

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

**TRANSIÇÃO SÚBITA E QUEBRA DE
APROXIMAÇÃO MODULACIONAL EM
SISTEMAS ESPAÇO-TEMPORAIS ***

Günther Johannes Lewczuk Gerhardt

Tese realizada sob a orientação do Dr. Felipe Barbedo Rizzato e apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre 2002.

*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

... para meu pai Walter e mãe Luiza
(por terem aguentado ser meus pais...)
... para Suzana
(por ter conseguido me suportar, até agora...)



Agradecimentos

Existem muitas pessoas a quem eu gostaria de fazer um especial agradecimento: certamente tantas que eu não poderia ficar restrito a uma página apenas. Mais páginas de agradecimentos do que uma, ainda que seja permitido, em geral não são lidas e portanto acabam por não cumprirem seus objetivos. Então ficarei restrito a agradecer aos que mais próximos de mim ficaram nestes três anos; mas não desmereço todos os que porventura aqui não aparecerem.

Inicialmente, e como não poderia deixar de ser, agradeço especialmente ao meu orientador, Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato, que sempre discutiu, orientou e procurou fazer com que me interessasse e compreendesse aquilo em que trabalhávamos. Certamente foi um exemplo que levarei para o resto de minha vida de como se deve orientar um aluno.

Também não posso me esquivar de agradecer ao pessoal de biblioteca, sempre solícito em meus pedidos de referências e material bibliográfico. Em especial à Silvia Rossi, sempre prestativa com todos os estudantes de pós-graduação e de graduação. Um abraço ao Zé por muitos favores no setor de livros também!

Meus colegas de sala! Também devo muito a estes *caras* com os quais se podia discutir qualquer coisa (desde física até o futuro da humanidade na internet). Fica minha citação ao Márcio (Chato) Soares, Nelson Vera Villamizar, Leandro (Baretta) Langie Araújo e Marcelo Thielo. Também fica meu abraço ao Lúcio Minoru Tozawa (que foi para o Japão mas agora já voltou), ao Eduardo Veitenheimer Costa (que anda meio sumido daqui) e ao Emerson (Sônico) Luiz de Santa-Helena (que virou um *homem de negócios*). Ao Thielo meus especiais agradecimentos pelas inúmeras discussões sobre séries temporais (ele pode ver agora que eu não iria fazer meu doutorado nisso) e pelos incomensuráveis auxílios em C.

E também existem as pessoas de fora do Instituto de Física, que contribuíram para fazer minha vida mais interessante. Fica um agradecimento especial para a Márcia Lorena Fagundes Chaves (que sempre se interessa por aplicações da Física na Medicina), à Maria

Paz Loayza Hidalgo (que justamente sempre mostrou que quem quer negociar com um macaco precisa usar bananas) e ao João Alfredo Borges (que sabe que pessoas diferentes tem motivos diferentes para fazer coisas diferentes).

E como já se está na segunda página (prova de que errei no meu primeiro parágrafo...) vamos usá-la para agradecer a alguns professores que muito me ensinaram nestes nove anos de UFRGS: José Irineu Kunrath, Ruth e Cláudio Schneider, Moacir Índio da Costa Jr. e ao Luiz Fernando Ziebell. Ao professor Irineu ficam minhas cordiais despedidas e que ele tenha certeza de que vou terminar o trabalho com hemoglobina de alguma forma.

Omnibus sodalibus amicis ut inveni apud reticulum in orbe terrarum ex quibus didici imprimem sodalitatem, amicitiam spemque in futuro certo ac incerto. De variis rebus disputavimus atque multa adhuc habemus ad disputandum sed certissime nunc scimus ne solos esse et quoque hic, miror, aliquos e vobis inveni res mihi numquam cogitata. Vobis etiam impossibilis est relinquere et gratias ne agere maximas propter epistulas vestras quae quamvis diversissimae sunt tamen tenent me in rotis humanioribus et ducent me ad cogitationes phylosophicas historicasque qui scientiae pars est totae unissimae.

ABSTRACT

Chaos and coherence in three wave interaction and sudden transition to chaos in the Non Linear Klein Gordon equation are analysed. The influence of chaos in the incoherence for the problem of three wave coupling is studied when adiabatic approximations leading to a model cease. It is found a mismatch threshold of the wave triplet, below which coherence and wave coupling are dominant. It is also studied the transition between a modulational behaviour to a spatiotemporal one in the Non Linear Klein Gordon Equation and it was found a critical curve in the amplitude frequency plane dividind into regions where transition occur only when the amplitude value exceed some threshold.

RESUMO

O caos e a incoerência nas interações conservativas de três ondas e a transição súbita para o caos na equação não linear de Klein Gordon são estudados. É analisada a influência da presença de caos sobre a incoerência no problema da interação de um tripleto de ondas quando um modelo de aproximação adiabática deixa de ser válido. É encontrado um limiar para o valor do descasamento do tripleto de ondas, abaixo do qual a coerência e o acoplamento entre as ondas é o comportamento dominante. Na equação não linear de Klein Gordon estudou-se a transição entre um regime de dinâmica modulacional para um de caos espaço temporal e foi encontrada uma curva crítica no plano amplitude-frequência que o divide em regiões onde só existe transição para o caos caso o valor de amplitude exceder um certo limiar.

Índice

I	Caos e Caos Espaço-Temporal	4
I.1	Introdução	4
I.2	Sensibilidade às Condições Iniciais	4
I.3	Sistemas Dissipativos	6
I.4	Sistemas Hamiltonianos	7
I.4.1	Tempo de Correlação	9
I.4.2	Órbitas Periódicas	10
I.5	Sistemas Extensos	12
I.5.1	Comprimentos Característicos	14
I.5.2	Funções de Correlação	15
I.6	Caos Espaço-Temporal e as Equações de Zakharov	16
I.6.1	A Equação Complexa de Ginzburg-Landau	17
I.7	A Equação Não-Linear de Schrödinger	19
II	Descrição Hamiltoniana de Ondas	22
II.1	Introdução	22
II.2	Partículas e Ondas	22
II.2.1	Graus de Liberdade	23
II.2.2	Descrição Hamiltoniana	24
II.2.3	Interações de Ondas por Ressonância	26
II.3	Instabilidade Modulacional	27
II.3.1	Estabilidade e Instabilidade de Pacotes de Onda	27

II.3.2 Um Exemplo	30
II.4 Relações de Manley-Rowe	31
II.5 O Conceito de Entropia Espectral.	32
II.6 A Aproximação Adiabática	33
III Caos e Coerência nas Interações Conservativas do Decaimento de Ondas	34
III.1 Introdução	34
III.2 O Decaimento de Três Ondas	34
III.3 O Modelo	37
III.4 A Dinâmica Completa	42
III.5 Curvas Limites	43
III.6 Vazamento das Fases	47
III.7 Conclusões	49
IV Transição Súbita para Caos na Eq. Não-Linear de Klein-Gordon	50
IV.1 Introdução	50
IV.2 O Modelo e as Aproximações	50
IV.3 Nas Proximidades da Instabilidade Modulacional	54
IV.4 Simulações com a dinâmica espaço-temporal completa.	61
IV.4.1 A Convergência	67
IV.5 Conclusões	69
V Conclusões Finais	71
A Detalhamento da dedução de (III.6) e (III.10)	73
B Obtenção do Hamiltoniano (III.15)	77
C Obtenção da Aproximação (IV.6)	79

Introdução

Nos últimos anos um grande esforço tem sido despendido para estudar e compreender o caos espaço-temporal. Por outro lado, o estudo de sistemas simples com acoplamento de poucas ondas já é o suficiente para produzir uma riqueza de comportamentos complexos que podem ser de grande auxílio nas aplicações de sistemas deste tipo. Entre as várias aplicações encontra-se a transmissão de grandes quantidades de dados em fibras ópticas, onde fenômenos de quebra de ondas não-lineares tornam-se relevantes.

Interações não-lineares em ondas e a instabilidade modulacional são um processo comum e a dinâmica pode ser chamada de modulacional se a escala de tempo correspondente for muito maior que a associada com a alta frequência portadora do trem de onda. Assim esta frequência é, em geral, uma quantidade fixa que caracteriza as propriedades lineares e de dispersão do sistema e a frequência modulacional é uma quantidade não-linear que cresce com a amplitude da onda. Desta forma, a dinâmica modulacional é um processo adiabático se o mesmo se posicionar abaixo de um limiar ditado por um campo. Aqui vai ser focada a atenção justamente no que ocorre quando este campo é excedido. O enfoque básico sempre será na procura por transição súbita em sistemas deste tipo.

Também será analisada a influência do caos sobre a coerência da interação de três ondas. O caos tem um papel fundamental no problema quando as aproximações adiabáticas que levam a um modelo integrável deixam de ser válidas. Em regimes regulares, onde os campos são suficientemente pequenos, existe um valor característico para o descasamento de frequências do tripleto de ondas abaixo da qual a coerência e o acoplamento de fase são dominantes. Em regimes caóticos, por outro lado, não existem tais valores e o acoplamento se dá de uma forma mais complexa.

Neste trabalho se procurou fazer uma breve introdução de terminologia assim como aplicações onde este tipo de abordagem era importante nos dois primeiros capítulos reservando-se os capítulos III e IV para o estudo mais detalhado do papel desempenhado pelo caos no decaimento de ondas e na equação não-linear de Klein-Gordon. A escolha da equação não-linear de Klein Gordon não foi fruto do acaso mas sim do fato de que se estava procurando por comportamentos de transição súbita em sistemas bem estabelecidos e de aplicação em optica. O autor espera que o leitor faça um bom proveito do texto mas recomenda fortemente as referências citadas.

Capítulo I

Caos e Caos Espaço-Temporal

I.1 Introdução

Neste capítulo pretende-se dar uma introdução ao que é caos e caos espaço-temporal. Será dada uma breve noção de caos dissipativo e hamiltoniano, assim como aplicações em algumas áreas, como modelamento de fluidos e aquecimento de íons em plasmas. No final se introduz a noção de caos espaço-temporal e a equação de Ginzburg-Landau. O objetivo deste capítulo é situar o leitor dentro da área de que pretende tratar o resto do trabalho. Não se pretende aqui aprofundar nenhum dos tópicos tratados e recomenda-se, se for de interesse do leitor, as referências citadas.

I.2 Sensibilidade às Condições Iniciais

Caos, ou sensibilidade às condições iniciais (SCI) como propriedade de certos sistemas, já é conhecido há mais de 100 anos. Desde os trabalhos pioneiros de Poincaré [Po08] estudando o problema das órbitas de três corpos, muito tempo se passou até que, no final da década de 1950 e início da de 1960, alguns trabalhos começassem a tratar novamente deste tipo de problema.

De fato, nos trabalhos iniciais de Poincaré, esta SCI das órbitas foi descrita como ”...*Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très*

grandes dans les phénomènes fineaux. Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit ... Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas de voir, et alors nous disons que cet effet est du au hasard ... “[Po08, p.345]¹. Isto era o máximo que se poderia esperar, uma vez que relevava o estudo de tais sistemas a estudos numéricos, o que era inviável na época.

Com o advento da computação, esbarrou-se novamente neste problema e então o mesmo começou a ser explorado do ponto de vista numérico. Basicamente esta SCI se caracteriza pelo fato de que qualquer pequena alteração do estado inicial do sistema (ainda que infinitesimal) acarretará estados finais completamente distintos, o que inviabiliza que previsões a longo prazo possam ser feitas sobre medidas de tais sistemas ², uma vez que qualquer erro experimental rapidamente acarretaria condições finais diferentes. Porém, estes sistemas possuíam um comportamento *global* que não variava ao longo do tempo. Este tipo de *estacionariedade* temporal permitia que os mesmos pudessem ser caracterizados de uma forma completa através de quantidades que não dependiam do tempo, ainda que a predictabilidade continuasse sendo, a longo prazo, impossível.

O comportamento temporal de tais sistemas muito se assemelha a sistemas randômicos, inclusive algumas vezes a palavra *estocasticidade*, sinônimo de randomicidade, foi usada para descrever sistemas caóticos determinísticos. Estes sistemas possuem espectro de Fourier contínuo, expoentes de Lyapunov positivos (os quais medem justamente a divergência de condições iniciais) e atratores com estrutura fractal [CH93]. Dentro da física experimental, o estudo de tais sistemas assumiu muitas formas, como a análise de séries temporais

¹... As pequenas diferenças nas condições iniciais se transformam em grandes diferenças nas condições finais. Um pequeno erro nas primeiras produzem um erro enorme nas últimas. A predictabilidade se torna impossível e nós temos um fenômeno fortuito... Um fato muito pequeno, que nos escape, determinará um efeito final considerável que nós não podemos deixar de notar, e somos levados a dizer que este efeito é devido ao acaso...

²O trabalho pioneiro de Lorenz, que era meteorologista, pode ser considerado como uma *desculpa* teórica para os conhecidos erros da meteorologia.

não-lineares caóticas [Ab93]. No campo da física teórica, os modelos que se enquadravam nessas categorias começaram a ser muito mais ricamente estudados por meio de algumas ferramentas simples, como mapas de Poincaré ou mapas de parâmetros.

I.3 Sistemas Dissipativos

Atratores aparecem em sistemas dinâmicos dissipativos; com efeito, nesses sistemas ocorre contração do elemento de volume no espaço de fases, o que não é possível para sistemas conservativos, como consequência do teorema de Liouville. Por exemplo, em um oscilador harmônico amortecido, um elemento de volume do espaço de fases se contrai até dimensão nula (ponto), ou seja, o escoamento de trajetórias no espaço de fases não somente contrai volumes mas reduz sua dimensão para zero.

Na medida que se descreve o comportamento de sistemas físicos para tempos longos, ou seja, $t \rightarrow \infty$, nota-se que os atratores estão intimamente ligados à noção de estabilidade. Para um atrator estranho, isto também é verdade. Porém, neste, as trajetórias ficam confinadas a uma determinada região do espaço de fases (chamada *bacia de atração*) sendo que o movimento correspondente continua sendo caótico. Trata-se, de um processo contínuo de aproximar as trajetórias em uma dimensão e afastá-las em outra.

Uma estrutura deste tipo pode parecer paradoxal, mas não o é; em verdade, uma das primeiras consequências deste tipo de estrutura seria que movimentos instáveis poderiam ser observados por um longo tempo. Porém, uma explicação para este tipo de comportamento é que o sistema se moveria por um intervalo de tempo finito nas vizinhanças de uma trajetória instável e então, em um tempo τ , passaria para as vizinhanças de uma outra trajetória, esta também instável, refinando³ continuamente seu movimento⁴. O sistema muda continuamente sua evolução, mas em escalas cada vez mais reduzidas, de forma que ele está *globalmente* preso a um atrator mas é *localmente* instável. Um exemplo de atrator

³O que se tenta dizer com *refinamento* é que a órbita se aproxima assintótica e gradativamente de uma trajetória estável.

⁴É o chamado *teorema das órbitas ϵ* .

desse gênero é o atrator de Lorenz.

No trabalho de Lorenz aparece um atrator estranho resultado da integração numérica do sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

onde σ , b e r são parâmetros que caracterizam as propriedades do fluido e as configurações térmicas e geométricas do experimento. Nestas equações, σ é o chamado *número de Prandtl*, que é definido como o quociente entre a viscosidade cinemática do fluido e seu coeficiente de difusividade térmica; r é o *número de Rayleigh relativo* e b é uma constante que relaciona a distância entre as placas e a largura dos róis de convecção para o modelo de Rayleigh explanado a seguir.

As equações acima descrevem aproximadamente um fluido depositado entre duas placas paralelas e aquecido por baixo. O fluido mais aquecido tende a subir e o mais frio tende a descer, formando-se, assim, correntes de convecção dentro do mesmo. As variáveis x , y e z , remanescentes de um sistema de M (M grande) equações truncado na terceira, estão relacionadas, respectivamente, com a função corrente do fluido (caracteriza o escoamento), a diferença de temperatura entre as partes superior e inferior, em movimento, do rôlo convectivo e a diferença de temperatura ao longo do rôlo. É importante atentar para o fato de que, nas regiões do atrator, as órbitas tendem a se *entrelaçarem*, mas não tendem a um *ciclo-limite*.

I.4 Sistemas Hamiltonianos

A idéia de que sistemas Hamiltonianos pudessem ter comportamento *pseudo-aleatório* (ou SCI) existe desde o século XIX [CH93]. Boltzman fundamentou a sua Mecânica Estatística na hipótese de que, para um gás, cada órbita visitaria todas as partes do espaço de fases (ou assumiria todos os possíveis valores de energia). A esperança era provar uma propriedade *ergódica* do sistema: uma média temporal de qualquer quantidade ao longo de

uma órbita seria igual a uma média no espaço de fases sobre todas as suas órbitas.

O primeiro resultado nesta direção foi dado por Poincaré. Usando o fato de que um sistema Hamiltoniano conserva volume no espaço de fases, ele provou que praticamente todo o ponto em uma superfície de energia retorna a uma distância arbitrariamente próxima da sua condição inicial (também conhecida como *recorrência de Poincaré*). Isto é verdade para sistemas integráveis mas não implica em integrabilidade uma vez que sistemas estocásticos também podem ser ergódicos.

O próximo passo foi dado por Birkhof. Ele mostrou que a média temporal sobre qualquer função integrável converge ao longo das órbitas. Isto implica que a ergodicidade equivale a uma espécie de *transitividade métrica*: todos os conjuntos invariantes mensuráveis ou tem medida zero ou medida completa. Então o problema é reduzido a provar a transitividade.

O primeiro sistema onde isto foi feito foi um problema de escoamento de fluido sobre uma geodésica de curvatura negativa. Escoamentos geodésicos são definidos de uma forma variacional: geodésicas são curvas onde cada segmento tem comprimento estacionário com respeito a variações arbitrárias nos pontos iniciais e finais do segmento. Foi mostrado que possuíam fortes propriedades caóticas. Pesin [Pe76] introduziu os sistemas hiperbólicos não-uniformes, com consequências ergódicas que fossem satisfeitas por sistemas físicos.

Sistemas Hamiltonianos podem ser bem complexos mas ater-se-á somente aos aspectos mais simples da dinâmica hamiltoniana, como o comportamento próximo do equilíbrio. O estudo do equilíbrio e sua estabilidade foi o primeiro passo que Euler e Lagrange deram no problema de três corpos, e é bem compreensível que somente isso já dê um enorme volume de informação sobre o sistema que se está estudando.

Segundo a definição de Lyapunov, o equilíbrio de um conjunto de equações diferenciais é um ponto dito *estável* se, para uma dada vizinhança ϵ , existe uma subvizinhança ϵ' tal que, se um ponto permanecer em ϵ' , a órbita permanecerá em ϵ para sempre. Das equações de Hamilton, o equilíbrio é precisamente os pontos críticos do Hamiltoniano H : pontos tais que $\vec{\nabla}H = \vec{0}$. O próximo passo é, então, considerar a segunda derivada de H nos pontos críticos. Se estes forem positivos definidos (desde que H seja conservativo), o equilíbrio é estável. Indefinição ($\nabla^2 H = 0$) não implica necessariamente em instabilidade. A sequência

dessa *análise de estabilidade* é estudar a estabilidade do equilíbrio por uma linearização local das equações. Aqui os efeitos da estrutura simplética se fazem ver: os autovalores são encontrados aos pares. Em particular, para que seja *linearmente estável* todos os autovalores de H devem permanecer no eixo imaginário e, para perder a estabilidade linear, eles precisam colidir (saindo do eixo imaginário e colidindo no eixo real). Existe uma teoria bem desenvolvida que mostra como os autovalores se *movem* a medida que os parâmetros do sistema são variados [Vi84].

I.4.1 Tempo de Correlação

O conceito de tempo de correlação será importante mais adiante quando for comparado com as diversas distâncias de correlação no estudo de sistemas extensos.

Considere um sistema em regime caótico. É de esperar-se que, dado um estado inicial, o estado imediatamente subsequente seja razoavelmente bem definido. Este estado subsequente está pois correlacionado com o estado anterior do sistema; o próximo também estará e assim por diante até que não haja mais correlação nenhuma e a SCI tenha feito seu papel.

Este é o conceito de tempo de correlação: o tempo a partir do qual a correlação entre as variáveis é perdido. Note que sistemas que não estejam apresentado SCI podem ter tempo de correlação infinito. Normalmente, mas não é uma regra, encontra-se tempo de correlação com decaimento exponencial.

Via de regra as funções de correlações (temporais) são definidas a partir de médias temporais sobre as variáveis que definem o sistema e podem ser determinadas numericamente. O tempo de correlação fica definido como sendo o tempo onde tais funções anulam-se. É importante salientar que estas definições não são únicas e que, dependendo do objetivo, pode-se definir diversas funções de correlação e conseqüentemente outros tempos de correlação.

I.4.2 Órbitas Periódicas

As órbitas periódicas são as órbitas mais simples após o equilíbrio. Sistemas Hamiltonianos típicos podem ter infinitas órbitas periódicas. Considerando mapas de retorno sobre uma superfície de seção (como os apresentados na Figura I.3), é suficiente perguntar pela existência de órbitas periódicas para mapas simpléticos. Para mapas simpléticos de alta dimensionalidade a existência de infinitas órbitas periódicas pode ser deduzida usando-se certas condições. A análise da estabilidade linear é mais complicada, é claro, mas existe um teorema de Poincaré e Lyapunov que reza que os autovalores aparecem aos pares (complexos ou reais) ou em quadrupletos.

Sobre variações nos parâmetros do sistema: as órbitas periódicas persistem e somente são destruídas se um autovalor do sistema torna-se $+1$. Esta mudança qualitativa no conjunto das órbitas periódicas é chamada *bifurcação*. Na prática o que ocorre é que a órbita do sistema se desestabiliza na região da bifurcação; na bifurcação de dobramento de período, por exemplo, a órbita estava com período p antes da bifurcação e passa a período $2p$ (sendo que a antiga órbita continua existindo, porém deixa de ser estável e passa a ser instável). Como exemplo pode-se ficar restrito ao mapa introduzido por Karney no estudo do aquecimento de íons submetido a campos magnéticos e elétricos dado por

$$\begin{cases} u_{j+1} = u_j + 2\pi\delta - 2\pi A \cos(v_j) \\ v_{j+1} = v_j + 2\pi\delta + 2\pi A \cos(u_{j+1}), \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

onde δ e A são parâmetros variáveis relacionados respectivamente com a fase da onda injetada para aquecimento e com o raio de Larmor. Para esta discussão basta observar que as soluções aparecem, para diferentes condições iniciais, como regiões caóticas e periódicas (dependendo é claro dos valores de A e δ). As regiões periódicas aparecem como *ilhas* de ressonância e o caos é atingido via sobreposição (*overlap*) dessas ilhas. Observe este comportamento na Figura I.3.

Estas ilhas também são chamadas de *ilhas de ressonância*. Quando as ressonâncias se aproximam entre si (aumentando-se o parâmetro de controle A do sistema), o que ocorre tanto no caso em que a distâncias entre elas diminuem como no caso quando a amplitude

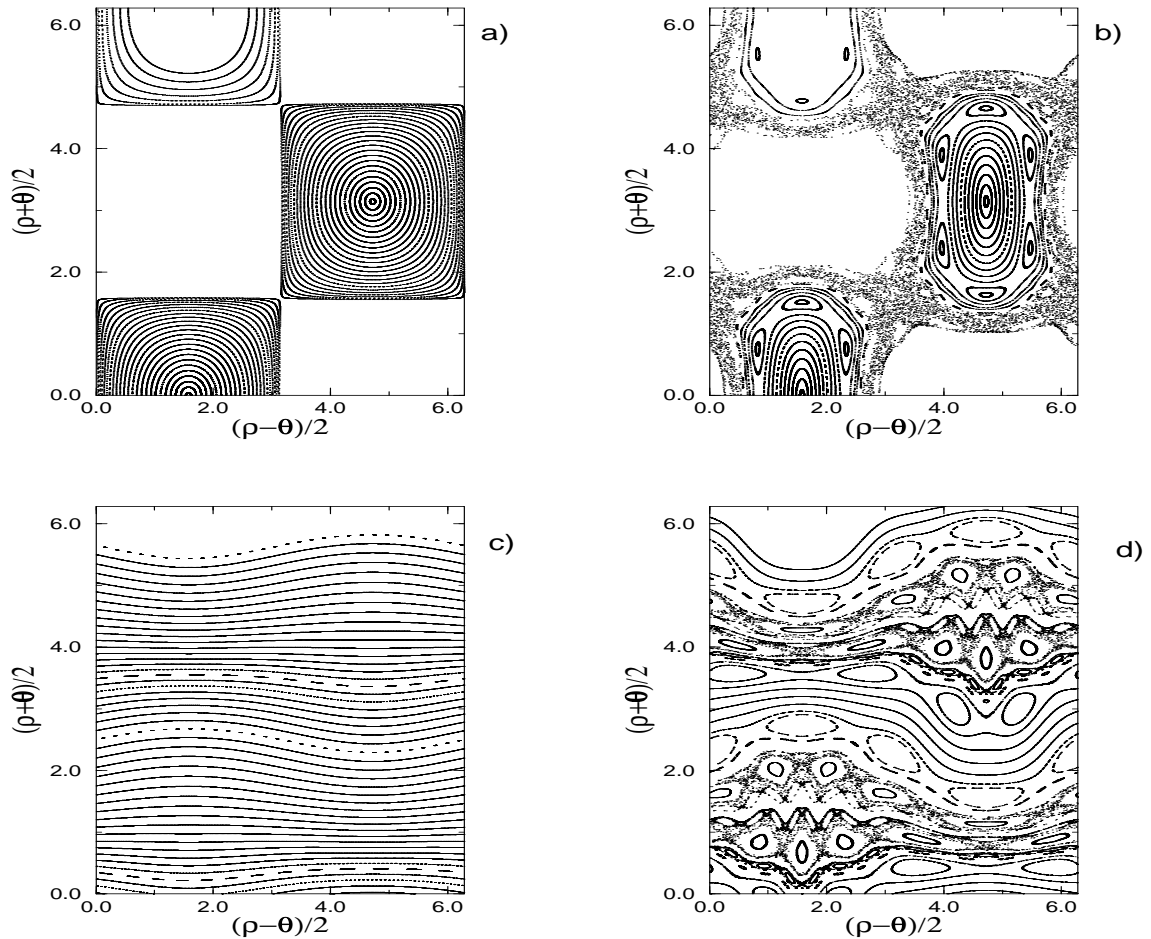


Figura I.1: Figura mostrando o espaço de fases para o sistema (I.2) com valores diferentes para A e δ : a) $A = 0.0122$ e $\delta = 1$, note as ilhas de periodicidade e a inexistência de caos; b) $A = 0.2412$ e $\delta = 1$ aqui se vê que as ilhas foram quebradas e o caos atingido (via overlap das ilhas); c) $A = 0.0412$ e $\delta = 0.23$, movimento periódico sem zonas de caos mostrando a integrabilidade do sistema com uma fase diferente de um inteiro e d) $A = 0.1412$ e $\delta = 0.23$ onde se vê, as órbitas periódicas e o caos coexistindo.

delas aumenta, as órbitas presas entre elas são primeiramente distorcidas e então destruídas. Estas órbitas são *torus* dentro do espaço de fases do sistema [Vi84, Ch79]. Dado um par dessas ressonâncias, um problema fundamental é determinar para que valores críticos do parâmetro perturbativo haverá a destruição dessas ressonâncias. De fato isso acaba resultando em uma mudança na topologia do espaço de fases pois curvas adjacentes chocam-se formando uma bacia de movimento *pseudo-estocástico* (caótico). Uma forma simples de identificar o parâmetro crítico é considerando as ressonâncias como não-interagentes e então computando em que região as separatrizes dessas ressonâncias se tocarão. Esse é o chamado *critério de overlap* de Chirikov [Ch79].

Não se pretende discutir este critério aqui, mas cumpre salientar que, apesar de não ser um critério rigoroso [Vi84, Ch79], é facilmente aplicável mesmo em problemas dos mais complicados dando uma visão esquemática da interação entre as ressonâncias. Observe a Figura I.4 onde é apresentado um esquema do *overlap* de ressonâncias à medida que o parâmetro é aumentado.

I.5 Sistemas Extensos

No próximo capítulo vai ser tratada a descrição Hamiltoniana de ondas. Aqui será introduzida a noção de sistemas extensos e suas peculiaridades. Um trabalho muito abrangente sobre este assunto é [CH93], onde muitos exemplos são explorados e definições detalhadas.

O que foi feito até aqui foi tratar de sistemas ditos *isolados*, como pequenas células de um corpo funcionando independentemente. Sistemas Hamiltonianos podem ser considerados como células isoladas e os sistemas dissipativos podem ser considerados como células que trocam informação (ou energia) com o meio que as rodeia. Estudar o sistema extenso é como passar a estudar o corpo composto de muitas células, todas acopladas entre si.

Agora, além da correlação temporal, também se deve procurar por correlações espaciais. A posição espacial de cada subsistema em relação aos seus vizinhos passa a ser importante. No lugar de somente considerar o tempo de correlação como um indicativo de caos; este juntamente com a correlação espacial serão o indicativo de *caos espaço-temporal*.

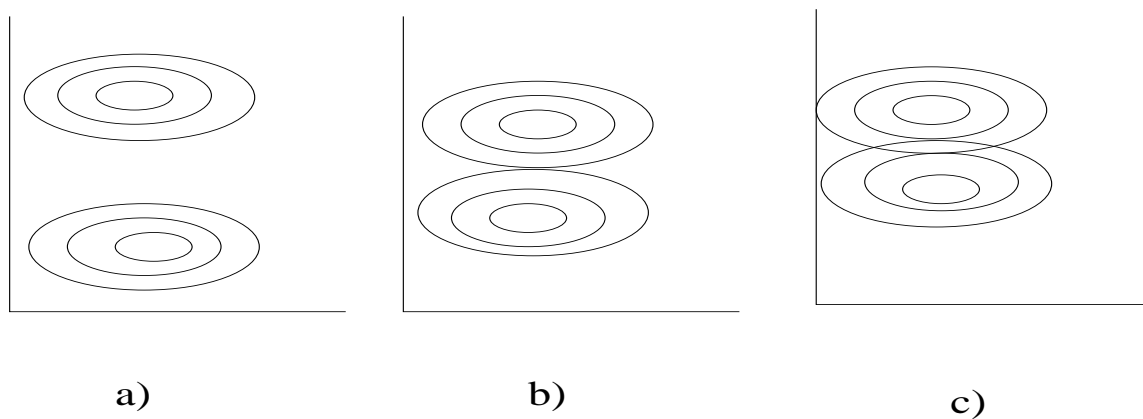


Figura I.2: *Overlap de ressonâncias. Note que o movimento está preso (aqui representado pela área sombreada) abaixo do parâmetro crítico em a); em b) é esquematizado o parâmetro crítico quando as separatrizes entre as ilhas se tocam; em c) as partículas não estão mais presas e já houve o overlap das ilhas (esquematizado pela sobreposição das separatrizes) [Vi84].*

I.5.1 Comprimentos Característicos

Ainda que não sejam explorados em detalhe, é importante destacar os comprimentos característicos e suas definições.

Distinguem-se três tipos de *comprimentos* (ou *escalas*) para caracterizar a dinâmica de um sistema extenso fora do equilíbrio. Estas *escalas* estão relacionadas com *dissipação*, *excitação* e *correlação* entre partes do sistema. O *comprimento de dissipação* é um comprimento relacionado com a dissipação de energia: a partir desse comprimento a energia passaria a ser dissipada. Os modos vibracionais em escalas menores que esse valor são passivos e podem ser tratados por métodos elementares de resolução.

O *comprimento de excitação* é um comprimento a partir do qual a energia é injetada no sistema. Para um sistema próximo da instabilidade linear existe um intervalo de excitação ao redor do modo de onda mais instável.

O *comprimento de correlação* ξ é mais difícil de definir, uma vez que é necessário um conhecimento completo das soluções do sistema de equações do problema. A definição mais simples é em termos de uma *função de correlação*

$$C_{i,j}(r_1 - r_2) = \langle [u_i(r_1, t) - \langle u_i \rangle][u_j(r_2, t) - \langle u_j \rangle] \rangle, \quad (\text{I.3})$$

onde as médias são tomadas sobre o tempo t . r_1 e r_2 são as variáveis independentes caracterizadoras de u_i , que definem o subsistema. Se, para $r \rightarrow \infty$ (para distâncias longas), o comportamento tem uma forma

$$C_{i,j}(r_1 - r_2) \sim e^{-r/\xi}, \quad (\text{I.4})$$

então se define ξ como comprimento de correlação para u_i e u_j . Evidentemente o comportamento pode ser bem mais complicado do que em (I.3) e (I.4), mas pode-se pressupor que, dependendo do movimento em questão, um ou mais comprimentos de correlação poderão ser definidos.

Finalmente, pode-se também introduzir o *comprimento linear* do sistema L , ou volume do sistema L^d , onde d é uma dimensão Euclidiana no sistema. L nada mais é do que uma

medida de tamanho para o sistema extenso (até sua fronteira ou tão longe quanto for de interesse considerar o fim do sistema).

Estes comprimentos característicos são úteis nas comparações de sistemas *pequenos* com sistemas *grandes*. A noção de sistema grande está relacionada com comprimentos de dissipação. Para sistemas pequenos, o tamanho do sistema é da ordem do comprimento de dissipação. Neste caso o número de modos excitados do sistema é fortemente vinculado pela geometria do mesmo. Estes modos também podem interagir fortemente e gerar um estado caótico de baixa dimensionalidade.

Para sistemas grandes o número de graus de liberdade é muito maior e qualquer descrição do mesmo deve levar esta multiplicidade em conta. Em geral espera-se que a dimensão do atrator seja correspondentemente grande nestes casos.

Em princípio, para atingir o limiar⁵ de um sistema bastaria aumentar o tamanho do mesmo mantendo os outros parâmetros que o descrevem constante. Pode-se considerar que o sistema seja composto de muitas regiões coerentes, cujo tamanho fica por determinar, que são mais ou menos acopladas entre si. Chama-se este regime de *caos espaço-temporal*.

I.5.2 Funções de Correlação

Inicialmente considere o comprimento de correlação (não se deve esquecer que este comprimento não é uma definição única para os sistemas aqui tratados). Considere um sistema translacionalmente invariante definido em d direções e que esteja em um estado estacionário. Isto significa que se pode definir médias que dependam única e exclusivamente das coordenadas espaço-temporais. Pode-se tentar elucidar a natureza das correlações espaciais no sentido de definir um ou mais comprimentos de correlação para caracterizar a dinâmica.

Uma propriedade importante das funções de correlação é o seu decaimento de longo alcance, como o que se definiu anteriormente em (I.3) como ξ . O comportamento, como

⁵Aqui a palavra limiar se refere ao procedimento de ir anexando vários sistemas até que não mais seja possível tratá-los como isolados e somente como conjunto.

já foi dito, pode ser mais complexo do que simplesmente um decaimento exponencial. Por exemplo, a média espacial de alguma quantidade pode ter dependência periódica no tempo ou então o decaimento pode não ser exponencial e o comprimento de correlação pode tender ao infinito (como no caso de decaimentos simplesmente algébricos) [CH93].

A existência de comprimentos de correlação finitos implica que quantidades medidas dentro de um volume de correlação, i.e., um volume compreendido por medidas da ordem do comprimento de correlação, terão estatística não-trivial. Em contraste, quantidades que dependem da distribuição dos dados sobre muitos volumes de correlação possuem em geral distribuição Gaussiana. Por exemplo, considere a transformada de Fourier:

$$u(q) = \int_{\Omega} d\vec{x} u(\vec{x}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}, \quad (\text{I.5})$$

a qual possui uma distribuição Gaussiana se o volume $\Omega \sim L^d$ contiver muitos volumes de correlação. Na prática, nesses casos, se está mais interessado em quantidades mais locais, tais como o $u(x)$, ou então em pacotes de onda dentro de algum volume $\Delta\Omega$. Pode-se definir um comprimento de correlação examinando a transição entre estatísticas Gaussianas e não-Gaussianas.

Kaneko [Ka89, Ka90], estudando redes de mapas acoplados, definiu transformadas de Fourier sobre domínios espaciais finitos e encontrou um comprimento de correlação a partir da dependência espaço-temporal dos diversos sítios.

I.6 Caos Espaço-Temporal e as Equações de Zakharov

Os termos *caos* e *turbulência* são usados para denotar um número diferente de fenômenos e existe uma grande disputa centrada no que seria o uso *correto* desses termos [CH93]. Normalmente o que é considerado como *caos* é qualquer tipo de comportamento *pseudo-randômico* de origem determinística com condições iniciais regulares. Já se definiu o *caos temporal* como tendo um tempo de correlação finito e agora, similarmente, considerar-se-á o *caos espaço-temporal* como tendo ambos: tempo e comprimento de correlação finitos. O termo *turbulência*, quando usado em dinâmica de fluidos, tradicionalmente signifi-

ca escoamento desordenado, particularmente envolvendo transporte e geração de vórtices [CH93, FPG+00, GFR+01, Ch79]. Será considerado aqui o uso do termo turbulência como sinônimo de caos espaço-temporal.

O caos que ocorre próximo a limiares, como no caso da equação de Ginzburg-Landau [CH93, HSS99] (que será analisada mais adiante), para grandes valores de L é referido como turbulência fraca [HSS99, CH93], em contraste com a turbulência de amplitude, a qual ocorreria muito adiante desse limiar e envolveria o movimento de singularidades⁶. O termo *intermitência espaço-temporal* refere-se a um cenário mais para o lado da turbulência fraca, onde atratores laminares e caóticos coexistem em um dado ponto. Zakharov [Za72] define turbulência fraca como sendo um estado de não-equilíbrio para um sistema constituído de ondas dispersivas e propagantes com interações fracas. Neste caso as propriedades estatísticas podem ser calculadas aproximadamente através de equações cinemáticas. O sistema de equações de Zakharov é um dos modelos fundamentais que governam a dinâmica das ondas em sistemas unidimensionais. Ele descreve, de uma forma genérica, a interação entre ondas de alta e baixa frequência. Os exemplos fisicamente mais importantes envolvem as interações entre ondas de Langmuir e íon-acústicas em plasmas [Za72].

I.6.1 A Equação Complexa de Ginzburg-Landau

Nos últimos anos a instabilidade de sistemas com comprimento de onda finito foi estudada usando equações de amplitude. Estas equações descrevem modulações lentas no espaço e no tempo de um envelope de onda. Estas abordagens com equações de amplitudes apresentam boa concordância com os experimentos [CH93, GFR+01].

Equações de amplitude apropriadas para ondas propagantes são a extensão natural para a descrição de sistemas com ondas puramente estacionárias. Nestas equações existem vários termos complexos que estão associados com a mudança na frequência das ondas em função do número de onda. Tais equações são denominadas de *Equações Complexas de*

⁶Ou seja, θ possui uma forma que varia com o inverso da raiz quadrada de ρ , de forma que quando a coordenada de ação vai a zero ou próximo ocorre uma singularidade na fase.

Ginzburg-Landau.

Estas equações possuem um comportamento muito rico. Um caso particular da equação de Ginzburg-Landau é justamente a equação não-linear de Schrödinger que possui soluções do tipo sóliton bem conhecidas. Na verdade esta equação apresenta dois limites extremos: num lado uma equação de dinâmica Hamiltoniana e em outro uma equação que pode ser derivada de uma energia funcional que decresce com a evolução. Em regiões intermediárias estas equações exibem um comportamento extremamente variado, desde turbulência até comportamento coerente. Na região caótica existe uma série de fases diferentes, identificáveis considerando se existem ou não defeitos espaço temporais [Ch94].

Quando um sistema extenso está próximo a uma bifurcação de Hopf (o que resulta em um movimento oscilatório), as amplitudes podem ser descritas de forma genérica por equações de Ginzburg-Landau complexas. Quando existem dois campos tornando-se instáveis na mesma bifurcação pode-se usar as mesmas equações de Ginzburg-Landau acopladas entre si. Este é um modelo que aparece em uma grande variedade de situações (tais como misturas de dois elementos ou ainda em lasers [Gi93, HSS99]). Estruturas coerentes aparecem com frequência e são parte fundamental na dinâmica de sistemas extensos. Estudos sistemáticos estão sendo levados a cabo recentemente na literatura [HSS99].

Em uma dimensão, o interesse é o de se concentrar em sistemas de tamanhos intermediários, ou seja, sobre a dinâmica de estruturas coerentes tais como estados confinados, fronteiras e pulsos (sólitons) dentro do sistema. Estudos foram realizados sobre sistemas grandes [HSS99, CHL98] e se constatou que existiam regiões de *defeitos espaço-temporais* onde o campo A (apresentado na próxima equação (I.6)) anulava-se, e outras regiões onde havia flutuações e não se apresentavam defeitos dessa natureza.

Foi encontrado que a função de correlação comportava-se diferentemente nos dois casos, mas ficou ainda a dúvida se haveria uma transição rápida ou suave [CH93] entre os dois regimes. Um modelo relacionado a isso, consistindo de uma cadeia discreta de osciladores na forma

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = A_j - (1 - ic_3)|A_j|^2 A_j + s_0(1 + ic_0)(A_j - A_{j-1}) +$$

$$+ \mathcal{D}(1 - ic_1)(A_{j+1} + A_{j-1} - 2A_j), \quad (\text{I.6})$$

para $j = 1, \dots, N$ foi estudado [CH93]. Para este sistema foram encontradas expressões analíticas, assim como estimativas numéricas na dependência da dimensão do atrator em (N, s_0, \mathcal{D}) .

Em duas dimensões o modelo é particularmente rico (contendo focos e espirais que participam na dinâmica caótica). Para tempos longos [Gi93, CH93] um estado de equilíbrio é atingido com algumas densidades médias desses defeitos, os quais dependem dos parâmetros c_1 e c_3 . A natureza precisa do estado de defeitos ainda está sendo analisada. Estimativas de dimensão para sistemas pequenos em duas dimensões foram feitas para valores arbitrários de c_1 e c_3 [CH93, BZH+00]. Esses trabalhos mostraram que a dimensão do atrator para os sítios é uniformemente distribuída entre estes, enquanto que a dimensão de um manifold inercial é dada por um crescimento exponencial para c_1 e c_2 grandes (próximos do limite da equação não-linear de Schrödinger); isso é devido ao colapso entre ondas em duas dimensões (veja figura I.3).

I.7 A Equação Não-Linear de Schrödinger

A Equação generalizada de Schrödinger, expressa por

$$iE_t + \nabla^2 E + F(|E|^2)E = 0, \quad (\text{I.7})$$

onde o potencial F é uma função suave e diferenciável (e real), é um modelo básico para descrever a evolução de ondas não-lineares em várias modalidades de trens de ondas em sistemas dispersivos conservativos. As primeiras aplicações desta equação foram dentro do contexto de óptica não-linear onde se procurava descrever a propagação de feixes de luz em meios não-lineares. Sua aplicação também foi estendida para ondas em águas profundas (um pouco mais sobre isto ainda é tratado no próximo capítulo) e para Física de Plasmas.

As melhores soluções para a equação não linear de Schrödinger são as soluções do tipo sólitons [SH00], cujas propriedades incluem uma forma de onda localizada que interage com outros sólitons na forma de uma "quase-partícula". Esta teoria de sólitons na equação não

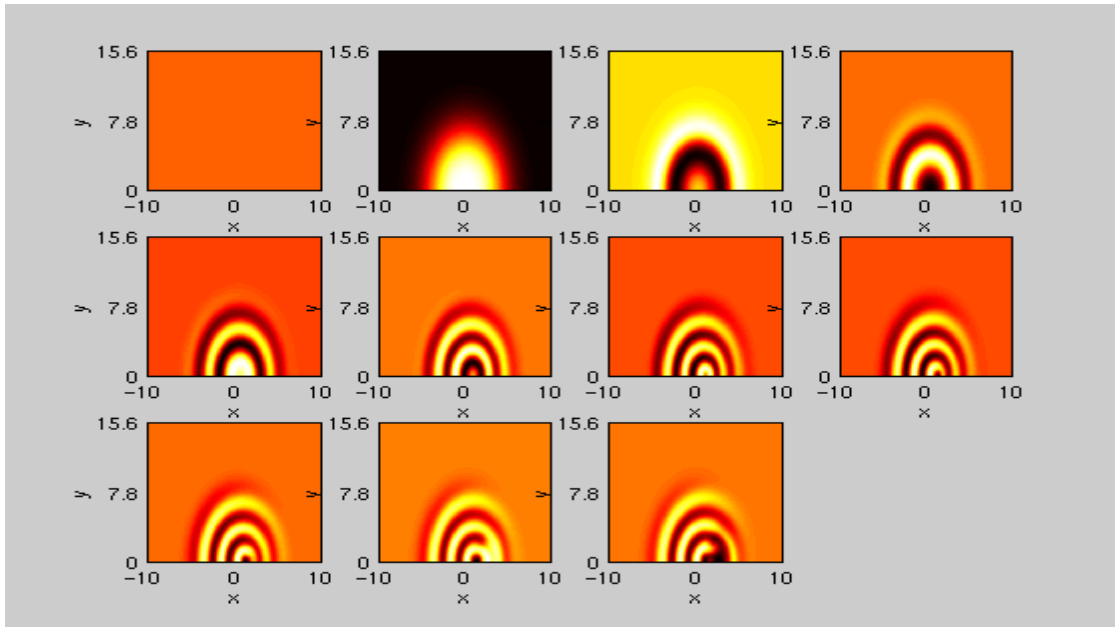


Figura I.3: Exemplo de simulação da Equação complexa de Ginzburg-Landau em duas dimensões. A amplitude é representada por escala de cinza. Condição inicial (no alto a direita): Amplitude constante, fase nula e valores de $c_1 = 0.5$, $c_3 = 1.5$. O sistema está evoluindo contra um modo global mais robusto.

linear de Schrödinger foi desenvolvida inicialmente por Zakharov em 1971 [Za72, SH00] e hoje estes sólitons são considerados como um meio natural para transportar grandes quantidades de informação de forma rápida por fibras ópticas.

Uma generalização da equação (I.7) é a equação não-linear de Klein Gordon, a qual é detalhada e estudada no capítulo IV, de forma que aqui se ficou restrito somente a uma introdução mais genérica do ramo que se pretende estudar.

Capítulo II

Descrição Hamiltoniana de Ondas

II.1 Introdução

Neste capítulo pretende-se fazer uma breve introdução ao tratamento hamiltoniano dado às ondas. Pretende-se não ficar restrito somente ao formalismo Hamiltoniano, tratando-se *en passant* de fenômenos não-lineares associados a ondas (em plasmas por exemplo) que não sejam descritos por uma dinâmica Hamiltoniana. Não existe um formalismo único para tratar este problema (como vai ser exposto mais adiante) e pretende-se considerar aqui apenas os procedimentos mais usuais. Assim como o primeiro capítulo procurou servir para passar de caos em um sistema isolado para o caos em uma assembléia de sistemas, aqui se introduzirá a descrição de um meio contínuo, mais particularmente ondas, a partir de uma descrição elaborada para partículas. Com isso se tratará da instabilidade modulacional de uma forma qualitativa, preparando um substrato para os capítulos III e IV, onde se tratará de caos e instabilidade modulacional.

II.2 Partículas e Ondas

Quando se está descrevendo a dinâmica de uma partícula é bem evidente a importância da descrição Hamiltoniana da situação em questão, pois se é levado a sistemas de primeiras derivadas que descrevem o movimento ao longo do tempo. É claro que devem ser guardadas

as limitações de sistemas que não possuem dissipação e assim por diante, mas em muitas situações as dissipações podem ser desprezadas. Normalmente se encontra um par de variáveis ângulo-ação com os quais se podem desenvolver vários métodos de aproximação, dependendo do problema em questão.

Agora se está interessado em encontrar um par de variáveis equivalente no intuito de descrever ondas não-lineares. Este é um problema complexo (e também ambíguo) pois será uma transição de partículas para campos, e transições desse tipo normalmente acabam por requerer definições adicionais e, dependendo de como tais definições são tomadas, pode-se ser levado a problemas distintos. Uma transição de partículas para campos pode ser vista como equivalente a uma transição do discreto para o contínuo (ou para um sistema extenso como foi visto no capítulo I).

Evidentemente, procedimentos e considerações sobre condições de contorno para o problema e a redução dos graus de liberdade sempre poderão trazer simplificações. Entre estas pode-se citar a existência de condições de contorno periódicas, as quais podem servir muito na redução dos graus de liberdade, em princípio infinitos para este tipo de situação.

II.2.1 Graus de Liberdade

Antes de mais nada vão ser feitas algumas considerações sobre o *princípio variacional* aplicado nestas situações. É certo que o princípio variacional tem uma característica *universal* [CH93] na evolução de qualquer sistema. Em problemas mecanicistas se utiliza da descrição Hamiltoniana (na qual pode se usar variáveis de ângulo-ação), que é uma forma de utilizar o princípio variacional. Na descrição de ondas e processos ondulatórios, a aplicação do princípio variacional é muito menos desenvolvida do que no caso da dinâmica de partículas.

Considere um exemplo simples: seja uma onda $y(x, t)$ propagante (unidimensional por simplicidade). Suponha também que as equações que descrevem este modelo podem ser descritas como

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F(x, t; y), \quad (\text{II.1})$$

onde F é um operador que pode conter derivadas e integrais. O primeiro passo é expandir $y(x, t)$ em uma série de Fourier sobre o domínio do espaço de forma que o sistema representado em (II.1) possa ser agora escrito como um sistema de equações ordinárias (embora ainda de dimensão infinita):

$$\dot{y}_k = \mathcal{F}(t, \{y\}_k), \quad (\text{II.2})$$

onde $\{y\}_k$ representa as dependências sobre todas as amplitudes k e \mathcal{F} é a transformada de Fourier de F . Esse sistema (II.2) pode ser imaginado como um sistema de k graus de liberdade interagindo uns com os outros por intermédio de \mathcal{F} ; esses graus de liberdade constituem um *continuum*. Se um sistema desse tipo possuir condições de contorno periódicas do tipo

$$y(x, t) = y(x + l, t), \quad (\text{II.3})$$

pode-se então expandir $y(x, t)$ em série de Fourier

$$y(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} y_n e^{inkx}, \quad (\text{II.4})$$

com $k = 2\pi/l$. Desta forma o problema é simplificado para um sistema discreto e sem derivadas espaciais (em função da transformada de Fourier).

Um ponto importante a ser atentado, quando se analisa um sistema não linear de equações que descrevem campos, é que normalmente não se tem idéia de que tipo de soluções ele pode conter. Pode-se, muitas vezes, fazer simplificações de vários tipos (como essas aqui descritas) e existem algumas metodologias para isso, mas deve-se considerar que tudo dependerá do tipo de situação física em questão, a qual pode ou não admitir simplificações nos graus de liberdade.

II.2.2 Descrição Hamiltoniana

Considerando as possíveis simplificações na descrição de campos de ondas, passar-se-á agora à sua descrição através do formalismo Hamiltoniano. A possibilidade de se usar o formalismo Hamiltoniano quando se está analisando o comportamento de campos de ondas

não-lineares resulta em certas simplificações por si só. Note por exemplo que representações Hamiltonianas de problemas de ondas não-lineares esta ainda longe de um consenso universal [Vi84] e, em geral, estão relacionados com suas características próprias. Mas o mais importante é que se pode conhecer *a priori* que tipos de efeitos físicos pode-se esperar obter (e usar isso no próprio método).

Basicamente se inicia expandindo todas as quantidades em séries de Fourier e tratando o sistema como sendo composto de um número infinito de graus de liberdade correlacionados. Considere uma variável $y(x, t)$ expandida em termos dos modos de Fourier

$$y(x, t) = \sum_k y_k e^{ikx}, \quad (\text{II.5})$$

onde a soma é tomada sobre todos os números de onda k possíveis. $y_k = y_k(t)$, ou seja, a dependência espacial está expandida em modos de Fourier e a parte temporal foi separada completamente. Aqui, então, está sendo considerado que não há variações (dependências) apreciáveis na dinâmica temporal com o espaço. No caso de um espectro contínuo substitui-se a soma em (II.5) por uma integral:

$$y(x, t) = \int_k dk y(k) e^{ikx}. \quad (\text{II.6})$$

Por simplicidade, considere daqui por diante apenas casos de espectros discretos, lembrando que simplesmente no caso contínuo a soma deverá ser substituída por uma integral. Considere também que a quantidade $y(x, t)$ deverá ser real, ou seja, $y_k = y_{-k}^*$. Uma combinação de osciladores interagindo uns com os outros pode ser descrita como

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (\dot{y}_k \dot{y}_{-k} + \omega^2 y_k y_{-k}) + \frac{1}{3} \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{k_1, k_2, k_3} y_{k_1} y_{k_2} y_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3) + \mathcal{O}(y^2), \quad (\text{II.7})$$

onde a função δ é a função delta de Kronecker, a qual pode ser substituída pela delta de Dirac no caso contínuo. Note pela forma de (II.7) que o Hamiltoniano H pode ser separado em uma parte lenta e uma parte rápida.

Note que se pode usar de coordenadas de angulo-ação [FP94, HSS99] para simplificar o tratamento do Hamiltoniano (II.7) e encontrar relações entre as fases, por exemplo, das

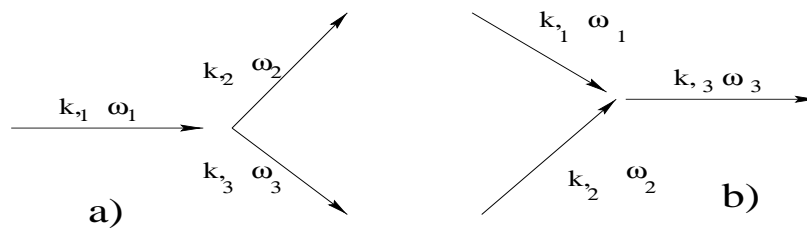


Figura II.1: Decaimento e recombinação de três ondas. Em a) a onda inicial decai em duas outras e em b) está simbolizada a recombinação de duas ondas em uma terceira.

ondas envolvidas. Existem muitos exemplos de problemas onde este formalismo pode ser aplicado e referencia-se a literatura para um bom tratamento deles. Aqui apenas passaremos a citar alguns exemplos.

II.2.3 Interações de Ondas por Ressonância

Na teoria de ondas não-lineares, a mais importante interação que existe entre duas (ou mais) ondas é a ressonância. Esta é caracterizada por duas condições básicas e é destas que se procurará tratar agora.

Suponha uma coleção de ondas interagentes com número de onda k_i e frequências ω_i . As duas igualdades que se aplicam no caso de ressonâncias são

$$\sum_i \vec{k}_i = 0 \quad (\text{II.8})$$

e

$$\sum_i \omega_i = 0, \quad (\text{II.9})$$

onde se denotará $\omega_i = \omega_i(k_i)$ como a lei de dispersão da $i^{\text{ésima}}$ onda. Note que a equação (II.8) representa a conservação de momentum ao passo que (II.9) representa a lei de conservação de energia das quasi-partículas relacionadas com o problema em questão (que podem ser fótons, fônons, plásmons, etc...).

Estas condições são parecidas com as ressonâncias entre vários graus de liberdade na dinâmica de partículas, porém uma diferença significativa está no papel desempenhado pela lei de dispersão $\omega_i = \omega_i(k_i)$.

No decaimento e recombinação de três ondas, como representado na Figura II.1, pode-se ter um sistema de equações para os números de ondas k_i envolvidos, os quais muitas vezes não possuem solução. Isto dependerá da forma da função $\omega(k)$. Dependendo da existência das soluções para as equações (II.8) e (II.9), os espectros das ondas podem ser chamados de decaimento ou não. Na verdade, condições de ressonância entre diferentes graus de liberdade existem na dinâmica de partículas também, porém a principal diferença entre ressonância de ondas e de partículas está na lei de dispersão válida para as ondas.

Outro exemplo de interações entre três ondas pode ser tirado da astrofísica, onde são observados fenômenos de acoplamento em plasmas espaciais [CAB+00].

II.3 Instabilidade Modulacional

Quando se trata de turbulência, principalmente em ondas em plasmas, existe uma série de fenômenos importantes para serem discutidos. Um desses fenômenos é a instabilidade modulacional.

II.3.1 Estabilidade e Instabilidade de Pacotes de Onda

Atualmente uma das mais importantes motivações para trabalhos em matemática aplicada e comunicação por meios ópticos é a criação de vias de comunicação baseada em

fibra óptica para taxa de *terabits* por segundo. Com o desenvolvimento de amplificadores baseados em fibras ópticas no início dos anos 80 [CHL98, CH93], redes de fibra óptica se tornaram possíveis e imediatamente as propagações de pulsos em fibras ópticas se tornaram relevantes para se conseguir obter altas performances. Na verdade a área de fibras ópticas não-lineares é um das melhores para fomentar encontros entre a engenharia prática e a matemática aplicada [CHL98].

Considere a estabilidade em uma dimensão de um envelope uniforme e independente do tempo E_0 , o qual se estende em princípio de $(-\infty, \infty)$. Considere também a equação não linear de Schrödinger, a qual não se pretende derivar aqui:

$$(i\partial_t + \nabla^2 + |E|^2)E = 0. \quad (\text{II.10})$$

Em (II.10) o termo quadrático em E corresponde a um índice de refração do meio não linear e o nabla representa a dispersão da onda (o balanço desses termos faz com que haja uma competição entre um termo que tende a dispersar a onda e um termo que pode tender a quebrar a onda, o que permite a existência de soluções tipo pulsos solitários [Er00, e referências lá citadas]).

Ficando restrito a uma única polarização óptica, a equação que governa um envelope de campo elétrico em uma fibra óptica unimodal é a equação de Schrödinger perturbada, da qual a equação (II.10) representa apenas o primeiro termo em $|E|^2$. Com essa aproximação, que nada mais é do que negligenciar efeitos de variação na dispersão, a equação representa um sistema Hamiltoniano e integrável, exibindo soluções tipo pulso solitário.

Por exemplo: a largura do pulso e os parâmetros de amplitude estão vinculados. Este vínculo é uma consequência direta do balanço entre a não-linearidade e a dispersão do sóliton. Subsequentemente, mudanças na energia ou amplitude dos pulsos tendem a induzir mudanças na largura dos pulsos também, mostrando uma complicada interação entre não-linearidades, perdas e dispersão. Este vínculo significa que picos mais largos exigem também amplitudes menores (e vice-versa). Estes efeitos, assim como outros de mais alta ordem, ocorrem tipicamente em pulsos da ordem de picossegundos ou menos, correspondentes a taxas de transferência da ordem de 100 Gbits por segundo [CHL98, SH00].

Uma análise unidimensional de (II.10) pode ser levada a cabo simplesmente pressupondo um solução do tipo

$$E = E_0 + E_1 e^{\gamma t} \cos(kx). \quad (\text{II.11})$$

Esta solução foi encontrada por Nishicawa em 1968 [Go84] e revela que o envelope inicial E_0 é linearmente instável e tende a se quebrar em outros pacotes de onda com número de onda $k \sim |E_0|$ e razão de crescimento $\gamma \sim |E_0|^2$. A este fenômeno se dá o nome de *instabilidade modulacional*.

Goldman [Go84] considera que este resultado pode ser previsto de uma análise dimensional de (II.10): de um balanço entre a dispersão (que teria embutido nela uma escala de comprimento proporcional a L^2) contra o termo não-linear que representa a refração do meio, pode-se encontrar que uma escala natural de quebra seria

$$L \sim |E_0|^{-1}. \quad (\text{II.12})$$

E da mesma maneira, de um balanço entre o termo de variação temporal ∂_t (que pode ser expresso por T^{-1}) contra o termo de refração, encontra-se que

$$T^{-1} \sim |E_0|^2. \quad (\text{II.13})$$

A perturbação no número de onda k cresce em função de que os padrões de interferência correspondem também a um grande índice de refração não-linear. Regiões de grande índice de refração são regiões onde se tem reflexão interna total e este fenômeno aumenta o índice de refração mais ainda, fazendo com que o processo seja instável.

Por meio de estudos numéricos e analíticos [Go84], que não serão aqui considerados, pode-se concluir que um envelope uniforme se quebra em envelopes pequenos contendo comprimentos L naturais menores. Tal resultado é generalizado para envelopes que somente são uniformes para tamanhos de larga escala L_0 , mas que se anulam nos limites $x \rightarrow \pm\infty$. A condição para quebra de tais pacotes de onda infinitos é simplesmente $L \ll L_0$ ou seja,

$$|E_0|^2 \gg |L_0|^{-2}. \quad (\text{II.14})$$

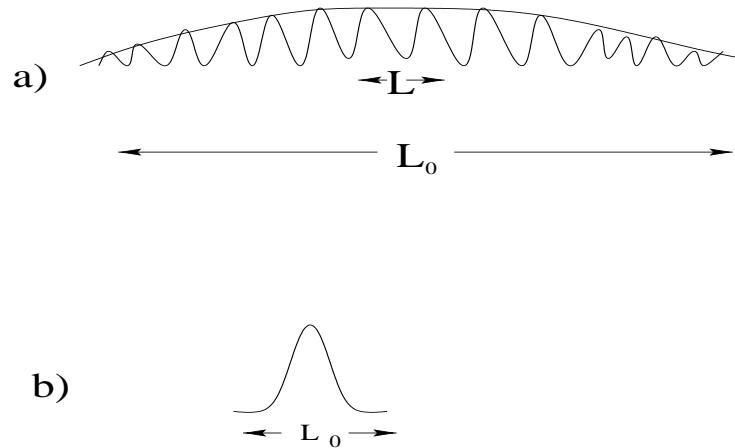


Figura II.2: *Instabilidade Modulacional:* a) mostra a instabilidade modulacional de um envelope de comprimento inicial L_0 , que se quebra em envelopes menores de tamanho $L \sim |E|^{-1}$, ocasionado por $L_0 \gg L$ (para um campo E grande o suficiente). Aqui está mostrado em uma dimensão, mas isto é também válido para dimensões maiores em condições análogas. A figura b) mostra um soliton (em princípio uma secante hiperbólica aqui esquematizada) quando $|E|^2 \sim |L_0|^{-2}$.

II.3.2 Um Exemplo

Explicar-se-á este fenômeno a partir de um exemplo aplicativo. Considere uma teoria de ondas em águas profundas [Fe67, Go84]. Engenheiros que testam modelos de barcos em grandes tanques geram grandes trens de ondas para tanto. Por muitos anos eles tentaram gerar ondas tipo degrau e observavam que elas quebravam em um trem de pequenas ondas, considerando que isso se devia a imperfeições no aparato.

Em 1967 [Fe67] foi mostrado teoricamente (e experimentalmente) que tais ondas de águas profundas podiam ser descritas por uma equação de Schrödinger não-linear unidimensional. Neste caso, existe um limiar do tamanho do envelope de onda em questão que pode quebrar ou não. Quando $|E|^2 \gg L^{-2}$ a onda tende a se quebrar em um trem de ondas, e isso é a instabilidade modulacional. Considere os casos mostrados na figura II.2.

No primeiro caso, o pulso de onda possui amplitude inicial da ordem do inverso do comprimento característico L . Aqui ele está fora do intervalo de instabilidade modulacional e o pacote não vai quebrar quando evoluir ao longo do tempo. No segundo caso, o envelope está dentro do limite de instabilidade modulacional ($|E|^2 = 2L^{-2}$) e o pacote se quebra em um conjunto de pequenos pacotes de onda.

Outro exemplo de instabilidade modulacional provém da astrofísica. A instabilidade de Jeans é uma instabilidade modulacional na qual as estrelas são formadas fora da região de colapso gravitacional de nuvens de gás interestelar. Embora este processo não seja descrito pela equação não-linear de Schrödinger, existe uma relação muito próxima nos modelos descritivos e nos métodos matemáticos adjacentes. Tais modelos também prevêem quebras de pacotes em sub-pacotes da mesma forma que nas ondas na água.

II.4 Relações de Manley-Rowe

Aqui apenas citar-se-á as relações de Manley-Rowe (RMR), pois as mesmas são utilizadas indiretamente mais tarde no capítulo IV. Trata-se da troca de energia entre ondas. Em óptica elas requerem um número igual de fótons participando das interações não lineares. Por seu caráter geral, a lei de conservação de energia e as relações de Manley Rowe não dependem de uma estrutura detalhada de algum particular sistema e seus efeitos, por isto mesmo, são muito grandes.

Estas relações de energia dão informação do ganho e estabilidade de moduladores e demoduladores (por exemplo) não lineares, o que foi a primeira vantagem do uso destas relações. Estas relações podem ser expressar de uma forma genérica como

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{mW_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = 0 \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nW_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = 0, \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

onde $W_{m,n}$ é uma potência média que transita em um capacitor não linear em frequências $\pm|mf_1 + nf_0|$.

No trabalho original de Manley e Rowe, as propriedades das mesmas foram largamente exploradas para sistemas de capacitores e indutores, sendo que o principal interesse era sua aplicação em amplificadores.

II.5 O Conceito de Entropia Espectral.

Existem muitos estudos sobre troca e equipartição de energia e limiares que dariam equipartição aproximada entre os modos de um sistema de ondas [RD96]. Por exemplo, existe a dependência no tempo para a equipartição da excitação, que encontra um tempo de relaxação para o sistema proporcional ao número de modos. A equipartição nesta escala de tempo rápida é associada com o *overlap* das órbitas. Então, a equipartição que toma lugar numa escala de tempo mais lenta não deveria ser observada facilmente.

As simulações usuais consistem em distribuir toda a energia entre uns poucos modos lineares de baixa frequência. A energia é rapidamente redistribuída entre o conjunto completo dos modos de uma forma não linear. Para baixas energias, a redistribuição cai exponencialmente com o aumento do número de modos. Aumentando a energia inicial, para um valor crítico de energia, é visto que esta energia se distribui por todos os modos de forma homogênea. Esta equipartição é normalmente tomada como um teste numérico da ergodicidade, embora não implique nisto rigorosamente.

A medida que se aumenta a energia, os acoplamentos não lineares mais importantes dos modos vizinhos com a menor diferença de frequência no denominador se tornam importantes. Para energias moderadas, onde um estudo numérico indica uma queda exponencial da energia com o aumento do número de modos, uma aproximação útil é isolar alguns modos envolvidos removendo todos os outros modos.

Neste caso, uma abordagem simples é introduzir uma entropia de informação S baseada na energia média na forma:

$$S = - \sum_{i=1}^N e_i \ln e_i, \quad (\text{II.16})$$

onde $e_i = E_i / \sum_1^N E_i$ são as energias médias normalizadas. Define-se um número de modos

efetivo como

$$n_{ef} = e^S. \quad (\text{II.17})$$

Se o movimento for ergódico sobre o tempo observado, n_{ef} será igual a N , o número de modos. Por isto pode-se chamar (II.16) de Entropia Espectral.

II.6 A Aproximação Adiabática

Muitas vezes, e neste trabalho isto será feito no capítulo III, quando se trata problemas com soluções do tipo ondulatório é possível obter uma boa aproximação analítica supondo soluções tentativa do tipo onda plana modulada nas equações que governam o modelo, e obter um novo conjunto de equações (preferencialmente canônico) considerando somente os modos de primeira ordem (os modos lentos) e desprezando os demais. Este tipo de *adiabaticidade* ocorre, por exemplo, onde existe grande disparidade entre as escalas de tempo presentes no problema. Este é justamente o caso de uma onda portadora com frequência muito mais alta do que sua onda de modulação, que é o problema tratado no capítulo III, ou então da propagação de sólitons em longas distâncias.

Na ENLS este tipo de procedimento é particularmente útil quando se está investigando variações lentas nos parâmetros dos sólitons quando causadas, por exemplo, em virtude de algum campo externo aplicado. No caso das soluções solitônicas da ENLS a perspectiva é estudar a propagação de sinais em fibras ópticas. Em um trabalho recente este tipo de solução foi usada para a ENLS acoplada a um campo externo, e foi estudado como usar este campo para estabilizar a propagação dos sólitons na fibra óptica, sugerindo que este processo poderia ser usado para descrever a propagação destes sólitons por longas distâncias.

No capítulo III é mostrado como usar uma aproximação adiabática nas equações de Zakharov descrevendo a interação de elétrons de alta frequência para obter um Hamiltoniano aproximado, o qual será comparado posteriormente com a dinâmica não aproximada.

Capítulo III

Caos e Coerência nas Interações Conservativas do Decaimento de Ondas

III.1 Introdução

Aqui será analisada a influência do caos sobre a coerência da interação de três ondas. O caos tem um papel fundamental no problema quando as aproximações adiabáticas que levam a um modelo integrável deixam de ser válidas. Em regimes regulares, onde os campos são suficientemente pequenos, existe um valor característico para o descasamento de frequências do tripleto de ondas abaixo da qual a coerência e o acoplamento de fase são dominantes. Em regimes caóticos, por outro lado, não existem tais valores e o acoplamento se dá de uma forma mais complexa.

III.2 O Decaimento de Três Ondas

A interação conservativa no decaimento de três ondas é tipicamente considerada como um processo regular onde um modo de maior intensidade passa sua energia para os outros dois modos. Se a escala temporal para a troca de energia entre as três ondas é muito maior do que a escala temporal associada com as respectivas frequências portadoras (as quais aqui serão denominadas $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) tal que se possa definir uma sequência de frequências quase

monocromática e se estas frequências são totalmente acopladas, com $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, então o processo é tido como totalmente libracional (ou seja, as órbitas permanecem próximas num espaço de fases conveniente) e a troca de energia é máxima [FPG+00]. Libração significa que o espaço de fases relativo dos três modos permanece restrito a variações muito pequenas dos mesmos. Pode-se dizer então que o tripleto está acoplado.

Dois fatores, contudo, inibem a presença de libração e troca máxima de energia. Uma delas é a inexatidão do acoplamento. É bem conhecido que muitos sistemas ondulatórios operam em um regime em que existe uma condição de ressonância perturbada ($\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \delta$) e que a presença desta perturbação δ (que significa justamente o descasamento) tende a diminuir o efeito da interação modal. O número de modos libracionais tende a diminuir em função de que estados originariamente libracionais tendem a ter um desacoplamento de fase. Uma fase relativa começa então a aparecer como se os modos fossem não interagentes, no ponto em que as órbitas correspondentes se tornam abertas [FPG+00].

Outro fator que afeta o caráter da interação é a não integralidade e o caos. Caos em sistemas de ondas ocorre quando a intensidade do campo é grande o suficiente e geralmente cria regiões de incoerência embaralhando o espectro de frequências das ondas interagentes. Um ponto básico é, então, descobrir quando o caos se torna relevante e como, neste caso, ele age sobre a coerência.

A versão clássica do acoplamento de três ondas é integrável, de forma que o caos só pode estar presente se um mecanismo relevante adicional quebrar esta integrabilidade.

Frequentemente sistemas de ondas não lineares (em sistemas contínuos) são modelados em termos de equações de três ondas ressonantes. Um caso específico é o processo de decaimento, onde uma ou duas frequências decaem em frequências de modos mais baixos ou em frequências tais que a energia permanece entre uns poucos modos mais importantes. Em certas condições a troca de energia entre os modos é de característica regular.

É usual descrever a relação de decaimento como um processo integrável. Com o uso apropriado de aproximações adiabáticas, os campos dos modos envolvidos podem ser separados em termos harmônicos de variação rápida (determinados por características lineares do sistema) e um termo lento de amplitude complexa cuja variação temporal resulta de

uma interação não linear. Então se pode obter um conjunto de equações que governam o movimento e que determinam a dinâmica do sistema. Como mencionado, as aproximações adiabáticas podem ser justificadas se as características de escala espaço temporais das equações de amplitude assim obtidas forem de fato muito maiores que as ondas de mais rápidas oscilações [RD96] .

Contudo, uma das generalidades deste tipo de sistema é que a escala de tempo-espaço é altamente dependente da energia do sistema. De fato, pode-se observar que frequentemente as frequências de modulação de amplitudes (a frequência de modulação não linear) aumenta à medida que a energia do pulso de onda aumenta. O limite de validade do modelo adiabático é então estabelecido como correspondendo à situação onde a frequência de modulação não-linear cresce comparavelmente às altas frequências lineares.

Desta forma foi investigada a interação de três ondas no contexto das equações de Zakharov [Za72] que são, como já foi mencionado antes, uma generalização da equação não-linear de Schrödinger. Dois modos de alta frequência podem ser descritos por equações de amplitude que são de primeira ordem no tempo. Para baixas frequências são necessários nestas equações também termos de segunda ordem no tempo. Tal presença é que converte o sistema em um *sistema não integrável*. Note que se a energia total da onda for suficientemente pequena haverá uma grande disparidade entre as escalas de tempo respectivamente associadas com a troca de energia e com a frequência do modo de baixa frequência. Dentro destas condições as aproximações adiabáticas são válidas e a equação de segunda ordem pode ser aproximada por uma de primeira. O caos está ausente.

Nesta situação particular, o que realmente ocorre é a interação de três ondas quasis monocromáticas. Porém se a energia do sistema aumenta, a integrabilidade deixa de ser válida. Neste ponto é que a coerência pode ser afetada pelo caos. Aqui se pretende mostrar que uma das ondas desenvolve uma largura de banda de frequência grande, de tal sorte que não pode ser aproximada por um trem de ondas estreito no espaço das frequências ω . A presença de δ será considerada e a proposta aqui será investigar a ação combinada do descasamento de ondas e do caos. Com o auxílio do conceito de curvas limites, mostrar-se-á que a presença de uma intensa atividade caótica ocorre para todas as órbitas e para todas

as condições iniciais quando $\delta > 0$, mesmo para descasamentos de órbitas arbitrariamente pequenos onde $0 < \delta \ll \delta_{inc}$. Isto significa que a dinâmica se torna totalmente livre (sem restrições) nestas condições. Quando $\delta < 0$, o fenômeno está ausente mesmo em situação totalmente caótica, onde a coerência pode ser dita como existente no sentido de que a periodicidade é perdida. Neste caso se tem um sincronismo parcial entre as fases.

Se a coerência for compreendida como uma troca periódica de grandes quantidades de energia entre a onda maior e suas ondas secundárias, pode-se resumir os resultados dizendo que a incoerência e o vazamento das partículas para regiões de mais alta energia são sinônimos somente quando o caos é ausente.

Quando ocorre regime caótico, este vazamento e a incoerência existem somente para $\delta > 0$ e o vazamento está ausente para $\delta \leq 0$, ainda que a incoerência esteja lá devido a aperiodicidade da dinâmica. Para alguns pontos onde $\delta > 0$, refere-se ao regime como fortemente incoerente.

III.3 O Modelo

O modelo que se vai estudar inicia pelas equações de Zakharov descrevendo as interações de ondas de elétrons de alta frequência (cujo campo denotar-se-á por E) e ondas de íons de baixa frequência (denotadas por n):

$$\begin{cases} i\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = nE \\ \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

onde a primeira equação em (III.1) é uma equação de amplitudes que descreve termos somente de baixas frequências ao passo que a segunda equação é completa e possui todos os ingredientes essenciais para a não-integrabilidade.

Aqui se restringirá o tratamento a um truncamento dos primeiros três modos, escrevendo

$$E = a_1(t)e^{ik_1x} + a_2(t)e^{ik_2x} \quad (\text{III.2})$$

e

$$n = a_3(t)e^{ik_3x} + a_3^*(t)e^{-ik_3x}, \quad (\text{III.3})$$

onde um complemento do vetor de onda $k_1 = k_2 + k_3$ é pressupostas e as ondas de íons são pressupostas como sendo reais. Daqui em diante se suporá as frequências associadas aos números de ondas da seguinte forma: $\omega_{1,2} \equiv k_{1,2}^2$ e $\omega_3 \equiv k_3$ que é a aproximação linear.

Inserindo as duas últimas equações em (III.1) e mantendo somente os termos sem cruzamentos de frequências obtém-se (após alguma álgebra que se estende no Apêndice A)

$$\begin{cases} i \frac{da_1(t)}{dt} = \omega_1 a_1 + a_3 a_2 \\ i \frac{da_2(t)}{dt} = \omega_2 a_2 + a_3^* a_1 \\ \frac{d^2 a_3(t)}{dt^2} + \omega_3^2 a_3 = k_3^2 a_1 a_2^*. \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

O truncamento até o terceiro modo espacial leva a resultados acurados quando se está estudando um sistema extenso infinito e de qualquer maneira a maior parte do tratamento seguido aqui vem da última equação presente em (III.4) em virtude da presença da segunda derivada presente que pode ser vista como a possibilidade de introdução de bandas largas que atuariam sobre a coerência.

Quando $|a_3| \gg |a_1 a_2|$, pode-se resolver (III.4) na forma de uma contribuição temporal lenta modulando uma onda plana na frequência ω_3 , ou seja,

$$a_3(t) = \tilde{a}_3(t) e^{-i\omega_3 t}, \quad (\text{III.5})$$

onde $d\tilde{a}_3(t)/dt \ll \omega_3 \tilde{a}_3(t)$.

Também vão ser utilizadas aqui $a_2 = \sqrt{2/\omega_3} \tilde{a}_2 e^{-i\omega_2 t}$ e $a_1 = \sqrt{2/\omega_3} \tilde{a}_1 e^{-i(\omega_2 + \omega_3)t}$, de forma que um conjunto de aproximações pode ser escrito como

$$\begin{cases} i \frac{d\tilde{a}_1(t)}{dt} = \delta \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \\ i \frac{d\tilde{a}_2(t)}{dt} = \tilde{a}_3^* \tilde{a}_1 \\ i \frac{d\tilde{a}_3(t)}{dt} = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2^*, \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

onde foi utilizado δ definido da seguinte maneira:

$$\delta \equiv \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = k_1^2 - k_2^2 - k_3. \quad (\text{III.7})$$

Este conjunto de equações é completamente integrável e de primeira ordem no tempo. O ponto crucial aqui é a obtenção da aproximação adiabática para a variação lenta suposta

anteriormente. Tal será válido quando as não-linearidades forem tão fracas que se possa separar as altas das baixas frequências. Neste caso se pode dizer que a modulação de baixa frequência é muito menor que a de alta frequência, dada por um $\omega_3 = k_3$.

Num trabalho recente [OOR97] esta quantidade estava ausente uma vez que não se pressupunha somente haver casamento entre os vetores de onda, mas também entre as frequências, o que significa mais vínculos.

Aqui se mantém o casamento entre os vetores de onda mas agora o casamento será dado por (III.7), o que significa

$$k_1 = \frac{1 + k_3}{2} + \frac{\delta}{2k_3} \quad (\text{III.8})$$

e

$$k_2 = \frac{1 - k_3}{2} + \frac{\delta}{2k_3}. \quad (\text{III.9})$$

Atente-se para o papel tomado pelos casamentos de frequências nesta teoria. Para tanto vai se começar pela integração do sistema (III.6). Técnicas usuais [OOR97, FPG+00] indicam que a dinâmica pode ser inteiramente descrita por um hamiltoniano H_a , dado por

$$H_a = 2\sqrt{\tilde{\rho}_1\left(\frac{A}{2} - \tilde{\rho}_1\right)\left(\frac{B}{2} - \tilde{\rho}_1\right)} \cos \psi + \delta\tilde{\rho}_1, \quad (\text{III.10})$$

cujas obtenção é melhor explorada no Apêndice A.

Aqui vão ser usadas as notações $\tilde{a}_j = \sqrt{\tilde{\rho}_j}e^{i\phi_j}$, $j = 1, 2, 3$ e $\psi \equiv \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$ e as quantidades conservadas de Manley-Rowe [FPG+00] $\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2 = A/2$ e $\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_3 = B/2$. No Hamiltoniano H_a as variáveis canônicas são ρ_1 e ψ e suas respectivas equações de movimento são

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\rho}}_1 = -\frac{\partial H_a}{\partial \psi} \\ \dot{\psi} = \frac{\partial H_a}{\partial \tilde{\rho}_1} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Com estas equações, pode-se desenhar o espaço de fases do problema como uma curva de níveis da função H_a . Na Figura III.1 está representado o espaço de fases em termos das variáveis ψ e ρ_1 .

Nesta figura representa-se o espaço de fases em três situações, ou seja com $k_3 = 1$ e $A = B = 0.1$ com $\delta = 0$ em (a), mostrando a situação onde as órbitas estão restritas na

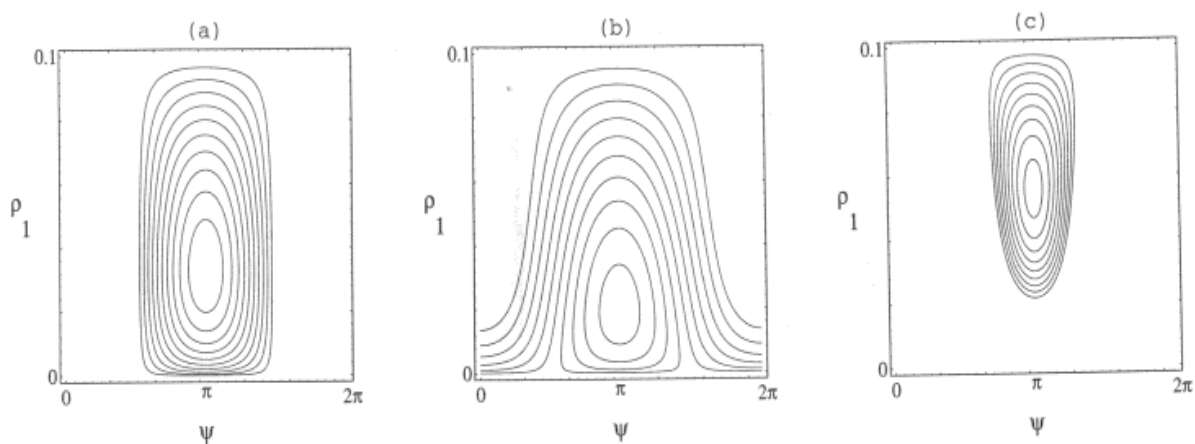


Figura III.1: Curva de níveis para o Hamiltoniano dado por (III.10) onde é apresentado em (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 0.4$ e (c) $\delta = -0.4$. Em todos os casos $A = B = 0.1$.

ausência do fator δ , e em (b) e (c) são mostrados exemplos com o parâmetro de casamento positivo e negativo (em (b) $\delta = 0.4$ e em (c) $\delta = -0.4$). Aqui, quando se usa $\rho_1 = A$, está se representando uma situação onde toda a energia está em um modo que, então, acaba sendo a onda mãe (ou seja, a onda portadora).

Ainda se irá restringir aqui a análise a um intervalo $H_a < \delta A/2$, a qual se mostrará que é de relevância física. A comparação mostra que no caso $\delta = 0$ as órbitas não podem se mover sobre todo o espaço. A função $\psi(t)$ está confinada a um intervalo específico o que implica em um grande grau de coerência envolvendo as fases.

Por outro lado, quando um descasamento positivo é escolhido, um conjunto de órbitas perde a coerência e começa a se espalhar sobre o espaço de fases. Somente órbitas suficientemente próximas ao ponto fixo central permanecem ligadas. O casamento das fases é acentuado quando $\delta < 0$ mas, neste caso, a troca de coerência é menor. Nesta versão integrável do problema, pode-se notar que o tamanho do conjunto incoerente depende fortemente do valor de δ . Se δ é pequeno, o conjunto não coerente é também pequeno e não deveria afetar de uma forma muito especial os aspectos estatísticos associados com a dinâmica. Ou seja, a coerência se torna dominante somente quando o ponto fixo toma uma posição muito abaixo de $\tilde{\rho}_1 = A/2$ tal que a grande maioria das órbitas se tornam livres. O ponto fixo localizado em $\psi = \pi$ (que por definição é $\partial H_a / \partial \tilde{\rho}_1 = 0$), donde se tira que $\tilde{\rho}_1 / (A/2) \sim A^{1/2} / 2\delta$ se $\tilde{\rho}_1 \ll A$. Isto leva a que δ deva exceder um valor característico

$$\delta_{\text{inc}} = A^{1/2}, \quad (\text{III.12})$$

o que será referenciado como um limiar para a incoerência. Nota-se que δ_{inc} pode ser maior se A não for tão pequeno e que o próprio A pode ser visto como uma medida da energia do sistema.

Isto se modifica quando o sistema está em regime caótico.

III.4 A Dinâmica Completa

No sentido de se investigar a dinâmica completa vão se seguir as mesmas técnicas usadas em [RD96]. Antes de mais nada, vai se descrever a dinâmica por um Hamiltoniano de dois graus de liberdade:

Escreve-se primeiramente

$$a_{1,2} = \left(\frac{\sqrt{\rho_{1,2}}}{k_3} \right) e^{i\phi_{1,2}}, \quad (\text{III.13})$$

de uma forma similar ao tratamento anterior, mas agora se utilizará da seguinte solução tentativa:

$$a_3(t) = (1/\sqrt{2})[u(t) + iv(t)], \quad (\text{III.14})$$

sendo u e v reais.

Desta forma pode-se escrever as equações que governam o movimento como sendo derivadas do hamiltoniano

$$H = \sqrt{2\rho_1\rho_2}[u \cos(\phi_1 - \phi_2) - v \sin(\phi_1 - \phi_2)] + \frac{1}{2} \left[p_u^2 + p_v^2 + k_3^2(u^2 + v^2) \right] + \omega_1\rho_1 + \omega_2\rho_2 \quad (\text{III.15})$$

onde $\rho_{1,2}$ e $p_{u,v}$ são os momenta canonicamente associados às coordenadas $\psi_{1,2}$, u e v respectivamente (a dedução deste Hamiltoniano está detalhada em [OOR97] e é de procedimento similar ao constante no apêndice A e passa pela substituição destas novas definições no sistema de equações para $a_i(t)$ e a resultante similaridade com as equações para um oscilador harmônico acaba por fazer que o Hamiltoniano gerado seja da forma (III.15). Um detalhamento da operação é apresentado no Apêndice B). Este Hamiltoniano é não-integrável desde que não haja pressuposição de escalas temporais para a dinâmica, ou seja, não será usada aproximação modulacional para simplificar as equações de movimento além do terceiro modo. Numa primeira transformação canônica, será feito

$$\phi_1 \rightarrow \beta \equiv \phi_1 - \phi_2 \quad (\text{III.16})$$

de forma que o Hamiltoniano (III.15) pode ser reescrito como

$$H = \sqrt{2\rho_1(A - \rho_1)}(u \cos(\beta) - v \sin(\beta)) + \frac{1}{2} \left[p_u^2 + p_v^2 + k_3^2(u^2 + v^2) \right] + (\omega_3 + \delta)\rho_1, \quad (\text{III.17})$$

onde se escreveu $A = \rho_1 + \rho_2$ como um novo momentum e com δ já anteriormente definido.

Agora vai se utilizar das coordenadas polares (r, θ) na forma $u = r \sin(\theta)$ e $v = r \cos(\theta)$ para escrever o Hamiltoniano (III.17) como

$$H = \sqrt{2\rho_1(A - \rho_1)}r \sin(\theta - \beta) + \frac{1}{2} \left(p_r^2 + k_3^2 r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + (\omega_3 + \delta)\rho_1 \right), \quad (\text{III.18})$$

sendo p_r e p_θ momenta conjugados das variáveis r e θ .

Note que os ângulos aparecem na forma de combinações do tipo $\beta - \theta$ de forma que uma transformação canônica adicional levará

$$\beta \rightarrow \psi \equiv \beta - \theta + \pi/2 \quad (\text{III.19})$$

permitindo que se escreva agora $B \equiv p_\theta + p_1$ como um novo momentum conservado na dinâmica. O Hamiltoniano agora ficará na forma

$$H = \sqrt{2\rho_1(A - \rho_1)}r \cos(\psi) + \frac{1}{2} \left[p_r^2 + k_3^2 r^2 + \frac{B - \rho_1}{r^2} \right] + (\omega_3 + \delta)\rho_1, \quad (\text{III.20})$$

ou seja,

$$H = H_a + \frac{1}{2} \left[p_r^2 + k_3^2 r^2 + \frac{B - \rho_1}{r^2} \right] + \omega_3 \rho_1. \quad (\text{III.21})$$

Para representar as instabilidades de decaimento vai ser usado

$$H = (\omega_3 + \delta)A = (\omega_3 + \delta)B \quad (\text{III.22})$$

Nestas condições o estado $\rho_1(0) = A$ implica diretamente que $\rho_2(0) = 0$ e que $r(0) = p_r(0) = 0$, o que são, na verdade, as condições caracterizadoras dos estados iniciais de energia da instabilidade de decaimento, onde a primeira é a onda mãe e as duas ondas filhas com amplitudes decrescentes.

III.5 Curvas Limites

Antes de descrever as simulações da dinâmica completa vai se estudar as situações com $\omega_3 = 0$ com a validade de (III.22). Com a aproximação adiabática e as quantidades conservadas de Manley-Rowe pode-se escrever [RD96]

$$2H_a = \delta A - \frac{1}{2}p_r^2, \quad (\text{III.23})$$

que explica porque se estará interessado em regiões $H_a < \delta A/2$ para se construir os espaços de fases.

Porém esta restrição é válida somente enquanto a dinâmica for adiabática. Vai ser visto que tais vínculos estarão também presentes na dinâmica completa. Para investigar isto vai se discutir a existência de curvas limites e seu papel crucial. Dada as constantes de movimento do sistema as curvas limites podem ser vistas como aprisionamentos no espaço de fases, permitindo ou não órbitas em determinadas regiões. As constantes provenientes da relação (III.22) geram um p_r^2 na forma

$$\frac{1}{2}p_r^2 = (\omega_3 + \delta)(A - \rho_1) - \sqrt{2\rho_2(A - \rho_1)r \cos \psi} - \frac{1}{2}\left(k_3^2 r^2 + \frac{A - \rho_1}{r^2}\right) \equiv g(r), \quad (\text{III.24})$$

na qual está apresentada uma curva limite como a fronteira de uma região física $g \geq 0$ (fronteira em $g = 0$). Agora, para um dado ρ_1 um valor físico marginal para ψ pode ser definido como o valor onde a curva $g = g(r)$ é somente tangente ao eixo $g = 0$. O valor marginal de ψ e seu ρ_1 associado é precisamente a curva limite. Em outras palavras a curva pode ser obtida na forma $\rho_1 = \rho(\psi)$ se o sistema não-linear

$$\begin{cases} g = 0 \\ \frac{dg}{dr} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

for resolvido.

Na figura 2 estão representadas estas curvas sobrepostas com os plots de Poincaré que são graficados integrando o par de variáveis (ψ, ρ_1) e graficando cada vez que $p_r = 0$ com derivada primeira positiva ($\dot{p}_r > 0$). Integrando o conjunto original é encontrado exatamente o mesmo resultado, como era esperado. Vários valores de A e δ são considerados juntamente com a condição usual de $\omega_3 = 1$ e $B = A$. Quando $\delta = 0$ a situação está apresentada na Figura III.2 para grandes valores de A . No caso $A = 3$ se está próximo ao limiar do caos.

A única região permitida é a região \mathcal{R} de onde a fase ψ não pode escapar de forma alguma. Este é um resultado interessante já que mesmo para grandes campos as órbitas

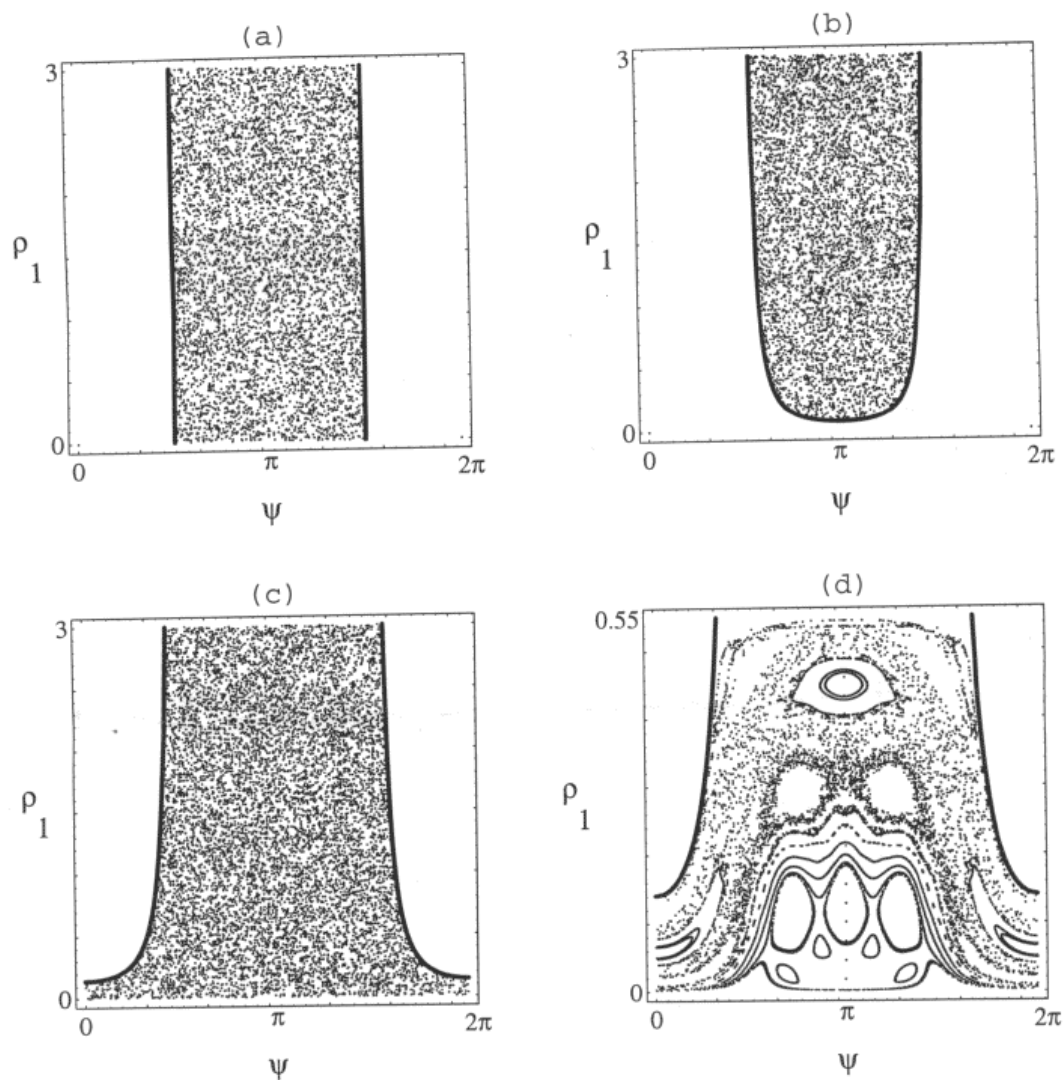


Figura III.2: *Curvas limites e gráfico de Poincaré gerados pelo Hamiltoniano (III.19) com a) $\omega_3 = 1$ e $B = A$, $\delta = 0$ e $A = 3$; (b) $\delta = -0.4$ e $A = 3$; (c) $\delta = 0.5$ e $A = 3$ e d) $\delta = 0.5$ e $A = 0.55$.*

estão confinadas no espaço de fases a uma região de relativamente baixa variação de fase. Isto significa que não existe vazamento da fase ψ , e esta persiste mesmo para grandes valores de A . Este sincronismo parcial permanece ativo para $\delta < 0$ mas neste caso a troca se torna menor por causa do reduzido espaço de fases permitido agora (muito similar aos casos regulares que foram expostos anteriormente). A dinâmica e as curvas limites estão representadas na Figura III.2 onde se vê claramente que as regiões permitidas se tornam cada vez menores a medida que δ se aproxima do caso $\delta = 0$ anterior.

Em todos estes casos completamente caóticos o espaço de fases parece ser ergodicamente preenchido por órbitas. Os gráficos de fases sugerem que órbitas inicialmente colocadas nas regiões internas das regiões permitidas acabam por cobrir todo o espaço de fases. Uma ferramenta importante na física de aceleradores que pode ser usada para medir ergodicidade é um fator b (*Bunching Factor*) definido como

$$b \equiv |\langle e^{i\psi} \rangle| \equiv \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i\psi_j} \right|, \quad (\text{III.26})$$

com a soma média tomada sobre N condições iniciais. No caso ergódico as médias não dependem da condição inicial e podem ser calculadas como uma integral sobre toda a região permitida do espaço de fases:

$$b_{\text{ergódico}} \equiv \left| \frac{\int_{\text{permitido}} e^{i\psi} d\psi d\rho_1}{\int_{\text{permitido}} d\psi d\rho_1} \right| \quad (\text{III.27})$$

Quando $\delta = 0$, $b_{\text{ergódico}}$ pode ser facilmente avaliado como $b_{\text{ergódico}} = 2/\pi \simeq 0.637$ e para valores suficientemente grandes de A tal que seja produzida uma grande região de caos, simulações com $N = 100$ mostram que a aproximação ergódica é boa (fazendo $b \rightarrow 0.64$).

A importância prática da ergodicidade reside no caso onde $\delta > 0$ como na figura III.3d, onde foi tomado o valor $\delta = 0.5$. Similarmente com o que ocorre na aproximação integrável, um pequeno canal é aberto próximo a $\rho_1 = 0$ e, se a ergodicidade está presente as órbitas inicialmente postas em qualquer lugar eventualmente atingem o canal e saem da região de confinamento. O sincronismo deveria ser quebrado em vista do fato de que a fase relativa $\psi(t)$ gerada por qualquer condição inicial não ficaria contida a variações limitadas. Note

que a ergodicidade está ausente para pequenos valores de A , como visto na Figura III.2d onde ainda se tem $\delta = 0.5$ mas $A = 0.55$.

O comportamento da fase no regime fortemente caótico é drasticamente diferente do regime da aproximação regular. No caso regular, a incoerência (ou vazamento das órbitas) se torna apreciável somente quando δ é grande o suficiente para se tornar próximo ao valor da incoerência. Para valores baixos de δ pode-se encontrar muitas vezes uma grande fração de condições iniciais colocadas fora da região onde o vazamento ocorre.

Porém, se o caos está presente, o vazamento das órbitas ocorre para qualquer valor de δ , mesmo que as órbitas estejam muito abaixo do limiar. Se δ é muito pequeno, $B \simeq 2/\pi$, de forma que a fração ocupada no canal é pequena.

III.6 Vazamento das Fases

Toda a discussão sobre os casos com $\delta > 0$ pode ser sumarizada na Figura III.3.

Agora são lançadas muitas condições iniciais ($N = 5000$ e $\psi = \pi$) e é computada a fração f destas condições iniciais remanescentes no domínio limitado num tempo t . A figura mostra os regimes de caos intenso com δ positivo representados pelas curvas com $A = 3$ onde nenhuma órbita permanece presa e $f \rightarrow 0$ assintoticamente. Quando se aumenta o valor de δ o processo só é acelerado.

Para pequenos valores de A onde a ergodicidade não é completa. Nem todas as condições iniciais abandonam a região limitada e tais condições estão aprisionadas por órbitas KAM: as curvas permanecem nesta região. f não tende a zero assintoticamente (veja a Figura III.3). Tomando $A = 3$ e $\delta = 0.2$ e lançando muitas condições iniciais sobre $\psi = \pi$ o comportamento da fase média imita a dependência linear temporal para as situações de casamento de fase regular.

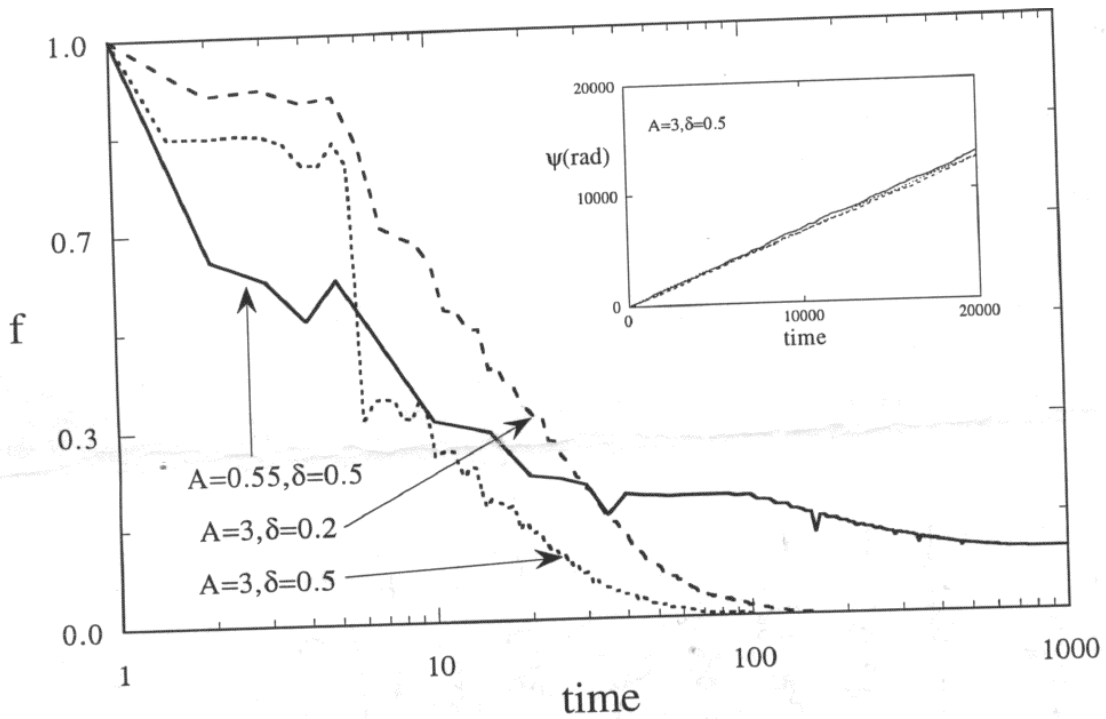


Figura III.3: Fração das partículas permanentes no domínio depois de um intervalo de tempo t ; $N = 5000$ condições iniciais estão uniformemente distribuídas sobre $\psi = \pi$. Note $\psi(t)$ versus t para três condições iniciais da figura: $\rho_1 = A/1.1, A/3$ e $A/10$ com $A = 3$ e $\delta = 0.2$. Aqui se mantém $\omega = 1$.

III.7 Conclusões

Neste capítulo foi analisado o problema da coerência de fase numa interação de três ondas. Enquanto na aproximação integrável a incoerência de fases domina à medida que o parâmetro de casamento das ondas δ é suficientemente grande para satisfazer $\delta > \delta_{inc} \equiv A^{1/2}$, no regime caótico o vazamento das fases está sempre presente mesmo quando δ permanece muito abaixo do limiar (mas ainda positivo). Neste caso não faz diferença onde a condição inicial é colocada, pois a fase relativa do tripleto sempre é quebrada e qualquer sincronismo não será observado por muito tempo. A incoerência ocorre à medida que derivadas de mais alta ordem são introduzidos nas equações que governam o sistema.

Capítulo IV

Transição Súbita para Caos na Eq. Não-Linear de Klein-Gordon

IV.1 Introdução

Neste capítulo vai ser estudada a transição da dinâmica modulacional para o regime de caos espaço-temporal em um campo contínuo governado pela equação de Klein-Gordon não-linear. Vai ser mostrada uma curva crítica no plano de amplitude-frequência que o divide em regiões tais que a transição para o caos só é possível se a frequência for menor do que a crítica. Nesta condição, a transição é fortemente localizada e ocorre abruptamente.

IV.2 O Modelo e as Aproximações

Como foi visto, interações não lineares em ondas e a instabilidade modulacional são um processo comum em uma grande gama de circunstâncias [ZHC94, RLE+98, GFR+01, GR00]. A dinâmica pode ser chamada de modulacional se a escala de tempo correspondente for muito maior que a associada com o transportador de alta frequência. Assim esta frequência é, em geral, uma quantidade fixa que caracteriza as propriedades lineares e de dispersão do sistema e a frequência modulacional é uma quantidade não-linear que cresce com a amplitude da onda. Desta forma, a dinâmica modulacional é um processo adiabático

se o mesmo se posicionar abaixo de um limiar ditado por um campo. Aqui vai ser focada a atenção justamente no que ocorre quando este campo é excedido.

A Equação Não-Linear de Klein Gordon (ENLKG) possui um comportamento muitas vezes encontrado em equações que descrevem ondas não-lineares. Ela é não-integrável na sua forma completa, mas pode ser modelada por aproximações integráveis em regimes de campos fracos. Do ponto de vista físico, a ENLKG pode ser vista como uma equação puramente linear na qual se adicionam termos não-lineares tendo em conta a possibilidade de respostas não-lineares do meio onde a propagação ocorre. A propagação não-linear de ondas relativísticas em plasmas, por exemplo, pode ser descrita em termos da ENLKG onde se combina a dispersão vinda dos termos lineares com termos não-lineares vindos de expansões em séries de potências de correções da massa relativística eletrônica [SUZ88, GFR+01b].

Aqui se mostra que a transição para o caos espaço-temporal está presente quando se aumenta a amplitude do campo causando a reconexão das curvas de energia em uma aproximação de baixa dimensionalidade. Esta transição, contudo, só está presente quando a alta frequência fica abaixo de um valor crítico. Nestas condições existe um limiar do parâmetro de amplitude.

Transporte de energia difusivo lento dos comprimentos de onda grandes para os menores pode estar presente em escalas de tempo maiores em sistemas deste tipo [ZHC94, GFR+01] mas o que se observa aqui é uma transição súbita de um estado ordenado para um caótico. Tais casos também já foram reportados na literatura [ZHC94, BZH+00, GFR+01]. O que se pretende levar a cabo aqui é mostrar que este processo é rápido e que as estimativas de baixa dimensionalidade concordam com as simulações do sistema completo.

A ENLKG que será tratada aqui é definida como

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial A} = 0, \quad (\text{IV.1})$$

onde se está definindo um potencial não linear generalizado como sendo

$$\Phi(A) = \omega^2 \frac{A^2(x, t)}{2} - \alpha \frac{A^4(x, t)}{4} + \beta \frac{A^6(x, t)}{6}, \quad (\text{IV.2})$$

sendo α e β positivos.

Nas equações acima se vê que ω aparece como uma frequência linear que define a escala temporal da portadora. Os sinais dos coeficientes que sobram na parte direita de (IV.2) são escolhidos para permitirem instabilidade modulacional e saturação. Enquanto o sinal negativo do segundo termo satisfaz a condição de instabilidade modulacional, o sinal positivo do terceiro termo é uma contribuição de saturação. Estes sinais não são casuais e correspondem a correções de massa relativística para o elétron num campo de ondas eletromagnéticas. Todos os fatores numéricos multiplicativos foram escolhidos por conveniência.

Agora vão ser reescalados o tempo, campo, espaço e frequência da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} A \\ x \rightarrow \frac{|c|\beta^{1/2}}{\alpha} x \\ t \rightarrow \frac{\beta^{1/2}}{\alpha} \\ \omega^2 \rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta} \omega^2, \end{array} \right. \quad (\text{IV.3})$$

de forma que se possa escrever a equação anterior em uma forma adimensional dependente somente de ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial A} = 0 \\ \Phi(A) = \omega^2 \frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{4} + \frac{A^6}{6}. \end{array} \right. \quad (\text{IV.4})$$

Aqui o termo de sexta ordem no potencial é responsável pela saturação. A ENLKG é conhecida por descrever a propagação de ondas em um meio não-linear e a ideia aqui é ver como a dinâmica muda em função dos parâmetros da teoria: amplitude, tempo e escalas de comprimento.

Para modulações lentas, pode-se realizar uma aproximação da seguinte forma, colocando toda a parte oscilatória no tempo e considerando que não há oscilações para escalas de tempo desta ordem. Assim se pode escrever

$$A(x, t) = \tilde{A}(x, t)e^{i\omega t} + \text{CC}, \quad (\text{IV.5})$$

onde CC é o seu complexo conjugado, o que permite que se escreva a aproximação como

$$2i\omega \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2} - 3|\tilde{A}(x, t)|^2 \tilde{A}(x, t) = 0, \quad (\text{IV.6})$$

que é a equação de Schrödinger não-linear, a qual é integrável.

A aproximação acima foi obtida levando em consideração que somente os primeiros modos oscilatórios seriam significativos de forma que termos com $e^{ni\omega t}$, com $n \neq 1$, foram descartados. Se se está em um regime homogêneo, a equação (IV.6) pode ser vista como uma solução com A constante. Porém, quando se adiciona os termos não-lineares e se pressupõem modulações fracas, pode-se descartar termos com derivadas superiores às ordinárias. Esta dedução está apresentada em mais detalhe no apêndice C.

É sabido que a aproximação modulacional é obtida quando existe uma grande disparidade entre as escalas de tempo da alta frequência ω e a frequência modulacional, aqui denotada por Ω , de tal sorte que termos da ordem de $\Omega^2 A$ possam ser desprezados nas equações que governam o sistema quando comparados com $\Omega^2 \tilde{A}$.

A magnitude da frequência modulacional pode ser estimada da seguinte maneira: considere na equação anterior um balanço democrático entre os seus vários termos, de tal sorte que a dispersão espacial e a não-linearidade possuam magnitudes comparáveis.

Neste caso pode-se pressupor $\omega \partial_t \tilde{A} \sim \partial_x^2 \tilde{A} \sim \tilde{A}^3$ e $\partial_t \rightarrow \Omega$ e $\partial_x \rightarrow k$. Assim sendo

$$\frac{\Omega}{\omega} \sim \left(\frac{\tilde{A}}{\omega}\right)^2. \quad (\text{IV.7})$$

Fica então claro que a aproximação modulacional é válida somente quando $\tilde{A} \ll \omega$, de forma que esta condição diminui o processo modulacional causando $\Omega \ll \omega$. A questão aqui tratada é o que se espera quando a abordagem modulacional cessa de ser válida. Antes de proceder nesta linha pode-se mencionar que a análise de estabilidade pode ser feita sobre (IV.6). Primeiramente se nota que os termos de um estado homogêneo mas temporavelmente variável podem ser escritos da forma [Er00, GFR+01, GR00]

$$\tilde{A}_0 = \tilde{a}_a e^{-i3a_0^2/2\omega t}, \quad (\text{IV.8})$$

onde a_0 é uma constante arbitrária.

Esta equação pode ser então perturbada com pequenas flutuações de um vetor de onda com $k > 0$ na forma [Er00, GFR+01]

$$\tilde{A}(x, t) = \tilde{A}_0 + a_1(t)e^{ikx} \quad (\text{IV.9})$$

Aqui se escolhe $k > 0$ mas uma troca de sinal em k não modifica a teoria. O próximo passo é linearizar a equação resultante em a_1 . Pressupondo-se que $a_1 \sim e^{i(\theta - 3a_0^2/2\omega)t}$, pode-se escrever uma relação de dispersão na forma

$$\theta = \theta(k) = \pm(k/\omega)\sqrt{\frac{6\tilde{a}_0^2 - k^3}{2}}, \quad (\text{IV.10})$$

do que se conclui que a solução homogênea é modulacionalmente instável quando $k < k_u \equiv \sqrt{6\tilde{a}_0}$ com uma razão de crescimento máximo dada por

$$k_{max} \equiv \frac{k_u}{\sqrt{2}}. \quad (\text{IV.11})$$

Note que a equação não-linear de Schrödinger é obtida no limite de $(k_{max}/\omega)^2 \ll 1$. Maiores valores de k podem ser obtidos a partir de descrições mais complexas de teorias modulacionais baseadas na propagação de ondas [SUZ88, Go84]. O estado homogêneo, quando estável, tipicamente evolui para um estado povoado por estruturas regulares que podem ser formadas em função justamente da ENLS, que é de tipo regular. Note também que a instabilidade linear está sempre presente para valores suficientemente pequenos de k . Se pequenos valores forem proibidos, como em sistemas de tamanho finito, então a instabilidade pode ser inibida.

IV.3 Nas Proximidades da Instabilidade Modulacional

Para avançar esta análise além dos regimes modulacionais, vai ser necessário relaxar a aproximação $\partial_t^2 A \ll \omega^2 A$. A ideia é precisamente examinar o que acontece quando a razão \tilde{A}/ω cresce de valores muito pequenos comparados com a unidade até valores comparáveis com a unidade.

Como um primeiro passo, vai se ater à descrição modulacional e se descrever um sistema multidimensional em termos de alguns poucos graus de liberdade mais importantes. Para tanto se escreve o campo completo como uma série de Fourier $A(x, t) = \sum_n A(t)e^{inkx}$ e se trunca apenas nos valores mais baixos de n , ou seja, $n = -1, 0, 1$, e se seleciona $k = k_{max}$ de forma que modos com um crescimento máximo dominem [SUZ88, FPG+00]. Do ponto de vista linear, os modos quadráticos são realmente estáveis.

Inserindo a expansão truncada em (IV.6) e restringindo-se a soluções estacionárias na forma $a_1 = a_{-1}$ se chega (após alguma álgebra) a um conjunto de equações deriváveis de um hamiltoniano não-linear da forma

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{p^2}{2} + U(Q, q), \quad (\text{IV.12})$$

com $U(Q, q)$ dado por

$$U(Q, q) = \frac{\omega^2 Q^2}{2} - \frac{Q^4}{2} + \frac{2Q^6}{3} + \frac{\chi^2 q^2}{2} - \frac{3q^4}{4} + \frac{6q^6}{3} - 3Q^2 q^2 + 10Q^4 q^2 + 15Q^2 q^4, \quad (\text{IV.13})$$

onde $\chi^2 \equiv \omega^2 + k^2$, $Q(t) = a_0(t)/\sqrt{2}$, $q(t) = a_1(t) = a_{-1}(t)$ e ainda p e P são os momenta conjugados.

Este último hamiltoniano não se restringe a aproximações adiabáticas no sentido de que os termos inerciais de (IV.6) ($p^2/2 + P^2/2$) estão preservados. Primeiramente se vai derivar as condições de estabilidade para o pacote homogêneo do hamiltoniano adiabático. Para isto, vai ser necessário assumir que em média $Q \gg q$ e resolver a dinâmica perturbativamente. Em ordem zero a dinâmica é governada pelo seguinte Hamiltoniano:

$$h_0 = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2 Q^2}{2} - \frac{Q^4}{2} + \frac{2Q^6}{3}. \quad (\text{IV.14})$$

Com o auxílio de coordenadas de angulo-ação e técnicas convencionais de teoria de perturbação, uma solução aproximada pode ser encontrada como sendo

$$Q = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega}} \cos(\omega t - 3\rho t/2\omega^2), \quad (\text{IV.15})$$

se ρ não for muito grande (este é um parâmetro arbitrário de amplitude).

Para chegar na solução aproximada dada por (IV.15), deve-se escrever a solução aproximada de ordem zero de (IV.14) na forma $h_{0,0} - Q^4/2 + 2Q^6/3$, com $h_{0,0} \equiv P^2/2 + \omega^2 Q^2/2$, solução do hamiltoniano de ordem zero. A teoria de perturbação funciona bem se Q é pequeno, o que requer que $\rho/\omega \ll 1$.

Agora se vai considerar o Hamiltoniano que controla a dinâmica do par canônico de variáveis (p, q) , que representam a perturbação não homogênea

$$h_1 = \frac{p^2}{2} + \frac{\chi^2 q^2}{2} + 3q^2 Q^2. \quad (\text{IV.16})$$

Deve-se introduzir um novo par de variáveis angulo-ação de forma que se reescreva o hamiltoniano h_1 na forma ressonante [ZHC94, SH00]

$$h_{1,r} = \frac{1}{2\omega_2}(k^2 - 3\rho)I + \frac{3\rho I}{2\omega^2} \cos(2\phi) \quad (\text{IV.17})$$

com $\phi = \theta - (\omega - 3\rho/2\omega^2)t$, onde se fez uso da aproximação $\chi \sim \omega + k^2/2\omega$, válida quando $k \ll \omega$.

Considere agora pequenas perturbações não-homogêneas. O modo não-homogêneo será representado pelas variáveis q e $p = \dot{q}$, de forma que a transformação canônica do tipo ângulo-ação mostra que

$$p^2 + \chi^2 q^2 = 2\chi I. \quad (\text{IV.18})$$

A condição da perturbação espacial dependente toma a forma $I \rightarrow 0$, o que implica que $h_{1,r} \rightarrow 0$ já que as demais variáveis também tendem a zero nesta condição.

Sendo $h_{r,1}$ uma constante de movimento e $|\cos(2\phi)| \ll 1$, as soluções com valores de I suficientemente grandes são possíveis somente quando

$$k < \sqrt{\frac{6\rho}{\omega}}, \quad (\text{IV.19})$$

o que também indica que um crescimento máximo para I ocorre quando $k_{max} = \sqrt{3\rho/\omega}$. As comparações das dependências temporais nas equações (IV.15) e (IV.16) mostram que $\rho/\omega = \tilde{a}^2$. Isto quer dizer que partindo das equações de onda não-lineares completas se recupera os resultados típicos da equação não-linear de Schrödinger.

O Hamiltoniano (IV.17) apresenta mais informações apesar da truncagem. Ele não é simplesmente uma aproximação adiabática e pode ajudar a compreender a quebra da modulação adiabática da dinâmica completa. Este Hamiltoniano admite soluções somente quando as órbitas satisfizerem a condição de energia

$$E > U(Q, q), \quad (\text{IV.20})$$

com E sendo a energia constante determinada a partir das condições iniciais

$$E = H[P(0), Q(0), p(0), q(0)].$$

Examinando as curvas de $U(Q, q)$ ao longo do eixo do menor termo quadrático (ou seja, Q) pode-se ver que $U(Q, q)$ cresce monotonicamente com Q e q se $\omega > \omega_{cr} = 0.5$. Isto implica na existência de somente um mínimo ao redor da origem onde $U = 0$. Será considerado este eixo pois é justamente ao longo deste eixo que o termo quártico primeiramente se manifesta formando um segundo mínimo quando ω se torna menor que o crítico. Mínimos adicionais são então criados quando $\omega < \omega_{cr}$, o que significa que para energias apropriadas, as órbitas podem fazer excursões da região vizinha a um mínimo para a região vizinha a um outro mínimo.

Para ilustrar este tipo de comportamento considere $\omega = 0.1$ como aparece na Figura 1. Aqui foram tomadas condições iniciais definindo a energia E a partir do conjunto $Q(0) = A_0/\sqrt{2} = 2\tilde{a}/\sqrt{2}$. As demais coordenadas foram estipuladas como 0. Aqui A_0 é uma amplitude inicial do pulso homogêneo.

As configurações permitidas e não permitidas no espaço de configurações (Q, q) estão representadas por regiões escuras e brancas respectivamente. Para este valor de ω mais de um mínimo está presente. Contudo, para valores muito pequenos de energia, as vizinhanças de U na região permitida são separadas por outras regiões de mínimo em campos mais altos. Agora, a medida que se aumenta o pulso de onda, as regiões se tocam e, após a região limítrofe $E = U$, ocorre o processo de reconexão.

Estão desenhados alguns contornos do potencial $U(Q, q)$ na primeira figura que indicam que as regiões de reconexão são realmente instabilidades de U . À medida que E se torna suficientemente grande e a conexão é estabelecida, uma trajetória inicial que comece na região interna pode ter a chance de escapar para a região de campos maiores. Contudo, a trajetória escapante pode não ser acessível para condições típicas, definindo um estado modulacional e isto será mostrado na sequência.

A metodologia apropriada para manipular um Hamiltoniano não-linear com dois graus de liberdade é a técnica das seções de superfície. Neste caso vai se começar por colecionar os valores de (q, p) sempre que $P = 0$ com $\dot{P} < 0$. Isto dá informação suficiente se A_0/ω não for muito grande pois sobre tais condições Q pode ser observado como sendo unicamente definido como a menor raiz de $H(p, q, P = 0, Q) = E$.

Fig.1: Gerhardt et al

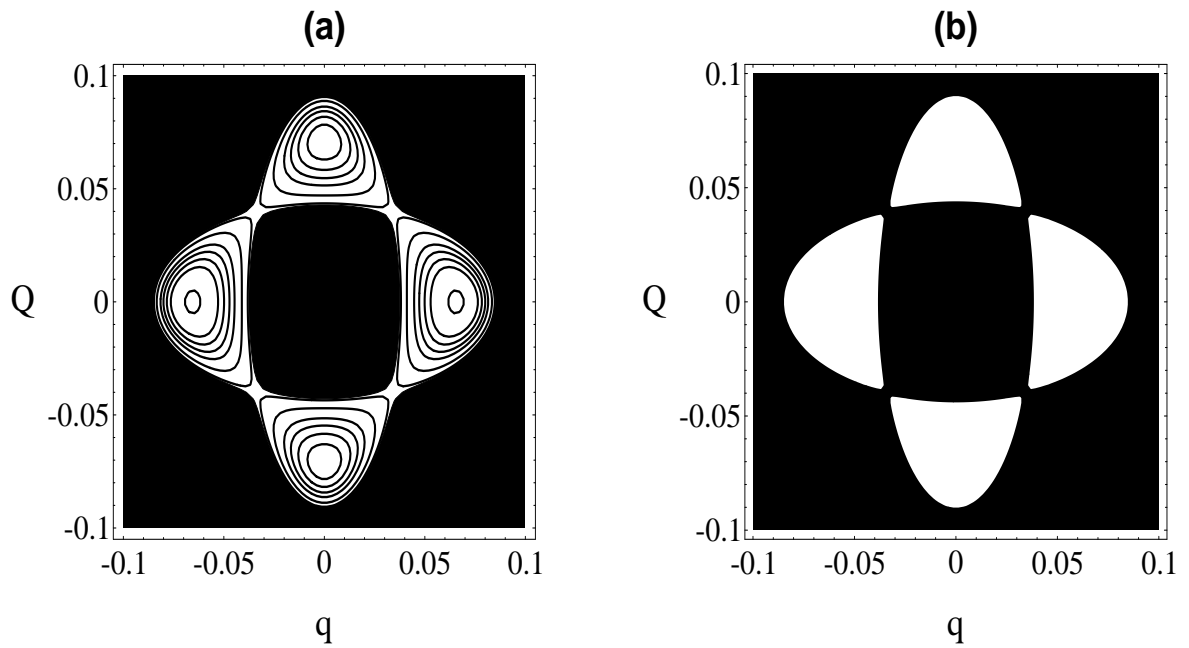


Figura IV.1: Regiões permitidas (em preto) como determinadas a partir de $E = U(Q, q) > 0$ com a) $A_0/\omega = 1/1.65$ e b) $A_0/\omega = 1/1.625$. Em ambos os casos $\omega = 0.1$ e a conexão é estabelecida para $A_0/\omega = 1/1.62925$ nesta frequência.

Um gráfico elaborado desta maneira refletirá a órbita modulacional, que está apresentada na Figura IV.2, como um looping homoclínico caótico [SUZ88] partindo de uma origem instável; os valores estão apresentados na legenda. Outras órbitas relevantes, principalmente pontos fixos elípticos, estão presos em loops homoclínicos e aqui vai se chamar todos estes conjuntos de *conjunto modulacional*.

A questão agora se resume a saber quais órbitas serão aquelas que atingirão as bordas apresentadas na figura IV.1b. Para responder a esta pergunta vai ser introduzido um gráfico de Poincaré com coordenadas (Q, q) (no lugar das comumente usadas (q, p)) mostradas quando $\dot{P} < 0$ e $P = 0$. Este gráfico representa bem a dinâmica do sistema e possui a vantagem de ser univocamente definido para valores arbitrários de A_0/ω . Correspondências apropriadas com o plano (p, q) são obtidas quando se traçam o loop homoclínico e os pontos elípticos. É possível então ver que o conjunto modulacional é precisamente este conjunto que fica perto das bordas. A medida que o conjunto modulacional atinge estas bordas o caos aumenta, o que ajuda a difusão de órbitas para fora desta região interna no passo que as conexões são formadas. Uma forma de apreciar o crescimento de atividade caótica é notar que os pontos elípticos modulacionais perdem estabilidade para pulsos maiores que $A_0/\omega = 1/1.62925$ o que aproxima as amplitudes onde as a conexão é estabelecida.

De fato, enquanto que para campos menores o ponto fixo é elíptico, a medida que o campo aumenta ocorre um dobramentos de período. Após a conexão entre a região interna e externa ser estabelecida e o ponto fixo bifurcar até o limite caótico, todas as condições iniciais que estiverem juntas com o conjunto modulacional poderão atingir regiões de campos mais altos. Uma análise mais detalhada mostra que a medida que a reconexão é feita, órbitas próximas dos loops homoclínicos começam a vazar. Este vazamento é mostrado na Figura IV.2 onde se superpôs os gráficos de Poincaré de (Q, q) com contornos $E - U = 0$ para valores de A_0/ω um pouco antes e um pouco depois do vazamento. A transição é totalmente obtida na última figura mas note nas figuras (a) e (b) a presença de ilhas de ressonância formadas pelo casamento entre a frequência ω e a frequência modulacional.

Tomando $\omega = 0.1$ a reconexão é obtida quando $A_0/\omega \sim 1/1.626$, e a mesma simulação mostra que o loop homoclínico ao longo desta região, com as mesmas órbitas vizinhas,

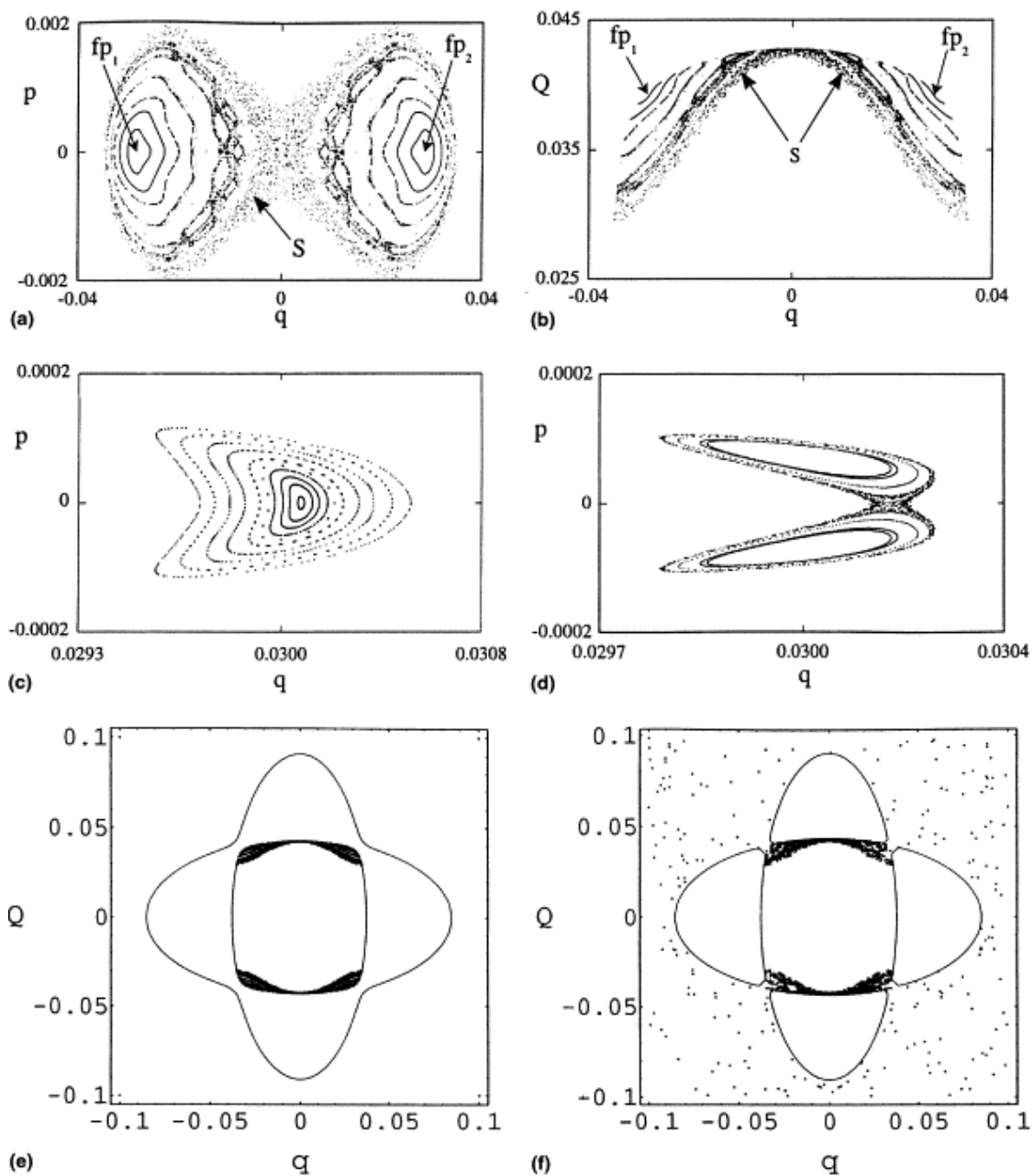


Figura IV.2: Gráfico de Poincaré para o espaço de fases (p, q) em a) e (Q, q) em b). Em ambos os casos usou-se $A_0/\omega = 1/1.65$ e $\omega = 0.1$. c) $A_0/\omega = 1/1.627$ e d) $A_0/\omega = 1/1.626$ mostrando o dobramento de período. Superposição do gráfico de Poincaré com os contornos de $E = U(Q, q)$ com e) $A_0/\omega = 1/1.65$ e f) $A_0/\omega = 1/1.625$. Em todos os casos se usou $\omega = 0.1$

é suficientemente caótico para difundir sobre a conexão entre a região interna e a região externa do potencial $U(Q, q)$. Isto responde a pergunta de porque a orbita caótica aparece na figura. Para valores imediatamente superiores de A_0/ω não se encontram mais orbitas e nada fica confinado na região interna. A conclusão é que a reconexão ocorre antes que o conjunto modulacional se torne caótico. Contudo, quando a reconexão ocorre, as orbitas próximas do loop homoclínico são suficientemente caóticas para difundir sobre a ponte formada entre a região interna e a região externa do potencial.

A importância da orbita homoclínica é que ela representa um solução temporal solitônica onde a amplitude da onda faz uma excursão máxima. Além disso, se o valor de A_0 cresce até um valor levemente maior que o valor onde o ponto elíptico dobra o período, como por exemplo para $A_0/\omega = 1/6.25$ mencionado anteriormente, a estabilidade modulacional do conjunto evolui para um estado caótico onde todas as condições iniciais lançadas ali podem se difundir ao longo da região interna da parede de potencial.

IV.4 Simulações com a dinâmica espaço-temporal completa.

Para comparar os resultados anteriores com os da dinâmica completa proceder-se-á da seguinte forma. Vai ser feita a discretização espacial com N posições, usando-se do método das diferenças finitas. Usa-se um valor grande ($N = 256$), de forma a mostrar uma representação acurada da dinâmica da onda quando um número relativamente baixo de modos estiver presente. Este é justamente o caso onde o sistema se encontra na região interna de $U(Q, q)$.

A dinâmica é evoluida temporalmente por meio de um integrador simplético, como era o Hamiltoniano puramente temporal, auxiliado por técnicas de inversão de matrizes para resolver as segundas derivadas temporais. O integrador simplético avalia as derivadas temporais $\partial^2 A/\partial t^2$ introduzindo um momentum p_A de acordo com

$$A(t_{j+1}) - A(t_j) = p_A(t_{j+1})dt \tag{IV.21}$$

onde $\omega dt \ll 1$. Um comprimento de sistema L é também introduzido como $k_{max} \equiv 2\pi/L$

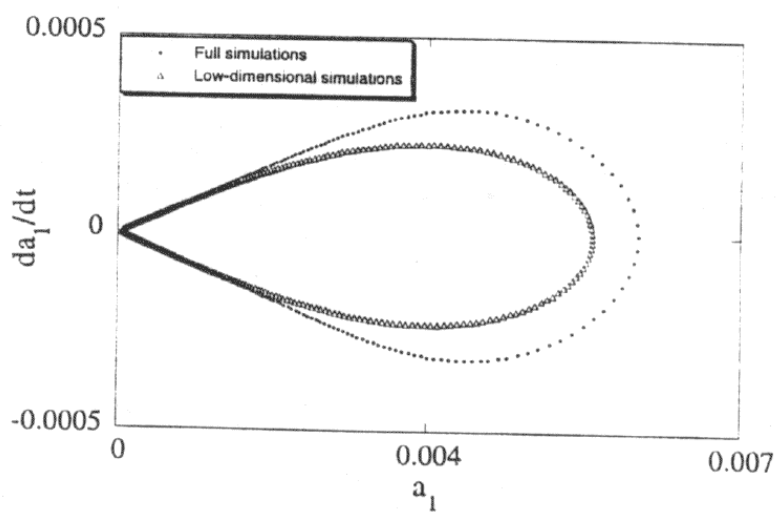


Figura IV.3: Espaço de Poincaré mostrando uma comparação entre o regime completo e a simulação de baixa dimensionalidade: $\omega = 0.1$ e $A_0/\omega = 0.2$.

[Go84, SUZ88, GFR+01] e a convergência é obtida para $dt \ll dx$ e $dx \equiv L/N$. Os resultados são muito robustos e a energia é conservada em 10^{-6} partes em uma. A condição inicial básica empregada aqui é

$$A(x, t = 0) = A_0(1 + \epsilon \cos(k_{max}x)), \quad (IV.22)$$

com $\dot{A}(x, t = 0) = 0$, $a_1 = a_{-1}$ e $\epsilon \equiv 2a_1/A_0 = 0.01$.

Dentro de um estudo modulacional, a amplitude inicial do modo homogêneo entra na teoria como uma condição inicial ou como um parâmetro de controle externo. Pode-se pensar em uma situação onde o estado homogêneo injetado começa a causar inomogeneidades no espaço como resultado da instabilidade. Dada a amplitude do modo homogêneo pode-se perturbar o sistema pelo vetor de onda mais instável, pois este modo domina sobre os outros. Deste ponto de vista se pode ver a amplitude inicial como uma condição inicial externa que obedeça as equações (IV.12).

Se for usada a condição inicial (IV.10) com alguma funções randômicas o que ocorre na figura 1 (inclusive a transição) toma sua posição como função de A_0/ω e ω .

Primeiro se comparará a simulação completa com as simulações baseadas no Hamiltoniano reduzido (IV.17). Isto ocorre na Figura 3 onde se representa a seção de Poincaré em ambos os casos considerando a mesma condição inicial. O gráfico mostra que pelo menos no regime regular a diferença entre o regime reduzido e o esquema completo não apresentam discrepâncias maiores que 10%. Na figura 4 está mostrada a evolução espaço-temporal da quantidade

$$C(x, t) \equiv A^2(x, t) + \omega^2 A^2(x, t) - \frac{A^2(x, t)}{2} + \frac{A^6(x, t)}{3}, \quad (IV.23)$$

que é livre de flutuações temporais rápidas no limite homogêneo $\partial_t \rightarrow 0$.

Aqui se investigou a dinâmica completa para um número de valores de A_0 e ω de forma a se visualizar se predições de baixa dimensionalidade sobre as propriedades de transição são possíveis. Na Figura 4a tomou-se $A_0/\omega = 0.2$ de forma a satisfazer as condições modulacionais. É usado $\omega = 0.1 < \omega_{critico}$, o que revela condições periódicas de baixa frequência como esperado, e isto ocorre também com condições que satisfazem $\omega > \omega_{critico}$. A seguir se observa a dinâmica quando as condições modulacionais não são mais satisfeitas.

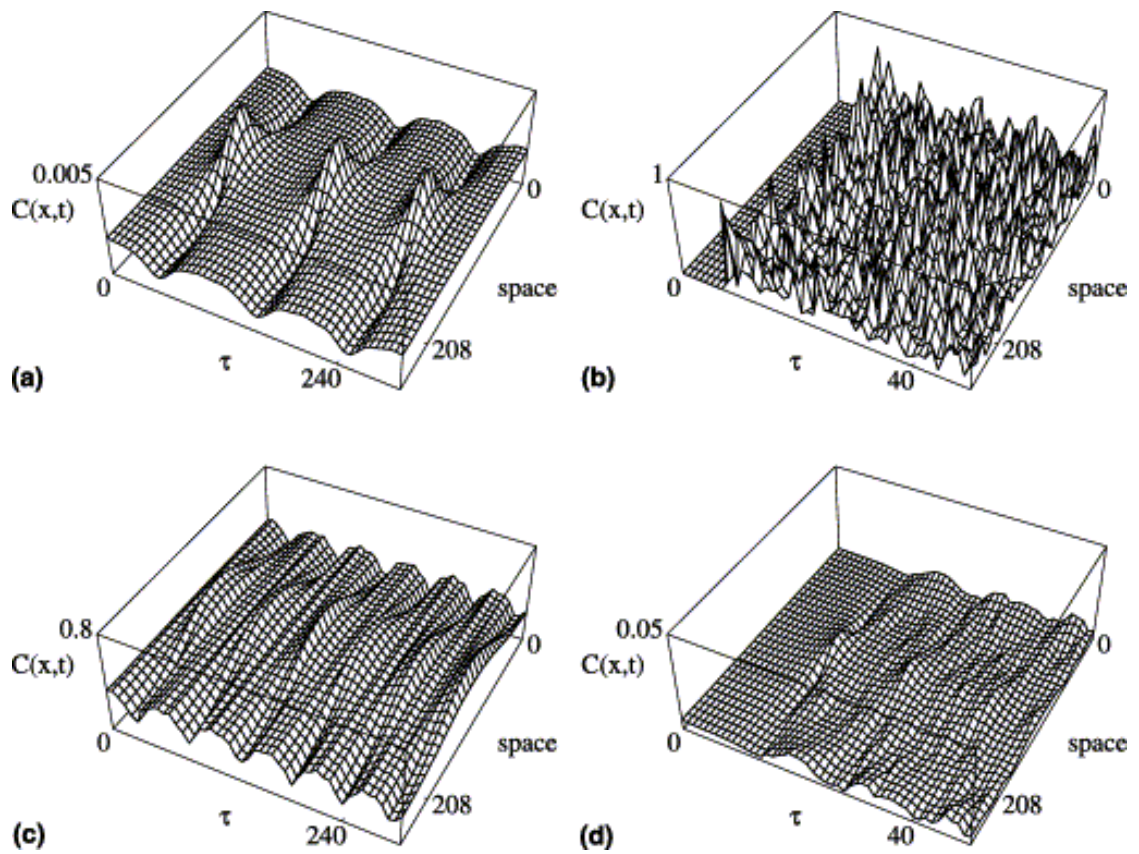


Figura IV.4: Simulações completas baseadas na equação (IV.4) com a) $\omega = 0.1$ e $A_0/\omega = 0.2$, b) $A_0/\omega = 0.5$, $A_0/\omega = 1.19$, c) $\omega = 0.1$ e d) $\omega = 0.75$. Em todos os casos $k = k_{max}$ e $\tau = t\omega/2\pi$. Foi usado uma grade espacial $N = 256$.

Na figura 4b se toma $\omega = 0.1$ e em c $\omega = 0.75$. O caso b mostra um pulo para um regime de forte atividade espaço temporal. O caso regular visto em c) pode ser mostrado como sendo um simples movimento quasi-periódico.

Agora, uma redução significativa em A_0 faz com que a dinâmica de b recupere sua regularidade, como visto no caso d onde se toma $A_0/\omega = 1/2$ novamente para $\omega = 0.1$. De acordo com os resultados da teoria de baixa dimensionalidade, as simulações parecem indicar que o caos só é possível para $\omega < 0.5$ e que a transição é em verdade muito dependente da amplitude do modo homogêneo com um pulo para o caos espaço temporal bem localizado no tempo. As diferenças nos valores de transição de A_0/ω como computados das simulações completas ficam abaixo de 10%. Para valores altos de ω as diferenças se tornam ainda menores como mostrado na Figura 5.

Deveria estar claro que no limite da transição da descrição de baixa dimensionalidade a coerência é perdida, e muitos modos se tornam ativos. Para estimar os graus de participação dos muitos modos envolvidos nas simulações se fará uso de uma medida (aqui chamada de η) de uma entropia espectral s definida da seguinte maneira [Iz88, LLL95, GFR+01]

$$\eta = \frac{s_{max} - s(t)}{s_{max} - s(0)} \quad (IV.24)$$

com

$$\begin{cases} s(t) = - \sum_k e_k \log(e_k) \\ e_k = \frac{E_k}{\sum_k E_k} \\ s_{max} = \log(N) \end{cases} \quad (IV.25)$$

onde E_k é a energia do modo espectral k , $E_k = |(\delta A)_k|^2 + (\omega^2 + k^2)|\delta A_k|^2$, com $\delta A = A - \langle A \rangle$ uma média dos valores de A .

Usando este procedimento (computando a média de A), se mede a entropia espectral pois em regimes de intenso caos espaço temporal, o campo médio dependerá da origem modulacionalmente instável ao longo de qualquer outra solução estacionária. Tomando $\dot{A} = \partial_x A = 0$ na equação (IV.4) se é levado a $A_{\pm} = \pm \sqrt{1/2(1 + \sqrt{1 - 4\omega^2})}$ simplesmente resolvendo a equação quadrática que são os pontos elípticos do limite homogêneo. Note que a existência dos pontos elípticos é sujeita à condição $\omega < \omega_{cr}$. Inspeção das simulações mostra qual dos três valores de A deve ser usado ($A \rightarrow A_+, A_-, 0$).

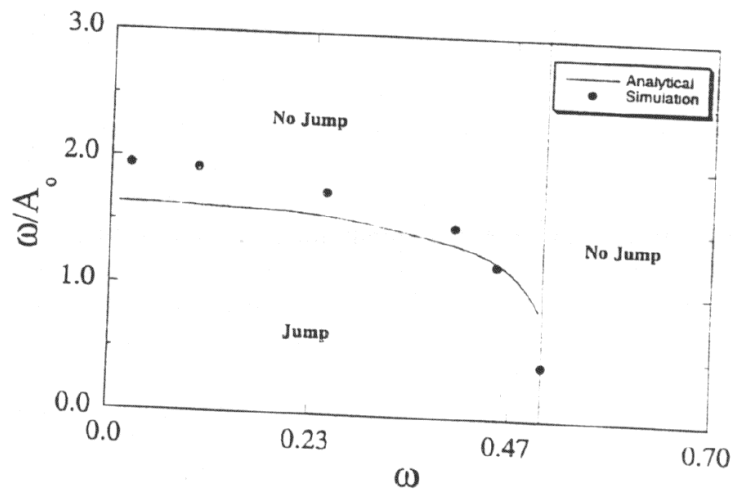


Figura IV.5: Comparação da simulação completa da equação (IV.4) e do cálculo analítico baseado na truncagem de baixa dimensionalidade indicando as curvas de transição no plano paramétrico. A região paramétrica é denotada *jump* ou *no jump*: é aquela onde o caos espaço temporal é ausente ou presente respectivamente.

De tudo isto se conclui que s_{max} representa o limite de equipartição de energia com respeito a média e que $h \rightarrow 0$ se a energia permanecer onde ela foi inicialmente colocada ao passo que $h \rightarrow 1$ se a equipartição prevalecer. A figura 6 mostra que se a intensidade do pulso de onda aumenta aos limites do valor crítico o sistema transita para uma tendência de se aproximar da equipartição assintoticamente e para valores menores que o campo crítico h simplesmente oscila indicando a ausência de energia para transição.

Algumas outras informações importantes do ponto de vista físico serão vistas no limite de convergência numérica.

IV.4.1 A Convergência

Quando se fala em convergência do ponto de vista do número de pontos da grade, está-se querendo denotar a convergência no instante do salto para o caos espaço temporal. Se N é muito pequeno (como por exemplo $N = 8$ ou 16) a dinâmica depende sensivelmente de N , mas não muito, pois se tem somente dois modos dominantes aqui. Mas quando se compara as simulações com grandes valores de N (como $N = 128, 256$) não se pode mais distinguir qualquer diferença. Ou seja, após o pulso para o caos não há mais convergência espaço temporal.

Primeiramente, note que nem todos os pontos das grades espaciais estão mostrados nas figuras. Fez-se as simulações com 256 pontos mas para que as mesmas possuíssem um tamanho razoável se graficou apenas 1/8 de todos os pontos. Isto certamente dá uma impressão de irregularidade no espaço-tempo mas isto é suavizado para $\tau \sim 20 - 30$ como na figura 4c. Após este tempo, a suavização é perdida, o que não é uma deficiência do código do programa. Esta suavidade é perdida independentemente do valor de N , pois a energia sempre flui para a região de maior vetor de onda em uma tentativa de estabelecer uma equipartição de energia neste sistema conservativo. Mostra-se aqui que uma grande parte do espectro é excitada justamente após o salto e, por isto, a suavidade é perdida.

Então, para qualquer valor de N haverá um tempo onde a menor escala de comprimento das flutuações coincidirão com o do espaçamento entre os pontos da grade e neste ponto

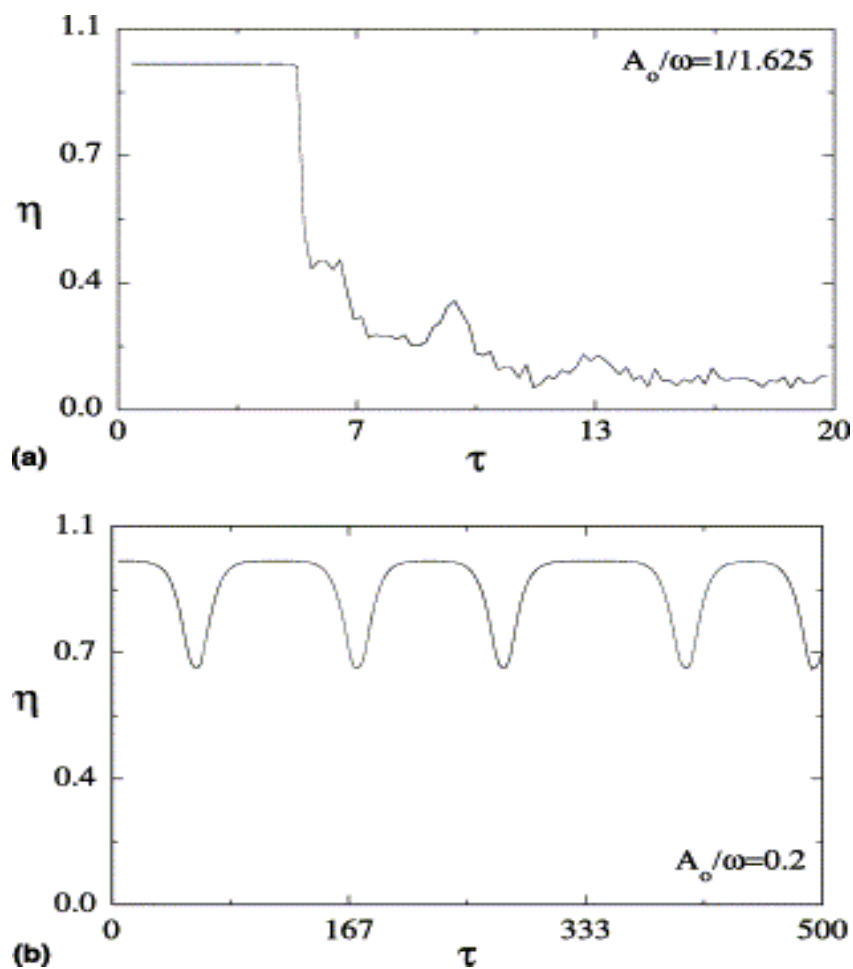


Figura IV.6: η contra o tempo τ . Quando a transição para o caos espaço temporal está presente, estes resultados sugerem equipartição e irreversibilidade (como em a). De outra forma (b) o escape das orbitas é reversível.

a teoria contínua precisa se correlacionar com a discreta (como a existência de partículas individuais). Contudo, os aspectos gerais da desordem na dinâmica espaço temporal são os mesmos pois a quantidade que se plota contém um termo de energia cinética do tipo $(\partial_t A)^2$. Este termo viabiliza flutuações intensas e contém contribuições de todas as escalas de tempo e não somente das escalas pequenas onde a teoria deveria ser refinada. Este tipo de comportamento é esperado e foi analisado em vários artigos [IG94, Ki80, JJ00]. Quantidades importantes para determinar a energia de transição são o número médio de modos ou o η . η é fracamente dependente de N de forma que decai rapidamente após o "pulo", o que mostra que muitos modos se tornam excitados.

Para sumarizar: depois da reconexão, a energia não permanece confinada com a aproximação de dois modos e muitos outros modos se tornam excitáveis. Esta é precisamente a atividade espaço temporal que se queria mostrar aqui.

IV.5 Conclusões

Aqui foi visto que a dinâmica da ENLKG depende criticamente dos parâmetros ω e da razão A_0/ω . Em todas as situações onde $\omega > \omega_{cr} = 0.5$ a dinâmica preserva sua regularidade mesmo para valores grandes de amplitude. Por outro lado, quando $\omega < \omega_{cr}$ encontra-se uma transição descontínua de um estado ordenado para um estado assintoticamente caótico, como esta apresentado na figura 5. A aparente descontinuidade da transição está de acordo com resultados recentes [RD96, JJ00] em conexão com a transição de um estado de coerência para um sem coerência nas interações de ondas. A referencia [RD96] sugere que o mecanismo de transição seja similar a uma transição de primeira ordem de uma fase regular para uma randômica.

Aqui a transição ocorre à medida que a amplitude do pulso homogêneo se torna grande o suficiente para que a dinâmica não seja confinada no vale produzido pela ação combinada dos termos de segunda e quarta ordem do potencial $\Phi(A)$.

Se esta transição descontínua ocorrer, ela será rápida e não ocorrerá como um processo difusivo lento como observado em processos similares [IG94, JJ00], já que o mesmo

Capítulo IV. Transição Súbita para Caos na Eq. Não-Linear de Klein-Gordon 70

depende de uma reconexão rápida de curvas que estiverem limitando o conjunto originariamente aprisionado do modelo de baixa dimensionalidade. A reconexão abre as curvas originariamente fechadas libertando as órbitas e reduzindo a coerência. A medida que se passa pela transição se nota que a dinâmica envolve um número grande de modos, maior que aquele presente no modelo de baixa dimensionalidade. O modelo é contudo muito acurado, tanto no estado regular como no de transição, a qual pode ser determinada dentro dos limites de aproximação de baixa dimensionalidade.

Capítulo V

Conclusões Finais

Este trabalho constou de, basicamente, duas partes. Nos primeiros dois capítulos foram dadas algumas introduções ao ferramental que seria utilizado nos capítulos III e IV sem se aprofundar em maiores detalhes da obtenção destas ferramentas mas mostrando onde e como elas são utilizadas.

No capítulo III foi analisado o problema do casamento de tres ondas usando-se o modelo das equações de Zakharov. Foi feita uma aproximação adiabática para o modelo no sentido de analisar como a coerência e o caos eram afetados dentro de um regime lento. Esta aproximação foi comparada com a dinâmica completa, para a qual tambem era possível escrever um Hamiltoniano. O que se pode ver era que na aproximação integrável a incoerência dominava em função do acoplamento entre as ondas (quanto maior o acoplamento, maior a coerência, com um valor mínimo). No regime caótico viu-se que o vazamento das fases estaria sempre presente, mesmo para casamentos muito fracos entre as ondas.

O comportamento das fases no regime fortemente caótico é diferente é diferente do regime de aproximação regular pois a incoerência, que aqui foi também chamada de vazamento das fases, torna-se apreciável somente quando o casamento torna-se grande o suficiente para atingir um limiar. Mas em regime caótico esta incoerência ocorre para qualquer valor do acoplamento, mesmo sendo estes valores muito abaixo do limiar do caso aproximado.

No capítulo IV procurou-se estudar este comportamento de transição súbita para o caos em um campo de ondas contínuo governado pela ENLKG. Verificou-se que a dinâmica da

ENLKG dependia criticamente dos parâmetros de frequência e amplitude e foi possível também determinar um crítico para estes parâmetros. Para valores de frequência além do valor crítico a dinâmica preserva sua regularidade, mas para valores abaixo deste valor crítico ($\omega_{cr} = 1/2$) pode-se encontrar transições descontínuas de um estado ordenado para um caótico. Este mecanismo sugeria um similaridade com transições de primeira ordem na Mecânica Estatística de uma fase regular para uma randômica. Se esta transição ocorre, ela ocorre de forma rápida e depende da reconexão a curvas limites do modelo aproximado.

Usando o conceito de entropia espectral e calculando-a em função do tempo para os dois regimes pode-se concluir que quando a transição está presente existe equipartição de energia e irreversibilidade. Caso contrario o processo é reversível.

Todo o tratamento aqui feito foi usando condições iniciais do tipo onda plana, mas este mesmo procedimento poderia ser levado a cabo usando-se sólitons para estudar a propagação dos mesmos dentro do contexto da ENLKG. Outra extensão direta deste trabalho seria analisar o caso de um feixe de modos no lugar de somente três, como foi feito aqui.

Apêndice A

Detalhamento da dedução de (III.6) e (III.10)

Não existe uma receita *geral* para a dedução de um Hamiltoniano de forma que cada problema é único de um certo ponto de vista, ainda que muitos problemas passam ser tratados de maneiras similares.

Considere as equações de Zakharov dadas por

$$\begin{cases} i\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = nE \\ \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

com as soluções para E e n dadas por (III.2) e (III.3)

$$\begin{cases} E = a_1(t)e^{ik_1x} + a_2(t)e^{ik_2x} \\ n = a_3(t)e^{ik_3x} + a_3^*(t)e^{-ik_3x}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Derivando-se as equações do sistema (A.2) obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial a_1(t)}{\partial t}e^{ik_1x} + \frac{\partial a_2(t)}{\partial t}e^{ik_2x} \\ \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_3(t)}{\partial t^2}e^{ik_3x} + \frac{\partial^2 a_3^*(t)}{\partial t^2}e^{-ik_3x} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k_1^2 a_1(t)e^{ik_1x} - k_2^2 a_2(t)e^{ik_2x}, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

e para o módulo de E :

$$|E|^2 = a_1(t)a_1^* + a_1(t)a_2^*e^{i(k_1-k_2)x} + a_2(t)a_1^*e^{-i(k_1-k_2)x} + a_2(t)a_2^* \quad (\text{A.4})$$

obtem-se também

$$\frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2} = a_1(t)a_2^*(k_1 - k_2)^2 e^{i(k_1 - k_2)x} - a_2(t)a_1^*(k_1 - k_2)^2 e^{-i(k_1 - k_2)x}. \quad (\text{A.5})$$

Agrupar-se, agora, estes termos nas equações de Zakharov:

$$\left\{ \begin{aligned} i \left[\frac{\partial a_1(t)}{\partial t} e^{ik_1 x} + \frac{\partial a_2(t)}{\partial t} e^{ik_2 x} \right] - \left[k_1^2 a_1(t) e^{ik_1 x} + k_2^2 a_2(t) e^{ik_2 x} \right] &= \\ &= \left(a_3 e^{ik_3 x} + a_3^* e^{-ik_3 x} \right) \left(a_1 e^{ik_1 x} + a_2 e^{ik_2 x} \right) \\ \left[\frac{\partial^2 a_3(t)}{\partial t^2} e^{ik_3 x} + \frac{\partial^2 a_3^*(t)}{\partial t^2} e^{-ik_3 x} \right] - \left[k_3^2 a_3(t) e^{ik_3 x} + k_3^2 a_3^*(t) e^{-ik_3 x} \right] &= \\ &= a_1(t)a_2^*(k_1 - k_2)^2 e^{i(k_1 - k_2)x} - a_2(t)a_1^*(k_1 - k_2)^2 e^{-i(k_1 - k_2)x}, \end{aligned} \right. \quad (\text{A.6})$$

onde, usando-se os acoplamentos $k_1 = k_2 + k_3$ e agrupando-se os termos com respeito às exponenciais complexas comuns, pode-se escrever o sistema de equações

$$\left\{ \begin{aligned} i \frac{da_1(t)}{dt} - \omega_1 a_1 - a_3 a_2 &= 0 \\ i \frac{da_2(t)}{dt} - \omega_2 a_2 - a_3^* a_1 &= 0 \\ \frac{d^2 a_3(t)}{dt^2} + \omega_3^2 a_3 - k_3^2 a_1 a_2^* &= 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.7})$$

O próximo passo é considerar que a onda $a_3(t)$ é composta de uma onda lenta modulando uma onda mais rápida. A onda lenta é a onda dita portadora, ou ainda *onda mãe*, no texto do capítulo III. Neste caso se escreve

$$a_3(t) = \tilde{a}_3(t) e^{-i\omega_3 t}. \quad (\text{A.8})$$

Note que a velocidade da onda será

$$\frac{da_3(t)}{dt} = \left[\frac{d\tilde{a}_3(t)}{dt} - i\omega_3 \tilde{a}_3(t) \right] e^{-i\omega_3 t}, \quad (\text{A.9})$$

como o termo $da_3(t)/dt$ é pequeno por definição, pois a onda precisa ser lenta, vê-se que

$$\frac{da_3(t)}{dt} \simeq -i\omega_3 \tilde{a}_3(t) \quad (\text{A.10})$$

somente se

$$\frac{da_3(t)}{dt} \ll \omega_3 \tilde{a}_3(t). \quad (\text{A.11})$$

Com isto em mente, pode-se usar as definições

$$\begin{cases} a_2 = \sqrt{\frac{2}{\omega_3}} \tilde{a}_2 e^{-i\omega_2 t} \\ a_1 = \sqrt{\frac{2}{\omega_3}} \tilde{a}_1 e^{-i(\omega_2 + \omega_3)t} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

e substituir no sistema (A.7) obtendo assim

$$\begin{cases} \left[i \frac{d\tilde{a}_1(t)}{dt} + (\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) \tilde{a}_1(t) - \tilde{a}_3(t) \tilde{a}_2(t) \right] e^{-i(\omega_2 + \omega_3)t} = 0 \\ \left[i \frac{d\tilde{a}_2(t)}{dt} - \tilde{a}_3^*(t) \tilde{a}_1(t) \right] e^{-i\omega_2 t} = 0 \\ \left[i \frac{d\tilde{a}_3(t)}{dt} - \tilde{a}_2^*(t) \tilde{a}_1(t) \right] e^{-i\omega_3 t} = 0, \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

que são as equações (III.6) se for utilizada a definição $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$.

Agora considere o conjunto (III.6)

$$\begin{cases} i \frac{d\tilde{a}_1(t)}{dt} = \delta \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \\ i \frac{d\tilde{a}_2(t)}{dt} = \tilde{a}_3^* \tilde{a}_1 \\ i \frac{d\tilde{a}_3(t)}{dt} = \tilde{a}_1^* \tilde{a}_2, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

onde se pretende utilizar de coordenadas do tipo ângulo-ação $a_j = \sqrt{\rho_j} e^{i\phi_j}$. Inserindo esta definição em (A.14) se é levado a

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} \left[\rho_1^{1/2} e^{i\phi_1} \right] = \left[(\rho_2 \rho_3)^{1/2} + \delta \rho_1^{1/2} \right] e^{i\phi_1} \\ i \frac{d}{dt} \left[\rho_2^{1/2} e^{i\phi_2} \right] = \left[(\rho_1 \rho_3)^{1/2} \right] e^{i\phi_2} \\ i \frac{d}{dt} \left[\rho_3^{1/2} e^{i\phi_3} \right] = \left[(\rho_1 \rho_2)^{1/2} \right] e^{i\phi_3}, \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

onde se pode usar os acoplamentos dados por $\psi = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$ e abrir as derivadas de forma a obter o sistema

$$\begin{cases} i \left[\frac{1}{2} \frac{d\rho_1}{dt} + i\rho_1 \frac{d\phi_1}{dt} \right] e^{i\psi} = \left[(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} + \delta \rho_1 \right] e^{i\psi} \\ i \left[\frac{1}{2} \frac{d\rho_2}{dt} + i\rho_2 \frac{d\phi_2}{dt} \right] e^{i\psi} = \left[(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} \right] e^{i\psi} \\ i \left[\frac{1}{2} \frac{d\rho_3}{dt} + i\rho_3 \frac{d\phi_3}{dt} \right] e^{i\psi} = \left[(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} \right] e^{i\psi}. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Igualando-se agora os termos reais e imaginários se é conduzido a

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{d\rho_1}{dt} = - \left[(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} + \delta\rho_1 \right] \\ \rho_1 \frac{d\rho_2}{dt} = - \left[(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} \right] \\ \rho_1 \frac{d\rho_3}{dt} = - \left[(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} \right]. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Considerando-se que existe conservação de energia na forma das relações de Manley-Rowe $\rho_1 + \rho_2 = A/2$ e $\rho_1 + \rho_3 = B/2$ sabe-se que se está procurando um Hamiltoniano que gere o sistema de equações (A.17) com dois graus de liberdade na forma

$$\begin{cases} \frac{\partial H_a}{\partial \psi} = - \frac{d\rho_1}{dt} \\ \frac{\partial H_a}{\partial \rho} = \frac{d\psi}{dt} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

de forma que o Hamiltoniano deve ser dado por

$$H_a = 2(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} \cos(\psi) + \delta\rho_1. \quad (\text{A.19})$$

A forma final (III.10) simplesmente é obtida usando-se as relações de MR para ρ_2 e ρ_3 :

$$H_a = 2\sqrt{\tilde{\rho}_1 \left(\frac{A}{2} - \tilde{\rho}_1\right) \left(\frac{B}{2} - \tilde{\rho}_1\right)} \cos \psi + \delta\tilde{\rho}_1. \quad (\text{A.20})$$

Apêndice B

Obtenção do Hamiltoniano (III.15)

Este tratamento é muito similar ao do apêndice A. Considere inicialmente as definições para $a_{1,2,3}$ com função de ρ e ϕ :

$$\begin{cases} a_{1,2} = \left(\frac{\sqrt{\rho_{1,2}}}{k_3} \right) e^{i\phi_{1,2}} \\ a_3(t) = (1/\sqrt{2})[u(t) + iv(t)], \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Substituindo (B.1) em (III.4) obtém-se

$$\begin{cases} i \frac{d[(\rho_1)^{1/2} e^{i\phi_1}]}{dt} = \omega_1 (\rho_1)^{1/2} e^{i\phi_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_2)^{1/2} e^{i\phi_2} [u(t) + iv(t)] \\ i \frac{d[(\rho_2)^{1/2} e^{i\phi_2}]}{dt} = \omega_2 (\rho_2)^{1/2} e^{i\phi_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_1)^{1/2} e^{i\phi_1} [u(t) - iv(t)] \\ \frac{d^2[u(t) - iv(t)]}{dt^2} + \omega_3^2 [u(t) - iv(t)] = (\rho_1 \rho_2)^{1/2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Resolvendo as derivadas e agrupando as exponenciais pode-se escrever (B.2)

$$\begin{cases} i \frac{d\rho_1}{dt} - 2\rho_1 \frac{d\phi_1}{dt} = 2\omega_1 \rho_1 + (2\rho_1 \rho_2)^{1/2} e^{i(\phi_2 - \phi_1)} [u(t) + iv(t)] \\ i \frac{d\rho_2}{dt} - 2\rho_2 \frac{d\phi_2}{dt} = 2\omega_2 \rho_2 + (2\rho_1 \rho_2)^{1/2} e^{-i(\phi_2 - \phi_1)} [u(t) - iv(t)] \\ \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + i \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = \omega_3^2 [u(t) + iv(t)] + (2\rho_1 \rho_2)^{1/2} e^{-i(\phi_2 - \phi_1)}. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Usando agora $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ e separando a parte real da parte imaginária em (B.3),

pode-se escrever o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + \left(2\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{1/2} [u(t) \cos(\phi_2 - \phi_1) - v(t) \sin(\phi_2 - \phi_1)] \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \left(2\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/2} [u(t) \cos(\phi_2 - \phi_1) - v(t) \sin(\phi_2 - \phi_1)] \\ \frac{d\rho_1}{dt} = (2\rho_1\rho_2)^{1/2} [u(t) \sin(\phi_2 - \phi_1) + v(t) \cos(\phi_2 - \phi_1)] \\ \frac{d\rho_2}{dt} = -(2\rho_1\rho_2)^{1/2} [u(t) \sin(\phi_2 - \phi_1) + v(t) \cos(\phi_2 - \phi_1)] \\ \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_3^2 u(t) = (2\rho_1\rho_2)^{1/2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \omega_3^2 v(t) = -(2\rho_1\rho_2)^{1/2} \sin(\phi_2 - \phi_1). \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

Note que o conjunto (B.4) é canônico. Em virtude da similaridade com um oscilador harmônico as equações para $u(t)$ e $v(t)$ sugerem a presença de um movimento harmônico além da dinâmica puramente modulacional. Definindo p_u e p_v como os momenta canonicamente associados a u e v pode-se escrever o Hamiltoniano que gera (B.4) como

$$\begin{aligned} H = (2\rho_1\rho_2)^{1/2} [u(t) \sin(\phi_2 - \phi_1) + v(t) \cos(\phi_2 - \phi_1)] + \omega_1\rho_1 + \omega_2\rho_2 + \\ + \frac{1}{2} [p_u^2 + p_v^2 + k_3^2 (u(t)^2 + v(t)^2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Apêndice C

Obtenção da Aproximação (IV.6)

A equação (IV.6) é a Equação Não Linear de Schrödinger e pode ser derivada como uma aproximação dentro do tratamento que se está usando aqui.

Considere a solução do tipo (IV.5):

$$A(x, t) = \tilde{A}(x, t)e^{i\omega t} + \tilde{A}^*(x, t)e^{-i\omega t}. \quad (\text{C.1})$$

Calculando a derivada segunda no tempo para $A(x, t)$ obter-se-á

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} = & \left[\frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} - \omega^2 \tilde{A}(x, t) \right] e^{i\omega t} + \\ & + \left[\frac{\partial^2 \tilde{A}^*(x, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \tilde{A}^*(x, t)}{\partial t} - \omega^2 \tilde{A}^*(x, t) \right] e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

assim como, para as derivadas de $A(x, t)$ em relação a x ,

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2} e^{i\omega t} + \frac{\partial^2 \tilde{A}^*(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\omega t}. \quad (\text{C.3})$$

No sistema (IV.4) está presente, para o potencial $\phi(A)$, um termo de sexta ordem que, nesta aproximação será desconsiderado por ser este responsável somente pela saturação.

Desta forma

$$\frac{\partial \phi(A)}{\partial A} = \omega^2 A(x, t) - A^3(x, t). \quad (\text{C.4})$$

O termo cúbico pode ser escrito como

$$A^3(x, t) = [\tilde{A}(x, t)e^{i\omega t} + \tilde{A}^*(x, t)e^{-i\omega t}] \times$$

$$\times [\tilde{A}^2(x, t)e^{2i\omega t} + 2|\tilde{A}(x, t)|^2 + \tilde{A}^{*2}(x, t)e^{-2i\omega t}], \quad (\text{C.5})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A^3(x, t) = & \tilde{A}^3(x, t)e^{3i\omega t} + \tilde{A}^{*3}(x, t)e^{-3i\omega t} + 3|\tilde{A}(x, t)|^2\tilde{A}(x, t)e^{i\omega t} + 3|\tilde{A}(x, t)|^2\tilde{A}^*(x, t)e^{-i\omega t} + \\ & + |\tilde{A}(x, t)|^2\tilde{A}(x, t)e^{2i\omega t} + |\tilde{A}(x, t)|^2\tilde{A}^*(x, t)e^{-2i\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Considerando agora que somente os modos significativos são relevantes, ou seja, modos com $n = \pm 1$ pode-se substituir (C.2)-(C.6) em (IV.4) de forma que

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2} - 3|\tilde{A}(x, t)|^2\tilde{A}(x, t) \right] e^{i\omega t} + \\ & + \left[\frac{\partial^2 \tilde{A}^*(x, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \tilde{A}^*(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{A}^*(x, t)}{\partial x^2} - 3|\tilde{A}^*(x, t)|^2\tilde{A}^*(x, t) \right] e^{-i\omega t} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

ou seja, desconsiderando a segunda derivada temporal (supondo-se modulações fracas),

$$2i\omega \frac{\partial \tilde{A}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{A}(x, t)}{\partial x^2} - 3|\tilde{A}(x, t)|^2\tilde{A}(x, t) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Referências

- Ab93 ABARBANEL, H. D. I.; BROWN, R.; SIDOROWICZ, J. J.; TSIMRING, L. S. The analysis of observed chaotic data in physical systems. **Reviews of Modern Physics**, Woodbury, v. 65, n. 4 p. 1331-1392, Oct. 1993.
- BZH+00 BRUSCH, L.; ZIMMERMANN, M. G.; van HECKE, M.; BÄR, M.; TORCINI, A. Modulated amplitude waves and the transition from phase to defect chaos. **Physical Review Letters**, Melville, v. 85, n. 1, p. 86-89, July 2000.
- CAB+00 CHIAN, A. C-L.; ABALDE, J. R.; BOROTTO, F. A.; LOPES, S. R.; RIZZATO, F. B. Nonlinear dynamics and chaos in space plasmas. **Progress of Theoretical Physics Supplement**, Kyoto, v. 139, p. 34-45, July 2000.
- Ch79 CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. **Physics Reports**, Amsterdam, v. 52, n. 5, p. 263-287, Mar. 1979.
- CH93 CROSS, M. C.; HOHENBERG, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. **Reviews of Modern Physics**, Woodbury, v. 65, n. 3, p. 851-1112, July. 1993.
- Ch94 CHATE, H. Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. **Nonlinearity**, New York, v. 9, p. 185-197, Oct. 1994.
- CR93 CORSO, G.; RIZZATO, F. B. Stochastic cyclotron dynamics in the interaction of waves and low-energy particles. **Journal of Plasma Physics**, Cambridge, v. 49, n. 3, p. 425-443, June 1993.
- FPG+00 FRICHEMBRUDER, M.; PAKTER, R.; GERHARDT G. J. L.; RIZZATO, B. Chaos and coherence in conservative three-mode decay interaction. **Physical Review E**, Melville, v. 62 n. 6, p. 7861-7866, Dec. 2000.
- GFR+01 GERHARDT, G. J. L.; FICHEMBRUDER, M.; RIZZATO, F. B.; LOPES, S. R. Sudden transition to spatiotemporal chaos in a nonlinear Klein-Gordon equation. **Chaos, Solitons and Fractals**, Oxford, v. 13, n. 6, p. 1269-1279, Mar. 2002.
- Gi93 GIL, L. Vector order parameter for an unpolarized laser and its vectorial topological defects. **Physical Review Letters**, Melville, v. 70 n. 2, p. 162-165, Jan. 1993.
- Go84 GOLDMAN, M. V. Strong turbulence of plasma waves. **Reviews of Modern Physics**, Woodbury, v. 56, n. 4, p. 709-735, Oct. 1984.

- He76 HENON, M. A two dimensional mapping with a strange attractor. **Communications on Mathematical Physics**, Berlin, v. 50, n. 1, p. 69-77, Sept. 1976.
- HSS99 van HECKE, M.; STORM, C.; van SAARLOOS, W. Sources, sinks and wavenumber selection in coupled CGL equations and experimental implications for counter propagating wave systems. **Physica D**, Amsterdam, v. 134, p. 1-47, Oct. 1999.
- Ka89 KANEKO, K. Chaotic but regular positive-negative switch among coded attractors by cluster-size variation. **Physical Review Letters**, Melville, v. 63, n. 3, p. 219-223, July 1989.
- Ka90 KANEKO, K. Clustering, coding, hierarchical, ordering, and control in a network of chaotic elements. **Physica D**, Amsterdam, v. 41, n. 2, p. 137-172, Mar. 1990.
- Ki80 KIM, M. V. Slow viscous rotation of a sphere on the axis of a circular cone. **Physics of Fluids**, New York, v. 23, n. 6, p. 1268-1269, June 1980.
- RD96 ROBINSON, P. A.; DRYSDALE, P. M. Phase transition between coherent and incoherent three-wave interactions. **Physical Review Letters**, Melville, v. 77, n. 13, p. 2698-2701, Sept. 1996.
- SH00 SERKIN, V. N.; HASEGAWA, A. Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model. **Physical Review Letters**, Melville, v. 85, n. 21, p. 4502-4505, Nov. 2000.
- TCV+98 DI TRAPANI, P. ; CAIRONI, D.; VALIULIS, G.; DUBIETIS, A.; DANIELIUS, R.; PISKARSKAS, A. Observation of temporal solitons in second harmonic generation with tilted pulses. **Physical Review Letters**, Melville, v. 81, n. 3, p. 570-573, July 1998.
- Vi84 VIVALDI, F. Weak instabilities in many-dimensional Hamiltonian systems. **Reviews of Modern Physics**, Woodbury, v. 56, n. 4, p. 737-754, Oct. 1984.
- Za72 ZAKHAROV, V. E. Collapse of Langmuir waves. **Soviet Physics JETP**, New York, v. 35, n. 5, p. 908-914, Nov. 1972.
- ZHC94 ZHOU, C.; HE, X. T.; CAI, T. Pattern structures on generalized nonlinear Schrödinger equations with various nonlinear terms. **Physical Review E**, Melville, v. 50, n. 5, p. 4136-4155, Nov. 1994.