SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
XXVIII SIC
Salão UFRGS 2016
paz no plural

# Métodos de Simetria na resolução de EDO's


**Bianca Yasmine Kroth**

biancakroth@hotmail.com

UFRGS


## Introdução

Em disciplinas da graduação (como MAT01167 - Equações Diferenciais II), estudamos técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO's) que apenas se aplicam às equações lineares. As poucas equações não lineares que conseguimos resolver tem um formato muito específico, pois os métodos utilizados são muito restritivos.

O Método de Simetria é uma ferramenta importante na resolução de EDO's não lineares. A ideia é utilizar simetrias da EDO considerada para encontrar coordenadas mais naturais, onde a equação pode ser resolvida mais facilmente. Em alguns casos, a solução pode ser encontrada explicitamente.

No nosso trabalho, estudamos principalmente a equação de Riccati. Em sua forma mais geral, procuramos por uma função real $y(x)$ que satisfaz

$$\frac{dy}{dx}(x) = a(x) + b(x)y(x) + c(x)(y(x))^2$$

Pelo Método de Simetria, nós resolvemos a equação acima para casos particulares dos coeficientes $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$. Em seguida, analisamos se as mesmas técnicas de simetria podem ser adaptadas para o caso geral.

## O Método

A simetria é um mapeamento de um objeto matemático em si mesmo ou em outro objeto matemático que preserva alguma propriedade do objeto. Uma EDO de 1ª ordem pode ser transformada em uma EDO separável se as curvas de seu conjunto solução forem invariantes por translações em determinado sistema de coordenadas. Porém, nem sempre é possível encontrar estas coordenadas.

As Simetrias de Lie são transformações que levam cada curva solução em outra. Considere um determinado ponto $(x_0, y_0)$ e a ação de um grupo de Simetrias de Lie $P : (x_0, y_0) \to (X_0, Y_0) = (f(x_0, y_0, \lambda), g(x_0, y_0, \lambda))$. Conforme $\lambda$ varia, o ponto $(X_0, Y_0)$ move-se sobre o plano traçando uma curva contínua, levando curvas de solução em outras. Esta curva é chamada órbita de $(x_0, y_0)$ sob o grupo.

Essas órbitas podem ser linearizadas por campos vetoriais. Suponha conhecido um grupo de simetria $P : (x, y) \to (X, Y) = (f(x, y, \lambda), g(x, y, \lambda))$ para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = h(x, y)$ (onde $y = y(x)$). Em seguida, ao longo das órbitas, nós teríamos

$$\frac{dX}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda} = \xi(X, Y), \qquad \frac{dY}{d\lambda} = \frac{dg}{d\lambda} = \eta(X, Y),$$

$$\left( \left.\frac{dX}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}, \left.\frac{dY}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} \right) = (\xi(x, y), \eta(x, y)).$$

As funções $\xi$ e $\eta$, às vezes chamados "os símbolos da transformação infinitesimal"ou "vetores tangentes", são fundamentais para o processo de encontrar novas coordenadas no qual a equação fica simplificada.

Conhecendo a forma explícita $(X, Y) = (f(x, y, \lambda), g(x, y, \lambda))$ da simetria, podemos calcular $h(X, Y)$ usando a derivada total. Assim, temos $\frac{Y_x + h(x, yY_y)}{X_x + h(x, y)X_x} = h(X, Y)$.

Para calcular o campo do vetor do grupo de órbitas, expandimos $X$, $Y$ e $h(X, Y)$ em série de Taylor em torno $\lambda = \lambda_0$:

$$X = x + (\lambda - \lambda_0)\xi(x, y) + O((\lambda - \lambda_0)^2),$$
$$Y = y + (\lambda - \lambda_0)\eta(x, y) + O((\lambda - \lambda_0)^2),$$
$$h(X, Y) = h(x, y) + (\lambda - \lambda_0)(h_x(x, y)\xi(x, y) + h_y(x, y)\eta(x, y)) + O((\lambda - \lambda_0)^2).$$

Ignorando termos de ordem $(\lambda - \lambda_0)^2$ e superior e substituindo estas equações na equação $\frac{Y_x + h(x, y)Y_y}{X_x + h(x, y)X_x} = h(X, Y)$, obtemos a condição de simetria linear de equações diferenciais de primeira ordem

$$\eta_x - \xi_y h^2 + (\eta_y - \xi_x)h - (\xi h_x + \eta h_y) = 0.$$

Esta equação pode ser, em geral, muito difícil de resolver sem que façamos uma suposição sobre a forma das funções. Podemos dizer que este é um ponto fraco do método, embora, muitas vezes, seja mais fácil encontrar essas funções à encontrar a solução da EDO desejada.

Encontrados as funções $\xi$ e $\eta$, obtemos o sistema de coordenadas canônicas $(r, s)$ definindo $\langle \eta, \xi \rangle \cdot \langle r_y, r_x \rangle = 0$, ou seja, temos um sistema de coordenadas no qual um dos parâmetros é constante ao longo das soluções. Dessa forma, $r$ é definido como a integral primeira de $\frac{\xi}{\eta} = \frac{dy}{dx}$ e podemos reescrevê-lo como $r = r(x, y)$ para escrever $y$ como função de $r$ e $x$.

A coordenada $s$ é encontrada de forma parecida através do método das características para $\langle \eta, \xi \rangle \cdot \langle s_y, s_x \rangle = 1$:

$$ds = \frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} \implies s(r, x) = \left. \left( \int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))} \right) \right|_{r=r(x,y)}$$

Nessas equações, $r$ é tratado como uma constante.

Sabendo que $r$ e $s$ são funções de $x$ e $y$ e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + h(x, y)s_y}{r_x + h(x, y)r_y}$$

e, a partir do cálculo desta, chegaremos a uma equação diferencial com dependência apenas em $r$, mais simples de ser resolvida. Por fim, basta expressar a solução nas coordenadas originais.

## Exemplo

A Equação de Riccati estudada é a seguinte

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \qquad \text{com } y = y(x).$$

Fazendo $\frac{dy}{dx} = h(x, y)$ e usando a condição de simetria linear, temos:

$$\eta_x - \xi_y h^2 + (\eta_y - \xi_x)h - (\xi h_x + \eta h_y) = 0.$$

Desenvolvendo esta equação, chegamos a

$$\eta_x - \xi_y\big(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}\big)^2 + (\eta_y - \xi_x)\big(x(y)^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}\big) - \big(\xi\big(y^2 + \frac{2y}{x^2} + \frac{3}{x^4}\big) + \eta\big(2xy - \frac{2}{x}\big)\big) = 0$$

A partir daí, o método exige a suposição de uma forma para as funções $\xi$ e $\eta$. As funções mais naturais que poderíamos testar são do tipo

$$\big[\xi = 0 \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x)\big] \quad \text{ou} \quad \big[\xi = \xi(x) \quad \text{e} \quad \eta = 0\big]$$

$$\text{ou} \quad \big[\xi = 0 \quad \text{e} \quad \eta = \eta(y)\big] \quad \text{ou} \quad \big[\xi = \xi(y) \quad \text{e} \quad \eta = 0\big].$$

No caso da equação de Riccati que estudamos, as funções assumem as seguintes formas para satisfazer a condição de simetria linear

$$\xi = x, \quad \eta = -2y.$$

Conhecendo $\xi$ e $\eta$, queremos $r = \phi(x, y)$, integral primeira de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}.$$

Mas isso nos leva a

$$(\log y)' = -\frac{2}{x}.$$

Por integração, chegamos a $y = Cx^{-2}$. Podemos reescrever essa equação para obtermos $C = yx^2$, e portanto, $r = yx^2$.

Agora, para encontrarmos $s(x, y)$ basta resolver a integral apontada pelo método e teremos $s = \log x$. Além disso,

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + h(x, y)s_y}{r_x + h(x, y)r_y} \iff \frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x}}{2xy + \left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}\right)x^2} = \frac{1}{x^4y^2 - 1} = \frac{1}{r^2 - 1}.$$

Como esperado, a equação nos dá $\frac{ds}{dr}$ como função apenas de $r$, que pode facilmente ser resolvida, nos dando

$$s(r) = \log\left( C\sqrt{\frac{r - 1}{r + 1}} \right).$$

Retornando esta equação às coordenadas originais do problema, encontramos a solução procurada:

$$\log x = \log\left( C\sqrt{\frac{yx^2 - 1}{yx^2 + 1}} \right) \iff x^2 = C\frac{yx^2 - 1}{yx^2 + 1} \iff y(x) = \frac{C + x^2}{x^2(C - x^2)}.$$

## Conclusões

Percebemos que o método é trabalhoso e envolve a resolução de algumas EDO's, porém, mais simples de resolver comparado com nossa equação inicial.

É interessante notar que este método é a base de outros métodos usados na resolução de EDO's de primeira ordem mais simples, como as Equações de Bernoulli. Nesse caso, usamos uma transformação de variáveis que nos leva a um novo sistema de coordenadas, onde a equação diferencial pode ser resolvida mais naturalmente.

## Referências


[1] Peter E. Hydon. *Symmetry methods for differential equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[2] John Starrett. *Solving Differential Equations by Symmetry Groups*. Notas de aula http://euler.nmt.edu/~jstarret/05-649LieGroupODEFinalVersion.pdf, página visitada em 11/08/2016.