UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

O Teorema de Pitágoras na Geometria Esférica

Victória Corrêa Alves

Orientadora: Miriam Telichevesky

Introdução: A geometria esférica é definida como uma geometria na superfície de uma esfera. Ela surge a partir de discussões sobre o quinto postulado de Euclides, nessa geometria temos que dada uma reta r e um ponto P fora dessa reta não existe uma reta paralela a r passando por P, diferentemente da geometria euclidiana e hiperbólica. Neste trabalho trataremos sobre alguns conceitos importantes da geometria esférica e veremos a versão esférica do teorema de Pitágoras.

Denotamos o espaço Euclideano tridimensional por P.

Definição: Dado um ponto O em P e um número real r chamamos de esfera centrada em O com raio r o subconjunto S de P onde os elementos são pontos M tais que a distância OM vale r.

$$M \in S \iff x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Definição: um círculo máximo de uma esfera S é uma intersecção de S com o plano contendo o centro O da esfera.

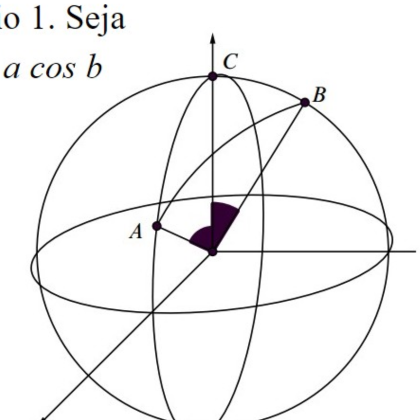
Definição: Sejam A, B pontos em S. A distância na esfera de A até B, denotamos por por $\widehat{AB}$, é o comprimento do menor arco de círculo máximo entre A e B.

Teorema: Seja O o centro da esfera S de raio 1. A distância $c=\widehat{AB}$ entre dois pontos A e B é tal que $\cos c = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

Dem.: Sejam $A(x_A,y_A,z_A)$ e $B(x_B,y_B,z_B)$ pontos na esfera S de centro O e raio 1. O comprimento l_{AB} do arco AB é igual ao ângulo entre os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, chamaremos de θ. Seja c o somprimento l_{AB} do arco AB. Segue que:

$$\cos\theta = \cos c = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B \square$$

Teorema de Pitágoras: Seja ABC um triângulo esférico em S, com raio 1. Seja $c=\widehat{AB}$, $a=\widehat{BC}$ e $b=\widehat{CA}$ e o ângulo em C é ortogonal. Então $\cos c = \cos a \cos b$



Dem.: Escolhemos o referencial ortonormal (O,i,j,k) tal que $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{OC}$, A pertence ao semiplano xOz, x>0 e B pertence ao semiplano yOz, y>0. As coordenadas serão C(0,0,1), A(sen a,0,cos a) e B(0,sen b,cos b). Então:

$$\cos c = \operatorname{sen} a * 0 + 0 * \operatorname{sen} b + \cos a * \cos b = \cos a \cos b \quad \square$$

Referências:

Eric Lehman, Spherical Geometry. Disponível em: <http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/SphericalGeometry/SphericalGeometryTotalLectureNotes2012.pdf>. Acesso em: 02/08/2016

John C. Poling, The Geometry of the Sphere. Disponível em: <http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/>. Acesso em: 02/08/2016