

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Conversão Spin-Órbita da Luz

Amanda Kronhardt Fritsch

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Professor Dr. Ricardo Rego Bordalo Correia.

Porto Alegre
Novembro de 2016

Agradecimentos

- Agradeço ao Professor Dr. Ricardo Rego Bordalo Correia por ter aceitado desenvolver este trabalho comigo e por todo o conhecimento transmitido, sempre com toda a paciência, bom humor e leveza.
- Aos meus pais pela compreensão nas horas de ausência e por todo o amor e pelo suporte que me deram desde os primeiros anos de estudo sempre me impulsionando a alcançar meus objetivos.
- À minha segunda família em Porto Alegre, que me acolheu sem reservas e tão carinhosamente como se fosse uma filha ou uma irmã. Certamente foram de suma importância para o meu desempenho durante todos esses anos.
- E principalmente agradeço ao meu namorado Guilherme Lorenzatto Volkmer por todo amor, por toda compreensão e por toda a força que me deu, sempre me ajudando tanto em assuntos referentes à vida acadêmica, quanto assuntos exteriores à ela, desde o começo do curso.

Resumo

Desde o século XX sabe-se que a luz possui momentum angular. O momentum angular de spin (SAM), associado à polarização circular e o momentum angular orbital referente à trajetória (OAM externo) são amplamente conhecidos e exaustivamente investigados. Uma nova variante de momentum angular da luz, o momentum angular orbital interno (OAM interno), referente ao formato helicoidal da frente de onda, foi mais amplamente estudado nas últimas décadas depois que Allen et al. [1] demonstraram que esta propriedade era inerente à feixes com fase do tipo $e^{i\ell\phi}$. O estudo do OAM vem se consolidando e a lista de possíveis aplicações só tem crescido. O presente trabalho visa uma revisão dos momenta angulares da luz com enfoque no OAM interno e nas interações spin-órbita da luz que representam um ramo de intenso estudo da ótica atual. Neste trabalho foram analisados alguns dos métodos de geração de feixes com OAM, como a placa de fase espiral que consiste em uma placa de espessura variável que altera a frente de onda do feixe incidente. O método holográfico que consiste na alteração da frente de onda incidente sobre um SLM que exhibe uma imagem apropriada para a geração de OAM. Um dispositivo ótico, proposto por Wakayama [2], capaz de gerar feixes acromáticos com OAM, ele que funciona como um conversor spin-órbita e, devido à sua simetria cilíndrica, faz com que o um feixe contendo SAM seja convertido em um feixe com SAM e OAM.

Abstract

Since the XX century it's known that light has angular momentum. The spin angular momentum (SAM), associated with circular polarization, and the orbital angular momentum relative to the trajectory (external OAM) are widely known and exhaustively investigated. A new variant of angular momentum of light, the internal orbital angular momentum (internal OAM), relative to a helical wavefront form, was broadly studied in the last decades after Allen et al. [1] demonstrated that this is a natural property of beams with phase $e^{i\ell\phi}$. The study of OAM are being consolidated and the list of possible applications has only grown. The present work aims a review of the angular moments of light focusing on the internal OAM and the spin-orbit interactions of light that represent a branch of intense study in current optics. In this work, some of the beam generation methods with OAM were analyzed, such as the spiral phase plate, which consists of a variable thickness plate that changes the wavefront of the incident beam. The holographic method that consists in changing the incident wavefront on an SLM that exhibits an appropriate image for the generation of OAM. An optical device, proposed by Wakayama [2], capable of generating achromatic beams with OAM, it acts as a spin-orbit converter and, due to its cylindrical symmetry, makes the initial beam containing SAM to be converted into a beam with SAM and OAM.

Índice

| | |
|---|-------|
| Introdução | p. 3 |
| 1 Os momenta angulares da luz | p. 5 |
| 1.1 Formato da frente de onda | p. 8 |
| 2 Interações spin-órbita da luz | p. 10 |
| 2.1 Interações spin-órbita em campos não-paraxiais | p. 11 |
| 2.2 Interações spin-órbita geradas por estruturas anisotrópicas | p. 12 |
| 3 Geração de luz com momentum angular | p. 14 |
| 3.1 Placa de onda espiral (SPP) | p. 14 |
| 3.2 Método holográfico | p. 15 |
| 3.3 Gerador acromático de feixe com OAM | p. 16 |
| 3.4 Caracterização de feixes com OAM | p. 18 |
| 4 Resultados experimentais | p. 20 |
| 4.1 Método holográfico | p. 20 |
| 4.2 Gerador acromático de feixes com OAM | p. 23 |
| 5 Conclusões | p. 25 |
| Apêndice A – Momenta Angulares | p. 26 |

Introdução

A luz nos traz as notícias do universo.

— Sir William Bragg, *The Universe of Light*

A luz é um fenômeno que sempre intrigou cientistas e filósofos. Na Grécia antiga consideravam que a luz era resultado da emissão de corpos luminosos, todavia não havia um acordo se ela era emitida pelo corpo ou pelos olhos do observador. Os estudos acerca da natureza da luz foram se intensificando e culminaram no século XVII, quando houve uma ampla discussão se a luz era um fenômeno ondulatório ou corpuscular, ideias encabeçadas por Huygens e Newton, respectivamente [3]. O paradigma atual é que a luz possui uma natureza tanto ondulatória quanto corpuscular. Considerando o caráter ondulatório da luz, pode-se imaginar que a mesma possui propriedades mecânicas. As primeiras suspeitas de que a luz deveria ter tais propriedades surgiram quando Kepler propôs que as caudas dos cometas se direcionavam contrariamente ao Sol devido à pressão de radiação da luz emitida pela estrela [4]. Observe que a luz, a eletricidade e o magnetismo eram considerados três fenômenos independentes. No início do século XIX, Maxwell sintetizou os trabalhos de Oersted, Ampère e Faraday em uma teoria que unificou a eletricidade, o magnetismo e a ótica [3].

Com base na teoria eletromagnética de Maxwell, Poynting descreveu o fluxo de energia de um campo eletromagnético e fez os primeiros avanços no estudo dos momentos linear e angular da luz. Ele propôs que a luz circularmente polarizada teria momentum angular, hoje conhecido como momentum angular de spin (SAM), fato que foi mostrado experimentalmente por Beth em 1936 [1, 12]. Desde então muitos cientistas trabalharam no refinamento e na descrição do momentum angular da luz e hoje sabemos que existem três tipos de momentum angular, com origens e características particulares. Mais recentemente, em 1992, Allen et al.[1] descobriram que uma frente de onda com formato helicoidal naturalmente carrega momentum angular orbital (OAM).

A energia e o momentum linear da radiação são conceitos bem estudados. Contudo, uma análise completa do momentum angular orbital da luz e suas potenciais aplicações ainda estão em desenvolvimento. O estudo do OAM ganhou muito interesse nas últimas décadas devido ao fato de que feixes com OAM bem definido podem ser facilmente gerados por diferentes métodos. Ao mesmo tempo, existem boas perspectivas de aplicações em manipulação e aprisionamento de matéria, fotônica e até mesmo em astronomia, onde está sendo utilizado para melhorar a resolução de instrumentos óticos limitados pela difração [5]. Estudos também estão sendo feitos na busca de objetos astronômicos que emitam feixes com OAM [6]. Outro campo em que a aplicação do OAM está sendo fortemente estudada é na informação quântica. O spin é uma propriedade binária e apenas um bit de informação pode ser codificada utilizando o feixe com SAM, por outro lado o OAM é dimensionalmente infinito o que nos dá maior disponibilidade de códigos alfabéticos. Recentemente a multi-dimensionalidade do OAM foi utilizada para codificar informação em telecomunicações de espaço livre [7, 8].

Neste trabalho será feita uma revisão teórica para esclarecer as diferenças entre os três tipos de momentum angular. Serão descritos também os principais métodos de geração de feixes com OAM, por último será apresentado o dispositivo desenvolvido recentemente por Wakayama et al. [2], que gera feixes acromáticos com OAM, ele é baseado em reflexões internas totais que provocam a conversão do momentum angular de spin em momentum angular orbital. Um gerador acromático de feixes com OAM abre novas possibilidades para técnicas de imageamento e observações astronômicas [9].

Capítulo 1

Os momenta angulares da luz

Nos anos de 1800, J. C. Maxwell reuniu de forma concisa as relações entre eletricidade e magnetismo nas a partir de então conhecidas como equações de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Onde \mathbf{E} e \mathbf{B} representam os campos elétrico e magnético, respectivamente. A densidade de carga por volume dada por ρ . A densidade de cargas em movimento (densidade de corrente) é representada por \mathbf{j} . A constante $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$ é a permissividade elétrica e a constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} kg \cdot m/C^2$ é chamada permeabilidade magnética, ambos valores consideram que o meio de propagação é o vácuo.

A solução para esse grupo de equações diferenciais é uma equação de onda que se propaga com velocidade $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ no vácuo, exatamente a velocidade da luz! Essa evidência corroborou a ideia de que luz é um fenômeno puramente eletromagnético. A unificação do eletromagnetismo com a ótica foi muito proveitosa, pois ela proporcionou a possibilidade de correspondência entre conhecimentos advindos de ambas as áreas.

No início do século XX, J.H. Poynting [11] demonstrou que a luz circularmente polarizada deveria ter não só o já conhecido momentum linear, mas também momentum angular com valor de $\sigma \hbar$ por fóton, onde $\sigma = \pm 1$ dependendo da quiralidade da pola-

rização e correspondente ao spin do fóton, esse momentum angular ficou conhecido como momentum angular de spin (SAM). Em 1936, Beth [12] propôs um experimento no qual ele pôde observar os efeitos do SAM, ele suspendeu uma placa de onda e conforme a luz circularmente polarizada passava por ela o momentum angular era transferido da luz para a placa, fazendo com que ela girasse [10].

Ainda em 1932, C.G. Darwin [13] demonstrou que existe um outro tipo de momentum angular da luz, não associado à polarização, referente à emissão de um fóton a certa distância do centro de massa do átomo. Foi em 1992 que Allen et al. [1] descreveram o terceiro tipo de momentum angular como sendo uma propriedade natural de feixes com frente de onda de fase helicoidal do tipo $e^{i\ell\phi}$, onde ϕ é o ângulo azimutal e ℓ é um inteiro qualquer, muitas vezes referido como uma carga topológica, já que ele descreve o número de hélices que a frente de onda tem. O valor do momentum angular orbital (OAM) será de $\ell\hbar$, ou seja, um múltiplo inteiro de \hbar , diferentemente do SAM que só assume $\pm\hbar$. De forma sucinta, os três momenta angulares são dados por:

$$\mathbf{S} = \sigma\hbar\hat{\mathbf{k}} \quad \mathbf{L}^{int} = \ell\hbar\hat{\mathbf{k}} \quad \mathbf{L}^{ext} = \mathbf{R} \times \mathbf{p} \quad (1.1)$$

onde $\hat{\mathbf{k}}$ é o unitário na direção do vetor de onda.

O momentum angular total é a soma dos três tipos de momentum angular representados na figura 1.1: O SAM que é uma propriedade intrínseca do feixe e está associado à polarização, o OAM interno que é referente ao formato helicoidal da frente de onda e pode ser entendido como o momentum angular orbital relativo ao centro de gravidade do pacote de onda e o OAM externo que é referente à trajetória do feixe (movimento do centro de gravidade do pacote de onda), isto é, referente à passagem de um feixe a certa distância da origem de um referencial.

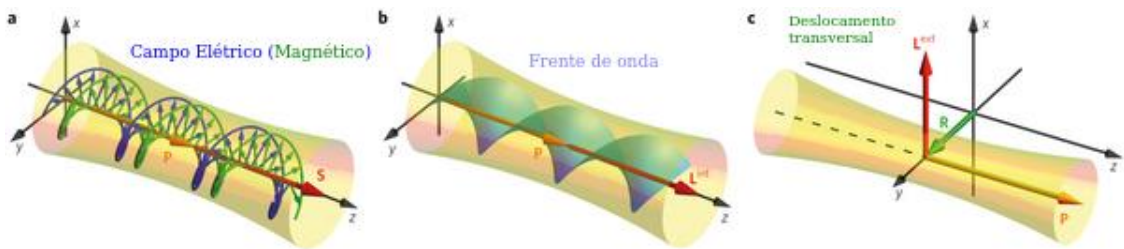


Figura 1.1: (a) momentum angular de spin para um feixe circularmente polarizado à direita. (b) momentum angular orbital interno com $\ell = 2$. (c) momentum angular orbital externo devido à propagação do feixe a certa distância do referencial.

Uma descrição matemática para o momentum angular de campos eletromagnéticos é feita a partir de definições muito bem conhecidas, como o vetor de Poynting (\mathcal{S}), que descreve o transporte de energia de um campo eletromagnético por unidade de tempo (potência) por unidade de área, dado por [14]:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.2)$$

Da eletrodinâmica clássica é possível demonstrar que a densidade volumétrica de momentum linear do campo eletromagnético é descrita a partir do vetor de Poynting:

$$\mathbf{P}_{em} = \frac{\mathcal{S}}{c^2} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.3)$$

Sabendo-se que o momentum linear se relaciona com o momentum angular pela expressão $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, vem naturalmente que:

$$\mathbf{J}_{em} = \varepsilon_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{r} \quad (1.4)$$

Com o auxílio de algumas identidades e propriedades (veja o apêndice A), obtemos que [15]:

$$\mathbf{J}_{em} = \varepsilon_0 \sum_{i=x,y,z} \int E^i (\mathbf{r} \times \nabla) A^i d^3\mathbf{r} + \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} d^3\mathbf{r} \quad (1.5)$$

Nessa expressão vemos o momentum angular total de um campo eletromagnético como a soma de duas componentes, o primeiro termo é identificado como o OAM e o segundo termo da soma é identificado como sendo o SAM. Em física atômica já estamos acostumados a escrever o momentum angular total do elétron como a soma do seu spin com o seu momentum angular orbital, o mesmo acontece aqui para o momentum angular total do campo eletromagnético.

Uma outra análise considerando campos na aproximação paraxial, nos permite chegar de forma mais clara às expressões para o momentum angular total de um feixe contendo SAM e OAM (veja o apêndice A). Partindo da média temporal para a densidade de momentum linear, obtém-se:

$$\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = i\omega \frac{\varepsilon_0}{2} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + \omega k \varepsilon_0 |u|^2 \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.6)$$

onde $u(r, \phi, z) = u_0(r, z) e^{i\ell\phi}$ é uma função que descreve a amplitude do campo com polarização arbitrária e satisfaz a equação de onda na aproximação paraxial. Em posse da média da densidade do momentum linear, é possível obter a densidade de momentum

angular através do produto vetorial com \mathbf{r} . É conveniente analisarmos a razão entre o momentum angular orbital e a energia do feixe, que é dada por:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\ell + \sigma}{\omega}. \quad (1.7)$$

Para um feixe sem a fase helicoidal, $e^{i\ell\phi}$, o resultado dessa expressão seria a já conhecida razão entre o momentum angular de spin e a energia, $\hbar\sigma/\hbar\omega$. Da mesma forma, para um feixe sem polarização circular, ($\sigma_z = 0$), a razão $\ell/\omega = \hbar\ell/\hbar\omega$ também descreve um momentum angular dividido pela energia, nesse caso é o momentum angular orbital, dado por $\ell\hbar$ por fóton.

Apesar das similaridades entre o SAM e o OAM, eles são conceitualmente diferentes. As diferenças aparecem principalmente quando ocorre a interação da luz com a matéria. A incidência de um feixe contendo SAM sobre uma partícula, provocará a rotação da partícula em torno do seu próprio eixo, enquanto se um feixe com OAM incide sobre a partícula, ela começará a girar em torno de um determinado eixo preferencial no espaço, o eixo do feixe [16].

Formato da frente de onda

Para entender e estudar melhor as propriedades de um feixe com momentum angular é necessário conhecer suas características de perfil de luminosidade e formato da frente de onda. Feixes Gaussianos, por exemplo, são caracterizados por suas frentes de onda plana e distribuição de intensidade gaussiana, como na figura 1.2 (a).

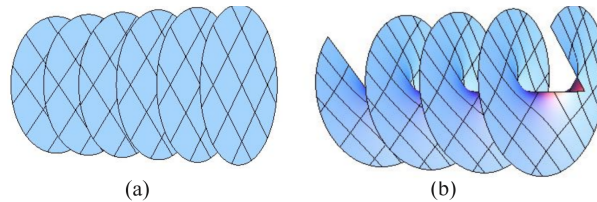


Figura 1.2: Frente de onda de um feixe **(a)** Gaussiano e **(b)** de um feixe com OAM.

Em frentes de onda com fase helicoidal, o vetor de Poynting tem uma componente azimutal pois precessiona em torno do eixo de propagação. Essa componente produz um momentum angular orbital paralelo ao eixo do feixe. Devido à circulação em torno do

eixo, é dito que esses feixes contém um vórtice ótico [4].

A forma helicoidal da onda gera uma singularidade no centro do feixe, resultando em um zero no centro no perfil de intensidade que é o característico formato de rosquinha dos feixes com OAM e tem perfil de intensidade como o figura 1.3. Um exemplo interessante são os feixes de Bessel de alta ordem carregando OAM, caracterizados pelo modo azimutal ℓ e pela componente radial k_r , descritos por $u(r, \phi, z) = J_\ell(k_r, r)e^{i\ell\phi + ikz}$. A transformada de Fourier do campo de Bessel é descrita como um anel [17], gerando um perfil de intensidade como da figura 1.3.

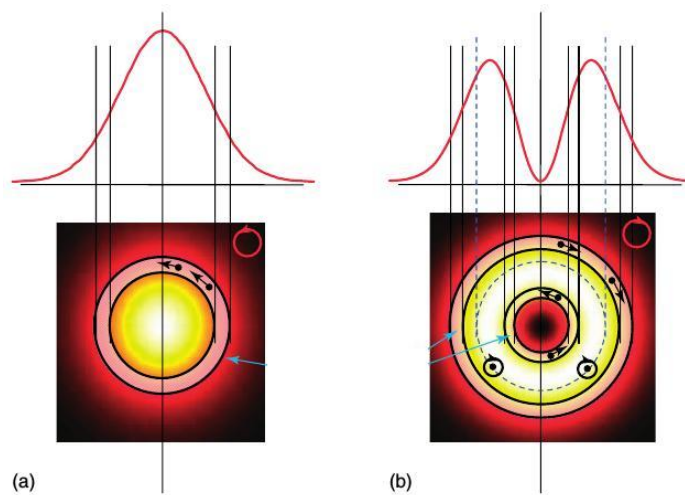


Figura 1.3: Perfil de intensidade de um feixe (a) Gaussiano e (b) com OAM.

Capítulo 2

Interações spin-órbita da luz

A interação e as conversões entre os três tipos de momenta angulares ótico resultam nas interações spin-órbita (SOI) da luz. As interações entre o SAM e o OAM externo (referente à trajetória) geram os efeitos spin-Hall, em que a helicidade do feixe altera a posição ou o momentum da luz. O acoplamento entre o SAM e o OAM interno produzem as conversões spin-órbita que geram vórtices óticos com dependência na helicidade. Os SOI originam de propriedades fundamentais das equações de Maxwell, portanto podem aparecer em muitos processos óticos básicos.

O mecanismo por trás das deformações dependentes de spin são as fases geométricas. Um exemplo muito simples de como isso funciona, seria um feixe paraxial que propaga na direção do eixo z com SAM $\sigma\hat{\mathbf{z}}$, onde $\sigma = \pm 1$. Esse feixe circularmente polarizado é caracterizado por um vetor de campo elétrico do tipo $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} + i\sigma\hat{\mathbf{y}}$. Uma rotação nas coordenadas por um ângulo ϕ em torno do eixo de propagação z induz uma fase dependente da helicidade $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}e^{-i\sigma\phi}$. Essa fase geométrica $\Phi_G = -\sigma\phi$ é dada pelo produto do SAM e do ângulo de rotação, veja a figura 2.1 (a).

Um caso mais geral considera a variação tridimensional da direção do vetor de onda. Como, para uma onda plana, o vetor de onda \mathbf{k} é sempre perpendicular ao vetor \mathbf{E} , ou seja, a polarização é sempre perpendicular à esfera unitária no espaço de momentum. O transporte paralelo geométrico do vetor de polarização na superfície curva da esfera no espaço de momentum, revela rotações inevitáveis entre o vetor transportado e as coordenadas esféricas globais, resultando na indução de uma fase geométrica em ondas circularmente polarizadas. Em particular, cruzando um contorno de $\theta = \text{constante}$, como na figura 2.1,

a luz circularmente polarizada ganha uma fase geométrica $\Phi_G = -\sigma\phi\cos\theta$ dependente da helicidade. Para giro completo, subtraindo 2π da coordenada $\hat{\phi}$ resulta em uma fase geométrica global $\Phi_{G0} = 2\pi\sigma(1 - \cos\theta)$ [18]¹.

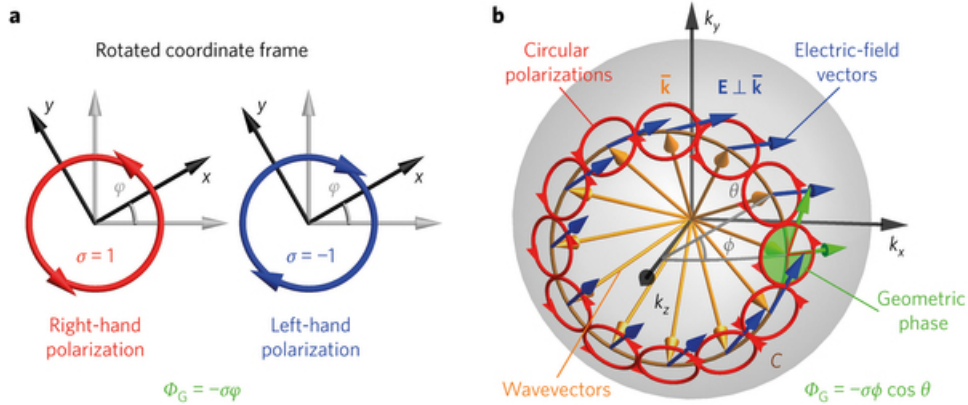


Figura 2.1: Esfera unitária no espaço de momentum representa as direções de propagação de ondas planas especificadas pelos ângulos esféricos (θ, ϕ) . O campo elétrico \mathbf{E} é tangente a essa esfera. O transporte paralelo do campo ao longo do contorno com um ângulo polar θ fixo, gera uma rotação igual à fase geométrica Φ_G no campo \mathbf{E} , adquirindo um fator de fase de $e^{-i\Phi_G}$.

Interações spin-órbita em campos não-paraxiais

Um exemplo importante que é fundamental para o SOI em meios isotrópicos é a fase geométrica causada pela variação da direção do vetor de onda $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$, em campos não-paraxiais. Em feixes não-paraxiais, a simples associação do SAM com a polarização e do OAM com os vórtices óticos já não é mais válida. No caso de tais feixes formados por ondas planas circularmente polarizadas em que os vetores de onda formam um cone de abertura θ (veja figura 2.2), o SAM e o OAM são escritos como [18]:

$$\mathbf{S} = \sigma \cos\theta \mathbf{k}, \quad \mathbf{L} = [\ell + \sigma(1 - \cos\theta)] \mathbf{k}. \quad (2.1)$$

Note que o momentum angular total do feixe é preservado e $J_z = L_z + S_z = (\ell + \sigma)\hbar$. A equação pode ser interpretada como se parte do SAM fosse transferido para o OAM, essa é uma conversão spin-órbita em que parte do momentum angular orbital se torna dependente da helicidade. Este efeito está intimamente ligado às fases geométricas entre

¹Para maiores detalhes sobre a geometrodinâmica de feixes polarizados, leia [19].

vetores de onda distribuídos azimutalmente.

Para entender como funciona a conversão spin-órbita, podemos tomar o exemplo da focalização de um feixe por uma lente de alta abertura numérica que faz com que o vetor de onda do feixe incidente gire, resultando em uma distribuição cônica dos vetores de onda no campo focalizado, como foi esquematizado na figura 2.2. Na base global de polarização circular, a transformação rotacional 3D do campo elétrico é descrito pela matriz unitária:

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} a & b e^{-2i\phi} & \sqrt{2ab} e^{-i\phi} \\ -b e^{2i\phi} & a & \sqrt{2ab} e^{i\phi} \\ -\sqrt{2ab} e^{i\phi} & -\sqrt{2ab} e^{-i\phi} & a - b \end{pmatrix} \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

onde $a = \cos^2(\theta/2)$ e $b = \sin^2(\theta/2)$. Nesta matriz os elementos fora da diagonal carregam um fator azimutal que tem a característica de vórtice, sendo eles os responsáveis pela conversão do momentum angular. Devido à esses elementos, um feixe incidente circularmente polarizado, com helicidade σ adquire uma componente de polarização inversa e um fator de vórtice $b e^{2i\sigma\phi}$, além de uma componente longitudinal com um vórtice $\sqrt{2ab} e^{i\sigma\phi}$. Esse vórtice com dependência na helicidade produz o OAM da expressão 2.1 no campo focalizado.

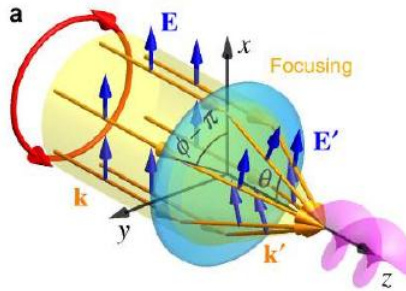


Figura 2.2: Focalização de um feixe paraxial gera uma distribuição cônica dos vetores de onda. O campo 3D resultante tem componentes com vórtices dependentes da helicidade. Essa é a conversão spin-órbita, equações 2.1 e 2.2

Interações spin-órbita geradas por estruturas anisotrópicas

Este tipo de interação spin-órbita depende não só das características da luz, mas também das propriedades e simetrias do meio em que ela se propaga. Grandes anisotropias

e inomogeneidades permitem controlar a polarização e as distribuições de fase. Considere um elemento anisotrópico, cujo eixo de anisotropia está orientado a um ângulo α no plano (x,y) . É conveniente descrever este sistema (2D) usando o cálculo de Jones [18], nesta representação um retardador de fase que gera um atraso δ pode ser descrito pela matriz de Jones:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Um objeto ótico que tenha superfície com orientação variável pode ser descrito pela matriz com dependência espacial: $\mathbf{J}_\alpha = \mathbf{R}(-\alpha) \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{R}(\alpha)$, onde α é a orientação local do eixo ótico e $\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ é a matriz de rotação bidimensional.

É conveniente converter \mathbf{J}_α para a base de helicidade, cujos vetores unitários são $|\mathbf{R}\rangle = (1 \ 0)^T$ e $|\mathbf{L}\rangle = (0 \ 1)^T$, para as polarizações circulares à direita e à esquerda, respectivamente. Nessa base o operador da polarização espacialmente dependente é descrito pela matriz $\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{J}_\alpha\mathbf{U}^{-1}$, onde $\mathbf{U} = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ é a matriz unitária de conversão. Portanto, o operador de Jones para uma superfície formando um ângulo α em relação a um referencial fixo, é dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{-2i\alpha} \\ i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{2i\alpha} & \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Os termos com fatores $e^{\pm 2i\alpha}$ vêm da fase geométrica induzida pela rotação das coordenadas. Para um dispositivo projetado para agir como uma placa de meia onda, ou seja, que induza um retardo de fase de $\delta = \pi$, a matriz 2.4 se torna antidiagonal e age invertendo a polarização da luz incidente e acrescentando a fase geométrica de $\Phi_G = -2\sigma\alpha$.

Concluindo, diferentemente dos efeitos spin-Hall convencionais, estes fenômenos de conversão não se baseiam em diferenças de caminho ótico, mas sim na modificação geométrica da fase resultante da manipulação da polarização variante espacialmente.

Capítulo 3

Geração de luz com momentum angular

Para o estudo da luz com momentum angular orbital e suas aplicações é de suma importância poder gerar feixes com OAM bem definidos. Várias técnicas foram desenvolvidas para tal, algumas das mais importantes serão descritas neste capítulo.

Placa de onda espiral (SPP)

Desenvolvido por Beijersbergen et al. [20], a placa de onda espiral consiste em um material transparente cuja espessura aumenta de acordo com o ângulo azimutal ϕ em torno do centro. Ao passar pela SPP um feixe gaussiano sofre um atraso que é proporcional à espessura da placa, as diferenças na espessura causam uma deformação na frente de onda, gerando uma frente de onda com fase helicoidal. A figura 3.1 esquematiza uma SPP iluminada por uma onda plana e o resultado que é uma onda com fase helicoidal.

Apesar de ser uma ideia simples, se requer muita precisão na confecção da superfície helicoidal, que deve resultar em uma fase exatamente de $e^{il\phi}$, para que o resultado seja um feixe com OAM bem definido. Este método ainda tem a limitação de funcionar apenas para feixes monocromáticos, já que o índice de refração é uma função do comprimento de onda.

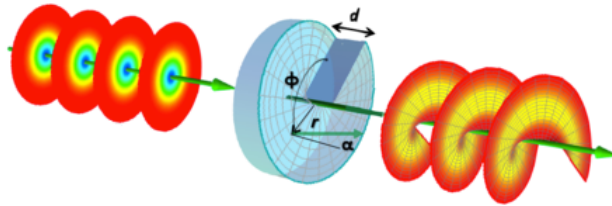


Figura 3.1: Um feixe com ondas planas incide sobre a placa com superfície helicoidal e tem sua frente de onda distorcida, gerando um feixe com OAM.

Método holográfico

Outro método para gerar feixes com OAM bem definidos é incidindo um feixe sobre um SLM (Spatial light modulator). O SLM é um dispositivo que consiste em uma tela de cristal líquido pixelado e que, através de uma interface, pode exibir imagens geradas no computador, agindo como um holograma que pode conferir OAM à um feixe que passa pelo dispositivo [21].

O funcionamento desta técnica é semelhante ao da placa com superfície espiral, pois ao passar pelo SLM, a luz sofre uma difração que distorce a sua frente de onda. O feixe passa por um SLM que exibe uma imagem, cada tom de cinza da imagem confere um atraso de fase diferente na frente de onda resultando na deformação desta frente de onda. Se a deformação for tal que a frente de onda tenha uma fase helicoidal, o feixe adquire OAM. A figura 3.2 mostra exemplos de imagens que podem ser exibidas no SLM para a geração de OAM, essas imagens são chamadas de padrão de fase. Cada padrão de fase confere uma deformação da frente de onda diferente, conferindo uma carga topológica (ℓ) de OAM respectivo [22].

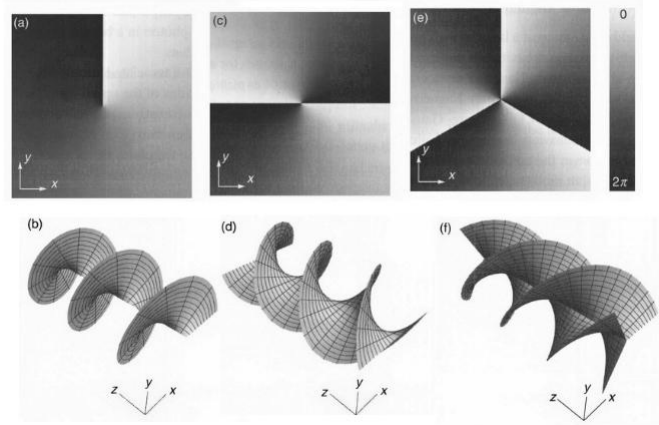


Figura 3.2: Correspondência entre o padrão de fase exibido no SLM e a respectiva carga do vórtice óptico gerado.

Devido ao fácil aceso, simplicidade e capacidade de fácil adaptação da técnica, bastando apenas programar um padrão diferente para fazer um novo teste, esta técnica é muito usada para a geração de feixes com OAM. Contudo esta técnica também tem a limitação de só funcionar com feixes monocromáticos.

Gerador acromático de feixe com OAM

Em 2014 Wakayama et al. [2] propuseram um dispositivo capaz de transferir OAM para um feixe incidente independentemente do comprimento de onda da luz incidente, resolvendo o problema da necessidade de um feixe monocromático [2]. Este dispositivo age como um conversor spin-órbita da luz, ou seja, um feixe circularmente polarizado incidente sobre o dispositivo retorna um feixe com OAM.

Bouchard et al. [9] também propuseram um dispositivo semelhante, capaz de gerar um feixe acromático com OAM. Este dispositivo consiste em um sistema cilíndricamente simétrico na forma de dois cones ocios com as bases unidas. Seu funcionamento tem base nos atrasos de fase entre as componentes do campo provocados por reflexões internas totais, o mesmo princípio do já conhecido romboedro de Fresnel. Sua estrutura também foi baseada nesta peça, a figura 3.3 mostra que a secção transversal é como se fossem dois romboedros de Fresnel unidos e revolucionados em torno de um eixo. Com esta estrutura é possível gerar feixes com $OAM = \pm 2\hbar$.

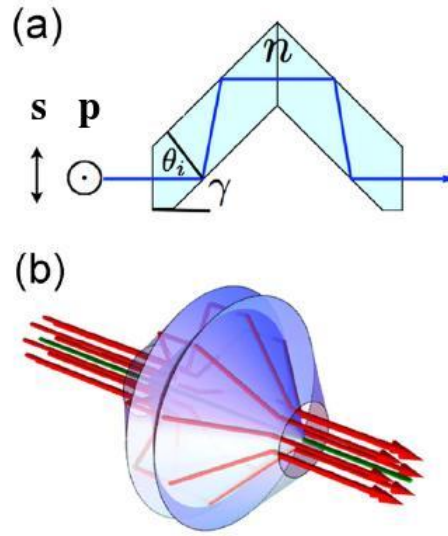


Figura 3.3: **(a)** Representação esquemática de dois romboedros de Fresnel acoplados. A fase relativa entre as componentes s e p da luz incidente depois de quatro reflexões é de π radianos. **(b)** Design tridimensional do dispositivo proposto por Bouchard et al. [9], que é a superfície de revolução formada quando rotacionamos a parte (a).

O romboedro simples de Fresnel é conhecido por transformar um feixe linearmente polarizado em um feixe circularmente polarizado. O romboedro duplo duplica o número de reflexões e, assim, funciona como uma placa de meia onda acromata. Essa alteração na polarização acontece porque o feixe incidente tem atrasos de fase diferentes para cada uma de suas componentes de polarização (paralela (p) e perpendicular (s) ao plano de incidência). Esses atrasos de fase podem ser quantificados pelos coeficientes de Fresnel, que são dados pela razão entre a amplitude refletida (ou transmitida) de determinada componente e a amplitude incidente desta componente.

No caso do dispositivo de Bouchard et al. [9] o ângulo de incidência do feixe é sempre o mesmo, para garantir a reflexão interna total, porém a cada ângulo azimutal ϕ de entrada no romboedro as componentes s e p do campo incidente têm amplitudes diferentes, o que causa um atraso de fase diferente e gradual entre as duas componentes, chegando a 2π .

De acordo com a lei de Snell, quando um feixe que propaga em um meio com índice de refração n_1 incide sobre uma superfície de índice de refração n_2 formando um ângulo igual ou maior que $\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$, ele sofre uma reflexão interna total, ou seja, toda a energia incidente é refletida para o meio [14].

Assumindo um feixe que sofra uma reflexão interna total em um meio com índice

de refração n , com um ângulo de incidência θ_i , a mudança de fase relativa entre as componentes s e p do campo é dada por [9, 23]:

$$\delta = 2 \arctan \left(\frac{\cos(\theta_i) \sqrt{\text{sen}(\theta_i)^2 - n^2}}{\text{sen}(\theta_i)^2} \right) \quad (3.1)$$

Devido a uma sequência de reflexões internas totais sofridas dentro do dispositivo a mudança total de fase relativa entre as componentes que o feixe adquire é dado pela matriz de Jones 2.3, onde δ agora é dado pela expressão 3.1 [9].

O ângulo relativo entre a superfície refletiva e os estados de polarização definem o ângulo de birrefringência α [9]. No entanto, este ângulo muda de acordo com o ponto em que o feixe entra no dispositivo e, portanto o atraso de fase será diferente para cada posição azimutal de entrada. A matriz de Jones que calcula o atraso devido à essa superfície é a matriz 2.4, obtida no capítulo 2.

Uma superfície refletora cilíndricamente simétrica como na figura 3.3 possui $\alpha = \phi$, onde ϕ é o ângulo azimutal. A não uniformidade no ângulo entre as componentes do campo e a superfície refletora gera um atraso de fase também não uniforme e dependente de ϕ que é essencial para a geração de um feixe com frente de onda com fase helicoidal.

Devido à simetria cilíndrica não deve haver troca de momentum angular com o dispositivo, por tanto neste exemplo inicialmente temos SAM= $+\hbar$ e OAM= 0, depois da passagem pelo dispositivo a helicidade é invertida e temos SAM= $-\hbar$, uma variação de $-2\hbar$ como o momentum angular total deve se conservar, o feixe ganha um OAM de $+2\hbar$.

Caracterização de feixes com OAM

A caracterização de feixes com OAM pode ser feita avaliando suas propriedades de difração ou de interferência. O resultado da interferência entre um feixe com frente de onda helicoidal com uma onda plana resulta em um padrão de forquilha como os da figura 3.4, o que nos permite caracterizar um feixe como portador de OAM e mensurar o valor deste momentum angular. Neste padrão de forquilha, os espaços entre os ramos da bifurcação indicam o valor da carga de OAM do feixe e a direção (para cima ou para baixo) indica o sinal de ℓ . Se fizermos o processo inverso, ou seja, incidirmos uma onda plana sobre um holograma que exhibe este padrão, ela é difratada e sofre uma distorção

na frente de onda, gerando um feixe com fase helicoidal [8].

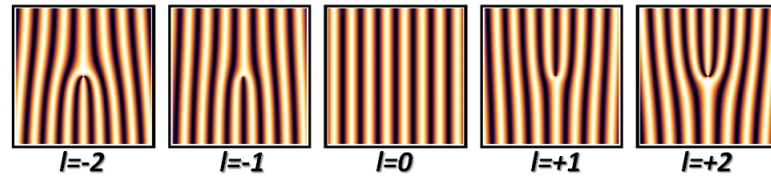


Figura 3.4: Padrão de interferência entre uma onda plana e uma onda com fase helicoidal para diferentes cargas de OAM.

A necessidade de um feixe de referência pode limitar as aplicações em algumas áreas, como por exemplo, na detecção de fontes astronômicas. Uma técnica muito elegante de caracterização que não depende de um feixe de referência, baseada na difração da luz com OAM foi investigada por Hickmann et al. [24]. Um feixe com OAM que incide sobre uma abertura triangular resulta em uma rede de pontos de interferência contrutiva, o número de pontos e a orientação da figura resultante estão relacionados ao valor de ℓ incidente.

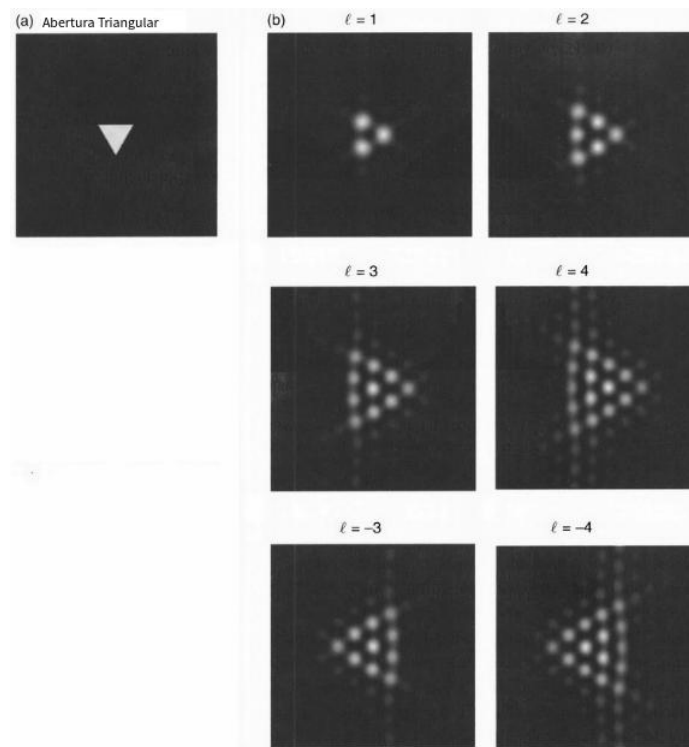


Figura 3.5: Padrões de difração de campo distante gerado por feixes com OAM ao passar por uma abertura triangular para diferentes valores de ℓ .

Capítulo 4

Resultados experimentais

Método holográfico

Uma técnica para a geração de feixes contendo OAM, testada neste trabalho foi a técnica holográfica. A figura 4.1 é uma representação esquemática do sistema montado. Consiste em um laser operando com comprimento de onda de 405 nm, que tem seu feixe ampliado por um telescópio, este feixe incide sobre um SLM e é refletido de forma com que passe por um biprisma de Fresnel o resultado é capturado um uma câmera CCD.

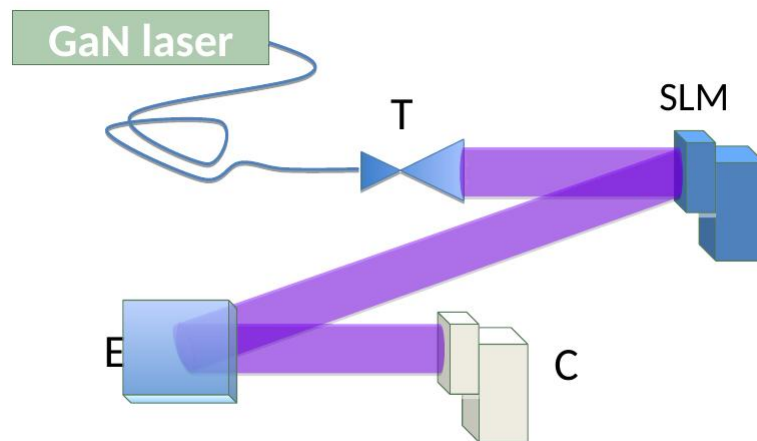


Figura 4.1: Esquema da montagem experimental utilizada para a geração e caracterização de feixes contendo OAM. Laser, fibra ótica, telescópio (T), SLM, espelho (E) e câmera (C)

O dispositivo SLM exibido na figura 4.2 foi dividido em duas partes, o lado comple-

tamente escuro não altera o formato da frente de onda incidente, já o lado que contém o padrão de fase distorce a frente de onda gerando um vórtice ótico, portanto, parte do feixe refletido terá OAM e parte não terá. Ao passar pelo biprisma de Fresnel as duas regiões do feixe são refratadas de modo que haja interferência entre os dois feixes. O resultado esperado da interferência de um vórtice ótico e um feixe gaussiano é um padrão de forquilha.

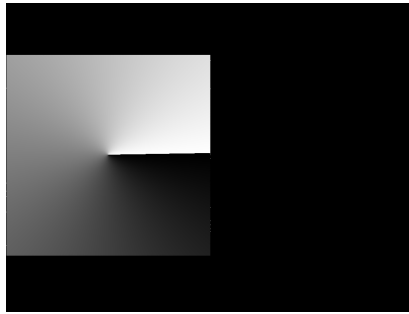


Figura 4.2: Imagem exibida na tela do SLM.

A figura 4.3 mostra os resultados obtidos. A imagem na parte 4.3a é uma referência para determinar as características do sistema, foi gerada a partir da incidência do feixe somente sobre uma tela totalmente escura exibida no SLM e sem a passagem do feixe pelo biprisma. Ainda com o SLM exibindo apenas a tela completamente escura, porém inserindo o biprisma no sistema, obtém-se a imagem 4.3b, que é a interferência das ondas planas que chegam pelos dois lados do biprisma. Para fins de comparação, a imagem 4.3c mostra o resultado da incidência do feixe sobre a imagem, que possui um padrão de fase sem a passagem pelo biprisma. Finalmente, foi iluminada a tela do SLM, que exibia a figura 4.2. O feixe refletido passou pelo biprisma que estava com seu eixo alinhado ao centro da imagem, fazendo com que houvesse interferência entre a luz que passou pelo lado completamente escuro e a luz que passou pelo padrão de fase. O resultado dessa interferência é mostrado na figura 4.3d.

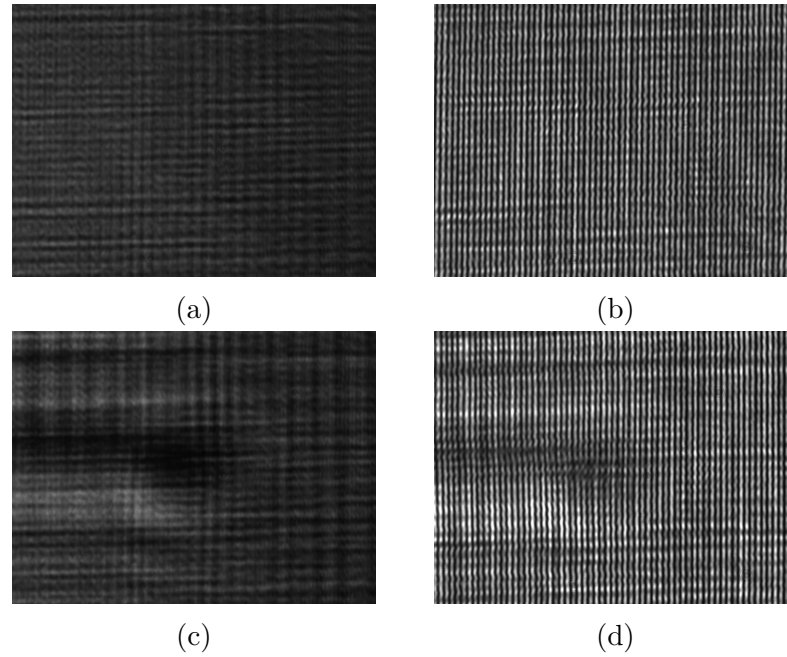


Figura 4.3: Resultados da incidência de luz sobre um SLM: **(a)** exibindo uma tela completamente escura. **(b)** Exibindo uma tela completamente escura, posteriormente o feixe passou pelo biprisma de Fresnel, resultando na interferência entre ondas planas. **(c)** Exibindo um padrão angular de tons de cinza. **(d)** Exibindo a figura 4.2 e posteriormente passando pelo biprisma, resultando na interferência de uma onda plana com uma onda contendo OAM.

Se analisarmos mais de perto veremos que a figura 4.3d tem o padrão de forquilha bem no centro da figura, o que é esperado para a interferência entre uma onda plana e uma onda com OAM. Porém, é possível notar também, que esta forquilha está um pouco distorcida, a distorção é resultado da limitação do SLM utilizado no experimento.

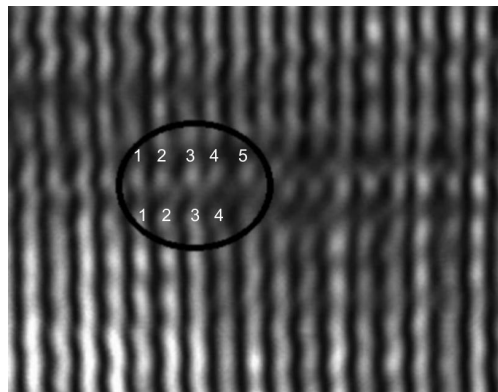
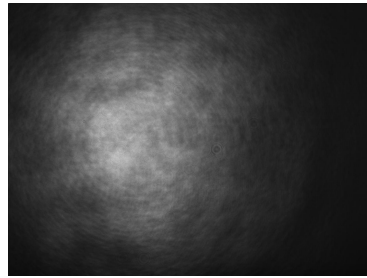
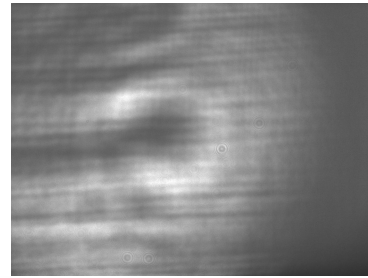


Figura 4.4: Ampliação da região próxima ao centro da imagem 4.3d, evidenciando a formação do padrão de forquilha. Note que a linha número 3 (na parte de baixo) se divide, gerando as linhas 3 e 4 (da parte de cima). Apesar de estarem distorcidas, as demais linhas não se dividem.

Outra demonstração da geração de OAM por esta técnica foi feita incidindo um feixe gaussiano colimado sobre a tela do SLM. Aqui esperava-se encontrar o padrão de rosquinha característico de um feixe com OAM, porém obteve-se a imagem de um círculo incompleto visto na figura 4.5b. Isso acontece pelo mesmo motivo que leva à forquilha disforme, o SLM utilizado não exibe a variação de cor necessária para resultar em um atraso de fase de 2π , segundo as calibrações feitas o equipamento só chega à uma fase de $\frac{3\pi}{2}$.



(a) SLM com tela completamente escura



(b) SLM com tela exibindo padrão de cinza.

Figura 4.5: **(a)** O feixe incidiu sobre o SLM exibindo uma tela completamente escura, como resultado vemos a familiar representação de um feixe gaussiano. **(b)** Nesse caso o feixe gaussiano colimado passou por um SLM exibindo um padrão de cinza, conferindo OAM ao feixe.

Gerador acromático de feixes com OAM

Outra técnica de geração de feixes com OAM a ser testada é o dispositivo apresentado nos trabalhos de Wakayama [2] e Bouchard et al. [9]. A confecção do dispositivo é feita a partir da polimerização do metacrilato de metila em um molde desenvolvido de tal forma que a peça de acrílico resultante tenha o formato semelhante ao esquematizado na figura 3.3. Inicialmente foi desenvolvido um molde como o da figura, 4.6 confeccionado majoritariamente em latão, esta peça é dividida em três partes para que possa ser desenhada quando pronta, conta também com dois anéis de teflon para assegurar melhor vedação.

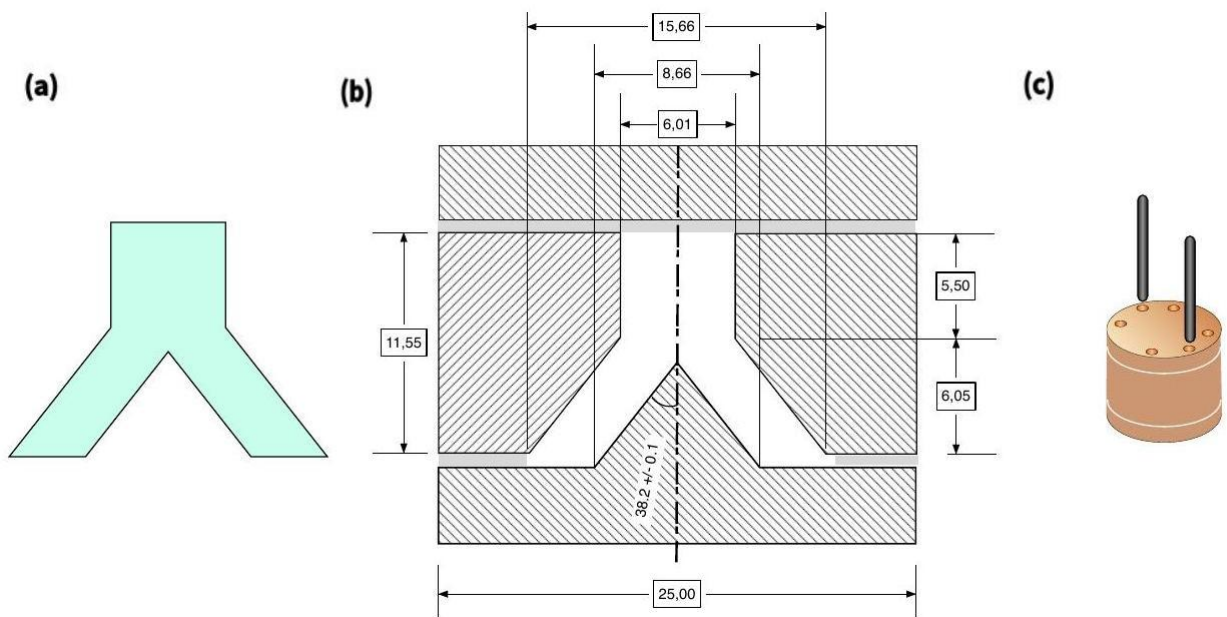


Figura 4.6: (a) Corte da secção transversal da peça resultante. (b) Modelo da forma para a confecção do dispositivo. Aqui as medidas estão em mm, a parte hachurada é composta de latão e as partes em cinza são os anéis de teflon. (c) Esboço tridimensional (fora de escala) do molde incluindo os parafusos e pinos guia.

Infelizmente, as tentativas de polimerização não resultaram em peças com boa qualidade ótica, portanto, não foi possível realizar testes com este tipo de dispositivo até o presente momento.

Capítulo 5

Conclusões

O objetivo principal do trabalho foi descrever o OAM diferenciando-o dos demais tipos de momentum angular da luz e apresentar as conversões spin-órbita da luz, bem como apresentar os métodos de geração e caracterização de feixes com OAM.

Desde o começo do século passado estudamos as propriedades mecânicas da luz. Nas últimas décadas, a descoberta do momentum angular orbital da luz como uma propriedade natural de feixes com uma frente de onda com fase helicoidal desencadeou uma nova série de estudos acerca do OAM, suas propriedades e aplicações, bem como das interações com o já familiar momentum angular de spin (SAM). O OAM e as interações spin-órbita da luz se tornaram a chave para importantes aplicações. As grandes implicações da possibilidade observação do OAM separadamente dos demais tipos de momentum angular aliado à simplicidade nos métodos de geração e caracterização destes feixes, tornam este um dos assuntos mais interessantes da ótica atualmente.

Apesar de tantos avanços a pesquisa acerca deste assunto ainda tem muito caminho pela frente. As aplicações em comunicação, por exemplo, ainda esbarram em dificuldades para transmitir informação a longa distância devido às limitações das fibras óticas comerciais, aos efeitos de uma atmosfera turbulenta entre outros [6], a atmosfera também tem sido um empecilho para as aplicações em astronomia. Propostas para amenizar tais efeitos têm sido estudadas [26]. O momentum angular orbital da luz juntamente com as conversões spin-órbita se mostraram assuntos muito amplos e de interesse tanto teórico quanto experimental.

APÊNDICE A – Momenta Angulares

O momentum angular total do campo eletromagnético pode ser separado em duas componentes, uma referente ao SAM e outra referente ao OAM. Isso pode ser evidenciado partindo da equação 1.4:

$$\mathbf{J}_{em} = \varepsilon_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{r}, \quad (\text{A.1})$$

substituindo a definição do potencial vetor $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e usando a identidade:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \sum_{i=x,y,z} E^i \nabla A^i - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (\text{A.2})$$

vemos que o momentum angular será:

$$\mathbf{J}_{em} = \varepsilon_0 \sum_{i=x,y,z} \int \mathbf{r} \times (E^i \nabla A^i) d^3\mathbf{r} - \varepsilon_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} d^3\mathbf{r}. \quad (\text{A.3})$$

Na segunda integral, podemos usar a identidade:

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla^i (E^i \mathbf{r} \times \mathbf{A}) - \mathbf{r} \times \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r}. \quad (\text{A.4})$$

Sendo $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{E}$, a identidade se reduz a:

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \sum_{i=x,y,z} \nabla^i (E^i \mathbf{r} \times \mathbf{A}) - \mathbf{E} \times \mathbf{A} \quad (\text{A.5})$$

Aplicando o teorema da divergência, teremos que:

$$\int \nabla^i (E^i \mathbf{r} \times \mathbf{A}) d^3\mathbf{r} = \int_S E^i (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) dS^i \quad (\text{A.6})$$

A integral de superfície se anula, já que o campo elétrico é nulo em todos os pontos

externos ao pacote de onda. Assim substituindo a equação A.5 em A.3, teremos:

$$\mathbf{J}_{em} = \varepsilon_0 \sum_{i=x,y,z} \int E^i (\mathbf{r} \times \nabla) A^i d^3\mathbf{r} + \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} d^3\mathbf{r} \quad (\text{A.7})$$

Uma analogia com o operador de momentum angular da teoria quântica sugere a associação do primeiro termo com o momentum angular orbital. O segundo termo claramente depende da natureza vetorial do campo e, portanto sua polarização, o que torna natural a associação deste termo ao spin. Para justificar esta última interpretação, pode-se ainda considerar uma onda circularmente polarizada e sem fase helicoidal (OAM), em que o campo elétrico (\mathbf{E}) e o potencial vetor (\mathbf{A}) são dados por:

$$\mathbf{E}_\sigma = E_0 \hat{\mathbf{i}} \cos(\omega t - kz) + \sigma E_0 \hat{\mathbf{j}} \sin(\omega t - kz) \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{A}_\sigma = -\frac{cE_0}{\omega} \hat{\mathbf{i}} \sin(\omega t - kz) + \sigma \frac{cE_0}{\omega} \hat{\mathbf{j}} \cos(\omega t - kz) \quad (\text{A.9})$$

Onde $\sigma = \pm 1$. Utilizando estas expressões na equação A.7, obtemos que a parte de spin é dada por:

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} d^3\mathbf{r} = \pm c\varepsilon_0 \int \hat{\mathbf{z}} \frac{E_0^2}{\omega} d^3\mathbf{r} \quad (\text{A.10})$$

Se comparamos a energia (w) e o spin da onda circular, temos que:

$$\frac{S_z}{w} = \sigma \frac{c\varepsilon_0 \int \hat{\mathbf{z}} E_0^2 / \omega d^3\mathbf{r}}{c\varepsilon_0 \int \hat{\mathbf{z}} E_0^2 d^3\mathbf{r}} = \frac{\sigma}{\omega} \quad (\text{A.11})$$

Esta é exatamente a razão entre a componente z do spin do fóton ($\sigma\hbar$) e a sua energia ($\hbar\omega$).

A expressão A.7 ainda nos mostra que o termo de SAM está associado às propriedades vetoriais dos campos e é independente do sistema de referências. O termo de OAM, por outro lado, depende do referencial (posição) e não das propriedades vetoriais do campo.

Uma outra abordagem que considera campos na aproximação paraxial nos permite visualizar melhor o acoplamento entre o SAM e o OAM interno. Partindo da expressão para o momentum linear e tomando a média temporal obtemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle &= \varepsilon_0 \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} (\langle \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \rangle + \langle \mathbf{E}^* \times \mathbf{B} \rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Se considerarmos um campo $u(x, y, z)$ ou $u(r, \phi, z)$ como a função escalar complexa

que descreve a distribuição da amplitude do campo que satisfaz a equação de onda na aproximação paraxial, os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} no caso de um feixe linearmente polarizado são:

$$\mathbf{E} = ik \left[u \hat{\mathbf{x}} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right] e^{ikz}, \quad \mathbf{B} = ikc \left[u \hat{\mathbf{y}} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{z}} \right] e^{ikz} \quad (\text{A.13})$$

A média temporal da parte real do momentum linear fica:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{2} (\langle \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \rangle + \langle \mathbf{E}^* \times \mathbf{B} \rangle) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[ik \left(u \hat{\mathbf{x}} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{ikz} \right] \times \frac{\varepsilon_0}{2} \left[-ikc \left(u^* \hat{\mathbf{y}} - \frac{i}{k} \frac{\partial u^*}{\partial y} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{-ikz} \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0}{2} \left[-ik \left(u^* \hat{\mathbf{x}} - \frac{i}{k} \frac{\partial u^*}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{-ikz} \right] \times \frac{\varepsilon_0}{2} \left[ikc \left(u \hat{\mathbf{y}} + \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{ikz} \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} ck^2 \left(|u|^2 \hat{\mathbf{z}} + \frac{i}{k} u \frac{\partial u^*}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{i}{k} u^* \frac{\partial u}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + |u|^2 \hat{\mathbf{z}} - \frac{i}{k} u^* \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{i}{k} u \frac{\partial u^*}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = i\omega \frac{\varepsilon_0}{2} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + \omega k \varepsilon_0 |u|^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.15})$$

Note que esse resultado pôde ser expresso de maneira mais agradável utilizando-se o gradiente dos campos. Isso só é possível porque os termos com $\partial u / \partial z$ podem ser considerados muito menores que ku .

Para um campo com fase helicoidal, do tipo $u(r, \phi, z) = u_0(r, z) e^{i\ell\phi}$, a componente ϕ da densidade de momentum linear é:

$$\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle_\phi = \varepsilon_0 \omega \ell |u|^2 / r, \quad (\text{A.16})$$

portanto, quando fizermos o produto vetorial com \mathbf{r} , teremos uma densidade de momentum angular com magnitude $j_z = \varepsilon_0 \omega \ell |u|^2$. A densidade de energia ($c\mathbf{P}$) deste feixe é dada por:

$$w = c\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle_z = c\varepsilon_0 \omega k |u|^2 = \varepsilon_0 \omega^2 |u|^2. \quad (\text{A.17})$$

Então, a razão entre a densidade de momentum angular e a densidade de energia é dado por:

$$\frac{j_z}{w} = \frac{\ell}{\omega}. \quad (\text{A.18})$$

Quando integramos as densidades ao longo de todo o volume, esta razão fica:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\iint r dr d\phi (r \times \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle)_z}{c \iint r dr d\phi \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle_z} = \frac{\varepsilon_0 \omega \ell \iint |u|^2 r dr d\phi}{\varepsilon_0 \omega^2 \iint |u|^2 r dr d\phi} = \frac{\ell}{\omega}. \quad (\text{A.19})$$

Note que até agora só foi considerado um feixe linearmente polarizado, porém é necessário generalizar a abordagem para qualquer polarização para que toda a história do momentum angular da luz fique clara. Para uma polarização arbitrária, o potencial vetor é dado por $\mathbf{A} = (\alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}})u(x, y, z)e^{ikz}$, onde α e β são números complexos que descrevem a diferença de fase entre as componentes, determinando a polarização do campo. Neste caso, os campos elétrico e magnético são:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \left[i\omega u(\alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}}) - c \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{ikz} \\ \mathbf{B} &= \left[-\beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + ik u \right) \hat{\mathbf{x}} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial z} + ik u \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{ikz}.\end{aligned}\tag{A.20}$$

Com um cálculo análogo ao feito para um feixe linearmente polarizado é possível demonstrar [10] que a média temporal da parte real da densidade de momentum linear é:

$$\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = i\omega \frac{\varepsilon_0}{2} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) + \omega k \varepsilon_0 |u|^2 \hat{\mathbf{z}} - \omega \sigma_z \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \hat{\phi}.\tag{A.21}$$

Os dois primeiros termos são independentes da polarização e são referentes ao momentum angular orbital, o último termo depende da polarização e é referente ao spin. Finalmente, pode-se demonstrar que a densidade de momentum angular fica:

$$\begin{aligned}j_z &= (\mathbf{r} \times \varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle)_z \\ &= r \varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle_\phi \\ &= i\omega \frac{\varepsilon_0}{2} r \left(u_0^* e^{il\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} u_0 e^{-il\phi} - u_0 e^{-il\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} u_0^* e^{il\phi} \right) - \omega \sigma_z \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \\ &= i\omega \frac{\varepsilon_0}{2} \left(-u_0^* e^{il\phi} i l u_0 e^{-il\phi} - u_0 e^{il\phi} u_0^* i l e^{il\phi} \right) - \omega \sigma_z \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \\ &= \varepsilon_0 \omega l |u|^2 - \frac{\varepsilon_0}{2} \omega r \sigma \frac{\partial |u|^2}{\partial r}.\end{aligned}\tag{A.22}$$

A aproximação paraxial garante que $\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle_z = \varepsilon_0 \omega k |u|^2$. Então, como feito antes, efetua-se a integração ao longo do feixe e a razão entre o momentum angular e a energia resulta:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\ell + \sigma}{\omega}.\tag{A.23}$$

Referências Bibliográficas

- [1] ALLEN, L.; BEIJERSBERGEN M, W. S. R.; WOERDMAN, J. Orbital angular momentum of light and transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A* **45**, 8185–8189 (1992).
- [2] WAKAYAMA, T.; RODRÍGUEZ-HERRERA, O. G.; TYO, J. S.; OTANI, Y.; YONEMURA, M.; YOSHIZAWA, T. Generation of achromatic, uniform-phase, radially polarized beams. *Opt. Express* **22**, 3306-3315, 2014.
- [3] BELÉNDEZ, A. La unificación de luz, electricidad y magnetismo: la “síntesis electromagnética” de Maxwell. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo , v. 30, n. 2, p. 2601.1-2601.20, 2008 .
- [4] PADGETT, M. J.; COURTIAL, J.; ALLEN, L. Light’s orbital angular momentum. *Physics Today* p.35, 2004.
- [5] TAMBURINI, F. et al. Overcoming the Rayleigh Criterion Limit with Optical Vortices. *Phys. Rev. Lett.*, v. 97, 163903(4), (2006).
- [6] TORRES, J. P.; TORNER, L. *Twisted photons: applications of light with orbital angular momentum*. John Wiley & Sons, p.1-23, p.155-178, 2011.
- [7] GIBSON, G. et al. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Opt. Express*, OSA, **12**, n. 22, 5448-5456, (2004) Nov 2004.
- [8] KARIMI, E. Generation and manipulation of laser beams carrying orbital angular momentum for classical and quantum information applications. 2009. Thesis (PhD in Physics) – Dipartimento di Scienze Fisiche, Università Degli Studi di Napoli, Napoli. 2009.
- [9] BOUCHARD, F.; HARJASPREET, M.; MIRHOSSEINI, M.; KARIMI, E.; BOYD, R. W. Achromatic orbital angular momentum generator. *New Journal of Physics*, **16** (2014) 123006.
- [10] ALLEN, L.; PADGETT, M. J.; BABIKER, M. The orbital angular momentum of light. *E. Wolf, Progress in Optics XXXIX*,**39**, 291–372, 1999.
- [11] POYNTING, J. The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarized light. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, **82**, 560–567, 1909.

- [12] BETH, R. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. *Phys. Rev.*, **50**, 115–125, 1936.
- [13] DARWIN, C. Notes on the theory of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, p.36-52, 1932.
- [14] HECHT, E. *Optics*. Addison Wesley, 1987.
- [15] FRENKEL, J. *Princípios de Eletrodinâmica Clássica*. EDUSP, 1996.
- [16] O'NEIL, A. T. et al. Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88,053601, Jan 2002.
- [17] DUDLEY, A.; MHLANGA, T.; LAVARY, M.; MCDONALD, A.; ROUX, F. S.; PADGETT, M.; FORBES, A. Efficient sort of Bessel beams. *Optics Express*, v.21, p. 165-171 2013.
- [18] BLIOKH, K. Y.; RODRIGUES-FORTUÑO, F. J.; NORI, F.; ZAYATS, A. V. Spin-orbit interactions of light. *Nature Photonics*, **9**, 796–808, 2015.
- [19] BLIOKH, K. Y. Geometrodynamics of polarized light: Berry phase and spin Hall effect in a gradient-index medium. *J. Opt.*, **11**, 094009, 2009.
- [20] BEIJERSBERGEN, M. et al. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate. *Optics Communications*,112(5),321-327 1994.
- [21] CRUZ Y CRUZ, S.; ESCAMILLA, N.; VELÁZQUEZ, V. Generation of Sources of Light with well Defined Orbital Angular Momentum. *Journal of Physics:Conference Series* **698** 012016, 2016.
- [22] ANDREW, D. L.; BABIKER, M. The Angular Momentum of Light *Cambridge University Press*, p.17-43, 2012.
- [23] PEATROSS, J.; WARE, M. Physics of Light and Optics *Physics of Light and Optics*, 2004.
- [24] HICKMANN, J. M.; FONSECA, E. J. S.; SOARES, W. C.; CHÁVEZ-CERDA, S. Unveiling a Truncated Optical Lattice Associated with a Triangular Aperture Using Light's Orbital Angular Momentum *Phys. Rev. Lett.*, 105(5), 053904, 2010.
- [25] YAO, A. M.; PADGETT, M. J. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Adv. Opt. Photon.*, OSA, Jun 2011.
- [26] SPONSELLI, A. Study of propagation and detection of the orbital angular momentum of light for astrophysical applications. 2013. Thesis (PhD Astronomy) - Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università degli Studi di Padova, Padova, 2013.