Aproximação por Medidas Atômicas

Luísa Bürgel Borsato[1]

[1]Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Resultados preliminares

Propriedade da Especificação. Seja $f\colon M\to M$ função expansora topologicamente exata, com M compacto. Então, dado qualquer $\varepsilon>0$, existe $k\geq 1$ tal que, dado quaisquer $x_1,\dots,x_s\in M$, quaisquer $n_1,\dots,n_s\geq 1$ e quaisquer $k_1,\dots,k_s\geq k$, existe um ponto $p\in M$ tal que, escrevendo $m_j=\sum_{i=1}^{j} n_i+k_i$ para $j\in 1,\dots,s$ e $m_0=0$:

(i) $d(f^{m_{j-1}+i}(p),f^i(x_j))\leq\varepsilon$, para $0\leq i<n_j$ e $1\leq j\leq s$.

(ii) $f^{m_s}(p)=p$.

Proposição. Sejam $\psi_1,\dots,\psi_N\colon M\to\mathbb{R}$ funções mensuráveis e limitadas em um espaço de probabilidade $(M,\mathbb{B},\mu)$. Então dado $\varepsilon>0$, existem $x_1,\dots,x_s\in M$ e números positivos $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ tais que $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1$ e

$$\Big|\int\psi_j d\mu-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\psi_j(x_i)\Big|<\varepsilon$$

para todo $j=1,\dots,N$.

Aproximação por Medidas Atômicas

Dado um ponto periódico $p\in M$ de período n, considere a medida

$$\mu_p=\frac{1}{n}(\delta_p+\dots+\delta_{f^{n+1}(p)}).$$

Teorema. Dada $f\colon M\to M$ uma aproximação expansora e M compacto. Então toda probabilidade invariante μ pode ser aproximada por probabilidades invariantes suportadas em órbitas periódicas na topologia fraca-$*$.

Demonstração. Seja $\varepsilon>0$ e $\phi=\{\phi_1,\dots,\phi_N\}$ uma família finita de funções contínuas e limitadas em M.

Nosso objetivo é provar que existe $\mu_p\in V(\mu,\phi,\varepsilon)$ suportada em uma órbita periódica.

Temos que

$$\tilde\phi_i(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi_i(f^j(x))$$

existe μ quase todo ponto para todo i, pelo Teorema de Birkhoff. Como ϕ_i são limitadas, fixe $c\in\mathbb{R}$ de modo que $c>\sup|\phi_i|\geq\sup|\tilde\phi_i|$.

Escolha $\delta>0$ tal que

$$d(x,y)<\delta\implies d(\phi_i(x),\phi_i(y))<\frac{\varepsilon}{5}$$

para todo i.

A existência deste δ é garantida pela continuidade das ϕ_i e pela compacidade de M.

Fixe $k=k(\delta)\geq 1$ dado pela propriedade de especificação. Escolha $x_j, 1\leq j\leq s$ pontos satisfazendo o Teorema de Birkhoff e também escolha $\alpha_j\in\mathbb{R}$ tais que $\sum_{j=1}^{s}\alpha_j=1$ com

$$\Big|\int\tilde\phi_i d\mu-\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\tilde\phi_i(x_j)\Big|<\frac{\varepsilon}{5}$$

para todo i.

Na propriedade de especificação, escolha $k_j=k$, $j=1,\dots,s$, e $n_j>>k$ tais que

$$\Big|\frac{n_j}{m_s}-\alpha_j\Big|<\frac{\varepsilon}{5cs}$$

Portanto,

$$\Big|\sum_{t=0}^{n_j+1}\phi_i(f^t(x_j))-n_j\tilde\phi_i(x_j)\Big|<\frac{\varepsilon}{5}n_j$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\phi_i d\mu-\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{m_s}\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&=\Big|\int\tilde\phi_i d\mu-\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{m_s}\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&\leq\Big|\int\tilde\phi_i d\mu-\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&\qquad+\Big|\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\tilde\phi_i(x_j)-\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{m_s}\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&<\frac{\varepsilon}{5}+\Big|\sum_{j=1}^{s}(\alpha_j-\frac{n_j}{m_s})\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&\leq\frac{\varepsilon}{5}+\sum_{j=1}^{s}\Big|(\alpha_j-\frac{n_j}{m_s})\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&=\frac{\varepsilon}{5}+\sum_{j=1}^{s}\Big|\alpha_j-\frac{n_j}{m_s}\Big||\tilde\phi_i(x_j)|\\
&<\frac{\varepsilon}{5}+\sum_{j=1}^{s}\frac{\varepsilon}{5cs}c\\
&=\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\frac{2\varepsilon}{5}
\end{aligned}$$

Pela propriedade de especificacão, existe um ponto p de período m_s tal que

$$d(f^{m_{j-1}+k}(p),f^k(x_j))<\delta, 0\leq k<n_j, 1\leq j<s$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{t=o}^{n_j-1}\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))-n_j\tilde\phi_i(x_j)\Big|\leq\\
&\leq\Big|\sum_{t=0}^{n_j-1}\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))-\sum_{t=0}^{n_j-1}\phi_i(f^t(x_j))\Big|\\
&\qquad+\Big|\sum_{t=0}^{n_j-1}\phi_i(f^t(x_j))-n_j\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&<\Big|\sum_{t=0}^{n_j-1}\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))-\sum_{t=0}^{n_j-1}\phi_i(f^t(x_j))\Big|+\frac{\varepsilon}{5}n_j\\
&=\Big|\sum_{t=0}^{n_j-1}\Big(\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))-\phi_i(f^t(x_j))\Big)\Big|+\frac{\varepsilon}{5}n_j\\
&\leq\sum_{t=0}^{n_j-1}\Big|\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))-\phi_i(f^t(x_j))\Big|+\frac{\varepsilon}{5}n_j\\
&<\sum_{t=0}^{n_j-1}\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}\\
&=\frac{\varepsilon}{5}n_j+\frac{\varepsilon}{5}n_j=\frac{2\varepsilon}{5}n_j
\end{aligned}$$

Como temos que

$$m_s=\sum_{j=1}^{s}(n_j+k_j)=\sum_{j=1}^{s}(n_j+k)=\sum_{j=1}^{s}n_j+sk$$

e

$$sk=m_s-\sum_{j=1}^{s}n_j$$

vale que

$$\begin{aligned}
sk=|sk|&=\Big|m_s-\sum_{j=1}^{s}n_j\Big|=\Big|m_s\Big(1-\frac{1}{m_s}\sum_{j=1}^{s}n_j\Big)\Big|\\
&=\Big|m_s\Big(\sum_{j=1}^{s}\alpha_j-\frac{1}{m_s}\sum_{j=1}^{s}n_j\Big)\Big|\\
&=|m_s|\Big|\sum_{j=1}^{s}(\alpha_j-\frac{n_j}{m_s})\Big|\leq m_s\sum_{j=1}^{s}\Big|\alpha_j-\frac{n_j}{m_s}\Big|\\
&<m_s\sum_{j=1}^{s}\frac{\varepsilon}{5cs}=m_s\frac{\varepsilon}{5c}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{t=0}^{m_s-1}\phi_i(f^t(p))-\sum_{j=1}^{s}n_j\tilde\phi_j(x_j)\Big|\\
&\leq\Big|\sum_{t=0}^{m_s-1}\phi_i(f^t(p))-\sum_{j=1}^{s}\sum_{t=0}^{n_j-1}\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))\Big|\\
&\qquad+\Big|\sum_{j=1}^{s}\sum_{t=0}^{n_j-1}\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))-\sum_{j=1}^{s}n_j\tilde\phi_j(x_j)\Big|\\
&\leq sk\sup|\tilde\phi_i|\\
&\qquad+\Big|\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{t=0}n_j-1\big(\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))-n_j\tilde\phi_j(x_j)\big)\Big)\Big|\\
&\leq sk\sup|\tilde\phi_i|+\sum_{j=1}^{s}\Big|\sum_{t=0}^{n_j-1}\phi_i(f^{m_{j-1}+t}(p))-n_j\tilde\phi_j(x_j)\Big|\\
&\leq sk\sup\tilde\phi_i+\sum_{j=1}^{s}\frac{2\varepsilon}{5}n_j\\
&<skc+\frac{2\varepsilon}{5}m_s\\
&<\frac{\varepsilon}{5c}m_sc+\frac{2\varepsilon}{5}m_s=\frac{3\varepsilon}{5}m_s.
\end{aligned}$$

Seja μ_p a probabilidade invariante suportada na órbita de p.

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\phi_i d\mu_p-\int\phi_i d\mu\Big|\\
&\leq\Big|\int\phi_i d\mu_p-\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{m_s}\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&\qquad+\Big|\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{m_s}\tilde\phi_i(x_j)-\int\phi_i d\mu\Big|\\
&=\Big|\frac{1}{m_s}\sum_{t=0}^{m_s-1}\phi_i(f^t(p))-\frac{1}{m_s}\sum_{j=1}^{s}n_j\tilde\phi_i(x_j)\Big|\\
&\qquad+\Big|\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{m_s}\tilde\phi_i(x_j)-\int\phi_i d\mu\Big|\\
&\leq\frac{1}{m_s}\Big|\sum_{t=0}^{m_s-1}\phi_i(f^t(p))-\sum_{j=1}^{s}n_j\tilde\phi_i(x_j)\Big|+\frac{2\varepsilon}{5}\\
&<\frac{1}{m_s}\Big(\frac{3\varepsilon}{5}m_s\Big)+\frac{2\varepsilon}{5}=\varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $1\leq i\leq N$.

Logo, $\mu_p\in V(\mu,\phi,\varepsilon)$.

Bibliografia

[1] Oliveira, K., Viana, M.; Fundamentos da Teoria Ergódica, *Sociedade Brasileira de Matemática*