

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Gráficos parabólicos de curvatura média constante
em \mathbb{H}^3 com bordo prescrito satisfazendo a condição
da declividade limitada**

por

CARMEN VIEIRA MATHIAS

IM-UFRGS
2009

Tese submetida por CARMEN VIEIRA MATHIAS como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Jaime Bruck Ripoll

Professor Co-orientador:

Dr. Ari João Aiolfi

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Prof. Dr. Marcos Dajczer

Pof^a. Dra. Nedir do Espírito Santo

Data de Defesa: 13 de março de 2009

Para Fernando e Alice,
com amor.

Agradecimentos

O que aprendi com essa tese? Entre outras coisas, aprendi que nessa vida nunca chegaremos em nenhum lugar sozinhos, sempre necessitamos dos outros para alcançar nosso sucesso. Muitas vezes um simples gesto e um pequeno apoio podem mudar nossa vida e contribuir para mantermos o equilíbrio. Dessa forma, agradeço:

Primeiramente, à Deus, pela existência, unicidade e por ter mantido minha sanidade no longo caminho que percorri.

Ao professor Jaime Ripoll pela confiança, exemplo, orientação e pelos ensinamentos que muito contribuíram para meu aperfeiçoamento profissional.

Ao professor Ari João Aiolf, pela amizade, generosidade, paciência e orientação valiosa.

Ao professor Pedro Fusieger, pelas palavras de apoio e pelas contribuições ao longo do percurso.

Aos professores da banca, pelos conselhos e pelas sugestões que enriqueceram este trabalho.

Aos ex-colegas da Pós, em especial à Lizandra, Giovanni, Édson, Fidelis, Cintia Peixoto e Cinthia Schneider, pela amizade e companheirismo e à Rosane, secretária do programa, pela disponibilidade e ajuda.

À comadre Alice que compartilhou as dificuldades desta trajetória e por me fazer acreditar que tudo daria certo.

Aos meus pais Ione e Salvador, que são os meus estímulos e aos meus irmãos e grandes amigos, Carol, Ramon e Maria Aparecida, que sempre compreenderam meus momentos de ausência e minhas angústias.

Aos colegas da UNIFRA e a todos os amigos do Clube XT, pelo apoio.

À Capes, pelo apoio financeiro e ao Centro Universitário pela dispensa.

Ao Fernando, o amor da minha vida, pois sem seu carinho, companheirismo, amizade, amor e principalmente paciência, esse trabalho não chegaria ao fim. Espero poder recompensar tudo isso quando chegar a tua vez!!!

E finalmente, à minha filhota Alice, luz do meu caminho, que cedeu grande parte do tempo da qual merecia minha atenção para que eu pudesse concluir este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a existência e unicidade de gráficos parabólicos de curvatura média constante H em \mathbb{H}^3 cujo bordo é dado a *priori*, sobre hipóteses que relacionam H com a geometria do domínio e uma condição sobre o dado no bordo, que por analogia com um problema similar para gráficos em \mathbb{R}^3 , a denominamos condição de declividade limitada.

Abstract

In this work, we investigate the existence and uniqueness of parabolic graphs of constant mean curvature H in \mathbb{H}^3 whose boundary is given *a priori*, under hypothesis relating H with the geometry of the domain and a condition on the boundary data that, by analogy with a similar problem for vertical graphs in \mathbb{R}^3 , we denominated it by *bounded slope condition*.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 O espaço hiperbólico	4
1.1.1 O modelo do semi-espaço superior	5
1.2 O operador curvatura média constante	7
1.2.1 Campos de Killing	7
1.2.2 Classificação dos diferentes gráficos de Killing em \mathbb{H}^3	9
1.2.3 Operador curvatura média constante para gráficos <i>Warped</i>	10
1.2.4 O operador curvatura média constante para gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3	15
2 Gráficos parabólicos de cmc em \mathbb{H}^3 com bordo prescrito	16
2.1 O problema de Dirichlet relativo a gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3	16
2.2 A condição da declividade limitada	19
3 Resultados principais	22
3.1 Um lema básico	22
3.2 Resultados de existência	27
3.2.1 O Teorema Principal	31
3.2.2 Um exemplo esclarecedor	33
Bibliografia	35

Introdução

No final da década de sessenta do século XX, James Serrin, através de seu trabalho [15], forneceu critérios para resolver o problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 em um domínio limitado do plano. Em sua versão para $H \geq 0$ e solução "suave até o bordo", o resultado provado por Serrin é o que segue:

Teorema 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e de classe $C^{2,\alpha}$ e $H \geq 0$. O problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ Q_H^\#(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad (1)$$

tem solução única para qualquer $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dada a priori se, e somente se, a curvatura k de $\partial\Omega$ satisfaz

$$k \geq 2H.$$

(Aqui div , ∇ e $|\cdot|$ são naturalmente o divergente, gradiente e norma euclidianos).

Observamos que o gráfico de uma solução u de (1), a saber

$$G_E(u) = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \overline{\Omega}\},$$

é uma superfície em \mathbb{R}^3 de curvatura média constante H quando orientado com o vetor normal unitário η satisfazendo $\langle \eta, (0, 0, 1) \rangle \leq 0$.

Serrin provou um resultado mais geral que o exposto no teorema acima, que pode ser visto com maiores detalhes no Teorema 16.11 de [9]. Para $H \geq 0$, pode ser posto como segue:

Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^2 e de classe C^2 . Então, dada uma função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, existe um único gráfico de curvatura média constante H definido em $\overline{\Omega}$ tendo como bordo o gráfico de φ se, e somente se, a curvatura k de $\partial\Omega$ satisfaz $k \geq 2H$.

Denominaremos a versão dada no Teorema como o "caso suave" do Teorema de Serrin.

Considerando agora o espaço hiperbólico, ou seja, considerando \mathbb{H}^3 o espaço tridimensional, simplesmente conexo e de curvatura seccional constante igual a -1 , aventou-se recentemente para uma extensão do caso suave do Teorema de Serrin em \mathbb{H}^3 para gráficos ditos "parabólicos", como relataremos brevemente abaixo. Uma descrição mais detalhada de gráficos parabólicos encontra-se ao longo do primeiro capítulo desta tese.

Consideremos $\mathbb{G}_H = \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ um subgrupo a 1- parâmetro de isometrias de \mathbb{H}^3 do tipo parabólico, ou seja, as órbitas de \mathbb{G}_H ,

$$\mathbb{G}_H(p) = \{\phi_r(p); r \in \mathbb{R}\}, p \in \mathbb{H}^3,$$

são horociclos que possuem um ponto comum no infinito. Seja V o campo de Killing parabólico associado, isto é,

$$V(p) = \left. \frac{d}{dr} \phi_r(p) \right|_{r=0}, \quad p \in \mathbb{H}^3.$$

Seja \mathbb{P} uma superfície totalmente geodésica de \mathbb{H}^3 ortogonal as órbitas de \mathbb{G}_H . Para um domínio $\Omega \subset \mathbb{P}$ e uma função $u \in C^2(\Omega)$, o gráfico parabólico de u é definido por

$$G(u) = \{ \phi_{u(p)}(p) ; p \in \Omega \}.$$

Dado $H \in \mathbb{R}$, $G(u)$ possui curvatura média constante H , com respeito ao vetor unitário normal η tal que $\langle V, \eta \rangle \leq 0$ se, e somente se,

$$Q_H(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\rho \operatorname{grad} u}{(1 + \rho^2 \|\operatorname{grad} u\|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \rho \rangle}{(1 + \rho^2 \|\operatorname{grad} u\|^2)^{\frac{1}{2}}} + 2H = 0 \quad (2)$$

onde

$$\rho^2 = \frac{1}{\|V\|^2}$$

e div e grad são o divergente e o gradiente em \mathbb{P} .

Para $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado e de classe $C^{2,\alpha}$ e $H \geq 0$, denominaremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ Q_H(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é uma função dada *a priori*, como sendo o problema de Dirichlet suave para a equação das superfícies de curvatura média constante em \mathbb{H}^3 dadas como gráficos parabólicos.

No artigo [10] de 2005, os autores obtiveram uma extensão do caso suave do Teorema de Serrin para gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 que pode ser posta como segue: o problema de Dirichlet (3) tem solução única para qualquer $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dada *a priori* se, e somente se, a curvatura média do cilindro

$$C(\partial\Omega) = \{ \phi_r(p), p \in \partial\Omega \}$$

é maior ou igual a H (considerando-se $C(\partial\Omega)$ orientado segundo o vetor normal unitário apontando para a componente simplesmente conexa de $\mathbb{H}^3 \setminus C(\partial\Omega)$).

Observamos que tal resultado, entretando, torna-se um caso particular do Teorema 1.1 de [5], ao considerarmos que \mathbb{H}^3 admite uma representação em warped product, conforme explicitaremos no segundo capítulo desse trabalho, onde fazemos uma adaptação para o nosso contexto.

Porém, se a condição imposta sobre a curvatura média de $C(\partial\Omega)$ não for satisfeita, a existência de soluções do problema (3) pode ainda persistir sob algumas hipótese extras sobre o domínio e sobre o dado φ no bordo. Como exemplo de trabalho nesta direção, citamos [3] que considera o caso $\varphi = 0$.

Caso o dado no bordo não seja nulo e a curvatura média de $C(\partial\Omega)$ seja menor do que H , nos perguntamos qual seria uma condição sobre o dado no bordo que ainda poderia implicar na existência de solução de (3).

As ideias contidas no artigo [14] nos deram uma direção: apontaram para uma condição sobre o dado no bordo que, levando-se em conta uma situação similar para o espaço euclidiano, a denominaremos de "condição de declividade limitada", cuja definição é a que segue (Definição 2.8):

Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$. Dizemos que (Ω, φ) satisfazem a condição da declividade limitada com constante $K \geq 0$ se, para todo ponto $p \in \partial\Omega$, existem superfícies equidistantes Σ_p^\pm dadas como gráficos parabólicos de funções $\pi_p^\pm : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} i) \quad & \pi_p^-(q) \leq \varphi(q) \leq \pi_p^+(q) \quad \forall q \in \partial\Omega \\ ii) \quad & \pi_p^-(p) = \varphi(p) = \pi_p^+(p) \\ iii) \quad & \|\text{grad } \pi_p^\pm\| \leq K \text{ em } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{4}$$

onde grad denota o gradiente hiperbólico em \mathbb{P} .

O uso da condição de declividade limitada permitiu-nos então que resolvêssemos o problema (3) para domínios mais gerais do que aqueles dados pela extensão do caso suave do Teorema de Serrin para gráficos parabólico, e esta é a principal contribuição desta tese.

Precisamente: tomando

$$\delta = \exp(\text{diam}(\Omega)),$$

onde

$$\text{diam}(\Omega) = \sup \{d(p, q) ; p, q \in \overline{\Omega}\},$$

com d a distância hiperbólica, provamos:

Teorema 2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado, simplesmente conexo e de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Suponha que (Ω, φ) satisfaça a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$. Seja k a curvatura de $\partial\Omega$ em \mathbb{H}^3 com respeito a orientação interna. Dado*

$$H \geq \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}},$$

se

$$k > \delta(H + 1)(1 + K^2)^2 + 1,$$

então existe uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ de $Q_H = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Com o objetivo de melhor explicitar o resultado acima, dividiremos esta tese em três capítulos: No primeiro capítulo trataremos da geometria do espaço hiperbólico tridimensional. Apresentaremos no modelo do semi-espaço superior \mathbb{U}^3 do espaço hiperbólico as superfícies umbílicas, descrevendo algumas propriedades que serão necessárias no decorrer do trabalho. Também abordamos os Campos de Killing associados ao subgrupo a 1-parâmetro das isometrias de \mathbb{H}^3 do tipo parabólico e os gráficos parabólicos de curvatura média constante em \mathbb{H}^3 . No segundo Capítulo, citaremos alguns resultados relacionados a gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 que possuem ligação com nosso o resultado principal, onde faremos ainda algumas considerações em relação a "condição da declividade limitada". No terceiro e último capítulo, apresentaremos os principais resultados desta tese e que culminará com o Teorema 2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo caracterizamos as superfícies umbílicas do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 e descrevemos no modelo do semi-espaço superior de \mathbb{H}^3 as superfícies umbílicas. Em seguida tratamos dos campos de Killing associados ao subgrupo a 1-parâmetro das isometrias de \mathbb{H}^3 do tipo parabólico e encerramos o capítulo caracterizando os gráficos parabólicos de curvatura média constante em \mathbb{H}^3 .

1.1 O espaço hiperbólico

O espaço hiperbólico de dimensão três, que usualmente denota-se por \mathbb{H}^3 , é a única (a menos de isometria) variedade Riemannianna tridimensional, completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante e igual a -1 .

Seja S o conjunto de todas as geodésicas $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^3$ parametrizadas pelo comprimento de arco (ou seja, S é o conjunto de todos os raios geodésicos em \mathbb{H}^3). A relação R sobre S definida por $\gamma_1 R \gamma_2$ se, e somente se

$$\sup d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < \infty,$$

onde $d_H : \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a distância hiperbólica, é uma relação de equivalência. Considere o conjunto quociente

$$\partial\mathbb{H}^3 := S/R$$

e defina

$$\overline{\mathbb{H}^3} := \mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3.$$

Os pontos de $\partial\mathbb{H}^3$ são chamados de pontos no infinito de \mathbb{H}^3 e diz-se que uma geodésica γ em \mathbb{H}^3 passa por $p \in \partial\mathbb{H}^3$ (ou $p \in \partial\mathbb{H}^3$ é um ponto final de γ) se p pertence a classe de equivalência de $\gamma|_{[0, +\infty)}$ ou $\gamma|_{(-\infty, 0]}$.

Observamos que toda geodésica em \mathbb{H}^3 tem exatamente dois pontos finais e, além disso, dados $p, q \in \partial\mathbb{H}^3$, $p \neq q$, existe uma única geodésica em \mathbb{H}^3 tendo p e q como pontos finais. Faz sentido portanto a seguinte classificação: dadas duas geodésicas em \mathbb{H}^3 , diz-se que elas são incidentes se possuem um ponto comum em \mathbb{H}^3 ; assintoticamente paralelas se elas tem um ponto final comum, e ultra paralelas se elas não possuem interseções em $\overline{\mathbb{H}^3}$.

Dado $p \in \partial\mathbb{H}^3$, dizemos que uma superfície fechada L em \mathbb{H}^3 é uma *horosfera* centrada em p se L é ortogonal a todas as geodésicas com ponto final p . Já uma *esfera*

hiperbólica de centro $p \in \mathbb{H}^3$ e raio $r > 0$ é o conjunto

$$S_H(p, r) = \{x \in \mathbb{H}^3; d_H(x, p) = r\}.$$

Dado $p \in \mathbb{H}^3$ e V é um subespaço bidimensional de $T_p\mathbb{H}^3$, uma *superfície totalmente geodésica* em \mathbb{H}^3 passando por p e tangentes a V (ou *plano hiperbólico* em \mathbb{H}^3 passando por p e tangente a V) é a união de todas as geodésicas passando por p e tangente a V em p . Já uma *superfície equidistante* em \mathbb{H}^3 é uma componente conexa do conjunto de pontos equidistantes de uma dada superfície totalmente geodésica. Observamos que esta definição inclui as superfícies totalmente geodésicas.

As superfícies umbílicas de \mathbb{H}^3 são exatamente as horosferas, as esferas hiperbólicas e as superfícies equidistantes, sendo que as esferas hiperbólicas têm curvatura média H tal que $|H| > 1$, as horosferas têm curvatura média H com $|H| = 1$ e as superfícies equidistantes tem a curvatura média H , $|H| \in [0, 1)$, lembrando que as superfícies equidistantes de curvatura média nula são exatamente as superfícies totalmente geodésicas.

1.1.1 O modelo do semi-espaço superior

Em nosso trabalho, todas as provas dos principais resultados serão feitas no modelo do semi-espaço superior de Poincaré para \mathbb{H}^3 , ou seja,

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$$

munido com a métrica

$$ds^2 = \frac{1}{x_3^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad (1.1)$$

e que denotaremos por \mathbb{U}^3 .

Observamos que há vários modelos para \mathbb{H}^3 que são, por construção, isometricamente difeomorfos.

Denotaremos $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ por $\widehat{\mathbb{R}}^3$. Em $\widehat{\mathbb{R}}^3$ considere as esferas euclidianas

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^3; |x - a| = r\}, \quad a \in \mathbb{R}^3, \quad r > 0,$$

e os planos estendidos

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle a, 2x \rangle = t\} \cup \{\infty\}, \quad 0 \neq a \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $|\cdot|$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ são a norma e o produto interno em \mathbb{R}^3 respectivamente. Designaremos por esfera em $\widehat{\mathbb{R}}^3$ qualquer uma destas formas acima. Em particular, designaremos por círculo em $\widehat{\mathbb{R}}^3$ qualquer uma das seguintes formas: um círculo euclidiano em \mathbb{R}^3 ou uma reta estendida $r \cup \{\infty\}$, onde r é uma reta euclidiana em \mathbb{R}^3 .

Descrição das superfícies umbílicas em \mathbb{U}^3

Faremos no que segue algumas considerações a respeito de \mathbb{U}^3 . Observamos inicialmente que o bordo do semi espaço superior é dado por

$$\partial\mathbb{U}^3 = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\} \equiv \widehat{\mathbb{R}}^2.$$

Observamos que as geodésicas em \mathbb{U}^3 são as intersecções com \mathbb{R}_+^3 de círculos de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ ortogonais a $\partial\mathbb{U}^3 = \widehat{\mathbb{R}}^2$, que podemos então descrevê-las como a intersecção com \mathbb{R}_+^3 das retas euclidianas verticais de \mathbb{R}^3 ou dos círculos de \mathbb{R}^3 ortogonais a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

As superfícies totalmente geodésicas de \mathbb{U}^3 são identificadas como as intersecções com \mathbb{R}_+^3 das esferas de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ que interceptam $\widehat{\mathbb{R}}^2 = \partial\mathbb{U}^3$ ortogonalmente (que podemos descrever então como as intersecções com \mathbb{R}_+^3 de planos euclidianos verticais de \mathbb{R}^3 ou de esferas euclidianas de \mathbb{R}^3 ortogonais a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$). (vide figura 1.1).

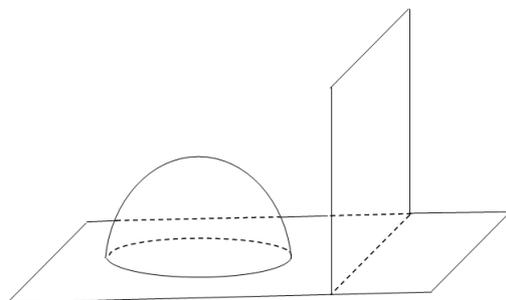


Figura 1.1: Superfícies totalmente geodésicas.

Uma superfície equidistante de \mathbb{U}^3 é uma componente conexa dos pontos que equidistam na métrica (1.1) de uma dada superfície totalmente geodésica, e consequentemente são identificadas como as intersecções com \mathbb{R}_+^3 das esferas de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ que não estão inteiramente contidas em \mathbb{R}_+^3 (que podemos descrever então como as intersecções com \mathbb{R}_+^3 de planos euclidianos de \mathbb{R}^3 não horizontais ou de esferas euclidianas de \mathbb{R}^3 que não estejam inteiramente contidas em \mathbb{R}_+^3). Se não for uma superfície totalmente geodésica, sua curvatura média satisfaz $0 < H < 1$ se o vetor curvatura média aponta para a superfície totalmente geodésica da qual elas equidistam, em particular, $|H| = \cos \alpha$, onde α é o ângulo entre ela e $\partial\mathbb{U}^3$ (que é menor ângulo por definição), como podemos ver na figura abaixo: (vide figura 1.2).

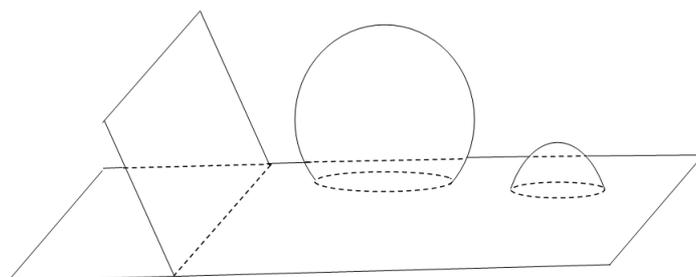


Figura 1.2: Superfícies equidistantes.

Uma esfera hiperbólica de \mathbb{U}^3 é o conjunto de pontos que equidistam, na métrica (1.1), de um determinado ponto de \mathbb{U}^3 (chamado centro hiperbólico). Verifica-se que as esferas hiperbólicas são também esferas euclidianas: precisamente, as esferas de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ totalmente contidas em \mathbb{R}_+^3 . Sua curvatura média satisfaz $H > 1$ se o vetor curvatura média aponta para o interior dela. Em particular se $\rho > 0$ denota o raio hiperbólico da esfera, a curvatura média é dada por $H = \cosh \rho$.

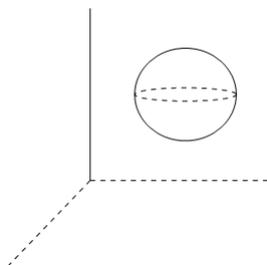


Figura 1.3: Esfera hiperbólica.

Uma horoesfera em \mathbb{U}^3 pode ser entendida como uma esfera com centro hiperbólico em $\partial\mathbb{U}^3$. Elas são identificadas como sendo a intersecção com \mathbb{R}_+^3 das esferas de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ tangentes a $\partial\mathbb{U}^3$ (ou seja, podem ser descritas como os planos horizontais de \mathbb{R}^3 dados por $L(a) = \{z = a\}$, $a > 0$, e pelas intersecções com \mathbb{R}_+^3 de esferas euclidianas de \mathbb{R}^3 tangentes a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$). Sua curvatura média satisfaz $H = 1$ se o vetor curvatura média tem o mesmo sentido do vetor $(0, 0, 1)$ no caso dos planos horizontais $L(a) = \{z = a\}$, $a > 0$, ou se aponta para o interior no caso das esferas euclidianas tangentes a $\partial\mathbb{U}^3$. Destacamos ainda que um horociclo em \mathbb{U}^3 é um subconjunto de uma horoesfera.

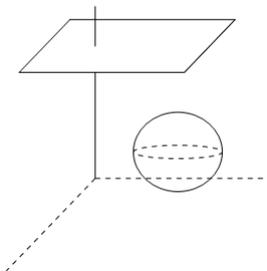


Figura 1.4: Horoesfera.

Citamos [2] e [13] como referências importantes para obter maiores detalhes sobre o espaço hiperbólico.

1.2 O operador curvatura média constante

1.2.1 Campos de Killing

No que segue, N denotará uma variedade riemanniana e "suave" indicará a classe de diferenciabilidade C^∞ .

Definição 1.1. *Seja V um campo suave em N . Dizemos que V é um campo de Killing em N se V satisfaz*

$$\langle \nabla_X V, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y V \rangle = 0, \quad (1.2)$$

para todo X, Y campos de vetores suaves em N .

Desejamos relacionar os campos de Killing com o grupo das isometrias da variedade. Um resultado que necessitamos nesta direção, cuja prova pode ser encontrada em [4], p. 63, é o que segue:

Teorema 1.2. *Seja X um campo suave em um aberto W de N e seja $p \in W$. Então existem um aberto $U \subset W$, $p \in U$, um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow W$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q , para cada $q \in U$, isto é, $\varphi(0, q) = q$ e*

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, q) = X(\varphi(t, q))$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Observamos no teorema acima que, fixando t , com $|t| < \varepsilon$, $\varphi_t : U \rightarrow \varphi_t(U) \subset N$ dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ define um difeomorfismo e $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ vale onde ambos os lados estão definidos. Tendo isto em vista, observamos que um campo X gera um grupo $\mathbb{G} = \{\varphi_t\}$ chamado de *subgrupo (local) a um parâmetro de difeomorfismos locais*.

O conjunto das isometrias da variedade riemanniana N forma um subgrupo do grupo dos difeomorfismos de N . Assim, se um campo X em N gera uma família a um parâmetro constituída de isometrias, dizemos que ele gera um *subgrupo a um parâmetro de isometrias*.

Proposição 1.3. *Seja X um campo de vetores suaves de N . Então X é um campo de Killing, se e somente se, X gera um subgrupo (local) a um parâmetro de isometrias locais de N .*

Demonstração. Ver [12], pág. 48. □

Considerando $\mathbb{G} = \{\Phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ um subgrupo a um parâmetro de isometrias de N , segue do exposto acima que, para todo $r \in \mathbb{R}$, $\Phi_r : N \rightarrow N$ é uma isometria e que

$$X(p) = \left. \frac{d}{dr}\Phi_r(p) \right|_{r=0} \quad (1.3)$$

é um campo de Killing em N . As órbitas de \mathbb{G} são dadas por

$$\mathbb{G}(p) = \{\Phi_r(p); r \in \mathbb{R}\}, p \in N.$$

Definimos gráficos de Killing como segue:

Definição 1.4. *Suponha que X seja um campo de Killing transversal a uma subvariedade bidimensional totalmente geodésica S de N , sejam $\Omega \subset S$ um domínio e $u \in C^0(\Omega)$. Define-se o cilindro sobre Ω como*

$$C(\Omega) = \{\Phi_r(p); p \in \Omega, r \in \mathbb{R}\}, \quad (1.4)$$

e o gráfico de Killing de u em relação a X por

$$G_X(u) = \{\Phi_{u(p)}(p); p \in \Omega\}.$$

1.2.2 Classificação dos diferentes gráficos de Killing em \mathbb{H}^3

Nesta subsecção veremos quais os diferentes gráficos de Killing que podem ocorrer em H^3 . Para tal, precisamos das definições que seguem:

Definição 1.5. *Seja \mathcal{G} um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Dizemos que \mathcal{G} é uma álgebra de Lie, se existe uma operação (colchete),*

$$[,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$

que satisfaz:

- a) *bilineariedade*
- b) *anti-simetria, isto é, $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathcal{G}$ e*
- c) *a igualdade de Jacobi, isto é*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

para $X, Y, Z \in \mathcal{G}$.

Definição 1.6. *Um grupo de Lie \bar{G} é um grupo com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação $\bar{G} \times \bar{G} \longrightarrow \bar{G}$ dada por $(x, y) \longrightarrow xy^{-1}$, $x, y \in \bar{G}$, é diferenciável.*

Definição 1.7. *Consideremos $\tilde{G} := ISO(N)$ o grupo de Lie das isometrias de N e seja \mathcal{G} a álgebra de Lie de \tilde{G} . Seja*

$$\exp : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{G}$$

a aplicação exponencial. Dado $g \in \tilde{G}$, a aplicação adjunta $Ad_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ é dada por

$$Ad_g(X) = \frac{d}{dt} [g(\exp tX)g^{-1}]_{t=0}, \quad X \in \mathcal{G}.$$

Observamos que

$$g(\exp X)g^{-1} = \exp Ad_g(X)$$

e que um campo de Killing X de N , para $X^* \in \mathcal{G}$ em $p \in N$, é dado por

$$X(p) = \left. \frac{d}{dt} (\exp tX^*)(p) \right|_{t=0}.$$

Proposição 1.8. *Sejam X, Y campos de Killing em N tal que $X = Ad_g Y$ para algum $g \in \tilde{G}$. Então, todo gráfico de Killing em relação a X é congruente a um gráfico de Killing em relação a Y .*

Segue que a classificação dos diferentes gráficos de Killing de \mathbb{H}^3 depende apenas de classificar as distintas órbitas de Ad_g em G . A demonstração da proposição acima é feita de maneira totalmente similar a da Proposição 2 em [8], onde também encontramos detalhes da classificação e descrição dos possíveis campos de Killing para \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 e \mathbb{H}^3 .

Faremos um breve comentário sobre a descrição desses campos no caso em que $N = \mathbb{H}^3$, que é do nosso interesse.

O grupo de isometrias $O(3, 1) = ISO(\mathbb{H}^3)$ é isomorfo ao grupo de transformações lineares de \mathbb{R}^4 que preservam a forma quadrática

$$q(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

e cuja álgebra de Lie $o(3, 1)$ é dada por

$$o(3, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & x & y \\ b & -x & 0 & z \\ c & -y & -z & 0 \end{bmatrix}; a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Utilizando a teoria das álgebras de Lie semisimples, demonstra-se em [8] que qualquer campo de Killing X em \mathbb{H}^3 é Ad -conjugado à campos de Killing da forma

$$X_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ou da forma

$$X_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para $\gamma \in \mathbb{R}$.

A partir disso pode-se fazer a classificação dos diferentes gráficos de Killing em \mathbb{H}^3 , da forma que segue: os gráficos de Killing em relação a $X_{\alpha, 0}$, $\alpha \neq 0$, são os chamados de gráficos de Killing de revolução de \mathbb{H}^3 . Os gráficos de Killing em relação a $X_{0, \beta}$, $\beta \neq 0$, são os chamados de gráficos de Killing hiperbólicos. Os gráficos de Killing em relação a $X_{\alpha, \beta}$, $\alpha \neq 0 \neq \beta$, são os chamados gráficos de Killing helicoidais. E por fim, os gráficos de Killing em relação a X_{γ} são os chamados de gráficos de Killing parabólicos de \mathbb{H}^3 .

Nosso interesse está nos gráficos de Killing parabólicos de \mathbb{H}^3 . Pode-se mostrar que as órbitas de um campo de Killing parabólico são horociclos ortogonais a uma mesma superfície totalmente geodésica de \mathbb{H}^3 , tendo estes horociclos, portanto, o mesmo ponto no infinito. Além disso, no estudo dos gráficos de Killing parabólicos, não há perda de generalidade em fixar uma superfície totalmente geodésica, escolhida da maneira que melhor convém, e restringir-se ao estudo de gráficos parabólicos relativos ao campo de Killing cujas órbitas sejam os horociclos ortogonais a esta superfície. Faremos uso desta liberdade em nosso estudo.

1.2.3 Operador curvatura média constante para gráficos *Warped*

Uma questão de natureza geométrica é a de investigar quando o gráfico (de qualquer natureza) de uma função possui curvatura média constante. Uma resposta para tal indagação, no caso de gráficos do tipo *warped*, foi dada em [5] e descrita na Proposição 1.10 a seguir.

Definição 1.9. *Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades Riemannianas e $f \in C^\infty(M_1)$. O produto warped de M_1 e M_2 é a variedade riemanniana*

$$M_1 \times_f M_2 = (M_1 \times M_2, g),$$

onde $g = g_1 + f^2 g_2$.

Destacamos que \mathbb{R}^3 e \mathbb{H}^3 por exemplo, possuem uma representação em produto warped dada por $S \times_f L$, onde L é qualquer curva totalmente umbílica e S é um aberto da única superfície totalmente geodésica ortogonal a L em um dado ponto $p \in L$. Conforme citado em [5], toda representação em produto warped possui um noção natural de gráfico, que no caso de L compacto, pode-se substituir L por \mathbb{R} e trabalhar no espaço de recobrimento com a métrica induzida. Como os círculos L são trajetórias de um campo de Killing ortogonal à S , tal gráfico tem uma descrição equivalente como "uma seção transversal às órbitas de um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias ortogonal a um domínio contido em uma superfície totalmente geodésica".

Assim, considerando-se M uma variedade riemanniana bidimensional simplesmente conexa, seja

$$N = M \times_f \mathbb{R} \quad (1.5)$$

um produto warped, define-se o gráfico warped $\text{Gr}(u) \subset \bar{\Omega} \times_{f|\bar{\Omega}} \mathbb{R}$ de $u \in C^0(\bar{\Omega})$ em um domínio $\Omega \subset M$, como

$$\text{Gr}(u) = \{(x, u(x)) \in N : x \in \bar{\Omega}\}.$$

Tendo em vista o exposto acima, na Proposição 1.10 que segue, consideremos $N = M \times_f \mathbb{R}$, onde M é uma variedade bidimensional, X um campo de Killing ortogonal a M , S um aberto de M , $\Omega \subset S$ um domínio e o cilindro sobre Ω dado por $C(\Omega)$ como em (1.4).

Proposição 1.10. *Dado $H \geq 0$, o gráfico $\text{Gr}(u)$ de $u \in C^2(\Omega)$ no produto warped $N = M \times_f \mathbb{R}$ tem curvatura média constante H com respeito ao vetor unitário normal η satisfazendo $\langle X, \eta \rangle \leq 0$ se e só se u satisfaz a equação diferencial parcial*

$$Q_H^*(u) := \text{div} \left(\frac{\rho \text{grad } u}{(1 + \rho^2 \|\text{grad } u\|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\langle \text{grad } u, \text{grad } \rho \rangle}{(1 + \rho^2 \|\text{grad } u\|^2)^{\frac{1}{2}}} + 2H = 0 \quad (1.6)$$

onde div e grad são o divergente e o gradiente em M , onde $\rho = \frac{1}{\|X\|}$

Demonstração. Sejam as funções suaves $u^*, z : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como $u^*(x, t) = u(x)$ e $z(x, t) = t$. Seja $F_u(x, t) = u^*(x, t) - z(x, t)$. Temos $\text{Gr}(u) = F_u^{-1}(0)$ e assim, de uma fórmula bem conhecida da Geometria Riemanniana, $\text{Gr}(u)$ tem curvatura média constante H se e somente se,

$$\text{div} \frac{\text{grad } F_u}{\|\text{grad } F_u\|} + 2H = 0. \quad (1.7)$$

Assim,

$$\text{grad } F_u = \text{grad } u^* - \text{grad } z$$

e

$$w := \|\text{grad } F_u\| = (\|\text{grad } u^*\|^2 + \|\text{grad } z\|^2 - 2 \langle \text{grad } u^*, \text{grad } z \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

Chamando

$$R_H(u) = \text{div} \left(\frac{\text{grad } F_u}{\|\text{grad } F_u\|} \right) + 2H,$$

temos $R_H(u) = 0$ se e somente se,

$$\begin{aligned} R_H(u) &= \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} u^* - \operatorname{grad} z}{\|\operatorname{grad} u^*\| + \|\operatorname{grad} z\| - 2 \langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} z \rangle} \right) + 2H \\ &= \frac{\operatorname{div}(\operatorname{grad} u^*)}{w} + \left\langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} \left(\frac{1}{w} \right) \right\rangle - \frac{\operatorname{div}(\operatorname{grad} z)}{w} - \left\langle \operatorname{grad} z, \operatorname{grad} \left(\frac{1}{w} \right) \right\rangle + 2H \\ &= \frac{1}{w} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u^*) - \frac{1}{w^2} \langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} w \rangle + \frac{1}{w^2} \langle \operatorname{grad} z, \operatorname{grad} w \rangle - \frac{1}{w} \operatorname{div}(\operatorname{grad} z) + 2H \end{aligned}$$

ou seja, se e somente se,

$$w \operatorname{div}(\operatorname{grad} u^*) - \langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} w \rangle + \langle \operatorname{grad} z, \operatorname{grad} w \rangle - w \operatorname{div}(\operatorname{grad} z) + 2Hw^2 = 0. \quad (1.8)$$

Para simplificar, podemos trocar o operador $R_H(u)$ pelo operador mais simplificado

$$Q_H(u) = w \operatorname{div}(\operatorname{grad} u^*) - \langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} w \rangle + \langle \operatorname{grad} z, \operatorname{grad} w \rangle - w \operatorname{div}(\operatorname{grad} z) + 2Hw^2$$

e observemos que $R_H(u) = 0$ se e somente se $Q_H(u) = 0$.

Tomando uma parametrização

$$P : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S,$$

$P = P(s, t)$, tal que $\|P_s\| = \|P_t\| = 1$ e $\langle P_s, P_t \rangle = 0$, e considerando uma parametrização

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow C(S), \\ \Psi(r, s, t) &= \Phi_r(P(s, t)), \end{aligned}$$

onde $C(S) = \{\Phi_r(p) ; p \in S, r \in \mathbb{R}\}$. Temos que, dado $p \in C(S)$, $p = \Psi(r, s, t)$, o conjunto $\mathcal{B} = \{\Psi_r, \Psi_s, \Psi_t\}$ é uma base para $T_p(C(S))$ associada a parametrização Ψ . Logo,

$$\begin{aligned} \Psi_r &= \frac{\partial}{\partial r} \Phi_r(P(s, t)) = X(P(s, t)); \\ \Psi_t &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi_r(P(s, t)) = d(\Phi_r)_{P(s, t)}(P_t); \\ \Psi_s &= \frac{\partial}{\partial s} \Phi_r(P(s, t)) = d(\Phi_r)_{P(s, t)}(P_s). \end{aligned}$$

Como

$$\|\Psi_s\|^2 = \left\langle d(\Phi_r)_{P(s, t)}(P_s), d(\Phi_r)_{P(s, t)}(P_s) \right\rangle = \langle P_s, P_s \rangle = \|P_s\|^2 = 1$$

e

$$\|\Psi_t\|^2 = \left\langle d(\Phi_r)_{P(s, t)}(P_t), d(\Phi_r)_{P(s, t)}(P_t) \right\rangle = \langle P_t, P_t \rangle = \|P_t\|^2 = 1,$$

temos $\bar{\mathcal{B}} = \left\{ E_1 = \Psi_s, E_2 = \Psi_t, E_3 = \frac{\Psi_r}{\|\Psi_r\|} = \frac{X}{\|X\|} \right\}$ uma base ortonormal de $T_p(C(S))$. Assim, dado $p \in C(S)$,

$$p = \Phi_{u(P(s_0, t_0))}(P(s_0, t_0)) = \Phi_{r_0}(P(s_0, t_0)),$$

temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u^*)(p) &= \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^3 E_i(u^*) E_i\right)(p) = \\ &= \sum_{i=1}^3 (E_i(E_i(u^*)) + E_1(u^*)(g_{21}^2 + g_{31}^3) \\ &\quad + E_2(u^*)(g_{12}^1 + g_{32}^3) + E_3(u^*)(g_{13}^1 + g_{23}^2))(p), \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde $g_{ij}^k = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Notemos que,

$$E_1(u^*)(p) = \langle \operatorname{grad} u, P_s \rangle,$$

pois denotando

$$v(s, t) = (u \circ P)(s, t) = u(P(s, t))$$

e

$$v^*(r, s, t) = u^*(\Phi_r(P(s, t)))$$

temos,

$$v^*(r, s, t) = u(P(s, t)) = v(s, t).$$

Portanto

$$E_1(u^*)(p) = \langle \operatorname{grad} u, P_s \rangle = v_s(s, t). \quad (1.10)$$

Da mesma forma,

$$E_2(u^*)(p) = \langle \operatorname{grad} u, P_t \rangle = v_t(s, t). \quad (1.11)$$

Também,

$$\begin{aligned} E_3(u^*)(p) &= d(u^*)_p(E_3) = d(u^*)_p\left(\frac{X}{\|X\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|X\|} d(u^*)_p(X), \\ &= \frac{1}{\rho} d(u^*)_p(\Psi_r). \end{aligned}$$

Visto que,

$$u^*(p) = v^*(r, s, t) = v(s, t)$$

vem que

$$d(u^*)_p(\Psi_r) = 0,$$

e usando (1.10) e (1.11) obtemos

$$E_3(u^*)(p) = 0. \quad (1.12)$$

Também, usando o mesmo raciocínio,

$$E_1(E_1(u^*)) = v_{ss}, \quad (1.13)$$

$$E_2(E_2(u^*)) = v_{tt}. \quad (1.14)$$

e

$$E_3(E_3(u^*)) = 0 \quad (1.15)$$

Assim, substituindo (1.10) a (1.15) em (1.9), vem que

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u^*)(p) = v_{ss} + v_{tt} + v_s g_1 + v_t g_2, \quad (1.16)$$

onde $g_1 = g_{21}^2 + g_{31}^3$ e $g_2 = g_{12}^1 + g_{32}^3$

A fim de determinarmos (1.8) precisamos também calcular $\langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} w \rangle$, temos

$$w = \left(\|\operatorname{grad} u^*\|^2 + \|\operatorname{grad} z\|^2 - 2 \langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} z \rangle \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.17)$$

Mas,

$$\|\operatorname{grad} u^*\|^2 = v_s^2 + v_t^2,$$

$$\|\operatorname{grad} z\|^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

e

$$\langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} z \rangle = 0.$$

Logo,

$$w = \left(v_s^2 + v_t^2 + \frac{1}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.18)$$

Dai,

$$\begin{aligned} E_1(w)(p) &= E_1 \left(\left((E_1(u^*))^2 + (E_2(u^*))^2 + \rho^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)(p) = \\ &= \frac{1}{w} \left(v_s v_{ss} + v_t v_{st} + \frac{E_1(\rho^2)}{2} \right) := w_s. \end{aligned}$$

e

$$E_2(w)(p) = \frac{1}{w} \left(v_t v_{tt} + v_s v_{st} + \frac{E_1(\rho^2)}{2} \right) := w_t$$

Portanto,

$$\langle \operatorname{grad} u^*, \operatorname{grad} w \rangle = v_s w_s + v_t w_t$$

Como, $\operatorname{div}(\operatorname{grad} z)(p) = 0$ e

$$\frac{\operatorname{grad} \rho}{\rho} = \langle \nabla_{E_3} E_1, E_3 \rangle E_1 + \langle \nabla_{E_3} E_2, E_3 \rangle E_2,$$

temos,

$$\begin{aligned} Q_H(u) &= \frac{(v_{ss} + v_{tt})}{w} - \frac{v_s w_s + v_t w_t}{w^2} + v_s g_1 + v_t g_2 \\ &= \frac{(v_{ss} + v_{tt})}{w} - \frac{v_s w_s + v_t w_t}{w^2} + \frac{\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} \rho \rangle}{\rho w} + 2H = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} v}{w} \right) + \frac{\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} \rho \rangle}{\rho w} + 2H = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\rho \operatorname{grad} v}{\rho \left(\frac{1}{\rho^2} + \|\operatorname{grad} v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} \rho \rangle}{\rho \left(\frac{1}{\rho^2} + \|\operatorname{grad} v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + 2H = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\rho \operatorname{grad} v}{(1 + \rho^2 \|\operatorname{grad} v\|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} \rho \rangle}{(1 + \rho^2 \|\operatorname{grad} v\|^2)^{\frac{1}{2}}} + 2H \end{aligned}$$

□

O operador Q_H^* acima é um operador diferencial quasilinear elíptico de segunda ordem. Maiores detalhes podem ser obtidos em [5].

1.2.4 O operador curvatura média constante para gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3

Faremos uma distinção dentre as superfícies totalmente geodésicas de \mathbb{H}^3 : àquelas que no modelo \mathbb{U}^3 corresponderem as intersecções com \mathbb{R}_+^3 de planos euclidianos verticais serão denotadas por \mathbb{P} .

Seja $G_H = \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ um subgrupo a 1- parâmetro de isometrias de \mathbb{U}^3 do tipo parabólico cujas órbitas são ortogonais a uma superfície totalmente geodésica S . Como observamos anteriormente, não há perda de generalidade em supor que S é o plano $\mathbb{P} = \{y = 0\}$. Neste caso é fácil verificar que

$$\phi_r(x, y, z) = (x, y + r, z),$$

sendo portantoo campo parabólico de Killing associado o campo constante $e_2 = (0, 1, 0)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio e $u \in C^0(\Omega)$. O gráfico parabólico de u é então

$$G(u) = \{(x, u(x, z), z); (x, 0, z) \in \Omega\}.$$

Com as escolhas acima podemos usar a Proposição 1.10 para provar:

Proposição 1.11. *Dados $H \in \mathbb{R}$, um domínio $\Omega \subset \mathbb{P}$ e $u \in C^2(\Omega)$. O gráfico parabólico $G(u)$ de u possui curvatura média constante H com respeito ao vetor unitário normal η tal que $\langle e_2, \eta \rangle \leq 0$ se, e só se*

$$Q_H(u) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) - \frac{2}{z} \left(H + \frac{u_z}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right). \quad (1.19)$$

onde div e grad são o divergente e o gradiente em \mathbb{P} .

Uma dedução direta do operador acima (sem usar a Proposição 1.10) pode ser encontrada, por exemplo, em [3].

Capítulo 2

Gráficos parabólicos de cmc em \mathbb{H}^3 com bordo prescrito

Neste capítulo identificamos os principais resultados relacionados a gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 que tem conexão com nosso resultado principal. Definiremos uma condição que, por analogia com um problema similar para gráficos euclidianos em \mathbb{R}^3 , a denominaremos de "condição da declividade limitada", e analisaremos sua utilidade na busca de soluções de problemas de existência de gráficos parabólicos de curvatura média constante em \mathbb{H}^3 com bordo prescrito.

2.1 O problema de Dirichlet relativo a gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3

Assumindo $\Omega \subset \mathbb{P}$ limitado e de classe $C^{2,\alpha}$, como já mencionado na introdução, nosso interesse maior neste trabalho consiste no estudo da existência e unicidade de soluções do problema de Dirichlet dado por (3), ou seja,

$$\begin{cases} u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ Q_H(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é uma função dada a priori.

Recordamos que o problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante H em \mathbb{R}^3 consiste em determinar a existência e unicidade de soluções do sistema

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ Q_H^\#(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde Ω é um domínio em \mathbb{R}^2 e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é dada a priori. (Aqui div , ∇ e $|\cdot|$ são naturalmente o divergente, o gradiente e a norma euclidiana).

Geometricamente, se $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é solução de (2.2), então, neste caso, o gráfico de u , a saber

$$G_E(u) = \{ \phi_{u(x,y,0)}(x,y,0); (x,y,0) \in \Omega \}$$

é uma superfície em \mathbb{R}^3 de curvatura média constante H com relação ao vetor normal η satisfazendo $\langle \eta, (0, 0, 1) \rangle \leq 0$, onde $\phi_r(x, y, 0) = (x, y, r)$, $r \in \mathbb{R}$.

Note que $\phi_r(x, y, z) = (x, y, z + r)$ são as isometrias a 1-parâmetro do \mathbb{R}^3 que representam as translações verticais cujo campo de Killing associado é $X = (0, 0, 1)$. Portanto, no caso considerado, isto é, Ω contido na superfície totalmente geodésica de \mathbb{R}^3 dada por $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, da Definição 1.4 vemos que $G_E(u)$ é um gráfico de Killing e, em particular

$$G_E(u) = \{(x, y, u(x, y)); (x, y, 0) \in \Omega\}.$$

Como \mathbb{R}^3 admite uma representação em produto warped da forma expressa em (1.5), o operador em (2.2) é o equivalente para \mathbb{R}^3 do operador da Proposição 1.10.

Como mencionamos na introdução, para $H \geq 0$ e Ω limitado e de classe C^2 , foi provado em [15] que (2.2) possui uma única solução para qualquer $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, se e somente se $k_{\partial\Omega} \geq 2H$, onde $k_{\partial\Omega}$ é a curvatura de $\partial\Omega$ (Teorema de Serrin).

Voltamos agora ao caso do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . Considerando $\mathbb{G}_H = \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias de \mathbb{H}^3 do tipo parabólico e supondo que o cilindro

$$C(\partial\Omega) := \{\phi_r(p); p \in \partial\Omega\}$$

tem curvatura média H' em \mathbb{H}^3 , foi demonstrado em [10] que para H satisfazendo a condição

$$H \leq H',$$

assumindo $H \geq 0$ e orientando $C(\partial\Omega)$ pelo vetor unitário normal apontando para a componente simplesmente conexa de $\mathbb{H}^3 \setminus C(\partial\Omega)$, existe uma única solução para o problema (2.1).

O Teorema do qual extraímos o resultado acima é o que segue:

Teorema 2.1. *(Teorema 3.3 de [10]) Seja Ω um domínio limitado de classe C^3 , $\varphi \in C^3(\bar{\Omega})$, $H \in C^2(\bar{\Omega})$ e $|H(x)| \leq 1$ ou $|H(x)| = a$ (a constante). Supondo que H satisfaça a condição*

$$H'_C(y) \geq |H(y)| \quad \forall \quad y \in \partial\Omega,$$

onde $H'_C(y)$ é a curvatura média do cilindro gerado por horociclos em um ponto y do bordo. Então existe uma única $u \in C^2(\bar{\Omega})$ solução de $Q_H(u) = 0$ com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Todavia, o teorema acima pode ser naturalmente estendido para a classe de diferenciabilidade $C^{2,\alpha}$.

Tal resultado entretando, se torna um caso particular do resultado a seguir, ao considerarmos que \mathbb{H}^3 admite uma representação em produto warped da forma expressa em (1.5). No contexto do problema (2.1):

Teorema 2.2. *(Teorema 1.1 de [5]) Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio $C^{2,\alpha}$ e sejam $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ e $H \geq 0$ dados. Supondo que $H' \geq H$, onde H' é a curvatura de $C(\partial\Omega)$ com respeito a orientação interna, então existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ tal que o gráfico $\text{Gr}(u)$ com respeito ao campo de vetores normais η satisfazendo $\langle \eta, X \rangle \leq 0$, onde X é um campo de Killing ortogonal a \mathbb{P} , tem curvatura média H .*

O Teorema acima foi generalizado em 2008 e tal resultado pode ser encontrado em [6].

Porém, se a condição sobre a curvatura média de $C(\partial\Omega)$ descrita acima não é satisfeita, a existência de soluções de (2.1) ainda pode ser obtida sob algumas hipóteses extras sobre o domínio e sobre o dado no bordo φ . Como exemplo, citamos o teorema abaixo, que se refere ao caso em que o dado no bordo é identicamente nulo. Tal teorema encontra-se em [3] e em nossa redação, está particularizado para \mathbb{H}^3 e com nossa notação.

Teorema 2.3. *(Teorema 3.4 de [3]) Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado e de classe C^2 , onde \mathbb{P} é um plano totalmente geodésico de \mathbb{H}^3 . Suponha que*

$$k_{\partial\Omega} \geq h_0 > a \geq 1,$$

onde $k_{\partial\Omega}$ é a curvatura de $\partial\Omega$ em \mathbb{P} com respeito a orientação interna. Dado

$$h : \bar{\Omega} \longrightarrow [-a, a]$$

uma função de classe C^k , $k \geq 1$, então existe uma função $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$, tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$ e cujo gráfico parabólico é uma superfície de curvatura média h em \mathbb{H}^3 .

No entanto, quando o dado no bordo não é nulo e a condição sobre $C(\partial\Omega)$ descrita acima (extensão do caso suave do Teorema de Serrin para gráficos parabólicos) não é satisfeita, ainda nos perguntamos se mediante algumas condições especiais sobre Ω e sobre o dado no bordo φ poderíamos resolver o problema (2.1).

Em busca dessas condições, olhamos para os teoremas citados nesta seção, onde nota-se que é recorrente o uso do *método da continuidade* para demonstrá-los. O método é aplicável devido as características do operador Q_H e visto que os domínios considerados são limitados (maiores detalhes em [9]).

Para o tipo de problema expresso em (2.1), tal método pode ser considerado da seguinte forma: define-se

$$V = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}), Q_{tH}(u_t), u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}$$

e procura-se mostrar que sob certas hipóteses envolvendo Ω , φ ou ambos, o conjunto V coincide com $[0, 1]$.

A ideia para mostrarmos que $V = [0, 1]$ é a usual: mostraremos que V não é vazio, aberto e fechado em $[0, 1]$. Observamos que a abertura de V é uma consequência direta do Teorema das Funções Implícitas, visto que as derivadas de Q_H calculadas em coordenadas locais é um homeomorfismo linear. Resultados clássicos de equações diferenciais parciais elípticas sobre regularidade garantem que qualquer solução de $Q_H = 0$ é suave (ver Teoremas 6.14 e 6.17 de [9]). O fechamento de V só irá ocorrer para certas hipóteses sobre o domínio, sobre o dado no bordo ou sobre ambos. Tais hipóteses em geral são de natureza geométrica e envolvem a geometria do domínio, a curvatura média H , a regularidade de φ entre outras. Segundo a teoria de EDP's (Seção 12.2 e Teorema 6.6 de [9]), faz-se necessário estimativas *a priori* do gradiente de soluções de (2.1). Mas para que se obtenha as estimativas desejadas, precisa-se que $|gradu|$ seja limitado no bordo, e tal limitação (que em nosso caso será determinada no próximo capítulo), no nosso contexto é obtida através do seguinte Lema:

Lema 2.4. (Lema 2.5 de [5]) Seja $u \in C^3 \cap C^1(\bar{\Omega})$ uma solução de (1.6). Suponha que u seja limitado em Ω e que $|\text{grad } u|$ seja limitado em $\partial\Omega$. Então $|\text{grad } u|$ é limitado em Ω por uma constante que depende somente de $|u|_0$ e do $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u|$.

Porém, para que seja estimado o $|\text{grad } u|_{\partial\Omega}$ necessita-se que $|u|$ seja limitada, a qual denomina-se estimativa da altura e é dada por:

Lema 2.5. (Lema 2.2 de [5]) Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.2, existe uma constante $C = C(\Omega, H)$ tal que

$$|u| \leq C + |\varphi|_0$$

se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfaz (1.6) e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Observamos que pelo exposto acima, se para uma dada φ obtivermos barreiras adequadas relativamente ao operador Q_H , os resultados acima nos garantirão o fechamento de V . No próximo capítulo trataremos de estudar condições sobre o dado no bordo φ que permita a obtenção de tais barreiras.

2.2 A condição da declividade limitada

A noção clássica da condição da declividade limitada para o espaço euclidiano mostrou-se útil para situações descritas pelo problema (2.2) não cobertas pelo Teorema de Serrin. Tal noção clássica é a que segue:

Definição 2.6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Dizemos que Ω e φ satisfaz a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$ se, para cada ponto $p \in \partial\Omega$, existem funções lineares afim

$$\pi_p^\pm : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que

- i) $\pi_p^-(q) \leq \varphi(q) \leq \pi_p^+(q) \quad \forall q \in \partial\Omega$
- ii) $\pi_p^-(p) = \varphi(p) = \pi_p^+(p)$
- iii) $|\nabla\pi| \leq K$

onde ∇ denota o gradiente euclidiano.

Hartman, em seu trabalho clássico [11] de 1966, demonstrou que se Ω é um domínio limitado, uniformemente convexo (isto é, $0 < k_{\min} := \min k_{\partial\Omega}$) e de classe C^2 e $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, então (Ω, φ) satisfaz a condição de declividade limitada com alguma constante $K \geq 0$. Este resultado, por exemplo, junto com o método da continuidade, permite mostrar que o problema (2.2) para $H = 0$ tem solução com gradiente limitado em qualquer domínio limitado, uniformemente convexo, de classe $C^{2,\alpha}$ e para qualquer dado no bordo $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ (veja [9], parágrafo 11.4). Porém para o caso em que $H > 0$, esta condição não é suficiente para garantir a existência de uma solução. Em, [14] foi provado que é possível obter limitação para a condição de declividade limitada K , dependendo somente de H e da geometria do domínio, que implicam na existência de solução. Além disso, quando é suposto certa suavidade do domínio e do dado no bordo, foi mostrado que é possível obter uma estimativa do gradiente das soluções em termos de H e K . Precisamente:

Teorema 2.7. (Teorema 1.1 de [14]) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio convexo, limitado e de classe $C^{2,\alpha}$, e seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ tal que (Ω, φ) satisfaz a condição da declividade limitada com constante K . Assuma que*

$$k \geq H(1 + K^2)^2,$$

onde k é a curvatura de $\partial\Omega$. Então, dado $t \in [0, 1]$, existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $Q_H^\# = 0$ em Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$. Além disso, se $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ então

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \frac{tK\sqrt{k^2 - (1 + t^2K^2)^3 H^2} + H(1 + t^2K^2)^{3/2}}{\sqrt{k^2 - (1 + t^2K^2)^3 H^2 - tKH(1 + t^2K^2)^{3/2}}}.$$

Em particular,

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| < \infty$$

se $k > H(1 + t^2K^2)^2$.

O Teorema 2.7 acima, nos deu inspiração para tentar algo similar em \mathbb{H}^3 . O ponto de partida seria então definir adequadamente para o contexto do \mathbb{H}^3 uma condição que desempenhasse o papel da Definição 2.6. Observamos que diferentes definições que podem ser relacionadas à condição da declividade limitada aparecem na literatura para diferentes contextos. Em [1] é feita uma generalização da Definição 2.6 que permite trabalhar com o problema (2.2) para domínios não necessariamente convexos. Já em [7] é feita uma condição da declividade limitada aplicável ao problema de Dirichlet para gráficos radiais em \mathbb{R}^3 de curvatura média constante.

Quando se trata do espaço hiperbólico porém, pelo que conhecemos, nada semelhante está descrito na literatura. No que segue, definimos a "condição da declividade limitada" para o caso hiperbólico e mostramos que ela faz sentido neste contexto.

Definição 2.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$. Dizemos que (Ω, φ) satisfaz a condição da declividade limitada com constante $K \geq 0$, se para cada ponto $p \in \partial\Omega$, existem superfícies equidistantes Σ_p^\pm dadas como o gráficos parabólicos de funções $\pi_p^\pm : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,*

- i) $\pi_p^-(q) \leq \varphi(q) \leq \pi_p^+(q) \quad \forall q \in \partial\Omega$
- ii) $\pi_p^-(p) = \varphi(p) = \pi_p^+(p)$
- iii) $\|\text{grad } \pi_p^\pm\| \leq K$, em $\bar{\Omega}$,

onde grad denota o gradiente em \mathbb{P} .

Usaremos de agora em diante o modelo \mathbb{U}^3 , que nos é mais familiar, para explicitarmos algumas questões subjacentes à Definição 2.8. Além disso, assumiremos que \mathbb{P} é o plano

$$\mathbb{P} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}.$$

Observamos primeiramente que se Σ é uma superfície equidistante dada como gráfico parabólico de uma função $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, então $\|\nabla\pi\|$ é constante. Neste caso Σ é um plano equidistante, isto é, quando visto em \mathbb{U}^3 , Σ é a interseção de um plano euclidiano não horizontal com \mathbb{R}_+^3 , e π é uma função linear afim sobre \mathbb{P} (note que, quando visto

em \mathbb{U}^3 , $\Sigma \neq \mathbb{S} \cap \mathbb{R}_+^3$ onde \mathbb{S} é uma esfera euclidiana que intercepta $\partial\mathbb{R}_+^3$ em um ângulo β , visto que $\mathbb{S} \cap \mathbb{R}_+^3$ não é um gráfico parabólico sobre \mathbb{P}). Neste contexto temos,

$$\nabla\pi(p) = \frac{1}{x_3^2} \text{grad } \pi(p)$$

em \mathbb{P} , onde ∇ denota o gradiente euclidiano. Segue que $|\nabla\pi| = \frac{1}{x_3} \|\text{grad } \pi\|$ em \mathbb{P} onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em \mathbb{R}^3 .

Proposição 2.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado, de classe C^2 e estritamente convexo no sentido euclidiano, e seja $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$. Então (Ω, φ) satisfaz a condição de declividade limitada para alguma constante $K \geq 0$.*

Demonstração. Para $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, o gráfico parabólico de φ é dado por

$$G(\varphi) = \{(x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3); (x_1, x_3) \in \overline{\Omega}\},$$

e, nesse contexto, dizer que (Ω, φ) satisfaz a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$ é equivalente a dizer que, para todo ponto $p = (x_1, x_3) \in \partial\Omega$, existem funções lineares afins $\pi_p^\pm : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a Definição 2.8, e a condição *iii*) dessa definição é satisfeita desde que $x_3(q) |\nabla\pi_p^\pm(q)| \leq K$ para todo $p \in \partial\Omega$ e $q \in \overline{\Omega}$. Como Ω é um domínio de classe C^2 , limitado e estritamente convexo no sentido euclidiano e $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, o resultado segue então do resultado clássico para o \mathbb{R}^3 dado em [11] (ou também em [9], 11.4). \square

Corolário 2.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado e de classe C^2 tal que $k_{\partial\Omega} > 1$, onde $k_{\partial\Omega}$ é a curvatura de $\partial\Omega$, e seja $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$. Então (Ω, φ) satisfaz a condição de declividade limitada para alguma constante $K \geq 0$.*

Demonstração. Lembramos que para \mathbb{U}^3 , vale a seguinte relação,

$$\bar{k}_{\partial\Omega} = \frac{k_{\partial\Omega} - \eta_3}{x_3}, \tag{2.3}$$

onde $\bar{k}_{\partial\Omega}$ é a curvatura de $\partial\Omega$ em \mathbb{R}^3 e η_3 é a terceira coordenada do vetor unitário normal à $\partial\Omega$ no sentido euclidiano, apontando para o interior da região limitada por Ω . Visto que $k_{\partial\Omega} > 1$, temos que $\bar{k}_{\partial\Omega} > 0$, e assim, Ω é um domínio estritamente convexo no sentido euclidiano. O resultado agora segue imediatamente da Proposição 2.9. \square

Capítulo 3

Resultados principais

Neste capítulo detalhamos os principais resultados encontrados.

Em todo este capítulo, trabalharemos com o modelo \mathbb{U}^3 , assumiremos que \mathbb{P} é o plano

$$\mathbb{P} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$$

e para um domínio $\Omega \subset \mathbb{P}$, $C(\Omega)$ indicará o conjunto

$$C(\Omega) = \{\phi_r(p); p \in \Omega\},$$

onde $\mathbb{G}_H = \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ é o subgrupo a 1– parâmetro de isometrias de \mathbb{U}^3 do tipo parabólico cujas órbitas são ortogonais a \mathbb{P} .

3.1 Um lema básico

Com o lema a seguir, adaptamos para \mathbb{H}^3 um resultado cuja essência aparece na literatura em outros contextos, por exemplo em [14].

Lema 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio convexo no sentido euclidiano e k, \bar{k} as curvaturas hiperbólica e euclidiana de $\partial\Omega$, respectivamente, com respeito a orientação interna. Seja Σ uma superfície equidistante em \mathbb{U}^3 dada como gráfico parabólico de uma função $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, e suponha $\|\nabla\pi\| = K$. Seja h a curvatura média de Σ e $\Lambda = C(\Omega) \cap \Sigma$. Então a curvatura euclidiana $\bar{k}_{\partial\Lambda}$ e a curvatura hiperbólica $k_{\partial\Lambda}$ da $\partial\Lambda$ satisfazem:*

$$\bar{k}_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{\bar{k}(q)}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1)$$

$$k_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{k(q) - \sqrt{1 - h^2} (1 + K^2)^{3/2} - 1}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.2)$$

onde $q \in \partial\Omega$ e $p = \phi_{\pi(q)}(q)$.

Demonstração. Temos $\Lambda = (\Omega \times \mathbb{R}) \cap \Sigma$. Seja,

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), 0, \gamma_3(s))$$

uma parametrização de $\partial\Omega$ por comprimento de arco. Então

$$\alpha(s) = (\gamma_1(s), v(s), \gamma_3(s))$$

é uma parametrização de $\partial\Lambda$ para alguma função v . Suponhamos $K > 0$ (o caso $K = 0$ é óbvio), e então, consideramos a reta $r = \Sigma \cap \mathbb{P}$. Sejam $(a, 0, c) \neq (0, 0, 0)$ e (e, f, g) , $f \neq 0$ vetores do \mathbb{R}^3 paralelos a r e Σ respectivamente. Então $\Sigma = [(a, 0, c), (e, f, g)]$ (visto como um plano euclidiano em \mathbb{R}^3) e

$$N = (a, 0, c) \times (e, f, g) = (-cf, ec - ag, af)$$

é o vetor normal a Σ no sentido euclidiano. Podemos considerar a, c, e, f e g tal que

$$1 = c^2 f^2 + (ec - ag)^2 + a^2 f^2 = |N|.$$

Dado $q \in \partial\Omega$,

$$q = \gamma(s_0) = (\gamma_1(s_0), 0, \gamma_3(s_0)),$$

temos

$$p = (\gamma_1(s_0), \pi(q), \gamma_3(s_0)) \in \partial\Lambda.$$

Segue que a equação do plano euclidiano Σ é

$$\langle (x_1, x_2, x_3) - (\gamma_1(s_0), \pi(q), \gamma_3(s_0)), (-cf, ec - ag, af) \rangle = 0$$

ou seja,

$$-cfx_1 + (ec - ag)x_2 + afx_3 + [cf\gamma_1(s_0) - (ec - ag)\pi(q) - af\gamma_3(s_0)] = 0.$$

Assim,

$$-cfx_1 + (ec - ag)x_2 + afx_3 + \tilde{A} = 0$$

onde $\tilde{A} = -\langle N, p \rangle$. Então,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{cf}{ec - ag}x_1 - \frac{af}{ec - ag}x_3 - \frac{\tilde{A}}{ec - ag} = \\ &= Ax_1 + Bx_3 + D \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde

$$A = \frac{cf}{ec - ag}, B = -\frac{af}{ec - ag} \text{ e } C = -\frac{\tilde{A}}{ec - ag}.$$

Como $\pi(q) \in \Sigma$, temos

$$\pi(q) = A\gamma_1(s_0) + B\gamma_3(s_0) + D,$$

e então,

$$\begin{aligned} D &= \pi(q) - A\gamma_1(s_0) - B\gamma_3(s_0) = \\ &= \langle (-A, 1, -B), p \rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Segue de (3.3) e de (3.4) que

$$\begin{aligned}
v(s) &= A\gamma_1(s) + B\gamma_3(s) + D = \\
&= A\gamma_1(s) + B\gamma_3(s) + \langle (-A, 1, -B), p \rangle = \\
&= A\gamma_1(s) + B\gamma_3(s) - A\gamma_1(s_0) + \pi(q) - B\gamma_3(s_0) = \\
&= \pi(q) + A(\gamma_1(s) - \gamma_1(s_0)) + B(\gamma_3(s) - \gamma_3(s_0)) = \\
&= \pi(q) + \langle (A, 0, B), \gamma(s) - \gamma(s_0) \rangle = \\
&= \pi(\gamma(s_0)) + \langle (A, 0, B), \gamma(s) - \gamma(s_0) \rangle,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= (\gamma_1(s), \pi(\gamma(s_0)) + \langle (A, 0, B), \gamma(s) - \gamma(s_0) \rangle, \gamma_3(s)) = \\
&= \gamma(s) + (0, \pi(\gamma(s_0)) + \langle (A, 0, B), \gamma(s) - \gamma(s_0) \rangle, 0).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Lembramos que a curvatura de α em \mathbb{R}^3 pode ser dada por

$$\bar{k}_{\partial\Lambda} := \frac{\left(\langle \alpha', \alpha' \rangle \langle \alpha'', \alpha'' \rangle - \langle \alpha', \alpha'' \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\langle \alpha', \alpha' \rangle^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.6}$$

Tomando $u = (A, 0, B)$, temos de (3.5) que

$$\alpha'(s) = \gamma'(s) + (0, \langle u, \gamma'(s) \rangle, 0) \equiv (\gamma'_1, \langle u, \gamma' \rangle, \gamma'_3),$$

e como $|\gamma'| = 1$, segue que,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha', \alpha' \rangle &= 1 + \langle u, \gamma' \rangle^2. \\
\alpha'' &= (\gamma''_1, \langle u, \gamma'' \rangle, \gamma''_3),
\end{aligned}$$

e assim, tomando $\bar{k} := \bar{k}_{\partial\Omega}$

$$\langle \alpha'', \alpha'' \rangle = \bar{k}^2 + \langle u, \gamma'' \rangle^2.$$

Também,

$$\langle \alpha', \alpha'' \rangle = \gamma'_1 \gamma''_1 + \langle u, \gamma' \rangle \langle u, \gamma'' \rangle + \gamma'_3 \gamma''_3,$$

e, como $\gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 = 1$, temos $\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_3' \gamma_3'' = 0$ (pois, $\gamma' \perp \gamma''$) e assim,

$$\langle \alpha', \alpha'' \rangle^2 = \langle u, \gamma' \rangle^2 \langle u, \gamma'' \rangle^2.$$

Além disso, de (3.6)

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{\partial\Lambda} &= \frac{\left((1 + \langle u, \gamma' \rangle^2) (\bar{k}^2 + \langle u, \gamma'' \rangle^2) - \langle u, \gamma' \rangle^2 \langle u, \gamma'' \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \langle u, \gamma' \rangle^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{(\bar{k}^2 + \bar{k}^2 \langle u, \gamma' \rangle^2 + \langle u, \gamma'' \rangle^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \langle u, \gamma' \rangle^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\bar{k}^2 \langle u, \gamma' \rangle^2 + \langle u, \gamma'' \rangle^2 &= \bar{k}^2 |u|^2 |\gamma'|^2 \cos^2 \theta_1 + |u|^2 |\gamma''|^2 \cos^2 \theta_2 \\
&= \bar{k}^2 |u|^2 \cos^2 \theta_1 + \bar{k}^2 |u|^2 \cos^2 \theta_2 \\
&= \bar{k}^2 |u|^2 (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde θ_1 é o ângulo entre u e γ' e θ_2 é o ângulo entre u e γ'' . Note que, como $\gamma' \perp \gamma''$, então quatro possibilidades podem ocorrer:

$$\begin{aligned} i) \quad & \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \\ ii) \quad & |\theta_1 - \theta_2| = \frac{\pi}{2} \\ iii) \quad & \theta_1 + \theta_2 = \frac{3\pi}{2} \\ iv) \quad & \theta_1 + \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

Assim, em qualquer caso, obtem-se

$$1 = \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2,$$

e, também de (3.8), temos

$$\bar{k}^2 \langle u, \gamma' \rangle^2 + \langle u, \gamma'' \rangle^2 = \bar{k}^2 |u|^2. \quad (3.9)$$

Observe que, como $N = (-cf, ec - ag, af)$ é normal a Σ ,

$$\frac{(-cf, ec - ag, af)}{ec - ag} = (-A, 1, -B)$$

também o é. Note que, $(0, 1, 0)$ é normal a \mathbb{P} , do ângulo θ entre \mathbb{P} e Σ vem

$$\cos \theta = \frac{\langle (0, 1, 0), (-A, 1, -B) \rangle}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}.$$

Como,

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta},$$

segue que

$$\frac{1}{A^2 + B^2 + 1} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}.$$

Visto que $|\nabla \pi| = \tan \theta = K$, segue que

$$\tan \theta = \sqrt{A^2 + B^2} = K.$$

Note que

$$|u|^2 = \langle (A, 0, B), (A, 0, B) \rangle = A^2 + B^2 = K^2. \quad (3.10)$$

Assim, de (3.7) e (3.9), vem

$$\begin{aligned} \bar{k}_{\partial \Lambda} &= \frac{(\bar{k}^2 + (\bar{k}^2 \langle u, \gamma' \rangle^2 + \langle u, \gamma'' \rangle^2))^{\frac{1}{2}}}{(1 + \langle u, \gamma' \rangle^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{(\bar{k}^2 + \bar{k}^2 |u|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \langle u, \gamma' \rangle^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\bar{k}^2 + \bar{k}^2 K^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \langle u, \gamma' \rangle^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\bar{k} (1 + K^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \langle u, \gamma' \rangle^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

e de (3.10) temos

$$\cos^2 \theta_1 = \frac{\langle u, \gamma' \rangle^2}{|u|^2 |\gamma'|^2} = \frac{\langle u, \gamma' \rangle^2}{|u|^2} = \frac{\langle u, \gamma' \rangle^2}{K^2}.$$

Então

$$\langle u, \gamma' \rangle^2 = K^2 \cos^2 \theta_1 \leq K^2. \quad (3.12)$$

Segue de (3.11) e (3.12) que,

$$\bar{k}_{\partial\Lambda}(s) = \frac{\bar{k}(s) (1 + K^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \langle u, \gamma'(s) \rangle^2)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\bar{k}(s)}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.13)$$

e isto prova (3.1). Lembramos que a relação entre a curvatura hiperbólica de $\partial\Lambda$ e sua curvatura euclidiana é dada por

$$k_{\partial\Lambda} = \bar{k}_{\partial\Lambda} x_3 + \eta_3^{\partial\Lambda},$$

onde $\eta_3^{\partial\Lambda}$ é a terceira coordenada do vetor normal unitário a $\partial\Lambda$, apontando para Λ . Também temos que a curvatura hiperbólica da $\partial\Omega$ é dada por

$$k = \bar{k} x_3 + \eta_3^{\partial\Omega},$$

onde $\eta_3^{\partial\Omega}$ é a terceira coordenada do vetor normal unitário a $\partial\Omega$, apontando para Ω . Assim,

$$\bar{k} = \frac{k - \eta_3^{\partial\Omega}}{x_3}.$$

Então, dados pontos $q = (x_1, 0, x_3) \in \partial\Omega$ e $p = (x_1, \pi(x_1, x_3), x_3) \in \partial\Lambda$, usando (3.13) segue que

$$\begin{aligned} k_{\partial\Lambda}(p) &= \bar{k}_{\partial\Lambda}(p) x_3 + \eta_3^{\partial\Lambda} \geq \frac{\bar{k}(q)}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}} x_3 + \eta_3^{\partial\Lambda} \\ &= \frac{k(q) - \eta_3^{\partial\Omega}}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}} + \eta_3^{\partial\Lambda}. \end{aligned}$$

Como $\partial\Lambda$ é uma curva de Jordan suave contida em Σ , o menor valor que $\eta_3^{\partial\Lambda}(s)$ assume é igual a $-|\sin \sigma|$, onde σ é o ângulo entre Σ e $\{x_3 = 0\}$ (vemos isso considerando a aplicação normal de Gauss a $\partial\Lambda$). Mas, como $h = \cos \sigma$, temos que $|\sin \sigma| = \sqrt{1 - h^2}$. Então

$$|\eta_3^{\partial\Lambda}| \geq \sqrt{1 - h^2}.$$

Como o maior valor que $\eta_3^{\partial\Omega}$ poderá assumir é 1, segue que

$$k_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{k(q) - 1}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{1 - h^2},$$

ou seja,

$$k_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{k(q) - \sqrt{1 - h^2} (1 + K^2)^{3/2} - 1}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}},$$

o que prova (3.2). □

3.2 Resultados de existência

Seja $d_H : \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ a distância hiperbólica. Dado $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado, definimos o diâmetro de Ω por

$$\text{diam}(\Omega) = \sup \{d_H(p, q) ; p, q \in \overline{\Omega}\}$$

e

$$\delta = \exp(\text{diam}(\Omega)). \quad (3.14)$$

Tomando,

$$(x_3^{\partial\Omega})^m = \min \{x_3 ; (x_1, 0, x_3) \in \partial\Omega\}$$

e

$$(x_3^{\partial\Omega})^M = \max \{x_3 ; (x_1, 0, x_3) \in \partial\Omega\},$$

então

$$\sigma = \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M}{(x_3^{\partial\Omega})^m} \leq \delta$$

onde δ é dada por (3.14).

O resultado abaixo, além de ter interesse em si mesmo, nos fornece os principais dados que precisamos para provar o Teorema 2, nosso resultado principal.

Teorema 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado, simplesmente conexo e de classe $C^{2,\alpha}$ e seja k a curvatura de $\partial\Omega$ com respeito a orientação interna. Seja Σ um plano equidistante em \mathbb{U}^3 dado como gráfico parabólico de uma função $\pi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|\nabla\pi\| = K$, e seja h a curvatura média de Σ . Dado $|h| < H$, se*

$$k > \delta(H+1)(1+K^2)^2 + 1,$$

onde δ é dado por (3.14), então existe $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de $Q_H = 0$ tal que $\partial G(u) = \partial\Lambda$, onde $\Lambda = C(\Omega) \cap \Sigma$.

Demonstração. No modelo \mathbb{U}^3 temos $\Lambda = (\Omega \times R) \cap \Sigma$. Sejam \bar{k} e $\bar{k}_{\partial\Lambda}$ as curvaturas da $\partial\Omega$ e $\partial\Lambda$ em \mathbb{R}^3 , k e $k_{\partial\Lambda}$ as curvaturas da $\partial\Omega$ e $\partial\Lambda$, $\eta^{\partial\Omega} = (\eta_1^{\partial\Omega}, \eta_2^{\partial\Omega}, \eta_3^{\partial\Omega})$ e $\eta^{\partial\Lambda} = (\eta_1^{\partial\Lambda}, \eta_2^{\partial\Lambda}, \eta_3^{\partial\Lambda})$ os vetores unitários normais a $\partial\Omega$ e $\partial\Lambda$, no sentido euclidiano, apontando para Ω e Λ respectivamente. Primeiramente, observamos que como por hipótese

$$k > \delta(H+1)(1+K^2)^{3/2} + 1,$$

então $\bar{k} > 0$. De fato, como

$$\bar{k} = \frac{k - \eta_3^{\partial\Omega}}{x_3},$$

então

$$\bar{k} > \frac{\delta(H+1)(1+K^2)^2 + 1 - \eta_3^{\partial\Omega}}{x_3} \geq \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M (H+1)(1+K^2)^2}{(x_3^{\partial\Omega})^m x_3} > 0.$$

Dado $p \in \partial\Lambda$, vamos considerar o círculo euclidiano C_p em Σ , tangente a $\partial\Lambda$ em p e cuja curvatura em \mathbb{R}^3 é

$$\bar{k}_p = \frac{\bar{k}_m}{(1+K^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.15)$$

onde

$$\bar{k}_m = \min_{\partial\Omega} \bar{k}.$$

De (3.1), para todo $p = (x_1, \pi(x_1, x_3), x_3) \in \partial\Lambda$

$$\bar{k}_{\partial\Lambda}(p) \geq \frac{\bar{k}(q)}{(1+K^2)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\bar{k}_m}{(1+K^2)^{\frac{3}{2}}} = \bar{k}_p,$$

onde $q = (x_1, 0, x_3) \in \partial\Omega$. Logo, como $\bar{k}_{\partial\Lambda} \geq \bar{k}_p$ podemos escolher o círculo C_p tal que Λ está contido na componente conexa limitada de Σ cujo bordo é C_p . Conforme mostra a figura 3.1.

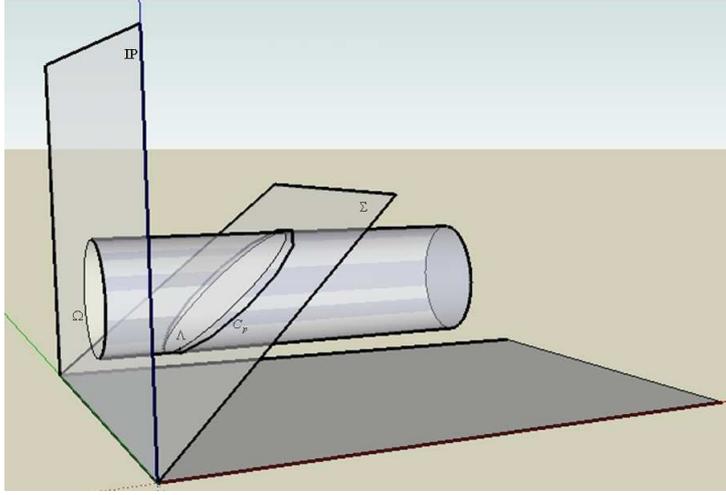


Figura 3.1: Esboço da situação acima descrita.

Considere a esfera euclidiana S_p de raio R cuja interseção com Σ é C_p e tal que $T_p(\partial\Omega \times \mathbb{R})$ é tangente a S_p em p . O plano determinado pelo centro de S_p , pelo centro do círculo C_p em Σ e por p é ortogonal a Σ e é ortogonal a $T_p(\partial\Omega \times \mathbb{R})$. Então, a distância euclidiana entre o centro de S_p e o centro de C_p é $\sqrt{R^2 - r^2}$, onde $r = 1/\bar{k}_p$. Além disso, considerando θ o ângulo entre Σ e \mathbb{P} ,

$$K = \tan \theta = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r},$$

ou seja, $R = r\sqrt{1 + K^2}$. Usando (3.15), resulta que

$$R = \frac{(1 + K^2)^2}{k_m}.$$

Denotamos por S_p^+ a parte de S_p que está no semi-espaço determinado por Σ para o qual $(0, 1, 0)$ aponta e por S_p^- a parte de S_p no outro lado de Σ . Se $\rho \geq R$, denotaremos por S_ρ a esfera euclidiana de raio ρ cuja interseção com Σ é C_p e tal que S_ρ^+ está contido no fecho da região limitada por S_p^+ e Σ (observe que temos duas esferas euclidianas de raio ρ passando por C_p se $\rho > R$, uma delas com as características mencionadas). A figura 3.2 representa um esboço dessa situação.

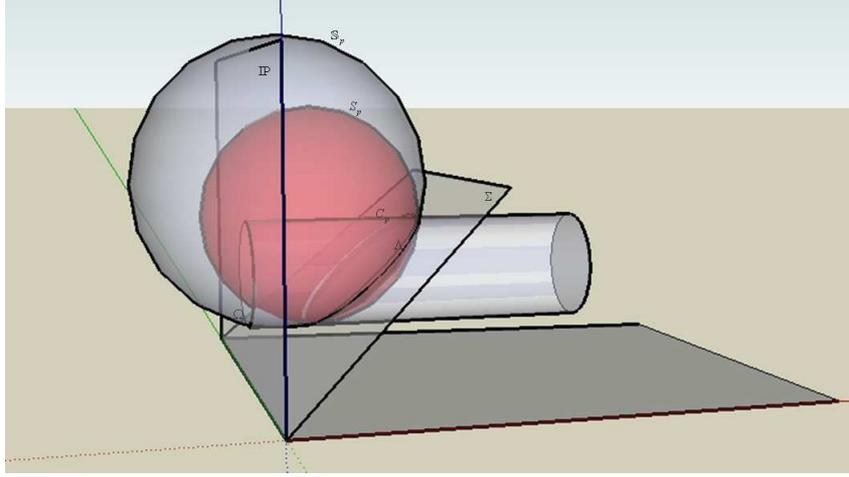


Figura 3.2: Esboço da situação descrita acima.

Então $\mathbb{S}_p^+ \cap (\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ é gráfico parabólico de uma função real suave s_p^+ sobre $\bar{\Omega}$ tal que $s_p^+(q) = \pi(q)$, isto é, $p \in G(s_p^+)$. Além disso, se $R < \rho$ então

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla s_p^+| \leq L_p,$$

onde L_p é uma constante que depende de p .

Denotamos por H^p a curvatura média de $G := G(s_p^+)$. A curvatura média euclidiana H_e^p de G satisfaz

$$H_e^p = \frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{R} = \frac{\bar{k}_m}{(1 + K^2)^2},$$

então

$$H^p = x_3^G \frac{1}{\rho} + \eta_3^G \leq x_3^G \frac{\bar{k}_m}{(1 + K^2)^2} + \eta_3^G,$$

onde η_3^G é a terceira coordenada do vetor unitário normal a \mathbb{S}_p^+ , apontando para o interior da região limitada por \mathbb{S}_p^+ . Observe que,

$$(x_3^{\partial\Omega})^m \leq x_3^G \leq (x_3^{\partial\Omega})^M. \quad (3.16)$$

Pelas hipóteses, segue que

$$\begin{aligned} k &> \frac{(x_3^{\partial\Omega})^M}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (H + 1) (1 + K^2)^2 + 1 \\ &\geq \frac{x_3^{\partial\Omega}}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (H + 1) (1 + K^2)^2 + 1 \\ &\geq \frac{x_3^{\partial\Omega}}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (H + 1) (1 + K^2)^2 + \eta_3^{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Mas, por outro lado, temos $k = \bar{k}x_3^{\partial\Omega} + \eta_3^{\partial\Omega}$, então,

$$\bar{k}x_3^{\partial\Omega} + \eta_3^{\partial\Omega} > \frac{x_3^{\partial\Omega}}{(x_3^{\partial\Omega})^m} (H + 1) (1 + K^2)^2 + \eta_3^{\partial\Omega},$$

isto é

$$\begin{aligned}\bar{k} &\geq \bar{k}_m > \frac{(H+1)(1+K^2)^2}{(x_3^{\partial\Omega})^m} \\ &\geq \frac{(H+1)(1+K^2)^2}{x_3^G} \geq \frac{(H-\eta_3^G)(1+K^2)^2}{x_3^G}.\end{aligned}$$

onde, na terceira desigualdade usamos (3.16). Assim

$$\frac{\bar{k}_m}{(1+K^2)^2}x_3^G + \eta_3^G > H.$$

Daí segue que existe $\rho > R$ tal que

$$H^p = \frac{1}{\rho}x_3^G + \eta_3^G \geq H. \quad (3.17)$$

Então, para tal ρ , $G(s_p^+)$ tem curvatura média H^p tal que $H^p \geq H$. Tomando

$$B = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\Omega), Q_H(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\pi\}.$$

e considerando $\Sigma_t = G(t\pi)$, $\Lambda_t = (\Omega \times \mathbb{R}) \cap \Sigma_t$, então $tK = \tan \theta_t \leq K$, onde θ_t é o ângulo entre Σ_t e \mathbb{P} . Consequentemente, por (3.1)

$$\bar{k}_{\partial\Lambda_t} \geq \frac{\bar{k}_m}{(1+t^2K^2)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\bar{k}_m}{(1+K^2)^{\frac{3}{2}}} = \bar{k}_p.$$

Então, dado $p_t \in \partial\Lambda_t$, procedemos como acima, tomando o círculo $C_{p,t}$ de raio $1/\bar{k}_p$ tangente a $\partial\Lambda_t$ em p_t e tal que Λ_t está contido no fecho da componente conexa limitada de Σ_t cujo bordo é $C_{p,t}$. Segue-se que existe uma esfera euclidiana $\mathbb{S}_{p,t}$ obtida da mesma forma como foi obtida \mathbb{S}_p , tal que o raio de $\mathbb{S}_{p,t}$ é $\rho' \leq \rho$, e $\mathbb{S}_{p,t}^+ \cap (\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ é o gráfico parabólico de uma função suave $s_{p,t}^+$ sobre Ω , com

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla s_{p,t}^+| \leq L_{p_t}$$

Além disso, como $\rho' \leq \rho$, de (3.17) obtemos que a curvatura média de $G(s_{p,t}^+)$ é maior ou igual a H . Pelo princípio do máximo (ver também seção 2 de [5] ou de [3]) $s_{p,t}^+$ é barreira "por cima" para Q_H em p_t e, como uma barreira "por baixo", usamos os planos equidistantes dados por $t\pi$, visto que sua curvatura média h_t satisfaz $|h_t| \leq |h| \leq H$. Como $[0, 1]$ e $\partial\Lambda_t$ são compactos, existe $0 \leq L < \infty$ tal que

$$L = \sup \{L_{p_t}; p_t \in \partial\Lambda_t, t \in [0, 1]\}.$$

Além disso, como $k > \delta(H+1)(1+K^2)^2 + 1$, segue que

$$k > \frac{k-1}{(1+K^2)^2} - 1 > H.$$

Então, como $|h| \leq H < k$ e $k > 1$, pelo Teorema 3.4 de [3], existe $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $Q_H(u_0) = 0$ em Ω com $u_0|_{\partial\Omega} = 0$. Então $B \neq \emptyset$. Que B é aberto é uma consequência do

Teorema das Funções Implícitas. Que B é fechado, usando a teoria de EDP's elípticas de [9] (maiores detalhes também no final da prova do próximo Teorema), é uma consequência do fato que

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla s_{p,t}^+| \leq L,$$

para todo $t \in [0, 1]$ e todo $p_t \in \partial\Lambda_t$ e

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla (t\pi)| \leq K.$$

Então, existe $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $Q_H(u) = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = \pi|_{\partial\Omega}$. \square

3.2.1 O Teorema Principal

Segue agora o Teorema Principal de nosso trabalho (Teorema 2), que enunciamos novamente aqui:

Teorema: *Seja $\Omega \subset P$ um domínio limitado, simplesmente conexo e de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Suponha que (Ω, φ) satisfaça a condição de declividade limitada com constante $K \geq 0$. Seja k a curvatura de $\partial\Omega$ em \mathbb{H}^3 com respeito a orientação interna. Dado*

$$H \geq \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}},$$

se

$$k > \delta(H + 1)(1 + K^2)^2 + 1,$$

então existe $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de $Q_H = 0$ em Ω , com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Demonstração. Suponhamos que $(x_3^{\partial\Omega})^m \geq 1$. Se esse não for o caso, reduziremos à situação acima, considerando uma isometria do tipo hiperbólico (uma homotetia euclidiana com centro em $(0, 0, 0)$ no modelo em que estamos trabalhando). Como (Ω, φ) satisfaz a condição de declividade limitada com constante K , para cada $p = (x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3) \in G(\varphi)$ consideremos as funções $\pi_p^\pm : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ como na Definição 2.8, isto é, neste contexto são funções lineares afins tais que $|\nabla \pi_p^\pm| \leq K$. Para qualquer $p \in G(\varphi)$, o ângulo θ entre $G(\pi_p^+)$ e \mathbb{P} e o ângulo σ entre $G(\pi_p^+)$ e o plano $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$ (ou o ângulo θ entre $G(\pi_p^-)$ e \mathbb{P} e o ângulo σ entre $G(\pi_p^-)$ e o plano $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$) satisfaz

$$\frac{\pi}{2} - \theta \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2},$$

De fato, temos $\eta_2 = (0, \beta, 0)$ e $\eta_3 = (0, 0, \gamma)$, onde $\beta, \gamma = \pm 1$ vetores normais a \mathbb{P} e a $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$, respectivamente. Como $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, podemos supor $\eta_1 = (A, \alpha, B)$, $\alpha \neq 0$, como o vetor normal a $G(\pi_p^\pm)$. Do fato que o ângulo entre dois planos é, por definição, o menor ângulo entre eles, temos

$$0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$$

e

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Suponhamos que $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ seja linearmente independente (se isso não ocorrer, a afirmação é óbvia). Então, é sempre possível escolher α, β e γ tal que η_1, η_2 e η_3

formam um ângulo triedro, cujas medidas dos ângulos das faces são θ , σ e $\frac{\pi}{2}$. E como em todo ângulo triedro, qualquer face é menor que a soma das outras duas, segue que $\frac{\pi}{2} < \theta + \sigma$, ou seja,

$$\frac{\pi}{2} - \theta < \sigma,$$

e portanto

$$\frac{\pi}{2} - \theta < \sigma \leq \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, a curvatura média h de $G(\pi_p^\pm)$ é tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq |h| &\leq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan K\right) = \\ &= \sin(\arctan K) = \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}}. \end{aligned}$$

É fácil ver que, para $t \in [0, 1]$, $(\Omega, t\varphi)$ satisfaz a condição de declividade limitada com constante $tK \leq K$. Em particular, as funções $t\pi_p^\pm$ estão no contexto da Definição 2.8 para $(\Omega, t\varphi)$ no ponto

$$p_t = (x_1, t\varphi(x_1, x_3), x_3) \in G(t\varphi),$$

e, além disso,

$$|\nabla t\pi_p^\pm| \leq tK$$

em $\bar{\Omega}$. Ponha

$$\Lambda_{p,t}^+ = G(t\pi_p^+) \cap (\Omega \times \mathbb{R}),$$

e

$$B = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\Omega), Q_H(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}.$$

Observe que cada $p_t \in \partial\Lambda_{p,t}^+ \subset G(t\pi_p^\pm)$. Como

$$\begin{aligned} k &> \delta(H+1)(1+K^2)^2 + 1 \\ &\geq \delta(H+1)(1+t^2K^2)^2 + 1, \end{aligned}$$

pelo Teorema 3.2, existe uma função $u_{p,t}^+ \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de $Q_H = 0$ em Ω com $u_{p,t}^+|_{\partial\Omega} = t\pi_p^+$ e, além disso,

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla(u_{p,t}^+)| \leq L_{p,t}. \quad (3.18)$$

Pela compacidade de $[0, 1]$ e $G(\varphi)$ segue que,

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla(u_{p,t}^+)| \leq L \leq \max\{K, L\} \quad (3.19)$$

para todo $p \in G(\varphi)$ e $t \in [0, 1]$. Por outro lado, a curvatura média $h_{p,t}$ de $G(t\pi_p^-)$ satisfaz

$$|h_{p,t}| \leq \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}} := h_0$$

e, além disso, $|\nabla(t\pi_p^-)| \leq tK$ em $\bar{\Omega}$. Então,

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla(t\pi_p^-)| \leq K \leq \max\{K, L\}$$

para todo $p \in G(\varphi)$ e $t \in [0, 1]$. Segue de (3.18) e (3.19) uma estimativa *a priori* para o gradiente no bordo

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq \max\{K, L\}, \quad (3.20)$$

onde u é qualquer solução de $Q_H(u) = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$, para $t \in [0, 1]$. Pelo Lema 2.5 de [5], (3.20) vale em todo Ω e pelo Lema 2.2 desse mesmo artigo, obtemos estimativas uniformes C^1 de qualquer solução de $Q_H(u) = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$, para $t \in [0, 1]$. Como $B \neq \emptyset$ pelo Teorema 3.4 de [3] (observe que $h_0 \leq H < k$, e $k > 1$), pelo Método da Continuidade, existe uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ de $Q_H = 0$ satisfazendo $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. A unicidade de solução segue diretamente do Princípio do Máximo para a diferença de duas soluções relativa ao operador (1.6). \square

3.2.2 Um exemplo esclarecedor

No que segue, exibiremos um exemplo de um domínio $\Omega \subset \mathbb{P}$ cuja curvatura satisfaz $k > \delta(H+1)(1+K^2)^2 + 1$ para algum

$$H \geq \frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}},$$

e tal que a curvatura média H_C de $C(\partial\Omega)$ satisfaz $H_C < H$.

Considerando em $\Omega \subset \mathbb{P}$ o disco euclidiano de centro $(0, 0, \frac{101}{100})$ e de raio euclidiano $\rho = \frac{1}{100}$. Temos então, $x_3^m = 1$, $x_3^M = \frac{51}{50}$, a curvatura euclidiana da $\partial\Omega$ é $\bar{k}_{\partial\Omega} = 100$ e a curvatura média euclidiana de $C(\partial\Omega)$ é $\bar{H}_C = 50$. Nesse caso, o diâmetro hiperbólico de Ω é

$$\text{diam}(\Omega) = \ln\left(\frac{51}{50}\right),$$

e assim,

$$\delta = \exp\left(\ln\left(\frac{51}{50}\right)\right) = \frac{51}{50}.$$

Seja $k_{\partial\Omega}$ a curvatura da $\partial\Omega$ em \mathbb{H}^3 . Como

$$k_{\partial\Omega} = x_3 \bar{k}_{\partial\Omega} + \eta_3$$

e, em $(0, 0, 1)$, temos $x_3 = 1 = x_3^m$ e $\eta_3 = 1$, segue que

$$1 \leq \frac{k_{\partial\Omega} - 1}{100},$$

ou seja, $k_{\partial\Omega} \geq 101$. Queremos encontrar H e K tal que

$$\frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}} \leq H < \frac{5000}{51(1 + K^2)^2} - 1,$$

isto é, satisfazendo

$$\frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}} \leq H$$

e

$$\delta(H+1)(1+K^2)^2 + 1 < 101.$$

Para $K = \frac{1}{10}$, por exemplo, temos que

$$\frac{5000}{51(1+K^2)^2} - 1 = \frac{5000000}{520251} - 1 \approx 95,107.$$

Assim, para $K = \frac{1}{10}$ e qualquer H tal que

$$\frac{\sqrt{101}}{101} < H < \frac{5000000}{520251} - 1.$$

Temos $k_{\partial\Omega} > \delta(H+1)(1+K^2)^2 + 1$. Além disso, como Ω é estritamente convexo no caso euclidiano, dado $K \geq 0$ existe $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ tal que (Ω, φ) satisfazem a condição de declividade limitada com constante K (por exemplo, tome uma superfície equidistante Σ que intercepta $C(\partial\Omega)$ e cujo ângulo θ entre Σ e \mathbb{P} é tal que $\tan \theta = K$, e considere $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(\varphi) = \Sigma \cap C(\partial\Omega)$). Segue do Teorema 2 que para tais Ω e φ , existe $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de $Q_H = 0$ em Ω com $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. Além disso, a curvatura média de $C(\partial\Omega)$ é

$$H_C = x_3 \bar{H}_C + \eta_3 \leq x_3^M \bar{H}_C + \eta_3^M = \frac{51}{50} \cdot 50 + 1 = 52,$$

onde \bar{H}_C é a curvatura média euclidiana de $C(\partial\Omega)$. Então, para H tal que $52 < H < 95$, por exemplo, temos que $H_C < H$. Isto significa que temos um caso que não é contemplado na extensão do caso suave do Teorema de Serrin para gráficos parabólicos em \mathbb{H}^3 descritos nos trabalhos [5] ou [3] e cujo dado no bordo não é nulo.

Bibliografia

- [1] Aiolfi, A. J.: *O problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em domínios não necessariamente convexos*; Tese de doutorado, **UFRGS**, (2003)
- [2] Benedetti, R; Petronio C. "*Lectures on Hyperbolic Geometry*", Universitext, Springer-Verlag, Berlin, (1992).
- [3] Barbosa, J. L. M. and Sa Earp, R.: Prescribed mean curvature hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ with convex planar boundary,I, *Geometriae Dedicata*, **71** (1998), 61-74.
- [4] Carmo, M. P. do, "*Geometria Riemanniana*", IMPA, (1988).
- [5] Dajczer, M. and Ripoll, J.: An extension of a theorem of Serrin to graphs in Warped products, *J. of Geometric Analysis*, **15** (2) (2005), 195-205.
- [6] Dajczer, M., Lira, J. and Hinojosa, P.: Killing graphs with prescribed mean curvature, *Calc. Var. Partial Diff. Equations*,**33** 2 (2008), 231-248.
- [7] Fusieger, P. and Ripoll, J.: Radial graphs of constant mean curvature and doubly connected minimal surfaces. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **23** (2003), 373-400.
- [8] Fornari, S. and Ripoll, J.: Killing fields, mean curvature and translation maps. *Illinois Journal of Mathematics* , **48**(4)(2004),1385-1403.
- [9] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S.: "*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*", 2nd ed, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1983.
- [10] Guio, E. M. and Sa Earp, R.: Existence and non-existence for a mean curvature equation in hyperbolic space, *Comm. Pure and App. Anal.* **4** (3) (2005), 549-568.
- [11] Hartman, P.: On the bounded slope condition, *Pacific J. of Math.*, **18** (3) (1966), 465-511.
- [12] Jost, Jürgen, "*Riemannian Geometry and Geometric Analysis*", Springer, (1995).
- [13] Ratcliffe, J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, 2nd ed., Springer, (2006)
- [14] Ripoll, J. : Some existence results and gradient estimates of solutions of the Dirichlet problem for the constant mean curvature equation in convex domains, *J. of Diff. Equations*, **181** (2002), 230-241

- [15] Serrin, J.: *The Problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equations with many independent variables*, Philosophical Transactions of the Royal Society, vol. **A264** (1969), 413-496