionalização de forma computacional é estabelecida de acordo com o fluxograma da figura 2.1.

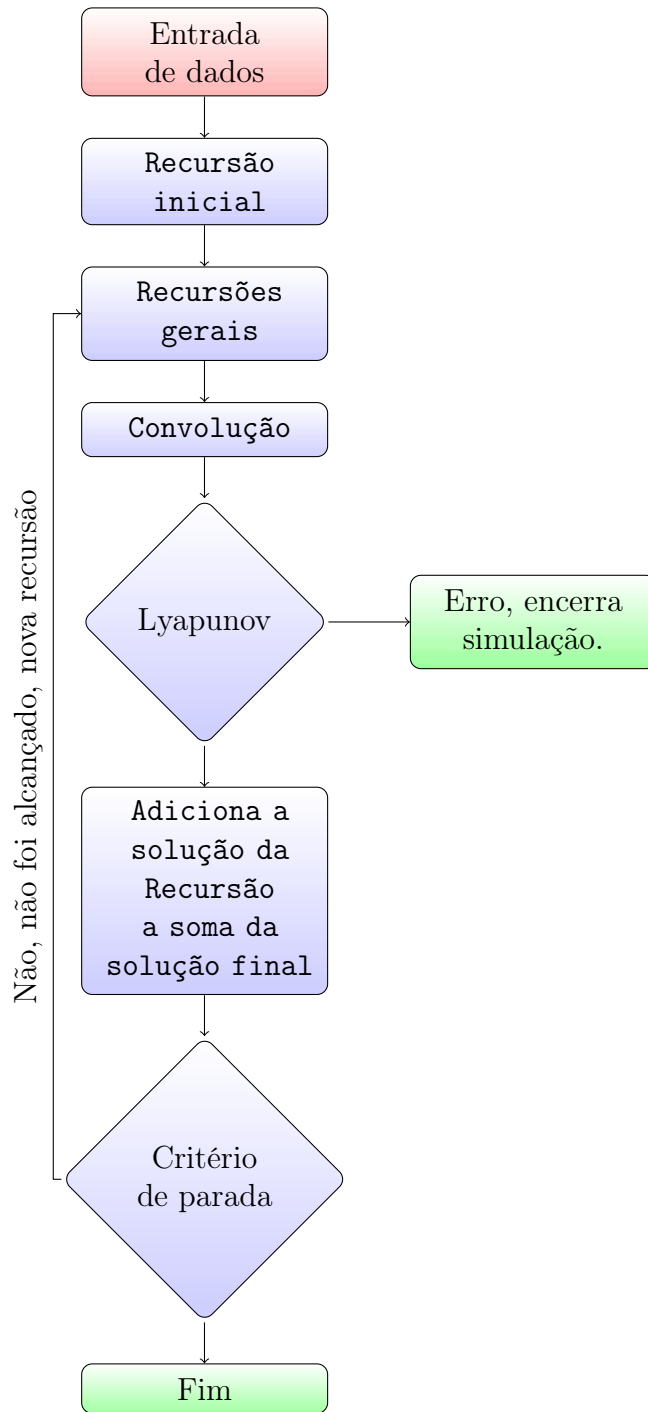


Figura 2.1: Fluxograma referente à computação do MDD.

A figura 2.1 representa o fluxo de execução da simulação do problema determinístico linear. Inicialmente os dados do problema são incluídos (Λ , λ_i , i , β_i , etc). Conhecidos esses dados a inicialização da recursão (recursão inicial) é determinada, conforme a equação (2.18). Note que a equação (2.18) possui solução direta. Em seguida executam-se as recursões gerais, tantas quantas necessárias, conforme a equação (2.20), a seguir computa-

se a convolução descrita na equação (2.12). Após é calculado o coeficiente de Lyapunov, análogo ao proposto por Petersen, 2011. Logo após a solução da recursão é adicionada a solução final do problema, tal como na equação (2.16). Assim que essa soma é computada verifica-se o critério de parada, e caso esse não seja atingido executa-se uma nova recursão, se satisfeito o critério de parada encerra-se a simulação.

2.2 Não Linearidade e as ECPN

Reatores nucleares, devido a sua natureza, são modelados por equações não lineares, nas quais os parâmetros de um reator variam com o tempo, com o nível de potência, e diversos outros fatores. Na seção anterior (2.1.1) consideramos $\rho(t)$ como uma função dependente exclusivamente do tempo. Contudo sabemos que essa função depende também do fluxo de nêutrons no reator e, conseqüentemente, do nível de potência. Essa dependência deve-se também ao fato de a própria reatividade depender das seções de choque macroscópicas e essas por sua vez dependem das densidades dos materiais que compõem o núcleo do reator e das seções de choque microscópicas correspondentes. As seções de choque microscópicas dependem do espectro de energia, e esse último depende da distribuição de temperatura, e por conseguinte do nível de potência. As densidades dos materiais, por sua vez, dependem da temperatura, que depende da distribuição de potência e, portanto do fluxo. E ainda as concentrações dos nucleons mudam constantemente devido às interações neutrônicas.

A variação da reatividade com a temperatura é o principal mecanismo de retroalimentação (*feedback*), que determina a estabilidade de um reator com respeito às flutuações do nível de potência em pequenos intervalos de tempo. Sendo, conseqüentemente, evidente que a primeira tarefa ao modelar-se o *feedback* de temperatura é determinar a distribuição de temperatura no núcleo do reator. Certamente isso pode ser viabilizado escrevendo-se as equações de transporte de calor e massa que caracterizam o reator, ou seja, pode-se escrever as equações de condução e convecção de calor usando a deposição de energia pela fissão, bem como o calor gerado pela fonte. A movimentação do fluido refrigerante no núcleo seria, nesse caso, descrita pelas equações de hidrodinâmica. O que resultaria em um sistema de equações diferenciais parciais, a menos que novas simplificações sejam introduzidas.

Nesta tese não pretendemos resolver diretamente complexos sistemas de equações

diferenciais parciais. Como a modelagem descrita ao fim do parágrafo anterior, pode-se substituir a dependência espacial por um parâmetro de agrupamento, argumento similar ao necessário para a obtenção das ECPN. Nesse caso o núcleo do reator é caracterizado por diversas médias de temperatura, como por exemplo, a temperatura média do combustível, a temperatura do moderador, a temperatura do refrigerante, etc. E em seguida modela-se a dependência da reatividade com relação a cada uma dessas temperaturas.

É possível anexar as mudanças de temperatura ao modelo original de cinética pontual. Para tal re-escrevemos a reatividade como

$$\rho(t) = \delta\rho_{ext}(t) + \delta\rho_f[\mathcal{T}(t)], \quad (2.21)$$

na qual $\delta\rho_{ext}(t)$ a reatividade externamente controlada, $\delta\rho_f[\mathcal{T}(t)]$ representa a reatividade correspondente ao mecanismo de *feedback*, essa última em geral é escrita como dependente da temperatura.

Quando um reator nuclear opera em regime permanente com uma potência constante surge uma reatividade oriunda da retroalimentação, essa é negativa, conhecida conforme Duderstadt e Hamilton, 1976 como defeito de potência. Dessa forma, para que as condições de criticalidade conservem-se é necessário inserir-se reatividade externamente no sistema, isso descrito como:

$$\rho_0 + \delta\rho_f[\mathcal{P}_0] = 0. \quad (2.22)$$

Dessa forma podemos descrever o incremento na reatividade da seguinte forma:

$$\delta\rho_f[\mathcal{P}(t)] = \rho_f[\mathcal{P}] - \rho_f[\mathcal{P}_0]. \quad (2.23)$$

Sendo o incremento na potência dado por:

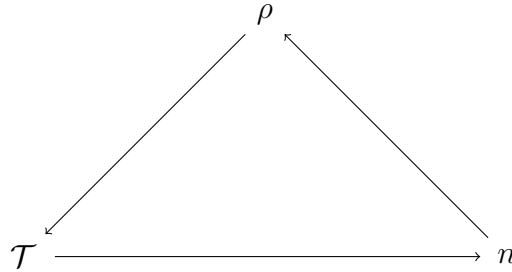
$$p(t) \equiv \mathcal{P}(t) - \mathcal{P}_0. \quad (2.24)$$

Assim das equações (2.23) e (2.24) vem que $\delta\rho_f[p = 0] = \delta\rho_f[\mathcal{P}_0] = 0$. Por meio das equações (2.23 e 2.24) podemos determinar $\mathcal{P}(t)$ para qualquer $\rho(t)$. Comumente essas equações são analisadas sob simplificações como:

1. ignorando os nêutrons atrasados para grandes inserções de reatividade;
2. aproximações do tipo degrau;

3. linearização de pequenas inserções de reatividade.

O fluxograma 2.2 caracteriza, de forma simplificada, o mecanismo de feedback.



2.2.1 Coeficiente de reatividade devido à temperatura

No estudo da retroalimentação os efeitos das alterações da temperatura sobre o fator multiplicativo são de grande interesse. Tais alterações são usualmente expressas em termos do *coeficiente de reatividade devido à temperatura*, a saber α_T , definido com em Duderstadt e Hamilton, 1976:

$$\alpha_T \equiv \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad (2.25)$$

que pode ser melhor interpretado como um coeficiente isotérmico de reatividade devido à temperatura, uma vez que assume que a temperatura do núcleo, pode ser caracterizada por uma temperatura uniforme T .

Caso um reator seja exposto a um α_T positivo, então um aumento de temperatura irá produzir um aumento de ρ , subsequentemente um aumento de potência, esse por sua vez causaria um novo aumento de temperatura, e assim sucessivos aumentos encadeados ocorreriam. Nesse caso, o reator seria instável com respeito à temperatura e às variações de potência. Situações desejáveis são aquelas em que α_T é negativo, pois dessa forma um aumento na temperatura causará um decrescimento de ρ , seguido de um decrescimento da potência e da temperatura, o que é seguido de uma estabilização no nível de potência do reator.

2.2.2 Coeficiente de reatividade devido à potência

O coeficiente de reatividade devido à potência é definido por:

$$\alpha_P \equiv \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad (2.26)$$

O parâmetro escrito dessa forma leva em consideração as diferenças de temperatura que ocorrem em um reator durante a sua operação, uma vez que essa depende da potência.

2.3 Modelagem da Retroalimentação de Temperatura

Uma forma comum na literatura é assumir uma única temperatura efetiva para o refrigerante (T_c) e modela-se a temperatura do combustível (T_F) por meio da *Lei de Newton do Resfriamento*, tal forma encontra-se a saber nas obras de:

- Duderstadt e Hamilton, 1976;
- Gupta e Trasi, 1986;
- Polo-Labarrios et al., 2014.

E é representada por

$$\frac{dT_F}{dt} = K\mathcal{P}(t) - \gamma(T_F - T_c), \quad (2.27)$$

onde K e γ são constantes térmicas que caracterizam o núcleo do reator. Outro extremo é o modelo *Adiabático*, no qual assume-se não haver perda de calor, Nahla, 2009 e Vyawahare e Nataraj, 2014

$$\frac{dT_F}{dt} = K\mathcal{P}(t). \quad (2.28)$$

Existe ainda o modelo que assume a constante redução de potência

$$\frac{dT_F}{dt} = K(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0). \quad (2.29)$$

Todos os casos acima, equação (2.27), equação (2.28), e equação (2.29), podem ser considerados um caso particular de uma forma geral de feedback linear, Duderstadt e Hamilton, 1976:

$$\rho_f(t) = \int_{-\infty}^t d\tau K(t - \tau)[\mathcal{P}(\tau) - \mathcal{P}_0]. \quad (2.30)$$

Assim podemos representar de uma forma generalizada:

$$\frac{d}{dt}T(t) = K(t), \quad (2.31)$$

em que $K(t)$, representa o tipo de convenção utilizada, podendo representar a *Lei de Newton do Resfriamento*, o modelo adiabático, ou uma constante redução de potência, conforme a necessidade da simulação que se deseja realizar.

O formalismo desenvolvido até aqui, tal como em Duderstadt e Hamilton, 1976, pressupõe a computação direta da potência. Contudo, nesta tese a densidade de potência é obtida segundo a transformação dada pela transformação (2.2), como consequência é necessário que o *kernel* $K(t)$ seja sujeito à uma transformação similar, dessarte referimos $K(t)$ como o *kernel* de temperatura relativo à potência, e $H(t)$ o *kernel* de temperatura relativo à densidade de potência.

Pode-se então considerar um modelo mais abrangente, que o modelo proposto ao término da seção anterior, no qual

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t) &= \left(\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right) n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}T(t) &= H(t) \end{aligned} \tag{2.32}$$

Isso posto, é comum, tal como feito por Silva, 2011 e Nahla e Zayed, 2010, considerar-se a temperatura como uma perturbação na equação da reatividade, assim passa-se a ter:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t) &= \left(\frac{\rho(T, t) - \beta}{\Lambda} \right) n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Assim escrevemos (2.3) em sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}n(t) \\ \frac{d}{dt}C_1(t) \\ \frac{d}{dt}C_2(t) \\ \frac{d}{dt}C_3(t) \\ \frac{d}{dt}C_4(t) \\ \frac{d}{dt}C_5(t) \\ \frac{d}{dt}C_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho(T, t) - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3}{\Lambda} & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_4}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_4(t) \\ C_5(t) \\ C_6(t) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Uma vez que $\frac{d}{dt}T(t)$ depende de $n(t)$, pode-se representar $\rho(T(t), t)$ por $\rho(n(t), t)$, dessa forma o sistema dado por 2.34, também pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}n(t) \\ \frac{d}{dt}C_1(t) \\ \frac{d}{dt}C_2(t) \\ \frac{d}{dt}C_3(t) \\ \frac{d}{dt}C_4(t) \\ \frac{d}{dt}C_5(t) \\ \frac{d}{dt}C_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho(n(t), t) - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3}{\Lambda} & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_4}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_4(t) \\ C_5(t) \\ C_6(t) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Os resultados obtidos por meio do método proposto nesta tese são, tal como é esperado, comparados com outros métodos já estabelecidos na literatura. Dentre esses, Silva, 2011 faz uso de polinômio de Adomian para a aproximação do termo $\rho(n(t), t)$. Grife-se que o termo $\rho(n(t), t)$, segundo o método de Adomian Adomian, 2013, será da forma:

$$\rho(n(t), t) = \rho^0 + \frac{\partial \rho}{\partial n} \Big|_{n=0}(t) \cdot n(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial n^2} \Big|_{n=0}(t) \cdot n^2(t) + \dots \quad (2.36)$$

A expansão acima foi tratada até o termo não linear de primeira ordem, em Silva, 2011 pode-se estender esse tratamento a não-linearidades de ordens superiores. Note, ainda, que $\frac{\partial^k \rho}{\partial n^k} \Big|_{n=0}$ são dependentes de t e, portanto, $\frac{d}{dt}n(t)$ é não linear.

Apesar da eficiência já estabelecida de tal metodologia, cumpre ressaltar que ela demanda muito esforço computacional, uma vez que para o uso do MDD não é necessário que sejam previamente determinados os termos de uma expansão, como na equação (2.3), justifica-se, novamente, o uso do também já estabelecido Método da Decomposição com Diagonalização.

2.4 ECPN Não Linear Abordagem Segundo o MDD

Partimos do sistema proposto na equação (2.3). Como

$$\frac{d}{dt}T(t) = H(t) \quad (2.37)$$

é fácil ver que se pode escrever o seguinte

$$T(t) = \int_0^t H(t) dt . \quad (2.38)$$

e conseqüentemente,

$$\rho_f(t) = \int_0^t d\tau H(t - \tau)[\mathcal{P}(\tau) - \mathcal{P}_0] \quad (2.39)$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n(t) &= \left(\frac{\rho_f(t) - \beta}{\Lambda} \right) n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\
\frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \\
\rho_f(t) &= \int_0^t H(t - \tau) [\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}_0].
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Cumpramos ressaltar que a conversão de densidade de nêutrons, uma vez que tratamos aqui com apenas um grupo de energia, é realizada, sempre que necessário, utilizando a relação (2.2). E assim como já feito na seção anterior, propõe-se a decomposição das variáveis com dependência temporal como

$$\begin{aligned}
n(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} n_j(t) \\
C_i(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}(t) \\
\rho_f(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{f,j}(t)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

que, assim como no caso linear, para o desenvolvimento de aplicações numéricas para a solução obtida é necessário o truncamento em um determinado $j = R$, e esse R é ditado tanto pelo critério de estabilidade da solução como pelo critério de parada da simulação.

Assim, a fim de determinar cada termo da expansão de $\mathbf{u}(t) = \sum_i \mathbf{U}_i$, a primeira recursão terá a forma

$$\frac{d\mathbf{U}_0(t)}{dt} - \Omega \mathbf{U}_0(t) = 0, \tag{2.42}$$

que de maneira expandida é expressa por:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n_0(t) &= \frac{-\beta}{\Lambda} n_0(t) \\
\frac{d}{dt}C_{1,0}(t) &= -\lambda_1 C_{1,0}(t) \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}C_{6,0}(t) &= -\lambda_6 C_{6,0}(t)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

E a instrução de recursão para a solução em sua forma fechada é dada por

$$\frac{d\mathbf{U}_i(t)}{dt} - \Omega\mathbf{U}_i(t) = \Xi(t, \mathbf{U}_{i-1})\mathbf{U}_{i-1}(t), \quad (2.44)$$

que pode ser escrita em forma expandida como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_j(t) &= \frac{-\beta}{\Lambda}n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{,j-1} + \frac{\rho_{f,j-1}(\mathcal{T}(t),t)}{\Lambda}n_{j-1}(t) \\ \frac{d}{dt}C_{1,j}(t) &= -\lambda_1 C_{1,j}(t) + \frac{\beta_1}{\Lambda}n_{j-1}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}C_{6,j}(t) &= -\lambda_6 C_{6,j}(t) + \frac{\beta_6}{\Lambda}n_{j-1}(t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Na figura 2.2 apresentamos o fluxograma de computação do método da decomposição com diagonalização aplicado ao problema não linear, tal como exposto na equação (2.45).

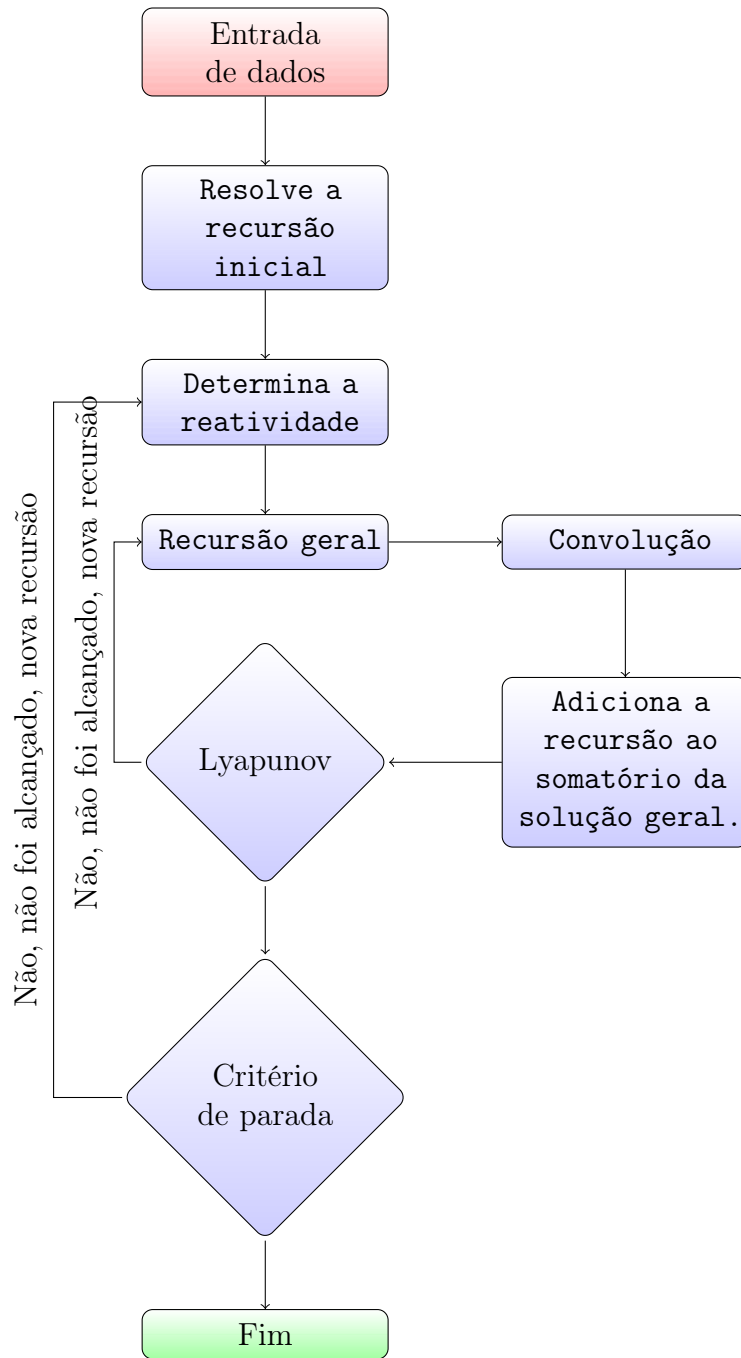


Figura 2.2: Fluxograma referente à computação do MDD

A figura 2.2 representa o fluxo de execução da simulação do problema determinístico não linear. Inicialmente os dados do problema são incluídos (Λ , λ_i , i , β_i , etc). Conhecidos esses dados a inicialização da recursão (recursão inicial) é determinada, conforme a equação (2.43). Note que a equação (2.43) possui solução direta. Em seguida determina-se a reatividade conforme a equação (2.4), a seguir executam-se as recursões gerais, tantas quantas necessárias, conforme a equação (2.45), logo após computa-se a

convolução. A seguir a solução da recursão é adicionada a solução final do problema. Após é calculado o coeficiente de Lyapunov, análogo ao proposto por Petersen, 2011. E verifica-se o critério de parada, e caso esse não seja atingido executa-se uma nova recursão, se satisfeito o critério de parada encerra-se a simulação.

2.5 Convergência e Parada do Método

2.5.1 Critério de convergência de Lyapunov

O critério de convergência de Lyapunov é análogo à teoria de estabilidade de Lyapunov. Tal teoria é usada para analisar a trajetória de um sistema, sem encontrar a trajetória em si, isto é, sem resolver a equação diferencial, tal como em Boichenko et al., 2005. Para a análise da estabilidade e convergência das soluções essa teoria utiliza dois métodos, o método indireto de Lyapunov, também conhecido como primeiro método, e o método direto de Lyapunov, também conhecido como segundo método de Lyapunov Jiang e Wang, 2002.

O primeiro método, o método indireto, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear, a partir de seu modelo linearizado, no qual os termos não lineares são aproximados pelo truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e sua estabilidade é analisada por meio dos autovalores Hafstein, 2004.

O segundo método de Lyapunov, o método direto, não depende da linearização do sistema original, apenas da existência de uma solução positiva definida. Nesse método determina-se a estabilidade sem integrar, explicitamente, a solução.

Dado o proposto, para sistemas dinâmicos, em Hafstein, 2005 e Hafstein, 2004, toma-se como referência para a análise da convergência das soluções propostas na presente pesquisa o método direto de Lyapunov. Uma vez que esse dispensa linearizações, o que vai ao encontro do pretendido com uso do método da decomposição com diagonalização. E por fim, com base nos recentes trabalhos de Petersen, 2011, Mello, 2010, Silva, 2011 e Da Silva et al., 2014, utiliza-se o critério de Lyapunov para analisar a estabilidade da solução das equações de cinética pontual para a densidade de nêutrons, e também para a concentração de precursores de nêutrons atrasados.

Assumindo que $|\delta Z_R| = \left\| \sum_{j=R+1}^{\infty} k_j \right\|$ seja a diferença máxima entre $\Gamma_R = \sum_{j=1}^R k_j$ e k (a solução exata), na qual $\| \cdot \|$ significa a norma máxima, então analisa-se a convergência

a partir de

$$|\delta Z_R| \approx e^{\xi \|\Gamma_R\|} |\delta Z_0|, \quad (2.46)$$

na qual ξ representa o coeficiente de Lyapunov. A equação acima pode ser re-escrita como

$$\xi = \frac{1}{\|\Gamma_R\|} \ln \left(\frac{|\delta Z_R|}{|\delta Z_0|} \right). \quad (2.47)$$

em que Z_0 representa a solução dada pelo primeiro sistema recursivo e Z_R representa a solução acumulada pelos R sistemas recursivos considerados.

O critério de Lyapunov determina a influência da variação da condição inicial sobre a solução. Neste trabalho o critério de Lyapunov é utilizado para verificar se a solução para a densidade de nêutrons é estável ou não, a mesma análise é aplicada as concentrações de precursores de nêutrons atrasados. Caso $\xi < 0 \forall k > k_0$ então a convergência da solução é garantida a partir de um determinado incremento no número de termos da série, pela qual a solução é representada. Uma vez que δZ_0 contém toda a influência da condição inicial, conclui-se que δZ_R tenderá a zero quando $\xi < 0$. Ou seja, quando o primeiro termo da série for dominante em relação à soma dos demais, tem-se $\xi < 0$. Contudo, caso $\xi \geq 0 \forall k > k_0$ pode haver convergência caótica, isso implica que nada pode se afirmar, por esse motivo, tal como utilizado pelos autores Petersen, 2011, Mello, 2010, Silva, 2011, procura-se por profundidades de recursão (R) para as quais $\xi < 0$.

2.5.2 O Critério de parada

O critério de parada utilizado é similar a um critério de erro relativo percentual [Press, 2011]. Como é dado na equação abaixo:

$$\epsilon = \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i}{\mathbf{U}_{i+1}} < 10^{-16}. \quad (2.48)$$

É esperado no MDD que as recursões acrescentem a solução final parcelas decrescentes, dessa forma utiliza-se $\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i$, no numerador, para observar o percentual da contribuição da recursão mais recente com relação à soma total das recursões. Uma vez que $\mathbf{U}_{i+1} \geq \mathbf{U}_i$ não é necessário que seja considerado o valor absoluto.

3 RESULTADOS DO MODELO DETERMINÍSTICO

Na literatura existem tanto pesquisas referentes à retroalimentação de temperatura considerando apenas um grupo de precursores de nêutrons atrasados, por exemplo Haofeng et al., 2007, Chen et al., 2007, Nahla, 2009, e Silva et al., 2014; assim como as que consideram seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, por exemplo Gupta e Trasi, 1986, Nahla, 2011, Hamada, 2013 e Leite et al., 2016. Sendo uma quantidade muito maior do primeiro do que do segundo. Com os propósitos de validar e testar as limitações do MDD foram simulados tanto casos envolvendo apenas um grupo de precursores como também casos envolvendo seis grupos de precursores de nêutrons atrasados

Todas as simulações executadas neste capítulo utilizam tanto o critério de estabilidade de Lyapunov, como o critério de parada, os quais foram propostos ao fim do capítulo anterior. E para as comparações dos resultados é considerado o desvio relativo percentual (**d**) entre a metodologia proposta e os métodos da literatura.

O presente capítulo é dividido em duas seções: a primeira concerne às simulações que consideram apenas um grupo de precursores de nêutrons atrasados, já a segunda seção concerne às simulações que utilizam seis grupos de precursores de nêutrons.

3.1 Casos Considerando um Grupo de Precursores

Iniciamos os testes do método proposto (MDD) comparando os resultados obtidos com os apresentados em Nahla e Zayed, 2010 e Silva et al., 2014. Nesses teste foram utilizados os parâmetro nucleares $\beta = 0,0065$, $L = 0,0001s$, $\lambda = 0,07741s^{-1}$, $H = 0,05\frac{K}{MWs}$, $\alpha_T = 5 \times 10^{-5}K^{-1}$. Com condições iniciais $n(0) = 10$, $\frac{d\rho}{dn}(0) = 0$, $T(0) = 0$, e $C(0) = 0$.

Note que na obra de Silva et al., 2014 faz-se uso de aproximações via polinômios de Adomian, essas requerem condições sobre $\frac{d\rho}{dn}|_{t=0}$, que não são utilizadas pelo MDD. Foram computados três casos $\rho(0) = 0,2\beta$, $\rho(0) = 0,5\beta$, e $\rho(0) = 0,8\beta$.

Diferente dos métodos apresentados por Nahla e Zayed, 2010 e Silva et al., 2014, não há em nosso método a necessidade de estipular-se um passo de tempo. Porém assim como em Silva et al., 2014 trata-se de um método recursivo, com um truncamento $R = 3$ definido pela aplicação do critério de parada e do critério de Lyapunov.

3.1.1 $\rho = 0, 8\beta$ Tabela 3.1: $\mathcal{P}(t)$ para o caso $\rho = 0, 8\beta$

Tempo(s)	Nahla e Zayed, 2010	d	Silva et al., 2014	d	Método Proposto
0	10,000000	-	10,000000	-	10,000000
10	64,557487	$1 \times 10^{-1}\%$	64,482282	$1 \times 10^{-6}\%$	64,482281
20	83,320236	$1 \times 10^{-1}\%$	83,252406	$1 \times 10^{-6}\%$	83,252405
30	70,490250	$3 \times 10^{-2}\%$	70,464534	$1 \times 10^{-6}\%$	70,464533
40	53,917503	$4 \times 10^{-3}\%$	53,913786	$1 \times 10^{-6}\%$	53,913785
50	39,760925	$1 \times 10^{-6}\%$	39,760925	$1 \times 10^{-6}\%$	39,760925
60	28,824406	$1 \times 10^{-2}\%$	28,833550	$1 \times 10^{-6}\%$	28,833550
70	20,703527	$1 \times 10^{-2}\%$	20,713236	$1 \times 10^{-6}\%$	20,713235
80	14,789428	$1 \times 10^{-2}\%$	14,798334	$1 \times 10^{-6}\%$	14,798334
90	10,528523	$1 \times 10^{-2}\%$	10,536173	$1 \times 10^{-6}\%$	10,536173
100	7,478508	$1 \times 10^{-2}\%$	7,484798	$1 \times 10^{-6}\%$	7,484797
110	5,304107	$1 \times 10^{-3}\%$	5,309185	$1 \times 10^{-6}\%$	5,309184
120	3,758143	$1 \times 10^{-2}\%$	3,762135	$1 \times 10^{-6}\%$	3,762135
130	2,660907	$4 \times 10^{-3}\%$	2,66402	$2 \times 10^{-6}\%$	2,66400
140	1,883123	$2 \times 10^{-3}\%$	1,885519	$3 \times 10^{-6}\%$	1,885516
150	1,332234	$1 \times 10^{-3}\%$	1,334066	$2 \times 10^{-6}\%$	1,334064
155	1,116575	$1 \times 10^{-2}\%$	1,122044	$2 \times 10^{-6}\%$	1,122042

Tabela 3.2: $T(t)$ expressa em $[K]$ para o caso $\rho = 0, 8\beta$

Tempo(s)	Nahla e Zayed, 2010	d	Silva et al., 2014	d	Método Proposto
0	300,000	-	300,000	-	300,000
10	317,305	$1 \times 10^{-3}\%$	317,306	$1 \times 10^{-3}\%$	317,305
20	356,699	$2 \times 10^{-2}\%$	356,664	$1 \times 10^{-3}\%$	356,673
30	395,611	$1 \times 10^{-1}\%$	395,550	$1 \times 10^{-3}\%$	395,551
40	426,669	$1 \times 10^{-1}\%$	426,597	$2 \times 10^{-3}\%$	426,599
50	449,955	$1 \times 10^{-1}\%$	449,880	$1 \times 10^{-3}\%$	449,880
60	466,973	$1 \times 10^{-1}\%$	466,898	$1 \times 10^{-3}\%$	466,898
70	479,250	$1 \times 10^{-1}\%$	479,178	$1 \times 10^{-3}\%$	479,177
80	488,044	1%	487,975	$1 \times 10^{-3}\%$	487,975
90	494,315	$1 \times 10^{-1}\%$	494,249	$1 \times 10^{-3}\%$	494,249
100	498,774	$6 \times 10^{-2}\%$	498,711	$1 \times 10^{-3}\%$	498,711
110	501,939	$1 \times 10^{-1}\%$	501,87	$1 \times 10^{-2}\%$	501,863
120	504,182	$4 \times 10^{-2}\%$	504,123	$1 \times 10^{-3}\%$	504,123
130	505,771	$3 \times 10^{-3}\%$	505,714	$1 \times 10^{-3}\%$	505,714
140	506,895	$5 \times 10^{-2}\%$	506,840	$1 \times 10^{-3}\%$	506,840
150	507,691	$3 \times 10^{-2}\%$	507,637	$1 \times 10^{-3}\%$	507,637
155	508,002	$1 \times 10^{-1}\%$	507,94	$1 \times 10^{-2}\%$	507,943

A comparação entre os métodos propostos por Nahla e Zayed, 2010, Silva et al., 2014, e o MDD foi realizada considerando-se o desvio percentual relativo, **d**. Ao comparar-se o MDD com os resultados referentes à temperatura de Nahla e Zayed, 2010 o desvio **d** não é superior a 1%. Já os resultados referentes à potência apresentam desvios inferiores a 0,1%. Comparando se os resultados do MDD aos resultados obtidos por Silva et al., 2014 os desvios são inferiores a 0,00001%. Concluí-se, então, que a solução obtida por

meio do MDD é consoante com as demais na literatura.

3.1.2 $\rho = 0, 5\beta$

Tabela 3.3: $\mathcal{P}(t)$ para o caso $\rho = 0, 5\beta$

Tempo(s)	Nahla e Zayed, 2010	d	Silva et al., 2014	d	Método Proposto
0	10,000000	-	10,000000	-	10,000000
10	18,195158	$1 \times 10^{-3}\%$	18,192858	$1 \times 10^{-6}\%$	18,192858
20	26,726191	$2 \times 10^{-2}\%$	26,719004	$1 \times 10^{-6}\%$	26,719004
30	31,895273	$3 \times 10^{-2}\%$	31,884462	$1 \times 10^{-6}\%$	31,884462
40	32,597210	$1 \times 10^{-2}\%$	32,585985	$1 \times 10^{-6}\%$	32,585985
50	30,103104	$1 \times 10^{-1}\%$	30,094202	$1 \times 10^{-6}\%$	30,094202
60	26,081541	$1 \times 10^{-2}\%$	26,0756000	$1 \times 10^{-6}\%$	26,075600
70	21,698225	$1 \times 10^{-3}\%$	21,694910	$1 \times 10^{-6}\%$	21,694910
80	17,578548	$4 \times 10^{-3}\%$	17,577274	$1 \times 10^{-6}\%$	17,577274
90	13,988706	$1 \times 10^{-5}\%$	13,988750	$1 \times 10^{-6}\%$	13,988750
100	10,995258	$1 \times 10^{-3}\%$	10,996057	$1 \times 10^{-6}\%$	10,996057
110	8,567273	$1 \times 10^{-4}\%$	8,568453	$1 \times 10^{-6}\%$	8,568453
120	6,633668	$1 \times 10^{-4}\%$	6,635031	$1 \times 10^{-6}\%$	6,635031
130	5,113089	$1 \times 10^{-3}\%$	5,114456	$1 \times 10^{-6}\%$	5,114456
140	3,927845	$4 \times 10^{-6}\%$	3,927845	$4 \times 10^{-6}\%$	3,929129

Tabela 3.4: $T(t)$ expressa em $[K]$ para o caso $\rho = 0, 5\beta$

Tempo(s)	Nahla e Zayed, 2010	d	Silva et al., 2014	d	Método Proposto
0	300,000	-	300,000	-	300,000
10	306,953	$1 \times 10^{-2}\%$	306,955	$1 \times 10^{-3}\%$	306,955
20	318,256	$1 \times 10^{-2}\%$	318,258	$1 \times 10^{-3}\%$	318,258
30	333,100	$1 \times 10^{-2}\%$	333,098	$1 \times 10^{-3}\%$	333,099
40	349,391	$1 \times 10^{-2}\%$	349,385	$1 \times 10^{-6}\%$	349,385
50	365,162	$1 \times 10^{-2}\%$	365,151	$1 \times 10^{-3}\%$	365,154
60	379,243	$1 \times 10^{-2}\%$	379,227	$1 \times 10^{-3}\%$	379,227
70	391,186	$1 \times 10^{-2}\%$	391,167	$1 \times 10^{-3}\%$	391,167
80	400,987	$1 \times 10^{-2}\%$	400,965	$1 \times 10^{-3}\%$	400,971
90	408,854	$1 \times 10^{-2}\%$	408,832	$1 \times 10^{-3}\%$	408,832
100	415,076	$1 \times 10^{-2}\%$	415,052	$1 \times 10^{-3}\%$	415,052
110	501,939	$1 \times 10^{-2}\%$	501,87	$1 \times 10^{-3}\%$	501,863
120	423,726	$1 \times 10^{-2}\%$	423,702	$1 \times 10^{-3}\%$	423,703
130	426,647	$1 \times 10^{-2}\%$	426,624	$1 \times 10^{-3}\%$	426,626
140	428,895	$1 \times 10^{-2}\%$	428,872	$1 \times 10^{-3}\%$	428,879

A comparação entre os métodos propostos por Nahla e Zayed, 2010, Silva et al., 2014, e o MDD foi realizada considerando-se o desvio percentual relativo, **d**. Ao comparar-se o MDD com os resultados de Nahla e Zayed, 2010, tanto a temperatura como a densidade de potência, não apresentam desvio superior a 0,001%. Da mesma forma comparar-se os resultados do MDD com os resultados obtidos por Silva et al., 2014 os desvios são

inferiores a 0,001%. Concluí-se, então, que a solução obtida por meio do MDD é consoante com as demais na literatura.

3.1.3 $\rho = 0, 2\beta$

Tabela 3.5: $\mathcal{P}(t)$ para o caso $\rho = 0, 2\beta$

Tempo(s)	Nahla e Zayed, 2010	d	Silva et al., 2014	d	Método Proposto
0	10,000000	-	10,000000	-	10,000000
10	11,270597	$1 \times 10^{-2}\%$	11,270244	$1 \times 10^{-4}\%$	11,270245
20	12,094137	$1 \times 10^{-2}\%$	12,093458	$1 \times 10^{-4}\%$	12,093461
30	12,402006	$1 \times 10^{-2}\%$	12,401070	$1 \times 10^{-4}\%$	12,401071
40	12,220168	$1 \times 10^{-2}\%$	12,219068	$1 \times 10^{-4}\%$	12,219072
50	11,639050	$1 \times 10^{-2}\%$	11,637935	$1 \times 10^{-4}\%$	11,637939
60	10,777035	$1 \times 10^{-2}\%$	10,776036	$1 \times 10^{-4}\%$	10,776041
70	9,750800	$1 \times 10^{-2}\%$	9,749974	$1 \times 10^{-4}\%$	9,749974
80	8,658279	$1 \times 10^{-2}\%$	8,657563	$1 \times 10^{-4}\%$	8,657563
90	7,572253	$1 \times 10^{-2}\%$	7,571768	$1 \times 10^{-4}\%$	7,571768

Tabela 3.6: $T(t)$ expressa em $[K]$ para o caso $\rho = 0, 2\beta$

Tempo(s)	Nahla e Zayed, 2010	d	Silva et al., 2014	d	Método Proposto
0	300,000	-	300,000	-	300,000
10	305,333	$1 \times 10^{-2}\%$	305,333	$1 \times 10^{-4}\%$	305,333
20	311,195	$1 \times 10^{-2}\%$	311,195	$1 \times 10^{-4}\%$	311,1953
30	317,341	$1 \times 10^{-2}\%$	317,341	$1 \times 10^{-4}\%$	317,341
40	323,515	$1 \times 10^{-2}\%$	323,514	$1 \times 10^{-4}\%$	323,515
50	329,494	$1 \times 10^{-2}\%$	329,493	$1 \times 10^{-4}\%$	329,494
60	335,107	$1 \times 10^{-2}\%$	335,105	$1 \times 10^{-4}\%$	335,106
70	340,244	$1 \times 10^{-2}\%$	340,241	$1 \times 10^{-4}\%$	340,242
80	344,847	$1 \times 10^{-2}\%$	344,844	$1 \times 10^{-4}\%$	344,845
90	348,904	$1 \times 10^{-2}\%$	348,889	$1 \times 10^{-4}\%$	348,896

A comparação entre os métodos propostos por Nahla e Zayed, 2010, Silva et al., 2014, e o MDD foi realizada considerando-se o desvio percentual relativo, **d**. Ao comparar-se o MDD com os resultados referentes à Nahla e Zayed, 2010 o desvio superior a 0,01%. E ao comparar-se os resultados do MDD com os resultados obtidos por Silva et al., 2014 os desvios são inferiores a 0,0001%. Concluí-se, então, que a solução obtida por meio do MDD é consoante com as demais na literatura.

3.2 Casos Considerando Seis Grupos de Precursores

Nesta secção comparamos os resultados da metodologia proposta com os resultados obtidos por Leite et al., 2016. Os resultados obtidos por Leite et al., 2016 são oriundos de uma solução analítica explícita desenvolvida para as equações de cinética pontual de nêutrons em sua formulação integral, esse método foi nomeado por seus autores como ITS2 Leite et al., 2014.

Assume-se para esses testes que a retroalimentação de temperatura é proporcional à densidade de nêutrons integrada, que por sua vez é proporcional à energia liberada por fissão dado um certo Λ , assim a reatividade será representada por:

$$\rho(t) = A(t) - B \int_{t_0}^t n(t') dt'. \quad (3.1)$$

Segundo Leite et al., 2016 duas formas de retroalimentação são consideradas tal como simularemos a seguir.

3.2.1 Inserção de degrau reatividade

Uma inserção de reatividade tipo degrau ou salto, que atende ao modelo adiabático, cuja formulação foi proposta em Hetrick, 1971, sendo descrita pelas equações:

$$\rho(t) = \rho_0 - \alpha[T(t) - T_0] \quad (3.2)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = Hn(t), \quad (3.3)$$

em que T é a temperatura do reator no tempo t , T_0 é a temperatura inicial, α o coeficiente de temperatura da reatividade, $H = AK_c$, com K_c na unidade $K/Mw.s$, é o recíproco da capacidade térmica do núcleo do reator, A , com unidades de Mw/cm^3 , é a constante que relaciona à densidade de nêutrons com a potência do reator.

Tal como em Leite et al., 2016, todas as simulações iniciam com o sistema crítico em $t = 0$, e com $n_0 = 1 \frac{\text{neutron}}{\text{cm}^3}$. Os parâmetros referentes aos grupos de precursores de nêutrons atrasados são os parâmetros de um reator de U^{235} – grafite, como seguem:

Tabela 3.7: Constantes β_i e λ_i para um Reator U^{235} – grafite

Grupo	1	2	3	4	5	6
β_i	0,00021	0,0014	0,00141	0,00255	0,00074	0,00027
$\lambda_i(s^{-1})$	0,0124	0,0305	0,111	0,301	1.13	3,0

$$e \Lambda = 5,0 \times 10^{-5}s$$

Tomando uma versão adaptada ao método recursivo da equação (3.2), $\alpha = 5 \times 10^{-5}K^{-1}$ e $H = 0,05Kcm^3s^{-1}$ e considerando inserções de reatividade de 1,0\$, 1,5\$, e 2,0\$, analisamos os picos na densidade de nêutrons e o tempo t , no qual os picos ocorrem.

A tabela 3.8 apresenta o resultado obtido por um determinado método, e na linha seguinte ao resultado o desvio percentual relativo entre o resultado obtido pelo MDD e o método analisado. Nesta simulação foram considerados o método ITS2 de Leite et al., 2016, CATS de Ganapol et al., 2012, ET-BE, ET-CN, e NAM de Nahla, 2011.

Tabela 3.8: Pico, e tempo respectivo para $\rho = 1,0\%$ e $\rho = 1,5\%$.

Método	ρ_0	1,0\$		1,5\$	
		Pico em $n(t) \times 10^2$	Tempo (s)	Pico em $n(t) \times 10^4$	Tempo (s)
ITS2		8,078681	0,953	4,302460	0,168
d		$1 \times 10^{-9}\%$	$1 \times 10^{-7}\%$	$1 \times 10^{-9}\%$	$1 \times 10^{-7}\%$
CATS		8,078681	0,953	4,302461	0,168
d		$1 \times 10^{-6}\%$	$1 \times 10^{-3}\%$	$1 \times 10^{-6}\%$	$1 \times 10^{-4}\%$
ET-BE		8,051905	0,955	4,118377	0,168
d		$3 \times 10^{-6}\%$	$2 \times 10^{-3}\%$	$2 \times 10^{-1}\%$	$1 \times 10^{-4}\%$
ET-CN		8,065291	0,954	4,209339	0,168
d		$4 \times 10^{-4}\%$	$1 \times 10^{-3}\%$	$1 \times 10^{-4}\%$	$1 \times 10^{-4}\%$
NAM		8,078666	0,953	4,302593	0,168
d		$5 \times 10^{-6}\%$	$1 \times 10^{-8}\%$	$3 \times 10^{-5}\%$	$2 \times 10^{-8}\%$
MDD		8,078681	0,953	4,302460	0,168

Nas comparações apresentadas na tabela 3.8 os maiores desvios são encontrados ao comparar-se o MDD com metodologias exclusivamente numéricas como ET-BE e ET-CN [Nahla, 2011], destacando-se o maior desvio quando comparados MDD e ET-CN. Já ao comparar-se os resultados obtidos via MDD a outros métodos de natureza analítica ou semi-analítica, ITS2 [Leite et al., 2016] e NAM [Nahla, 2011], os desvios tornam-se inferiores a 0,0000001%. Dessa forma concluí-se que a solução obtida por meio do MDD é válida.

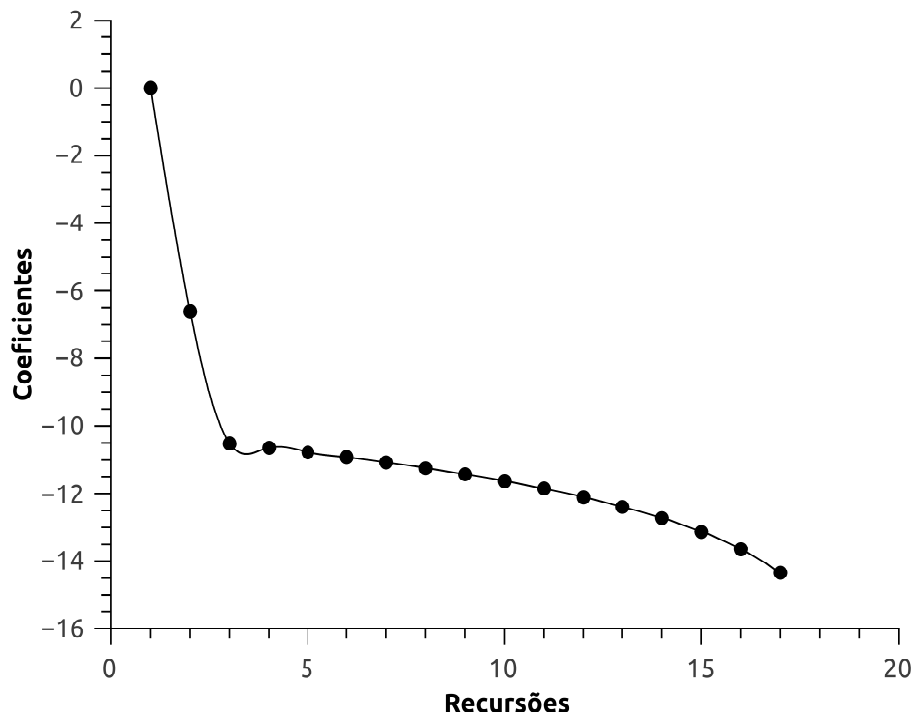


Figura 3.1: Lyapunov X Recursões, no tempo de pico quando $\rho = 1\beta$.

A figura 3.1 apresenta a relação entre o coeficiente de Lyapunov e as recursões necessárias para que o critério de parada fosse atingido. Tal como esperado a recursão inicial apresenta coeficiente nulo e as demais valores decrescente, o que indica uma solução com convergência exponencialmente estável [Boichenko et al., 2005].

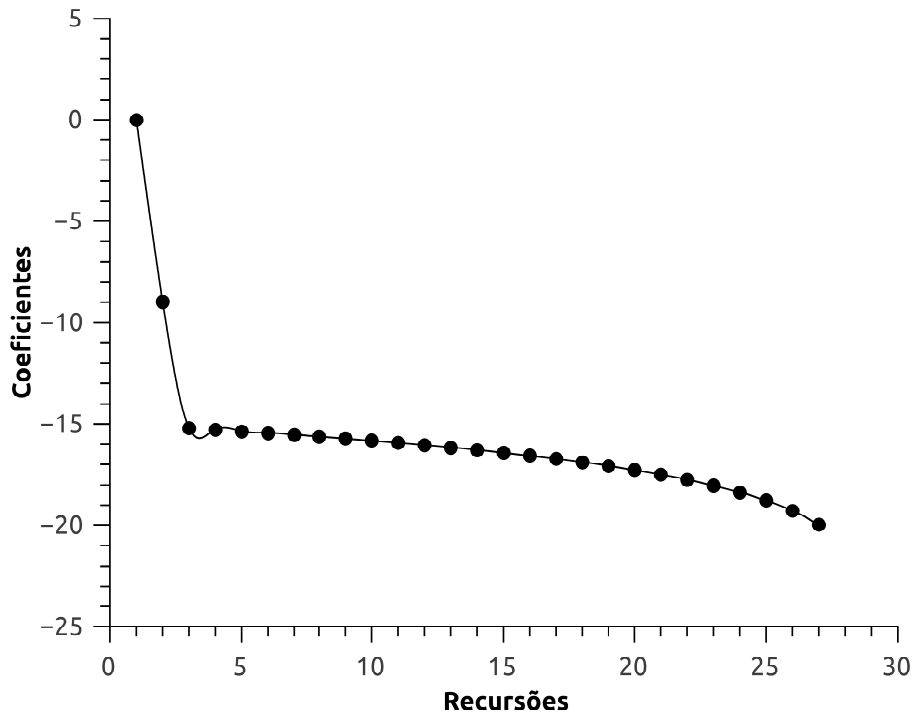


Figura 3.2: Lyapunov X Recursões, no tempo de pico quando $\rho = 1,5\beta$.

A figura 3.2 apresenta a relação entre o coeficiente de Lyapunov e as recursões necessárias para que o critério de parada fosse atingido. Tal como esperado a recursão inicial apresenta coeficiente nulo e as demais valores decrescente, o que indica uma solução com convergência exponencialmente estável [Boichenko et al., 2005].

Tabela 3.9: Pico, e tempo respectivo para $\rho = 2,0\beta$.

Method	ρ_0	2,0 β Pico em $n(t) \times 10^5$	Tempo (s)
ITS2		1,678456	0,098
d		$1 \times 10^{-9}\%$	$1 \times 10^{-7}\%$
CATS		1,678457	0,098
d		$1 \times 10^{-7}\%$	$1 \times 10^{-4}\%$
ET-BE		1,537353	0,098
d		$3 \times 10^{-9}\%$	$1 \times 10^{-4}\%$
ET-CN		1,606127	0,098
d		$1 \times 10^{-7}\%$	$1 \times 10^{-4}\%$
NAM		1,678566	0,098
d		$1 \times 10^{-7}\%$	$1 \times 10^{-4}\%$
MDD		1,678456	0,098

Nas comparações apresentadas na tabela 3.9 os maiores desvios são encontrados ao comparar-se o MDD com metodologias exclusivamente numéricas como ET-BE e ET-

CN [Nahla, 2011], destacando-se o maior desvio quando comparados MDD e ET-CN. Já ao comparar-se os resultados obtidos via MDD a outros métodos de natureza analítica ou semi-analítica, ITS2 [Leite et al., 2016] e NAM [Nahla, 2011], os desvios tornam-se inferiores a $0,0000001\%$. Dessa forma concluí-se que a solução obtida por meio do MDD é válida.

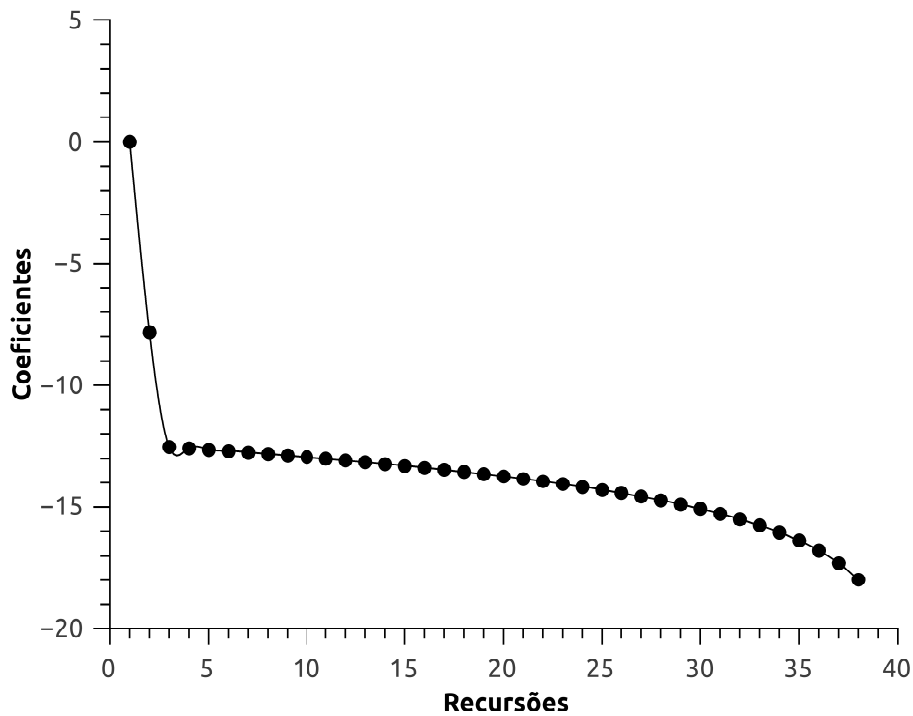


Figura 3.3: Lyapunov X Recursões, no tempo de pico quando $\rho = 2,0\beta$.

A figura 3.3 apresenta a relação entre o coeficiente de Lyapunov e as recursões necessárias para que o critério de parada fosse atingido. Tal como esperado a recursão inicial apresenta coeficiente nulo e as demais valores decrescente, o que indica uma solução com convergência exponencialmente estável [Boichenko et al., 2005].

Tabela 3.10: $\rho(t)$ na inserção tipo degrau.

$t(s)$	ITS2	ET-DE	ET-CN	NAM	Método Proposto
a) Reatividade inicial $\rho_0 = 1,0\%$					
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	-0,18629475	-0,18579	-0,18604	-0,18627	-0,18629475
20	-0,50622410	-0,50585	-0,50595	-0,50621	-0,50622410
30	-0,65360761	-0,65332	-0,65321	-0,65360	-0,65360761
40	-0,74109566	-0,74087	-0,74070	-0,74109	-0,74109566
50	-0,80009747	-0,79982	-0,80018	-0,80011	-0,80009747
60	-0,84276861	-0,84241	-0,84241	-0,84275	-0,84276861
70	-0,87491369	-0,87463	-0,87818	-0,87495	-0,87491369
80	-0,89973569	-0,89997	-0,89771	-0,89973	-0,89973569
90	-0,91920757	-0,91892	-0,91619	-0,91917	-0,91920757
100	-0,93464816	-0,93474	-0,93468	-0,93460	-0,93464816
b) Reatividade inicial $\rho_0 = 1,5\%$					
0	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
10	-0,83150232	-0,82008	-0,82562	-0,83141	-0,83150232
20	-1,0889530	-1,07899	-1,08380	-1,08887	-1,0889530
30	-1,0889530	-1,19961	-1,20381	-1,20895	-1,0889530
40	-1,2820939	-1,27331	-1,27732	-1,28202	-1,2820939
60	-1,3685687	-1,36068	-1,36469	-1,36848	-1,3685687
70	-1,3960384	-1,38849	-1,39177	-1,39597	-1,3960384
80	-1,4171735	-1,40904	-1,41025	-1,41713	-1,4171735
90	-1,4336473	-1,42606	-1,42874	-1,43365	-1,4336473
100	-1,4466059	-1,43869	-1,44722	-1,44647	-1,4466059
c) Reatividade inicial $\rho_0 = 2,0\%$					
0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
10	-1,3696327	-1,31740	-1,34201	-1,36886	-1,3696327
20	-1,6133379	-1,56502	-1,58776	-1,61285	-1,6133379
30	-1,7264678	-1,68012	-1,70182	-1,72608	-1,7264678
40	-1,7955834	-1,75046	-1,77101	-1,79534	-1,7955834
50	-1,8429912	-1,79866	-1,81841	-1,84274	-1,8429912
60	-1,8774959	-1,83328	-1,85537	-1,87729	-1,8774959
70	-1,9034436	-1,85932	-1,87842	-1,90317	-1,9034436
80	-1,9233303	-1,87896	-1,89690	-1,92341	-1,9233303
90	-1,9387568	-1,89498	-1,91538	-1,93893	-1,9387568
100	-1,9508278	-1,90635	-1,93386	-1,95060	-1,9508278

Nas comparações apresentadas na tabela 3.10 dada a consistência com os resultados anteriores os desvios não foram expressos, sendo esses: MDD-ITS2 não superior à $1 \times 10^{-7}\%$, MDD - ET-BE não superior à $1 \times 10^{-3}\%$, MDD - ET-CN não superior à $1 \times 10^{-3}\%$, e MDD - NAM não superior à $1 \times 10^{-5}\%$.

Tabela 3.11: Densidade de Nêutrons para $\rho_0 = 1,0\%$

$t(s)$	ITS2	Método Proposto	d
0	1,0	1,0	
10	$1,3203859643 \times 10^2$	$1,3203859643 \times 10^2$	$1 \times 10^{-9}\%$
20	$5,1699860947 \times 10^1$	$5,1699860947 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
30	$2,8174685361 \times 10^1$	$2,8174685361 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
40	$1,8146329995 \times 10^1$	$1,8146329995 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
50	$1,2779577032 \times 10^1$	$1,2779577032 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
60	$9,4749325010 \times 10^0$	$9,4749325010 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
70	$7,2444774937 \times 10^0$	$7,2444774937 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
80	$5,6462897002 \times 10^0$	$5,6462897002 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
90	$4,4568342546 \times 10^0$	$4,4568342546 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
100	$3,5501027660 \times 10^0$	$3,5501027660 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$

Nas comparações apresentadas na tabela 3.11 tem-se o resultado da densidade de nêutrons entre o MDD e o ITS2 [Leite et al., 2016] cujos desvios relativos percentuais não excedem $1 \times 10^{-9}\%$.

Tabela 3.12: Densidade de Nêutrons para $\rho_0 = 1,5\%$

$t(s)$	ITS2	Método Proposto	d
0	1,0	1,0	
10	$1,0791168320 \times 10^2$	$1,0791168320 \times 10^2$	$1 \times 10^{-9}\%$
20	$4,1604281275 \times 10^1$	$4,1604281275 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
30	$2,3298931496 \times 10^1$	$2,3298931496 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
40	$1,5303427495 \times 10^1$	$1,5303427495 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
50	$1,5303427495 \times 10^1$	$1,5303427495 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
60	$8,1010318590 \times 10^0$	$8,1010318590 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
70	$6,1826904592 \times 10^0$	$6,1826904592 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
80	$4,7933078196 \times 10^0$	$4,7933078196 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
90	$3,7556146293 \times 10^0$	$3,7556146293 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
100	$2,9660749515 \times 10^0$	$2,9660749515 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$

Nas comparações apresentadas na tabela 3.12 tem-se o resultado da densidade de nêutrons entre o MDD e o ITS2 [Leite et al., 2016] cujos desvios relativos percentuais não excedem $1 \times 10^{-9}\%$.

Tabela 3.13: Densidade de Nêutrons para $\rho_0 = 2,0\%$

$t(s)$	ITS2	Método Proposto	\mathbf{d}
0	1,0	1,0	
10	$1,0338085355 \times 10^2$	$1,0338085355 \times 10^2$	$1 \times 10^{-9}\%$
20	$3,9138869026 \times 10^1$	$3,9138869026 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
30	$2,2003777206 \times 10^1$	$2,2003777206 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
40	$1,4493671927 \times 10^1$	$1,4493671927 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
50	$1,0318611083 \times 10^1$	$1,0318611083 \times 10^1$	$1 \times 10^{-9}\%$
60	$7,6633192032 \times 10^0$	$7,6633192032 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
70	$5,8293953779 \times 10^0$	$5,8293953779 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
80	$4,4994270728 \times 10^0$	$4,4994270728 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
90	$3,5074226626 \times 10^0$	$3,5074226626 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$
100	$2,7551268864 \times 10^0$	$2,7551268864 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}\%$

Nas comparações apresentadas na tabela 3.13 tem-se o resultado da densidade de nêutrons entre o MDD e o ITS2 [Leite et al., 2016] cujos desvios relativos percentuais não excedem $1 \times 10^{-9}\%$.

3.2.2 Inserção de rampa compensada de reatividade

Uma inserção de reatividade tipo rampa apresentada por Keepin e Cox, 1960, tal caso é descrito pela equação:

$$\rho(t) = a(t - t_0) - b \int_0^t n(t) dt. \quad (3.4)$$

A primeira parte da equação (3.4) representa a inserção da reatividade, enquanto o último termo inclui $-b$, o coeficiente de desligamento, que representa a retroalimentação.

Tal como em Leite et al., 2016, nossos resultados são comparados com outros métodos disponíveis na literatura como o ET-BE, ET-CN e NAM de Nahla, 2011 e ainda com os resultados do algoritmo CATS de Ganapol et al., 2012.

Tal como em Leite et al., 2016, todas as simulações iniciam com o sistema crítico em $t = 0$, e com $n_0 = 1 \frac{\text{neutron}}{\text{cm}^3}$. Os parâmetros referentes aos grupos de precursores de nêutrons atrasados, são os parâmetros de um reator de U^{235} – *grafite*, como seguem:

Tabela 3.14: Constantes β_i e λ_i para um Reator U^{235} – grafite

Grupo	1	2	3	4	5	6
β_i	0,00021	0,0014	0,00141	0,00255	0,00074	0,00027
$\lambda_i(s^{-1})$	0,0124	0,0305	0,111	0,301	1.13	3,0

$$\text{e } \Lambda = 5,0 \times 10^{-5}s$$

A exemplo de Leite et al., 2016, testamos uma rampa de reatividade compensada, como definida na equação (3.4) considerando fixo o parâmetro $b = 10^{-11} \frac{cm^3}{s}$ e os parâmetros $a = 0,003s^{-1}$ e $a = 0,1s^{-1}$. Sendo $\Lambda = 5,0 \times 10^{-5}$.

A tabela 3.15 apresenta o resultado obtido por um determinado método, e na linha seguinte ao resultado o desvio percentual relativo entre o resultado obtido pelo MDD e o método analisado. Nesta simulação foram considerados o método ITS2 de Leite et al., 2016, e CATS de Ganapol et al., 2012.

Tabela 3.15: Pico, e tempo respectivo para $a = 0,003s^{-1}$

$$\text{e } b = 10^{-11} \frac{cm^3}{s}.$$

Método	Pico em $n(t) \times 10^9$	Tempo (s)
ITS2	5,114159	2,910582
d	$2 \times 10^{-8}\%$	$2 \times 10^{-9}\%$
CATS	5,114160	2,910582
d	$4 \times 10^{-5}\%$	0
MDD	5,114159	2,910582

Na tabela 3.15 vê-se o desvio entre MDD-ITS2 não superior à $1 \times 10^{-7}\%$, MDD - CATS não superior à $1 \times 10^{-4}\%$. O que indica boa concordância dos resultados obtidos pelo MDD com os métodos já disponíveis na literatura.

Tabela 3.16: Pico, e tempo respectivo para $a = 0, 1s^{-1}$ e $b = 10^{-11} \frac{cm^3}{s}$.

Método	Pico em $n(t) \times 10^9$	Tempo para primeiro pico
ITS2	$2,420381 \times 10^{11}$	0,2246
d	$1 \times 10^{-13}\%$	$1 \times 10^{-5}\%$
CATS	$2,420382 \times 10^{11}$	0,2241
d	$1 \times 10^{-6}\%$	$5 \times 10^{-4}\%$
MDD	$2,420381 \times 10^{11}$	0,2246

Na tabela 3.15 vê-se o desvio entre MDD-ITS2 não superior à $1 \times 10^{-5}\%$, MDD - CATS não superior à $1 \times 10^{-3}\%$. O que indica boa concordância dos resultados obtidos pelo MDD com os métodos já disponíveis na literatura. Porém também sugere que quanto maior a complexidade do problema proposto maiores serão os desvios obtidos com relação à métodos numéricos e maior será a quantidade de recursões para que se atinja a estabilidade.

Tabela 3.17: Densidade de nêutrons e reatividade com $a = 0, 003s^{-1}$.

Tempo(s)	Densidade de Nêutrons		Reatividade	
	ITS2	MDD	ITS2	MDD
0	1,0	1,0	0,0	0,0
0,50	$1,32466198 \times 10^0$	$1,32466198 \times 10^0$	$2,3255814 \times 10^{-1}$	$2,3255814 \times 10^{-1}$
1	$2,05319498 \times 10^0$	$2,05319498 \times 10^0$	$4,6511628 \times 10^{-1}$	$4,6511628 \times 10^{-1}$
1,5	$4,34723343 \times 10^0$	$4,34723343 \times 10^0$	$6,9767441 \times 10^{-1}$	$6,9767441 \times 10^{-1}$
2	$2,39206397 \times 10^1$	$2,39206397 \times 10^1$	$9,3023255 \times 10^{-1}$	$9,3023255 \times 10^{-1}$
2,5	$1,43897812 \times 10^4$	$1,43897812 \times 10^4$	$1,1627896 \times 10^0$	$1,1627896 \times 10^0$
2,7	$4,64194301 \times 10^6$	$4,64194301 \times 10^6$	$1,2555935 \times 10^0$	$1,2555935 \times 10^0$
2,8	$1,90528410 \times 10^8$	$1,90528410 \times 10^8$	$1,2945991 \times 10^0$	$1,2945991 \times 10^1$
2,9	$4,85958921 \times 10^9$	$4,85958921 \times 10^9$	$1,0594796 \times 10^0$	$1,0594796 \times 10^0$
3	$8,05709784 \times 10^8$	$8,05709784 \times 10^8$	$6,4672805 \times 10^1$	$6,4672805 \times 10^1$
4	$3,41334070 \times 10^8$	$3,41334070 \times 10^8$	$5,0440308 \times 10^1$	$5,0440308 \times 10^1$
5	$3,29326627 \times 10^8$	$3,29326627 \times 10^8$	$4,5283468 \times 10^1$	$4,5283468 \times 10^1$
10	$3,14593642 \times 10^8$	$3,14593642 \times 10^8$	$2,7934410 \times 10^1$	$2,7934410 \times 10^1$

Na tabela 3.17 tem-se o resultado da densidade de nêutrons e da reatividade comparadas entre o MDD e o ITS2 [Leite et al., 2016] cujos desvios relativos percentuais não excedem $1 \times 10^{-9}\%$.

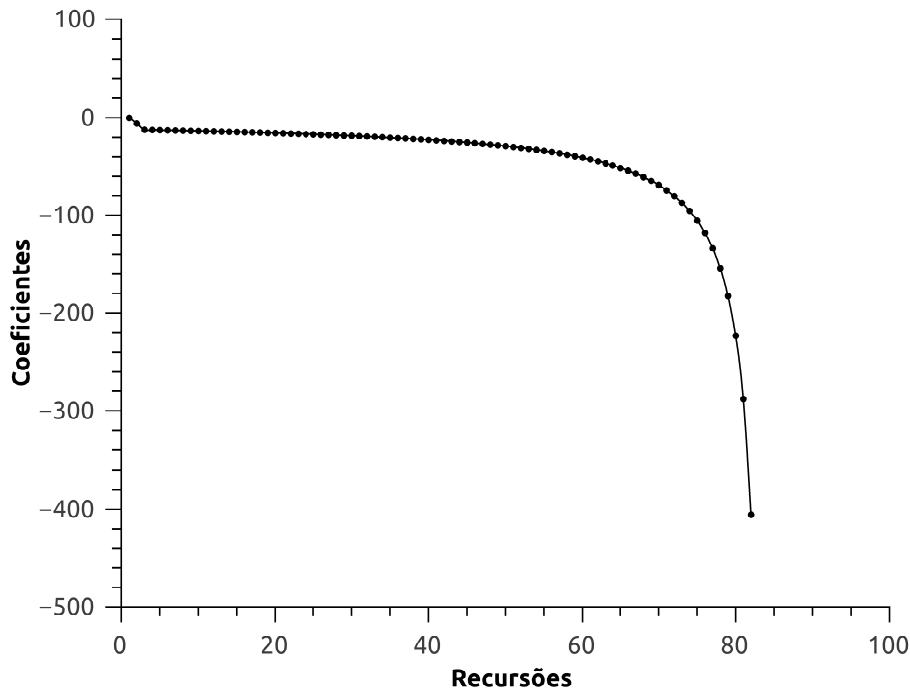


Figura 3.4: Lyapunov X Recursões, em $t = 2,9$, $a = 0,003s^{-1}$.

A figura 3.4 apresenta a relação entre o coeficiente de Lyapunov e as recursões necessárias para que o critério de parada fosse atingido. Tal como esperado a recursão inicial apresenta coeficiente nulo e as demais valores decrescente, o que indica uma solução com convergência exponencialmente estável [Boichenko et al., 2005].

Tabela 3.18: Densidade de nêutrons e reatividade com $a = 0,1s^{-1}$.

Tempo(s)	Densidade de Nêutrons		Reatividade	
	ITS2	MDD	ITS2	MDD
0	1,0	1,0	0,0	0,0
0,10	$2,47336582 \times 10^1$	$2,47336581 \times 10^1$	$1,5503876 \times 10^0$	$1,5503874 \times 10^0$
0,20	$7,23793564 \times 10^8$	$7,23793563 \times 10^8$	$3,0965097 \times 10^0$	$3,0965096 \times 10^0$
0,25	$1,17142935 \times 10^9$	$2,47336582 \times 10^1$	$1,1054677 \times 10^0$	$1,1054677 \times 10^0$
0,30	$8,16201288 \times 10^8$	$2,47336582 \times 10^1$	$3,8677301 \times 10^1$	$2,47336582 \times 10^1$
0,35	$1,40906577 \times 10^9$	$2,47336582 \times 10^1$	$3,0625229 \times 10^1$	$2,47336582 \times 10^1$
0,40	$3,75094850 \times 10^9$	$2,47336582 \times 10^1$	$9,0486870 \times 10^1$	$9,0486870 \times 10^1$
0,45	$1,43737950 \times 10^1$	$2,47336582 \times 10^1$	$1,0451878 \times 10^0$	$1,0451878 \times 10^0$
0,50	$9,94989324 \times 10^9$	$9,94989324 \times 10^9$	$7,2455590 \times 10^1$	$7,2455590 \times 10^1$
0,55	$8,15951149 \times 10^9$	$8,15951149 \times 10^9$	$8,7169094 \times 10^1$	$8,7169094 \times 10^1$
0,60	$1,14662071 \times 10^{10}$	$1,14662071 \times 10^{10}$	$8,7408917 \times 10^1$	$8,7408917 \times 10^1$
0,65	$1,00050563 \times 10^{10}$	$1,00050563 \times 10^{10}$	$7,9865817 \times 10^1$	$7,9865817 \times 10^1$
0,70	$9,76438192 \times 10^9$	$9,76438192 \times 10^9$	$8,2555390 \times 10^1$	$8,2555390 \times 10^1$
0,80	$1,00855770 \times 10^{10}$	$1,00855770 \times 10^{10}$	$7,9324430 \times 10^1$	$7,9324430 \times 10^1$
0,90	$1,01532717 \times 10^{10}$	$1,01532717 \times 10^{10}$	$7,8014114 \times 10^1$	$7,8014114 \times 10^1$
1,00	$1,01042420 \times 10^{10}$	$1,01042420 \times 10^{10}$	$7,6207120 \times 10^1$	$7,6207120 \times 10^1$

Na tabela 3.18 tem-se o resultado da densidade de nêutrons e da reatividade com-

paradas entre o MDD e o ITS2 [Leite et al., 2016] cujos desvios relativos percentuais não excedem $1 \times 10^{-9}\%$.

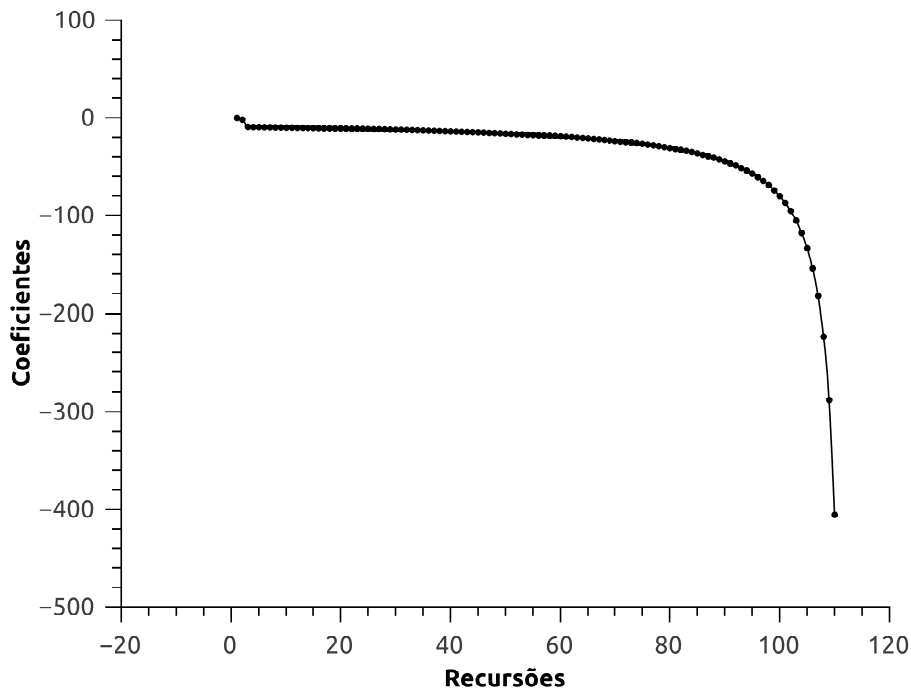


Figura 3.5: Lyapunov X Recursões, em $t = 0,5$, $a = 0,1s^{-1}$.

A figura 3.5 apresenta a relação entre o coeficiente de Lyapunov e as recursões necessárias para que o critério de parada fosse atingido. Tal como esperado a recursão inicial apresenta coeficiente nulo e as demais valores decrescente, o que indica uma solução com convergência exponencialmente estável [Boichenko et al., 2005].

Cumprе ressaltar que, tanto na figura 3.4 quanto na figura 3.5, uma tendência assintótica revela-se, o que indica não apenas a conformidade com os resultados da literatura, já estabelecida pelos desvios relativos percentuais, mas a tendência a solução exata mediante o aumento do número de recursões. Sendo que isso pode ser alcançado manipulando-se o critério de parada da simulação.

4 MODELAGEM DO PROBLEMA ESTOCÁSTICO

4.1 Estudo dos Efeitos Causados nas ECPN por Flutuações Estocásticas

4.1.1 Hipóteses para a inserção das flutuações

Considerando a população total de nêutrons e as concentrações de precursores de nêutrons atrasados, como descritas por processos estocásticos e variando randomicamente com o tempo, e considerando essas variações baseadas em um processo de Wiener sobre $[0, T]$ é uma variável aleatória, $W(t)$ que depende continuamente de $t \in [0, T]$ e que satisfaz as três condições definidas por Higham, 2001:

- $W(0)=0$ com probabilidade 1 ;
- Para $0 \leq s \leq t \leq T$ a variável aleatória dada pelo incremento $W(t) - W(s)$ tem distribuição normal com média 0 e variância dada por $t - s$, que é equivalente a dizer $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s}N(0, 1)$
- Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$ os incrementos $W(t) - W(s)$ e $W(v) - W(u)$ são independentes.

Uma vez que o objetivo é a aplicação computacional, é necessário que seja considerada uma versão discretizada do processo de Wiener. Podendo então descrever-se dessa forma: (i) tomando $W(t)$ com valores arbitrários ao longo do domínio $[0, T]$, de forma a $\delta t = \frac{T}{N}$ e $W(t_i)$ com $t_i = i\delta t$, mantendo-se a primeira condição do caso contínuo, (ii) da segunda e terceira condições vem que $W_i = W_{i-1} + dW_i$, em que cada incremento dW_i é independente dos demais e também aleatório. Sendo dado por $dW_i = \sqrt{\delta t}N(0, 1)$.

Dessa forma, quando considera-se, tal como Hayes e Allen, 2005, o intervalo Δt suficientemente pequeno para que apenas um evento ocorra em cada Δt , caso haja fonte haverá quatro classes de eventos possíveis, no caso da ausência de fonte haverá três classes de eventos possíveis.

No caso da ausência de fonte externa teremos o evento de perda de nêutrons; os eventos de produção por decaimento, cujo o número total dependerá da quantidade de grupos de precursores de nêutrons atrasados usados na modelagem, os eventos de transformação dos precursores de nêutrons atrasados em nêutrons. Quando na presença

de uma fonte surgirá a quarta categoria de eventos definida pela quantidade de nêutrons emitida na fonte considerada na modelagem.

4.1.2 As ECPN estocásticas: dedução, um grupo de precursores

Para que se possa, posteriormente, por indução, obter um sistema para uma quantidade qualquer de precursores, inicia-se obtendo as ECPN estocásticas considerando apenas um grupo de precursores. Descrevendo as ECPN da seguinte forma: :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t) &= \left\{ - \left[\frac{-(\rho_0 + \rho(t)) + 1 - \alpha}{\Lambda} \right] + \left[\frac{1 - \alpha - \beta}{\Lambda} \right] \right\} n(t) + \lambda_1 C_1(t) \\ \frac{d}{dt}C_1(t) &= \frac{\beta_1}{\Lambda} n(t) - \lambda_1 C_1(t) \end{aligned}, \quad (4.1)$$

em que $\alpha = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a k_\infty} \approx \frac{1}{\nu}$.

4.1.2.1 Os eventos possíveis

Seja $[\Delta n(t), \Delta C_1(t)]^T$ um evento possível ocorrido no intervalo de tempo Δt , assumindo os eventos normalmente distribuídos, temos quatro possibilidades para o evento $[\Delta n(t); \Delta C_1(t)]^T$:

$$E_1 = \begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -1 + (1 - \beta)\nu \\ \beta_1\nu \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

e

$$E_4 = \begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

assim, o primeiro evento (E_1) denota a morte dos nêutrons, o segundo evento (E_2) representa o nascimento de $-1 + (1 - \beta)\nu$ nêutrons prontos e de $\beta_1\nu$ precursores de nêutrons atrasados, (E_3) terceiro evento possível representa a transformação de um nêutron em um precursor de nêutrons atrasados e, finalmente, (E_4) representa o nascimento de um nêutron na fonte.

4.1.2.2 Probabilidade de ocorrência dos eventos

As probabilidades dos eventos anteriores são dadas respectivamente por:

$$P(\Delta E_1) = n(t)(\Delta t)d, \quad (4.6)$$

$$P(\Delta E_2) = n(t)(\Delta t)b = \frac{1}{\nu\Lambda}, \quad (4.7)$$

$$P(\Delta E_3) = C_1(t)(\Delta t)\lambda_1, \quad (4.8)$$

e

$$P(\Delta E_4) = q(t)\Delta t, \quad (4.9)$$

em que $b = \frac{1-\alpha-\beta}{\Lambda(-1+(1-\beta)\nu)}$, cujo denominador representa os número de nêutrons novos produzidos em cada fissão; lembrando $\alpha = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a k_\infty} \approx \frac{1}{\nu}$ que representa o número médio de nêutrons produzidos por fissão, o produto $\lambda_1 C_1(t)$ representa a taxa com que os precursores são transformados e finalmente $d = \frac{-\rho+1-\alpha}{\Lambda}$

4.1.2.3 Determinação da variância e desvio padrão

$$E \left(\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \right) = \sum_{k=1}^4 P_k \left(\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix}_k \right) = \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 + \rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda_1 C_1(t) \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} - \lambda_1 C_1(t) \end{bmatrix} \Delta t \quad (4.10)$$

$$Var \left(\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \right) = E \left(\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n(t) & \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \right) - \left(E \left(\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \right) \right)^2 \quad (4.11)$$

$$Var \left(\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \right) = \sum_{k=1}^4 P_k \begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n(t) & \Delta C_1(t) \end{bmatrix} = \hat{B}(t)\Delta t \quad (4.12)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \gamma n(t) + \lambda_1 C_1(t) & \frac{\beta_1}{\Lambda}(-1(1-\beta)\nu)n(t) - \lambda_1 C_1(t) \\ \frac{\beta_1}{\Lambda}(-1(1-\beta)\nu)n(t) - \lambda_1 C_1(t) & \frac{\beta^2 \nu}{\Lambda} n(t) + \lambda_1 C_1(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

em que $\gamma = \frac{-1-(\rho_0+\rho(t))+2\beta+(1-\beta)^2\nu}{\Lambda}$.

Fazendo uso de teorema do limite obtém-se que

$$\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} = E \left(\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \right) + \sqrt{\text{Var} \left(\begin{bmatrix} \Delta n(t) \\ \Delta C_1(t) \end{bmatrix} \right)} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

na qual $\eta_1, \eta_2 \sim N(0, 1)$, isto é, η_1, η_2 são valores escolhidos a partir de uma distribuição normal.

Os resultados acima levam a

$$\begin{bmatrix} n(t + \Delta t) \\ C_1(t)(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 + \rho(t) - \beta}{\Lambda} + \lambda_1 C_1(t) \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} n(t) - \lambda_1 C_1(t) \end{bmatrix} \Delta t + \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta t + (\hat{B}(t))^{\frac{1}{2}} \sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

em que $(\hat{B}(t))^{\frac{1}{2}}$ é a raiz quadrada da matriz $\hat{B}(t)$, obtida por meio de diagonalização. Fazendo $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \hat{B}^{\frac{1}{2}} \frac{d\vec{W}}{dt} \quad (4.16)$$

em que $\mathbf{W} = [W_1, W_2]^T$ são processos de Wiener.

4.1.3 As ECPN estocásticas: número qualquer de precursores

Pode-se, da formulação acima, inferir a versão geral da formulação anterior

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_m(t) \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \hat{B}^{\frac{1}{2}} \frac{d\vec{W}}{dt}, \quad (4.17)$$

em que

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_m}{\Lambda} & 0 & \dots & 0 & -\lambda_m \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \zeta & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_1 & b_{1,1} & b_{2,3} & \dots & b_{2,m+1} \\ a_2 & b_{3,2} & b_{2,2} & \dots & b_{m,m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_{m+1,2} & \dots & b_{m+1,m} & b_{m,m} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

em que

$$\zeta = \gamma n(t) \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t)$$

em que $\gamma = \frac{-1 - (\rho_0 + \rho(t)) + 2\beta + (1-\beta)^2 \nu}{\Lambda}$ e

$$a_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} (-1 + (1 - \beta)) n(t) - \lambda_i C_i,$$

$$b_{i,j} = \frac{\beta_{i-1} \beta_{j-1} \nu}{\Lambda} n(t) + \delta_{ij} \left(\frac{\beta_i^2 \nu}{\Lambda} n(t) + \lambda_i C_i(t) \right).$$

4.1.4 As ECPN caso especial: seis grupos de precursores

A formulação postulada por Hayes e Allen, 2005 descreve a variação da população e pode ser interpretada como um equilíbrio entre mortes, nascimentos e transformações de nêutrons no sistema. Esses eventos têm suas probabilidades determinadas pelos parâmetros físicos do modelo, tal como a fração total e parcial de nêutrons com atraso, a fração de nêutrons atrasados de cada grupo de precursores, a constante de decaimento de cada grupo e o número médio de nêutrons produzidos em cada fissão.

Com base nesse conceito Hayes e Allen, 2005 foram capazes de expressar os valores esperados e as probabilidades de cada evento. Assumindo o intervalo de tempo suficientemente pequeno, de tal modo que apenas um evento ocorre, obtém-se um sistema de equações diferenciais estocásticas de Itô dado por:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{y}(t)] = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{y}(t) + \mathbf{Q}(t) + \hat{\mathbf{B}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\mathbf{W}}{dt}, \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_6(t) \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{B}}^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_6 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

em que

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\rho-\beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & \dots & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

e

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \zeta & a_1 & a_2 & \dots & a_6 \\ a_1 & b_{1,1} & b_{2,3} & \dots & b_{2,6} \\ a_2 & b_{3,2} & b_{2,2} & \dots & b_{3,6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_6 & b_{1,2} & \dots & b_{5,6} & b_{6,6} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

na qual

$$\zeta = \gamma n(t) \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad \gamma = \frac{-1 - (\rho_0 + \rho(t)) + 2\beta + (1 - \beta)^2 \nu}{\Lambda},$$

$$a_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} (-1 + (1 - \beta)) n(t) - \lambda_i C_i(t),$$

e

$$b_{i,j} = \frac{\beta_{i-1} \beta_{j-1} \nu}{\Lambda} n(t) + \delta_{ij} \left(\frac{\beta_i^2 \nu}{\Lambda} n(t) + \lambda_i C_i(t) \right).$$

O último termo em (4.21) representa o vetor dos processos de Wiener.

4.2 Solução das ECPN Estocásticas via MDD

Cumpramos ressaltar que a matriz $\hat{\mathbf{B}}$ depende tanto da população de nêutrons como das concentrações de precursores de nêutrons atrasados. Portanto a solução proposta para esse problema pode ser obtida por uma dupla decomposição, como discutido a seguir. Na primeira fase, a solução do puramente determinística problema Da Silva et al., 2014 é obtido por processos já descritos na seção anterior. Uma vez que a solução \mathbf{y} seja conhecida, a matriz $\hat{\mathbf{B}}$ pode ser determinada em uma sequência de intervalos discretos de tempo, de tal forma que cada um de seus componentes seja conhecido em cada intervalo de tempo. A fim de obter uma raiz quadrada da matriz $\hat{\mathbf{B}}$, usa-se o fato de que ela é uma matriz simétrica, em seguida recorre-se a sua diagonalização.

Quando considera-se um intervalo de tempo específico a função $Q(t)$ é conhecida,

assim é possível aplicar esquema de decomposição análogo ao usado no modelo determinístico, cuja inicialização da recursão e o esquema recursivo são dados por:

$$\frac{d\mathbf{y}_0(t)}{dt} - \Omega\mathbf{y}_0(t) = 0 \quad e \quad \frac{d\mathbf{y}_i(t)}{dt} - \Omega\mathbf{y}_i(t) = \Xi(t)\mathbf{y}_{i-1}(t) + \mathcal{F}, \quad (4.24)$$

em que $\mathcal{F} = \mathcal{Q}(t) + \hat{\mathbf{B}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\mathbf{W}}{dt}$ constantes em cada intervalo de tempo.

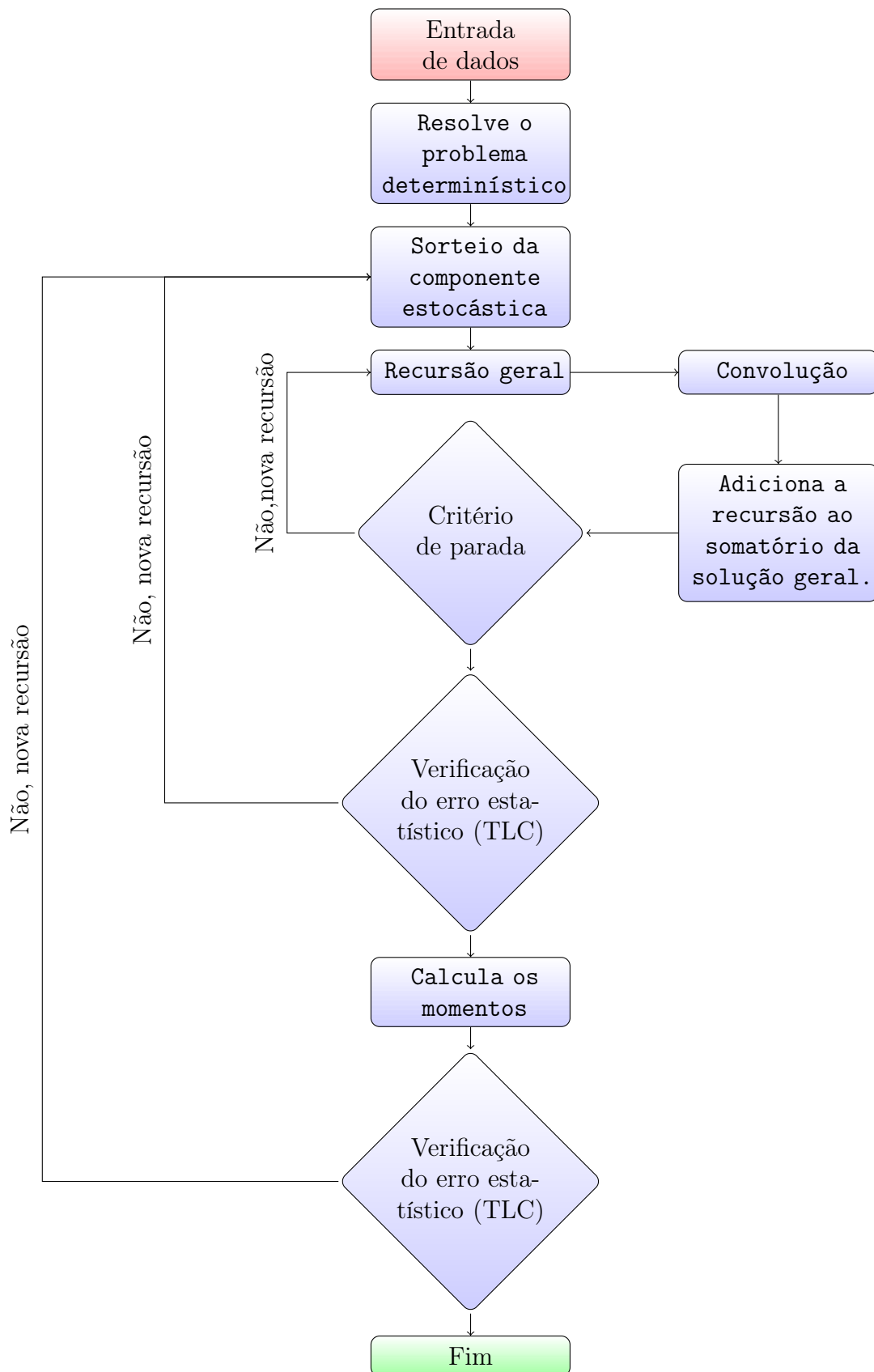


Figura 4.1: Fluxograma referente à computação do MDD no caso estocástico

5 RESULTADOS DA MODELAGEM ESTOCÁSTICA

Para a validação dos resultados dos testes preliminares utiliza-se o Método de Monte Carlo, o Método do PCA estocástico de Hayes e Allen [2005], a aproximação de Euler-Maruyama Ray [2012], uma formulação puramente determinística do Método da Decomposição proposta por Petersen [2011] e a metodologia proposta enquanto uma variação do já proposto por Da Silva et al. [2014]. Refere-se aqui ao método de Monte Carlo matemático, isto é, são colecionadas diversas soluções das equações diferenciais estocásticas de Itô, e partindo dessa coleção de soluções (histórias), são avaliados a média e a variância da distribuição de soluções. Seria referido como Monte Carlo físico, aquele em que, diversas partículas fossem acompanhadas ao longo de seus processos de decaimento e interação no núcleo, e os dados referente a cada partícula fossem considerados na formação da distribuição da solução.

As simulações de Monte Carlo e da metodologia aqui proposta tem como critério de parada o Teorema do Limite Central, exigindo em todas as simulações 95% de confiança com 0,05% de erro estatístico.

5.1 Reatividades Constantes

5.1.1 Primeiro teste

O primeiro teste preliminar da solução proposta, é sumariamente uma reprodução dos resultados obtidos por Hayes e Allen [2005]. Este teste consiste em um problema de reatividade subcrítica, constante, e considerando apenas um grupo de precursores; portanto um problema livre de seu caráter rígido. Cujos parâmetros físicos são $\lambda_1 = 0,1$, $\beta_1 = 0,005$, $\nu = 2,5$, $q = 200$, $\Lambda = \frac{2}{3}$, e $\rho = -\frac{1}{3}$. Com condição inicial $\mathbf{x}(0) = [400, 300]^T$, a simulação foi executada por dois segundos.

Tabela 5.1: Resultados para um grupo de precursores e reatividade constante.

	Monte Carlo	PCA estocástico	Aproximação
		Hayes e Allen [2005]	Euler-MaruyamaRay [2012]
$E(n(2))$	400,032	395,32	412,23
$\sigma(n(2))$	27,311	29,411	34,391
$E(c_1(2))$	300,01	300,67	315,96
$\sigma(c_1(2))$	7,807	8,3564	8,2656
		Modelo	MDD
		Determin.Petersen [2011]	
$E(n(2))$		412,13	402,350
$\sigma(n(2))$		–	28,610
$E(c_1(2))$		315,93	305,84
$\sigma(c_1(2))$		–	7,924

Para que fosse atingido o critério de parada foram necessárias 1000 histórias.

5.1.2 Segundo teste

Esse teste utiliza seis grupos de precursores, e reatividades constantes, crítica e super crítica. Cumpre ressaltar que o modelo de cinética não é o mais indicado para a análise de transientes mediante uma reatividade super crítica. Tal, contudo, um teste foi executado com objetivo de verificar a capacidade de metodologia proposta de reproduzir, ou aproximar-se da reprodução, de resultados da literatura. Usando os parâmetros físicos propostos em Hetrick [1971] $\beta = [0, 007]$, $\nu = 2, 5$, $\Lambda = 0, 00002$, $q = 0$, $\lambda_i = [0, 0127; 0, 0317; 0, 115; 0, 311; 1, 4; 3, 87]$, $\beta_i = [0, 000266; 0, 001491; 0, 001316; 0, 002849; 0, 000896; 0, 000182]$, $m = 6$, com condição inicial dada por

$$\mathbf{x}(0) = 100 \left[1, \frac{\beta_1}{\lambda_{1l}}, \frac{\beta_2}{\lambda_{2l}}, \frac{\beta_3}{\lambda_{3l}}, \frac{\beta_4}{\lambda_{4l}}, \frac{\beta_5}{\lambda_{5l}}, \frac{\beta_6}{\lambda_{6l}} \right]^T.$$

Tabela 5.2: Resultado para reatividade subcrítica, $\rho = 0.003$.

	Monte Carlo	PCA estocástico	Aproximação
		Hayes e Allen [2005]	Euler-MaruyamaRay [2012]
$E(n(0.1))$	183.04	186.31	208.6
$\sigma(n(0.1))$	168.79	164.16	255.95
$E(\sum_{i=1}^6 c_i(0.1))$	4.478×10^5	4.491×10^5	4.498×10^5
$\sigma(\sum_{i=1}^6 c_i(0.1))$	1495.72	1917.2	1233.38
		Modelo Determin.	MDD
		Petersen [2011]	
$E(n(0.1))$		200.005	187.05
$\sigma(n(0.1))$		–	167.83
$E(\sum_{i=1}^6 c_i(0.1))$		4.497×10^5	4.488×10^5
$\sigma(\sum_{i=1}^6 c_i(0.1))$		–	1475.55

Para que fosse atingido o critério de parada foram necessárias novamente 1000 histórias.

Tabela 5.3: Resultado para reatividade supercrítica, $\rho = 0.007$.

	Monte Carlo	PCA estocástico Hayes e Allen [2005]	Aproximação Euler-MaruyamaRay [2012]
$E(n(0.001))$	135.66	134.55	139.568
$\sigma(n(0.001))$	93.376	91.242	92.042
$E(\sum_{i=1}^6 c_i(0.001))$	4.464×10^5	4.694×10^5	4.463×10^5
$\sigma(\sum_{i=1}^6 c_i(0.001))$	16.226	19.444	6.071
		Modelo Determin. Petersen [2011]	MDD
$E(n(0.001))$		139,61	135.86
$\sigma(n(0.001))$		–	93.210
$E(\sum_{i=1}^6 c_i(0.001))$		4.463×10^5	4.463×10^5
$\sigma(\sum_{i=1}^6 c_i(0.001))$		–	17.845

Para esse teste foram necessárias 5000 histórias até que fosse atingido o critério de parada.

As comparações iniciais apresentadas nessa seção indicam que os resultados do modelo estocástico são ligeiramente mais baixos que os do modelo determinístico. E o resultados referentes aos desvio padrão das amostras, sendo legitimados pelo TLC, apontam o fato que as amostras (histórias) individualmente tem comportamentos muito distintos, porém quando considerado o total das histórias que compõem a distribuição o comportamento do modelo é similar ao do modelo determinístico.

5.2 Reatividades Dependentes do Tempo

5.2.1 Reatividade linear

Os dois exemplos a seguir modelam uma reatividade em rampa $\rho(t) = at$ para um reator nuclear térmico. Os parâmetros físicos considerados são: $\Lambda = 0,00001$, $n(0) = 1,0$, e $\beta = 6,403 \times 10^{-3}$, com β_i e λ_i .

Grupo	1	2	3	4	5	6
$\beta_i \times 10^{-3}$	0,246	1,363	1,203	2,605	0,819	0,167
λ_i	0,0127	0,0317	0,115	0,311	1,4	3,87

Tabela 5.4: Constantes características de cada grupo de precursores

Calculamos a densidade de nêutrons $n(t)$ para $a = 0,25$.

A figura 5.1 mostra o comportamento médio da solução estocástica em comparação com a solução determinística, bem como duas amostras. Comparando as soluções

estocástica e determinística, observa-se uma mudança sistemática, isto é, a solução estocástica, apesar de ter o mesmo comportamento qualitativo da solução determinística, assume valores ligeiramente inferiores.

Foram acumuladas $\approx 10^5$ histórias.

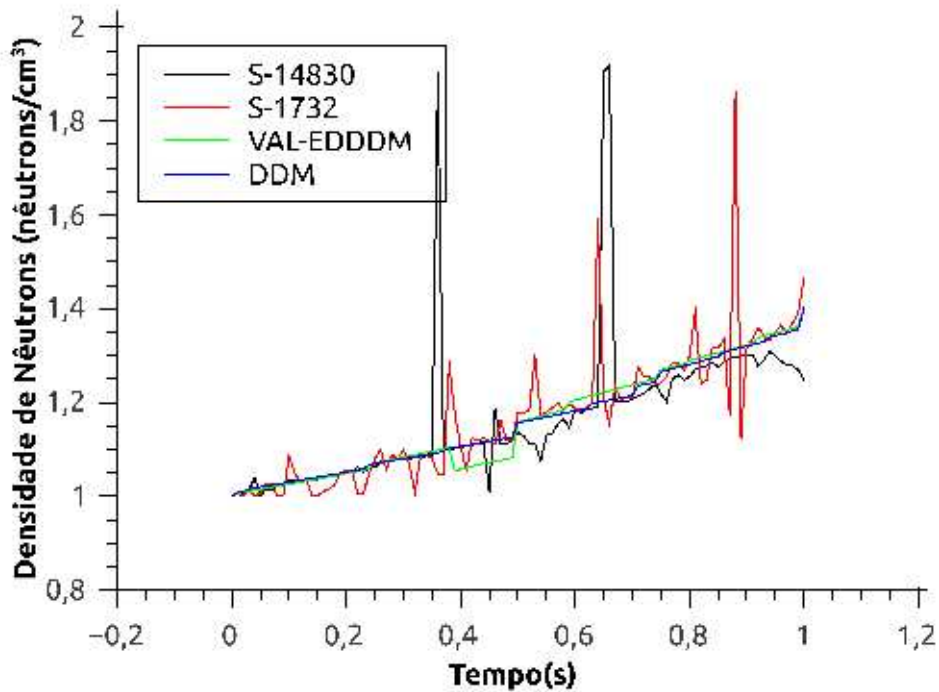


Figura 5.1: Média, amostras e resultado determinístico, reatividade linear

Como esperado, dos testes com reatividade constante, as histórias individualmente tem comportamentos muito distintos, como pode ser visto na figura 5.1 a partir do comportamento individual das amostras $S - 14830$ e $S - 1732$.

Já quando considerado o total das histórias que compõem a distribuição o comportamento do modelo (expresso na curva VAL-EDDDM) apresenta crescimento similar ao determinístico, mas não assume valores apenas ligeiramente inferiores, porém oscila ao redor do modelo determinístico (expresso na curva DDM)

5.2.2 Reatividade senoidal

Finalmente, a simulação de um caso com reatividade senoidal $\rho(t) = b \sin(t)$, com $b = 0,00073$, $\Lambda = 0,00003$ e $n(0) = 1,0$. Sendo $\beta = 6,473 \times 10^{-3}$, com β_i e λ_i .

Grupo	1	2	3	4	5	6
$\beta_i \times 10^{-3}$	0,214	1,423	1,247	2,568	0,748	0,273
λ_i	0,0124	0,0305	0,111	0,301	1,14	3,01

Tabela 5.5: Constantes características de cada grupo de precursores

A figura 5.2 mostra o comportamento da solução estocástica em relação à solução determinística, bem como uma amostra. Comparando as soluções estocásticas e determinísticas, vemos que a solução determinística representa a média da abordagem estocástica. Além disso, a amostra individual oscila em torno da curva determinística. Para a obtenção desses resultados foram acumuladas $\approx 10^6$ histórias.

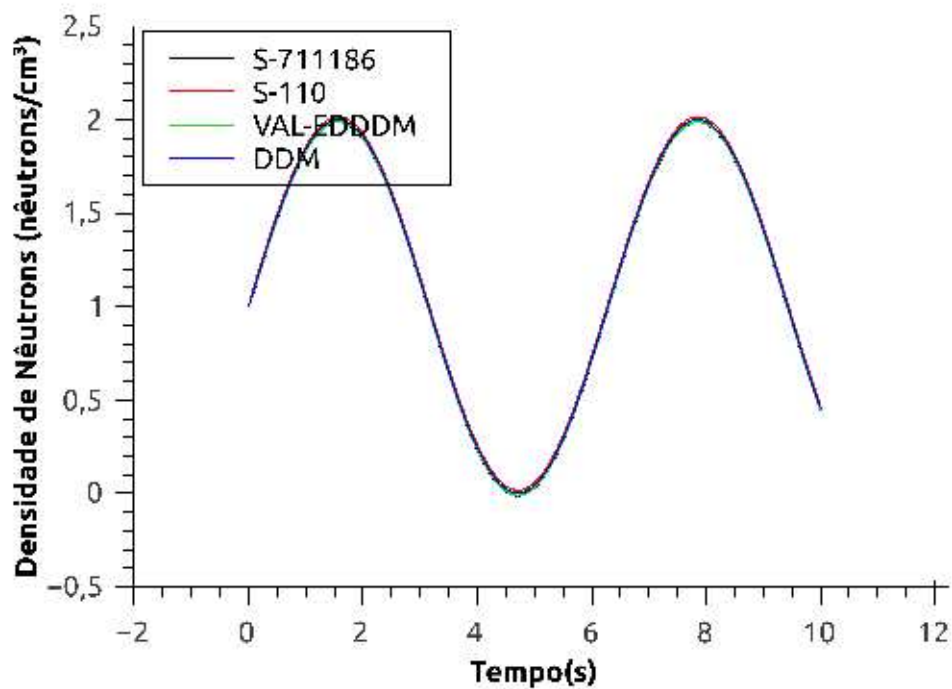


Figura 5.2: Amostras, média, e resultado determinístico, reatividade senoidal

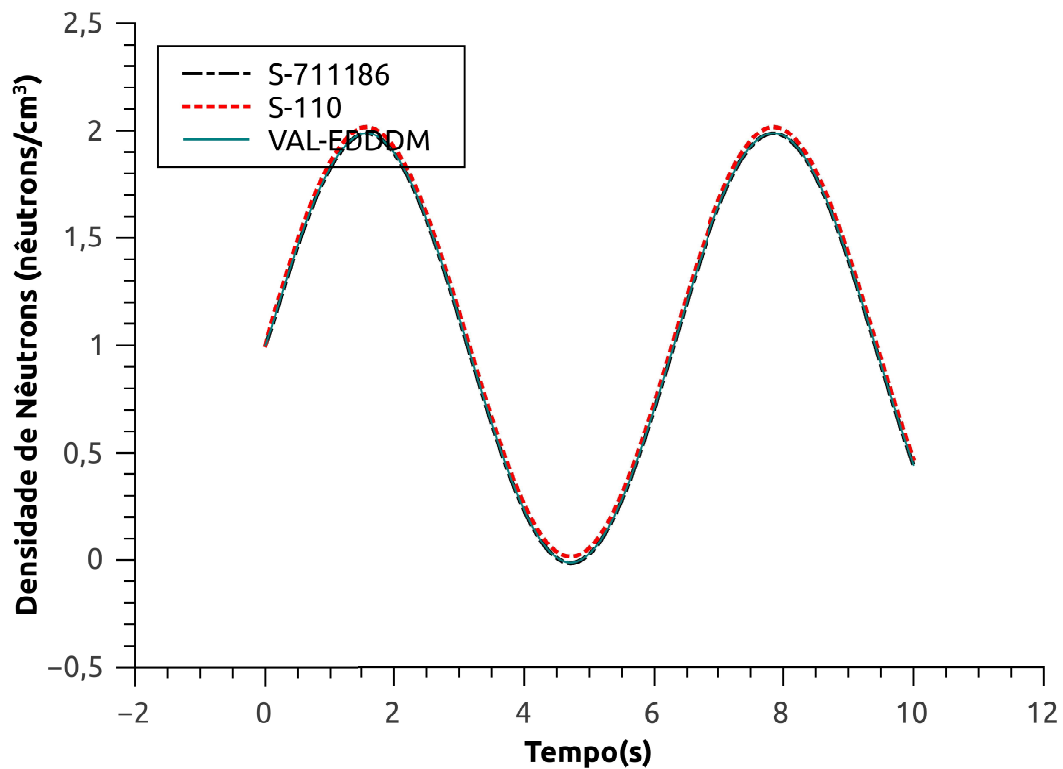


Figura 5.3: Comparação entre amostras, média, reatividade senoidal

Como esperado, dos testes com reatividade constante, as histórias individualmente tem comportamentos distintos, como pode ser visto na figura 5.3 a partir do comportamento individual das amostras $S - 711186$ e $S - 110$.

Já quando considerado o total das histórias que compõem a distribuição o comportamento do modelo (expresso na curva VAL-EDDDM) apresenta crescimento similar ao determinístico, assumindo valores similares do modelo determinístico (expresso na curva DDM), como pode ser visto na figura 5.2. A diferença de comportamento do caso anterior é devida à diferença na quantidade de histórias utilizadas na composição da distribuição.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, no que toca ao problema determinístico proposto, atingiu-se o objetivo proposto, obtendo uma solução analítica para a equação de cinética pontual, tanto de problemas não rígidos como rígidos, apresentando para ambos os tipos uma solução sob a forma de uma representação analítica não rígida, considerando a reatividade uma função contínua ou seccionalmente contínua no tempo.

O caráter semi-analítico da representação da solução é justificado pelo fato de que nenhuma aproximação é feita no procedimento de derivação da solução. A contribuição na eliminação do caráter de rigidez dessa equação, consiste na eliminação da metodologia de continuação analítica, ou seja, a integração em intervalos de tempo, no cálculo da densidade de nêutrons e concentração de precursores de nêutrons atrasados, bem como da reatividade, para um tempo prescrito.

De fato, com a metodologia proposta torna-se possível realizar diretamente esses cálculos, para qualquer valor de tempo. A comparação com os resultados da literatura demonstra a eliminação do efeito de rigidez na solução proposta, uma vez que é observada a coincidência com os resultados disponíveis na literatura, para pequenos passo de tempo na discretização.

Outra característica importante desse método reside no fato que o erro pode ser controlado, utilizando-se um número adequado de equações no sistema recursivo, para a obtenção da precisão desejada. Cumpre ainda ressaltar que o caráter analítico da representação mitiga o erro devido à solução numérica da equação desconsiderar o erro de arredondamento.

E ainda, mesmo que não tenha sido explorada na presente tese, o formalismo do método desenvolvido permite tanto a utilização de fonte externa, como a inserção de reatividades externas.

Já no que se refere ao problema estocástico, começando com o modelo não-rígido e a representação analítica de sua solução adicionando um termo estocástico, pode-se obter uma solução para qualquer intervalo desejado, gerando essa solução através de iterações sucessivas em cada intervalo de tempo em um sistema recursivo que possui um termo estocástico como termo fonte .

Cumpre aqui destacar que o método proposta tem como característica única com

relação aos demais métodos da literatura a supressão da rigidez oriunda da aritmética do problema, isto é, a diferença de ordem dos valores das grandezas físicas do problema. Essa supressão permite que sejam realizadas simulações para intervalos de tempo quaisquer sem o uso de continuação analítica, uma vez que o problema é recursivo, ou de discretizações do passo de tempo de ordens superiores a 10^{-3} , sendo esta a principal contribuição desta tese. Na literatura o problema estocástico é resolvido considerando dois grupos precursores e apenas reatividades constantes, utilizando técnicas numéricas para obter essas soluções, no entanto tais soluções permanecem limitadas devido ao caráter de rigidez do problema. As análises foram feitas considerando apenas valores médios e a variância sobre o *ensemble* por um intervalo de tempo fixo.

O presente trabalho utiliza uma solução analítica não rígida do problema com seis grupos precursores e reatividades dependentes do tempo. As características estocásticas são analisadas usando o primeiro momento da distribuição: o valor esperado.

Os valores médios seguem o comportamento do modelo determinístico, no entanto, quando as realizações individuais são levadas em conta, elas apresentam individualmente diferente do comportamento do valor médio do conjunto.

6.1 Sugestões para Trabalho Futuros

No caso do modelo determinístico, no que se refere as aplicações do método, resta ainda desenvolver e testar simulações considerando tanto fonte externa como reatividades externas.

Quanto ao problema estocástico, o resultado obtido para o momento analisado depende do conjunto de amostras e da variável em que a flutuação estocástica é aplicada, em princípio um ajuste na escala traria resultados mais realistas. Para obter tais resultados, independentemente do tamanho da amostra ou da frequência de aplicação das flutuações estocásticas, seria necessário encontrar uma escala de referência, que ainda desconhecemos. Pretendemos analisar no futuro até grandes amostras para observar a evolução dos momentos de distribuição ao longo do tempo. E estender a formulação para que a retroalimentação de temperatura seja considerada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aboanber, A. and Hamada, Y. Power series solution (PWS) of nuclear reactor dynamics with Newtonian temperature feedback, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 30(10), p. 1111–1122, 2003.

Aboanber, A. and Nahla, A. Solution of the point kinetics equations in the presence of Newtonian temperature feedback by Padé approximations via the analytical inversion method, **Journal of Physics A: Mathematical and General**, vol. 35(45), p. 9609, 2002.

Aboanber, A. and Nahla, A. On padè approximations to the exponential function and application to the point kinetics equations, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 44(4), p. 347–368, 2004.

Aboanber, A. E. Stiffness treatment of differential equations for the point reactor dynamic systems, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 71, p. 248–257, 2014.

Adomian, G. **Solving frontier problems of physics: the decomposition method**. volume 60. Springer Science & Business Media, 2013.

Akcasu, Z., Lellouche, G., and Shotkin, L. **Mathematical methods in nuclear reactor dynamics**, 1971.

Akcasu, Z. A. and Karasulu, M. Non-linear response of point-reactors to stochastic inputs, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 3(1), p. 11–18, 1976.

Allred, J. C. and Carter, D. S. Kinetics of homogeneous power reactors of the LAPRE type, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 3(5), p. 482–503, 1958.

Ayyoubzadeh, S. M. and Vosoughi, N. An alternative stochastic formulation for the point reactor, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 63, p. 691–695, 2014.

Basken, J. and Lewins, J. D. Power series solutions of the reactor kinetics equations, **Nuclear science and engineering**, vol. 122(3), p. 407–416, 1996.

Behringer, K. and Piñeyro, J. Concerning the stability parameter in point reactor kinetics driven by random reactivity noise, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21(12), p. 787–791, 1994.

Błęński, T., Gadomski, A., and Mika, J. Higher order prompt-jump approximation in reactor kinetics, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 66(3), p. 277–283, 1978.

Bodmann, B., De Vilhena, M., Ferreira, L., and Bardaji, J. An analytical solver for the multi-group two-dimensional neutron diffusion equation by integral transform techniques, **Nuovo Cimento. C (Print)**, vol. 33(1), p. 63–70, 2010.

Boichenko, V. A., Leonov, G. A., and Reitmann, V. **Dimension theory for ordinary differential equations**. Teubner Wiesbaden, 2005.

Boyce, William E., D. R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC, 2006.

Brown, H. A general treatment of flux transients, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 2(5), p. 687–693, 1957.

Carter, B. **Op Amps for Everyone**. Newnes, 2009.

Ceolin, C. **Solução Analítica da Equação Cinética de Difusão Multigrupo de Nêutrons em Geometria Cartesiana Unidimensional pela Técnica da Transformada Integral**. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2010.

Chao, Y.-A. and Attard, A. A resolution of the stiffness problem of reactor kinetics, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 90(1), p. 40–46, 1985.

Chen, G.-s. A nonlinear study in a reactor with delayed temperature feedback, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 23(1), p. 81–91, 1990.

Chen, W., Guo, L., Zhu, B., and Li, H. Accuracy of analytical methods for obtaining supercritical transients with temperature feedback, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 49(4), p. 290–302, 2007.

Chernick, J. **The dependence of reactor kinetics on temperature**. Technical report, Brookhaven National Laboratory, 1951.

Da Nobrega, J. A new solution of the point kinetics equations, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 46(3), p. 366–375, 1971.

Da Silva, M. W., Leite, S. B., Vilhena, M., and Bodmann, B. On an analytical representation for the solution of the neutron point kinetics equation free of stiffness, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 71, p. 97–102, 2014.

de Vilhena, M., Heinen, I., and Bodmann, B. An analytical solution for the general perturbative diffusion equation by integral transform techniques, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 35(12), p. 2410–2413, 2008.

Devooght, J. and Mund, E. Numerical solution of neutron kinetics equations using A-stable algorithms, **Progress in nuclear energy**, vol. 16(2), p. 97–126, 1985.

Duderstadt, J. J. and Hamilton, L. J. **Nuclear reactor analysis**. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1976.

Frohlich, R. and Johnson, S. Exact solution of the non-linear prompt kinetics equations, **Nucleonik**, vol. 12, p. 93–96, 1969.

Fuchs, K. **Efficiency for Very Slow Assembly: Report**. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory, 1946.

Ganapol, B., Picca, P., Previti, A., and Mostacci, D. **The solution of the point kinetics equations via converged accelerated Taylor series (CATS)**. In *Advances in Reactor Physics—Linking Research, Industry and Education (PHYSOR 2012)*, Knoxville, Tennessee, USA, April 15–20, 2012, 2012.

Ganapol, B. D. A highly accurate algorithm for the solution of the point kinetics equations, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 62, p. 564–571, 2013.

Goldstein, R. and Shotkin, L. M. Use of the prompt-jump approximation in fast-reactor kinetics, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 38(2), p. 94–103, 1969.

Gupta, H. and Trasi, M. Asymptotically stable solutions of point-reactor kinetics equations in the presence of Newtonian temperature feedback, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 13(4), p. 203–207, 1986.

Hafstein, S. F. A constructive converse Lyapunov theorem on exponential stability, **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, vol. 10(3), p. 657–678, 2004.

Hafstein, S. F. A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations, **Dynamical Systems**, vol. 20(3), p. 281–299, 2005.

Hamada, Y. M. Confirmation of accuracy of generalized power series method for the solution of point kinetics equations with feedback, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 55, p. 184–193, 2013.

Hamada, Y. M. Trigonometric Fourier-series solutions of the point reactor kinetics equations, **Nuclear Engineering and Design**, vol. 281, p. 142–153, 2015.

Hansen, G. **Burst characteristics associated with the slow assembly of fissionable materials**. Technical report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex., 1952.

Haofeng, L., Wenzhen, C., Fan, Z., and Lei, L. Approximate solutions of point kinetics equations with one delayed neutron group and temperature feedback during delayed supercritical process, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 34(6), p. 521–526, 2007.

Hayes, J. G. and Allen, E. Stochastic point-kinetics equations in nuclear reactor dynamics, **Annals of nuclear energy**, vol. 32(6), p. 572–587, 2005.

Hetrick, D. **Dynamics of Nuclear Reactors**. University of Chicago Press, Chicago, USA, 1 edition, 1971.

Higham, D. J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations, **SIAM review**, vol. 43(3), p. 525–546, 2001.

Jiang, Z.-P. and Wang, Y. A converse Lyapunov theorem for discrete-time systems with disturbances, **Systems & control letters**, vol. 45(1), p. 49–58, 2002.

Kang, C. and Hansen, K. Finite element methods for reactor analysis, **Nuclear science and Engineering**, vol. 51(4), p. 456–495, 1973.

Karmeshu. A stochastic point reactor model with threshold effect, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 8(3), p. 141–144, 1981.

Keepin, G. and Cox, C. General solution of the reactor kinetic equations, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 8(6), p. 670–690, 1960.

Koclas, J., Sissaoui, M., and Hébert, A. Solution of the improved and generalized quasistatic methods using an analytic calculation or a semi-implicit scheme to compute the precursor equations, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 23(11), p. 901–907, 1996.

Leite, S. Q. B., de Vilhena, M. T., and Bodmann, B. E. Solution of the point reactor kinetics equations with temperature feedback by the ITS2 method, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 91, p. 240–249, 2016.

Leite, S. Q. B., Palma, D. A., de Vilhena, M. T., and Bodmann, B. E. Analytical representation of the solution of the point reactor kinetics equations with adaptive time step, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 70, p. 112–118, 2014.

Li, H., Shang, X., and Chen, W. An accurate solution of point kinetics equations of one-group delayed neutrons and an extraneous neutron source for step reactivity insertion, **Chinese Science Bulletin**, vol. 55(36), p. 4116–4119, 2010.

Lipschutz, S. **Álgebra Linear: teoria e problemas**. Pearson Makron Books, 1994.

Mello, K. **Simulação da dispersão de poluentes na camada limite planetária através da solução da equação de langevin pelo método da decomposição**. Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2010.

Nahla, A. A. An analytical solution for the point reactor kinetics equations with one group of delayed neutrons and the adiabatic feedback model, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 51(1), p. 124–128, 2009.

Nahla, A. A. An efficient technique for the point reactor kinetics equations with Newtonian temperature feedback effects, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 38(12), p. 2810–2817, 2011.

Nahla, A. A. and Zayed, E. M. Solution of the nonlinear point nuclear reactor kinetics equations, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 52(8), p. 743–746, 2010.

Ott, K. and Meneley, D. Accuracy of the quasistatic treatment of spatial reactor kinetics, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 36(3), p. 402–411, 1969.

Petersen, Z. **Solução Analítica das Equações de Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pelas Técnicas de GITT e Decomposição**. PhD thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2011.

Polo-Labarrios, M., Espinosa-Martínez, E.-G., Quezada-García, S., Varela-Ham, J. R., and Espinosa-Paredes, G. Fractional neutron point kinetic equation with ramp and sinusoidal reactivity effects, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 72, p. 90–94, 2014.

Polo-Labarrios, M.-A. and Espinosa-Paredes, G. Application of the fractional neutron point kinetic equation: Start-up of a nuclear reactor, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 46, p. 37–42, 2012.

Postnikov, N. Stochastic free oscillations in a reactor having linear feedback, **Atomic Energy**, vol. 72(3), p. 215–220, 1992.

Press, William H., T. S. A. V. W. T. F. B. P. **Métodos numéricos aplicados: rotinas em C++**. Bookman, 2011.

Quabili, E. R. and Karasulu, M. Methods for solving the stochastic point reactor kinetic equations, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 6(3), p. 133–143, 1979.

Ray, S. S. Numerical simulation of stochastic point kinetic equation in the dynamical system of nuclear reactor, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 49, p. 154–159, 2012.

Ray, S. S. and Patra, A. Numerical solution of fractional stochastic neutron point kinetic equation for nuclear reactor dynamics, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 54, p. 154–161, 2013.

Rodriguez, M., San Miguel, M., and Sancho, J. Theory of fluctuations and parametric noise in a point nuclear reactor model, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 11(7), p. 321–336, 1984.

Saito, K. An application of Novikov-Furutsu formula to solving stochastic point reactor kinetics having a Gaussian parametric noise with an arbitrary spectral profile, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 6(11-12), p. 591–593, 1979.

Sanchez, J. On the numerical solution of the point reactor kinetics equations by generalized Runge-Kutta methods, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 103(1), p. 94–99, 1989.

Seliverstov, V. and Shvedov, O. Integral point-kinetics equation for calculating the fast kinetics of a subcritical system with a pulsed external source, **Atomic Energy**, vol. 85(2), p. 523–531, 1998.

Silva, J. J., Alvim, A. C., Vilhena, M. T., Bodmann, B. E., and Petersen, C. On a closed-form solution of the point kinetics equations with reactivity feedback of temperature, **International Journal of Nuclear Energy Science and Technology**, vol. 8(2), p. 131–145, 2014.

Silva, J. J. A. **Cinética pontual com realimentação de temperatura considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados**. Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2011.

Väth, W. Investigations of the influence of feedback and coupling effects on neutron noise in a nuclear reactor, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 2(2), p. 427–435, 1975.

Vigil, J. C. Solution of the reactor kinetics equations by analytic continuation, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 29(3), p. 392–401, 1967.

Vyawahare, V. A. and Nataraj, P. **Modeling neutron dynamics in nuclear reactor using fractional-order point reactor kinetics model with adiabatic temperature feedback**. In *Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications (SIMULTECH), 2014 International Conference on*, pages 352–360. IEEE, 2014.

Williams, M. Stochastic non-linear reactor kinetics, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 10(1), p. 51–53, 1983.

Zhang, F., Chen, W.-Z., and Gui, X.-W. Analytic method study of point-reactor kinetic equation when cold start-up, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 35(4), p. 746–749, 2008.

Zhiyuan, Z. Finite element method for solving the point reactor neutron kinetics equations, **Atom. Energy Sci. Technol**, vol. 15(6), p. 656–663, 1981.