

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Plasma de Quarks e Glúons no Interior de  
Estrelas de Nêutrons**

Rafael Bán Jacobsen



Porto Alegre, Abril de 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

Plasma de Quarks e Glúons no Interior de  
Estrelas de Nêutrons <sup>†</sup>

Rafael Bán Jacobsen

*Dissertação realizada sob a orientação do Prof.  
Dr. César Augusto Zen Vasconcellos, apre-  
sentada ao Instituto de Física da UFRGS em  
preenchimento parcial dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Física.*

*Porto Alegre, Abril de 2007.*

---

<sup>†</sup>Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).



*Is this a dagger which I see before me? (Shakespeare - MACBETH)*

# Agradecimentos

Ao se concluir uma importante jornada, é impossível deixar de lembrar aqueles que estiveram presentes ao longo dela.

Por essa razão, agradeço primeiramente a Deus, por ter-me concedido o maravilhoso dom da vida e por ter colocado tantas boas oportunidades em meu caminho.

À minha família, por ter me apoiado de todas as formas possíveis depois de passado o susto de ver o futuro médico da família transformar-se em um cientista maluco.

No âmbito acadêmico, agradeço ao professor César Augusto Zen Vasconcellos, pelos anos de incentivo e pela excelente orientação. Ao professor Bardo Bodmann, pelo inestimável auxílio na etapa final e na revisão. Aos colegas do Grupo de Hádrons, Fernando Pilotto, Moisés Razeira, Guilherme Marranghello e André Taurines, pelos muitos esclarecimentos e pela disponibilidade. Em especial, para minha colega de mestrado Verônica Antocheviz Dexheimer, pelas muitas horas de estudo e trabalho compartilhado, desbravando os mistérios da Física Nuclear e de Partículas. Aos alunos de iniciação científica do grupo, Gustavo Gil da Silveira, Maurício Grohmann e Lucas Norberto Burigo, que serviram de cobaias para minha aprendizagem de didática e que, com suas perguntas e seu interesse, me motivaram a buscar sempre mais conhecimento.

Agradeço, também, aos amigos cogumelistas, com quem passei muitas noites em claro em prol da Física: Pedro Castro Menezes Xavier de Mello e Silva, Rodrigo Nemmen da Silva e Emmanuel Gräve de Oliveira.

Rafael Bán Jacobsen

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul*

*Abril de 2007*

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo da matéria nuclear em altas densidades, considerando-se as fases hadrônica e de quarks à temperatura nula, com a perspectiva de aplicar o formalismo desenvolvido no trabalho à análise das propriedades estáticas globais das estrelas de nêutrons.

No trabalho, depois de apresentarmos aspectos importantes da evolução estelar e da teoria das estrelas de nêutrons, estudamos as propriedades e os modelos da matéria nuclear. No estudo da matéria nuclear para a fase hadrônica, consideramos os modelos relativísticos da teoria quântica de campos nucleares desenvolvida por J. D. Walecka, J. Zimanyi e S. A. Moszkowski, e por J. Boguta e A. R. Bodmer, também conhecidos, respectivamente, como modelos Sigma-ômega, ZM e Não-linear. Nesses modelos, a matéria nuclear é descrita a partir de uma formulação lagrangeana relativística de muitos corpos, com os campos efetivos dos bárions acoplados aos campos dos mésons, responsáveis pela interação nuclear.

Nesse estudo, consideramos, inicialmente, a descrição de propriedades estáticas globais de sistemas nucleares de muitos corpos à temperatura nula, como, por exemplo, a massa efetiva do núcleon para matéria nuclear simétrica e matéria de nêutrons. O conhecimento da equação de estado da matéria de nêutrons torna possível a descrição de propriedades estáticas globais de uma estrela de nêutrons, como sua massa e seu raio, através das equações de Tolman, Oppenheimer e Volkoff. Os resultados obtidos neste trabalho estão em plena concordância com os resultados apresentados por outros autores.

Posteriormente, incorporamos ao formalismo as equações de equilíbrio químico, a presença de graus de liberdade leptônicos de elétrons e múons, o octeto bariônico fundamental e a condição de neutralidade de carga. Nossa escolha para as constantes de acoplamento dos híperons está baseada na simetria  $SU(6)$  e nas regras de contagem para quarks. A consideração, no formalismo, do equilíbrio beta generalizado entre as partículas gera um sistema de onze equações acopladas que deve ser resolvido numericamente para se encontrar as diferentes populações fermiônicas.

Por fim, estudamos um modelo fenomenológico para a matéria nuclear com acoplamento derivativo ajustável, no qual a intensidade dos acoplamentos méson-núcleon é parametrizada por expressões matemáticas com coeficientes ajustáveis. Estudamos a influência desses acoplamentos na determinação das principais propriedades nucleares e nas propriedades estáticas globais das estrelas de nêutrons. Esse modelo é o que utilizamos, na parte final do trabalho, para desenvolver nosso estudo da transição de fase entre matéria hadrônica e matéria de quarks livres, usando o critério de Gibbs.

No estudo da matéria de quarks, consideramos o modelo de sacola desenvolvido no Massachusetts Institute of Technology (MIT) por A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn e V. F. Weisskopf.

Como resultado principal, determinamos uma equação de estado geral para a matéria hadrônica e para a matéria de quarks e analisamos condições de equilíbrio de estrelas híbridas. Enfocamos, então, a influência dos acoplamentos do modelo ajustável na determinação da densidade bariônica em que ocorre a transição de fase. Analisamos, também, como a existência de um caroço de quarks na estrela repercute em suas propriedades estáticas globais (tais como raio e massa máxima) e na propriedade termodinâmica conhecida como índice adiabático. Os resultados obtidos nessa etapa do trabalho, embora inéditos, são coerentes com aqueles obtidos por outros autores.

# Abstract

The purpose of this work is the study of nuclear matter at high densities considering the hadronic and quark phases at zero temperature, with the perspective of applying the developed formalism to the analysis of global static properties of neutron stars.

In this work, after presenting important aspects of stellar evolution and neutron star theory, we study the properties and models of nuclear matter. In the nuclear matter studies for the hadronic phase, we have considered the relativistic nuclear quantum field theory developed by J. D. Walecka, J. Zimanyi and S. A. Moszkowski, and by J. Boguta and A. R. Bodmer, also known, respectively, as Sigma-omega, ZM and Non-linear models. In these models the nuclear matter is described by a relativistic and strong interaction lagrangian many-body formulation with baryon effective fields coupled to scalar, vector and iso-vector mesons.

In this study we consider initially the description of global static properties of many-body nuclear systems at zero temperature as, for instance, the nucleon effective mass for symmetric nuclear and neutron matter. Knowledge of the neutron matter equation of state makes it possible the description of global static properties of a neutron star, such as its mass and radius, through the Tolman, Oppenheimer and Volkoff equations. The results we have obtained in this work are in agreement with the corresponding ones presented by other authors.

We have further included into the formalism the chemical equilibrium equations, lepton degrees of freedom for electrons and muons, the fundamental octet of baryons and the charge neutrality condition. Our choice for the hyperonic coupling constants is based on the SU(6) symmetry and on the counting rules for quarks. The consideration of generalized beta equilibrium among the particles in our formalism generates a strongly coupled system of eleven equations to be numerically solved to find the different fermionic populations.

At last we study a phenomenological lagrangian model of nuclear matter with adjustable derivative coupling, which exhibits a parametrization, through mathematical expressions with adjustable coefficients, of the intensity of the meson-nucleon coupling. We study the influence of these couplings in the determination of the main nuclear properties and global static properties of neutron stars. This model is the one we use to develop our study of the hadronic matter to quark matter phase transition in the last part of our work, using the Gibbs criteria.

In the quark matter study, we have considered the bag model developed in the Massachusetts Institute of Technology (MIT) by A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf.

As a main result, we have determined a general equation of state for hadronic and quark matter, and we have analyzed the equilibrium conditions for hybrid stars. We have

then focused the influence of the adjustable model couplings in the determination of the phase transition baryon density. We have also analyzed how the existence of the quark-gluon plasma core in the star repercutes in its global static properties (such as radius and maximum mass) and in the thermodynamical property known as the adiabatic index. The predictions of our work, even though based on new results, are in complete agreement with the corresponding ones obtained by other authors.



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Evolução Estelar e Estrelas de Nêutrons</b>	<b>14</b>
1.1 Introdução . . . . .	14
1.2 Formação e Vida na Sequência Principal . . . . .	15
1.3 Estágios Finais de Evolução Estelar . . . . .	19
1.3.1 Anãs Brancas . . . . .	19
1.3.2 Estrelas de Nêutrons . . . . .	21
1.3.3 Buracos Negros . . . . .	23
1.4 Teoria das Estrelas de Nêutrons . . . . .	25
1.4.1 Um Breve Histórico . . . . .	25
1.4.2 Evidências Experimentais: Pulsares . . . . .	26
1.4.3 Estrutura . . . . .	31
1.4.4 Condições de Equilíbrio . . . . .	34
<b>2 Modelos da Hadrodinâmica Quântica</b>	<b>44</b>
2.1 Introdução . . . . .	44
2.2 Propriedades da Matéria Nuclear . . . . .	45
2.3 Modelo de Walecka . . . . .	49
2.3.1 Lagrangeano . . . . .	49
2.3.2 Equações de Campo . . . . .	52
2.3.3 Tensor Energia-Momentum . . . . .	54
2.3.4 Aproximação de Campo Médio . . . . .	55
2.3.5 Equação de Estado da Matéria Nuclear . . . . .	57
2.3.6 Constantes de Acoplamento . . . . .	67
2.3.7 Introdução do Méson $\rho$ . . . . .	77
2.3.8 Generalização para o Octeto Bariônico . . . . .	82
2.4 Modelo Não-Linear de Boguta-Bodmer . . . . .	84
2.5 Modelos com Acoplamento Derivativo (ZM) . . . . .	85
2.6 Modelo com Acoplamento Ajustável . . . . .	86
2.6.1 Lagrangeano . . . . .	87

2.6.2	Equações de Campo . . . . .	89
2.6.3	Tensor Energia-Momentum . . . . .	93
2.6.4	Aproximação de Campo Médio . . . . .	93
2.6.5	Equação de Estado da Matéria Nuclear . . . . .	95
2.6.6	Constantes de Acoplamento . . . . .	99
2.6.7	Populações de Partículas . . . . .	108
<b>3</b>	<b>Matéria de Quarks</b>	<b>115</b>
3.1	Introdução . . . . .	115
3.2	Os Quarks . . . . .	115
3.2.1	O Caminho Óctuplo . . . . .	115
3.2.2	O Modelo do Quark . . . . .	116
3.3	O Plasma de Quarks e Glúons . . . . .	122
3.3.1	Fundamento Teórico . . . . .	122
3.3.2	Evidências Experimentais . . . . .	126
3.4	Modelo de Sacola (MIT) . . . . .	128
3.4.1	Densidade Lagrangeana . . . . .	128
3.4.2	Equação de Estado . . . . .	129
3.5	Matéria Estelar de Quarks . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Transição de Fase no Interior de Estrelas de Nêutrons</b>	<b>136</b>
4.1	Introdução . . . . .	136
4.2	A Transição de Fase . . . . .	137
4.2.1	Dinâmica da Transição . . . . .	137
4.2.2	Termodinâmica da Transição . . . . .	138
4.2.3	Metodologia do Cálculo . . . . .	141
4.3	Estudo da Densidade de Transição de Fase . . . . .	142
4.4	Estudo do Coeficiente Adiabático . . . . .	147
4.4.1	O Coeficiente Adiabático . . . . .	147
4.4.2	Coeficiente Adiabático de uma Estrela de Nêutrons . . . . .	151
4.4.3	Coeficiente Adiabático de uma Estrela Híbrida . . . . .	160
4.5	Massa e Raio das Estrelas . . . . .	162
4.5.1	Massa e Raio de Estrelas de Nêutrons . . . . .	162
4.5.2	Massa e Raio de Estrelas Híbridas . . . . .	166
	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>170</b>
<b>A</b>	<b>Unidades, Notação e Convenções</b>	<b>175</b>
A.1	Sistemas Natural e Relativístico de Unidades . . . . .	175
A.2	Métrica . . . . .	178

A.3	Matrizes de Pauli . . . . .	178
A.4	Matrizes de Dirac . . . . .	179
A.5	Equação de Einstein e Espaços Curvos . . . . .	180
<b>B</b>	<b>Equações de Equilíbrio Químico</b>	<b>181</b>
<b>C</b>	<b>Teorema de Noether</b>	<b>184</b>
<b>D</b>	<b>Publicação</b>	<b>186</b>
<b>E</b>	<b>Documentação dos Programas</b>	<b>199</b>
E.1	Programa 1 . . . . .	199
E.2	Programa 2 . . . . .	201
E.3	Programa 3 . . . . .	202
E.4	Programa 4 . . . . .	204
E.5	Programa 5 . . . . .	207
E.6	Programa 6 . . . . .	214
E.7	Programa 7 . . . . .	241
E.8	Programa 8 . . . . .	251
E.9	Programa 9 . . . . .	253
<b>F</b>	<b>Estabilidade em Polítropos Clássicos</b>	<b>261</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>263</b>

# Lista de Figuras

1.1	A Nebulosa Cabeça-de-Cavalo em Orion . . . . .	16
1.2	Energia de ligação por núcleon . . . . .	17
1.3	Esquema de evolução estelar para diferentes massas . . . . .	18
1.4	Representação da estrutura de uma anã branca. . . . .	20
1.5	A nebulosa do Caranguejo . . . . .	27
1.6	Pulsar da nebulosa do Caranguejo . . . . .	28
1.7	Representação da estrutura de um pulsar . . . . .	31
1.8	Massas de pulsares observados . . . . .	32
1.9	Representação da estrutura de uma estrela de nêutrons . . . . .	33
1.10	Estrutura teórica de regiões de estabilidade para estrelas compactas . . . . .	38
1.11	Resultado hipotético das equações TOV para estrelas de nêutrons . . . . .	39
2.1	Comportamento do potencial nuclear de Yukawa . . . . .	51
2.2	Caixa de volume $V$ preenchida uniformemente com $B$ bárions . . . . .	58
2.3	Massa efetiva do núcleon para matéria de nêutrons no modelo de Walecka . . . . .	71
2.4	Massa efetiva do núcleon para matéria nuclear no modelo de Walecka . . . . .	72
2.5	Energia de ligação por núcleon da matéria de nêutrons no modelo de Walecka . . . . .	73
2.6	Energia de ligação por núcleon da matéria nuclear no modelo de Walecka . . . . .	74
2.7	Equação de estado da matéria de nêutrons no modelo de Walecka . . . . .	75
2.8	Equação de estado da matéria nuclear no modelo de Walecka . . . . .	76
2.9	Massa efetiva e compressibilidade no modelo ajustável . . . . .	102
2.10	Massa efetiva no modelo ajustável . . . . .	103
2.11	Constante de acoplamento do méson $\sigma$ no modelo ajustável . . . . .	104
2.12	Constante de acoplamento do méson $\omega$ no modelo ajustável . . . . .	105
2.13	Constante de acoplamento do méson $\rho$ no modelo ajustável . . . . .	106
2.14	Módulo de compressibilidade no modelo ajustável . . . . .	107
3.1	A figura do caminho óctuplo para bárions . . . . .	120
3.2	A figura do caminho óctuplo para mésons . . . . .	120
3.3	Composições de quarks dos bárions . . . . .	121
3.4	Composições de quarks dos mésons . . . . .	121
3.5	Coleção de núcleons na fase hadrônica e na fase de QGP . . . . .	123

3.6	Densidade de energia da matéria nuclear em função da temperatura . . . . .	125
3.7	Colisão de dois núcleons em alta energia . . . . .	126
4.1	Equações de estado com transição de fase (esquema) . . . . .	139
4.2	Pressão $\times$ potencial químico para matéria hadrônica e matéria de quarks .	143
4.3	Pressão $\times$ densidade na vizinhança de uma transição de fase de 1 <sup>a</sup> ordem .	144
4.4	Equações de estado com transição de fase de 1 <sup>a</sup> ordem . . . . .	145
4.5	Densidade de transição de fase no modelo ajustável escalar . . . . .	146
4.6	Populações de partículas no modelo ajustável escalar ( $\lambda = 0.07$ ) . . . . .	153
4.7	Índice adiabático no modelo ajustável escalar ( $\lambda = 0.07$ ) . . . . .	154
4.8	Populações de partículas no modelo ajustável escalar ( $\lambda = 0.11$ ) . . . . .	155
4.9	Índice adiabático no modelo ajustável escalar ( $\lambda = 0.11$ ) . . . . .	156
4.10	Populações de partículas no modelo ajustável escalar ( $\lambda = 0.22$ ) . . . . .	157
4.11	Índice adiabático no modelo ajustável escalar ( $\lambda = 0.22$ ) . . . . .	158
4.12	Densidade limiar de criação de partículas no modelo ajustável . . . . .	159
4.13	Índice adiabático para sistema com transição de fase . . . . .	161
4.14	Raio máximo de estrelas de nêutrons em função do parâmetro ajustável $\lambda$ .	163
4.15	Massa máxima de estrelas de nêutrons em função do parâmetro ajustável $\lambda$	164
4.16	<i>Redshift</i> de estrelas de nêutrons em função do parâmetro ajustável $\lambda$ . . . .	165
4.17	Raio máximo de estrelas de nêutrons e estrelas híbridas . . . . .	167
4.18	Massa máxima de estrelas de nêutrons e estrelas híbridas . . . . .	168
4.19	<i>Redshift</i> de estrelas de nêutrons e estrelas híbridas . . . . .	169

# Lista de Tabelas

1.1	Características dos diferentes estágios finais de evolução estelar . . . . .	25
1.2	Bárions de mais baixa massa . . . . .	43
2.1	Características das partículas presentes no modelo de Walecka . . . . .	49
3.1	Mésons de spin nulo . . . . .	116
3.2	Propriedades dos quarks . . . . .	119
3.3	Propriedades dos antiquarks . . . . .	119
3.4	Partículas fundamentais e respectivas massas aproximadas . . . . .	119

# Introdução

A idéia de átomo foi concebida pela primeira vez, no mundo ocidental, pelos filósofos da Grécia Antiga, a partir dos anos 600 A.C. *Em toda a história, nada é tão surpreendente ou tão difícil de explicar como a súbita eclosão da civilização na Grécia*, escreve Bertrand Russell.

Se, durante milhares de anos, elementos dessa civilização já existiam no Egito, na Mesopotâmia e áreas vizinhas, coube aos gregos inventar a matemática (pelo menos no tocante ao legado dos alicerces do pensamento axiomático), a filosofia, a especulação científica sobre a natureza das coisas, dos corpos celestes, do mundo, sem a herança de preconceitos restritivos. E, ao lado da filosofia e da ciência, souberam desenvolver a imaginação, a arte, a religião. A Pitágoras, nos anos 500 A.C., atribui-se a origem da palavra *teoria*, um estado de contemplação com afinidade e paixão, origem do conhecimento matemático e da física teórica. Em Tales, fundador da Escola de Mileto, encontramos a idéia da existência de uma substância primordial, um elemento fundamental do qual seriam feitas todas as coisas, que ele identificou com a água.

Anaximandro, de Mileto, por sua vez, afirmou que todas as coisas são feitas de uma substância fundamental, que não é a água, nem nenhum dos corpos que conhecemos — é infinita, eterna e compõe todos os mundos, o nosso mundo sendo apenas um dentre muitos. Existiria, segundo Anaximandro, uma porção definida de fogo, terra e água; cada um desses elementos, concebidos como deuses, tenta dominar os outros mas sua proporção obedece a uma fatalidade, a uma certa necessidade — e essa necessidade de proporção entre esses elementos constituiria, segundo certos filósofos, a origem da noção de *lei da natureza*.

Para Anaximenes, o terceiro pensador de Mileto (antes de 494 A.C.), a substância primordial é o ar: fogo é ar rarefeito; ao se condensar, o ar se transforma em água, e esta, por sua vez, se condensa em pedras, na terra.

Os filósofos gregos fundadores do atomismo foram Leucipo (cerca de 440 A.C.) e Demócrito (420 A.C.), influenciados pelo monismo<sup>3</sup> de Parmênides e de Zenão. Eles postularam que todas as coisas são compostas de entidades chamadas *átomos* (*indivisível*, em

---

<sup>3</sup> *Monismo* — concepção que remonta à doutrina dos filósofos pré-socráticos gregos da escola de Eléia, segundo a qual a realidade é constituída por um princípio único, um fundamento elementar, sendo os múltiplos seres redutíveis, em última instância, a essa unidade.

grego), que se movimentam incessantemente no vácuo, sempre estiveram e sempre estarão animados de movimento. A constituição atômica justifica as diferenças de densidade dos corpos, e as transformações que se processam no mundo são consequência das mudanças no tempo das distâncias entre átomos. Estes são indivisíveis, rígidos e impenetráveis.

Os atomistas gregos não tinham dados empíricos para fundamentar suas especulações, mas, em sua época, não se fazia diferença entre observações dos fatos e raciocínio lógico, ou antes, este era tão válido quanto os dados empíricos, se não mais válido do que eles. Exemplo claro disso é a documentação da teoria atômica feita por Aristóteles em sua obra *Da Geração e Corrupção, I, 2. 316 a 13* [2]:

Mas parece que Demócrito se persuadiu com argumentos próprios da Física. Ficará claro o que dizemos no que segue. Pois há dificuldade se se põe um corpo, uma grandeza de todo divisível, em admitir se isso é possível. Pois que será o que escape à divisão? Se de todo fosse divisível e isso fosse possível, então ao mesmo tempo poderia ser dividido inteiramente, embora não seja dividido efetivamente ao mesmo tempo. E, se isto acontecesse, (o) nada seria impossível. Assim também acontece em relação à metade. E em geral se naturalmente é de todo divisível, e se fosse dividida (o) nada resultaria impossível, nem mesmo quando fosse dividida inúmeras vezes, até o infinito, (o) nada seria impossível; embora talvez ninguém a divida assim. Desde que, portanto, o corpo tem tal propriedade de divisão total, que seja dividido. Que restará então? Uma grandeza? Não é possível, pois será algo não dividido, e a grandeza era (teoricamente) de todo divisível. Mas, se nada for mais corpo nem grandeza e a divisão persistir, esta ou será a partir de pontos, e sem grandeza será aquilo de que se compõem as coisas, ou então não será absolutamente nada, de modo que do nada nasceriam e se constituiriam, e o todo nada mais seria senão aparência. E igualmente, se fosse a partir de pontos, não haveria quantidade. Pois, quando estes se tocassem e fossem uma grandeza e fossem juntos, em nada tornariam maior o todo; pois este, dividido em dois ou mais pontos, não seria maior nem menor que antes, de modo que todos os pontos reunidos não constituiriam nem uma grandeza. E mesmo se de um corpo dividido algo se engendra como serragem, e assim se destaca da grandeza como um corpo, é a mesma questão. Pois como aquela grandeza é divisível? Se não foi um corpo, mas uma forma separável ou uma afecção o que se destacou e a grandeza são pontos ou tatos assim afetados, é absurdo que uma grandeza provenha de não-grandezas. E, ademais, onde estariam os pontos? E seriam imóveis ou movimentados? E o tato é sempre um entre duas coisas, havendo pois algo além do contato, da divisão e do ponto. Se então alguém puser um corpo, qualquer que seja, é totalmente divisível, seguem estas consequências. E ainda, se, tendo dividido, eu componho madeira ou qualquer outro corpo,



novamente serão o mesmo e um só. E evidentemente é assim mesmo que eu corte a madeira em qualquer ponto. Assim, então, ela é totalmente dividida em potência. Que há então além da divisão? Se o que há é alguma afecção, como o corpo se dissolve nessas afecções, e como delas se forma? Ou como estas se separam? Logo, se é impossível à grandeza constituir-se de tatos ou de pontos, é necessário que haja corpos e grandezas indivisíveis.

O que dizemos hoje? Os primeiros elementos de todas as coisas são certas famílias de *léptons* e *quarks* e certos *campos de calibre* que determinam suas interações e obedecem a certas simetrias; a violação espontânea de algumas dessas simetrias gera a massa das partículas, e as forças se produzem através de *partículas* dos campos — glúons, grávitons e fótons, que constituem bósons intermediários. Dos quarks resultam os hádrons, entre os quais os bárions; os bárions dão lugar aos núcleos atômicos; léptons e núcleons formam os átomos dos corpos percebidos. Dos léptons, quarks, bósons, núcleos e átomos resulta um *cosmos*, cuja origem e evolução, em termos desses elementos, estudamos.

Todas essas mudanças de paradigma ocorreram paralelamente ao aumento da energia utilizada nos experimentos sobre reações nucleares. Sendo os quarks hoje considerados as partículas mais fundamentais da natureza, tornou-se necessária uma teoria que os descrevesse. A *cromodinâmica quântica* (QCD, do inglês *quantum chromodynamics*) descreve os aspectos mais fundamentais da interação entre quarks, sendo considerada a teoria fundamental da interação forte. Nessa teoria, considera-se que os hádrons (bárions e mésons) sejam compostos por quarks e anti-quarks os quais interagem entre si via troca de glúons. Pelo fato de o núcleo ser composto por prótons e nêutrons (que são bárions, especialmente chamados de núcleons), seria, então, natural tentar uma descrição da matéria nuclear a partir da QCD. Entretanto, essa teoria é bastante complexa. Quando se tenta descrever o núcleo, um sistema de muitos corpos, a partir de graus de liberdade quarkônicos elementares “embutidos” em partículas compostas (os núcleons), obtém-se um conjunto de equações altamente acopladas e, por essa razão, praticamente intratáveis do ponto de vista matemático. Os cálculos da QCD, na maioria das vezes, envolvem o uso de computadores de alto desempenho, principalmente para o estudo de QCD na rede.

Entretanto, não é necessário utilizar-se uma teoria tão fundamental quanto a QCD para descrever coerentemente as propriedades da matéria nuclear. Assim como, por exemplo, no estudo de átomos e moléculas não há relevância na inclusão da estrutura interna do núcleo ou mesmo de elétrons que estejam fora da camada de valência, não é relevante, para estudos de matéria nuclear, levar em conta graus de liberdade mais fundamentais, pois estes não interferem nos resultados. De fato, na escala de energia nuclear (*MeV*), os graus de liberdade importantes são os dos núcleons.

Buscou-se, então, alternativas à cromodinâmica quântica para o estudo da matéria nuclear. Nesse contexto, surgiram modelos chamados de teorias efetivas, modelos capazes de descrever de forma aceitável a estrutura da matéria numa certa região do espectro de

energias. Em 1974, John Dirk Walecka propôs uma teoria efetiva de campos nucleares [3], capaz de descrever a matéria nuclear em uma região do espectro de energias em que os graus de liberdade dos quarks não apresentam contribuição significativa. Trata-se de uma teoria relativística de campos médios, baseada numa formulação de Yukawa [4], na qual considera-se os núcleons interagindo entre si através da troca de mésons escalares e vetoriais, sem considerar explicitamente a presença de quarks. Os mésons escalares são responsáveis pela atração a longa distância (componente atrativa da força nuclear forte), e os mésons vetoriais são responsáveis pela repulsão a curto alcance (componente repulsiva da força nuclear forte). Esse modelo é conhecido como *modelo de Walecka* ou *modelo  $\sigma - \omega$*  ou ainda *modelo QHD* (do inglês, *quantum hadrodynamics*).

Nas teorias efetivas consideradas no presente trabalho, o termo *efetivo* é utilizado com o significado de que os campos dos bárions e dos mésons são tratados como campos fundamentais, sem levar-se em conta, como já dissemos, a presença de quarks em seu interior. Esses campos são, então, denominados efetivos. Além disso, a interação é mediada, nessas teorias, pelos campos de mésons também efetivos, sem levar em conta a presença de glúons, sendo, portanto, uma interação efetiva caracterizada por constantes de acoplamento efetivas. Essas constantes são tais que a teoria consiga reproduzir a energia de ligação do núcleo e sua densidade de saturação. Como teoria efetiva, o modelo de Walecka apresenta muitos resultados consistentes com a fenomenologia; porém, algumas propriedades nucleares são superestimadas, como a incompressibilidade da matéria nuclear, e outras subestimadas, como a massa efetiva do núcleon no meio. Com o objetivo de corrigir essas deficiências, surgem, na literatura, outros modelos efetivos, como, por exemplo, o modelo não-linear de Boguta-Bodmer [5], que introduz termos de auto-acoplamento do méson escalar, e o modelo de Zimanyi e Moszkowski, o modelo ZM [6], que substitui o acoplamento mínimo de Yukawa entre o méson escalar e o núcleon por um acoplamento do tipo derivativo. Outro modelo que segue a mesma filosofia, sendo uma generalização dos modelos existentes na literatura, é o modelo de acoplamento derivativo ajustável desenvolvido por André Taurines, durante seu mestrado junto ao Grupo de Hádrons do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (IF-UFRGS) em 1999. Nesse modelo, os acoplamentos méson-núcleon são controlados por parâmetros matemáticos  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  [7].

De maneira geral, os modelos baseados em uma densidade lagrangeana efetiva descrevem o comportamento da matéria nuclear através da dinâmica de bárions e mésons e de seus acoplamentos. A utilização das equações de Euler-Lagrange e do tensor momentum-energia torna as teorias capazes de descrever, na aproximação de campo médio, a equação de estado da matéria nuclear, além de outras propriedades. A teoria de campo médio é aplicada a fim de eliminar a não linearidade das equações de campo obtidas através das equações de Euler-Lagrange.

Apesar desses modelos, o comportamento exato da equação de estado da matéria nuclear em altas densidades e altas temperaturas ainda é bastante desconhecido, o que leva

a especular-se sobre a aparição de novas fases da matéria nuclear. Sob certas condições de alta densidade e/ou alta temperatura, espera-se que a matéria hadrônica passe por uma transição de fase para matéria de quarks desconfiados, na qual os quarks estejam livres, em vez de permanecerem ligados na constituição de partículas mais complexas como prótons e nêutrons, formando, então, assim, o chamado plasma de quarks e glúons (QGP, do inglês *quark-gluon plasma*). Essas condições de alta temperatura e pressão podem ser obtidas por um breve instante em colisões de íons ultra-relativísticos, mas também podem existir na natureza. Um ambiente de alta densidade (e, comparativamente, baixa temperatura) existe no interior das estrelas de nêutrons, as quais podem, assim, conter quantidades significativas de matéria de quarks em seu interior. Além disso, altas temperaturas ocorreram nos primeiros 10 microssegundos após o Big Bang; nesse momento, portanto, deve ter existido um estado de plasma de quarks e glúons quente, até a temperatura cair para  $170 - 200\text{MeV}$  devido à expansão adiabática do universo.

O objetivo das colisões de íons pesados é criar densidades de energia muito grandes, capazes de suplantarem as forças que confinam os quarks em partículas mais complexas. No acelerador *Super Proton Synchrotron* (SPS) do CERN, um feixe de íons de chumbo de alta energia ( $33\text{TeV}$ ) foi acelerado e colidiu com alvos dentro de sete diferentes detectores. As colisões criaram temperaturas mais de cem mil vezes maiores do que a temperatura do centro do Sol ( $T_{\text{Sol}} \sim 10^7\text{K}$ ) e densidades de energia cerca de vinte vezes maiores do que aquela da matéria nuclear comum ( $\varepsilon_0 \sim 10^2\text{MeV fm}^{-3}$ ). No início do ano 2000, fortes evidências para existência do plasma de quarks e glúons foram apresentadas pelos cientistas do CERN [8]. Contudo, ainda há muitas questões a serem estudadas. Na expectativa de se criar um plasma de quarks e glúons de vida longa, novos experimentos estão sendo levados a cabo no *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) no Brookhaven Laboratory, Estados Unidos, e também no *Large Hadron Collider* (LHC) do CERN, que entrará em funcionamento em 2007, construído especialmente para este fim.

O problema é que se pode ver apenas as partículas que escapam da “bola de fogo” formada durante a colisão, atingindo os detectores. A partir desse sinal, é preciso reconstruir o que aconteceu antes e, assim, determinar se o plasma foi produzido ou não. Há um enorme trabalho teórico por trás dos experimentos à procura de sinais fenomenológicos previstos pelas considerações teóricas. Muitos possíveis sinais foram propostos até agora, mas nem todos podem ser verificados experimentalmente.

Todavia, conforme já mencionado, a natureza também nos proporciona observatórios para pôr à prova nossa compreensão a respeito da matéria nuclear em densidades extremas. O interior das estrelas de nêutrons oferece um ponto de encontro único entre a astrofísica e a física nuclear, pois as propriedades macroscópicas das estrelas de nêutrons, tais como massa, raio, rotação e evolução térmica, dependem da natureza microscópica da matéria em altas densidades. Estrelas de nêutrons são, nesse sentido, laboratórios cósmicos para a física das densidades supernucleares. A possibilidade de diferentes transições

de fase ocorrendo no interior superdenso das estrelas de nêutrons foi alvo de considerável interesse ao longo das últimas décadas. Nesta dissertação, iremos estudar, especificamente, a transição de fase da matéria nuclear para o plasma de quarks e glúons, isto é, a possível existência de um caroço de quarks nas estrelas de nêutrons, além de verificar o que a astrofísica pode nos dizer a respeito da existência e das propriedades do plasma de quarks e glúons.

Cabe lembrar, ainda, como a matéria nuclear contida nas estrelas de nêutrons se adapta de maneira excelente ao estudo proposto pelas teorias efetivas. Isso ocorre por três principais motivos. Primeiro: estrelas de nêutrons são objetos extremamente densos,  $10^{15} g/cm^3$ , compostas por um total de  $10^{55}$  nêutrons (80% de sua composição); portanto, a matéria nuclear contida nessas estrelas adapta-se de forma admirável ao estudo proposto pelas teorias efetivas, nas quais a definição de matéria nuclear pressupõe um número infinito de núcleons. Segundo: nos modelos QHD, o formalismo é covariante e, portanto, a causalidade é intrinsecamente respeitada. Terceiro: a aproximação de campo médio utilizada no modelo de Walecka e seus similares é tanto mais válida quanto maior a densidade de partículas (e, no caso das estrelas de nêutrons, conforme dito acima, essa condição é plenamente satisfeita).

Por essa razão, no presente trabalho, com o objetivo de investigar a possibilidade de existência do QGP no interior de uma estrela de nêutrons, utilizaremos, para descrever a fase hadrônica, um modelo efetivo, em particular o modelo de acoplamento derivativo ajustável desenvolvido por André Taurines; para descrever a matéria de quarks, utilizaremos o langrangeano da QCD, incluído no modelo de sacola do MIT [9], definindo uma transição de fase entre a matéria nuclear e a matéria de quarks. Para descrever as propriedades macroscópicas das estrelas de nêutrons, introduziremos as equações de estado obtidas com esses modelos nas equações de equilíbrio hidrostático da estrela, as quais, no contexto da relatividade geral, assumem a forma das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [10][11]. Trabalhamos, portanto, com a descrição das propriedades das assim chamadas estrelas híbridas, ou seja, estrelas de nêutrons com um caroço de matéria de quarks em seu interior.

O trabalho é desenvolvido da seguinte forma:

- No primeiro capítulo, **Evolução Estelar e Estrelas de Nêutrons**, descrevemos brevemente a evolução estelar e seus estágios finais de evolução, com atenção especial para as estrelas de nêutrons. Apresentamos um panorama das observações de estrelas de nêutrons já realizadas, bem como das propriedades e características físicas das estrelas de nêutrons e dos pulsares, enfocando aspectos como estrutura e condições de equilíbrio hidrostático, equilíbrio de carga e equilíbrio químico.
- No segundo capítulo, **Modelos da Hadrodinâmica Quântica**, apresentamos, inicialmente, as propriedades gerais da matéria nuclear para, depois, nos dedicarmos

ao estudo dos modelos efetivos: modelo de Walecka, modelo não-linear de Boguta-Bodmer, modelo de Zimanyi-Moszkowski e o modelo com acoplamento derivativo ajustável de Taurines. Teremos, assim, apresentado o modelo utilizado para descrição da fase hadrônica no nosso estudo a respeito da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP*.

- No terceiro capítulo, **Matéria de Quarks**, descrevemos as principais características dos quarks no modelo padrão, discutimos, em maior detalhe, o plasma de quarks e glúons e suas hipotéticas propriedades, para, ao final, apresentarmos o modelo de sacola do MIT, que será utilizado para descrever a matéria de quarks em nosso estudo da transição de fase.
- No quarto capítulo, **Transição de Fase no Interior de Estrelas de Nêutrons**, estabeleceremos, finalmente, a transição de fase entre a matéria nuclear em sua fase hadrônica, descrita pelo modelo com acoplamento ajustável, e a fase de QGP, descrita com auxílio do modelo de sacola do MIT. Verificaremos, em especial, como a variação dos parâmetros do modelo com acoplamento ajustável repercute nas características da transição de fase e nas propriedades macroscópicas da estrela de nêutrons.
- Na parte final desse trabalho, apresentamos nossas **Conclusões e Perspectivas**.
- Ainda foram incluídos seis apêndices para o maior esclarecimento sobre tópicos específicos deste trabalho.

Esta dissertação não pretende dar uma base teórica completa do assunto tratado. A teoria da matéria nuclear e da interação forte não é apresentada em detalhes, uma vez que é preciso um conhecimento avançado de cromodinâmica quântica (QCD) para sua completa compreensão. Por outro lado, a teoria das estrelas de nêutrons é baseada diretamente na teoria da relatividade geral de Einstein, e a descrição dessa teoria também foge aos nossos objetivos. Contudo, buscamos compilar e citar variados artigos e livros relacionados com esses temas; portanto, o leitor interessado poderá se orientar na busca de maiores informações sobre estes tópicos.

De qualquer modo, no texto do presente trabalho, buscamos apresentar, de forma clara, os pontos mais importantes da teoria, bem como alguns aspectos essencialmente informativos. Assim, esta dissertação pode ser lida por qualquer estudante com algum conhecimento de física e que se interesse por esses objetos tão fascinantes e ainda desconhecidos que são as estrelas compactas.

# Capítulo 1

## Evolução Estelar e Estrelas de Nêutrons

### 1.1 Introdução

Compreender a estrutura e a evolução das estrelas sempre foi um dos principais objetivos da astrofísica. As estrelas não são objetos estáticos, mas sim dinâmicas massas de gás quente cuja auto-gravidade é sustentada pelas reações nucleares que ocorrem no seu centro. A “vida” das estrelas começa com nuvens de gás e poeira em contração, até o ponto em que as reações nucleares se iniciam, entrando, então, a estrela na chamada *seqüência principal*, fase na qual a estrela passa a maior parte de sua vida, fundindo hidrogênio em hélio. Quando o combustível de hidrogênio se esgota, a estrela “morre”, saindo rapidamente da seqüência principal para seu estado final de evolução, que pode ser uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. De todos fenômenos astrofísicos, nenhum é mais essencial para a compreensão da vida do que a evolução das estrelas e a eventual explosão de algumas delas em supernovas. Apenas alguns dos elementos mais leves foram produzidos durante a nucleossíntese primordial no Big Bang, nenhum deles mais pesado do que o lítio. Outros elementos, aqueles com massa menor ou igual à do ferro, são produzidos em reações termonucleares que ocorrem durante o longo período de  $10^6$  a  $10^{12}$  anos de evolução da estrela <sup>1</sup>. Dentre esses elementos, os mais pesados são sintetizados nos últimos anos de vida da estrela, enquanto os elementos com massa superior à do ferro são formados nas explosões de supernova. Nós, seres humanos, assim como a Terra e toda a vida que a habita, somos feitos, em grande parte, do material proveniente de antigas gerações de estrelas <sup>2</sup>.

Na primeira parte deste capítulo, descreveremos brevemente o processo de formação e evolução estelar, bem como os estágios finais da vida de uma estrela, isto é, as anãs brancas, as estrelas de nêutrons e os buracos negros. Na segunda parte, concentraremos nossa

---

<sup>1</sup>O tempo de evolução de uma estrela depende de uma potência inversa de sua massa ( $t \propto M^{-2.5}$ ), ou seja, as estrelas mais massivas evoluem mais rapidamente.

<sup>2</sup>É interessante notar que, desde a extinção dos dinossauros há  $7 \times 10^7$  anos, sete gerações de estrelas massivas já “nasceram” e “morreram”.

atenção nas estrelas de nêutrons, objetos principais de estudo deste trabalho, apresentando um histórico das observações desses objetos e analisando sua estrutura e as condições de equilíbrio (mecânico, hidrostático e de carga) às quais obedecem.

## 1.2 Formação e Vida na Seqüência Principal

A vida de toda estrela tem início em uma nuvem constituída principalmente por hidrogênio e um pouco de poeira cósmica. Essa nuvem pode atingir dimensões da ordem de centenas de anos-luz e massas de até  $10^7 M_{\odot}$ <sup>3</sup>, com temperaturas muito baixas ( $10K$ ), podendo haver regiões de maior temperatura (até  $2000K$ ). A Nebulosa Cabeça-de-Cavalo em Orion é um dos mais belos exemplos dessas nuvens. Portanto, as estrelas principiam como gigantescas, tênues e opticamente invisíveis nuvens de gás e poeira. O movimento desordenado das partículas da nuvem provoca flutuações de densidade. Flutuações desse tipo podem formar um núcleo ligeiramente mais denso do que o resto da nuvem, e esse núcleo passa a crescer matéria da nuvem, fazendo com que ela, então, se contraia sob ação da própria gravidade. Quando uma determinada região da nuvem passa a se comportar dessa maneira, diz-se que ela atingiu a chamada *massa de Jeans*<sup>4</sup>. A nuvem, assim, colapsa por causa da atração gravitacional, obedecendo às leis da termodinâmica, através de uma série de estados de quase-equilíbrio. A nuvem colapsa de dentro para fora, com o material do centro sofrendo queda livre e o material mais externo permanecendo estacionário. Aos poucos, o colapso se espalha por toda a nuvem. A taxa de acreção de massa pelo núcleo depende apenas da temperatura inicial da nuvem. É necessário um período de cem mil a um milhão de anos para que matéria com massa equivalente a uma massa solar se acumule no núcleo da nuvem. A energia potencial gravitacional do material em queda no interior da nuvem é convertida em energia térmica no núcleo, formando uma onda de choque na superfície, onde a matéria é freada por forças de viscosidade. O caroço em formação no centro da nuvem constitui uma protoestrela. A onda de choque na superfície da protoestrela aquece o gás a cerca de um milhão de graus, seguindo-se um rápido resfriamento por radiação. Essa radiação é absorvida pela nuvem de matéria que cerca a protoestrela; portanto, não há evidências telescópicas definitivas da formação de protoestrelas. Essa radiação também desacelera a taxa de acreção de matéria pela protoestrela.

À medida que a protoestrela ganha massa e colapsa, a temperatura em seu interior aumenta. Como o colapso da protoestrela é um processo lento e quase-estático, o teorema do virial se torna uma boa aproximação, prevendo que metade da energia gravitacional se

---

<sup>3</sup> $M_{\odot}$  representa a massa solar ( $1M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30} kg$ ). Usaremos, também, as notações  $M_{Solar}$  e  $M_{Sol}$  para nos referirmos à massa solar.

<sup>4</sup>A *massa de Jeans* é a massa mínima de uma nuvem de gás para a qual seu colapso gravitacional deve ocorrer, em função da densidade e da temperatura.



Figura 1.1: A Nebulosa Cabeça-de-Cavalo em Orion — um berçário de estrelas [42].

converte em energia cinética e que a outra metade da energia seja irradiada. A princípio, essa radiação escapa, mas, conforme a densidade e a pressão aumentam, a protoestrela se torna opaca, e o equilíbrio termodinâmico é pela primeira vez estabelecido, com o campo de radiação sendo descrito por uma temperatura local relacionada com a energia cinética do gás. Então, alguma radiação escapa, enquanto a maior parte dela é consumida num processo de ionização da nuvem circundante. Quando o interior da nuvem se torna altamente ionizado, estabelece-se o equilíbrio hidrostático. Para o Sol, isso ocorreu quando ele tinha aproximadamente sessenta vezes o tamanho atual.

À medida que a protoestrela continua a colapsar, a temperatura em seu interior aumenta rapidamente, estabelecendo uma grande diferença entre a temperatura das camadas centrais e a das camadas mais externas. A energia gravitacional perdida é transportada à superfície por convecção, como determinou o astrofísico japonês Hayashi. Nas camadas mais externas da protoestrela, a energia cinética do tempestuoso movimento de convecção se converte em radiação. A temperatura necessária para que se atinja o equilíbrio entre a energia mecânica das correntes de convecção e a energia de radiação depende da composição química e da massa da protoestrela. Essa temperatura fica na faixa de  $2500 - 3000K$  na superfície da protoestrela e permanece aproximadamente constante durante a assim chamada *fase de Hayashi* da evolução, que é exatamente a fase em que subsistem as correntes de convecção no interior da protoestrela.

Nesse processo, a protoestrela continua a diminuir de tamanho por causa da atração



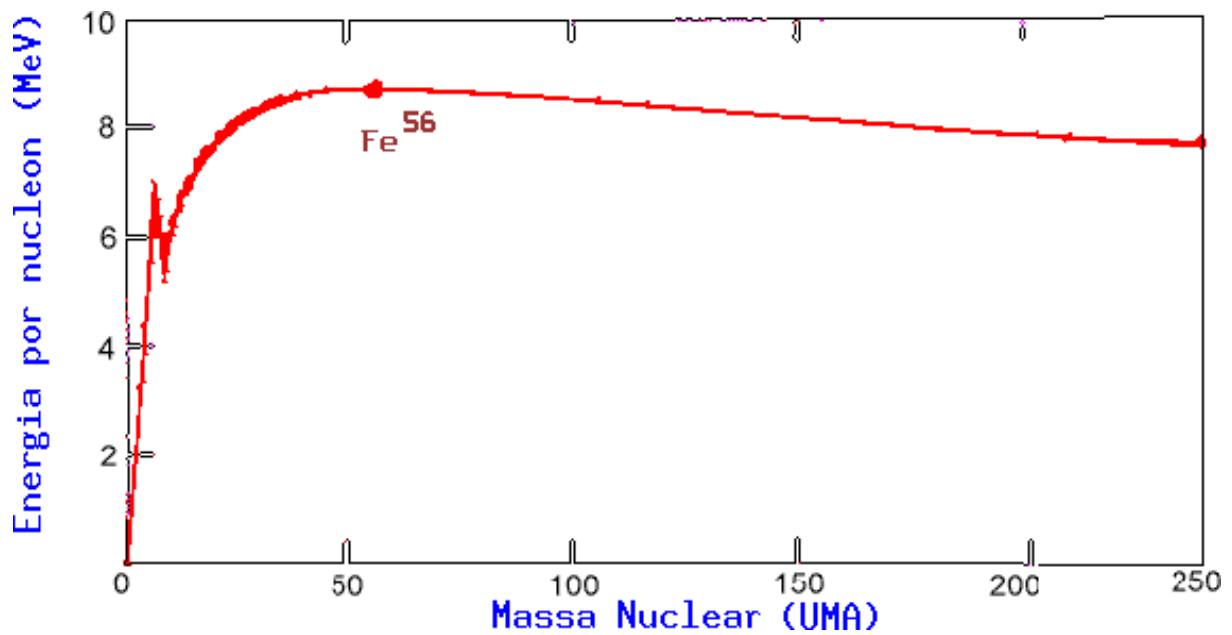


Figura 1.2: Energia de ligação por núcleon, caracterizando os processos de fusão e fissão nuclear. O elemento ferro, cujo número de massa é 56, em unidades de massa atômica, é destacado como a fronteira desses processos [15].

gravitacional. Conforme a estrela se aproxima de seu estágio de luminosidade final, a evolução se torna mais lenta, e um núcleo em equilíbrio radiativo cresce, enquanto a zona convectiva diminui com o aumento da temperatura central. Quando a massa da protoestrela cresce a alguns décimos da massa do Sol, a temperatura aumenta até atingir alguns milhões de Kelvin, e a fusão de elementos leves (como lítio, berílio e boro) tem início. Essa é a razão para a raridade desses elementos em nosso universo. Além disso, a fusão do deutério tem importante papel na evolução da protoestrela apesar da raridade desse isótopo. A fusão do deutério ocorre em uma determinada camada da protoestrela e ocasiona ejeção de matéria, interrompendo o processo de acreção. Os primeiros processos de fusão não são capazes de parar o colapso da protoestrela; logo, esse processo continua e, por fim, faz com que a temperatura no interior atinja  $10^7 K$ , quando, então, se inicia a fusão do hidrogênio. A estrela rapidamente entra em equilíbrio. A energia gerada se iguala àquela irradiada, o equilíbrio se estabelece, e a estrela entra na *seqüência principal*. As estrelas ficam a maior parte de suas vidas na seqüência principal, gerando enormes quantidades de energia fundindo hidrogênio em hélio num processo de fusão termonuclear. O termo fusão termonuclear se refere à fusão nuclear caracterizada pelo chamado *efeito túnel* através da barreira Coulombiana entre núcleos, sendo que a agitação térmica fornece a energia para o tunelamento.

Quando todo hidrogênio do núcleo se esgota, a queima de hidrogênio continua ocorrendo em uma camada em torno do núcleo. A estrela continua sua vida como uma *gigante*

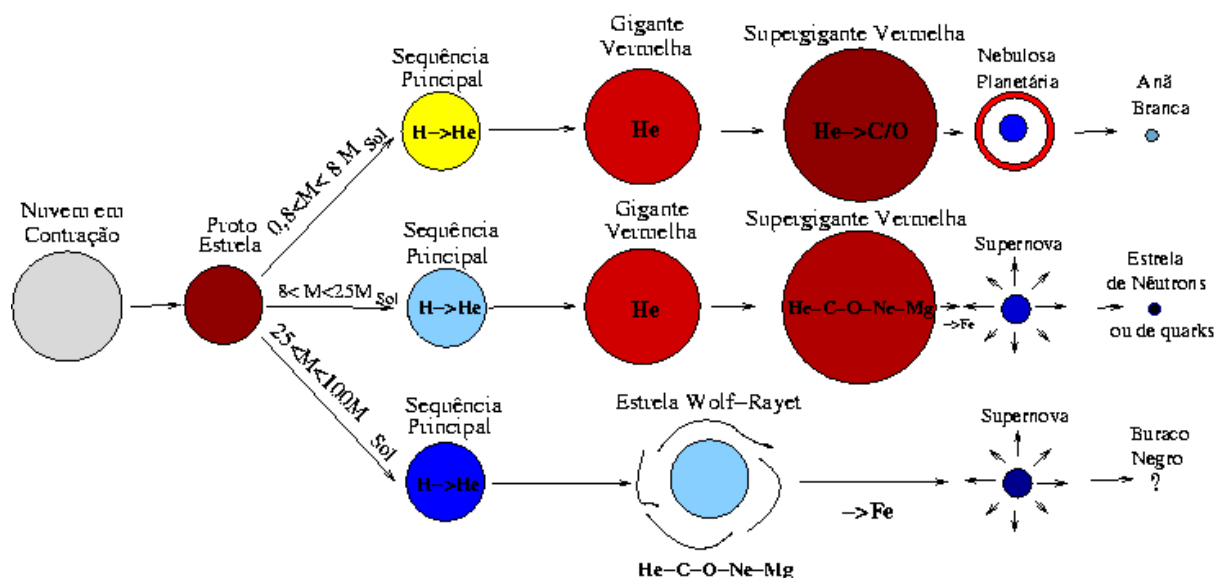


Figura 1.3: Esquema de evolução estelar, não em escala, para massas diferentes. Em cada etapa, estão indicados os núcleos envolvidos nos processos de fusão termonuclear correspondentes. As estrelas Wolf-Rayet, oriundas da evolução de estrelas de alta massa (acima de  $20M_{\odot}$ ), e com temperatura efetiva na faixa de  $30000$  a  $60000K$ , são variáveis e têm um envoltório de poeira e gás ejetado da estrela pela forte pressão de radiação. Karel A. van der Hucht publicou em 2001 o *The Seventh Catalogue of Galactic Wolf-Rayet Stars*, no *New Astronomy Reviews*, 45, 135, contendo 227 estrelas. Cerca de 350 WR já foram detectadas em outras galáxias [15]. Protoestrelas de massa menor que  $0.08$  massas solares nunca queimarão o hidrogênio e nunca atingirão a sequência principal. As “estrelas” assim formadas serão as de menor massa e luminosidade conhecidas, chamadas de anãs marrons. Por serem muito fracas, são muito difíceis de serem detectadas. O termo anã marrom foi proposto em 1975 pela astrônoma americana Jill Cornell Tarter (1944-).

*vermelha*, até que a temperatura no núcleo aumente o suficiente para que tenha início a fusão do hélio. A partir daí, a estrela rapidamente passa da queima de hélio para a queima de elementos mais pesados (carbono, neônio, oxigênio, magnésio e silício). O processo de geração de energia por fusão irá terminar com a produção de ferro, elemento com maior energia de ligação nuclear. A partir daí, a fusão não será mais um processo exotérmico (ver Fig.1.2). A massa da estrela é o fator que determina em que elemento o processo de fusão nuclear vai definitivamente se encerrar.

Dependendo de sua massa, a estrela poderá seguir três caminhos distintos, transformando-se em uma *anã branca*, uma *estrela de nêutrons*, ou um *buraco negro* (ver Fig.1.3).

## 1.3 Estágios Finais de Evolução Estelar

Quando toda energia produzida pelas reações nucleares se esgota, a estrela colapsa para um frio estágio final de evolução. Nesta seção, vamos discutir brevemente os possíveis estágios finais de evolução.

### 1.3.1 Anãs Brancas

Apenas as estrelas mais massivas conseguem levar as reações termonucleares até o ponto de síntese do ferro. Aqui, por estrelas massivas, estamos nos referindo a estrelas com massas  $M \geq 8M_{\odot}$ . As reações nucleares são mais lentas e incompletas nas estrelas mais leves. Para estrelas de até algumas massas solares, a contração se inicia quando o hidrogênio se esgota no caroço. Conforme a temperatura aumenta, o hidrogênio passa a ser queimado em camadas mais externas. O envelope se expande lentamente para formar uma *gigante vermelha*, enquanto o caroço continua a se contrair e se aquecer. Em  $10^8 K$ , três núcleos de hélio se fundem para formar carbono, no chamado processo  $3\alpha$ . Em temperaturas mais altas, o processo  $3\alpha$  é seguido pela fusão de mais um núcleo de hélio, formando-se oxigênio. Essas reações, algumas vezes, começam de maneira explosiva. Por fim, pulsações no envelope geram instabilidade, e a maior parte da massa da estrela é ejetada para formar uma *nebulosa planetária*.

O caroço restante da estrela é composto principalmente por hélio, carbono, oxigênio ou magnésio (às vezes há uma mistura), dependendo de quão longe as reações nucleares foram. Com a perda do envelope, a temperatura necessária para a ocorrência da fusão termonuclear não pode mais ser mantida, e o caroço colapsa sob sua própria gravidade. Durante a contração, a pressão aumenta proporcionalmente ao produto da temperatura pela densidade, mas não chega a ser suficiente para estabilizar o que restou da estrela de maneira a evitar o colapso. Após a contração, a matéria se torna degenerada, o que significa que os átomos perdem suas características químicas ao sofrerem alterações em sua estrutura eletrônica e se tornando completamente ionizados. O comportamento dos elétrons arrancados pela alta pressão é governado pelo princípio da exclusão de Pauli, que impede dois férmions de ocuparem o mesmo estado quântico simultaneamente. A pressão do gás de Fermi degenerado formado pelos elétrons pode ser grande o suficiente para interromper o colapso se a massa da estrela estiver abaixo de um valor crítico em torno de  $1.4M_{\odot}$ . A densidade crítica necessária para que se atinja o estado degenerado é de cerca de  $1000g/cm^3$ , o que é cerca de 10000 vezes maior do que a densidade central do Sol.

As estrelas sustentadas pela pressão de um gás de Fermi degenerado são chamadas de *anãs brancas*. A maioria dos objetos astronômicos são batizados tendo-se por base alguma característica descritiva. Com as anãs brancas, não foi diferente. A anã branca era a menor estrela conhecida até a época de sua descoberta. Possui um raio de poucos

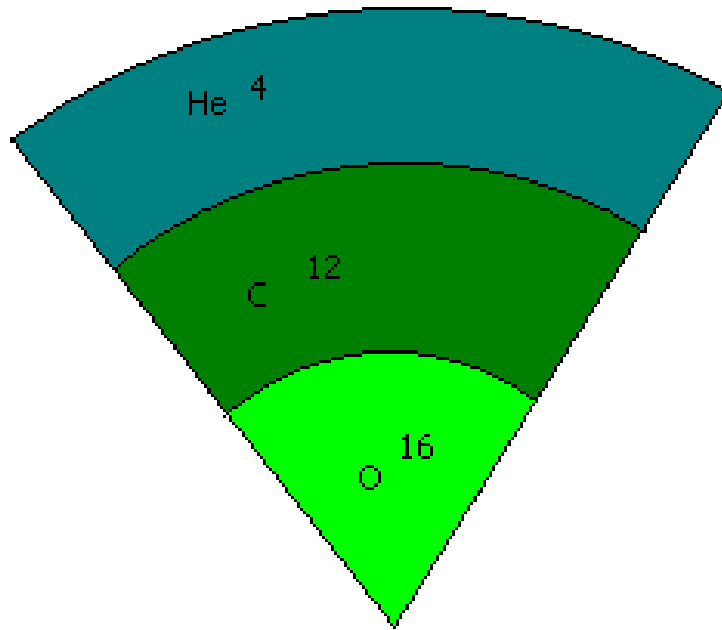


Figura 1.4: Representação da estrutura de uma anã branca.

milhares de quilômetros; portanto, a anã branca é relativamente pequena, considerando-se que sua matéria está comprimida a uma densidade muito alta, ou seja, em um volume muito menor do que aquele que a estrela que lhe deu origem tinha quando estava na sequência principal. A densidade média de uma anã branca fica em torno de  $10^6$  vezes a densidade da Terra. A alta temperatura em sua superfície a faz parecer branca. Sua fonte de luz é o calor gerado em antigos processos nucleares. O resíduo da energia gerada no início de sua vida é irradiado como fótons por  $10^{10}$  anos. Após um lento processo de resfriamento e cristalização, a anã branca deixa de ser opticamente observável, passando a ser chamada, então, de *anã preta*. É possível que o universo ainda não seja antigo o suficiente para que se tenham formado tais estados finais das anãs brancas. Sendo assim, apesar do nome, essas estrelas, na verdade, cobrem um intervalo de temperatura e cores que abrange desde as mais quentes, que são azuis ou brancas, e têm temperaturas superficiais de até  $170000K$ , até as mais frias, que são vermelhas, e têm temperaturas superficiais de apenas  $3500K$ , dependendo de sua idade.

A estrutura interna de uma anã branca está representada na Fig.1.4.

### 1.3.2 Estrelas de Nêutrons

Estrelas com massa acima de  $8M_{\odot}$  evoluem mais rapidamente do que as estrelas progenitoras das anãs. As reações termonucleares seguem mais adiante, e a estrela fica cada vez mais quente até se expandir numa gigante vermelha. Para estrelas massivas, o estágio de gigante vermelha é freqüentemente chamado de supergigante, expressando que a sua massa e o seu tamanho são muito maiores comparados com aquelas formadas a partir de estrelas leves. No centro da estrela, os processos nucleares chegam a formar o ferro. Nesse estágio, o caroço da estrela é sustentado apenas pela pressão dos elétrons não-relativísticos degenerados. A fusão nuclear continua em camadas circundantes de *Si*, *O*, etc., em torno da região central de ferro. O caroço tem um raio de algumas centenas de quilômetros, dentro de uma supergigante vermelha com raio maior do que  $10^8 km$ .

A fusão nas camadas mais externas aumenta a massa do caroço. A gravidade comprime o caroço a uma densidade tal que os elétrons se tornam relativísticos. A pressão exercida por eles agora aumenta menos rapidamente com o aumento da densidade do que no estágio anterior, quando os elétrons eram não-relativísticos. Além disso, a energia cinética dos elétrons relativísticos atinge, nesse estágio, o ponto em que a captura de prótons, isto é, o processo de *decaimento beta inverso*, produz um estado energeticamente mais favorável. A pressão dos elétrons está abaixo do ponto em que pode suportar o aumento de massa no caroço. Então, o caroço atinge sua massa máxima, a massa de Chandrasekhar, assim chamada em homenagem a S. Chandrasekhar, que descobriu o limite de massa para um objeto sustentado pela pressão de elétrons ultra-relativísticos degenerados [12]. O fato é que cada processo de fusão termonuclear necessita de uma energia de ignição, gerada a partir da energia gravitacional. Em 1931, Chandrasekhar [12] determinou as massas necessárias para que uma estrela desse início a esses processos. Citamos, a seguir, alguns desses valores.

$$H \rightarrow 0.08M_{\odot} \tag{1.1}$$

$$He \rightarrow 0.25M_{\odot} \tag{1.2}$$

$$C \rightarrow 1.06M_{\odot} \tag{1.3}$$

$$Ne \rightarrow 1.37M_{\odot} \tag{1.4}$$

Como já dissemos na subseção anterior, uma anã branca (estrela ainda sustentada pela pressão do gás de elétrons) é composta, basicamente, pelos núcleos citados acima, o que determina a massa máxima para uma estrela desse caráter como  $1.47M_{\odot}$  [12], massa essa para a qual já é possível formar o oxigênio. A partir desse ponto, a pressão dos elétrons degenerados não será mais capaz de sustentar a pressão gravitacional, determinando uma região de instabilidade entre as fases de anãs brancas e estrelas de nêutrons. Em outras palavras: se a massa da estrela, nesse estágio, estiver abaixo da massa de Chandrasekhar, a

estrela tende a se transformar em uma anã branca, conforme descrito na subseção anterior; do contrário, o colapso do caroço não pode ser impedido pela pressão dos elétrons, dando início à formação do que chamaremos de uma *estrela de nêutrons*. Vejamos em mais detalhes como ocorre esse processo.

Quando a pressão do gás de elétrons não é grande o suficiente para contrabalançar a pressão da força gravitacional sobre o caroço, este começa uma rápida e violenta implosão, tornando-se extremamente quente, chegando a atingir, em poucos segundos, ao fim do colapso, temperaturas da ordem de  $MeV$  ( $\sim 10^{11}K$ ). O caroço é inchado com neutrinos energéticos produzidos pelo decaimento beta inverso. A seção de choque para a interação dos neutrinos energéticos com os núcleos em densidades típicas de  $10^{12}g/cm^3$  é grande o suficiente para confinar, através de colisões, os neutrinos dentro do caroço em implosão. Eles são levados junto com o material em queda sobre o caroço, enquanto a temperatura do caroço atinge dezenas de  $MeV$ . À medida que a matéria do caroço é comprimida a altas densidades, a energia de Fermi dos elétrons e neutrinos termalizados aumenta, e a pressão por eles então exercida resiste à compressão.

O material em queda ricocheteia, então, sobre o caroço rígido, provocando uma onda de choque que se propaga radialmente para fora e, nesse processo, vai dissipando sua energia por perda de neutrinos e fotodesintegração de todos núcleos em seu caminho. A onda de choque fica estagnada a poucas centenas de quilômetros a partir do centro da estrela. Quando o material estelar que está além da região ocupada pelo caroço não é mais sustentado pelo caroço, uma onda de descompressão se propaga para fora à velocidade do som na difusa matéria estelar da supergigante vermelha. Porém, esse sinal leva um longo tempo para chegar à superfície da estrela, comparado ao tempo de implosão do caroço, da formação da onda de choque e de sua subsequente estagnação. Assim, o material em queda fica aprisionado ao chegar à frente de choque estagnada, formando uma frente de acreção. O material acrescido aquece a região de choque e acreção, e, ao mesmo tempo, o momentum e a massa desse material exercem um gradiente de pressão em direção ao centro. Uma região rarefeita se forma entre o caroço de alta densidade e a frente de choque e acreção, como uma imensa bolha. Pares neutrino-antineutrino vindos do interior se aniquilam e, assim, aquecem e provocam expansão da bolha. Através de um complexo e não inteiramente compreendido balanço entre convecção e aquecimento gerado por neutrinos, uma pequena fração da energia de ligação da estrela de nêutrons é transportada para a frente de acreção, e sua energia fornece a energia cinética necessária para a ejeção de todo o material, exceto o caroço da estrela progenitora. Essa enorme ejeção de material estelar é a explosão de *supernova*.

O envelope da estrela ejetado na explosão, chamado de *remanescente de supernova*<sup>5</sup>, se expande com uma velocidade de  $10000km/s$ . A energia liberada em um colapso de

---

<sup>5</sup>O remanescente de supernova pode vir a formar uma nebulosa e é visível em todos os comprimentos de onda entre o rádio e os raios-X.

supernova é tanta que o brilho da explosão tem luminosidade equivalente à de uma galáxia de 200 bilhões de estrelas.

Após a grandiosa explosão de supernova, o caroço quente e colapsado, ou *estrela protoneutrônica*, com temperatura de dezenas de  $MeV$ , libera os neutrinos contidos em seu interior ao longo de um intervalo de poucos segundos e se resfria a  $1MeV$  ou menos. Tal fato foi mostrado por Burrows e Lattimer em [13]. Nesse ponto, o caroço colapsado atingiu sua composição de equilíbrio, com nêutrons, prótons, híperons, léptons e, possivelmente, quarks. Logo, formou-se uma *estrela de nêutrons*. Seu raio é de cerca de dez quilômetros, e sua densidade média é  $10^{14}$  vezes maior do que a densidade da Terra. A estrela continua se resfriando por milhões de anos através de uma lenta difusão de fótons à superfície e sua irradiação ao espaço. *Pulsares* são estrelas de nêutrons magnetizadas e dotadas de rotação, que permanecem ativas por cerca de  $10^7$  anos ou mais. A rotação de um pulsar vai diminuindo, o campo magnético decresce, e, finalmente, as estrelas de nêutrons e os pulsares se tornarão invisíveis. Vão se juntar ao grupo de estrelas de nêutrons acumuladas ao longo da vida do nosso universo.

Voltaremos a discutir o tema estrelas de nêutrons e pulsares em detalhe na próxima seção deste capítulo.

### 1.3.3 Buracos Negros

Para uma fração desconhecida de estrelas massivas em colapso gravitacional, a explosão de supernova parece falhar na ejeção de quantidade suficiente de matéria. Portanto, a estrela progenitora continua a colapsar até se transformar em um *buraco negro* de massa aproximadamente igual a da estrela pré-supernova — mais de  $20M_{\odot}$ , talvez chegando a  $100M_{\odot}$ . Assim ocorre, pois há um limite máximo de massa, chamado de limite de massa de Oppenheimer-Volkoff, que é a massa máxima que pode ser sustentada pela pressão dos nêutrons degenerados e sua interação repulsiva, evitando o colapso gravitacional.

Existe ainda um mecanismo de colapso retardado que pode ocorrer após a formação de uma estrela protoneutrônica e ejeção da maior parte da matéria estelar em uma explosão de supernova. O colapso retardado pode acontecer se a estrela protoneutrônica tiver massa próxima à massa limite, mesmo que uma explosão de supernova já tenha ejetado a maior parte da massa da estrela progenitora. Nesse caso, um buraco negro de baixa massa, em torno de  $1.5$  a  $2M_{\odot}$ , será criado. Buracos negros com essa massa podem ser criados, também, por um processo de *colapso induzido por acreção* em estrelas de nêutrons constituintes de sistemas binários. Essas estrelas de nêutrons podem lentamente acretar matéria de uma companheira menos densa. A superfície da estrela de nêutrons será aquecida pelo material em queda sobre ela. Quando a taxa de acreção de matéria é tal que a pressão de radiação da superfície quente contrabalança a força gravitacional que atua sobre o material acretado, atingimos um limite. Esse limite é conhecido como *limite*

de Eddington. Acreção de matéria por uma estrela de nêutrons com massa próxima do limite de massa de Oppenheimer-Volkoff pode fazê-la colapsar a um buraco negro antes que se atinja o limite de Eddington.

Buracos negros são estruturas das quais nem mesmo a luz pode escapar, matematicamente consideradas como uma singularidade nas equações de Einstein da relatividade geral. Esta singularidade corresponde ao assim chamado *raio de Schwarzschild*. Para compreendermos melhor o que isso significa, basta considerarmos o balanço entre a energia cinética de uma partícula de massa  $m$  com velocidade quase igual à da luz e a energia gravitacional que ela sofre ao interagir com um objeto cosmológico de raio  $R$  e massa  $M$

$$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{GmM}{R}, \quad (1.5)$$

de onde vem que  $R = 2GM/c^2$  ou, no sistema relativístico de unidades <sup>6</sup> em que  $G = c = 1$ ,  $R = 2M$  [14].

Quando um objeto cosmológico atinge esse limite, ele e toda matéria nele contida colapsam. Devido à forte atração gravitacional, nada consegue escapar de sua atração, e a captura da luz impede sua detecção visual. Evidências de sua existência podem ser encontradas na observação do movimento de estrelas encontradas nas extremidades de galáxias, alterando seu movimento devido à presença de um objeto tão massivo nas suas proximidades.

Esses objetos não possuem um limite superior para a sua massa, que pode variar tanto quanto o seu raio. Sua formação pode ocorrer, conforme já vimos, a partir de um colapso estelar, mas também a partir do colapso de uma galáxia inteira, desde que a relação para o raio de Schwarzschild seja respeitada.

Buracos negros são geralmente descritos como estruturas extremamente densas; isto não é, entretanto, uma verdade absoluta. Um buraco negro deve apenas respeitar a condição deduzida anteriormente, determinando-se com isto a sua densidade  $\rho$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} > \frac{3}{32\pi M^2}. \quad (1.6)$$

Essa condição leva a uma dependência da densidade do buraco negro em função da massa do objeto colapsado

$$\rho > \frac{1.8 \times 10^{16}}{(M/M_{\odot})^2} g/cm^3. \quad (1.7)$$

Dessa forma, se a Via-Láctea colapsasse, agregando uma massa equivalente a  $10^{12}M_{\odot}$ , geraria um buraco negro com densidade e raio dados por

$$\rho > 1.8 \times 10^{-8} g/cm^3, \quad (1.8)$$

$$R = 3.0 \times 10^2 km. \quad (1.9)$$

---

<sup>6</sup>Ver Apêndice A.



Objeto	Massa ( $M_{\odot}$ )	Raio ( $R_{\odot}$ )	Densidade ( $g/cm^3$ )	Potencial ( $GM/Rc^2$ )
Sol	1	1	1	$10^{-6}$
Anã Branca	$\sim 1$	$10^{-2}$	$10^7$	$\sim 10^{-4}$
Estrela de Nêutrons	1 – 3	$\sim 10^{-5}$	$10^{15}$	$\sim 10^{-1}$
Buraco Negro	Arbitrário	$2GM/c^2$	$\sim M/R^3$	$\sim 1$

Tabela 1.1: Comparação entre propriedades do Sol com diferentes objetos estelares compactos ( $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{33}g$ ,  $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 km$ ).

Encerramos esta seção apresentando, acima, um quadro comparativo que resume as principais características dos três possíveis estágios finais de evolução estelar abordados anteriormente: as anãs brancas, as estrelas de nêutrons e os buracos negros (Tabela 1.1).

## 1.4 Teoria das Estrelas de Nêutrons

Esta seção é dedicada ao estudo mais aprofundado das estrelas de nêutrons, objetos de interesse desta dissertação. As estrelas de nêutrons estão entre os corpos mais fascinantes do universo. Elas contêm mais de uma massa solar em um raio de cerca de  $10km$ , o que implica densidades da ordem de  $10^{15}g/cm^3$ . Portanto, essas estrelas têm as características básicas da matéria fria em altas densidades e, além disso, representam objetos de teste para a teoria da relatividade geral. Em uma perspectiva mais ampla, estrelas de nêutrons e colisões de íons pesados nos dão acesso ao diagrama de fases da matéria nuclear em temperaturas e densidades extremas, o que é essencial para a compreensão dos primeiros instantes do nosso universo bem como de vários outros fenômenos astrofísicos.

### 1.4.1 Um Breve Histórico

A descoberta do nêutron por Chadwick em 1932 [16], suscitou a imaginação dos físicos. Landau, assim que soube da notícia em Copenhague, rapidamente elaborou o conceito de uma esfera de nêutrons [17]. Baade e Zwicky, um ano depois, conceberam que a energia necessária para provocar o fenômeno das supernovas poderia ser a energia gravitacional de um objeto altamente compacto como uma *estrela de nêutrons* [18]. Sugeriram que as estrelas de nêutrons poderiam ser formadas nas explosões de supernova, nas quais o caroço de ferro de uma estrela massiva ultrapassa o limite de Chandrasekhar e colapsa. A enorme quantidade de energia liberada no colapso ejeta o resto da estrela, e o caroço colapsado poderia formar uma estrela de nêutrons. Para haver eficiente produção de estrelas de nêutrons através desse mecanismo, Baade e Zwicky estimaram que a massa máxima de uma estrela de nêutrons deveria exceder  $1.4M_{\odot}$ . Apesar desse rápido desenvolvimento inicial, não se sabia como detectar tais objetos, pois eles seriam muito pequenos e sem um mecanismo apropriado para irradiar energia. Como consequência, houve uma estagnação

do tema até 1939, quando Tolman [10], Oppenheimer e Volkoff [11] desenvolveram um formalismo inicial para a análise de tais objetos, considerando que esses objetos seriam estados gravitacionalmente ligados de um gás de Fermi de nêutrons. Assim, calcularam sua massa como sendo de  $0.77M_{\odot}$  compactada em um raio de  $10km$ , resultando uma densidade de  $\sim 6 \times 10^{15}g/cm^3$ . À guisa de comparação, a densidade da matéria nuclear dentro de um núcleo massivo como  $Pb^{208}$  é de aproximadamente  $0.16$  núcleons/ $fm^3$ , isto é, algo em torno de  $2.7 \times 10^{14}g/cm^3$ . Note-se que a massa máxima por eles prevista estava abaixo do limite de Chandrasekhar, discutido na seção anterior [12]. Woltjer, baseando-se na conservação do fluxo magnético, estimou que os campos magnéticos em estrelas de nêutrons deveriam ser das ordem de  $10^{12}$  gauss [19]. Pacini, em 1967, propôs que uma estrela de nêutrons altamente magnetizada poderia emitir energia [21]. Até então, todos esses trabalhos não passavam de conjecturas teóricas.

Em 1967, em Cambridge, Hewish e seus colaboradores estavam desenvolvendo um radiotelescópio de resposta rápida, de modo a poder separar pequenas oscilações do ruído no sinal. Usando esse equipamento, uma estudante de pós-graduação da equipe de Hewish, Jocelyn Bell, de 24 anos, percebeu um sinal persistente e extremamente periódico, com um pulso a cada 1.337 segundos. Era descoberto, assim, o primeiro pulsar [20]. Logo, os assim chamados pulsares foram identificados com uma estrela de nêutrons em rotação pelos trabalhos de Pacini [21] (que, em 1967, propôs que uma estrela de nêutrons altamente magnetizada poderia emitir energia) e Gold [22]. Hewish recebeu o Prêmio Nobel em 1974 pela descoberta.

A posterior detecção do pulsar do Caranguejo, no remanescente da supernova do Caranguejo, supernova esta observada na China em 1054, confirmou a ligação entre estrelas de nêutrons e pulsares, dando início aos esforços para melhor se entender as estrelas de nêutrons (Fig.1.5 e Fig.1.6).

## 1.4.2 Evidências Experimentais: Pulsares

Acredita-se que os pulsares sejam estrelas de nêutrons altamente magnetizadas em rotação. Como o eixo magnético da estrela em geral não coincide com o rotacional, o feixe de ondas eletromagnéticas emitidas funciona como uma espécie de *farol astrofísico* (Fig.1.7). Esse feixe tem uma abertura de aproximadamente  $10^{\circ}$ , e, a cada passagem do feixe pela linha que liga a estrela à Terra, detectamos um pulso. As frequências que aparecem nesses pulsos podem estar na faixa da luz visível, raios-X ou até raios- $\gamma$ , mas a maior parte dos pulsares emite na faixa das rádio-frequências.

Pouco depois da descoberta do pulsar PSR 1919+21<sup>7</sup> por Hewish e Bell, foram encontrados os pulsares das nebulosas do Caranguejo e Vela. O curto intervalo entre os pulsos emitidos por esses objetos,  $33ms$  e  $89ms$  respectivamente, foi fundamental na sua

---

<sup>7</sup>PSR - *pulsating source of radio*, 1919+21 - coordenadas celestes.

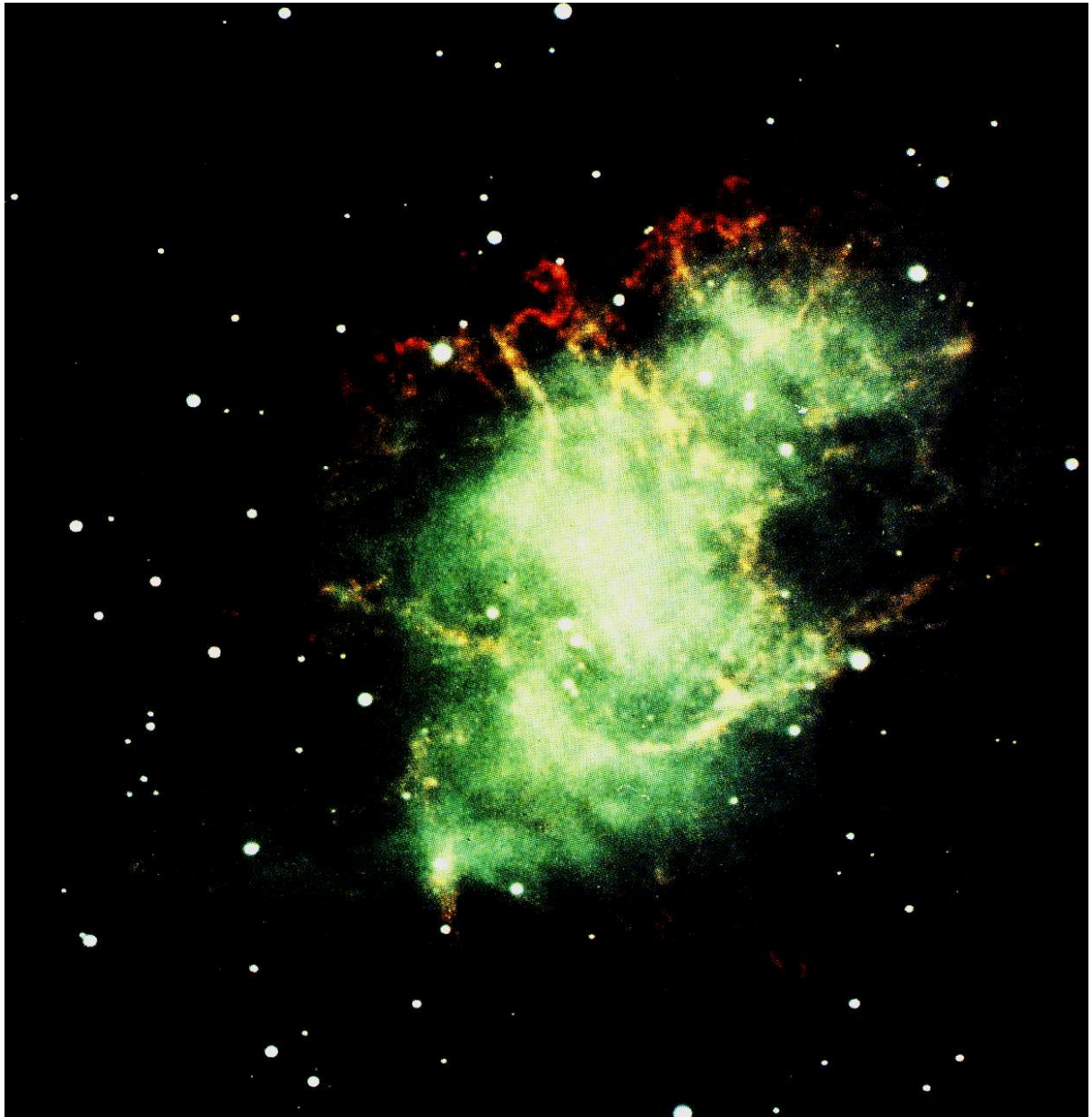


Figura 1.5: A nebulosa do Caranguejo encerra os destroços de uma supernova, que se espalha pelo espaço desde que a explosão foi observada na Terra há mais de 900 anos. No centro da nebulosa está o núcleo colapsado da estrela que explodiu, hoje um pulsar emissor de ondas de rádio, luz visível e raios-X. À medida que for envelhecendo, o pulsar irradiará cada vez mais nos comprimentos de onda de baixa energia [42].

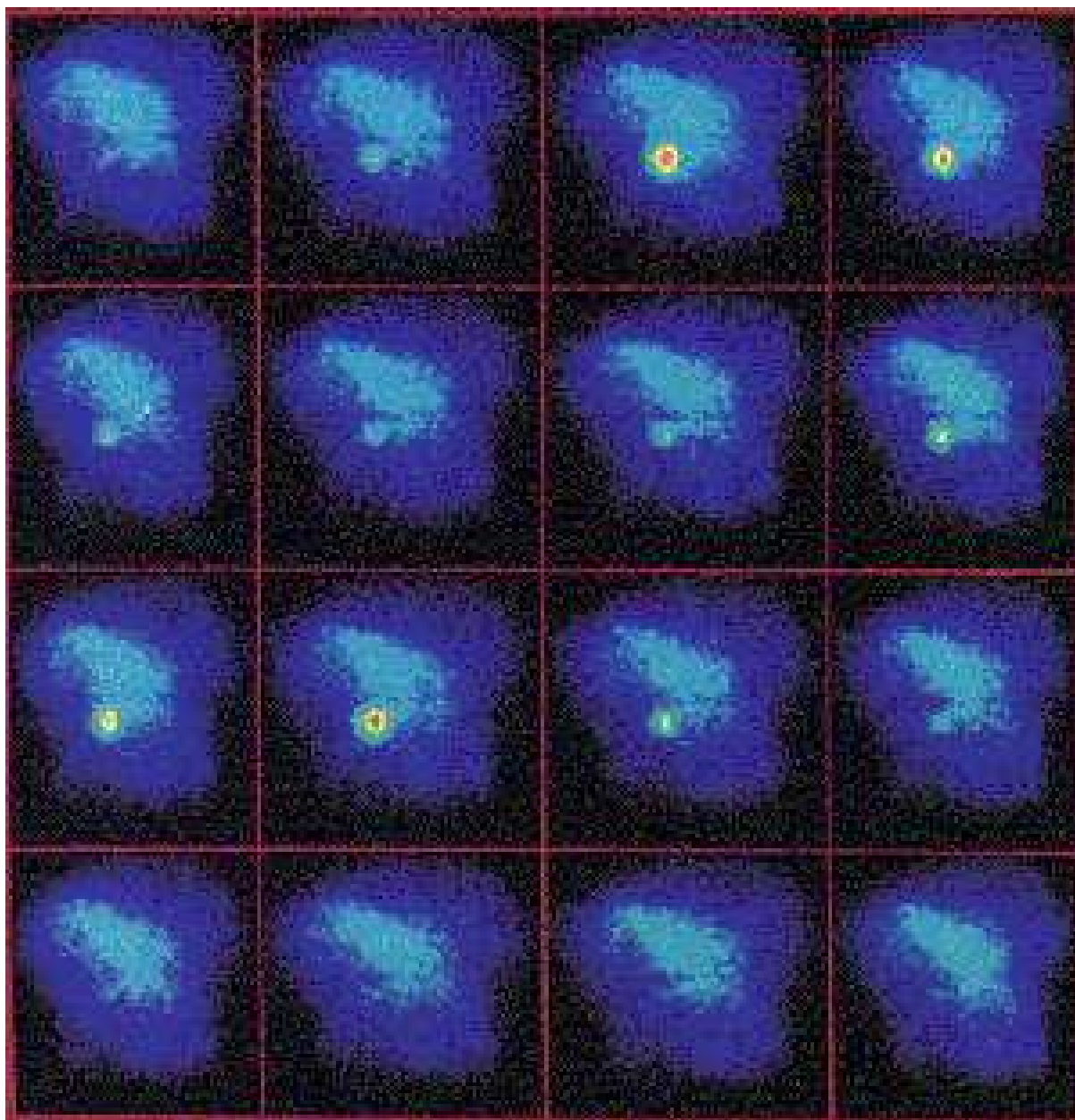


Figura 1.6: Seqüência de fotos do pulsar da nebulosa do Caranguejo, que se acende e se apaga 30 vezes por segundo [15].

identificação como estrelas de nêutrons.

Para compreendermos essa possível identificação, podemos fazer uma estimativa da densidade de energia de um pulsar de milissegundos. Para manter a estrela coesa, a força gravitacional no equador da estrela deverá superar os efeitos centrífugos da rotação. Assim, mesmo sem considerar correções relativísticas, temos que

$$\frac{GmM}{R^2} > m \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \quad (1.10)$$

Utilizando a desigualdade acima, a densidade de energia média do pulsar será

$$\bar{\varepsilon} = M / \left( \frac{4\pi}{3} R^3 \right) > \frac{3\pi}{GT^2} \sim 10^{14} g/cm^3. \quad (1.11)$$

Essa densidade de energia é muito próxima da densidade da matéria nuclear,  $2.5 \times 10^{14} g/cm^3$ , e sugere que esses objetos astrofísicos sejam compostos de núcleons. Além disso, como veremos na subseção 1.4.4, a carga elétrica líquida em uma estrela desse tipo deverá ser nula para mantê-la coesa; assim, chegamos à conclusão de que os pulsares devem ser constituídos em sua maior parte por nêutrons, ou melhor ainda, *pulsares devem ser estrelas de nêutrons*.

Por outro lado, se tais pulsares de milissegundo fossem anãs brancas em rotação (com raio  $R \sim 10^3 km$ ), a velocidade linear  $v$  de um ponto do seu equador poderia ser estimada por

$$v = \frac{2\pi R}{T} \sim c. \quad (1.12)$$

Ou seja: se um pulsar fosse um anã branca, a matéria em sua superfície rotaria a uma velocidade muito próxima à da luz!

Atualmente, existem catalogados mais de 700 pulsares, sendo muitos deles detectados nos rádio-telescópios de Arecibo, Jodrell Bank, Molonglo e Greenbank nos anos 70 [23].

Outro desses objetos, mas com nome próprio, é o pulsar de Hulse-Taylor (PSR 1913+16). Foi o primeiro pulsar detectado em um sistema binário, sendo que sua companheira também foi identificada como uma estrela de nêutrons, mas seu cone de radiação não nos atinge. Esse sistema tem sido estudado com objetivos de verificação apurada dos resultados previstos pela relatividade geral, pois, entre outros efeitos, a precessão de sua órbita é de  $4.2^\circ$  por ano, enquanto Mercúrio, por exemplo, precessiona  $43''$  por século. Sistemas binários de estrelas de nêutrons são a maior esperança para os cientistas que querem confirmar a existência de ondas gravitacionais.

Uma segunda geração de pulsares aparece com a descoberta do PSR 1937+21, com período de  $1.56ms$  [24]. Propôs-se que fossem pulsares antigos, com campo magnético fraco, que sofressem uma aceleração angular decorrente do acréscimo de matéria de uma estrela companheira. A hipótese se verificou quando se encontrou o pulsar PSR 1953+29 de  $6.1ms$  orbitando ao redor do centro de massa do sistema por ela formado com uma anã branca. Esses pulsares de milissegundos são bastante populosos em *aglomerados*

*globulares*<sup>8</sup>, como pode ser inferido da descoberta de 10 desses objetos em *47Tucanae* em 1991. Os primeiros planetas encontrados fora do sistema solar foram detectados rotando ao redor de um pulsar de milissegundos, o pulsar PSR 1257+12: eram dois objetos, um com a massa da Terra e outro com a massa da Lua [25].

Como vimos, os períodos dos pulsares vão de alguns segundos a milissegundos, sendo que o valor médio é de  $0.7s$ . Os pulsares perdem energia ao emitirem radiação, diminuindo sua frequência de rotação. Dessa forma, quando informamos o período de um pulsar, devemos também especificar a hora em que ele foi medido. O período do pulsar de Hulse-Taylor, por exemplo, foi medido apuradamente com 14 casas após a vírgula

$$1.557\,806\,448\,872\,75 \pm 3 \times 10^{-14}ms,$$

em 29 de novembro de 1982, 1903 UT (*universal time*)<sup>9</sup> [26].

Parece haver duas populações de pulsares, os com período de  $\sim 1s$  e os ditos pulsares de milissegundos.

Os primeiros são formados do colapso do caroço de ferro da estrela progenitora. A mudança de escala de uma supergigante vermelha para uma estrela de nêutrons, combinada com conservação de momento angular e fluxo magnético, faz com que o novo objeto formado gire com velocidade altíssima e tenha campos magnéticos da ordem de  $10^{12}$  gauss. Com o passar do tempo, esses pulsares perdem sua energia em forma de radiação, podendo atingir um ponto crítico, caracterizado por uma combinação de campo fraco e pequeno período, conhecido como *ponto de morte*, em que param de emitir. O pulsar do Caranguejo alcançará essa linha em poucos milhões de anos.

Os pulsares da segunda população passaram por essa fase e alcançaram a linha da morte, mas, com a presença de uma companheira menos densa, em geral uma anã branca, e através de um adequado acréscimo de matéria de sua parceira, conseguem uma aceleração angular. Esses pulsares, com campos magnéticos mais fracos ( $10^8$  gauss), são também conhecidos como *pulsares reciclados*.

Na Fig.1.7, vemos a estrutura típica de um pulsar.

Na Fig.1.8, vemos alguns resultados para massas medidas de pulsares. Nota-se uma preferência por massas entre  $1.4 - 1.5M_{\odot}$ . Dos mais de 730 pulsares conhecidos, apenas cerca de 20 possuem medidas razoáveis de massa. O pulsar de Hulse-Taylor possui  $1.4411 \pm 0.00007M_{\odot}$ , mas essa precisão é incomum. A medida do pulsar Vela X-1,  $1.77_{-0.21}^{+0.27}M_{\odot}$  e de outros mais recentes, tem levado a uma readequação de teorias para aceitar massas desse valor mais elevado.

Tendo revisado os principais resultados para pulsares, evidência experimental para as

---

<sup>8</sup> Aglomerados globulares são conjuntos de  $10^5$  a  $10^6$  estrelas agrupadas em uma densidade 100 vezes maior do que a densidade típica em nossa galáxia.

<sup>9</sup> *Universal time* ou *tempo universal* é o tempo civil de Greenwich. Tempo civil, por sua vez, é aquele que utiliza como origem do dia o instante em que o sol médio passa pelo meridiano inferior do lugar.

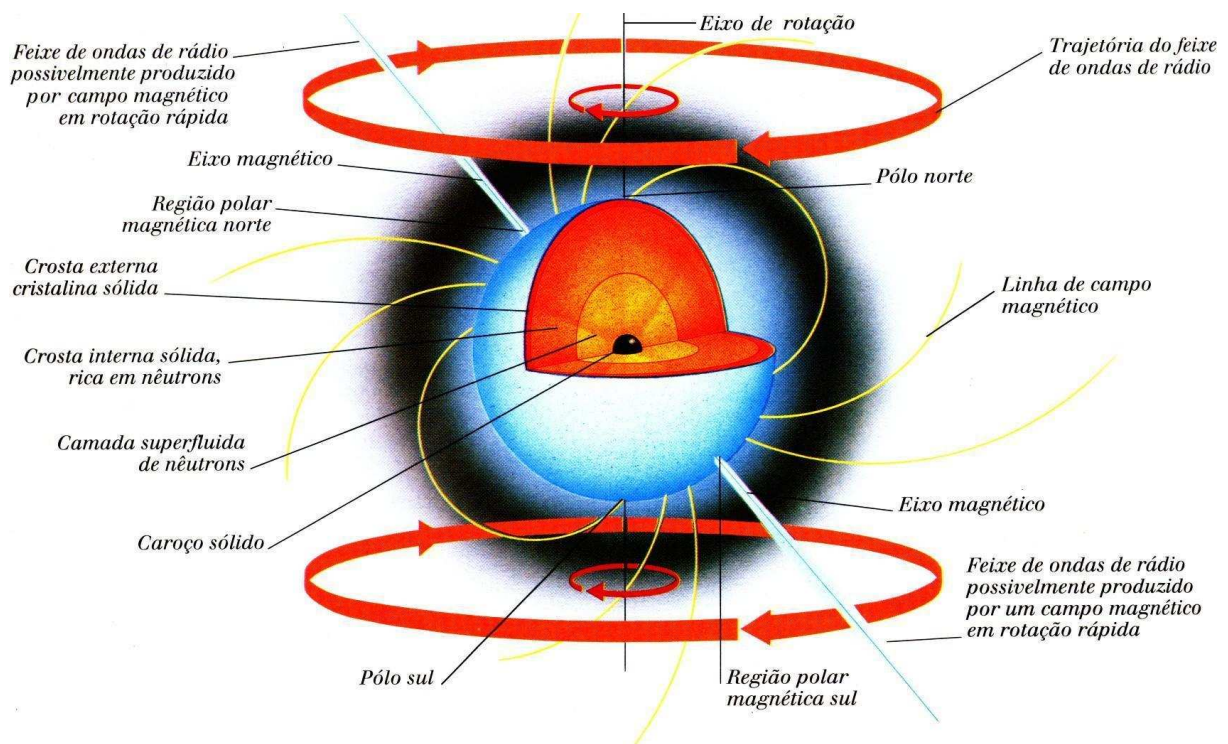


Figura 1.7: Representação simplificada da estrutura de um pulsar, uma estrela de nêutrons magnetizada em rotação [41].

estrelas de nêutrons, voltaremos, agora, nossa atenção para o estudo da estrutura de uma estrela de nêutrons.

### 1.4.3 Estrutura

O nome *estrela de nêutrons* nos dá uma idéia sobre a constituição e a estrutura desses objetos estelares; entretanto, não é essa a única partícula constituinte desse tipo de estrela. Uma estrela de nêutrons pode ser composta por outros bárions ( $n$ ,  $p$ ,  $\Sigma$ ,  $\Omega$ ,...), léptons ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,...) e mésons ( $\omega$ ,  $\pi$ ,  $K$ ,...).

Recapitulemos alguns pontos importantes sobre a estrutura desses objetos. As estrelas de nêutrons possuem uma densidade elevada de aproximadamente  $10^{15}g/cm^3$ , um raio muito inferior ao de uma estrela luminosa e até mesmo comparativamente ao da Terra,  $R \sim 10km$ , e uma massa aproximada de  $1.5M_{\odot}$ . Algumas estrelas de nêutrons podem rotar em alta velocidade, devido à conservação do momento angular durante a sua gênese — são os chamados pulsares, com período de rotação muito pequeno e campo magnético muito intenso. As estrelas de nêutrons devem estar em equilíbrio químico e em regime de neutralidade de carga. Esses aspectos serão explicados na subseção seguinte.

Existem muitos modelos sobre a composição das estrelas de nêutrons. Na região mais superficial da estrela, encontram-se núcleos de ferro, formados no final da vida da estrela

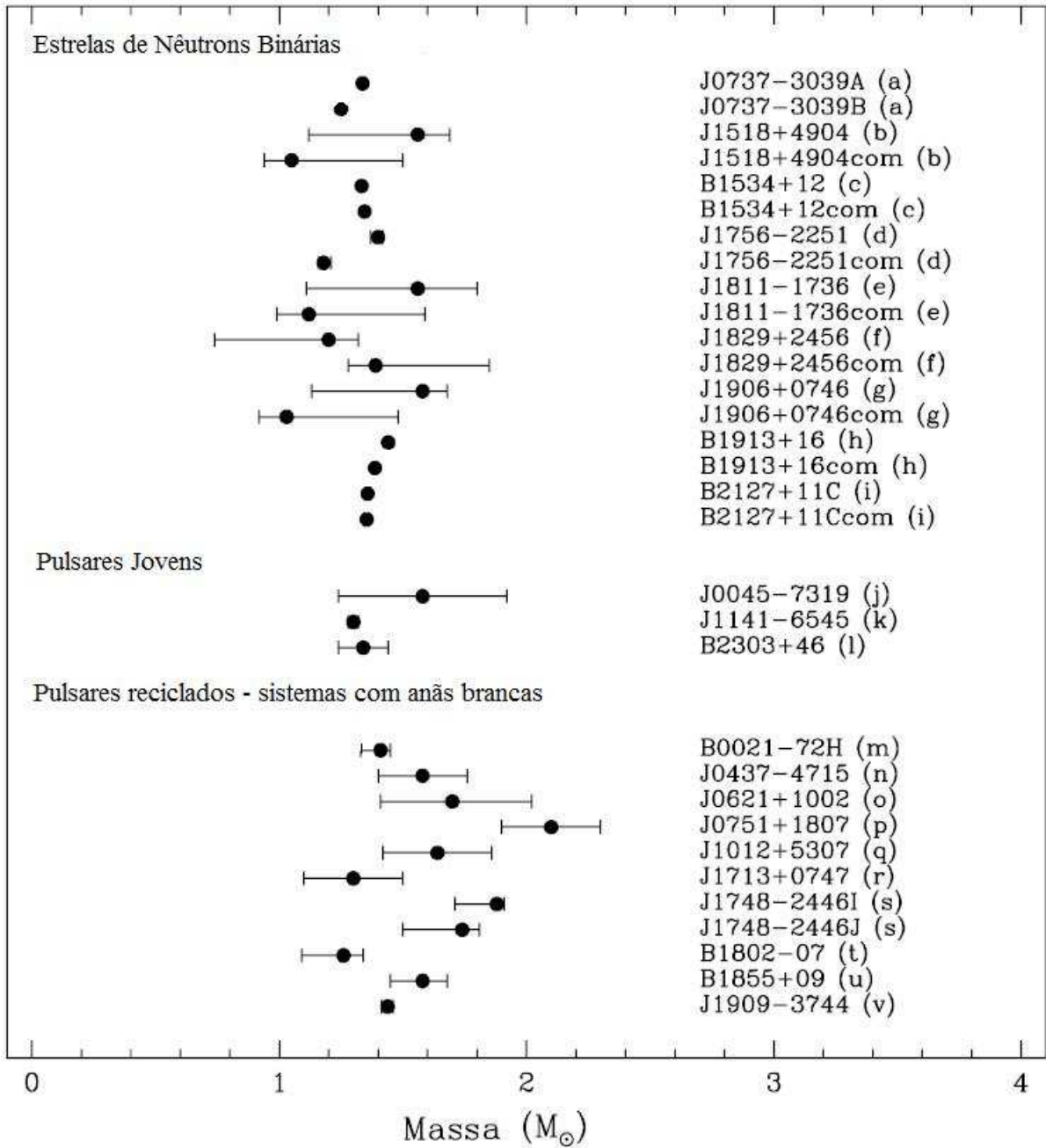


Figura 1.8: Massas de pulsares observados [115].



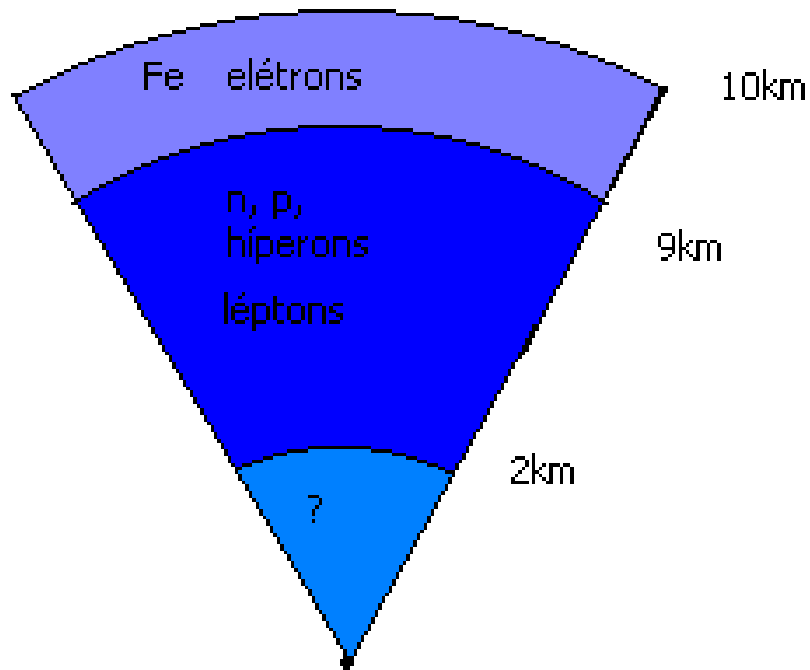


Figura 1.9: Representação simplificada da estrutura de uma estrela de nêutrons.

luminosa que lhe deu origem. A região mais interior contém as partículas que compõem o assim chamado octeto bariônico fundamental (abordaremos esse assunto em maiores detalhes na próxima subseção e no próximo capítulo). Léptons, como o elétron e o múon, encontram-se tanto na região interior como na superfície da estrela [27]. A respeito da constituição do núcleo de uma estrela de nêutrons, as teorias são variadas. De acordo com certos modelos, no núcleo de uma estrela de nêutrons, podemos encontrar, além das partículas do octeto bariônico, condensados de píons [28][30][31] e káons [32][33][34], formados devido à alta densidade desse núcleo. Outra composição prevista para o núcleo contempla um plasma de quarks e glúons, sendo esse o alvo de interesse principal desta dissertação. Esse plasma possui a capacidade de, em altas densidades ou altas temperaturas, liberar os quarks e os glúons do interior dos hádrons [29]. Constituintes fundamentais da matéria hadrônica, os quarks interagem entre si através da troca de glúons. Os quarks são partículas encontradas apenas sob a forma  $qqq$  ou  $q\bar{q}$ , podendo, teoricamente, tornarem-se livres em altas densidades e temperaturas, em condições similares àquelas impostas em uma estrela de nêutrons ou em aceleradores de partículas<sup>10</sup>. O assunto da matéria de quarks e o estudo da formação do plasma de quarks e glúons serão tratados nos capítulos 3 e 4 desta dissertação.

Apresentamos, na Fig.1.9, um esquema simplificado da estrutura de uma estrela de nêutrons.

<sup>10</sup> $qqq$  corresponde a três quarks, e  $q\bar{q}$  a um par de quark e anti-quark.

## 1.4.4 Condições de Equilíbrio

Nesta subseção, dividida em três partes, analisaremos as condições de equilíbrio que devem ser obedecidas por uma estrela de nêutrons: o equilíbrio hidrostático, o equilíbrio de carga e o equilíbrio químico.

### Equilíbrio Hidrostático e Estabilidade

Estrelas de nêutrons e protoneutrônicas são sustentadas contra a pressão gravitacional através da pressão de degenerescência dos nêutrons contidos no seu interior. Para descrever a estrutura dessas estrelas, podemos utilizar as equações da relatividade geral conhecidas como equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [10][11]. Essas equações são deduzidas dentro do formalismo da relatividade geral, a partir das equações de campo de Einstein, considerando-se a estrela como uma distribuição de matéria relativística, esfericamente simétrica, estática e composta por matéria que se comporta como um fluido perfeito<sup>11</sup>. As equações TOV possuem a seguinte forma (no sistema relativístico de unidades<sup>12</sup>, em que  $G = c = 1$ ):

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{\varepsilon(r)M(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (1.13)$$

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \varepsilon(r') dr'. \quad (1.14)$$

Na equação (1.14),  $M(r)$  representa a *massa gravitacional* dentro de  $r$  (a distância entre o centro da estrela e uma camada em seu interior), de modo que, para  $r = R$ ,  $M(r) = M$ , denotando a massa que um observador distante mede por efeitos gravitacionais, como, por exemplo, efeitos orbitais. Na equação (1.13),  $p(r)$  e  $\varepsilon(r)$  correspondem, respectivamente, à pressão e à densidade de energia numa camada à distância  $r$  do centro da estrela.

Uma primeira observação que podemos fazer é que a equação (1.13) possui uma singularidade em  $r = 2M$ . Essa singularidade pode ser prontamente identificada com o raio de Schwarzschild, discutido na subseção 1.3.3, definindo uma possível relação massa-raio para uma estrela de nêutrons:

$$\frac{M}{r} < 0.5. \quad (1.15)$$

Acima desse limite, conforme explicado na subseção 1.3.3, teríamos um buraco negro. Mais adiante, ainda nesta subseção, mostraremos, utilizando as equações TOV, que, a rigor, essa relação massa-raio deve ser ainda menor para uma estrela de nêutrons.

A interpretação física das equações TOV torna-se simples quando percebemos que, de (1.14), podemos escrever que  $dM(r) = 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr$ . Substituindo esse resultado em (1.13),

<sup>11</sup>Não vamos nos dedicar a deduzir as equações TOV e tampouco as equações de Einstein. Para melhor compreensão desses tópicos, remetemos o leitor às referências [15], [35], [36] e [107].

<sup>12</sup>Ver Apêndice A.

obtemos:

$$4\pi r^2 dp = -\frac{M(r)dM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (1.16)$$

O lado esquerdo da expressão se refere à força que a pressão interna exerce sobre uma casca esférica em  $r$  de espessura  $dr$  e massa  $dM(r)$ ; no primeiro termo do lado direito está a atração gravitacional que a massa gravitacional contida em  $r$  exerce sobre a casca. Os demais termos entre parênteses são as correções à teoria newtoniana, originárias da relatividade geral. Deve-se notar que essas correções são todas positivas, de modo a garantir que o gradiente da pressão seja sempre negativo, ou seja, tanto maior a pressão quanto nos aproximamos do centro da estrela. Para estrelas como o Sol, esses termos são desprezíveis, pois  $p \ll \varepsilon$  para astros não relativísticos e, portanto,  $p/\varepsilon \ll M(r)/(4\pi r^3 \varepsilon/3)$ , ou  $4\pi r^3 p(r) \ll M(r)$ . Além disso, como podemos ver na Tabela 1.1,  $M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6}$ . Assim se ignorarmos os últimos três termos de (1.13), recaímos na equação newtoniana de equilíbrio hidrostático.

Para estrelas de nêutrons, as densidades são comparáveis com as da matéria nuclear ( $\rho \simeq 2 \times 10^{14} g/cm^3$ ). Nesse caso, a energia de Fermi é da ordem de  $30 MeV$ , correspondendo a uma temperatura  $T \simeq 3 \times 10^{11} K$ . Portanto, a energia cinética devida à degenerescência é a principal contribuição à pressão, com correções substanciais devido às forças nucleares. A agitação térmica, por sua vez, é desprezível, já que a emissão de neutrinos no colapso para estrela de nêutrons esfria o núcleo para uma temperatura  $T \ll 3 \times 10^{11} K$ .

Assim, tomando as equações TOV juntamente com uma dada *equação de estado* para a matéria da estrela (isto é, uma relação do tipo  $p = p(\varepsilon)$ ), temos um conjunto solúvel de equações, no qual a equação de estado fornece a influência da matéria na solução. As equações TOV podem ser facilmente integradas a partir da densidade de energia central  $\varepsilon_c = \varepsilon(0)$  em  $r = 0$  para determinarmos o perfil de densidades  $\varepsilon(r)$  com a condição inicial extra de que  $M(r = 0) = 0$ . Ao atingir-se o raio  $R$  da estrela,  $p(R) = 0$ , e  $M(R) = M$ . Portanto, a integração das equações TOV deve ser feita reiteradamente até que a pressão  $p(r)$  tenha valor nulo. Assim, para cada equação de estado que introduzimos nessas equações, obtemos uma relação única entre a massa da estrela e sua densidade central. Para cada possível equação de estado, há uma família de estrelas, parametrizadas por  $\varepsilon_c$ , e cada família possui uma estrela de massa máxima.

Indo um pouco mais adiante na análise das equações TOV, podemos encontrar um interessante limite para a razão massa-raio em uma estrela de nêutrons; a restrição sai da análise das equações TOV para uma estrela de densidade constante [14]. Tal estrela é hipotética, pois deveria ser constituída de matéria incompressível para poder sustentar a estrutura estelar. De fato, como veremos mais adiante, a densidade de energia de uma estrela de nêutrons não é constante, mas varia muito pouco ao longo de seu raio.

Para uma estrela de densidade constante  $\varepsilon_0$ , a sua massa será dada por (de acordo com

(1.14)):

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_0 r^3 \quad (1.17)$$

e

$$M = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_0 R^3. \quad (1.18)$$

Por outro lado, equação de equilíbrio hidrostático (1.13) pode ser escrita como

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[p(r) + \varepsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r(r - 2M(r))}. \quad (1.19)$$

Substituindo (1.17) na equação acima, obtemos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4\pi r (p(r) + \varepsilon_0)(3p(r) + \varepsilon_0)}{3(1 - 8\pi\varepsilon_0 r^2/3)}. \quad (1.20)$$

Mesmo com densidade constante, a pressão varia ao longo da estrela, e o valor da pressão no centro é maior do que seu valor para raios maiores. Escrevendo a equação acima como

$$-\int_r^R \frac{dp}{(p + \varepsilon_0)(3p + \varepsilon_0)} = \frac{4\pi}{3} \int_r^R \frac{r dr}{1 - 8\pi\varepsilon_0 r^2/3} \quad (1.21)$$

e integrando, considerando-se que, na superfície da estrela,  $p(R) = 0$ , encontramos

$$\frac{p(r) + \varepsilon_0}{3p(r) + \varepsilon_0} = \sqrt{\frac{1 - 2M/R}{1 - 2Mr^2/R^3}}. \quad (1.22)$$

Podemos encontrar daí uma expressão para  $p(r)$ :

$$p(r) = \varepsilon_0 \left[ \frac{\sqrt{1 - 2M/R} - \sqrt{1 - 2Mr^2/R^3}}{\sqrt{1 - 2Mr^2/R^3} - 3\sqrt{1 - 2M/R}} \right], \quad (1.23)$$

e outra para  $2M/R$ :

$$\frac{2M}{R} = 1 - \left( \frac{p_c + \varepsilon_0}{3p_c + \varepsilon_0} \right)^2, \quad (1.24)$$

onde  $p_c = p(0)$  é a pressão central. Aumentando o raio da estrela, cresce também sua massa, mas também sua pressão central. A maior massa possível seria aquela em que  $p_c$  fosse tão grande que pudéssemos desprezar  $\varepsilon_0$  da expressão (1.24), fornecendo-nos um limite para a razão massa-raio:

$$\frac{2M}{R} < \frac{8}{9} \implies \frac{M}{R} < \frac{4}{9}. \quad (1.25)$$

Esse limite é menor do que aquele referido anteriormente nessa seção. Weinberg, em [14], mostra que a relação acima de fato vale para qualquer estrela estática.

Outra propriedade estelar importante de ser citada é o *desvio para o vermelho* (*red-shift*) sofrido pela radiação emitida por uma estrela. Suponhamos um átomo excitado na superfície da estrela e um observador a uma distância muito grande dela. Considerando a

estrela como sendo relativística, esfericamente simétrica e estática, o intervalo entre duas cristas de onda da radiação emitida será [14]

$$d\tau_s = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{g_{00}(R)}dx^0. \quad (1.26)$$

Quando as duas cristas chegarem ao observador no infinito, o intervalo medido entre os dois eventos de recepção será

$$d\tau_0 = \sqrt{g_{00}(\infty)}dx^0. \quad (1.27)$$

Utilizando a conhecida métrica de Schwarzschild

$$d\tau = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (1.28)$$

podemos ver que a razão entre as frequências da radiação medidas em  $s$  e em  $0$  será

$$\frac{\omega_0}{\omega_s} = \left(\frac{g_{00}(R)}{g_{00}(\infty)}\right)^{1/2} = \sqrt{1 - 2M/R}. \quad (1.29)$$

Convencionalmente, o desvio para o vermelho ( $z$ ) é expresso como a razão entre a diferença dos comprimentos de onda observado e emitido pelo comprimento de onda emitido:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{\omega_s}{\omega_0} - 1. \quad (1.30)$$

Para nossa métrica, então, ficamos com

$$z = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} - 1. \quad (1.31)$$

De acordo com (1.25), sempre teremos  $z < 2$ .

Conforme já dissemos, através da integração das equações TOV, determinamos as configurações de equilíbrio hidrostático. Entretanto, mostraremos, a seguir, que equilíbrio hidrostático não significa estabilidade estelar. Na Fig.1.10, apresentamos um quadro hipotético de resultados para a integração das equações TOV para valores de  $\varepsilon_c$  entre  $10^8 g/cm^3$  e  $10^{16} g/cm^3$ . Na Fig.1.11, vemos, em *zoom*, os mesmos resultados para valores de  $\varepsilon_c$  entre  $10^{13} g/cm^3$  e  $10^{16} g/cm^3$  (faixa de densidades típica das estrelas de nêutrons).

Observando a Fig.1.11, temos, na região de mais baixa densidade, o regime estável da equação, separado da região de instabilidade pelo ponto em que a massa é máxima ( $\partial M/\partial \varepsilon_c = 0$ ) [37]. Essa diferença de estabilidade entra as duas regiões pode ser explicada ao aplicarmos uma perturbação em que a densidade central de uma estrela seja aumentada por uma pequena quantidade. Na região estável, essa estrela deveria aumentar sua massa, ou diminuir a sua densidade, para retornar ao equilíbrio. Como a estrela não irá aumentar sua massa espontaneamente, ela deve retornar ao mesmo ponto. Já em uma estrela situada na região de instabilidade, uma perda de massa pode ocorrer e repetir-se infinitamente

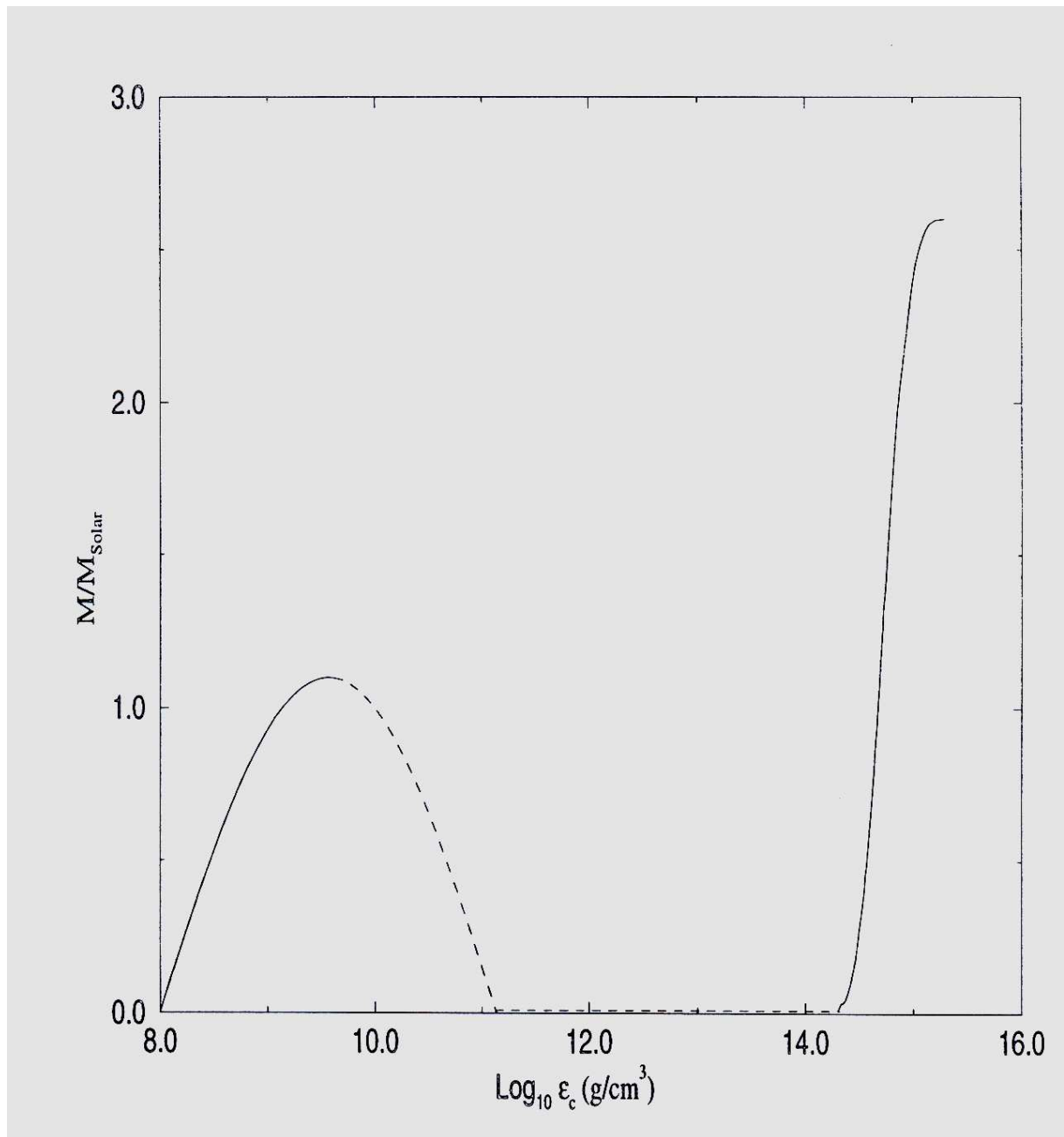


Figura 1.10: Estrutura teórica de regiões de estabilidade para estrelas compactas.

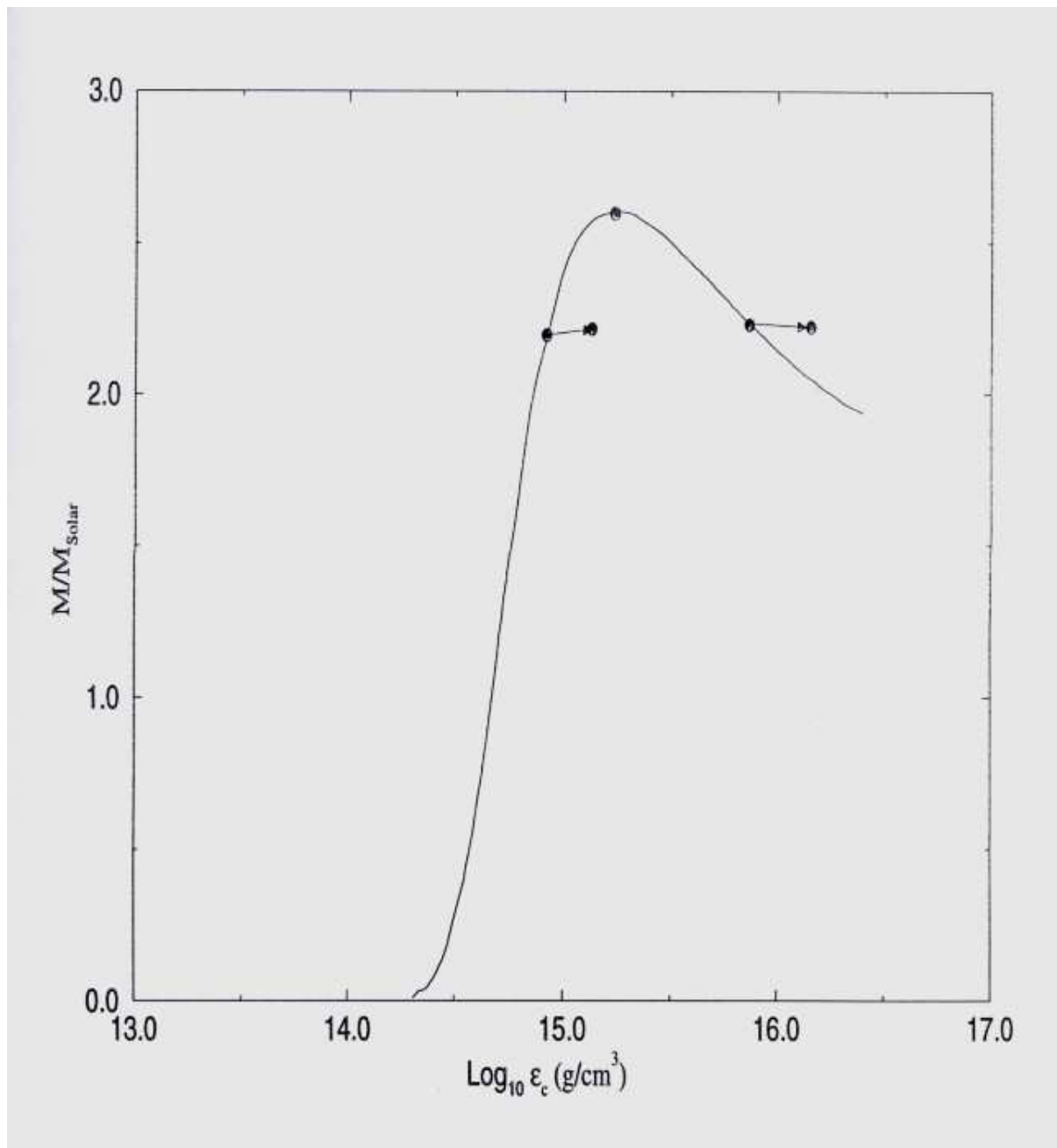


Figura 1.11: Resultado hipotético das equações TOV, mostrando a relação entre as massas de estrelas de nêutrons e suas densidades centrais  $\epsilon_c$ .

até que a estrela esteja totalmente dissipada. Ou seja: uma região de estabilidade deve ter  $\partial M/\partial \varepsilon_c > 0$ .

Assim, observando, agora, a Fig.1.10, encontramos, baseando-nos nesse critério, uma região de equilíbrio estável para anãs brancas, no regime de baixas densidades, seguida de uma região de equilíbrio instável, em que os objetos nela contidos devem expandir-se em anãs brancas, ou colapsar, indo em direção à região estável de maiores densidades, na qual encontram-se as estrelas de nêutrons. Regiões de densidades mais baixas do que as apresentadas na Fig.1.10 correspondem à formação de anãs marrons e planetas.

Equações para estrelas em rotação são dadas por Hartle em [38]. Glendenning também apresenta uma abordagem do assunto em seu livro sobre estrelas compactas [29]. O efeito da rotação na estrutura da maioria das estrelas de nêutrons parece ser bastante pequeno, embora possa ser significativo para uma pequena fração de estrelas com período menor do que um milissegundo [39][40].

Com as informações apresentadas nesta subseção, podemos definir, com mais rigor, o que estaremos chamando de *estrela de nêutrons* nesta dissertação. Neste trabalho, adotamos o nome *estrela de nêutrons* para a solução das equações TOV aplicadas à equação de estado da matéria de nêutrons a  $T = 0$ , sem considerarmos efeitos de rotação, pois não estamos interessados em tratar especificamente de pulsares (estrelas de nêutrons em rotação, como vimos). Por outro lado, adotamos o nome *estrela protoneutrônica* para as soluções das equações TOV aplicadas à equação de estado da matéria nuclear ou de nêutrons a temperatura finita. Por essa razão, por estarmos interessados em estudar a transição de fase de matéria hadrônica para plasma de quarks e glúons no interior das estrelas de nêutrons, descreveremos, nos capítulos 2 e 3, respectivamente, as equações de estado que utilizaremos para modelar a matéria hadrônica e a matéria de quarks ambas em  $T = 0$ . Dispensaremos, assim, a análise da matéria nuclear e da matéria de quarks a temperatura finita.

## Equilíbrio de Carga

Estrelas de nêutrons (em equilíbrio) devem ser eletricamente neutras. Porém, é necessário provar esse fato. Consideremos, então, uma partícula eletricamente carregada situada na superfície da estrela também carregada. Essa partícula sofrerá, portanto, a atração gravitacional e a ação da força eletromagnética. Supondo-se que o sinal da carga líquida da estrela seja o mesmo da partícula, temos que a componente gravitacional deverá superar a repulsão elétrica para que a partícula não seja expulsa da estrela. Ou seja, para que haja estabilidade, a seguinte condição deverá ser satisfeita:

$$\frac{GMm}{R^2} \geq \frac{Z_{liq}e^2}{R^2}, \quad (1.32)$$



onde  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa da estrela,  $m$  é a massa da partícula,  $R$  é o raio da estrela,  $Z_{liq}$  é a carga líquida da estrela e  $e$  é a carga do elétron.

Como a massa gravitacional da estrela é sempre menor que a sua massa bariônica<sup>13</sup> ( $M < Am$ ) podemos escrever:

$$\frac{G(Am)m}{R^2} > \frac{GMm}{R^2} \geq \frac{Z_{liq}e^2}{R^2}, \quad (1.33)$$

onde  $A$  é o número de bárions na estrela. Dessa última desigualdade, obtemos que

$$\frac{Z_{liq}}{A} < \frac{Gm^2}{e^2} \sim 10^{-36} \quad (1.34)$$

para o caso do próton e  $(m_e/m)$  vezes esse valor para o caso do elétron. Uma fração entre  $Z_{liq}$  e  $A$  superior a esse valor expulsa nossa partícula teste da estrela. Dessa forma, vemos que a carga líquida por núcleon é praticamente nula e, assim, podemos considerar que essas estrelas são eletricamente neutras. Note-se, porém, que essa é uma condição global, e não local. Uma discussão mais detalhada a respeito das diferenças entre conservação global e local de carga será realizada no Capítulo 4.

## Equilíbrio Químico

Para estudarmos as condições de equilíbrio químico, devemos analisar as reações químicas que ocorrem na formação de uma estrela de nêutrons. Para tanto, precisamos voltar um pouco na evolução dessas estrelas, instantes depois da explosão em supernova. Nesse estágio, os neutrinos levam 10s para escapar do caroço degenerado, levando consigo grande parte da energia de ligação, diminuindo a temperatura de dezenas de  $MeV$  para apenas alguns  $MeV$ . Nessa fase, os núcleons possuem um momentum tão elevado que sua energia de Fermi supera o valor da massa de alguns híperons<sup>14</sup>, permitindo que essas partículas sejam formadas. Portanto, na análise da constituição e das reações que ocorrem na formação de uma estrela de nêutrons, é importante considerar, além dos prótons e nêutrons, os membros de mais baixa massa do assim chamado octeto bariônico, isto é, os híperons  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  e  $\Xi$ . Apresentamos, na Tabela 1.2, os membros e as propriedades do assim chamado decuplete bariônico, o conjunto dos membros do octeto bariônico juntamente com as ressonâncias<sup>15</sup>  $\Delta$  e  $\Omega$ .

A fuga de neutrinos e fótons combinada com a formação desses bárions massivos é que conduzirá à não conservação da estranheza, pois processos como

$$N + N \longrightarrow N + \Lambda + K \quad (1.35)$$

<sup>13</sup> Chamamos aqui de *massa bariônica* a soma das massas das partículas constituintes no infinito.

<sup>14</sup> Bárions de vida curta que possuem estranheza não-nula.

<sup>15</sup> Partículas elementares de vida muito curta que podem ser consideradas como estados excitados de partículas mais estáveis. As ressonâncias decaem por interação forte em  $10^{-24}$  segundos.

não poderão ser revertidos, já que os cáons terão decaído em neutrinos ou fótons:

$$K^0 \longrightarrow 2\gamma, \quad (1.36)$$

$$K^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad (1.37)$$

$$\mu^- + K^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+ + \nu_\mu \longrightarrow 2\gamma + \nu. \quad (1.38)$$

O híperon  $\Lambda$ , por exemplo, fica proibido pelo princípio de Pauli de se transformar novamente em núcleon, e, assim, uma estranheza líquida aparece na estrela. De fato, apenas as cargas elétrica e bariônica são conservadas na escala de tempo da estrela.

Esses processos continuarão até que a estrela atinja seu estado fundamental, quando as partículas estarão distribuídas pelos diversos mares de Fermi de modo a minimizar a energia; reações posteriores não são permitidas, e se diz que o sistema alcançou equilíbrio químico.

No Apêndice B, deduzimos as relações necessárias para se encontrar o equilíbrio químico, tendo duas cargas conservadas. Como é dito lá, não é necessário saber quais as reações exatas que levarão ao equilíbrio, mas especificaremos algumas delas para entender melhor o processo. De acordo com a expressão (B.6), a relação entre os potenciais químicos associados ao equilíbrio beta simples ( $n \rightleftharpoons p^+ + e^- + \bar{\nu}$ ) será

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad (1.39)$$

já que  $\mu_\nu$  é nulo, pois os neutrinos abandonam a estrela. À medida que a densidade de nêutrons cresce, também aumentam as populações de prótons e elétrons. A equação de equilíbrio associada à reação  $e^- \rightleftharpoons \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$  é

$$\mu_\mu = \mu_e, \quad (1.40)$$

de modo que, quando  $\mu_e$  exceder a massa do múon, essa partícula poderá existir no sistema.

De acordo com (1.35), (1.36), (1.37) e (1.38), temos:

$$\mu_\Lambda = \mu_n; \quad (1.41)$$

$$\mu_{K^0} = 0; \quad (1.42)$$

$$\mu_{K^-} = \mu_e; \quad (1.43)$$

$$\mu_{K^+} = -\mu_e. \quad (1.44)$$

Podemos logo verificar que a regra geral (B.14),

$$\mu_i = q_{bi}\mu_n - q_{ei}\mu_e, \quad (1.45)$$

Bárion	Massa(MeV)	Y	J	I	$I_3$	S	Q
N	939	+1	1/2	1/2	+1/2	0	+1
					-1/2	0	0
$\Lambda$	1116	0	1/2	0	0	-1	0
$\Sigma$	1189	0	1/2	1	+1	-1	+1
					0	-1	0
					-1	-1	-1
$\Delta$	1232	+1	3/2	3/2	+3/2	0	+2
					+1/2	0	+1
					-1/2	0	0
					-3/2	0	-1
$\Xi$	1314	-1	1/2	1/2	+1/2	-2	0
					-1/2	-2	-1
$\Omega$	1672	-2	3/2	0	0	-3	-1

Tabela 1.2: Bárions de mais baixa massa. Y=hipercarga; J=spin; I=isospin;  $I_3$ =terceira componente de isospin; S=estranheza; Q=carga elétrica. Notar que  $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$  (relação de Gell-Mann-Nishijima). O assim chamado *octeto bariônico* compreende os bárions de spin  $J=1/2$ .

é, de fato, obedecida. Portanto, para os próximos híperons da Tabela 1.2,  $\Sigma$  e  $\Xi$ , temos:

$$\mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = \mu_n; \quad (1.46)$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_e; \quad (1.47)$$

$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_e. \quad (1.48)$$

Estabelecemos, assim, as condições de equilíbrio químico para a matéria constituinte de uma estrela de nêutrons.

Neste capítulo, discutimos a evolução estelar e a formação das estrelas de nêutrons, apresentando sua composição e os mecanismos de equilíbrio responsáveis por sua estabilidade.

No próximo capítulo, desenvolveremos uma teoria para a matéria existente nas estrelas de nêutrons, de modo a encontrar uma equação de estado realística para sua descrição. Isso, somado às características gerais das estrelas de nêutrons discutidas até agora, permitir-nos-á encontrar valores para a massa, o raio, o número bariônico, entre outras grandezas, para esses objetos, além de, em conjunto com a teoria para matéria de quarks a ser desenvolvida no Capítulo 3, permitir-nos estudar a transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP* no interior das estrelas de nêutrons.

# Capítulo 2

## Modelos da Hadrodinâmica Quântica

### 2.1 Introdução

A teoria mais aceita para a descrição da interação forte é a *cromodinâmica quântica* (QCD): bárions e mésons constituídos por quarks interagindo via troca de glúons. Esses, ao contrário dos fótons da eletrodinâmica quântica, possuem a carga associada à interação (*carga de cor*) e interagem uns com os outros, o que complica muito o formalismo e torna a teoria quase intratável. No limite de altas densidades ou de grandes transferências de momentum, a descrição dos processos da QCD é facilitada pelo fenômeno de *liberdade assintótica*; os quarks interagem muito fracamente e podem ser usados métodos de perturbação. Para densidades da ordem da densidade nuclear, o alto grau de acoplamento das partículas é revelado no *confinamento* dos quarks em bárions e mésons. A teoria mostra-se, então, extremamente complexa e avessa aos métodos tradicionais de aproximação.

Inúmeras tentativas de contornar esse problema — fundamental para a física nuclear — foram feitas, principalmente através do desenvolvimento de modelos fenomenológicos. Entre os mais importantes estão os modelos de sacola, os modelos de sólitons topológicos e as teorias relativísticas de campos médios, na forma dos assim chamados modelos efetivos da *hadrodinâmica quântica* (QHD). Esse último será o tema do presente capítulo, constituindo a base de nossa descrição da matéria nuclear em estrelas de nêutrons.

Uma teoria relativística de campos médios [43] é covariante e leva em conta apenas os graus de liberdade hadrônicos que, de fato, são os mais importantes na escala de densidades considerada. Nesse modelo, os bárions interagem entre si através da troca dos mésons  $\sigma$  e  $\omega$ <sup>1</sup> aos quais correspondem, respectivamente, as componentes atrativa e repulsiva da força forte. Além de descrever bem propriedades de partícula única do

---

<sup>1</sup>Durante décadas, a partícula  $\sigma$  foi tida como uma partícula virtual que apenas parametriza as componentes escalares das diversas partículas que participam da componente atrativa da força nuclear, como os píons. Em 2001, surgiram evidências de sua detecção [88], que ainda não são unanimidade na comunidade científica.

núcleo finito, também apresenta bom desempenho na descrição das propriedades globais da matéria nuclear (*bulk nuclear matter*), relevantes no estudo de estrelas de nêutrons. As constantes de acoplamento do modelo são determinadas de modo a reproduzirem as energias de ligação por núcleon e a densidade de saturação da matéria nuclear. Um terceiro méson, o  $\varrho$ , é inserido na teoria para reproduzir a energia de simetria da matéria nuclear, a qual favorece estados com mínima diferença entre o número de prótons e de nêutrons.

A introdução de bárions mais pesados, os híperons, se faz necessária para densidades maiores do que a de saturação nuclear. Infelizmente, essas partículas não aparecem no estado fundamental da matéria nuclear, o que dificulta a análise de suas propriedades. Algumas suposições deverão ser feitas para encontrar as constantes de acoplamento associadas à interação dos híperons com os mésons  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\varrho$ .

Neste capítulo, primeiramente, vamos discutir as propriedades da matéria nuclear que queremos reproduzir e só então apresentar o lagrangeano do *modelo  $\sigma$  -  $\omega$*  básico, também conhecido como *modelo de Walecka* ou *modelo da hadrodinâmica quântica (QHD-I)*. Em seguida, justificamos a introdução do méson  $\varrho$  na teoria e, depois, apresentamos a generalização necessária para abrigar todo o octeto bariônico fundamental.

A seguir, abordaremos modelos efetivos alternativos ao de Walecka. Em 2.4, apresentamos o modelo não-linear de Boguta e Bodmer [5], com termos de auto-acoplamento de ordem cúbica e quártica no campo do méson escalar. Os modelos de Zimanyi e Moszkowski [6], com acoplamento derivativo dos mésons, são introduzidos em 2.5 de forma análoga. Finalmente, na seção 2.6, apresentamos um modelo com acoplamento derivativo ajustável [7], o qual será aplicado no Capítulo 4 no estudo da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP* no interior das estrelas de nêutrons.

## 2.2 Propriedades da Matéria Nuclear

A partir das principais características do núcleo atômico, pretendemos descrever razoavelmente a matéria extremamente densa nas estrelas de nêutrons. Esses objetos compactos possuem um número de massa ( $A$ ) muito grande, da ordem de  $10^{57}$ . É, portanto, apropriado descrevê-las considerando as propriedades de *matéria nuclear infinita*, que definiremos a seguir.

A célebre fórmula semi-empírica de massa desenvolvida por Weizacker [48] a partir do modelo nuclear da gota líquida, trouxe a noção de matéria nuclear infinita. Mesmo sendo uma idealização, suas propriedades esclarecem muitos dos fenômenos que ocorrem no núcleo finito, como densidade de saturação, papel da repulsão coulombiana, entre outros.

Essencialmente, a fórmula semi-empírica de massa nos fornece a massa de um núcleo qualquer em função apenas de  $Z$  e  $N$  (número de prótons e nêutrons, respectivamente). Várias contribuições são consideradas na elaboração da fórmula, sendo as mais impor-

tantes a energia de volume, a energia de superfície, a repulsão coulombiana e a energia de simetria. A expressão para a energia de ligação total do núcleo é

$$E_l(A, Z) = -a_1A + a_2A^{2/3} + a_3Z^2A^{-1/3} + a_4(A - 2Z)^2A^{-1}. \quad (2.1)$$

A massa do núcleo será igual à soma das massas dos núcleons livres menos o módulo da energia de ligação,  $|E_l(A, Z)|$ . Interpretamos cada um dos termos abaixo.

A principal característica do núcleo é a existência de uma densidade de saturação, originária da componente repulsiva da força nuclear. A saturação da força nuclear se dá no ponto em que, se adicionarmos um novo núcleon ao sistema, apenas os núcleons mais próximos sentem sua presença, ignorada pelos núcleons das regiões mais internas e densas. Assim, quando adicionamos mais núcleons a um núcleo saturado, a densidade de sua região central não aumenta mais como acontecia até aquele momento. Portanto, com uma densidade aproximadamente constante, podemos definir o volume de um único núcleon como  $v$  e o do núcleo como  $V = Av$ . Idealizando o núcleo como uma esfera, tiramos que  $R = r_0A^{1/3}$ , onde  $R$  é o raio do núcleo e  $r_0$  é uma constante que poderia ser interpretada grosseiramente como o raio de um núcleon típico nessa densidade. Essa contribuição para a fórmula semi-empírica se chama *energia de volume* e é o primeiro termo da expressão (2.1), proporcional a  $A$ .

Os núcleons da superfície do núcleo tem um número menor de vizinhos do que os núcleons mais internos, o que diminui o valor absoluto da energia de ligação. Então deve ser feita uma correção proporcional à área de superfície do núcleo, ou seja, a  $R^2$ . Mas, como  $R$  é proporcional à  $A^{1/3}$ , o segundo termo deve ser proporcional a  $A^{2/3}$ . esse termos é conhecido como *termo de superfície*.

Outro fator que diminui o valor absoluto da energia de ligação é a repulsão coulombiana entre os prótons do núcleo. Considerando os prótons como cargas positivas distribuídas uniformemente em uma esfera de raio igual ao do núcleo, teremos uma *energia de repulsão*  $E_{coul}$  tal que

$$E_{coul} \propto \frac{Z(Z-1)e^2}{R} \sim \frac{e^2}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (2.2)$$

Assim, na fórmula semi-empírica, o termo de energia de repulsão será proporcional a  $Z^2A^{-1/3}$ .

À medida que adicionamos mais núcleons, a repulsão coulombiana entre os prótons obriga-nos a acrescentar uma proporção cada vez maior de nêutrons para conseguirmos manter o núcleo ligado. Porém, sabe-se que os núcleos tendem a ter um número igual de prótons e nêutrons ( $N = Z$ ). Dessa forma, é necessário adicionar um termo de *energia de simetria*, que favorecerá estados com mínima diferença entre  $N$  e  $Z$ . Como os dados experimentais indicam que, para uma mesma razão  $N/Z$ , um núcleo com o dobro de partículas tem o dobro de energia de simetria, concluímos que esse termo deverá ser proporcional a  $A$ . Um desvio da situação ideal  $N = Z = A/2$  implicará uma diminuição

de  $|E_l(A, Z)|$ . Assim:

$$E_{simetria} \propto \left( \frac{1}{2} - \frac{Z}{Z+N} \right)^2 A = a_4 A^{-1} (A - 2Z)^2. \quad (2.3)$$

Esse termo expressa a tendência de se ter  $Z = N$ . Observe-se que ele é zero para  $A = 2Z$ , mas é sempre positivo e aumenta à medida que os núcleos se afastam dessa condição. Isto é, maior o afastamento em relação a  $Z = N$ , menor a energia de ligação e maior a massa do núcleo. A forma da expressão para  $E_{simetria}$  acima é uma das mais simples possuindo essas propriedades. Esse é o último termo da expressão para a energia de ligação total do núcleo.

A expressão (2.1) é conhecida como fórmula semi-empírica de massa porque os parâmetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  são obtidos empiricamente através de ajustes às massas medidas. De acordo com [49] e [50], um conjunto de valores consistente com a fenomenologia, capaz de reproduzir aproximadamente a curva de energia de ligação (Fig.1.2), é

$$a_1 \sim 16.0MeV, a_2 \sim 17.8MeV, a_3 \sim 0.710MeV \text{ e } a_4 \sim 32.5MeV. \quad (2.4)$$

A substância nuclear hipotética que se cria ao desligarmos a interação eletromagnética e fazemos  $A \rightarrow \infty$ , mantendo  $N = Z$ , se chama *matéria nuclear infinita simétrica*. É fácil ver que, ao dividirmos (2.1) por  $A$  e tomarmos os limites acima, o único termo que sobra em (2.1) é o termo que corresponde à energia de volume:

$$\frac{E_l(A \rightarrow \infty, Z = A/2)}{A} \equiv \frac{E_l}{A} = -16.0MeV. \quad (2.5)$$

O parâmetro  $r_0 = 1.12fm$  é determinado nas análises de espalhamento elétron-núcleo; como o volume de um núcleon com esse raio é  $(4\pi/3)r_0^3$ , a densidade de partícula da matéria nuclear será

$$\rho_0 = \frac{1}{(4\pi/3)r_0^3} = 0.17fm^{-3}, \quad (2.6)$$

A densidade acima é denominada *densidade de saturação*<sup>2</sup>. Os valores de  $E_l/A$  e  $\rho_0$  servirão para normalizar a equação de estado nuclear, fornecendo-nos as constantes de acoplamento de nosso modelo fenomenológico.

Como vimos no capítulo anterior, as estrelas de nêutrons, por serem eletricamente neutras, devem ser objetos fortemente assimétricos em isospin, ou seja, o número de nêutrons é bastante superior ao de prótons e elétrons. Porém, uma das características da força nuclear é favorecer estados com simetria em isospin. Assim, um modelo que queira descrever da melhor maneira possível a matéria nessas estrelas deverá poder reproduzir o coeficiente da energia de simetria  $a_4$ .

Podemos identificar  $E_l(A, Z)/A$  com  $\varepsilon/\rho - M$ , onde  $\varepsilon$  é a densidade de energia do sistema e  $M$  é a massa de repouso do núcleon. Para o caso em que  $N \neq Z$ ,  $\varepsilon_0/\rho_0$  será a

---

<sup>2</sup>Daqui por diante, usaremos o subscrito 0 para nos referirmos a valores de grandezas físicas calculadas na saturação.

soma do termo constante da energia de volume  $-a_1$  mais alguma contribuição que aparecer do termo de energia de simetria. Uma variação infinitesimal de  $\varepsilon/\rho$  em relação à simetria corresponderá a uma variação no termo  $a_4$ . Definindo  $t \equiv (N - Z)/A = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ , teremos, de acordo com (2.1):

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2(\varepsilon/\rho)}{\partial t^2} \right)_{t=0}. \quad (2.7)$$

Outra importante propriedade da matéria nuclear que deve ser reproduzida em nossa teoria é a incompressibilidade ou módulo de compressão  $K$ . Ela indica a concavidade da equação de estado  $\rho \times \varepsilon/\rho$  na densidade de saturação, como pode ser visto a partir de sua definição:

$$K = \left[ k^2 \frac{d^2}{dk^2} \left( \frac{\varepsilon}{\rho} \right) \right]_{k=k_F}, \quad (2.8)$$

onde  $k_F$  é o *momentum de Fermi*, isto é, o máximo momentum que um bárion pode possuir nesse sistema. O momentum de Fermi está diretamente relacionado com a densidade  $\rho$ . Trataremos dessa grandeza em maior detalhe mais adiante; o que é preciso saber, agora, a seu respeito é que, se impusermos à matéria nuclear uma configuração distinta daquela correspondente ao seu equilíbrio original, através da aplicação de uma pequena perturbação, o módulo de compressibilidade determinará se o sistema pode voltar ao equilíbrio e como isso deve acontecer, uma vez que a força nuclear possui caráter atrativo e de curto alcance. Quanto mais alto seu valor, maior será a energia necessária para deslocar a matéria de seu equilíbrio, que mais facilmente retornará ao seu estado original. Os melhores valores dessa grandeza saem das análises de ressonâncias gigantes monopolares (modos de oscilação radiais do núcleo), mas a margem de erro em sua determinação ainda é grande, com  $K$  ficando entre  $200 - 300 MeV$  [51][52]. Evidências recentes sugerem um valor aproximado de  $K = 234 MeV$  [53]. Outros trabalhos ainda mais novos apontam  $K = 248 MeV$  [86][87].

Por último, mas não menos importante, nossa teoria deve reproduzir os resultados experimentais para a massa efetiva do núcleon  $M^*$ . Essa grandeza expressa o desvio na massa dos núcleons que aparece decorrente de sua interação com os mésons escalares, os quais correspondem às componentes escalares atrativas da força nuclear. Como veremos, a densidade de energia dependerá fundamentalmente de  $M^*$ . A massa efetiva na densidade de saturação não é precisamente conhecida. Contudo, experimentos de espalhamento de nêutrons em núcleos de chumbo fornecem valores para massa efetiva na densidade de saturação que vão de 0.7 a 0.8 vezes a massa do núcleon livre.

De acordo com o famoso artigo [47], que conta com a participação de um brasileiro, L. C. Gomes, um núcleo comporta-se como se fosse formado por núcleons movendo-se sob a ação de um campo médio. O modelo que iremos apresentar na próxima seção tem essa peculiaridade dos núcleons como pedra angular em seu desenvolvimento.



Partícula	Campo	Natureza	Massa (MeV)
Sigma	$\sigma$	escalar/isoescalar	$m_\sigma = 600$
Ômega	$\omega$	vetorial/isoescalar	$m_\omega = 782$
Rô	$\rho$	vetorial/isovetorial	$m_\rho = 770$
Núcleons	$\psi$	espinorial	$M = 939$

Tabela 2.1: Características das partículas presentes no modelo de Walecka.

## 2.3 Modelo de Walecka

Nesta seção, abordaremos o modelo efetivo conhecido como modelo de Walecka ou modelo  $\sigma - \omega$ . Apresentaremos os cálculos do modelo com razoável nível de detalhamento, por ser essa a primeira abordagem para o problema de obtenção da equação de estado da matéria nuclear a ser apresentada nesta dissertação. Para os modelos introduzidos nas seções seguintes, os resultados de interesse serão apresentados como simples extensões daqueles obtidos para o modelo de Walecka.

### 2.3.1 Lagrangeano

John Dirk Walecka propôs uma teoria de campos relativísticos [3], antevista em trabalhos de Johnson e Teller [44] e Duerr [45], descrevendo um sistema nuclear de muitos corpos<sup>3</sup>.

No modelo de Walecka, os núcleons são representados pelo lagrangeano de Dirac (porque são férmions), pelo campo  $\psi$  e têm massa  $M$ . O méson  $\sigma$  é representado pelo lagrangeano de Klein-Gordon (porque é um bóson de spin nulo), pelo campo  $\sigma$  e tem massa  $m_\sigma$ . O méson  $\omega$  é representado pelo lagrangeano de Proca (porque é um bóson vetorial), pelo campo  $\omega$  e tem massa  $m_\omega$ . (Na subseção 2.2.7, introduziremos o méson isovetorial  $\rho$  no formalismo.) As principais características desses campos estão mostradas na Tabela 2.1. Os campos pertencentes a tal formalismo são caracterizados a partir de seu comportamento sob as transformações de Lorentz. Uma abordagem clara sobre o assunto encontra-se na referência [46], classificando os campos de acordo com a sua estrutura.

Baseado empiricamente no comportamento das interações entre núcleons, o potencial nuclear é descrito, nesse modelo, através da troca de mésons escalares, responsáveis pela atração nuclear de longo alcance, e vetoriais, responsáveis pela repulsão nuclear de curto alcance. Esse potencial está representado, na formulação de Yukawa, no limite não-relativístico, por:

$$V_{eff}(r) = \frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\omega r}}{r} - \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\sigma r}}{r}, \quad (2.9)$$

<sup>3</sup>Daqui para frente, usamos a convenção  $\hbar = c = 1$ . Ver Apêndice A.

onde as constantes  $g_\sigma$  e  $g_\omega$  são as assim chamadas constantes de acoplamento, que definem a intensidade do acoplamento méson-núcleon, respectivamente para os mésons escalar e vetorial. O potencial de Yukawa está representado na Fig.2.1.

Montaremos o lagrangeano de Walecka juntando os três termos para as partículas livres com o termo de interação, que é definido assumindo que o méson escalar neutro se acopla à densidade escalar dos bárions através de  $g_\sigma \bar{\psi}\psi\sigma$  e que o méson vetorial neutro se acopla à corrente de bárions (conservada) através de  $g_\omega \bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu$ . Esse é o chamado acoplamento mínimo.

Assim, o lagrangeano de Walecka é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) \\ & + \left( -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \right) + (g_\sigma\bar{\psi}\psi\sigma - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Coletando termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega\omega^\mu) - (M - g_\sigma\sigma)]\psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$ .

A primeira pergunta que surge diante desse formalismo se refere à ausência dos píons, uma vez que esses representam, no regime de longo alcance, as partículas de troca da interação nuclear. A resposta está relacionada à presença do campo  $\sigma$ , que, na formulação original de Walecka, em 1974, representava um méson fictício e que caracteriza, de forma paramétrica, os efeitos de longo alcance das diferentes contribuições da interação do méson- $\pi$  com os núcleons. Esta parametrização das contribuições do méson- $\pi$  à interação nuclear através do méson- $\sigma$  se deve ao fato do campo do pión acoplar-se ao do núcleon de diferentes formas, conforme o alcance dessas interações. Além disso, os píons não contribuem de forma significativa na determinação de propriedades intrínsecas da matéria nuclear. Atualmente, porém, há indícios de que o méson escalar  $\sigma$  possa existir, sendo também conhecido como  $f_0(600)$ . A dificuldade de detecção de ressonâncias escalares tem vários motivos, sendo os principais sua grande amplitude de decaimento, que provoca forte sobreposição entre as ressonâncias de fato e o fundo, e também porque vários canais de decaimento se abrem em um pequeno intervalo de massas. Para maiores detalhes, ver [88], [91] e as referências ali contidas.

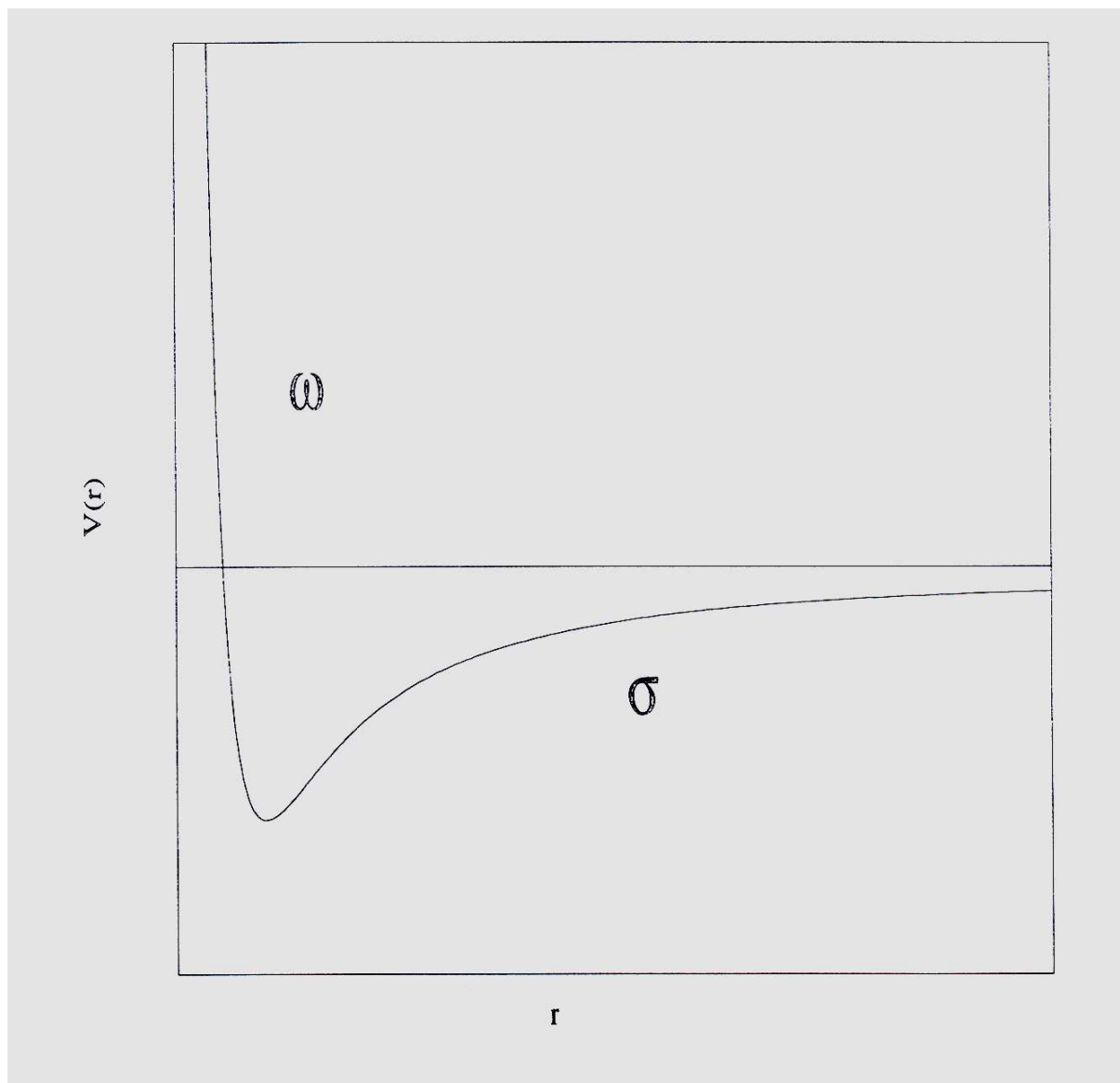


Figura 2.1: Representação esquemática do potencial nuclear de Yukawa em função da distância de separação em relação à origem, indicando a região de domínio dos mésons apresentados no modelo de Walecka em sua formulação original.

### 2.3.2 Equações de Campo

Agora, iremos aplicar as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} \right) = 0 \quad (2.12)$$

ao lagrangeano da Walecka para obter as equações de campo. Aqui,  $q_i$  são os diferentes campos que compõem a teoria.

#### Para o Campo $\sigma$

Para o campo  $\sigma$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right) = 0 \quad (2.13)$$

$$g_\sigma \bar{\psi} \psi - m_\sigma^2 \sigma - \partial_\mu (\partial^\mu \sigma) = 0 \quad (2.14)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma = g_\sigma \bar{\psi} \psi. \quad (2.15)$$

Essa é uma equação do tipo Klein-Gordon com uma fonte escalar de Lorentz, a densidade escalar  $\rho_s = \bar{\psi} \psi$ .

#### Para o Campo $\psi$

Para o campo  $\psi$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} \right) = 0 \quad (2.16)$$

$$[\gamma_\mu (i \partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi = 0. \quad (2.17)$$

Essa é uma equação de Dirac com desvio na massa e no termo de quadrimomentum devido à presença dos mésons escalar e vetorial, respectivamente.

#### Para o Campo $\bar{\psi}$

Para o campo  $\bar{\psi}$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \right) = 0 \quad (2.18)$$

$$\bar{\psi} [-\gamma_\mu g_\omega \omega^\mu - M + g_\sigma \sigma] - \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu i) = 0 \quad (2.19)$$

$$\bar{\psi} [\gamma_\mu (i \overleftarrow{\partial}^\mu + g_\omega \omega^\mu) + (M - g_\sigma \sigma)] = 0 \quad (2.20)$$

Essa é a equação de Dirac adjunta com campos vetorial e escalar. Essa equação de campo não será usada daqui para diante porque é apenas a conjugada da equação (2.17).

## Para o Campo $\omega$

Para o campo  $\omega$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^\mu} - \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \omega^\mu)} \right) = 0 \quad (2.21)$$

$$-\bar{\psi} \gamma_\mu g_\omega \psi + m_\omega^2 \omega_\mu - \partial^\mu (F_{\mu\nu}) = 0 \quad (2.22)$$

$$-\partial^\mu F_{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu = g_\omega \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (2.23)$$

Essa é uma equação semelhante à que Proca utilizou para descrever um fóton massivo, mas com uma fonte vetorial de Lorentz, a corrente quadrivetorial bariônica  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ .

A corrente bariônica  $j^\mu$  é conservada, isto é,

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.24)$$

Para provar tal fato, calculemos a derivada  $\partial_\mu j^\mu$  como segue:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \quad (2.25)$$

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \quad (2.26)$$

Multiplicando toda relação pelo número imaginário  $i$ , obtemos:

$$i \partial_\mu j^\mu = i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \quad (2.27)$$

Agora, de (2.20), vemos que

$$i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = -\bar{\psi} g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma), \quad (2.28)$$

de onde vem que

$$i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = -\bar{\psi} g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu \psi - \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma) \psi. \quad (2.29)$$

Por outro lado, de (2.17), vemos que

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu \psi + (M - g_\sigma \sigma) \psi, \quad (2.30)$$

de onde vem que

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{\psi} g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu \psi + \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma) \psi. \quad (2.31)$$

Substituindo (2.29) e (2.31) em (2.27), resulta que

$$\begin{aligned} i \partial_\mu j^\mu &= i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= [-\bar{\psi} g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu \psi - \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma) \psi] + [\bar{\psi} g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu \psi + \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma) \psi] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

ou seja

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.33)$$

como queríamos mostrar. Para maiores detalhes, sobre quantidades conservadas, ver Apêndice C.

### 2.3.3 Tensor Energia-Momentum

De grande importância em nossos estudos será o cálculo do *tensor energia-momentum*, pois será a partir dele que chegaremos à equação de estado da matéria nuclear. Em teoria quântica de campos, o tensor energia-momentum é definido como

$$T_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu q_i)} \partial_\nu q_i, \quad (2.34)$$

onde  $q_i$  representada cada um dos campos do modelo e  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico de Minkowsky:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Aplicando essa definição ao lagrangeano de Walecka, ficamos com

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & - \left[ \bar{\psi} [\gamma_\alpha (i\partial^\alpha - g_\omega \omega^\alpha) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi + \frac{1}{2} (\partial_\alpha \sigma \partial^\alpha \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\alpha \omega^\alpha \right] g_{\mu\nu} + (\partial_\mu \sigma) \partial_\nu \sigma - (F_{\mu\lambda}) \partial_\nu \omega^\lambda + (\bar{\psi} \gamma_\mu i) \partial_\nu \psi. \end{aligned}$$

Usando a equação (2.17) para o campo  $\psi$ , o primeiro termo entre colchetes desaparece, restando:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & - \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha \sigma \partial^\alpha \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\alpha \omega^\alpha \right] g_{\mu\nu} \\ & + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + F_{\lambda\mu} \partial_\nu \omega^\lambda + i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi \\ T_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left[ -\partial_\alpha \sigma \partial^\alpha \sigma + m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - m_\omega^2 \omega_\alpha \omega^\alpha \right] g_{\mu\nu} \\ & + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + F_{\lambda\mu} \partial_\nu \omega^\lambda + i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi. \end{aligned}$$

Para um sistema *uniforme e estático*, podemos identificar

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (2.36)$$

como sendo a estrutura do tensor energia-momentum e onde a quadri-velocidade, para um fluido em repouso, é descrita por  $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ , e satisfaz  $u_\mu^2 = 1$ . Determinamos, assim, a densidade de energia  $\varepsilon$  e a pressão  $p$  do sistema através do valor esperado do tensor energia-momentum, para o estado fundamental da matéria nuclear

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (2.37)$$

$$p = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle, \quad (2.38)$$

onde o tensor energia-momentum assume a forma simétrica

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

### 2.3.4 Aproximação de Campo Médio

Retomemos as equações de campo obtidas na subseção anterior ((2.15), (2.23) e (2.17)):

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2)\sigma = g_\sigma \bar{\psi}\psi; \quad (2.40)$$

$$-\partial^\mu F_{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu = g_\omega \bar{\psi}\gamma_\mu \psi; \quad (2.41)$$

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)]\psi = 0. \quad (2.42)$$

Essas equações de campo assumem uma forma não linear, dificultando a obtenção de soluções exatas. Essa não linearidade apresenta-se nas derivadas dos campos mesônicos ( $\partial_\mu \partial^\mu \sigma$  e  $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ ), relacionadas com as fontes associadas aos campos bariônicos ( $g_\sigma \bar{\psi}\psi$  e  $g_\omega \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$ ), equações (2.40) e (2.41) respectivamente.

Devemos procurar soluções através de aproximações. A primeira hipótese seria a utilização de uma teoria de perturbações. Entretanto, esse tipo de tratamento se torna inviável, devido ao forte acoplamento entre os campos, representado pelas constantes de acoplamento  $g_\sigma$  e  $g_\omega$ . Em uma expansão em série dessas expressões, em termos das constantes de acoplamento da teoria, cada novo termo de mais alta ordem seria mais importante do que os demais precedentes.

Procuramos, então, uma nova forma de aproximação. Considerando a matéria nuclear como *uniforme, estática* e em seu *estado fundamental*, podemos enxergar o núcleon sob a ação de uma interação nuclear média [47] e trabalhar apenas com os valores médios (e, portanto, constantes) dos campos dos mésons:  $\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle$  e  $\omega^\mu \rightarrow \langle \omega^\mu \rangle$ . Esse tipo de abordagem é conhecida como *aproximação de campo médio* (MFT, do inglês *mean-field theory*). Quanto maior a densidade do sistema considerado, melhor a validade dela, mostrando-se, pois, muito conveniente para aplicações em estrelas de nêutrons, que é o objetivo deste trabalho. No regime de altas densidades, as derivadas dos campos mesônicos representam pequenas flutuações em torno de seu valor médio, na comparação com os valores esperados das fontes. Visualizamos melhor esse regime de validade através das condições:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma \ll g_\sigma \bar{\psi}\psi; \quad (2.43)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} \ll g_\omega \bar{\psi}\gamma^\mu \psi. \quad (2.44)$$

Satisfeitas essas condições, podemos, então, realizar a substituição dos campos dos mésons por seus valores esperados:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0; \quad (2.45)$$

$$\omega^\mu \rightarrow \langle \omega^\mu \rangle = \delta_{\mu 0} \omega_0. \quad (2.46)$$

Analisaremos, a seguir, a forma assumida pelas equações de campo quando substituirmos (2.45) e (2.46) em (2.40), (2.41) e (2.42).

### Equação do Campo $\sigma$ na MFT

Tomando a MFT em (2.40), temos que

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \langle \sigma \rangle = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle . \quad (2.47)$$

Como  $\langle \sigma \rangle = \sigma_0$  é constante, a sua derivada é nula. Assim, da equação acima, ficamos com

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (2.48)$$

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle , \quad (2.49)$$

onde, à direita, temos a densidade escalar de Lorentz

$$\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle . \quad (2.50)$$

Substituindo esse resultado em (2.49), obtemos:

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_s . \quad (2.51)$$

### Equação do Campo $\omega$ na MFT

Tomando o valor médio em ambos os lados de (2.41), para fazermos a MFT, temos que

$$\langle -\partial^\mu F_{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu \rangle = \langle g_\omega \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \rangle \quad (2.52)$$

$$-\partial^0 \langle F_{\mu\nu} \rangle + m_\omega^2 \langle \omega_\mu \rangle = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle . \quad (2.53)$$

Pela definição de  $F_{\mu\nu}$ , que contém derivadas do campo  $\omega$ , temos que  $\langle F_{\mu\nu} \rangle = 0$ . Além disso, da forma das soluções espinoriais para a equação de Dirac, sabemos que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 . \quad (2.54)$$

Com isso, a equação para o campo  $\omega$  na MFT fica

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \langle \psi^\dagger \psi \rangle , \quad (2.55)$$

de onde vem que

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \langle \psi^\dagger \psi \rangle , \quad (2.56)$$

onde surge a densidade bariônica:

$$\rho_B = \langle \psi^\dagger \psi \rangle = \frac{B}{V} , \quad (2.57)$$

sendo  $B$  o número de bárions no sistema (*número bariônico*), dado por

$$B = \int_V d^3x \ j^0 = \int_V d^3x \ \psi^\dagger \psi = V \langle \psi^\dagger \psi \rangle , \quad (2.58)$$

e sendo  $V$  o volume do mesmo. Assim, a equação (2.56) fica escrita como

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B . \quad (2.59)$$



## Equação do Campo $\psi$ na MFT

Tomando a MFT em (2.42), temos que

$$[\gamma_\mu i\partial^\mu - \gamma_0 g_\omega \omega_0 - (M - g_\sigma \sigma_0)]\psi = 0. \quad (2.60)$$

Definimos a assim chamada *massa efetiva*:

$$M^* = M - g_\sigma \sigma_0. \quad (2.61)$$

Com essa definição, a equação para o campo  $\psi$  na MFT fica

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma_0 g_\omega \omega_0 - M^*)\psi = 0. \quad (2.62)$$

### 2.3.5 Equação de Estado da Matéria Nuclear

A equação de estado é uma ferramenta muito importante no estudo das transições de fase da matéria nuclear e de nêutrons. Seus resultados são também de particular importância para a computação das equações TOV, com vistas à determinação de propriedades globais das estrelas de nêutrons. Nesta subseção, vamos discutir resumidamente o cálculo da equação de estado no modelo de Walecka.

#### Quantização Canônica

Um passo importante na busca pela equação de estado da matéria nuclear é a quantização do campo nuclear.

Reescrevemos, com esse objetivo, a densidade lagrangeana referente à equação de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi. \quad (2.63)$$

Seguindo o formalismo de Euler-Lagrange, determinamos o momento conjugado ao campo  $\psi$  como sendo

$$\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger. \quad (2.64)$$

Impõe-se, devido ao seu caráter fermiônico, uma relação de anti-comutação entre o campo  $\psi$  e seu momento conjugado  $i\psi^\dagger$ ,

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.65)$$

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0, \quad (2.66)$$

onde os índices da matriz de Pauli estão indicados explicitamente.

O próximo passo consiste em expandir as soluções da equação de Dirac em modos normais. Para tanto, consideramos o sistema contido em uma caixa com volume  $V = L^3$  (ver Fig.2.2), e impomos condições de contorno periódicas:

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad (2.67)$$

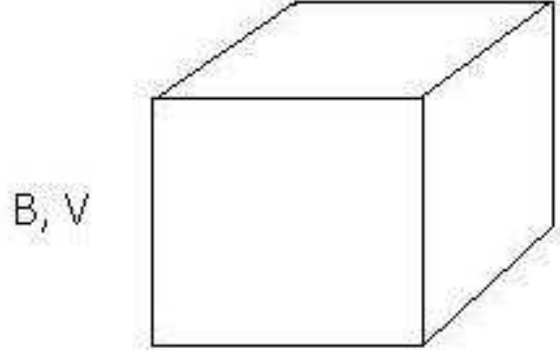


Figura 2.2: Caixa de volume  $V$  preenchida uniformemente com  $B$  bárions.

$$i = x, y, z, \quad (2.68)$$

$$n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (2.69)$$

e, *a posteriori*, em nosso estudo, tomamos o limite  $V \rightarrow \infty$ , o limite para a matéria nuclear infinita.

Na representação de Schrödinger, o campo dos bárions pode ser expandido em termos do conjunto completo de soluções para a equação de Dirac de acordo com

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left[ A_{\mathbf{k}\lambda} u(\mathbf{k}\lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger v(\mathbf{k}\lambda) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (2.70)$$

e também com

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left[ A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\mathbf{k}\lambda) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + B_{\mathbf{k}\lambda} v^\dagger(\mathbf{k}\lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (2.71)$$

onde  $k^0 = E(k) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}$  e onde  $u$  e  $v$  são os espinores de Dirac normalizados correspondentes, respectivamente, às soluções de energia positiva e negativa. Os índices  $\mathbf{k}$  e  $\lambda$  representam, respectivamente, o momentum e o spin das partículas.

Com isso, restam-nos apenas duas relações de anti-comutação:

$$\{A_{\mathbf{k}\lambda}, A_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.72)$$

e

$$\{B_{\mathbf{k}\lambda}, B_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.73)$$

Identificamos, assim, os operadores  $A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$  e  $A_{\mathbf{k}\lambda}$  como os operadores de criação e destruição de bárions, bem como os operadores  $B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$  e  $B_{\mathbf{k}\lambda}$  como os operadores de criação e destruição de antibárions. Atingimos, então, o formalismo apropriado da segunda quantização e da teoria quântica de campos relativísticos.

## Densidade Bariônica

Como nos mostra a equação (2.57), precisamos calcular, primeiramente, o produto  $\psi^\dagger\psi$  para conhecermos a densidade bariônica  $\rho_B$ . Para isso, utilizamos as soluções normalizadas (2.70) e (2.71) mostradas na subseção anterior.

Quando fazemos a multiplicação  $\psi^\dagger\psi$ , os termos cruzados se anulam, pois os espinores de Dirac  $u$  e  $v$  são ortonormais, ou seja,  $u^\dagger v = v^\dagger u = 0$  e  $uu^\dagger = vv^\dagger = 1$ . Resta-nos, portanto:

$$\psi^\dagger\psi = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left[ A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + B_{\mathbf{k}\lambda} B_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (2.74)$$

Então, substituindo o resultado para  $\psi^\dagger\psi$  obtido acima em (2.58), temos que

$$B = \int d^3x \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left[ A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + B_{\mathbf{k}\lambda} B_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (2.75)$$

Usando a condição de normalização

$$\frac{1}{V} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.76)$$

a equação para o número bariônico  $B$  fica escrita como

$$B = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} + B_{\mathbf{k}\lambda} B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger]. \quad (2.77)$$

De acordo com (2.73), temos que

$$B_{\mathbf{k}\lambda} B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger = 1 - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (2.78)$$

Substituindo esse resultado na expressão para  $B$ , obtemos

$$B = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}] + \sum_{\mathbf{k}\lambda} 1 \quad (2.79)$$

O último termo é uma constante que pode ser interpretada como a soma de todos os estados de energia negativa ocupados no mar de Dirac. Porém, como todas as medições são feitas em relação ao vácuo, podemos tomar esse último termo como nulo, restando

$$B = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}]. \quad (2.80)$$

Agora, substituindo (2.80) em (2.57), vem que

$$\rho_B = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}]. \quad (2.81)$$

Agora, tomamos finalmente o limite para matéria nuclear infinita, isto é, tomamos o limite para um volume infinitamente grande:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k, \quad (2.82)$$

onde  $k_F$  é o já citado *momentum de Fermi*, isto é, o máximo valor de momentum que um bárion nesse sistema possui. Nesse limite, a expressão para  $\rho_B$  fica:

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k [A_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} A_{\mathbf{k}\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} B_{\mathbf{k}\lambda}]. \quad (2.83)$$

Nesse momento, devemos lembrar com qual estado quântico da matéria nuclear estamos trabalhando. Conforme dissemos no início da seção 2.3.4, ao introduzirmos a aproximação de campo médio, estamos considerando matéria nuclear como *uniforme, estática* e em seu *estado fundamental*. Estando a matéria nuclear em seu *estado fundamental*, podemos facilmente calcular os valores de  $A_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} A_{\mathbf{k}\lambda}$  e de  $B_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} B_{\mathbf{k}\lambda}$ .

No estado fundamental, temos uma esfera de Fermi com todos os níveis preenchidos com bárions até o nível de Fermi; nenhum está preenchido depois do nível de Fermi. Assim, sendo  $|F\rangle$  o vetor de estado que representa o estado fundamental, podemos dizer que

$$A_{\mathbf{k}\lambda}|F\rangle = 0, \quad \text{para } |\mathbf{k}| > k_F, \quad (2.84)$$

$$A_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}|F\rangle = 0, \quad \text{para } |\mathbf{k}| < k_F, \quad (2.85)$$

$$B_{\mathbf{k}\lambda}|F\rangle = 0, \quad \text{para todo } |\mathbf{k}|, \quad (2.86)$$

e

$$A_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} A_{\mathbf{k}\lambda}|F\rangle = |F\rangle, \quad \text{para } |\mathbf{k}| < k_F. \quad (2.87)$$

Com isso, a expressão para a densidade bariônica fica:

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k. \quad (2.88)$$

Vamos agora trocar a nomenclatura, transformando o somatório em  $\lambda$  em um fator de degenerescência de spin e isospin  $\gamma$ , pois cada estado criado comporta  $\gamma$  partículas, isto é, para cada valor de  $k$  considerado, poderemos ter  $\gamma$  partículas. No caso de matéria composta apenas por nêutrons (chamada doravante de *matéria de nêutrons*),  $\gamma = 2$ , pois poderemos ter dois nêutrons para um mesmo valor de  $k$ , um com spin  $+1/2$  e outro com spin  $-1/2$ . No caso de matéria composta por prótons e nêutrons (chamada doravante de *matéria nuclear*),  $\gamma = 4$ , pois poderemos ter dois prótons e dois nêutrons para um mesmo valor de  $k$ , um com spin  $+1/2$  e outro com spin  $-1/2$ .

Com essa mudança de nomenclatura, a equação para  $\rho_B$  fica:

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k. \quad (2.89)$$

Integrando, temos que

$$\rho_B = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3. \quad (2.90)$$

Essa é nossa expressão final para a densidade bariônica no modelo de Walecka.

## Pressão e Densidade de Energia

Introduzindo as aproximações de campo médio na expressão para o tensor energia-momentum obtida na subseção 2.3.3, obtemos, com facilidade, o tensor energia-momentum do modelo de Walecka na MFT:

$$(T_{\mu\nu})_{MFT} = \left( \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \right) g_{\mu\nu} + \langle i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \rangle . \quad (2.91)$$

Estamos, então, prontos para o cálculo da equação de estado da matéria nuclear no modelo de Walecka. Da equação (2.38), temos que

$$p = \frac{1}{3}(T_{ii})_{MFT} . \quad (2.92)$$

Conhecendo as matrizes de Dirac<sup>4</sup>, podemos dizer que

$$\gamma_\mu = (\gamma_0, -\vec{\gamma}) . \quad (2.93)$$

Calculando a componente  $ii$  do tensor energia-momentum na aproximação de campo médio, obtemos:

$$p = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \right) (g_{ii}) - \langle i\bar{\psi}\gamma_i\partial_i\psi \rangle \right] . \quad (2.94)$$

Lembrando a convenção de Einstein para soma de índices repetidos e substituindo as respectivas componentes do tensor energia-momentum, vem que

$$p = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \right) (-3) - \langle i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi \rangle \right] . \quad (2.95)$$

Usando (2.54), resulta:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \left\langle \frac{1}{3}i\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi \right\rangle . \quad (2.96)$$

Assim, o problema para calcular a pressão no modelo de Walecka se resume a calcular o terceiro termo da expressão acima. O cálculo é bastante mais fastidioso do que o cálculo da densidade bariônica, mas não mais complexo, seguindo basicamente os mesmos passos (para um completo desenvolvimento do cálculo, ver [106]). Para levá-lo a cabo, recomendamos a utilização da representação matricial explícita para as matrizes  $\alpha$  de Dirac, bem como dos espinores  $u$ ,  $u^\dagger$ ,  $v$  e  $v^\dagger$  presentes nas soluções  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  da equação de Dirac. Com as mesmas considerações a respeito dos operadores de criação e destruição (aplicados ao estado fundamental da matéria nuclear) e no mesmo limite de volume infinitamente grande, a expressão para a pressão fica:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} . \quad (2.97)$$

---

<sup>4</sup>Ver Apêndice A.

Usando a equação do campo  $\omega$  na aproximação de campo médio (equação (2.59)) e a definição de massa efetiva (equação (2.61)), temos que

$$p = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (2.98)$$

Integrando a expressão acima, obtemos:

$$p = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{8\pi^3} \int_0^{k_F} dk \frac{4\pi k^4}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (2.99)$$

$$p = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (2.100)$$

Essa integral pode ser resolvida analiticamente, resultando:

$$\begin{aligned} \int dk \frac{k^4}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}} &= \frac{1}{4} k^3 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} - \frac{3}{8} (M^*)^2 k \sqrt{(M^*)^2 + k^2} \\ &\quad + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln(k + \sqrt{(M^*)^2 + k^2}). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Calculando a integral entre os limites considerados, temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}} &= \frac{1}{4} k_F^3 \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln(k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}) - \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln M^* \\ &= \frac{1}{4} k_F^3 \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Assim, o resultado final da integral é

$$\begin{aligned} \int_0^{k_F} dk \frac{k_F^4}{\sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}} &= \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Substituindo (2.103) em (2.100), temos que

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right], \end{aligned} \quad (2.104)$$

onde, de acordo com (2.90),  $k_F$  é uma função de  $\rho_B$  através de

$$k_F = \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_B \right)^{1/3}. \quad (2.105)$$

Passemos ao cálculo da densidade de energia. Da equação (2.37), temos que

$$\varepsilon = (T_{00})_{MFT}. \quad (2.106)$$

Calculando a componente 00 do tensor energia-momentum na aproximação de campo médio, obtemos:

$$\varepsilon = \left( \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \right) g_{00} + \langle i \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle. \quad (2.107)$$

Utilizando explicitamente a componente 00 do tensor métrico, temos que

$$\varepsilon = \left( \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \right) (1) + \langle i \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle. \quad (2.108)$$

Usando (2.54), obtemos:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \langle i \psi^\dagger \partial_0 \psi \rangle. \quad (2.109)$$

De maneira análoga ao cálculo da pressão, o problema para calcular a densidade de energia no modelo de Walecka se resume, agora, a calcular o terceiro termo da expressão acima (para um completo desenvolvimento do cálculo, ver [106]). Com as mesmas considerações feitas anteriormente, a expressão para a densidade de energia fica:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\sqrt{k^2 + (M^*)^2} + g_\omega \omega_0) \quad (2.110)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \sqrt{k^2 + (M^*)^2} + g_\omega \omega_0 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k. \quad (2.111)$$

Substituindo (2.59) no segundo termo e (2.89) no quarto termo, vem que

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 - \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \sqrt{k^2 + (M^*)^2} + g_\omega \omega_0 \rho_B. \quad (2.112)$$

Substituindo novamente, na expressão acima, a equação de movimento do campo  $\omega$  na aproximação de campo médio, temos:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 - \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \sqrt{k^2 + (M^*)^2} + \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} \quad (2.113)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \sqrt{k^2 + (M^*)^2}. \quad (2.114)$$

Integrando a expressão acima, obtemos:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{8\pi^3} 4\pi \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{k^2 + (M^*)^2} \quad (2.115)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{k^2 + (M^*)^2}. \quad (2.116)$$

Essa integral pode ser resolvida analiticamente, resultando:

$$\int dk \quad k^2 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} = \frac{1}{4} k \left( \sqrt{(M^*)^2 + k^2} \right)^3 - \frac{1}{8} (M^*)^2 k \sqrt{(M^*)^2 + k^2} - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln (k + \sqrt{(M^*)^2 + k^2}). \quad (2.117)$$

Calculando a integral entre os limites considerados, temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{k_F} dk \quad k^2 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} &= \frac{1}{4} k_F \left( \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \right)^3 - \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln (k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}) + \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln M^* \\ &= \frac{1}{4} k_F \left( \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \right)^3 - \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \\ &= \left[ \frac{1}{4} k_F \left( (M^*)^2 + k_F^2 \right) - \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F \right] \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \\ &= \left( \frac{1}{4} k_F (M^*)^2 + \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Assim, o resultado final da integral é

$$\int_0^{k_F} dk \quad k^2 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} = \left( \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}. \quad (2.119)$$

Substituindo (2.119) em (2.116), temos que

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right], \quad (2.120)$$

onde, novamente,  $k_F$  é uma função de  $\rho_B$  através de (2.105).

As expressões (2.98) e (2.114) (ou, equivalentemente, (2.104) e (2.120)) nos dão a equação de estado da matéria nuclear na forma paramétrica:  $\varepsilon(\rho_B)$  e  $p(\rho_B)$ . Para que possamos efetivamente calcular a equação de estado numericamente, falta-nos, ainda, determinar a massa efetiva  $M^*$ , o que será feito na próxima subseção.



## Massa Efetiva do Núcleon

Como vimos, a constante  $\omega_0$  pode ser escrita em termos da densidade bariônica conservada através da equação (2.59). Por outro lado,  $\sigma_0$  (ou  $M^*$ ) é uma quantidade dinâmica que precisa ser calculada de maneira auto-consistente, utilizando-se ou a equação de campo para o méson escalar (equação (2.51)) ou o argumento termodinâmico de que um sistema isolado com  $B$  e  $V$  fixos (e temperatura nula) irá minimizar sua energia  $E$ :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_0} E(B, V; \sigma_0) = 0. \quad (2.121)$$

Equivalentemente, podemos escrever essa condição como

$$\frac{\partial}{\partial M^*} \varepsilon(B, V; M^*) = 0. \quad (2.122)$$

Através da condição acima, podemos determinar a massa efetiva do núcleon  $M^*$ . Para isso, começamos derivando a equação (2.114) em relação a  $M^*$ :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial M^*} = -\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*) + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{1}{2} \frac{2M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial M^*} = -\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*) + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (2.124)$$

Para encontrar uma expressão auto-consistente para massa modificada, nós minimizamos a energia com respeito a  $M^*$ , de acordo com a condição termodinâmica:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial M^*} = 0. \quad (2.125)$$

Essa condição implica que

$$\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*) = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (2.126)$$

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (2.127)$$

A integral pode ser resolvida analiticamente, levando a uma equação auto-consistente transcendental para a massa modificada:

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{8\pi^3} \int_0^{k_F} dk \ 4\pi \frac{k^2 M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (2.128)$$

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (2.129)$$

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \left[ \frac{1}{2} k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{2} (M^*)^2 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \quad (2.130)$$

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma M^*}{4\pi^2} \left[ k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - (M^*)^2 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right], \quad (2.131)$$

onde  $k_F$  é uma função de  $\rho_B$  através de (2.105).

## Densidade Escalar

Apesar de não ser de importância fundamental para a determinação da equação de estado e das constantes de acoplamento para o modelo de Walecka, realizaremos, agora, resumidamente, o cálculo da densidade escalar  $\rho_s$ , pois esse resultado será importante futuramente, no estudo dos demais modelos efetivos abordados nesta dissertação.

Substituindo os campos dados por (2.70) e (2.71) na definição da densidade escalar (2.50), obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rangle = \frac{1}{V} < \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}'\lambda'} u^\dagger \gamma^0 u e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ + B_{\mathbf{k}\lambda} B_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger v^\dagger \gamma^0 v e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ + A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger u^\dagger \gamma^0 v e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ + B_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mathbf{k}'\lambda'} v^\dagger \gamma^0 u e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}] > . \end{aligned} \quad (2.132)$$

Como estamos lidando com matéria nuclear em seu estado fundamental, de acordo com (2.84), (2.85), (2.86) e (2.87), apenas o termo que contém  $A^\dagger A$  resultará não nulo. Usando a condição de ortonormalidade e tomando o limite para um volume infinitamente grande, temos que

$$\rho_s = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} . \quad (2.133)$$

Trocando de nomenclatura novamente, conforme feito anteriormente no cálculo da densidade bariônica, para introduzir o fator  $\gamma$  de degenerescência de spin e isospin, a expressão acima fica escrita como

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (2.134)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int_0^{k_F} dk \ 4\pi \ k^2 \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (2.135)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} . \quad (2.136)$$

A integral pode ser resolvida analiticamente, resultando:

$$\rho_s = \frac{\gamma}{4\pi^2} \left( k_F M^* \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - (M^*)^3 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right) . \quad (2.137)$$

Esse é o resultado final para a densidade escalar  $\rho_s$  no modelo de Walecka.

### 2.3.6 Constantes de Acoplamento

Para completarmos nosso estudo da formulação original do modelo de Walecka, é necessário determinar, ainda, as constantes de acoplamento  $g_\sigma$  e  $g_\omega$ . Conforme dissemos, são utilizadas, para esse cálculo, as propriedades da matéria nuclear na saturação.

Como já dissemos, na saturação, a adição de um novo núcleon ao sistema será ignorada pelos núcleons mais internos, não exercendo força sobre eles; portanto, na saturação, a pressão é nula (teorema de Hugenholtz-van Hove [54]). Por isso, na saturação, podemos dizer que a expressão (2.104) é nula:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \right. \\ \left. + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Nessa expressão, teremos os valores das grandezas físicas tomadas na saturação, isto é,  $\rho_B \equiv \rho_0$ ,  $M^* \equiv M_0^*$  e  $k_F \equiv k_{F0}$ . Nesta subseção, por estarmos sempre trabalhando na saturação, valem essas equivalências.

Para a densidade de energia na saturação, teremos, da equação (2.120):

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right]. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Essas duas equações formam um sistema. Isolamos o termo que contém  $g_\omega^2/m_\omega^2$  na primeira equação

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} = - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 \end{aligned} \quad (2.140)$$

e substituímos na segunda. Depois de alguma álgebra, chegamos a

$$\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 = \varepsilon_0 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{6} k_F^3 + \frac{1}{4} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{4} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right], \quad (2.141)$$

de onde vem que

$$\begin{aligned} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} = \frac{\varepsilon_0}{(M - M^*)^2} \\ - \frac{1}{(M - M^*)^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{6} k_F^3 + \frac{1}{4} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{4} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right]. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Agora, substituindo (2.141) em (2.140) e isolando  $g_\omega^2/m_\omega^2$ , encontramos, finalmente:

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{\gamma}{6\pi^2} \frac{k_F^3}{\rho_B^2} \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{\varepsilon_0}{\rho_B^2}. \quad (2.143)$$

Substituindo (2.105) na expressão acima, obtemos:

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{\gamma}{6\pi^2} \frac{1}{\rho_B^2} \frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_B \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{\varepsilon_0}{\rho_B^2} \quad (2.144)$$

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{1}{\rho_B} \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{\varepsilon_0}{\rho_B^2}, \quad (2.145)$$

lembrando sempre que  $k_F$  é uma função de  $\rho_B$  através de (2.105).

Para determinamos as duas constantes de acoplamento através de (2.142) e (2.145) temos ainda que substituir os valores dos parâmetros obtidos experimentalmente.

Como vimos na seção 2.2, para  $r_0 = 1.12 fm$ , temos

$$\rho_0 = 0.17 fm^{-3}, \quad (2.146)$$

o que nos dá

$$k_{F0} = 1.36 fm^{-1}. \quad (2.147)$$

A razão  $M^*/M$  é obtida através do espalhamento de nêutrons por núcleos de chumbo, resultando:

$$\frac{M^*}{M} = 0.70 \rightarrow 0.80, \quad (2.148)$$

de onde vem que

$$M^* = 3.33 fm^{-1} \rightarrow 3.81 fm^{-1}, \quad (2.149)$$

ou, equivalentemente,

$$M^* = 657 MeV \rightarrow 751 MeV, \quad (2.150)$$

tomando-se a massa do núcleon respectivamente como

$$M = 4.76 fm^{-1}, \quad (2.151)$$

ou

$$M = 939 MeV. \quad (2.152)$$

O valor de  $\varepsilon_0$  é determinado a partir da energia de ligação por núcleon:

$$\frac{E_l}{A} = \left( \frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \right) - M, \quad (2.153)$$

sendo, conforme vimos,  $E_l/A = -16.0 MeV$ . Substituindo (2.146) e (2.151) em (2.153), obtemos:

$$\varepsilon_0 = 156.91 MeV fm^{-3}. \quad (2.154)$$

Substituindo (2.146), (2.147), (2.151) e (2.154) em (2.142), (2.145) e em (2.129), temos um sistema de três equações e três variáveis que pode ser resolvido exatamente. Na seção Programa 1 do Apêndice E, o leitor poderá encontrar um programa em Fortran90, desenvolvido pelo autor desta dissertação, que calcula a solução desse sistema, para valores determinados de  $\gamma$ ,  $\rho_0$  e  $E_l/A$ . Para os valores das grandezas físicas na saturação considerados anteriormente, a solução completa é

$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} = 13.67 fm^2, \quad (2.155)$$

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = 10.25 fm^2, \quad (2.156)$$

e

$$\frac{M^*}{M} = 0.55. \quad (2.157)$$

Em seu trabalho original (ver referências [3], [43] e [55]), Walecka utilizou  $E_l/A = -15.75 MeV$  e  $\rho_0 = 0.193 fm^{-3}$ , encontrando os seguintes valores para as constantes de acoplamento e para a massa efetiva:

$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} = 11.79 fm^2, \quad (2.158)$$

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = 8.65 fm^2, \quad (2.159)$$

e

$$\frac{M^*}{M} = 0.56. \quad (2.160)$$

Tanto o valor  $M^*/M = 0.55$  quanto o valor  $M^*/M = 0.56$  estão fora do intervalo  $0.7 - 0.8$  sugerido pelos experimentos. Além disso, o valor da incompressibilidade para o modelo de Walecka,  $560 MeV$ , é muito alto. Para corrigir essas deficiências, apresentamos, nas seções 2.4, 2.5 e 2.6, modelos alternativos a esse de Walecka.

O coeficiente  $a_4$  da energia de simetria desse modelo pode ser calculado através de (2.7). Para uma densidade bariônica fixa  $\rho_0$ , temos que

$$\rho_n + \rho_p = \rho, \quad (2.161)$$

$$\rho_n - \rho_p = \rho t, \quad (2.162)$$

o que nos leva a  $k_n = k_0(1+t)^{1/3}$  e  $k_p = k_0(1-t)^{1/3}$ . Escrevendo  $\varepsilon/\rho$  em termos de  $t$ , tomando a sua derivada segunda em relação a essa variável e fazendo  $t = 0$  ao final do cálculo, podemos calcular o valor de  $a_4$  no modelo de Walecka, de acordo com (2.7), resultando:

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2(\varepsilon/\rho)}{\partial t^2} \right)_{t=0} = \frac{k_0^2}{6\sqrt{k_0^2 + M^{*2}}}. \quad (2.163)$$

No mesmo programa apresentado na seção Programa 1 do Apêndice E, é realizado o cálculo de  $a_4$  para valores dados de  $\gamma$ ,  $\rho_0$  e  $E_l/A$  (são determinados também valores para

$k_0$ ,  $\varepsilon_0$  e  $r_0$ ). Para  $E_l/A = -16\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.17\text{fm}^{-3}$ , temos que  $a_4 = 20.63\text{MeV}$ ; para  $E_l/A = -15.75\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.193\text{fm}^{-3}$ , como no trabalho original de Walecka, temos que  $a_4 = 21.96\text{MeV}$ .

Vemos, portanto, que temos, para esse modelo, resultados bem pouco satisfatórios se comparados com o valor experimental  $a_4 = 32.5\text{MeV}$ . Por isso, na próxima subseção, introduziremos o méson  $\rho$  na teoria, para que consigamos o efeito de restauração de simetria de isospin com o valor adequado. Faremos os cálculos para nêutrons e prótons, mas, em seguida, generalizaremos todo o formalismo para o octeto bariônico fundamental.

De qualquer modo, devido às deficiências citadas, não se pode esperar que o modelo de Walecka possa ser extrapolado com resultados aceitáveis para a descrição da matéria assimétrica das estrelas de nêutrons.

O maior mérito desse modelo é a oportunidade de compreensão por ele dada, em um contexto bastante simples, das técnicas básicas utilizadas na teoria dos campos nucleares.

Concluimos esta subseção apresentando seis gráficos que ilustram resultados importantes do modelo de Walecka, tanto para matéria de nêutrons quanto para matéria nuclear: massa efetiva do núcleon em função da densidade bariônica, energia de ligação por núcleon em função da densidade bariônica e a equação de estado  $p \times \varepsilon$ .

Nos gráficos da equação de estado, notamos a existência de duas regiões bem definidas, uma para densidades mais baixas e outra para densidades mais altas. Essas duas regiões da equação de estado definem duas fases respectivamente chamadas de *gás de Fermi* e *líquido de Fermi*, entre as quais se pode determinar uma transição de fase do tipo Van der Waals.

Nesses mesmos gráficos, há uma aparente descontinuidade, o que se configuraria um comportamento bastante estranho, tratando-se de matéria nuclear homogênea. Cabe ressaltar que essa descontinuidade é, de fato, apenas aparente. Na verdade, a curva da equação de estado, nesse caso, é perfeitamente contínua; porém, existe uma região não-física de pressão negativa em densidades intermediárias, evidenciando, justamente, instabilidades que podem levar à transição de fase de um *líquido de Fermi* para um *gás de Fermi*. No cálculo numérico aqui desenvolvido, foi implementado, no algoritmo, um *cutoff* para os pontos correspondentes a pressão negativa; por essa única razão os mesmos não aparecem no gráfico.

Os programas utilizados para confecção desses gráficos podem ser encontrados no Apêndice E, seções E2 (Programa 2), E3 (Programa 3) e E4 (Programa 4).

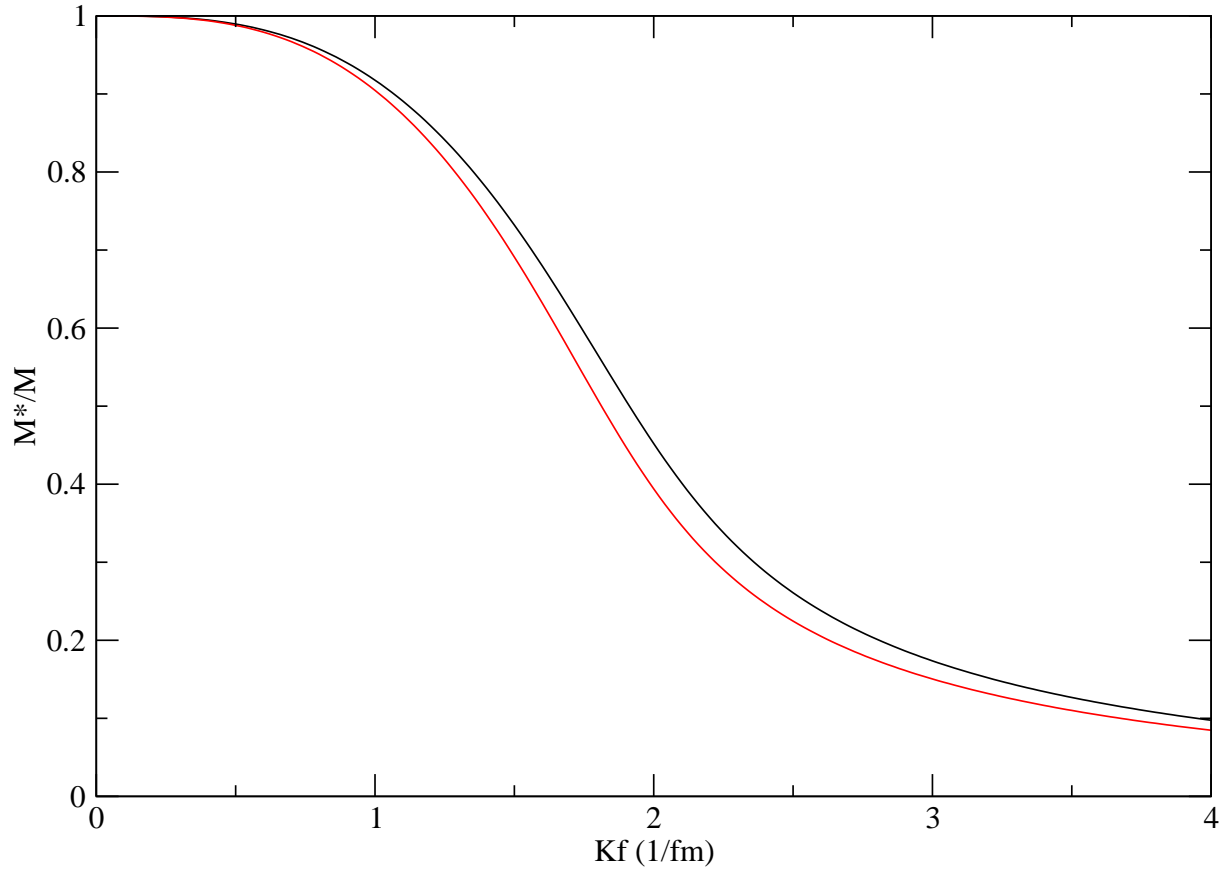


Figura 2.3: Massa efetiva do nêutron para matéria de nêutrons no modelo de Walecka, em função do momentum de Fermi. Linha preta:  $E_l/A = -15.75 \text{ MeV}$  e  $\rho_0 = 0.193 \text{ fm}^{-3}$  (trabalho original de Walecka). Linha vermelha:  $E_l/A = -16.00 \text{ MeV}$  e  $\rho_0 = 0.170 \text{ fm}^{-3}$  (valores considerados nesta dissertação).

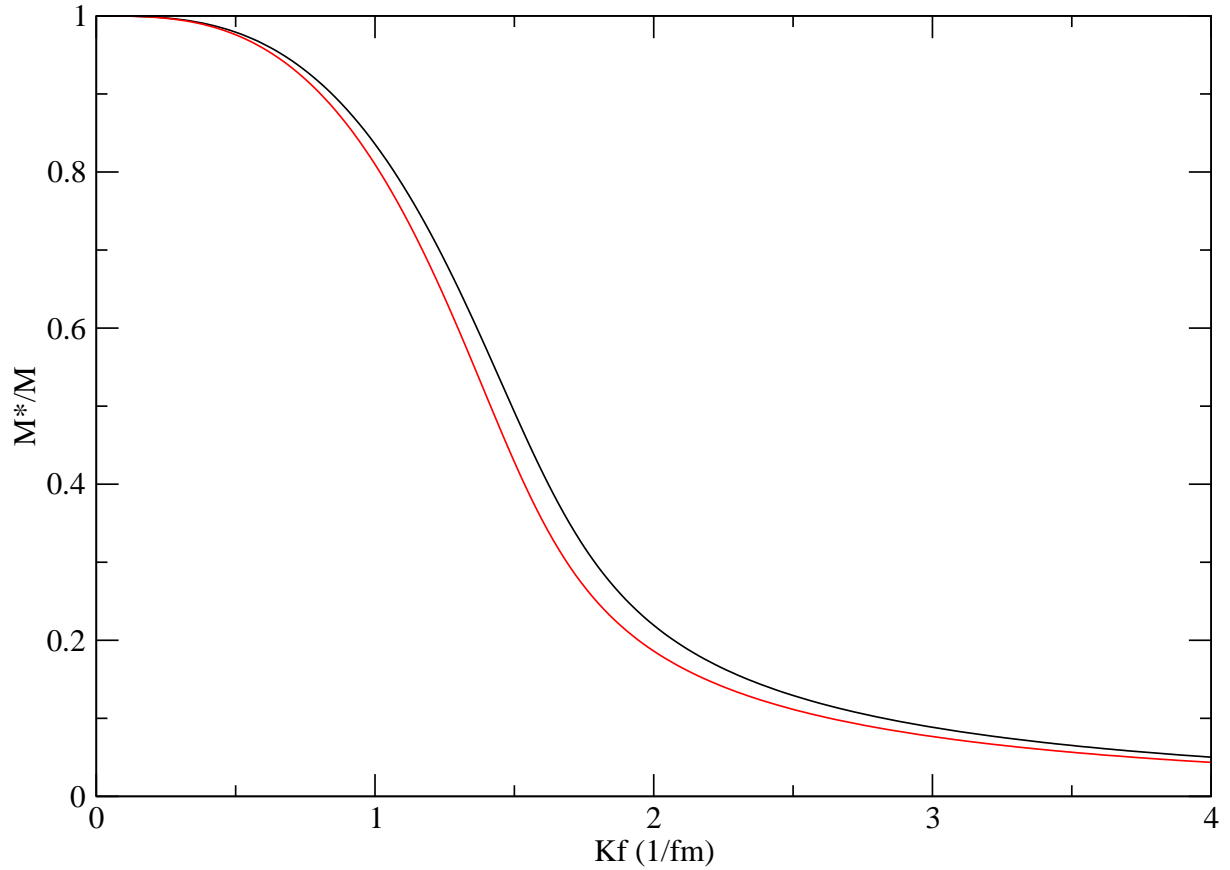


Figura 2.4: Massa efetiva do núcleo para matéria nuclear no modelo de Walecka, em função do momentum de Fermi. Linha preta:  $E_l/A = -15.75\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.193\text{fm}^{-3}$  (trabalho original de Walecka). Linha vermelha:  $E_l/A = -16.00\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.170\text{fm}^{-3}$  (valores considerados nesta dissertação).



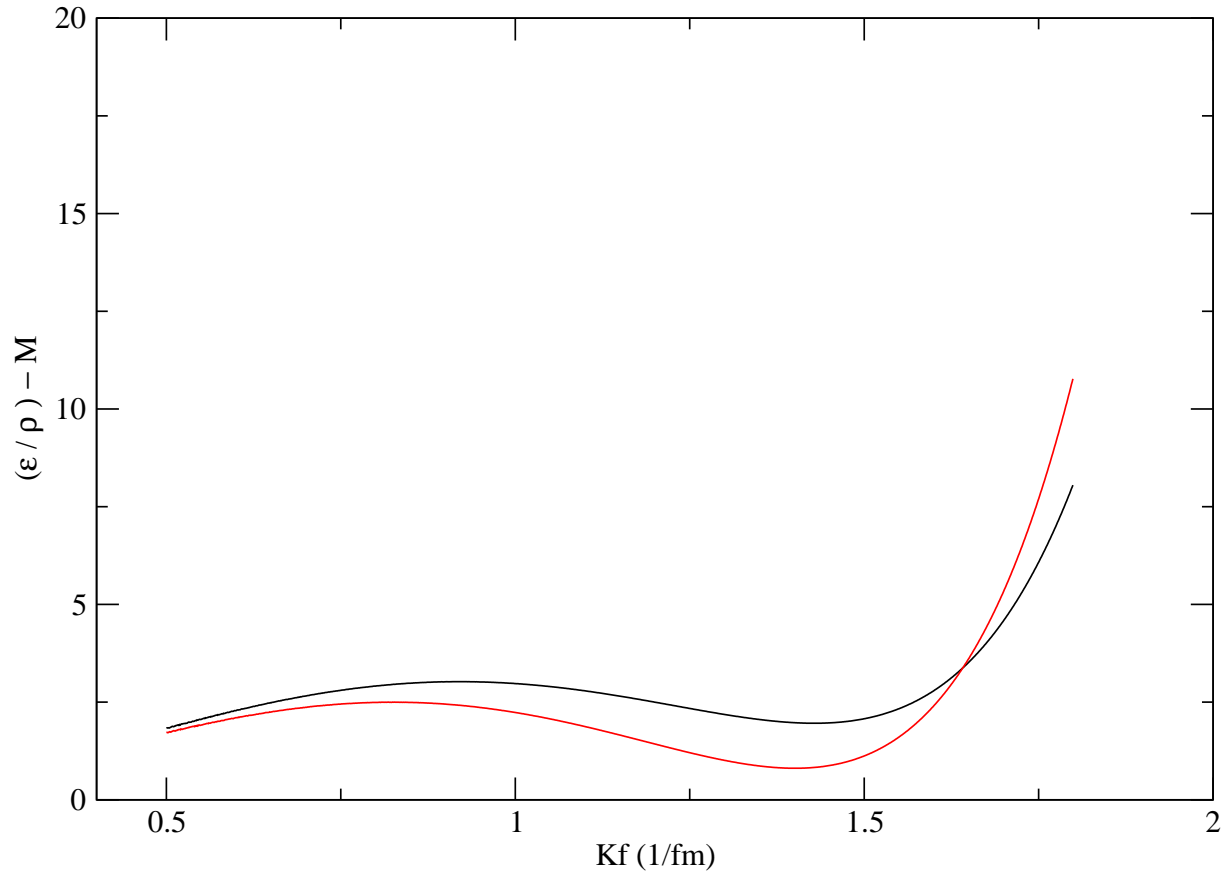


Figura 2.5: Energia de ligação por nucleão da matéria de nêutrons no modelo de Walecka em MeV, em função do momento de Fermi. Linha preta:  $E_l/A = -15.75 \text{ MeV}$  e  $\rho_0 = 0.193 \text{ fm}^{-3}$  (trabalho original de Walecka). Linha vermelha:  $E_l/A = -16.00 \text{ MeV}$  e  $\rho_0 = 0.170 \text{ fm}^{-3}$  (valores considerados nesta dissertação).

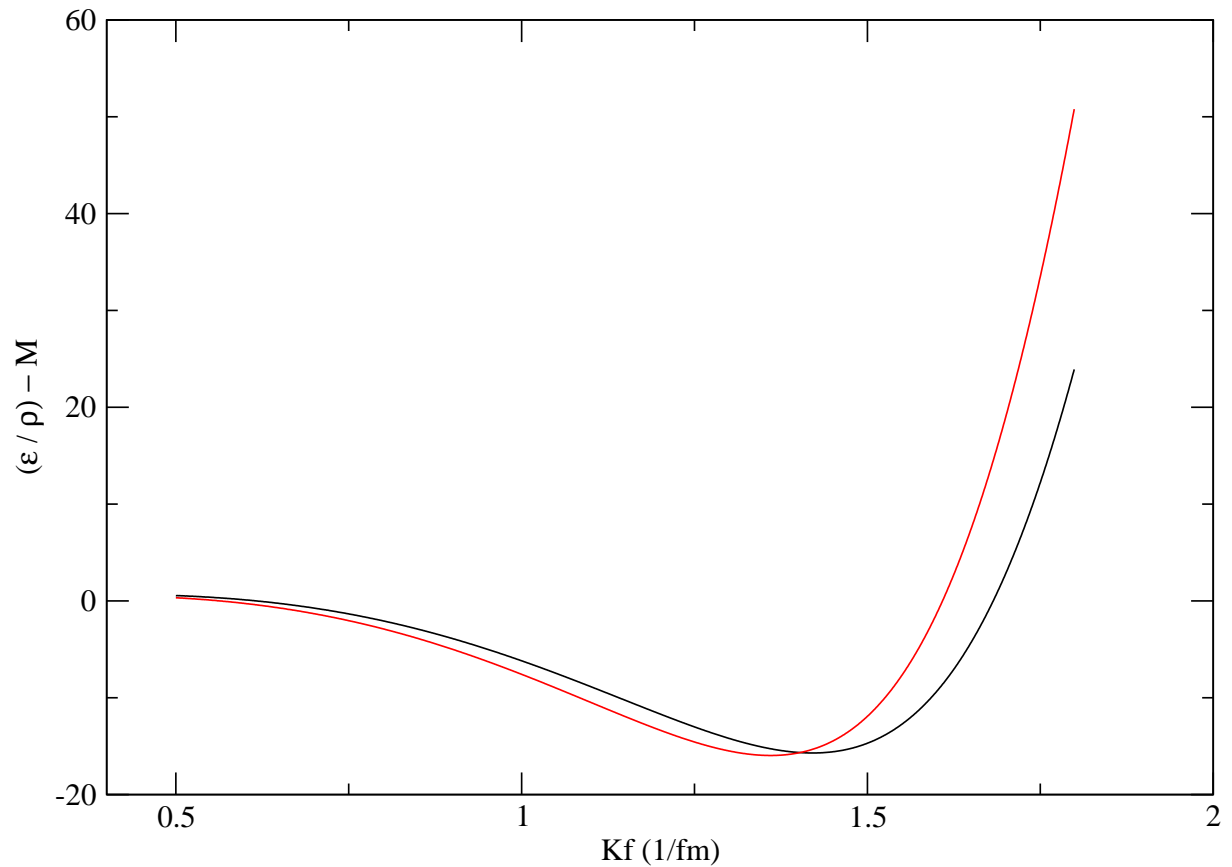


Figura 2.6: Energia de ligação por núcleon da matéria nuclear no modelo de Walecka em MeV, em função do momentum de Fermi. Linha preta:  $E_l/A = -15.75\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.193\text{fm}^{-3}$  (trabalho original de Walecka). Linha vermelha:  $E_l/A = -16.00\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.170\text{fm}^{-3}$  (valores considerados nesta dissertação).

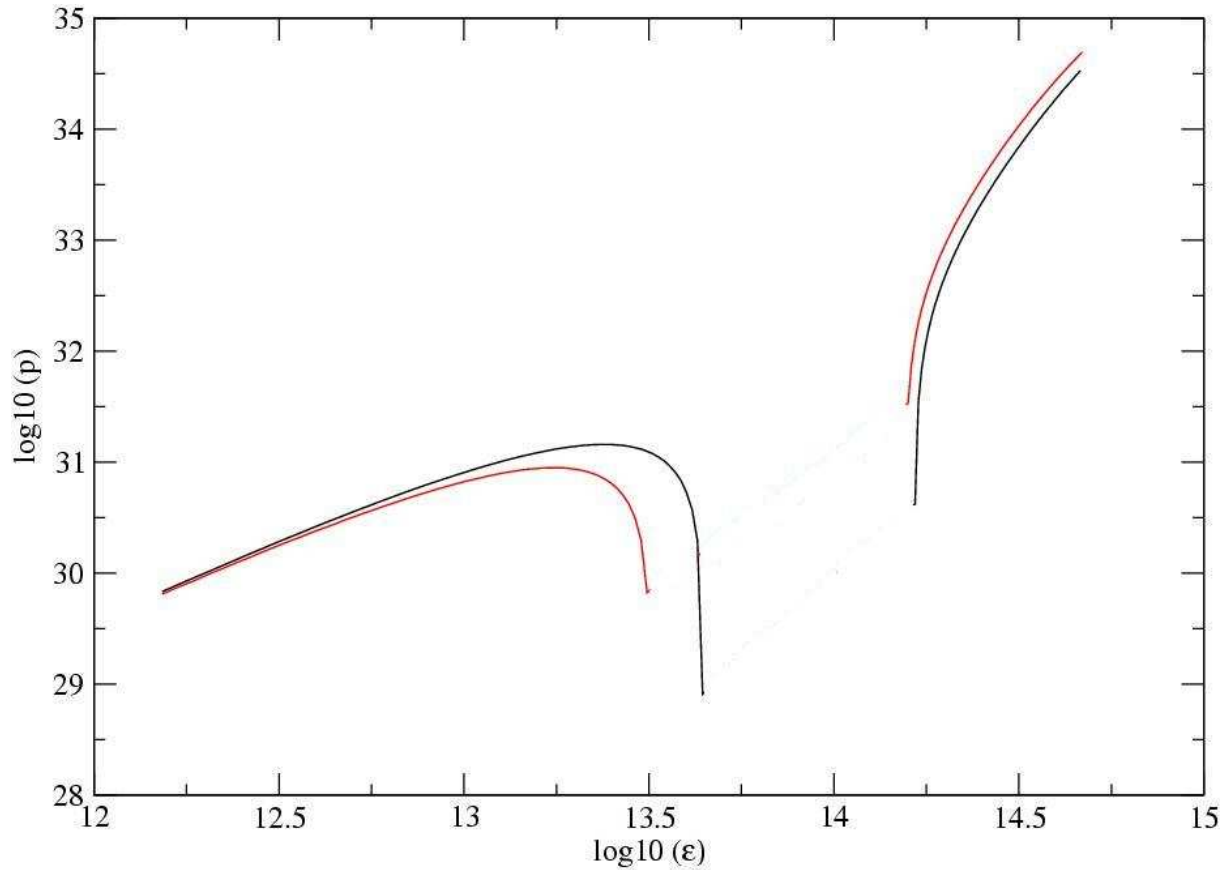


Figura 2.7: Equação de estado da matéria de nêutrons no modelo de Walecka, com  $p$  e  $\epsilon$  em unidades do sistema CGS. Linha preta:  $E_l/A = -15.75\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.193\text{fm}^{-3}$  (trabalho original de Walecka). Linha vermelha:  $E_l/A = -16.00\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.170\text{fm}^{-3}$  (valores considerados nesta dissertação).

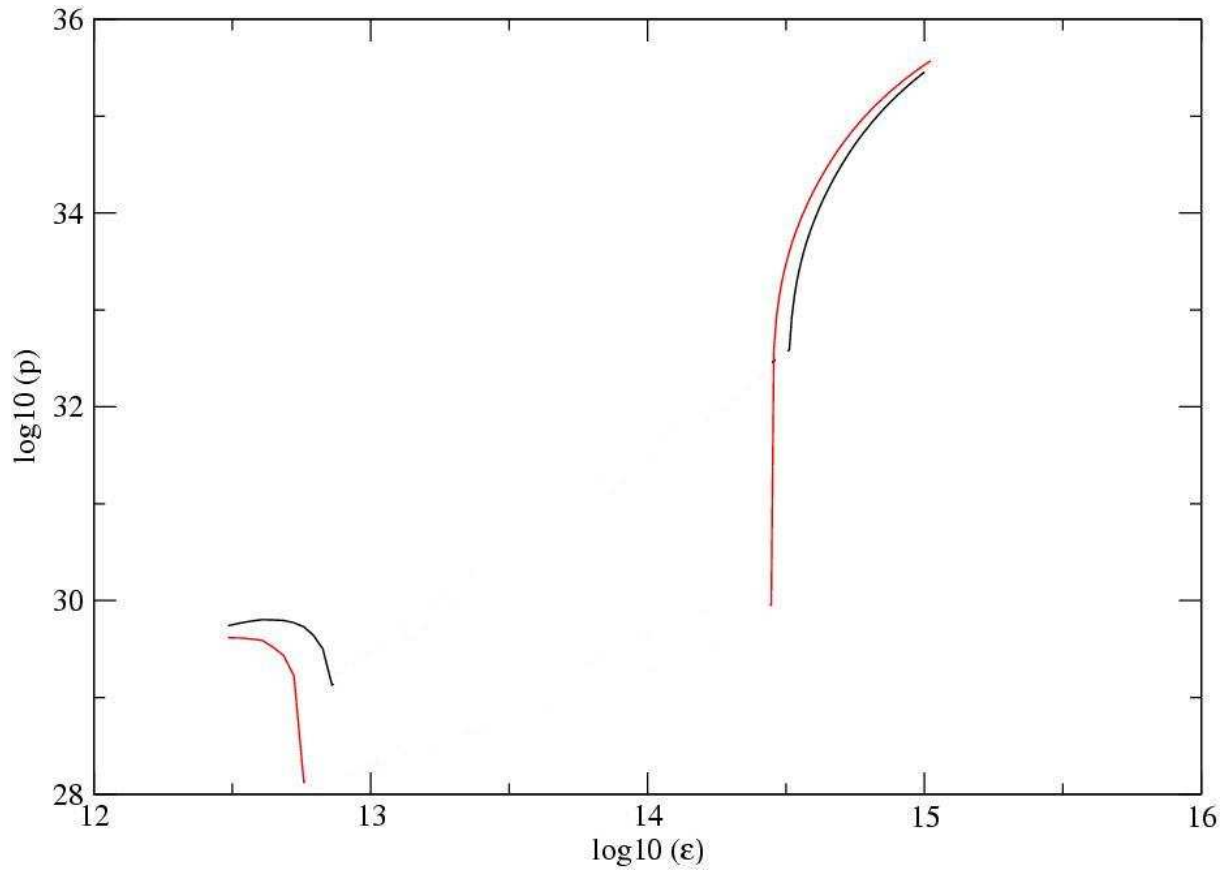


Figura 2.8: Equação de estado da matéria nuclear no modelo de Walecka, com  $p$  e  $\varepsilon$  em unidades do sistema CGS. Linha preta:  $E_l/A = -15.75\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.193\text{fm}^{-3}$  (trabalho original de Walecka). Linha vermelha:  $E_l/A = -16.00\text{MeV}$  e  $\rho_0 = 0.170\text{fm}^{-3}$  (valores considerados nesta dissertação).

### 2.3.7 Introdução do Méson $\varrho$

Como próximo passo na busca de uma equação de estado que descreva adequadamente as propriedades da matéria nuclear, vamos introduzir o méson  $\varrho$ . Queremos, portanto, descrever o tripleto carregado de mésons  $\varrho^0$ ,  $\varrho^\pm$  que tem spin e paridade iguais aos do méson  $\omega$ . Portanto, o méson  $\varrho$  deve ser descrito por campos vetoriais de Lorentz, que denotamos por

$$\boldsymbol{\varrho}^\mu \equiv (\varrho_1^\mu, \varrho_2^\mu, \varrho_3^\mu), \quad (2.164)$$

onde os índices gregos denotam as componentes de Lorentz e os índices latinos denotam as componentes no espaço de isospin. Assim sendo, sua densidade lagrangeana livre pode ser escrita analogamente à do méson  $\omega$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \boldsymbol{\varrho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\varrho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\varrho^2 \boldsymbol{\varrho}_\mu \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu, \quad (2.165)$$

onde  $\boldsymbol{\varrho}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{\varrho}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\varrho}_\mu$ , sendo a correspondente equação de campo dada por

$$\partial_\mu \boldsymbol{\varrho}^{\mu\nu} + m_\varrho^2 \boldsymbol{\varrho}^\nu = 0. \quad (2.166)$$

Essa densidade lagrangeana possui uma invariância de fase que fica bastante aparente se considerarmos um campo complexo construído a partir de dois dos campos, digamos, por exemplo, 1 e 2:

$$\varrho_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varrho_1^\mu \pm i \varrho_2^\mu). \quad (2.167)$$

Equivalentemente, a densidade lagrangeana é invariante frente a uma rotação em torno da direção 3 do espaço de isospin.

Há também uma invariância que está relacionada com uma rotação genérica no espaço dos três campos. Essa é uma rotação de isospin, frente à qual o lagrangeano livre dos mésons  $\varrho$  é manifestamente invariante, já que os campos  $\boldsymbol{\varrho}_\mu$  entram no lagrangeano através de produtos escalares. Tal rotação pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\varrho}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\varrho}_\mu + \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\varrho}_\mu, \quad (2.168)$$

onde  $\boldsymbol{\Lambda}$  é um vetor infinitesimal no espaço de isospin. Podemos também escrever explicitamente o produto vetorial como

$$\boldsymbol{\varrho}_\mu \longrightarrow \boldsymbol{\varrho}_\mu + \epsilon_{ijk} \Lambda_j \varrho_{k\mu}, \quad (2.169)$$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é anti-simétrico frente à troca de dois índices quaisquer e simétrico frente a permutações cíclicas,

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kij}. \quad (2.170)$$

De acordo (C.1), a transformação pode ser caracterizada por

$$F_i^j = \epsilon_{ijk} \varrho_{k\mu}. \quad (2.171)$$

Portanto, de acordo com a equação (C.6), temos a corrente de Noether

$$I_j^\nu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varrho_{i\mu})} \varrho_{k\mu} \epsilon_{ijk} \quad (2.172)$$

ou

$$\mathbf{I}^\nu(x) = \mathbf{e}_\mu \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \mathbf{e}_\mu)} = \mathbf{e}_\mu \times \mathbf{e}^{\nu\mu}, \quad (2.173)$$

que é uma quadri-corrente de Lorentz, a corrente de isospin do campo do méson  $\varrho$ . Cada componente dessa corrente é um tri-vetor no espaço de isospin.

Outra invariância no espaço de isospin aparece ao considerarmos o lagrangeano de Dirac para prótons e nêutrons:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_p(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi_p + \bar{\psi}_n(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi_n \\ &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi, \end{aligned} \quad (2.174)$$

onde

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}.$$

Sejam denotadas por  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  as matrizes isospin de Pauli  $2 \times 2$  e seja, novamente,  $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$  um vetor constante e arbitrário no espaço de isospin. O lagrangeano será claramente invariante frente a uma transformação de fase contínua

$$\psi \longrightarrow e^{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Lambda}/2} \psi. \quad (2.175)$$

Uma rotação finita pode ser obtida a partir de rotações infinitesimais. Fazendo com que  $\boldsymbol{\Lambda}$  tenha componentes infinitesimais

$$\delta\psi = -\frac{i}{2} \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\tau} \psi = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = -\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \psi, \quad (2.176)$$

encontramos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu(\partial\psi)} = \bar{\psi} i\gamma^\mu. \quad (2.177)$$

Pela equação (C.6), a corrente conservada de isospin dos núcleons resulta em

$$\mathbf{I}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \psi. \quad (2.178)$$

Considerando que  $\tau_3$  tenha a representação

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

encontramos a terceira componente como sendo

$$I_3^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \tau_3 \psi, \quad (2.179)$$

$$I_3^0 = \frac{1}{2}(\psi_p^\dagger \psi_p - \psi_n^\dagger \psi_n) \longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho_n & \text{para os nêutrons} \\ +\frac{1}{2}\rho_p & \text{para os prótons} \end{cases},$$

onde  $\rho_n$  e  $\rho_p$  são as densidades bariônicas para nêutrons e próton respectivamente.

Com esses resultados, estamos aptos a introduzir a força de restauração de isospin no modelo de Walecka tal como aparece na fórmula semi-empírica de massa. Assim, como no caso do méson vetorial  $\omega$ , cuja fonte é a densidade bariônica e que contribui quadraticamente à densidade de energia, também queremos um campo mesônico que tenha como fonte a densidade de isospin para que esta apareça em forma quadrática na expressão de  $\varepsilon$ . A partir do apresentado acima, é natural que escolhamos o méson isovetorial  $\varrho$  e o acoplemos aos núcleons através da corrente (2.178). Os termos livres desse méson também contribuem para a corrente conservada de isospin através de (2.173).

Podemos considerar a corrente total de isospin como sendo a soma das correntes (2.173) e (2.178) e adicionar ao lagrangeano um termo do tipo  $g_\varrho \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{I}^\mu$ . Porém, nesse termo, aparecem derivadas dos campos  $\mathbf{e}^\mu$ , e, portanto, ele mesmo contribuirá com novos termos à corrente total conservada de isospin. Para se obter coerência, devemos calcular essa contribuição e, se essa não contiver mais derivadas dos campos isovetoriais, acrescentá-la a  $\mathbf{I}^\mu$ . De fato, os termos extra que aparece na corrente total será  $2g_\varrho(\mathbf{e}^\nu \times \mathbf{e}^\mu) \times \mathbf{e}_\mu$ , ficando como corrente total conservada de isospin a expressão

$$\mathbf{I}^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau}\psi + \mathbf{e}_\mu \times \mathbf{e}^{\nu\mu} + 2g_\varrho(\mathbf{e}^\nu \times \mathbf{e}^\mu) \times \mathbf{e}_\mu. \quad (2.180)$$

A correspondente alteração no lagrangeano será

$$\mathcal{L}_{int} = -g_\varrho \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{I}^\nu. \quad (2.181)$$

A interação acima irá modificar a equação de Dirac, bem como a equação para o méson  $\varrho$  livre. A modificação na equação de Dirac será a adição do termo

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{g_\varrho}{2} \gamma_\nu \mathbf{e}^\nu \cdot \boldsymbol{\tau} \psi, \quad (2.182)$$

e a equação de campo para o méson  $\varrho$  ficará da forma

$$\partial_\mu \mathbf{e}^{\mu\nu} + m_\varrho^2 \mathbf{e}_\mu = g_\varrho \mathbf{I}^\mu. \quad (2.183)$$

Lembramos, agora, que a presença de qualquer campo custa energia. Apenas os campos que tenham valores médios não-nulos no estado fundamental da matéria nuclear em uma dada densidade devem ser considerados. Por exemplo, em matéria de uma certa densidade bariônica, os campos  $\sigma$  e  $\omega$  devem ter valores médios finitos, porque eles são soluções de equações que têm densidades não-nulas como fontes. Contudo, um valor de campo médio nulo é uma possível solução para uma equação de campo livre, e, por conseguinte, há um abaixamento na energia. Do contrário, existiria um termo da forma  $(1/2)m_\phi^2\phi^2$  presente na densidade de energia. Assim, a existência de uma densidade bariônica não-nula requer

a presença daqueles campos mesônicos que se acoplam às diferentes densidades bariônicas (a escalar, a vetorial, a isovetorial), mas a condição de que a matéria esteja em seu estado fundamental para qualquer densidade considerada garante que todos os outros possíveis campos mesônicos desapareçam.

Agora, apliquemos esse raciocínio ao méson  $\varrho$ . O estado fundamental é considerado como sendo um estado de Fermi degenerado, com autovalores de energia modificados pelo valor médio dos campos mesônicos encontrados anteriormente. Esses estados de momento estão preenchidos de prótons e nêutrons aos pares até o nível de Fermi, de maneira que o estado fundamental tem valor definido de carga, spin e paridade. Como as primeiras duas componentes do vetor de isospin  $\varrho$  podem ser escritas como uma combinação de *operadores escada* para mésons  $\varrho$  carregados (de acordo com (2.167)), seus valores esperados no estado fundamental resultam nulos.

As implicações das considerações feitas acima são várias: (1) Apenas a componente 3 de isospin do campo  $\varrho^\mu$  tem valor médio finito, isto é, o méson neutro  $\rho_3^\mu$ . (2) As componentes espaciais da quadri-corrente de Lorentz devem ser nulas no estado fundamental, restando apenas  $\varrho_3^0$  (o índice inferior indica a componente 3 de isospin, e o índice superior indica a componente temporal de Lorentz). (3) Apesar de ser formalmente dada por (2.180), o único termo que resta frente às condições acima é a contribuição dos núcleons. Como resultado, temos que a equação de Dirac e as equações de campo para o méson  $\varrho$  na aproximação de campo médio são

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega\omega^\mu - \frac{1}{2}g_\varrho\tau_3\varrho_3^\mu) - (M - g_\sigma\sigma)]\psi = 0, \quad (2.184)$$

$$g_\varrho\varrho_3^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{g_\varrho}{m_\varrho}\right)^2 \langle \bar{\psi}\gamma^0\tau_3\psi \rangle = \left(\frac{g_\varrho}{m_\varrho}\right)^2 \frac{1}{2}(\rho_p - \rho_n), \quad (2.185)$$

$$g_\varrho\varrho_3^k = \frac{1}{2}\left(\frac{g_\varrho}{m_\varrho}\right)^2 \langle \bar{\psi}\gamma^k\tau_3\psi \rangle = 0. \quad (2.186)$$

Nas duas últimas equações,  $(1/2)\rho_p$  e  $(1/2)\rho_n$  são as densidades de isospin do próton e do nêutron, onde  $\rho_{p,n}$  são as densidades bariônicas para essas duas partículas. Podemos definir, nesse contexto, o isospin dessas partículas como sendo  $I_3$ , tal que

$$\frac{1}{2}\tau_3\psi \equiv I_3\psi, \quad (2.187)$$

sendo seu valor  $+1/2$  para prótons e  $-1/2$  para o nêutron. Em contraste com o modelo anterior, o méson  $\varrho$  levanta a degenerescência de isospin dos bárions. Note-se que o sinal de  $\rho_3^0$  é determinado a partir da equação (2.185). Nela, vemos que o sinal da projeção de isospin da espécie dominante determina o sinal.

Como o sistema, agora, apresenta assimetria de isospin, teremos energias de Fermi separadas para o próton e para o nêutron. Suas densidades bariônicas são

$$\rho_p = 2 \int_0^{k_p} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{k_p^3}{3\pi^2} \quad (2.188)$$



e

$$\rho_n = 2 \int_0^{k_n} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{k_n^3}{3\pi^2}. \quad (2.189)$$

Teremos, naturalmente, as seguintes expressões para a densidade de energia e pressão:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\varrho^2\varrho_{03}^2 \\ & + \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{k_p} \sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma_0)^2} k^2 dk + \int_0^{k_n} \sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma_0)^2} k^2 dk \right], \end{aligned} \quad (2.190)$$

$$\begin{aligned} p = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\varrho^2\varrho_{03}^2 \\ & + \frac{1}{3\pi^2} \left[ \int_0^{k_p} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma_0)^2}} + \int_0^{k_n} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma_0)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.191)$$

As constantes  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$  são as mesmas já encontradas para matéria simétrica; resta-nos determinar  $(g_\varrho/m_\varrho)^2$ . Partindo de

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2(\varepsilon/\rho)}{\partial t^2} \right)_{t=0}, \quad (2.192)$$

onde  $t = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ , e seguindo o procedimento mostrado na subseção 2.3.6, chegamos a

$$a_4 = \frac{k_F^3}{12\pi^2} \left( \frac{g_\varrho}{m_\varrho} \right)^2 + \frac{k_F^2}{6\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}, \quad (2.193)$$

que é igual à equação (2.163), exceto pela presença do termo vindo da contribuição do méson  $\varrho$ . Utilizando o valor experimental de  $a_4 = 32.5 MeV$ , obtemos

$$\left( \frac{g_\varrho}{m_\varrho} \right)^2 = 2.20 fm^2 \quad (2.194)$$

para os valores de  $E_l/A = -15.75 MeV$  e  $\rho_0 = 0.193 fm^{-3}$ , como no trabalho original de Walecka, e

$$\left( \frac{g_\varrho}{m_\varrho} \right)^2 = 2.82 fm^2 \quad (2.195)$$

para os valores de  $E_l/A = -16.00 MeV$  e  $\rho_0 = 0.170 fm^{-3}$ , adotados nesta dissertação.

Como as altas densidades presentes nas estrelas de nêutrons permitem que os potenciais químicos dos prótons e nêutrons ultrapassem valores das massas de alguns híperons, um estado de mais baixa energia pode ser alcançado se os núcleons mais energéticos decaírem nesses bárions mais pesados. Assim, será necessário estender nossa teoria para que se consiga abarcar a presença dos híperons. Esse é o objetivo da próxima subseção.

### 2.3.8 Generalização para o Octeto Bariônico

Como vimos, à medida que a densidade aumenta, a energia de Fermi dos núcleons pode exceder a massa de bárions mais massivos, os híperons. A conversão para essas partículas reduz a energia e pressão do sistema, sendo, portanto, um estado preferencial.

A teoria relativística de campo médio aqui desenvolvida é facilmente generalizada para incluir outras espécies bariônicas. As que iremos considerar são, por serem de menor massa, as partículas do primeiro octeto bariônico,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  e  $\Xi$ , cujas propriedades estão mostradas na Tabela 1.2. Como a neutralidade de carga e a simetria de isospin são consideradas em nossa teoria, é importante que distingamos, nas partículas, as diferentes cargas elétricas e de isospin, relacionando cada uma com um índice  $B$ .

Um lagrangeano que abarque esses bárions pode ser da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B [i\gamma_\mu \partial^\mu - (M - g_{\sigma B}\sigma) - g_{\omega B}\gamma_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2}g_{\rho B}\gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu] \psi_B \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{4}\boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu, \end{aligned} \quad (2.196)$$

onde realizamos a troca de notação

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \omega_{\mu\nu}. \quad (2.197)$$

Nota-se, nessa expressão, a presença de constantes de acoplamento  $g_{\sigma,\omega,\rho B}$ . Quando  $B$  se referir aos híperons, teremos um problema, pois, ao contrário dos núcleons, esses bárions não aparecem na matéria nuclear próxima à densidade de saturação, e, assim, não podemos mais adequar essas constantes a alguma propriedade da matéria nuclear como fizemos anteriormente com  $g_\sigma$  e  $g_\omega$  quando tínhamos apenas prótons e nêutrons. Há diversas propostas para contornar esse problema. A mais simples, é supor que o acoplamento méson-bárion se dá com igual intensidade para todos os bárions, ou seja, as constantes de acoplamento  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  e  $g_\rho$  têm valor idêntico para todos os bárions. Esse é o chamado *acoplamento universal*. Outro exemplo de proposta é aquela feita por Moszkowski em [56], baseada no conteúdo de quarks em núcleons e híperons, segundo a qual as constantes de acoplamento para os híperons seriam corrigidas por um fator  $\sqrt{2/3}$ .

Nesta dissertação, especialmente ao realizarmos o estudo da transição de fase *matéria hadrônica*  $\longrightarrow$  *QGP*, vamos dar ênfase a uma terceira proposta para determinação das constantes de acoplamento, motivada pela simetria spin-isospin  $SU(6)$  e baseada nas assim chamadas *regras de contagem*. Tais regras estabelecem que, para cada quark estranho presente no bárion, o valor da constante de acoplamento é reduzido de  $1/3$  (tanto para  $g_\sigma$  quanto para  $g_\omega$ ). Já para a constante de acoplamento  $g_\rho$ , a regra é diferente. Como o méson  $\rho$  está relacionado com a assimetria de isospin, o valor da constante  $g_\rho$  estará relacionado diretamente com o isospin das partículas. Por exemplo: o bárion  $\Sigma$  tem

isospin 1; assim, o valor da constante de acoplamento  $g_{\varrho\Sigma}$  será o dobro de  $g_{\varrho N}$ , pois os núcleons têm isospin 1/2 (ver Tabela 1.2). Portanto, de acordo com essa proposta, as constantes de acoplamento são dadas por

$$\frac{1}{3}g_{\sigma N} = \frac{1}{2}g_{\sigma\Lambda} = \frac{1}{2}g_{\sigma\Sigma} = g_{\sigma\Xi}, \quad (2.198)$$

$$\frac{1}{3}g_{\omega N} = \frac{1}{2}g_{\omega\Lambda} = \frac{1}{2}g_{\omega\Sigma} = g_{\omega\Xi}, \quad (2.199)$$

$$g_{\varrho N} = \frac{1}{2}g_{\varrho\Sigma} = g_{\varrho\Xi}, \quad g_{\varrho\Lambda} = 0. \quad (2.200)$$

Para maiores detalhes sobre essa proposta para as constantes de acoplamento, ver, por exemplo, a referência [57].

As equações de Euler-Lagrange, aplicadas ao lagrangeano acima, combinadas com os resultados da aproximação de campo médio nos dão, para os campos mesônicos:

$$\omega_0 = \sum_B \frac{g_{\omega B}}{m_\omega^2} \rho_B, \quad (2.201)$$

$$\varrho_{03} = \sum_B \frac{g_{\varrho B}}{m_\varrho^2} I_{3B} \rho_B, \quad (2.202)$$

$$m_\sigma^2 \sigma = \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} g_{\sigma B} \int_0^{k_{FB}} \frac{M_B - g_{\sigma B} \sigma}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B})^2}} k^2 dk, \quad (2.203)$$

onde  $2J_B + 1$  é novo fator de degenerescência (de spin somente). Seguindo o processo que descrevemos anteriormente, obtemos para a densidade de energia e pressão:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\varrho^2 \varrho_{03}^2 \\ & + \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} \sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B})^2} k^2 dk, \end{aligned} \quad (2.204)$$

$$\begin{aligned} p = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\varrho^2 \varrho_{03}^2 \\ & + \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B})^2}}. \end{aligned} \quad (2.205)$$

Para que possamos resolver as equações acima, precisamos estabelecer um vínculo entre os diversos  $k_{FB}$ , que são, em princípio, independentes um do outro. Esse vínculo surge a partir da conservação de carga bariônica, de carga elétrica e estranheza, sendo que esta última carga não é necessariamente conservada na formação de estrelas de nêutrons. Nesses objetos estelares, o equilíbrio químico entre suas partículas constituintes ( $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$ ,  $e^-$ ,  $\mu^-$ ) proverá equações extras para determinar exatamente o momentum de cada bárion.

## 2.4 Modelo Não-Linear de Boguta-Bodmer

Apresentaremos, nesta seção, o modelo não-linear de Boguta-Bodmer de forma bastante breve. Não nos deteremos nele, pois o modelo com acoplamento ajustável, aquele a ser usado principalmente em nosso estudo das estrelas de nêutrons, é um tipo de modelo que apresenta um acoplamento derivativo, inspirado nos modelos ZM, e não um tipo de acoplamento não-linear. Para o leitor interessado, sugerimos a referência [29], na qual o autor estuda, com profundidade, as propriedades das estrelas compactas no modelo Não-linear.

Boguta e Bodmer [5], em 1977, apresentaram um trabalho em que introduziram no lagrangeano de Walecka um termo de auto-interação entre os campos  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{3} b M (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4. \end{aligned} \quad (2.206)$$

Foram introduzidos, assim, termos cúbicos e quárticos de acoplamento do méson  $\sigma$  no lagrangeano, de modo que suas intensidades (parâmetros  $b$  e  $c$ ) fossem ajustáveis a propriedades conhecidas da matéria nuclear.

Ganhar dois parâmetros livres em nossa teoria é, em princípio, muito bom, já que podemos corrigir as limitações do modelo de Walecka em duas propriedades:  $K$  e  $M^*$ . Podemos encontrar os dois parâmetros também presentes no modelo de Walecka,  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$ , e mais os novos  $b$  e  $c$  algebricamente, seguindo o procedimento da subseção 2.3.6, conforme é mostrado em detalhes em [29]. Como temos mais dois parâmetros livres, podemos escolher qual incompressibilidade e massa efetiva queremos que o modelo não-linear descreva. Por essa razão, é o modelo mais utilizado na descrição de estrelas de nêutrons. Porém, alguns autores criticam a adição de novos parâmetros argumentando que, apesar de ser de fato uma teoria efetiva, deveríamos tentar corrigir as deficiências do modelo original de Walecka modificando o acoplamento entre os mésons e os núcleons; quanto mais parâmetros físicos temos, menos fundamental é a teoria e menor a confiabilidade na extrapolação de seus resultados para densidades mais altas.

Um outro problema do modelo é que não há vinculação entre o valor de  $K$  e o de  $M^*$ : podemos ter uma determinada incompressibilidade correspondendo a uma massa efetiva qualquer. Isso, além de não ter muito sentido físico, acarreta anormalidades. Por exemplo, quando fazemos  $K < 200 \text{ MeV}$  e  $M^* < 0.65M$ , o valor de  $c$  é sempre negativo, e a teoria começa a apresentar comportamento não-físico, como cúspides na equação de estado ou três massas efetivas diferentes para a mesma densidade bariônica [58].

Por tudo isso, apresentamos, na próxima seção, os modelos propostos por Zimanyi e Moszkowski, os quais não introduzem parâmetros físicos adicionais e nos quais se baseia o modelo de acoplamento derivativo ajustável, que será utilizado em nosso estudo da transição de fase no interior das estrelas de nêutrons.

## 2.5 Modelos com Acoplamento Derivativo (ZM)

Em 1990, Zimanyi e Moszkowski (ZM) [6] propuseram a troca do acoplamento mínimo de Yukawa entre o méson escalar e os núcleons por um acoplamento derivativo. A curva de saturação continua sendo reproduzida pelo modelo ZM, mas agora os resultados para a massa efetiva e a incompressibilidade estão dentro da faixa experimental. Isso sem o custo de parâmetros físicos extras a serem determinados como no modelo Não-linear.

Em seu artigo original, os autores do modelo ZM apresentaram ainda mais duas variações que poderiam ser consideradas no espírito do acoplamento derivativo. Esses três modelos ficaram conhecidos na literatura como ZM, ZM2 e ZM3. O segundo deles não apresenta diferenças fundamentais em relação ao ZM3 e, ao contrário dos modelos ZM e ZM3, não pode ser visto como um modelo de Walecka com reescalonamento das constantes de acoplamento; por isso, não iremos abordar o modelo ZM2 no presente trabalho.

As densidades lagrangeanas dos modelos ZM e ZM3 são:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZM} = & -\bar{\psi}M\psi + (m^*)^{-1}[\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu] \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \end{aligned} \quad (2.207)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZM3} = & -\bar{\psi}M\psi + (m^*)^{-1}\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \end{aligned} \quad (2.208)$$

onde,

$$m^* \equiv \left(1 + \frac{g_\sigma\sigma}{M}\right)^{-1}. \quad (2.209)$$

Assim, se expandirmos  $m^*$  nas expressões acima, veremos que o que se fez em essência foi trocar o acoplamento mínimo de Yukawa,  $g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi$ , por um acoplamento derivativo,  $(g_\sigma\sigma/M)\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi$ .

Podemos reescalonar os campos dos núcleons da seguinte forma:

$$\psi \longrightarrow \sqrt{m^*}\psi. \quad (2.210)$$

Com isso, os lagrangeanos resultantes podem ser colocados na forma geral:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega^*\omega^\mu) - (M - g_\sigma^*\sigma)]\psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \end{aligned} \quad (2.211)$$

onde temos a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} \text{Walecka: } & g_\sigma^* \longrightarrow g_\sigma, \quad g_\omega^* \longrightarrow g_\omega; \\ \text{ZM: } & g_\sigma^* \longrightarrow m^*g_\sigma, \quad g_\omega^* \longrightarrow g_\omega; \\ \text{ZM3: } & g_\sigma^* \longrightarrow m^*g_\sigma, \quad g_\omega^* \longrightarrow m^*g_\omega. \end{aligned}$$

As equações de movimento que seguem daí são:

$$[i\gamma_\mu\partial^\mu - (M - g_\sigma^*\sigma) - g_\omega^*\gamma_\mu\omega^\mu]\psi = 0, \quad (2.212)$$

$$\partial_\nu\omega^{\mu\nu} + m_\omega^2\omega^\mu = g_\omega^*\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (2.213)$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\sigma^2)\sigma = -\frac{\partial(g_\sigma^*\sigma)}{\partial\sigma}\bar{\psi}\psi - \frac{\partial g_\omega^*}{\partial\sigma}\bar{\psi}\omega_\mu\gamma^\mu\psi, \quad (2.214)$$

as quais, na aproximação de campo médio, ficam:

$$g_\omega\omega_0 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\rho, \quad (2.215)$$

$$g_\sigma\sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ -\frac{1}{g_\sigma} \frac{\partial(g_\sigma^*\sigma)}{\partial\sigma} \right] \rho_s, \quad (2.216)$$

para o modelo ZM e

$$g_\omega\omega_0 = m^* \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho, \quad (2.217)$$

$$g_\sigma\sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ -\frac{1}{g_\sigma} \frac{\partial(g_\sigma^*\sigma)}{\partial\sigma} \rho_s - m^* \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \frac{1}{g_\sigma g_\omega} \frac{\partial g_\omega^*}{\partial\sigma} \rho^2 \right], \quad (2.218)$$

para o modelo ZM3. Nota-se a peculiaridade do modelo ZM3: o acoplamento entre os mésons escalares e vetoriais, o que não aparece nos outros modelos (Walecka, Não-linear e ZM).

A densidade de energia e a pressão têm as mesmas expressões dadas para o modelo de Walecka na subseção 2.3.5, mas substituindo  $g_\sigma$  por  $g_\sigma^*$ .

## 2.6 Modelo com Acoplamento Ajustável

Como vimos anteriormente, muitas técnicas foram usadas para tentar corrigir as deficiências do modelo original de Walecka; o modelo não-linear de Boguta-Bodmer insere novos termos no lagrangeano, enquanto os modelos ZM1 e ZM3 trocam a forma do acoplamento entre os mésons e os núcleons. Com o aparecimento de modelos do tipo ZM, muitos autores começaram a explorar mais a liberdade que os modelos efetivos dão, e surgiram trabalhos que utilizam outros tipos de acoplamento de modo a reproduzir, com o mínimo de parâmetros físicos, as propriedades globais do núcleo.

Nesta seção, analisaremos um modelo que abarca a maioria desses modelos existentes na literatura, vinculando parâmetros matemáticos livres aos acoplamentos méson-núcleon; esse modelo com acoplamento derivativo ajustável foi proposto originalmente por André Taurines em 1999 [7].

## 2.6.1 Lagrangeano

A montagem da densidade lagrangeana do modelo com acoplamento ajustável é análoga à do modelo de Walecka. Agora, além dos núcleons, consideramos também os híperons, de forma que temos todo o octeto bariônico, seguindo o mesmo raciocínio apresentado na subseção 2.3.8. e já tendo em vista a aplicação do formalismo ao estudo das estrelas de nêutrons. Nesses objetos, os bárions de maior massa aparecem porque, à medida que a densidade do sistema aumenta, há energia suficiente para exceder a massa de repouso dos híperons, e a conversão para estas partículas reduz a energia e a pressão do sistema, sendo, pois, um estado preferencial. Os diferentes bárions são representados pelo campo vetorial  $\psi_B$  e têm massa  $M_B$ .

Nesse modelo, além do méson  $\sigma$  e do méson  $\omega$ , temos também o méson  $\varrho$ . Esse, a exemplo do méson  $\omega$ , é um bóson vetorial; logo, seu termo de interação com os bárions é análogo ao do méson  $\omega$ , e sua densidade lagrangeana livre é representada pela densidade lagrangeana de Proca. Em nossa notação, o méson  $\varrho$  é representado pelo campo vetorial  $\varrho^\mu$  e tem massa  $m_\varrho$ . No espaço de isospin, como já vimos, ele é representado por um isovetor e tem as duas primeiras componentes do campo  $\varrho^\mu$  nulas, restando apenas  $\varrho_3^\mu$ .

Incluímos, no formalismo, léptons não-interagentes (múon e elétron) a fim de equilibrar a carga positiva total dos bárions. Por serem férmions, serão adequadamente descritos pela densidade lagrangeana de Dirac, sendo representados pelo campo espinorial  $\psi_\lambda$ , com massa  $m_\lambda$ .

Assim, a densidade lagrangeana para o modelo de com acoplamento ajustável será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - M_B) \psi_B + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \\ & + \left( -\frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right) + \left( -\frac{1}{4} \varrho_{\mu\nu} \cdot \varrho^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\varrho^2 \varrho_\mu \cdot \varrho^\mu \right) \\ & + (g_{\sigma B}^* \bar{\psi}_B \psi_B \sigma - g_{\omega B}^* \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\varrho B}^* \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu), \end{aligned}$$

onde, da mesma forma que antes, mudamos a nomenclatura

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu \rightarrow \omega_{\mu\nu}. \quad (2.219)$$

Na densidade lagrangeana acima, foi feito um rescalonamento dos termos de interação com os mésons:

$$g_{\sigma B}^* \equiv m_{\lambda B}^* g_{\sigma B}, \quad (2.220)$$

$$g_{\omega B}^* \equiv m_{\beta B}^* g_{\omega B}, \quad (2.221)$$

$$g_{\rho B}^* \equiv m_{\gamma B}^* g_{\rho B}, \quad (2.222)$$

onde

$$m_{iB}^* \equiv \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{iM_B}\right)^{-i}, \quad (2.223)$$

e onde  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros reais positivos que variam continuamente.

Rearranjando os termos da densidade lagrangeana, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega B}^* \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B}^* \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu) - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)] \psi_B \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \right) + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda. \end{aligned}$$

Quando fazemos  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  tenderem a zero, temos  $m_{\lambda B}^* = m_{\beta B}^* = m_{\gamma B}^* \rightarrow 1$  e recaímos num acoplamento típico do modelo de Walecka. Quando igualamos  $\lambda$  a um e fazemos  $\beta$  e  $\gamma$  tenderem a zero, temos  $m_{\lambda B}^* = (1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{M_B})^{-1}$  e  $m_{\beta B}^* = m_{\gamma B}^* \rightarrow 1$  e recaímos num acoplamento típico do modelo ZM1. Quando igualamos  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  a um, temos  $m_{\lambda B}^* = m_{\beta B}^* = m_{\gamma B}^* = (1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{M_B})^{-1}$  e recaímos num acoplamento típico do modelo ZM3.

Em suma, esse modelo apresenta *acoplamentos méson-núcleon ajustáveis*. Esse tipo de acoplamento ajustável nos dá grande liberdade de escolha, pois podemos variar os índices continuamente para obtermos valores das grandezas físicas intermediários àqueles obtidos a partir dos modelos citados acima (Walecka, ZM1 e ZM3).

A faixa de valores interessantes para esses parâmetros não é tão grande como pode-se pensar a princípio. Devido à forma geral de nosso acoplamento, apresentada em (2.220), (2.221), (2.222) e (2.223), há uma rápida convergência para uma forma exponencial de acoplamento, o assim chamado *acoplamento exponencial*. Para verificar esse fato, basta fazer os parâmetros ajustáveis tenderem a infinito ( $i \rightarrow \infty$ ):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g_{nB}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{iM_B}\right)^{-i} g_{nB} = e^{-\frac{g_{\sigma\sigma}}{M_B}} g_{nB},$$

onde n, aqui, representa genericamente  $\sigma$ ,  $\omega$  ou  $\rho$ .

Esse limite pode ser calculado com facilidade. Pela série binomial, temos que

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{iM_B}\right)^{-i} = & 1 + (-i) \left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{iM_B}\right) + \frac{(-i)(-i-1)}{2!} \left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{iM_B}\right)^2 \\ & + \frac{(-i)(-i-1)(-i-2)}{3!} \left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{iM_B}\right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.224)$$



Quando  $|i|$  é muito grande, podemos fazer a aproximação:

$$\left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^{-i} = 1 + (-i) \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B} + \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^2 + \frac{(-i)^3}{3!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^3 + \dots \quad (2.225)$$

$$\left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^{-i} = 1 - \frac{g_\sigma \sigma}{M_B} + \frac{1}{2!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{M_B}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{M_B}\right)^3 + \dots \quad (2.226)$$

Essa última expressão, através da expansão da função exponencial,

$$e^x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (2.227)$$

pode ser escrita como

$$\left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^{-i} = e^{-\frac{g_\sigma \sigma}{M_B}}, \quad (2.228)$$

estabelecendo o limite enunciado acima. Por essa razão, como veremos, já para  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  maiores que 1, os resultados não diferem muito daqueles obtidos para esse acoplamento exponencial.

Apesar de haver muitas possibilidades de combinação entre os parâmetros  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , exploraremos apenas dois casos principais, a exemplo do trabalho original em que esse modelo foi apresentado [7]. São eles:

- Escalar (caso E): variamos  $\lambda$ , e  $\beta$  e  $\gamma$  são sempre nulos. Esse caso pode abrigar os modelos de Walecka e ZM1.
- Escalar-Vetorial (caso E-V): variamos  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , mas com o vínculo  $\lambda=\beta=\gamma$ . Esse caso pode abrigar os modelos de Walecka e ZM3.

O fato de o modelo de Walecka pertencer às duas categorias não é estranho, já que, para esse modelo, os três parâmetros matemáticos são nulos.

## 2.6.2 Equações de Campo

Seguindo o procedimento padrão, vamos agora aplicar as equação de Euler-Lagrange à densidade lagrangeana do modelo com acoplamento ajustável para obtermos as equações de campo.

### Para o Campo $\sigma$

Para o campo  $\sigma$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right) = 0 \quad (2.229)$$

$$\sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( -\frac{\partial g_{\omega B}^*}{\partial \sigma} \omega^\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho B}^*}{\partial \sigma} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \right) + g_{\sigma B}^* + \frac{\partial g_{\sigma B}^*}{\partial \sigma} \sigma \right] \psi_B - m_\sigma^2 \sigma - \partial_\mu (\partial^\mu \sigma) = 0. \quad (2.230)$$

Substituindo (2.223) em (2.220), (2.221), (2.222) e derivando, obtemos

$$g_{\sigma B}^* = \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\lambda M_B}\right)^{-\lambda} g_{\sigma B} \quad (2.231)$$

$$\frac{\partial g_{\sigma B}^*}{\partial \sigma} = -\lambda \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\lambda M_B}\right)^{-\lambda-1} \frac{g_{\sigma} g_{\sigma B}}{\lambda M_B} \quad (2.232)$$

$$\frac{\partial g_{\sigma B}^*}{\partial \sigma} = -(m_{\lambda B}^*)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma} g_{\sigma B}}{M_B} \quad (2.233)$$

para o acoplamento do méson  $\sigma$ ,

$$g_{\omega B}^* = \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\beta M_B}\right)^{-\beta} g_{\omega B} \quad (2.234)$$

$$\frac{\partial g_{\omega B}^*}{\partial \sigma} = -\beta \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\beta M_B}\right)^{-\beta-1} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{\beta M_B} \quad (2.235)$$

$$\frac{\partial g_{\omega B}^*}{\partial \sigma} = -(m_{\beta B}^*)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \quad (2.236)$$

para o acoplamento do méson  $\omega$  e

$$g_{\rho B}^* = \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\gamma M_B}\right)^{-\gamma} g_{\rho B} \quad (2.237)$$

$$\frac{\partial g_{\rho B}^*}{\partial \sigma} = -\gamma \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\gamma M_B}\right)^{-\gamma-1} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{\gamma M_B} \quad (2.238)$$

$$\frac{\partial g_{\rho B}^*}{\partial \sigma} = -(m_{\gamma B}^*)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \quad (2.239)$$

para o acoplamento do méson  $\rho$ . Substituindo as derivadas na equação de movimento para  $\sigma$ , vem que:

$$\begin{aligned} \sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_{\mu} \left( - \left( - (m_{\beta B}^*)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \right) \omega^{\mu} - \frac{1}{2} \left( - (m_{\gamma B}^*)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^{\mu} \right) \right. \\ \left. + \left( m_{\lambda B}^* g_{\sigma B} \right) + \left( - (m_{\lambda B}^*)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma} g_{\sigma B}}{M_B} \right) \sigma \right] \psi_B - m_{\sigma}^2 \sigma - \partial_{\mu} (\partial^{\mu} \sigma) = 0. \end{aligned} \quad (2.240)$$

Rearranjando essa equação, resulta:

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m_{\sigma}^2) \sigma = \sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_{\mu} \left( (m_{\beta B}^*)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \omega^{\mu} + \frac{1}{2} (m_{\gamma B}^*)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^{\mu} \right) \right. \\ \left. + g_{\sigma B} m_{\lambda B}^* - (m_{\lambda B}^*)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma} g_{\sigma B}}{M_B} \sigma \right] \psi_B. \end{aligned} \quad (2.241)$$

Definindo a razão entre as constantes de acoplamento dos bárions em geral pela constante de acoplamento dos núcleons

$$\chi_{nB} = \frac{g_{nB}}{g_n}, \quad (2.242)$$

onde n pode ser  $\sigma$ ,  $\omega$  ou  $\varrho$ , a equação fica escrita como

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2)\sigma = g_\sigma \sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( (m_{\beta B}^*)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega^\mu + \frac{1}{2} (m_{\gamma B}^*)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\varrho B}}{M_B} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu \right) + \chi_{\sigma B} m_{\lambda B}^* - (m_{\lambda B}^*)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma \right] \psi_B. \quad (2.243)$$

### Para o Campo $\psi_B$

Para o campo  $\psi_B$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_B} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi}_B)} \right) = 0 \quad (2.244)$$

$$\sum_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega B}^* \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\varrho B}^* \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu) - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)] \psi_B = 0, \quad (2.245)$$

que é a Equação de Dirac com campos vetoriais e escalar.

### Para o Campo $\bar{\psi}_B$

Para o campo  $\bar{\psi}_B$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_B} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi_B)} \right) = 0 \quad (2.246)$$

$$\sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( -g_{\omega B}^* \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\varrho B}^* \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu \right) - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma) \right] - \partial^\mu \left( \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu i \right) = 0 \quad (2.247)$$

$$\sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( i\overleftarrow{\partial}^\mu + g_{\omega B}^* \omega^\mu + \frac{1}{2} g_{\varrho B}^* \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu \right) + (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma) \right] = 0, \quad (2.248)$$

que é a Equação de Dirac adjunta com campos vetoriais e escalar. Essa equação de campo não será usada daqui para diante porque é apenas a conjugada da equação de movimento para  $\psi_B$ .

### Para o Campo $\omega$

Para o campo  $\omega$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^\mu} - \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \omega^\mu)} \right) = 0 \quad (2.249)$$

$$- \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu g_{\omega B}^* \psi_B + m_\omega^2 \omega_\mu - \partial^\nu (\omega_{\mu\nu}) = 0 \quad (2.250)$$

$$-\partial^\nu \omega_{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu = \sum_B m_{\beta B}^* g_{\omega B} \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B, \quad (2.251)$$

que é a equação de Proca com fonte vetorial e com a corrente bariônica no lugar da corrente eletromagnética.

**Para o Campo  $\varrho$**

Para o campo  $\varrho$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varrho^\mu} - \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \varrho^\mu)} \right) = 0 \quad (2.252)$$

$$- \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu \frac{1}{2} g_{\varrho B}^* \boldsymbol{\tau} \psi_B + m_\varrho^2 \varrho_\mu - \partial^\nu (\varrho_{\mu\nu}) = 0 \quad (2.253)$$

$$-\partial^\nu \varrho_{\mu\nu} + m_\varrho^2 \varrho_\mu = \frac{1}{2} \sum_B m_{\gamma B}^* g_{\varrho B} \bar{\psi}_B \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \psi_B, \quad (2.254)$$

que é a equação de Proca com fonte vetorial e com corrente bariônica no lugar da corrente eletromagnética.

**Para o Campo  $\psi_\lambda$**

Para o campo  $\psi_\lambda$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\lambda} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi}_\lambda)} \right) = 0 \quad (2.255)$$

$$\sum_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda = 0, \quad (2.256)$$

que é a equação de Dirac.

**Para o Campo  $\bar{\psi}_\lambda$**

Para o campo  $\bar{\psi}_\lambda$ , as equações de Euler-Lagrange nos dão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\lambda} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi_\lambda)} \right) = 0 \quad (2.257)$$

$$\sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (-m_\lambda) - \partial^\mu \left( \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda i\gamma_\mu \right) = 0 \quad (2.258)$$

$$\sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m_\lambda) = 0, \quad (2.259)$$

que é a Equação de Dirac adjunta. Essa equação de campo não será usada daqui para diante porque é apenas a conjugada da equação de movimento para  $\psi_\lambda$ .

### 2.6.3 Tensor Energia-Momentum

Aplicando a definição do tensor energia-momentum

$$T_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \sum_{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}Q^{\eta})} \partial_{\nu}Q^{\eta} \quad (2.260)$$

à densidade lagrangeana do modelo, obtemos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & - \left[ \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_{\theta}(i\partial^{\theta} - g_{\omega B}^* \omega^{\theta} - \frac{1}{2}g_{\rho B}^* \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\theta}) - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)] \psi_B + \sum_{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda} (i\gamma_{\theta} \partial^{\theta} - m_{\lambda}) \psi_{\lambda} \right. \\ & + \frac{1}{2}(\partial_{\theta}\sigma\partial^{\theta}\sigma - m_{\sigma}^2\sigma^2) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}\omega_{\theta\phi}\omega^{\theta\phi} + m_{\omega}^2\omega_{\theta}\omega^{\theta} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_{\theta\phi} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\theta\phi} + m_{\rho}^2\boldsymbol{\rho}_{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\theta} \right) \left. \right] g_{\mu\nu} \\ & + (\partial_{\mu}\sigma)\partial_{\nu}\sigma + (-\omega_{\mu\eta})\partial_{\nu}\omega^{\eta} + (-\boldsymbol{\rho}_{\mu\eta}) \cdot \partial_{\nu}\boldsymbol{\rho}^{\eta} + \left( \sum_{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda}\gamma_{\mu}i \right) \partial_{\nu}\psi_{\lambda} + \left( \sum_B \bar{\psi}_B\gamma_{\mu}i \right) \partial_{\nu}\psi_B. \end{aligned} \quad (2.261)$$

Usando as equações de movimento dos campos  $\psi_B$  e  $\psi_{\lambda}$ , o primeiro e o segundo termos desaparecem, restando:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left[ -(\partial_{\theta}\sigma\partial^{\theta}\sigma - m_{\sigma}^2\sigma^2) - \left( -\frac{1}{2}\omega_{\theta\phi}\omega^{\theta\phi} + m_{\omega}^2\omega_{\theta}\omega^{\theta} \right) - \left( -\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_{\theta\phi} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\theta\phi} + m_{\rho}^2\boldsymbol{\rho}_{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\theta} \right) \right] g_{\mu\nu} \\ & + \partial_{\mu}\sigma\partial_{\nu}\sigma - \omega_{\mu\eta}\partial_{\nu}\omega^{\eta} - \boldsymbol{\rho}_{\mu\eta} \cdot \partial_{\nu}\boldsymbol{\rho}^{\eta} + \sum_{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda}\gamma_{\mu}i\partial_{\nu}\psi_{\lambda} + \sum_B \bar{\psi}_B\gamma_{\mu}i\partial_{\nu}\psi_B. \end{aligned} \quad (2.262)$$

### 2.6.4 Aproximação de Campo Médio

Tomemos a aproximação de campo médio (MFT):

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0 \quad (2.263)$$

$$\omega^{\mu} \rightarrow \langle \omega^{\mu} \rangle = \delta_{\mu 0} \omega_0 \quad (2.264)$$

$$\boldsymbol{\rho}^{\mu} \rightarrow \langle \boldsymbol{\rho}^{\mu} \rangle = \delta_{\mu 0} \boldsymbol{\rho}_{03} \quad (2.265)$$

$$\frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu}}{2} \rightarrow \frac{\langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu} \rangle}{2} = \frac{\tau_3 \delta_{\mu 0} \rho_{03}}{2}, \quad (2.266)$$

onde a última equivalência foi estabelecida coerentemente com (2.187). Façamos, então, as substituições acima nas equações de campo anteriormente obtidas.

#### Equação do Campo $\sigma$ na MFT

Para a equação do campo  $\sigma$ , obtemos a aproximação:

$$\begin{aligned} m_{\sigma}^2\sigma_0 = & g_{\sigma} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \psi_B \rangle \right. \\ & \left. + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle \right], \end{aligned} \quad (2.267)$$

onde

$$(m_{iB}^*)_0 \equiv \left(1 + \frac{g_\sigma \sigma_0}{iM_B}\right)^{-i}. \quad (2.268)$$

Utilizando as definições usuais de densidade bariônica e de densidade escalar

$$\rho_B = \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \psi_B \rangle \quad (2.269)$$

$$\rho_s = \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle, \quad (2.270)$$

sendo agora  $\rho_s$  a densidade escalar de cada bárion individualmente, ficamos com:

$$g_\sigma \sigma_0 = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \rho_s \right]. \quad (2.271)$$

Daí vem que

$$g_\sigma \sigma_0 \left( 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s \right) = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right], \quad (2.272)$$

de onde temos, finalmente, que

$$g_\sigma \sigma_0 = \frac{\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right]}{1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s}. \quad (2.273)$$

### Equação do Campo $\omega$ na MFT

Para a equação do campo  $\omega$ , obtemos a aproximação:

$$m_\omega^2 \omega_0 = \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 g_{\omega B} \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \psi_B \rangle. \quad (2.274)$$

Substituindo a definição de densidade bariônica, multiplicando por  $g_\omega$  dos dois lados e isolando  $g_\omega \omega_0$ , temos que:

$$g_\omega \omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 g_{\omega B} \rho_B. \quad (2.275)$$

Substituindo (2.242), temos finalmente que

$$g_\omega \omega_0 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 \chi_{\omega B} \rho_B. \quad (2.276)$$

### Equação do Campo $\varrho$ na MFT

Para a equação do campo  $\varrho$ , obtemos a aproximação:

$$m_\varrho^2 \varrho_{03} = \sum_B (m_{\gamma_B}^*)_0 g_{\varrho B} I_{3B} \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \psi_B \rangle . \quad (2.277)$$

Substituindo a definição de densidade bariônica, temos que:

$$m_\varrho^2 \varrho_{03} = \sum_B (m_{\gamma_B}^*)_0 g_{\varrho B} I_{3B} \rho_B . \quad (2.278)$$

Multiplicando por  $g_\varrho$  dos dois lados, isolando  $g_\varrho \varrho_{03}$  e substituindo (2.242), ficamos com:

$$g_\varrho \varrho_{03} = \frac{g_\varrho^2}{m_\varrho^2} \sum_B (m_{\gamma_B}^*)_0 \chi_{\varrho B} I_{3B} \rho_B . \quad (2.279)$$

### Equação do Campo $\psi_\lambda$ na MFT

Para a equação do campo  $\psi_\lambda$ , temos simplesmente que

$$\left\langle \sum_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda \right\rangle = 0 . \quad (2.280)$$

### Equação do Campo $\psi_B$ na MFT

Para a equação do campo  $\psi_B$ , obtemos a aproximação

$$\left\langle \sum_B [(\gamma_\mu i\partial^\mu - \gamma_0 (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 - \gamma_0 (g_{\varrho B}^*)_0 I_{3B} \varrho_{03}) - (M_B - (g_{\sigma B}^*)_0 \sigma_0)] \psi_B \right\rangle = 0 . \quad (2.281)$$

Definindo uma massa efetiva

$$M_B^* = M_B - (g_{\sigma B}^*)_0 \sigma_0 \quad (2.282)$$

e substituindo em (2.281), obtemos:

$$\left\langle \sum_B [\gamma_\mu i\partial^\mu - \gamma_0 (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 - \gamma_0 (g_{\varrho B}^*)_0 I_{3B} \varrho_{03} - M_B^*] \psi_B \right\rangle = 0 . \quad (2.283)$$

## 2.6.5 Equação de Estado da Matéria Nuclear

Seguindo o mesmo procedimento adotado no estudo do modelo de Walecka, calcularemos agora a equação de estado da matéria nuclear para o novo modelo com acoplamento derivativo ajustável.

## Densidade Bariônica

Como já sabemos, a densidade de uma determinada espécie bariônica em um sistema em que já esteja levantada a degenerescência de isospin pode ser escrita como

$$\rho_B = \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k, \quad (2.284)$$

de onde

$$\rho_B = \frac{2J_B + 1}{6\pi^2} k_{FB}^3. \quad (2.285)$$

O spin  $J_B$  de cada bárion pode ser visto na Tabela 1.2.

## Densidade Escalar

Com base nas equações (2.136) e (2.137), podemos escrever a densidade escalar associada à cada espécie bariônica do sistema como sendo

$$\rho_s = \frac{(2J_B + 1)M_B^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M_B^*)^2}}, \quad (2.286)$$

de onde resulta que

$$\rho_s = \frac{2J_B + 1}{4\pi^2} \left( k_{FB} M_B^* \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2} - (M_B^*)^3 \ln \frac{k_{FB} + \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2}}{M_B^*} \right). \quad (2.287)$$

## Densidade Leptônica

Analogamente à densidade bariônica, podemos definir ainda uma densidade leptônica  $\rho_\lambda$ , tal que

$$\rho_\lambda = \langle \psi_\lambda^\dagger \psi_\lambda \rangle. \quad (2.288)$$

No caso dos léptons presentes em nosso sistema (o elétron e o múon), teremos associado a eles um fator de degenerescência de spin  $\gamma = 2$ , resultando:

$$\rho_\lambda = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_{F\lambda}^3 = \frac{1}{3\pi^2} k_{F\lambda}^3. \quad (2.289)$$

## Pressão e Densidade de Energia

Para o modelo ajustável, as expressões para a pressão e a densidade de energia podem ser escritas de forma análoga às aquelas presentes nas equações (2.190) e (2.191):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ &+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \ k^2 \sqrt{k^2 + (M_B^*)^2} \\ &+ \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F\lambda}} dk \ k^2 \sqrt{k^2 + m_\lambda^2}; \end{aligned} \quad (2.290)$$



$$\begin{aligned}
p &= -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\varrho^2\varrho_{03}^2 \\
&+ \frac{1}{3}\sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + (M_B^*)^2}} \\
&+ \frac{1}{3}\sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F\lambda}} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_\lambda^2}}.
\end{aligned} \tag{2.291}$$

Nas equações acima,  $M_B^*$  está definido de acordo com (2.282). Resolvendo as integrais acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\varrho^2\varrho_{03}^2 \\
&+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4}k_{FB}^3 + \frac{1}{8}(M_B^*)^2 k_{FB} \right) \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2} - \frac{1}{8}(M_B^*)^4 \ln \frac{k_{FB} + \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2}}{M_B^*} \right] \\
&+ \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4}k_{F\lambda}^3 + \frac{1}{8}m_\lambda^2 k_{F\lambda} \right) \sqrt{m_\lambda^2 + k_{F\lambda}^2} - \frac{1}{8}m_\lambda^4 \ln \frac{k_{F\lambda} + \sqrt{m_\lambda^2 + k_{F\lambda}^2}}{m_\lambda} \right];
\end{aligned} \tag{2.292}$$

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\varrho^2\varrho_{03}^2 \\
&+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{6\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4}k_{FB}^3 - \frac{3}{8}(M_B^*)^2 k_{FB} \right) \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2} + \frac{3}{8}(M_B^*)^4 \ln \frac{k_{FB} + \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2}}{M_B^*} \right] \\
&+ \sum_\lambda \frac{1}{3\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4}k_{F\lambda}^3 - \frac{3}{8}m_\lambda^2 k_{F\lambda} \right) \sqrt{m_\lambda^2 + k_{F\lambda}^2} + \frac{3}{8}m_\lambda^4 \ln \frac{k_{F\lambda} + \sqrt{m_\lambda^2 + k_{F\lambda}^2}}{m_\lambda} \right].
\end{aligned} \tag{2.293}$$

## Massa Efetiva

De acordo com as equações (2.282), (2.220) e (2.223), podemos escrever que a massa efetiva de cada particular espécie bariônica do modelo será dada por

$$M_B^* = M_B - \frac{g_{\sigma B}\sigma_0}{\left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma_0}}{\lambda M_B}\right)^\lambda}. \tag{2.294}$$

Para obtermos uma expressão de  $M_B^*$  em função de  $k_{FB}$ , vamos substituir (2.273) em (2.294):

$$\begin{aligned}
M_B^* &= M_B - \\
&\frac{\chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_{B'} \left[ \left( (m_{\beta B'}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B'}}{M_{B'}} \omega_0 + (m_{\gamma B'}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\varrho B'}}{M_{B'}} \varrho_{03} I_{3B'} \right) \rho_{B'} + \chi_{\sigma B'}(m_{\lambda B'}^*)_0 \rho_s \right]}{1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_{B'} (m_{\lambda B'}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B'}}{M_{B'}} \rho_s}.
\end{aligned} \tag{2.295}$$

A expressão acima pode, ainda, ser escrita como:

$$M_B^* = M_B - \left\{ \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_{B'} \left[ \left( (m_{\beta B'}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B'}}{M_{B'}} \omega_0 + (m_{\gamma B'}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\varrho B'}}{M_{B'}} \varrho_{03} I_{3B'} \right) \rho_{B'} \right. \right. \\ \left. \left. + \chi_{\sigma B'} (m_{\lambda B'}^*)_0 \rho_s \right] \right\} \times \left\{ 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_{B'} (m_{\lambda B'}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B'}}{M_{B'}} \rho_s \right\}^{-1}. \quad (2.296)$$

Substituindo (2.276) e (2.279), ficamos com

$$M_B^* = M_B - \left\{ \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_{B'} \left[ \left( (m_{\beta B'}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B'}}{M_{B'}} \left( \sum_{B''} \frac{g_\omega}{m_\omega^2} (m_{\beta B''}^*)_0 \chi_{\omega B''} \rho_{B''} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (m_{\gamma B'}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\varrho B'}}{M_{B'}} \left( \sum_{B''} \frac{g_\varrho}{m_\varrho^2} (m_{\gamma B''}^*)_0 \chi_{\varrho B''} I_{3B''} \rho_{B''} \right) I_{3B'} \right) \rho_{B'} + \chi_{\sigma B'} (m_{\lambda B'}^*)_0 \rho_s \right] \right\} \\ \times \left\{ 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_{B'} (m_{\lambda B'}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B'}}{M_{B'}} \rho_s \right\}^{-1}, \quad (2.297)$$

Substituindo a expressão para a densidade bariônica  $\rho_B$  em função do momentum de Fermi  $k_{F_B}$  na expressão acima, obtemos:

$$M_B^* = M_B - \left\{ \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_{B'} \left[ \left( (m_{\beta B'}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B'}}{M_{B'}} \left( \sum_{B''} \frac{g_\omega}{m_\omega^2} (m_{\beta B''}^*)_0 \chi_{\omega B''} \frac{(2J_{B''} + 1)}{6\pi^2} k_{F_{B''}}^3 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (m_{\gamma B'}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\varrho B'}}{M_{B'}} \left( \sum_{B''} \frac{g_\varrho}{m_\varrho^2} (m_{\gamma B''}^*)_0 \chi_{\varrho B''} I_{3B''} \frac{(2J_{B''} + 1)}{6\pi^2} k_{F_{B''}}^3 \right) I_{3B'} \right) \frac{(2J_{B'} + 1)}{6\pi^2} k_{F_{B'}}^3 \right. \\ \left. \left. + \chi_{\sigma B'} (m_{\lambda B'}^*)_0 \rho_s \right] \right\} \times \left\{ 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_{B'} (m_{\lambda B'}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B'}}{M_{B'}} \rho_s \right\}^{-1}, \quad (2.298)$$

Substituindo, então, a expressão para a densidade escalar  $\rho_s$  de cada espécie bariônica na equação acima, chegamos à forma final da expressão auto-consistente para  $M_B^*$  em função

de  $k_{F_B}$ :

$$\begin{aligned}
M_B^* = M_B - & \left\{ \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_{B'} \left[ \left( (m_{\beta B'}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B'}}{M_{B'}} \left( \sum_{B''} \frac{g_\omega}{m_\omega^2} (m_{\beta B''}^*)_0 \chi_{\omega B''} \frac{(2J_{B''} + 1)}{6\pi^2} k_{F_{B''}}^3 \right) \right. \right. \right. \\
& + (m_{\gamma B'}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B'}}{M_{B'}} \left( \sum_{B''} \frac{g_\rho}{m_\rho^2} (m_{\gamma B''}^*)_0 \chi_{\rho B''} I_{3B''} \frac{(2J_{B''} + 1)}{6\pi^2} k_{F_{B''}}^3 \right) I_{3B'} \left. \left. \frac{(2J_{B'} + 1)}{6\pi^2} k_{F_{B'}}^3 \right. \right. \\
& + \chi_{\sigma B'} (m_{\lambda B'}^*)_0 \frac{2J_{B'} + 1}{4\pi^2} \\
& \times \left( k_{F_{B'}} M_{B'}^* \sqrt{(M_{B'}^*)^2 + k_{F_{B'}}^2} - (M_{B'}^*)^3 \ln \frac{k_{F_{B'}} + \sqrt{(M_{B'}^*)^2 + k_{F_{B'}}^2}}{M_{B'}^*} \right) \left. \left. \right] \right\} \\
& \times \left\{ 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_{B'} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B'}}{M_{B'}} \frac{2J_{B'} + 1}{4\pi^2} \right. \\
& \times \left. \left( k_{F_{B'}} M_{B'}^* \sqrt{(M_{B'}^*)^2 + k_{F_{B'}}^2} - (M_{B'}^*)^3 \ln \frac{k_{F_{B'}} + \sqrt{(M_{B'}^*)^2 + k_{F_{B'}}^2}}{M_{B'}^*} \right) \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.299}$$

Para resolver essa equação, iteramos  $M_B^*$  numericamente começando com  $M_B^* = M_B$ .

## 2.6.6 Constantes de Acoplamento

Agora, seguindo o mesmo procedimento da seção 2.3.6, iremos encontrar, inicialmente, as constantes de acoplamento dos núcleons  $\frac{g_\sigma}{m_\sigma}$ ,  $\frac{g_\omega}{m_\omega}$  e  $\frac{g_\rho}{m_\rho}$  em função de  $\rho_0$  (a densidade bariônica na saturação),  $\varepsilon_0$  (a densidade de energia na saturação),  $M_N$  (a massa do núcleon) e  $(M_N^*)_0$  (a massa efetiva na saturação). Como vamos calcular as constantes de acoplamento utilizando os parâmetros nucleares medidos na saturação, vamos usar expressões que contenham apenas os núcleons, já que os híperons aparecem na matéria nuclear apenas em densidades mais altas (bem superiores à densidade de saturação), como aquelas encontradas nos interiores das estrelas compactas.

Para calcular  $\frac{g_\sigma}{m_\sigma}$  e  $\frac{g_\omega}{m_\omega}$ , consideramos a matéria simétrica (sem o méson  $\rho$ ).

Conforme justificamos na seção 2.3.6, a pressão deve ser nula na saturação. Portanto, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
p = & -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \\
& + \frac{4}{6\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} (k_{F_N})_0^3 - \frac{3}{8} (M_N^*)_0^2 (k_{F_N})_0 \right) \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{F_N})_0^2} \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} (M_N^*)_0^4 \ln \frac{(k_{F_N})_0 + \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{F_N})_0^2}}{(M_N^*)_0} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.300}$$

Depois igualamos a energia a  $\varepsilon_0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \\ & + \frac{4}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4}(k_{FN})_0^3 + \frac{1}{8}(M_N^*)_0^2(k_{FN})_0 \right) \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{FN})_0^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}(M_N^*)_0^4 \ln \frac{(k_{FN})_0 + \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{FN})_0^2}}{(M_N^*)_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.301)$$

Temos ainda que, na saturação:

$$\rho_0 = \frac{2(k_{FN})_0^3}{3\pi^2}. \quad (2.302)$$

Podemos, ainda, contar com as equações de campo médio

$$m_\sigma^2\sigma_0^2 = \frac{\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ \left( (m_{\beta N}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_\omega}{M_N} \omega_0 \right) \rho_0 + (m_{\lambda N}^*)_0 \rho_s \right]^2}{\left[ 1 + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} (m_{\lambda N}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{1}{M_N} \rho_s \right]^2} \quad (2.303)$$

e

$$m_\omega^2\omega_0^2 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} (m_{\beta N}^*)_0^2 \rho_0^2 \quad (2.304)$$

e com a expressão para a densidade escalar

$$\rho_s = \frac{4}{4\pi^2} \left( (k_{FN})_0 (M_N^*)_0 \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{FN})_0^2} - (M_N^*)_0^3 \ln \frac{(k_{FN})_0 + \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{FN})_0^2}}{(M_N^*)_0} \right). \quad (2.305)$$

Substituindo (2.146), (2.304) e (2.305) em (2.303), obtemos uma equação que, junto com (2.300) (combinada com (2.304)) e (2.301) (combinada também com (2.304)), formam um sistema de 3 equações e 3 incógnitas ( $\sigma_0$ ,  $\frac{g_\sigma}{m_\sigma}$  e  $\frac{g_\omega}{m_\omega}$ ) que deve resolvido numericamente.

Para calcular  $\frac{g_\rho}{m_\rho}$ , usamos a equação da energia somente com os núcleons

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\varrho_{03}^2 \\ & + \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{k_{FN}} dk \ k^2 \sqrt{k^2 + (M_N^*)^2} + \int_0^{k_{FP}} dk \ k^2 \sqrt{k^2 + (M_N^*)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.306)$$

onde:

$$m_\rho^2\varrho_{03}^2 = \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} (m_{\gamma N}^*)_0^2 \frac{(\rho_p - \rho_n)^2}{4}, \quad (2.307)$$

em conformidade com a teoria apresentada na subseção 2.3.7. Definindo novamente

$$t = \frac{N - Z}{A} = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_N} \quad (2.308)$$

e utilizando a definição do coeficiente de assimetria

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\varepsilon}{\rho_N} \right)}{\partial t^2} \right)_{t=0}, \quad (2.309)$$

onde  $t = 0$  por estarmos tratando de matéria nuclear simétrica, chegamos a

$$a_4 = \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{k_F^3}{12\pi^2} + \frac{k_F^2}{6} \frac{1}{\sqrt{k_F^2 + (M_N^*)^2}}. \quad (2.310)$$

Isolando  $\frac{g_\rho}{m_\rho}$  na expressão acima, obtemos, finalmente que

$$\left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 = \frac{12\pi^2}{k_F^3} \frac{1}{(m_{\gamma N}^*)^2} \left( a_4 - \frac{k_F^2}{6} \frac{1}{\sqrt{k_F^2 + (M_N^*)^2}} \right). \quad (2.311)$$

Nesse conjunto de equações, temos, ainda, de considerar os valores obtidos experimentalmente para os parâmetros da matéria nuclear. Conforme já dissemos antes, na subseção 2.3.6, a massa do núcleon  $M_N$  é  $4.76 fm^{-1}$ , o coeficiente de assimetria é  $a_4$  é  $32.5 MeV = 0.16 fm^{-1}$ , na saturação,  $\rho_0 = 0.17 fm^{-3}$  e  $\varepsilon_0 = 0.79 fm^{-4}$ .

As constantes de acoplamento para os híperons, serão, nesta dissertação, obtidas a partir das constantes de acoplamento dos núcleons, considerando-se a simetria de SU(6), conforme explicado na subseção 2.3.8.

O programa computacional utilizado para o cálculo das constantes de acoplamento nesse modelo com acoplamento derivativo ajustável, bem como os correspondentes valores de compressibilidade a massa efetiva do núcleon na saturação, pode ser encontrado na seção E5 do Apêndice E (Programa 5). Com os dados obtidos a partir desse programa, rodado para valores dos parâmetros ajustáveis que contemplam os casos E e E-V mencionados na subseção 2.6.1, foram confeccionados os gráficos que aparecem nas figuras 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14.

Os resultados mostrados nos gráficos indicam que, para o assim chamado modelo escalar (E), no qual o parâmetro ajustável  $\lambda$  varia enquanto  $\beta$  e  $\gamma$  são tomados nulos, temos valores aceitáveis de  $M^*/M$  para  $0.07 < \lambda < 0.22$  (quando  $\lambda = 0.07$ , temos que  $M^*/M = 0.71$ ; quando  $\lambda = 0.22$ , temos que  $M^*/M = 0.80$ ) e valores aceitáveis de  $K$  simplesmente para  $\lambda > 0.05$  (quando  $\lambda = 0.05$ , temos que  $K = 281.4$ ; para  $\lambda = 0.04$ , o valor de  $K$  já excede o limite fenomenológico de  $300 MeV$ ). Para valores de  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $K$  fica em torno de  $230 MeV$ . Logo, para termos valores aceitáveis simultaneamente para  $M^*/M$  e para  $K$ , devemos adotar, no caso do modelo escalar (E), valores do parâmetro ajustável na faixa  $0.07 < \lambda < 0.22$ .

Já para o assim chamado modelo escalar-vetorial (E-V), no qual o parâmetro ajustável  $\lambda$  varia sujeito ao vínculo  $\lambda = \beta = \gamma$ , temos valores aceitáveis de  $M^*/M$  para  $\lambda > 0.68$  (quando  $\lambda = 0.68$ , temos que  $M^*/M = 0.70$ ; quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , temos que  $M^*/M \rightarrow 0.75$ ) e valores aceitáveis de  $K$  para  $0.16 < \lambda < 0.36$  (quando  $\lambda = 0.16$ , temos que  $K = 295.4 MeV$ ; para  $\lambda = 0.36$ ,  $K = 200.1 MeV$ ). Logo, no caso do modelo escalar-vetorial (E-V), não é possível determinar uma faixa de valores para o parâmetro ajustável  $\lambda$  que, de acordo com a fenomenologia, reproduza valores aceitáveis simultaneamente para  $M^*/M$  e para  $K$ .

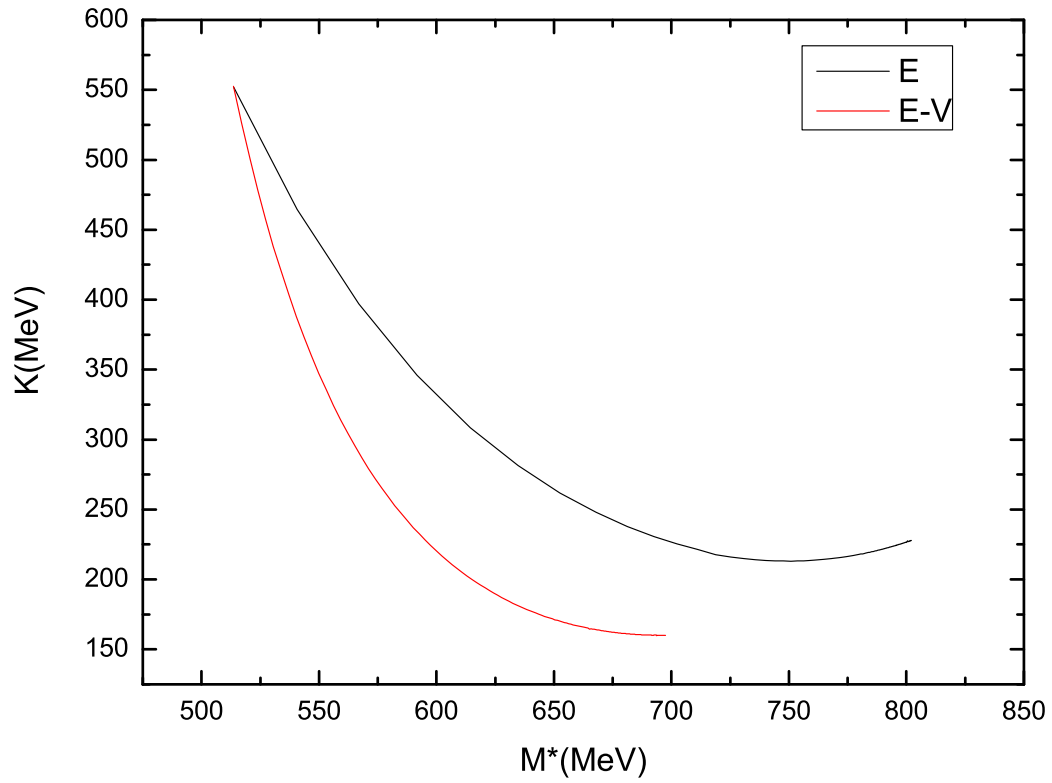


Figura 2.9: Módulo de compressibilidade em função da massa efetiva no modelo com acoplamento ajustável. Apresentamos os resultados para o modelo escalar (E), em que  $\lambda$  varia e  $\beta = \gamma = 0$ , e para o modelo escalar-vetorial (E-V), em que  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variam com o vínculo  $\lambda = \beta = \gamma$ .

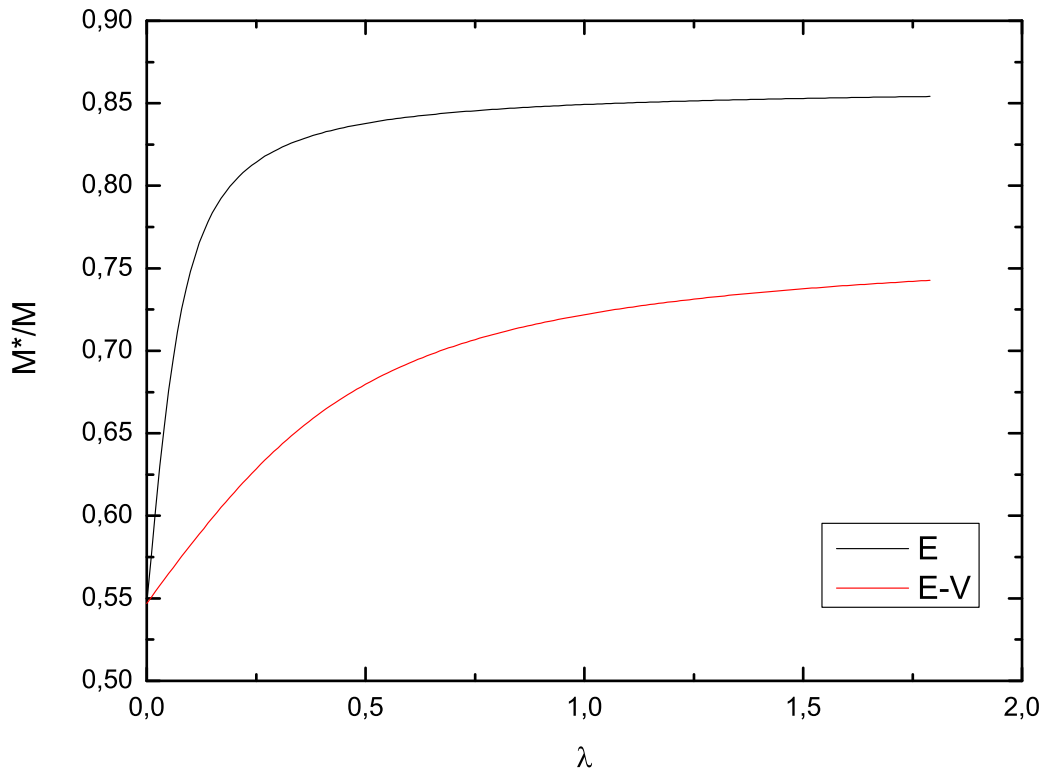


Figura 2.10: Massa efetiva no modelo com acoplamento ajustável, em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ . Apresentamos os resultados para o modelo escalar (E), em que  $\lambda$  varia e  $\beta = \gamma = 0$ , e para o modelo escalar-vetorial (E-V), em que  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variam com o vínculo  $\lambda = \beta = \gamma$ .

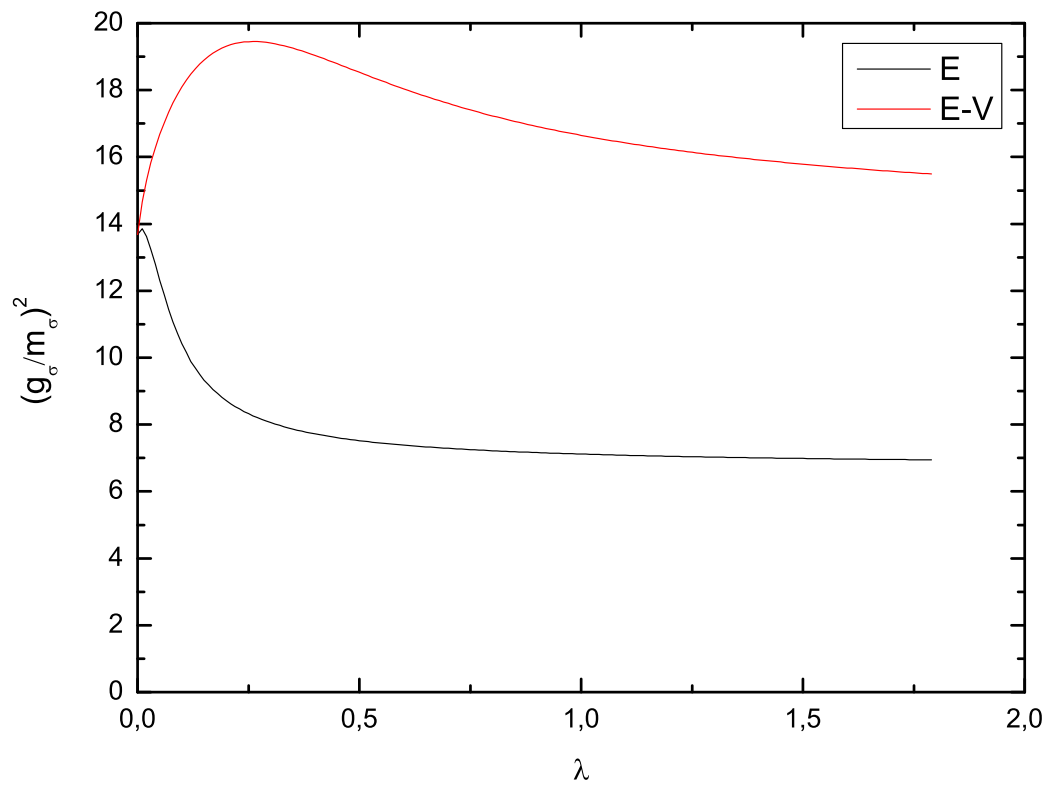


Figura 2.11: Constante de acoplamento do méson  $\sigma$  em função do parâmetro ajustável  $\lambda$  (em  $fm^2$ ). Apresentamos os resultados para o modelo escalar (E), em que  $\lambda$  varia e  $\beta = \gamma = 0$ , e para o modelo escalar-vetorial (E-V), em que  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variam com o vínculo  $\lambda = \beta = \gamma$ .



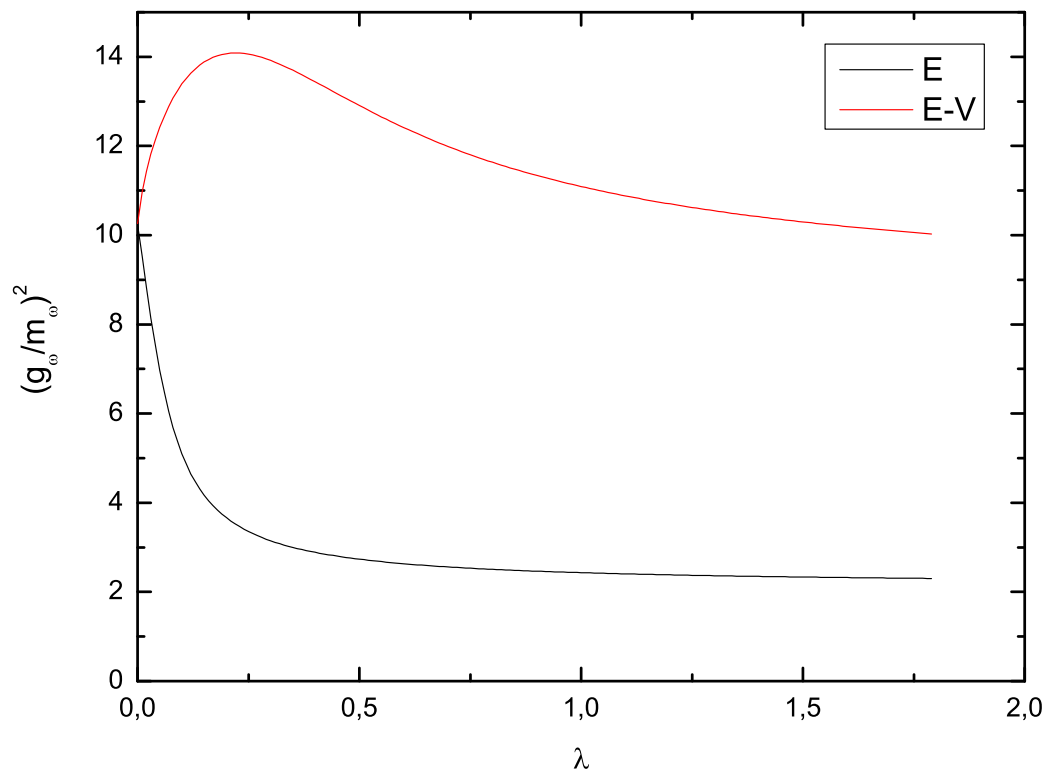


Figura 2.12: Constante de acoplamento do méson  $\omega$  em função do parâmetro ajustável  $\lambda$  (em  $fm^2$ ). Apresentamos os resultados para o modelo escalar (E), em que  $\lambda$  varia e  $\beta = \gamma = 0$ , e para o modelo escalar-vetorial (E-V), em que  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variam com o vínculo  $\lambda = \beta = \gamma$ .

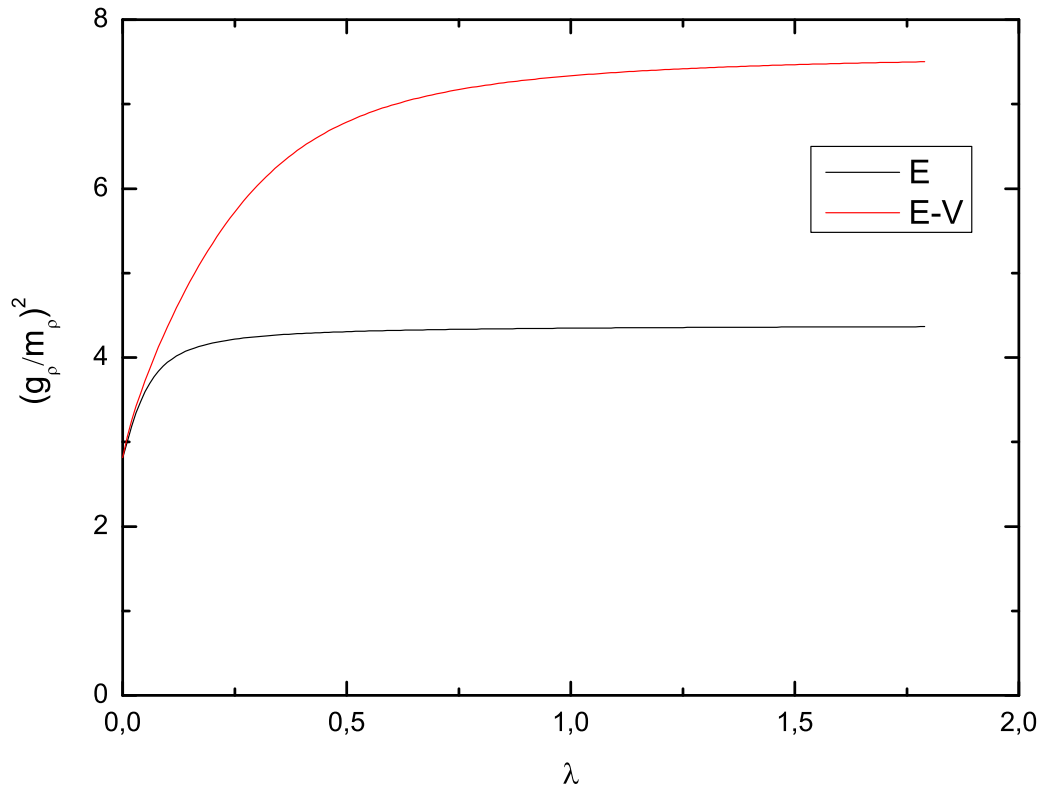


Figura 2.13: Constante de acoplamento do méson  $\rho$  em função do parâmetro ajustável  $\lambda$  (em  $fm^2$ ). Apresentamos os resultados para o modelo escalar (E), em que  $\lambda$  varia e  $\beta = \gamma = 0$ , e para o modelo escalar-vetorial (E-V), em que  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variam com o vínculo  $\lambda = \beta = \gamma$ .

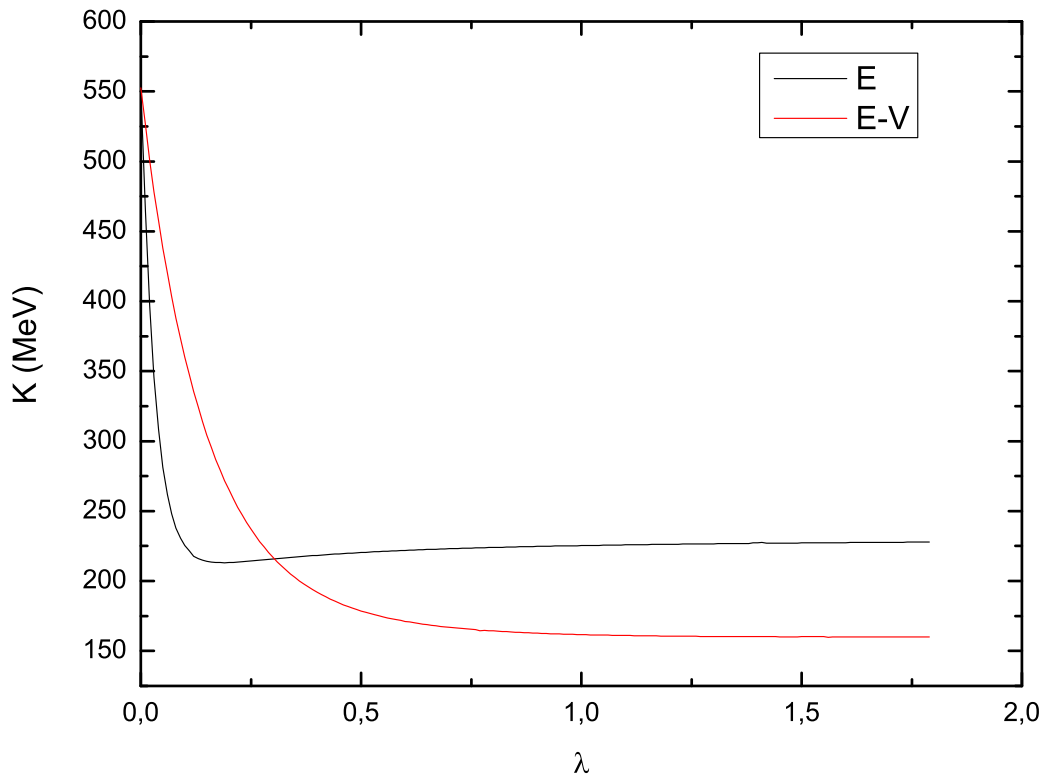


Figura 2.14: Módulo de compressibilidade no modelo com acoplamento ajustável, em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ . Apresentamos os resultados para o modelo escalar (E), em que  $\lambda$  varia e  $\beta = \gamma = 0$ , e para o modelo escalar-vetorial (E-V), em que  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variam com o vínculo  $\lambda = \beta = \gamma$ .

## 2.6.7 Populações de Partículas

Como vimos no primeiro capítulo desta dissertação, um sistema composto por matéria nuclear, com bárions e léptons, como uma estrela de nêutrons, por exemplo, deve obedecer a certas condições de equilíbrio químico.

Relembramos, a seguir, as oito equações de equilíbrio químico para um sistema de matéria nuclear com presença do octeto bariônico e de léptons (elétron e múon), obtidas a partir da equação geral de equilíbrio (ver Apêndice B):

$$\mu_i = q_{bi}\mu_n - q_{ei}\mu_{e^-} \quad . \quad (2.312)$$

Para o próton ( $q_{bp} = 1$  e  $q_{ep} = 1$ ):

$$\mu_p = \mu_n - \mu_{e^-} \quad . \quad (2.313)$$

Para o múon ( $q_{b\mu} = 0$  e  $q_{e\mu} = -1$ ):

$$\mu_\mu = \mu_{e^-} \quad . \quad (2.314)$$

Para o  $\Sigma^+$  ( $q_{b\Sigma^+} = 1$  e  $q_{e\Sigma^+} = 1$ ):

$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_{e^-} \quad . \quad (2.315)$$

Para o  $\Sigma^-$  ( $q_{b\Sigma^-} = 1$  e  $q_{e\Sigma^-} = -1$ ):

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_n + \mu_{e^-} \quad . \quad (2.316)$$

Para o  $\Sigma^0$  ( $q_{b\Sigma^0} = 1$  e  $q_{e\Sigma^0} = 0$ ):

$$\mu_{\Sigma^0} = \mu_n \quad . \quad (2.317)$$

Para o  $\Xi^-$  ( $q_{b\Xi^-} = 1$  e  $q_{e\Xi^-} = -1$ ):

$$\mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_{e^-} \quad . \quad (2.318)$$

Para o  $\Xi^0$  ( $q_{b\Xi^0} = 1$  e  $q_{e\Xi^0} = 0$ ):

$$\mu_{\Xi^0} = \mu_n \quad . \quad (2.319)$$

Para o  $\Lambda$  ( $q_{b\Lambda} = 1$  e  $q_{e\Lambda} = 0$ ):

$$\mu_\Lambda = \mu_n \quad . \quad (2.320)$$

Conhecemos, então, as equações que devem ser obedecidas pelos potenciais químicos das diferentes partículas presentes no sistema; todavia, como tais potenciais podem ser calculados? Vejamos a seguir.

Da primeira lei da termodinâmica:

$$E = TS - pV + \mu N, \quad (2.321)$$

onde  $E$  é a energia do sistema,  $T$  é sua temperatura absoluta,  $S$  é sua entropia,  $p$  é sua pressão,  $V$  é seu volume,  $\mu$  é o potencial químico e  $N$  é o número de partículas presentes. Dividindo a equação acima por  $V$ :

$$\varepsilon = Ts - p + \mu\rho, \quad (2.322)$$

onde  $\varepsilon = E/V$  e  $s = S/V$ . Como, no presente trabalho, é considerado o limite de temperatura zero:

$$\varepsilon = -p + \mu\rho. \quad (2.323)$$

Então, o potencial químico fica definido como:

$$\mu = \frac{p + \varepsilon}{\rho}. \quad (2.324)$$

Por conseguinte, se desejarmos calcular o potencial químico  $\mu_B$  de uma determinada espécie de bárion em um sistema composto, temos que

$$\mu_B = \frac{p_B + \varepsilon_B}{\rho_B}, \quad (2.325)$$

onde  $\varepsilon_B$  e  $p_B$  são, respectivamente, a contribuição de cada bárion na expressão da densidade de energia e na expressão da pressão que compõem a equação de estado. Analogamente, o potencial químico  $\mu_\lambda$  de uma determinada espécie de léptons em um sistema composto será

$$\mu_\lambda = \frac{p_\lambda + \varepsilon_\lambda}{\rho_\lambda}, \quad (2.326)$$

onde  $\varepsilon_\lambda$  e  $p_\lambda$  são, respectivamente, a contribuição de cada lépton na expressão da densidade de energia e na expressão da pressão que compõem a equação de estado.

Temos, então, para cada partícula presente no sistema:

$$\mu_p = \sqrt{k_{F_p}^2 + (M_p^*)^2} + (g_{\omega p}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho p}^*)_0 \rho_{03} I_{3p}, \quad (2.327)$$

$$\mu_n = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} + (g_{\omega n}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0 \rho_{03} I_{3n}, \quad (2.328)$$

$$\mu_{\Sigma^+} = \sqrt{k_{F_{\Sigma^+}}^2 + (M_{\Sigma^+}^*)^2} + (g_{\omega \Sigma^+}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho \Sigma^+}^*)_0 \rho_{03} I_{3\Sigma^+}, \quad (2.329)$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \sqrt{k_{F_{\Sigma^-}}^2 + (M_{\Sigma^-}^*)^2} + (g_{\omega \Sigma^-}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho \Sigma^-}^*)_0 \rho_{03} I_{3\Sigma^-}, \quad (2.330)$$

$$\mu_{\Sigma^0} = \sqrt{k_{F_{\Sigma^0}}^2 + (M_{\Sigma^0}^*)^2} + (g_{\omega \Sigma^0}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho \Sigma^0}^*)_0 \rho_{03} I_{3\Sigma^0}, \quad (2.331)$$

$$\mu_{\Xi^-} = \sqrt{k_{F_{\Xi^-}}^2 + (M_{\Xi^-}^*)^2 + (g_{\omega\Xi^-}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Xi^-}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Xi^-}}, \quad (2.332)$$

$$\mu_{\Xi^0} = \sqrt{k_{F_{\Xi^0}}^2 + (M_{\Xi^0}^*)^2 + (g_{\omega\Xi^0}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Xi^0}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Xi^0}}, \quad (2.333)$$

$$\mu_{\Lambda} = \sqrt{k_{F_{\Lambda}}^2 + (M_{\Lambda}^*)^2 + (g_{\omega\Lambda}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Lambda}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Lambda}}, \quad (2.334)$$

$$\mu_e = \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (2.335)$$

$$\mu_{\mu} = \sqrt{k_{\mu}^2 + m_{\mu}^2}, \quad (2.336)$$

Introduzindo esses resultados nas equações de equilíbrio químico enunciadas anteriormente, resulta que:

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_p}^2 + (M_p^*)^2 + (g_{\omega p}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho p}^*)_0\varrho_{03}I_{3p}} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2 + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0} \\ &+ (g_{\rho n}^*)_0\varrho_{03}I_{3n} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (2.337)$$

$$\sqrt{k_{\mu}^2 + m_{\mu}^2} = \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (2.338)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Sigma^+}}^2 + (M_{\Sigma^+}^*)^2 + (g_{\omega\Sigma^+}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Sigma^+}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Sigma^+}} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2 + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0} \\ &+ (g_{\rho n}^*)_0\varrho_{03}I_{3n} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (2.339)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Sigma^-}}^2 + (M_{\Sigma^-}^*)^2 + (g_{\omega\Sigma^-}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Sigma^-}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Sigma^-}} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2 + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0} \\ &+ (g_{\rho n}^*)_0\varrho_{03}I_{3n} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (2.340)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Sigma^0}}^2 + (M_{\Sigma^0}^*)^2 + (g_{\omega\Sigma^0}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Sigma^0}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Sigma^0}} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} \\ &+ (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\varrho_{03}I_{3n}, \end{aligned} \quad (2.341)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Xi^-}}^2 + (M_{\Xi^-}^*)^2 + (g_{\omega\Xi^-}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Xi^-}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Xi^-}} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2 + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0} \\ &+ (g_{\rho n}^*)_0\varrho_{03}I_{3n} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (2.342)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Xi^0}}^2 + (M_{\Xi^0}^*)^2 + (g_{\omega\Xi^0}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Xi^0}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Xi^0}} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} \\ &+ (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\varrho_{03}I_{3n}, \end{aligned} \quad (2.343)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Lambda}}^2 + (M_{\Lambda}^*)^2 + (g_{\omega\Lambda}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Lambda}^*)_0\varrho_{03}I_{3\Lambda}} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} \\ &+ (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\varrho_{03}I_{3n}. \end{aligned} \quad (2.344)$$

Nessa expressão, partículas de mesma massa (o mesmo bárion com carga diferente) têm valor idêntico de  $m^*$  e, conforme visto anteriormente:

$$g_{\sigma\Sigma} = \frac{2}{3}g_{\sigma}, \quad g_{\sigma\Xi} = \frac{1}{3}g_{\sigma}, \quad g_{\sigma\Lambda} = \frac{2}{3}g_{\sigma}, \quad (2.345)$$

$$g_{\omega\Sigma} = \frac{2}{3}g_{\omega}, \quad g_{\omega\Xi} = \frac{1}{3}g_{\omega}, \quad g_{\omega\Lambda} = \frac{2}{3}g_{\omega}, \quad (2.346)$$

$$g_{\rho\Sigma} = 2g_{\rho}, \quad g_{\rho\Xi} = g_{\rho}, \quad g_{\rho\Lambda} = 0, \quad (2.347)$$

$$\chi_{\sigma\Sigma} = \frac{2}{3}, \quad \chi_{\sigma\Xi} = \frac{1}{3}, \quad \chi_{\sigma\Lambda} = \frac{2}{3}, \quad (2.348)$$

$$\chi_{\omega\Sigma} = \frac{2}{3}, \quad \chi_{\omega\Xi} = \frac{1}{3}, \quad \chi_{\omega\Lambda} = \frac{2}{3}, \quad (2.349)$$

$$\chi_{\rho\Sigma} = 2, \quad \chi_{\rho\Xi} = 1, \quad \chi_{\rho\Lambda} = 0, \quad (2.350)$$

$$I_{3p} = I_{3\Xi^0} = \frac{1}{2}, \quad I_{3n} = I_{3\Xi^-} = -\frac{1}{2}, \quad I_{3\Sigma^+} = 1, \quad I_{3\Sigma^0} = I_{3\Lambda} = 0, \quad I_{3\Sigma^-} = -1. \quad (2.351)$$

Introduzindo as igualdades acima nas equações de equilíbrio químico, fazendo uso de (2.220), (2.221) e (2.222) e cancelando alguns termos, temos:

$$\sqrt{k_{F_p}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\gamma^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03} = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (2.352)$$

$$\sqrt{k_\mu^2 + m_\mu^2} = \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (2.353)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Sigma^+}}^2 + (M_\Sigma^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0 g_\omega \omega_0 + 2(m_{\gamma\Sigma}^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 \\ &\quad - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (2.354)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Sigma^-}}^2 + (M_\Sigma^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0 g_\omega \omega_0 - 2(m_{\gamma\Sigma}^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 \\ &\quad - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (2.355)$$

$$\sqrt{k_{F_{\Sigma^0}}^2 + (M_\Sigma^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0 g_\omega \omega_0 = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03}, \quad (2.356)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Xi^-}}^2 + (M_\Xi^*)^2} + \frac{1}{3}(m_{\beta\Xi}^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_{\gamma\Xi}^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 \\ &\quad - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (2.357)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{F_{\Xi^0}}^2 + (M_\Xi^*)^2} + \frac{1}{3}(m_{\beta\Xi}^*)_0 g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2}(m_{\gamma\Xi}^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03} &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} \\ &\quad + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03}, \end{aligned} \quad (2.358)$$

$$\sqrt{k_{F_\Lambda}^2 + (M_\Lambda^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Lambda}^*)_0 g_\omega \omega_0 = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_{\rho} \varrho_{03}. \quad (2.359)$$

Dessa forma, resultam 8 equações e 11 incógnitas ( $k_{F_p}$ ,  $k_{F_n}$ ,  $k_{F_e}$ ,  $k_{F_\mu}$ ,  $k_{F_{\Sigma^+}}$ ,  $k_{F_{\Sigma^-}}$ ,  $k_{F_{\Sigma^0}}$ ,  $k_{F_{\Xi^-}}$ ,  $k_{F_{\Xi^0}}$ ,  $k_{F_\Lambda}$  e  $\sigma_0$ ), pois  $\omega_0$  e  $\varrho_{03}$  são funções diretas dessas outras variáveis. Precisamos de mais três equações para obtermos um sistema determinado.

Para que o sistema seja eletricamente neutro, é necessário que tenhamos a mesma quantidade de carga positiva e negativa (condição de neutralidade de carga):

$$\rho_p + \rho_{\Sigma^+} = \rho_{\Sigma^-} + \rho_{\Xi^-} + \rho_e + \rho_\mu. \quad (2.360)$$

A segunda equação é, simplesmente, a conservação do número bariônico:

$$\rho = \rho_p + \rho_n + \rho_{\Sigma^+} + \rho_{\Sigma^-} + \rho_{\Sigma^0} + \rho_{\Xi^-} + \rho_{\Xi^0} + \rho_\Lambda, \quad (2.361)$$

onde  $\rho$  é a densidade bariônica total do sistema e onde:

$$\rho_p = \frac{1}{3\pi^2} k_{Fp}^3, \quad (2.362)$$

$$\rho_n = \frac{1}{3\pi^2} k_{Fn}^3, \quad (2.363)$$

$$\rho_{\Sigma^+} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F\Sigma^+}^3, \quad (2.364)$$

$$\rho_{\Sigma^-} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F\Sigma^-}^3, \quad (2.365)$$

$$\rho_{\Sigma^0} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F\Sigma^0}^3, \quad (2.366)$$

$$\rho_{\Xi^-} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F\Xi^-}^3, \quad (2.367)$$

$$\rho_{\Xi^0} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F\Xi^0}^3, \quad (2.368)$$

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{3\pi^2} k_{F\Lambda}^3. \quad (2.369)$$

A terceira, equação é a equação anteriormente apresentada para o méson  $\sigma$  (2.273) na aproximação de campo médio, com os valores de  $\chi_{iB}$ ,  $I_{3B}$  e  $\rho_B$  devidamente substituídos, e os valores dos demais campos mesônicos podem, então, ser calculados facilmente com as equações já estabelecidas ( $\omega$  (2.276),  $\varrho$  (2.279)):

$$\sigma_0 = \frac{\frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\varrho B}}{M_B} \varrho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right]}{1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s}, \quad (2.370)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \left[ (m_\beta^*)_0 (\rho_p + \rho_n) + (m_{\beta\Sigma}^*)_0 \frac{2}{3} (\rho_{\Sigma^+} + \rho_{\Sigma^-} + \rho_{\Sigma^0}) + (m_{\beta\Xi}^*)_0 \frac{1}{3} (\rho_{\Xi^-} + \rho_{\Xi^0}) + (m_{\beta\Lambda}^*)_0 \frac{2}{3} \rho_\Lambda \right], \quad (2.371)$$

$$\rho_{03} = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \left[ (m_\gamma^*)_0 \frac{1}{2} (\rho_p - \rho_n) + (m_{\gamma\Sigma}^*)_0 2 (\rho_{\Sigma^+} - \rho_{\Sigma^-}) + (m_{\gamma\Xi}^*)_0 \frac{1}{2} (\rho_{\Xi^0} - \rho_{\Xi^-}) \right], \quad (2.372)$$

onde

$$\rho_s = \frac{2J_B + 1}{4\pi^2} \left( k_{FB} M_B^* \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2} - (M_B^*)^3 \ln \frac{k_{FB} + \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2}}{M_B^*} \right). \quad (2.373)$$



Finalmente, definimos a população de um determinado bárion no sistema como sendo a razão  $\rho_B/\rho$  e, analogamente, a população de um determinado lépton no sistema como sendo  $\rho_\lambda/\rho$ .

As equações de equilíbrio químico com as quais estivemos trabalhando nesta subseção têm importantes conseqüências na composição da matéria constituinte das estrelas de nêutrons. Como já foi dito no Capítulo 1, ao contrário do que o nome sugere, as estrelas de nêutrons não são compostas exclusivamente por nêutrons. A neutralidade de carga é automaticamente respeitada pela matéria de nêutrons pura, mas esse não é o mais baixo estado de energia para matéria densa e eletricamente neutra. Alguns nêutrons sofrerão decaimento beta até que seja alcançado o equilíbrio entre nêutrons, prótons e elétrons. Esse fenômeno é expresso pela equação (2.313).

Os potenciais químicos crescem com o aumento da densidade. Portanto, outros limiares energéticos são atingidos, e espécies de partículas adicionais são populadas a partir de cada um deles. Em um gás de partículas livres, sem interação, como é o caso dos léptons incluídos em nosso modelo, os limiares de energia correspondem simplesmente às massas das partículas. Por exemplo, o múon, cujo potencial químico é dado por (2.314), estará em equilíbrio na estrela quando o potencial químico do elétron atingir o valor da massa do múon ( $m_\mu = 106MeV$ ) e será uma de suas partículas constituintes quando  $\mu_e > m_\mu$ . No caso mais geral, a energia limiar para criação de partículas no sistema depende também das interações.

A energia de simetria de isospin que emerge do acoplamento do isospin dos bárions com o méson neutro  $\varrho$  é muito importante nesse contexto, pois favorece a conversão de nêutrons em bárions com projeção de isospin oposta, consistentemente com a neutralidade de carga, é claro. Por isso, a matéria das estrelas de nêutrons é de composição bastante complexa. Estrelas de nêutrons não são compostas de matéria de nêutrons, mas sim de matéria hadrônica no mais baixo estado de energia possível, consistente com a neutralidade de carga.

A partir da expressão para o potencial químico de uma dada espécie bariônica,

$$\mu_B = \sqrt{k_{FB}^2 + (M_B^*)^2} + (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 + (g_{\varrho B}^*)_0 \varrho_{03} I_{3B}, \quad (2.374)$$

e do requerimento de neutralidade de carga, podemos compreender os termos que, além da massa, determinam a energia limiar para criação de cada bárion. Serão determinantes, além do isospin de cada partícula, os valores das constantes de acoplamento (que, em nossa abordagem, não são idênticas para todos os bárions, mas obedecem à simetria SU(6)) e os valores dos parâmetros ajustáveis  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , implícitos em  $M_B^*$ ,  $g_{\omega B}^*$ ,  $g_{\varrho B}^*$  e ainda nos campos mesônicos  $\omega_0$  e  $\varrho_{03}$ .

Desse modo, no modelo que adotamos para a descrição da matéria das estrelas de nêutrons, podemos esperar que a aparição das diferentes espécies de partículas presentes no sistema não se dê, simplesmente, na ordem crescente de suas massas. Ao contrário,

devemos esperar um cenário bastante mais rico. No Capítulo 4, veremos os resultados numéricos obtidos para a energia limiar de criação de cada partícula, a variação das populações relativas com o aumento da densidade do sistema e verificaremos, ainda, a relação existente entre a energia limiar de cada partícula e o índice adiabático da matéria estelar.

Neste capítulo, apresentamos alguns dos mais relevantes modelos efetivos da hadrodinâmica quântica, com destaque para o modelo com acoplamento derivativo ajustável que tem, como casos especiais, modelos como os de Walecka, ZM1 e ZM3. O modelo de acoplamento ajustável será aquele a ser utilizado para a descrição da matéria nuclear no interior de estrelas de nêutrons e no estudo da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP*, pontos esses a serem abordados no último capítulo desta dissertação.

# Capítulo 3

## Matéria de Quarks

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior deste trabalho, desenvolvemos um estudo sobre a matéria nuclear, desconsiderando a presença dos graus de liberdade dos quarks e glúons que constituem os hádrons. Em um tratamento a baixas densidades, essa formulação é perfeitamente válida. Entretanto, o interior de uma estrela de nêutrons apresenta uma densidade bastante superior à densidade de um núcleo atômico, tornando-se necessário, nesse regime, levar-se em consideração esses graus de liberdade e sua influência sobre a estrutura da matéria e da estrela.

Neste capítulo, vamos discutir, inicialmente, de forma qualitativa, os fundamentos do modelo do quark, explicando as motivações físicas que, historicamente, levaram à elaboração dessa teoria, bem como as evidências experimentais em seu favor. Apresentaremos os seis tipos de quarks existentes e suas características básicas. A seguir, discutiremos a provável existência do plasma de quarks e glúons (QGP). Na última seção, apresentaremos o modelo de sacola do MIT, o modelo para matéria de quarks que será utilizado no estudo da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP* efetuado no próximo capítulo.

### 3.2 Os Quarks

#### 3.2.1 O Caminho Óctuplo

Como já vimos, são oito os bárions que têm número quântico de spin igual a  $1/2$ . A Tabela 1.2 mostra algumas das suas propriedades. A Fig.3.1 mostra um padrão fascinante que aparece quando se esquematiza a estranheza desses bárions, em função da carga, com um eixo oblíquo para os números quânticos de carga. Seis dos oito bárions formam um hexágono com os dois bárions remanescentes no centro da figura.

Para os nove mésons de spin nulo, apresentados na Tabela 3.1, verifica-se o mesmo padrão. Se desenharmos esses mésons em um gráfico de estranheza em função da carga,

Méson	Massa(MeV)	J	S	Q	Antipartícula
$\pi^0$	135.0	0	0	0	$\pi^0$
$\pi^+$	139.6	0	0	+1	$\pi^-$
$K^+$	493.7	0	+1	+1	$K^-$
$K^0$	497.7	0	+1	0	$\bar{K}^0$
$\eta$	548.8	0	0	0	$\eta$
$\eta'$	957.6	0	0	0	$\eta'$

Tabela 3.1: Mésons de spin nulo. J=spin; S=estranheza; Q=carga elétrica. Observe-se que  $\pi^0$ ,  $\eta$  e  $\eta'$  são as próprias antipartículas.

como na Fig.3.2, aparece a mesma figura! Esse gráfico e outros semelhantes, chamados de modelos do *caminho óctuplo*<sup>1</sup>, foram propostos independentemente, em 1961, por Murray Gell-Mann, do Instituto de Tecnologia da Califórnia, e por Yuval Ne'eman, do Imperial College, de Londres. Os dois padrões que aparecem na Fig.3.1 são exemplos representativos de um número maior de figuras simétricas nas quais os diversos grupos de bárions e de mésons podem ser agrupados.

As figuras do caminho óctuplo têm, para a física de partículas, o mesmo papel que a tabela periódica tem para a química. Em cada caso, há uma figura organizada em que as vacâncias (partículas ausentes ou elementos ausentes) se sobressaem e apontam caminhos de busca para os físicos experimentais. No caso da tabela periódica, a sua simples existência sugere fortemente que os átomos dos elementos não são partículas fundamentais, mas têm uma estrutura interna organizada. Da mesma maneira, as figuras do caminho óctuplo sugerem fortemente que os mésons e bárions devem ter estrutura interna organizada em função da qual suas propriedades possam ser entendidas. Essa estrutura é o *modelo do quark*, que passamos a discutir.

### 3.2.2 O Modelo do Quark

O avanço teórico mais importante no entendimento das partículas elementares foi o modelo do quark, proposto independentemente, em 1964, por Murray Gell-Mann [59] e George Zweig [60]. De acordo com esse modelo, os hádrons seriam constituídos pelas combinações de duas ou três partículas realmente elementares, os *quarks*<sup>2</sup>. No modelo original, há três tipos de quarks, e cada um desses tipos é chamado de *sabor*. Os três sabores de quarks do modelo original eram identificados por *u*, *d* e *s* (das iniciais de *up*,

<sup>1</sup>O nome é um empréstimo do misticismo oriental. Aqui, o termo *óctuplo* refere-se às oito propriedades quânticas envolvidas na teoria que, baseada na simetria, explica a existência dessas figuras. Explicaremos, logo a seguir, quais são essas oito propriedades.

<sup>2</sup>O nome *quark* foi escolhido por Gell-Mann a partir da citação “Three quarks for Muster Mark”, do romance *Finnegans Wake*, de James Joyce.

*down* e *strange*). Uma propriedade peculiar dos quarks é terem cargas fracionárias do elétron. A carga do quark  $u$  é  $+2e/3$  e a dos quarks  $d$  e  $s$  é  $-e/3$ . Cada quark tem spin  $1/2$  e número bariônico  $1/3$ . A estranheza do quark  $u$  e do quark  $d$  é  $0$  e a do quark  $s$  é  $-1$ . Cada quark tem um antiquark com números quânticos de sinais opostos. Na Tabela 3.2 e na Tabela 3.3, estão registradas essas propriedades. Os bárions são constituídos por três quarks (ou por três antiquarks, no caso de antipartículas), enquanto os mésons são constituídos por um quark e um antiquark, o que lhes dá um número bariônico nulo, conforme se quer. O próton é resultado da combinação  $uud$ , e o nêutron,  $udd$ . Os bárions com estranheza  $-1$  têm um quark  $s$ . A grande força de convicção do modelo dos quarks está na existência, verificada experimentalmente, de hádrons constituídos por todas as combinações permitidas de três quarks ou de pares de quark e antiquark. Uma forte evidência da existência de quarks no interior de um núcleon são os resultados de experiências de espalhamento em alta energia, denominado *espalhamento inelástico profundo*. Nessas experiências, um núcleon é bombardeado por elétrons, ou múons ou neutrinos, com energias entre  $15$  e  $200\text{GeV}$ . As análises das partículas espalhadas sob ângulos grandes indicam a presença, no interior do núcleon, de partículas de spin  $1/2$  e de tamanho muito menor que o do núcleon. Essas experiências, em certo sentido, são análogas à experiência de espalhamento de partículas  $\alpha$  pelos átomos de Rutherford; foi dessa experiência que se inferiu a presença de um pequeno núcleo no centro do átomo, exatamente pela análise de partículas  $\alpha$  espalhadas sob ângulos muito grandes.

Com esse modelo, as figuras do caminho óctuplo podem ser entendidas de maneira simples. Apresentamos, nas Fig.3.3 e 3.4, as composições de quarks dos hádrons esquematizados nas Fig.3.1 e 3.2 respectivamente.

Ainda em 1964, foi proposto um quarto quark, a fim de explicar algumas discrepâncias entre as determinações de algumas taxas de desintegração e os cálculos baseados no modelo de quarks, de acordo com os trabalhos de Maki [61], Hara [62] e Björken e Glashow [63]. O quarto quark foi simbolizado por  $c$ , para indicar a propriedade nova denominada *charme*, como a chamaram Björken e Glashow. Como a estranheza, o charme se conserva nas interações fortes, mas pode variar de  $\pm 1$  nas interações fracas. Em 1974, foi descoberta uma nova partícula, um méson pesado, denominado *partícula  $J/\psi$* , mas também chamado muitas vezes de *charmônio*, com as propriedades esperadas da combinação  $c\bar{c}$ <sup>3</sup>. Desde então, outros mésons foram descobertos com combinações  $c\bar{d}$  e  $\bar{c}d$ , além de bárions contendo quarks com charme.

Dois outros quarks,  $t$  e  $b$  (*top* e *bottom*, respectivamente) foram também propostos. Em 1977, foi descoberto um novo méson pesado, o méson  $\Upsilon$ , ou *botômio*, considerado a combi-

---

<sup>3</sup>O nome  $J/\psi$  foi adotado pois essa partícula foi descoberta quase simultaneamente através de dois experimentos diferentes (colisão próton-próton e aniquilação elétron-pósitron). Um dos grupos de físicos experimentais envolvidos na descoberta chamou a partícula de  $J$  [64], e o outro grupo chamou-a de  $\psi$  [65].

nação de quarks  $b\bar{b}$  [66][67]. O quark top foi encontrado em 1995 em dois experimentos de colisão próton-antipróton levados a cabo no Tevatron (FNAL) [68][69]. Os aceleradores de partículas de que dispomos atualmente atingem energias da ordem de  $100\text{GeV}$ , o que não é suficiente para produção de pares  $t\bar{t}$ . Com a inauguração do Large Hadron Collider (LHC) do CERN, que entrará em funcionamento em 2008, energias da ordem de  $\text{TeV}$  poderão ser atingidas, favorecendo a busca por essa partícula composta pelo quark top e seu antiquark.

Com o que vimos até agora, entretanto, o modelo do quark apresenta um problema: como existem hádrons compostos por três quarks do mesmo sabor – a partícula delta  $\Delta^{++}$  ( $uuu$ ), por exemplo –, o princípio de exclusão de Pauli parece não ser respeitado na teoria. Considerou-se, então, a existência de um outro número quântico no modelo do quark, chamado de *cor*. Um quark pode ter uma cor verde (g, do inglês *green*), vermelha (r, do inglês *red*) ou azul (b, do inglês *blue*), restando aos antiquarks as respectivas anticolors. Utilizando a teoria das cores, segundo a qual geramos a cor branca ao combinarmos todas as cores do espectro, os hádrons não apresentam a componente da função de onda de cor, por serem compostos por três cores distintas ou por um par de cor e anticor. Dessa forma, o princípio de exclusão de Pauli é plenamente respeitado. Da incorporação da cor ao modelo do quark vem o nome da teoria fundamental da interação forte, a *cromodinâmica quântica* (QCD).

Além disso, um estudo sobre o comportamento dos quarks deve incorporar dois aspectos de sua fenomenologia: liberdade assintótica e confinamento. A liberdade assintótica implica uma constante de acoplamento da interação forte que diminui quando os quarks se aproximam. Entretanto, o confinamento implica um potencial crescente à medida que os quarks se afastam, impedindo que se separem.

Com isso, podemos entender o porquê do nome *caminho óctuplo*. Como já dissemos, esse nome foi dado por Gell-Mann, baseado nas oito propriedades do modelo do quark, o qual constitui uma explicação coerente para a existência dos padrões de simetria nos gráficos apresentados na subseção anterior. Essas oito propriedades quânticas, listadas na Tabela 3.2 e na Tabela 3.3, são: cor, spin, carga, número bariônico, estranheza, charme, topness e bottomness.

Os seis quarks e os seis léptons (e as antipartículas correspondentes) seriam as partículas elementares fundamentais, constitutivas de toda matéria. Na Tabela 3.4, vemos as doze partículas fundamentais e algumas de suas características.

Sabor	Cor	Spin	Carga	Número Bariônico	Estranheza	Charme	Topness	Bottomness
$u$	b,g,r	1/2	+2/3	+1/3	0	0	0	0
$d$	b,g,r	1/2	-1/3	+1/3	0	0	0	0
$s$	b,g,r	1/2	-1/3	+1/3	-1	0	0	0
$c$	b,g,r	1/2	+2/3	+1/3	0	+1	0	0
$t$	b,g,r	1/2	+2/3	+1/3	0	0	+1	0
$b$	b,g,r	1/2	-1/3	+1/3	0	0	0	+1

Tabela 3.2: Propriedades dos quarks.

Sabor	Cor	Spin	Carga	Número Bariônico	Estranheza	Charme	Topness	Bottomness
$\bar{u}$	$\bar{b},\bar{g},\bar{r}$	1/2	-2/3	-1/3	0	0	0	0
$\bar{d}$	$\bar{b},\bar{g},\bar{r}$	1/2	+1/3	-1/3	0	0	0	0
$\bar{s}$	$\bar{b},\bar{g},\bar{r}$	1/2	+1/3	-1/3	+1	0	0	0
$\bar{c}$	$\bar{b},\bar{g},\bar{r}$	1/2	-2/3	-1/3	0	-1	0	0
$\bar{t}$	$\bar{b},\bar{g},\bar{r}$	1/2	-2/3	-1/3	0	0	-1	0
$\bar{b}$	$\bar{b},\bar{g},\bar{r}$	1/2	+1/3	-1/3	0	0	0	-1

Tabela 3.3: Propriedades dos antiquarks.

	Leves	Médias	Pesadas	Carga
Quarks	$u$ ( $\sim 5MeV$ )	$c$ ( $\sim 1,5GeV$ )	$t$ ( $\sim 10^5MeV$ )	+2/3
	$d$ ( $\sim 7MeV$ )	$s$ ( $\sim 0,15GeV$ )	$b$ ( $\sim 5GeV$ )	-1/3
Léptons	$e$ ( $\sim 0,511MeV$ )	$\mu$ ( $106MeV$ )	$\tau$ ( $1,78GeV$ )	-1
	$\nu_e$ ( $< 16eV$ )	$\nu_\mu$ ( $< 300keV$ )	$\nu_\tau$ ( $< 40MeV$ )	0

Tabela 3.4: Partículas fundamentais e respectivas massas aproximadas. Em virtude de os quarks estarem sempre ligados em bárions ou em mésons, suas massas não são bem compreendidas; os valores dados são apenas suposições razoáveis. As massas dos neutrinos são limites superiores.

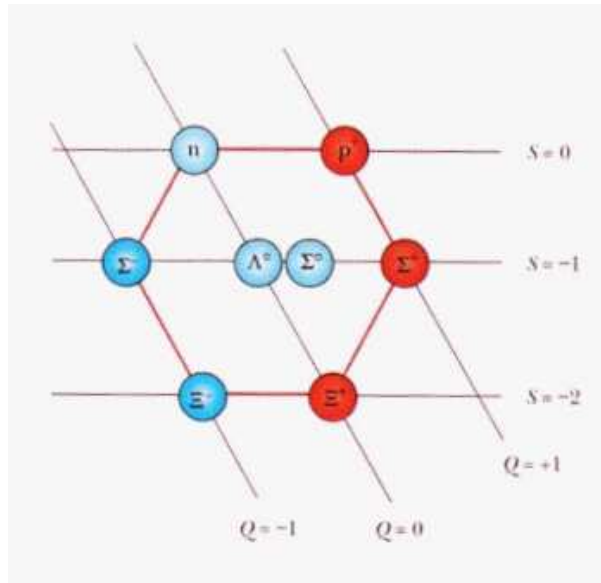


Figura 3.1: A figura do caminho óctuplo para os oito bárions de spin  $1/2$  listados na Tabela 1.2. As partículas são representadas como pontos num gráfico de estranheza contra carga, com um eixo oblíquo para o número quântico de carga.

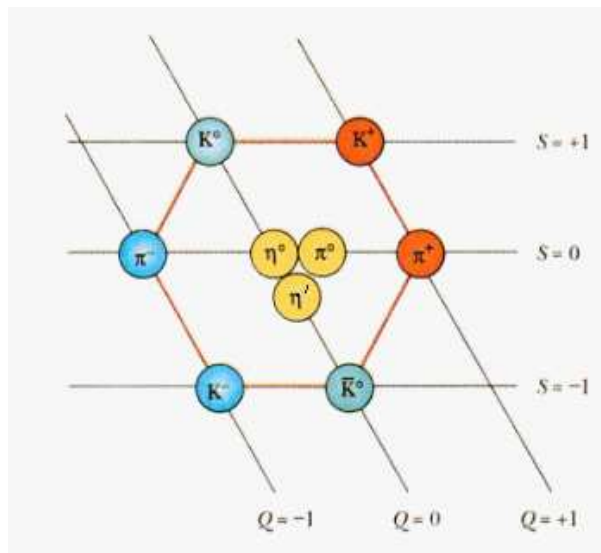


Figura 3.2: A figura do caminho óctuplo para os nove mésons de spin  $0$  listados na Tabela 3.1. Neste caso, as partículas estão em posições opostas em relação às suas antipartículas; cada méson do centro é a sua respectiva antipartícula .



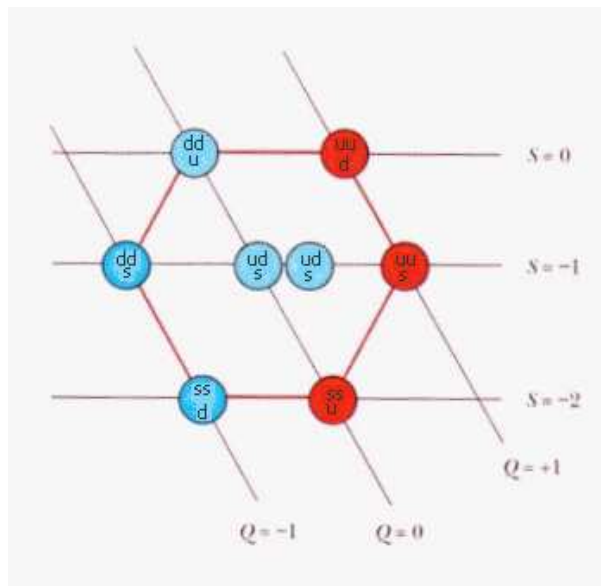


Figura 3.3: As composições de quarks dos bárions esquematizados na Fig.3.1. Embora os dois bárions centrais tenham a mesma estrutura de quarks, o sigma é um estado excitado do lambda, decaindo neste pela emissão de um fóton de raio gama.

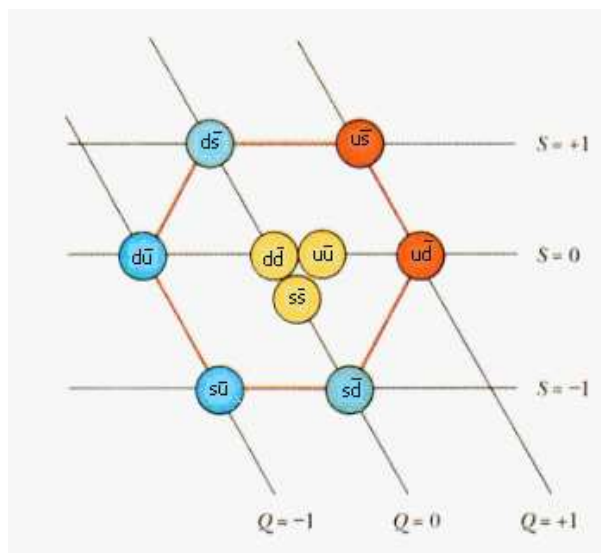


Figura 3.4: As composições de quarks dos mésons esquematizados na Fig.3.2.

## 3.3 O Plasma de Quarks e Glúons

### 3.3.1 Fundamento Teórico

No presente capítulo, ficou claro que prótons e nêutrons não são mais considerados como partículas elementares, mas sim como partículas compostas por quarks em estado ligado. As forças entre os quarks são bastante diferentes daquelas normalmente encontradas em outros problemas de física: em distâncias pequenas, os quarks parecem se mover livremente, mas, com a crescente separação, as forças de ligação crescem também. Assim, não é possível separar os núcleons em seus quarks constituintes. Parece lógico, então, que os quarks apenas existam em combinação com outros quarks (bárions) ou com anti-quarks (mésons).

Esse panorama modificou também a nossa visão de um sistema de núcleons em altas densidades. Para essas partículas, ocorrerá interpenetração se a densidade for grande o suficiente para que cada quark encontre vários outros quarks em sua vizinhança imediata, como sugere a Fig.3.5. Os conceitos de *núcleon* e *matéria nuclear* deixam de ter sentido nesse limite de alta energia, e um novo estado da matéria pode eventualmente ser formado: um plasma de quarks e glúons, cujos constituintes básicos são quarks livres [70].

Alguém poderia perguntar por que razão os quarks formam um estado desconfinado em altas energias e altas densidades. A razão pode ser encontrada na blindagem de carga, que também é conhecida na física atômica. A força entre pares carregados em um estado ligado é influenciada decisivamente se muitos desses objetos são colocados próximos. A força coulombiana tem, no vácuo, a forma  $e^2/r$  e, na presença de muitas outras cargas, fica sujeita à blindagem de Debye, tendo, então, a forma  $(e^2/r)\exp(-r/r_D)$  com  $r_D$  sendo o raio de blindagem, inversamente proporcional à densidade de carga do sistema como um todo. Se, nos sistemas atômicos, o raio de Debye  $r_D$  for menor do que o raio típico de um átomo (raio de Bohr), a força de ligação entre um elétron e o núcleo será efetivamente blindada, e o elétron se tornará livre. O aumento na densidade resulta numa transição isolante-condutor [71]. A blindagem é, portanto, um mecanismo de curto alcance que pode desfazer a formação de estados ligados, e espera-se que isso se aplique também aos quarks.

A força exercida entre quarks atua em uma carga de cor, que faz o papel da carga elétrica nas interações eletromagnéticas. Os núcleons são estados neutros em cor formados por quarks com carga de cor não nula. Assim, a matéria nuclear corresponde, na terminologia acima, a um isolante de cor. Com o aumento da densidade, porém, a blindagem de carga se estabelece e leva a uma transição para um condutor de cor: o plasma de quarks. Portanto, o novo estado é condutor da carga fundamental da interação forte (e, por conseguinte, da QCD). A investigação experimental desse fenômeno é um tópico prioritário de pesquisa nos principais projetos de colisionadores de íons pesados (destacando-se o RHIC, no Brookhaven National Laboratory, e o LHC, no CERN) [72].

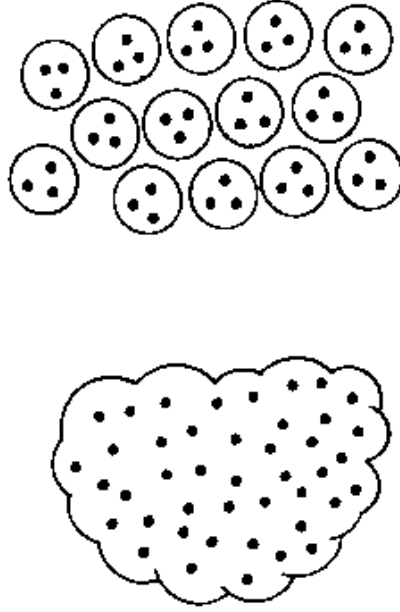


Figura 3.5: Comparação de uma coleção de núcleons em sua fase hadrônica (acima) e na descrição de plasma de quarks e glúons (abaixo).

A cromodinâmica quântica (QCD) descreve a interação entre quarks de maneira análoga que a QED o faz com os elétrons. Campos que descrevem as partículas massivas interagem por campos vetoriais sem massa (aqui, glúons e quarks correspondem a fótons e elétrons, respectivamente). A interação é determinada por uma carga intrínseca, a cor, e cada quark pode estar em um dos três possíveis estados de cor. Diferentemente da QED, porém, os campos de interação na QCD também possuem carga, e, por isso, os glúons interagem com os quarks mas também entre si, sendo essa uma característica crucial da QCD.

A QCD pode prever, por exemplo, a temperatura em que ocorre a transição da matéria nuclear para o plasma de quarks. Começando com o lagrangeano da QCD, é preciso determinar o hamiltoniano  $\hat{H}$  e, então, construir a função de partição da maneira usual para um sistema termodinâmico a temperatura  $T$  e contido em um volume  $V$ :

$$Z(T, V) = \text{Tr} \left( e^{-(\hat{H}/T)} \right). \quad (3.1)$$

Conhecida a função de partição, as quantidades termodinâmicas podem ser subsequente-mente determinadas, tais como

$$\varepsilon = T^2/V(\partial \ln Z/\partial T)_V, \quad (3.2)$$

$$p = (\partial \ln Z/\partial T)_T, \quad (3.3)$$

sendo  $\varepsilon$  a densidade de energia e  $p$  a pressão. Em alta densidade (o regime em que se forma o plasma), os cálculos são mais simples; todavia, como estamos interessados na transição entre a matéria nuclear fortemente interagente e o plasma fracamente interagente, estamos diante de um problema mais difícil. A única abordagem possível é usar uma formulação em rede [73]. Substituindo  $(\vec{r}, t)$  por um conjunto discreto e finito de pontos em uma rede, a função de partição se torna muito similar à correspondente função de partição para sistemas de spin em mecânica estatística. Assim, simulações computacionais podem ser executadas em estudos de QCD na rede [74]. Métodos de renormalização permitem, então, que o limite para o contínuo seja recuperado.

Não vamos discutir as simulações computacionais de sistemas estatísticos [75], mas apresentaremos alguns resultados principais. Esses resultados, porém, são em geral obtidos para o caso em que a densidade bariônica é considerada aproximadamente nula, caso esse em que a matéria é denominada *matéria mesônica quente*. Portanto, vemos logo que o formalismo de QCD na rede não é adequado para a descrição das estrelas de nêutrons. O outro extremo, a compressão da matéria nuclear fria, ainda é tema de muita pesquisa. Na ausência de uma teoria completa, que possa descrever conjuntamente a fase hadrônica e o plasma de quarks e glúons, modelos de sacola bastante simples são utilizados para estimar a equação de estado da matéria de quarks. Por ser de interesse para o estudo das estrelas de nêutrons ou, melhor dizendo, das estrelas híbridas, esse tipo de modelo será apresentado na seção seguinte do presente capítulo. Por hora, vamos descrever brevemente, como dissemos, alguns resultados da QCD na rede e alguns resultados experimentais pela sua importância fenomenológica.

Tratando a matéria de densidade bariônica nula, a densidade de energia de um gás não interagente de quarks e glúons sem massa é

$$\varepsilon \simeq 12T^4. \quad (3.4)$$

Como no tratamento baseado na estatística de Stefan-Boltzmann para um gás de fótons, o fator numérico na equação acima é determinado pelo número de graus de liberdade das partículas constituintes: seus spins, suas cores e seus sabores. A densidade de energia obtida através de simulações computacionais é mostrada na Fig.3.6. Há uma mudança súbita da matéria mesônica para o plasma. A temperatura de transição está em torno de  $200\text{MeV}$ , o que implica uma densidade de energia de, pelo menos,  $2.5\text{GeV fm}^{-3}$  para que se forme um plasma de quarks e glúons.

Esse tipo de estudo é muito importante também em cosmologia. Logo depois do Big Bang, muito provavelmente, o universo se parecia com um plasma de quarks e glúons denso e quente; a rápida expansão, porém, reduziu a densidade do plasma, de modo que, após cerca de  $10^{-3}\text{s}$ , ocorreu a transição para a fase hadrônica. A colisão de dois núcleos pesados em alta energia pode, então, recriar as condições para um *little bang*. As perguntas importantes aqui são:

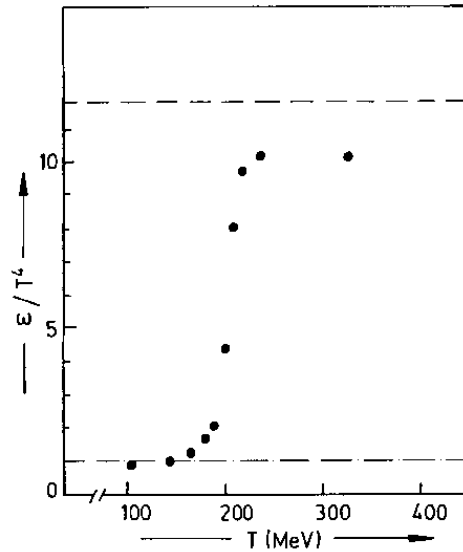


Figura 3.6: Densidade de energia da matéria nuclear em função da temperatura. A linha tracejada representa o plasma de quarks e glúons ideal, e a linhas ponto-tracejada representa a matéria mesônica, de acordo com [76].

- É possível se obter uma densidade de energia grande o suficiente para que ocorra a transição?
- Terá o sistema, em caso afirmativo, dimensão grande o suficiente ou vida suficientemente longa para atingir o equilíbrio termodinâmico exigido para que possa ser feita a descrição estatística da QCD?
- Como podemos determinar que um plasma de quarks e glúons foi efetivamente produzido e como medir suas propriedades?

Quando dois núcleos colidem com alta energia, eles praticamente se interpenetram. Nesse processo, os núcleons são excitados e, além disso, deixam uma zona de energia depositada na região espacial que atravessaram (Fig.3.7). Esse vácuo de energia é rapidamente hadronizado, gerando as partículas secundárias usualmente produzidas em tais colisões. Analisando dados de colisões próton-próton, a deposição de energia fica em torno de  $0.3\text{GeV}fm^{-3}$ . Se forem utilizados íons pesados, uma densidade de energia bem maior pode ser atingida. Para dois núcleos de  $U^{238}$ , esse valor é de  $6\text{GeV}fm^{-3}$ . Programas de computador simulando tais colisões já foram estudados.

Muito importante é a questão dos indícios da formação do plasma de quarks. Vários sinais já foram sugeridos e buscados experimentalmente. O estudo de fótons e léptons, partículas não afetadas pela interação forte, traz informações a respeito das condições no ponto de formação do plasma. Léptons termalizados, que podem ser criados em qualquer

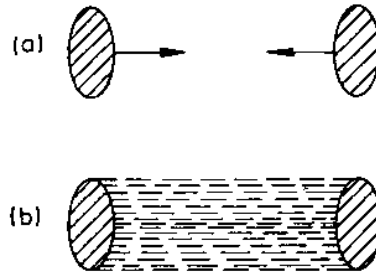


Figura 3.7: Colisão de dois núcleons em alta energia representada de maneira esquemática (a) antes e (b) depois da colisão.

estágio da colisão, têm taxas de produção altamente dependentes da temperatura no interior da bola de fogo formada na colisão. A produção de mésons vetoriais pesados e de partículas  $J/\psi$  é um sinal bastante sugerido. Se o plasma se formar não apenas em equilíbrio térmico mas também em equilíbrio com respeito à produção dos diferentes sabores de quarks, um grande número de pares  $q\bar{q}$  com estranheza não nula será criado: híperons e mésons podem sobreviver à expansão do volume de interação, fornecendo um indicador da formação do plasma de quarks e glúons. Vários outros sinais já foram sugeridos, de maneira que essa questão ainda está em aberto.

### 3.3.2 Evidências Experimentais

Finalmente, discutiremos os experimentos realizados até agora e aqueles planejados na busca pelo plasma de quarks e glúons. Os primeiros experimentos foram realizados utilizando-se íons leves ( $O^{16}$ ,  $Si^{28}$ ,  $S^{32}$ ) tanto no AGS, de Brookhaven, quanto no SPS (*Super Proton Synchrotron*), do CERN. Nos experimentos com íons  $O^{16}$  e  $Si^{32}$  com energia de  $200 GeV$ , foi atingida uma densidade de energia da ordem de  $2 GeV fm^{-3}$ , muito próxima daquela predita teoricamente para a produção do plasma. Inicialmente, foram detectados vários fenômenos globais típicos da matéria em altas densidades, mas nenhum sinal do QGP foi encontrado.

Em fevereiro de 2000, contudo, pouco antes da inauguração do RHIC, os cientistas do CERN anunciaram que haviam conseguido indícios experimentais da criação do plasma de quarks e glúons. Os pesquisadores declararam que conseguiram criar o plasma em uma série de experimentos realizados no SPS, em que feixes de íons de chumbo de alta energia foram projetados contra alvos de ouro e chumbo. Tais colisões levaram a temperaturas cem mil vezes maiores do que a temperatura do núcleo do Sol, o que implica densidades de energias de  $3 - 4 GeV fm^{-3}$ . Essa densidade de energia, teoricamente, já é suficiente para a formação do QGP, mas é insuficiente para que o mesmo possa ser detectado diretamente

através da emissão de radiação eletromagnética, por exemplo. Por essa razão, os cientistas do CERN buscaram evidências indiretas da formação do plasma. Um experimento foi planejado especialmente para detectar a raro méson  $J/\psi$ , que, como já vimos, é composto de um quark  $c$  e seu antiquark. O quark  $c$ , por ser bastante pesado, pode ser produzido apenas imediatamente após o feixe de íons de chumbo atingir seu alvo. Teoricamente, a formação de mésons  $J/\psi$  na colisão é diminuída com o aparecimento do QGP, pois, nessas condições, a interação entre os quarks  $c$  e  $\bar{c}$  é reduzida. O experimento planejado no CERN de fato mediu uma diminuição no número de mésons  $J/\psi$  que atingiram o detector, sugerindo que um QGP havia sido criado. O que torna os resultados desse experimento notáveis é o fato de estes serem os primeiros que os teóricos mais céticos não conseguiram explicar satisfatoriamente sem invocar a existência de um QGP. Por essa razão, alguns defendem ser essa a primeira evidência experimental da formação de um QGP [8][77].

Na busca pelo necessário aumento de energia nos experimentos, Brookhaven colocou em funcionamento o RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) no ano de 2000, após dez anos de planejamento e construção. O RHIC acelera feixes de núcleos de  $Au$  com energias de  $100\text{GeV}$ ; para os prótons, a energia máxima do feixe é de  $250\text{GeV}$ . Assim, o RHIC produz densidades de energia em torno de  $10\text{GeV}fm^{-3}$ , o que é mais do que o suficiente para a produção do plasma de quarks e glúons. Em 18 de abril de 2005, em um encontro da *American Physical Society* (APS) em Tampa, Flórida, os quatro grupos de pesquisa que trabalham no RHIC declararam ter criado o QGP, mas descobriram que suas propriedades são ainda mais notáveis do que aquelas previstas teoricamente. Em uma série de artigos que resumem as descobertas realizadas nos primeiros anos de funcionamento do RHIC, os cientistas dizem que, em vez de se comportar como um gás de quarks e glúons livres, como era esperado, a nova forma de matéria criada através de colisões de íons pesados no RHIC parece se comportar mais como um líquido. Os artigos, nos quais as quatro equipes colaboradoras do RHIC (BRAHMS, PHENIX, PHOBOS, e STAR) estiveram trabalhando por um ano, foram publicados simultaneamente na revista *Nuclear Physics A* [80][81][82][83] e também compilados em uma publicação especial do laboratório Brookhaven. Os resultados indicam que algumas das observações feitas no RHIC se encaixam com as previsões teóricas do QGP. De fato, muitos teóricos concluíram que o RHIC já demonstrou a criação do QGP. Contudo, as quatro equipes colaboradoras perceberam que há certas discrepâncias entre os resultados experimentais e as primeiras previsões teóricas baseadas em modelos simplificados do QGP. A análise dos dados obtidos no RHIC de junho de 2000 até o ano de 2003 revela que a matéria formada nas colisões entre íons de ouro se parece mais com um líquido do que com um gás. A evidência surge a partir da medida de padrões inesperados nas trajetórias seguidas pelas milhares de partículas formadas nas colisões. As medidas indicam que as partículas primordiais produzidas nas colisões tendem a se mover coletivamente em resposta a variações

de pressão sobre o volume formado pelos núcleos que colidiram. Os cientistas se referem a esse fenômeno como *fluxo*, por ser análogo ao movimento de um fluido. Todavia, ao contrário dos líquidos comuns, nos quais moléculas individuais se movem de modo aproximadamente aleatório, a matéria quente formada no RHIC parece se mover em um padrão que exibe alto grau de coordenação entre as partículas, quase como se fosse um *fluido perfeito*, isto é, aquele com baixíssima viscosidade e capacidade de atingir o equilíbrio térmico muito rapidamente, devido ao alto grau de interação entre as partículas. Enquanto os cientistas do RHIC não obtêm uma medida direta da viscosidade, é possível inferir, pelo padrão de fluxo, que a viscosidade é muito baixa. Em resultados divulgados anteriormente, outras medidas efetuadas no RHIC mostraram jatos de quarks e glúons de alta energia sendo bastante desacelerados ao atravessarem a bola de fogo produzida nas colisões. Esse fenômeno demonstra que a densidade de energia dessa nova forma de matéria é extraordinariamente alta, muito mais alta do que a densidade de um meio composto por matéria nuclear ordinária. Os pesquisadores dizem que os resultados não afastam a possibilidade de que esse seja, de fato, uma forma do QGP, mas apenas diferente do que havia sido teorizado. Muitos físicos teóricos acreditam ser esse o caso e estão buscando diferentes alternativas para descrever o comportamento observado no RHIC para a matéria de quarks. Essas alternativas vão desde simulações numéricas até a utilização da teoria de cordas, passando pela reformulação dos modelos existentes, baseando-se nas equações hidrodinâmicas para um fluido viajando com velocidade próxima à velocidade da luz.

Esses dados devem ser confirmados por experimentos futuros no próprio RHIC e no LHC (*Large Hadrons Collider*), do CERN, que deve começar a funcionar em 2008, realizando colisões de feixes de prótons com energia de  $7\text{TeV}$  [78].

O grande momento de descobertas sobre o QGP está chegando: talvez outras e inesperadas propriedades da matéria em altas energias e altas densidades serão descobertas, abrindo ainda maiores possibilidades de pesquisa no rico domínio da física nuclear e no estudo da interação entre núcleos numa grande faixa de energia.

## 3.4 Modelo de Sacola (MIT)

### 3.4.1 Densidade Lagrangeana

Assim como na hadrodinâmica quântica, existem diversos modelos capazes de descrever algumas das principais propriedades dos quarks. Escolhemos um modelo baseado em uma formulação lagrangeana, semelhante aos modelos estudados até agora para os hádrons.

Devido à grande complexidade da teoria fundamental da cromodinâmica, foi desenvolvido no MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) um modelo conhecido como *modelo de sacola* [9], que passamos a descrever em linhas gerais.

Assumimos que uma região do espaço capaz de conter campos hadrônicos possua uma



energia potencial constante e positiva  $B$  por unidade de volume. Essa região é chamada de *sacola*. Então, a constante  $B$  pode ser interpretada como a energia necessária para criar uma bolha no vácuo, a sacola na qual os quarks estão confinados, modelando, assim, a propriedade de confinamento. Esse modelo está descrito a partir da seguinte densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - \bar{\psi} m \psi - B \right] \Theta_V. \quad (3.5)$$

Aqui,  $\psi$  representa o campo dos quarks,  $\Theta_V$  é a função degrau definida por

$$\begin{aligned} \Theta_V &= 1 && \text{dentro da sacola,} \\ &= 0 && \text{fora da sacola.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para o caso mais simples, o caso esfericamente simétrico e estático, temos que

$$\Theta_V = \Theta(R - r), \quad (3.7)$$

onde  $R$  é o raio da sacola. Além disso, é importante dizer que estamos considerando quarks de massa  $m$  e desconsiderando os graus de liberdade dos glúons, pelo fato de estarmos desenvolvendo um formalismo em  $T = 0$  (ver, por exemplo, a subseção 8.2.2 da referência [29] para maiores detalhes a respeito da não-contribuição dos glúons nesse limite de temperatura).

### 3.4.2 Equação de Estado

O que temos, então, no modelo de sacola do MIT é, basicamente, um gás de férmions degenerado contido em uma determinada região esférica do espaço, cujo raio é determinado pela constante  $B$ . Sendo assim, a equação de estado será determinada por um cálculo análogo àquele desenvolvido na subseção 2.3.5, em que estudamos a equação de estado do modelo de Walecka, desconsiderando-se, agora, obviamente, os graus de liberdade mesônicos. O resultando, de qualquer modo, é bastante intuitivo, para não dizer evidente, conforme explicamos a seguir.

Para a densidade de energia de um gás de férmions idênticos a temperatura nula, a expressão será

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^k dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (3.8)$$

O resultado da integral será aquele mostrado na equação (2.118), de onde vem que:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{4} \left[ k(k^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{2} m^2 k \sqrt{k^2 + m^2} - \frac{1}{2} m^4 \ln \left( \frac{\sqrt{k^2 + m^2} + k}{m} \right) \right] \right\}, \quad (3.9)$$

onde  $\gamma$ , aqui, é a degenerescência de spin. Sendo o potencial químico

$$\mu = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (3.10)$$

e tomando  $\gamma = 2$ , a expressão fica, após uma pequena álgebra:

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \mu k \left( \mu^2 - \frac{1}{2} m^2 \right) - \frac{1}{2} m^4 \ln \left( \frac{\mu + k}{m} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Para a pressão de um gás de férmions idênticos, a expressão será

$$p = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^k dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (3.12)$$

O resultado da integral será aquele mostrado na equação (2.101), de onde vem que:

$$p = \frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left[ k^3 \sqrt{(k^2 + m^2)} - \frac{3}{2} m^2 k \sqrt{k^2 + m^2} + \frac{3}{2} m^4 \ln \left( \frac{\sqrt{k^2 + m^2} + k}{m} \right) \right] \right\}, \quad (3.13)$$

onde  $\gamma$ , aqui, é a degenerescência de spin. Fazendo também

$$\mu = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (3.14)$$

e tomando  $\gamma = 2$ , a expressão fica, após uma pequena álgebra:

$$p = \frac{1}{12\pi^2} \left[ \mu k \left( \mu^2 - \frac{5}{2} m^2 \right) + \frac{3}{2} m^4 \ln \left( \frac{\mu + k}{m} \right) \right]. \quad (3.15)$$

Considerando, agora, que esses férmions são quarks, podemos ter três diferentes cores de quarks. Assim, as expressões para densidade de energia e pressão ficarão multiplicadas por um fator 3. Além disso, podemos considerar que nosso gás de quarks contém diferentes sabores de quarks. Por fim, dentro do contexto do modelo de sacola MIT, teremos, na densidade de energia, um fator  $B$  somando-se, correspondente à energia da sacola; na pressão, teremos um fator  $-B$ , correspondente à pressão que a sacola exerce contrabalancando a pressão dos quarks contidos em seu interior. Com essas ressalvas, as expressões para  $\varepsilon$  e  $p$  ficam escritas como

$$\varepsilon = B + \sum_f \frac{3}{4\pi^2} \left[ \mu_f k_f \left( \mu_f^2 - \frac{1}{2} m_f^2 \right) - \frac{1}{2} m_f^4 \ln \left( \frac{\mu_f + k_f}{m_f} \right) \right], \quad (3.16)$$

$$p = -B + \sum_f \frac{1}{4\pi^2} \left[ \mu_f k_f \left( \mu_f^2 - \frac{5}{2} m_f^2 \right) + \frac{3}{2} m_f^4 \ln \left( \frac{\mu_f + k_f}{m_f} \right) \right], \quad (3.17)$$

onde a soma em  $f$  é a soma sobre os diferentes sabores de quarks considerados. Além disso, a densidade bariônica será dada por

$$\rho = \sum_f \frac{k_f^3}{3\pi^2}. \quad (3.18)$$

Os resultados acima são adequados para cálculos envolvendo estrelas compactas, nas quais, acredita-se, os núcleons se decomponham em quarks por causa da alta pressão

no interior da estrela. Como a temperatura de uma estrela de nêutrons, logo após seu nascimento, já cai para a casa dos  $keV$  (o que é desprezível na escala nuclear), o limite de temperatura zero é apropriado.

Uma pergunta que deve ser respondida neste ponto é: qual o valor da constante de sacola  $B$ ? Para respondê-la, apresentaremos aqui um cálculo bastante simplificado.

Consideremos quarks sem massa e não-interagentes dentro de uma sacola confinante à temperatura nula, sem pressão externa. Para um certo sabor  $f$  de quark sem massa, o momentum de Fermi  $k_f$  é igual ao potencial químico  $\mu_f$ . Para cada sabor, podemos escrever a densidade bariônica como

$$\rho_f = \frac{\mu_f^3}{\pi^2}, \quad (3.19)$$

e as densidades de energia como

$$\varepsilon_f = \frac{3\mu_f^4}{4\pi^2}, \quad (3.20)$$

e as pressões como

$$p_f = \frac{\mu_f^4}{4\pi^2}. \quad (3.21)$$

A soma das pressões dos diferentes sabores de quarks é contrabalançada pela pressão de confinamento  $B$  da sacola, de modo que

$$\sum_f p_f = B; \quad (3.22)$$

a densidade de energia total é

$$\varepsilon = \sum_f \varepsilon_f + B = 3 \sum_f p_f + B = 4B; \quad (3.23)$$

e a densidade bariônica total do sistema, consistente com (3.18), é

$$\rho = \sum_f \rho_f/3. \quad (3.24)$$

Note-se que a soma das pressões constituintes, bem como a densidade de energia total, é dada somente em termos da constante de sacola  $B$ .

Para um gás de quarks  $u$  e  $d$ , a neutralidade de carga exige que a relação entre as densidades de partículas seja  $\rho_d = 2\rho_u$ , de onde vem que

$$\mu_2 \equiv \mu_u = 2^{-1/3} \mu_d. \quad (3.25)$$

A correspondente pressão é

$$p_2 \equiv p_u + p_d = (1 + 2^{4/3}) \frac{\mu_2^4}{4\pi^2} = B; \quad (3.26)$$

a densidade de energia total é

$$\varepsilon_2 = 3p_2 + B = 4B; \quad (3.27)$$

e a densidade bariônica é

$$\rho_{B2} = \frac{\rho_u + \rho_d}{3} = \frac{\mu_2^3}{\pi^2}; \quad (3.28)$$

resultando uma energia por bárion de

$$\varepsilon_2/\rho_{B2} = (1 + 2^{4/3})^{3/4} (4\pi^2)^{1/4} B^{1/4} = 6.441 B^{1/4}. \quad (3.29)$$

Um gás contendo três sabores de quarks será eletricamente neutro se a relação entre as densidades de partículas for  $\rho_u = \rho_d = \rho_s$ , isto é,  $\mu_3 \equiv \mu_u = \mu_d = \mu_s$ . Para uma constante de sacola fixa, o sistema com três sabores de quarks deve exercer a mesma pressão daquele composto por apenas dois sabores (permanecendo inalterada a expressão  $\varepsilon_3 = 3p_3 + B = 4B$  para a densidade de energia). Isso ocorre quando

$$\mu_3 = \left( \frac{1 + 2^{4/3}}{3} \right)^{1/4} \mu_2, \quad (3.30)$$

o que implica uma densidade bariônica de

$$\rho_{B3} = \frac{\mu_3^3}{\pi^2} = \left( \frac{1 + 2^{4/3}}{3} \right)^{3/4} \rho_{B2}. \quad (3.31)$$

A energia por bárion é então

$$\varepsilon_3/\rho_{B3} = 3\mu_3 = 3^{3/4} (4\pi^2)^{1/4} B^{1/4} = 5.714 B^{1/4}. \quad (3.32)$$

A energia por bárion em um gás de nêutrons livres é a própria massa do nêutron ( $939.6 MeV$ ); em um gás de  $Fe^{56}$  é de  $m_n = 930 MeV$ . Em um raciocínio *naïf*, a estabilidade de matéria composta por quarks  $u$  e  $d$  corresponde, portanto, a  $\varepsilon_2/\rho_{B2} < m_n$ , ou, de acordo com (3.29),  $B^{1/4} < 145.9 MeV$  ( $B^{1/4} < 144.4 MeV$  para estabilidade em relação ao ferro). Mas o argumento pode ser invertido: já que observamos nêutrons e  $Fe^{56}$  na natureza em vez de matéria de quarks  $u$  e  $d$ , concluímos que  $B^{1/4}$  deve ser, de fato, maior do que os números mencionados acima.

Por outro lado, a matéria estranha tem energia menor do que a matéria composta apenas por quarks  $u$  e  $d$ , como mostram as equações (3.29) e (3.32), sendo, naturalmente, a matéria estranha um estado meta-estável<sup>4</sup>. Portanto, a energia de ligação por bárion

---

<sup>4</sup>Apesar de ser um estado de menor energia e, portanto, preferencial, não observamos matéria estranha pura no lugar de bárions pois a estabilidade da matéria estranha requer um conteúdo mínimo de estranheza, isto é, uma fração significativa de quarks estranhos presentes, de modo que núcleos comuns não decaem em porções de matéria estranha (estrangeletes). A conversão de um núcleo de ferro em um estrangelete com  $A = 56$ , portanto, exige altas ordens de interação fraca para transformar dúzias de quarks  $u$  e  $d$  em quarks  $s$ . Tal processo tem uma probabilidade desprezível de ocorrer.

para a matéria estranha em seu ponto de saturação (pressão nula) deve ser, em termos absolutos, menor do que a energia de ligação do núcleo mais estável, o  $Fe^{56}$ . De acordo com (3.32), temos que  $5.714B^{1/4} < 930MeV$ , o que implica  $B^{1/4} < 162.8MeV$ .

Estabelecemos, assim, uma faixa de valores aceitáveis para a constante de sacola  $B$ :

$$145MeV < B^{1/4} < 163MeV. \quad (3.33)$$

Dentro dessa faixa, adotamos, nesta dissertação, o valor  $B^{1/4} = 160MeV$ , mais próximo do limite superior do que do inferior, haja vista que, tendo sido, por exemplo, desconsiderados os graus de liberdade dos glúons, podemos supor que a pressão a ser contrabalançada pela sacola é maior do que somente aquela exercida pelo conteúdo de quarks livres. Esse valor está ainda em concordância com trabalhos recentes [89][90]. Ainda vale notar que o valor escolhido, bem como a faixa de valores aceitáveis para  $B^{1/4}$  estabelecida acima, não apresenta divergência do valor canônico  $B^{1/4} = 145MeV$  utilizado em trabalhos pioneiros, valor esse capaz de reproduzir as massas de bárions e mésons em seu estado fundamental (obtidas por espectroscopia) com razoável aproximação [108].

### 3.5 Matéria Estelar de Quarks

Discutimos, na subseção 1.4.4, o fato de que as estrelas são eletricamente neutras e se encontram em equilíbrio químico, isto é, as estrelas são misturas de espécies em equilíbrio químico a uma dada temperatura (efetivamente zero para uma estrela de nêutrons) e, portanto, no mais baixo estado de energia em cada densidade. Como a escala de tempo de vida de uma estrela é efetivamente infinita em comparação com a escala de tempo típica da interação fraca, essa interação viola a conservação de estranheza. A estranheza, por conseguinte, não é conservada em uma estrela que contenha matéria de quarks. Qualquer neutrino ou fóton produzido no decaimento de um quark  $u$  ou  $d$  com grande momentum para um quark  $s$  de pequeno momentum irá abandonar a estrela. A energia da estrela é, assim, diminuída tanto pela perda da energia dos fótons e neutrinos quanto pela redução da energia média dos quarks. Logo, o equilíbrio químico se estabelece sem depender da conservação da estranheza.

Na seção anterior, determinamos expressões para pressão e densidade de energia da matéria de quarks em termos dos potenciais químicos. À densidade de energia e à pressão dos quarks, temos de somar a densidade de energia e a pressão dos léptons, de modo que a neutralidade de carga possa ser obtida à menor energia possível. Expressões para essas contribuições podem ser achadas nos últimos termos das equações (2.290) e (2.291).

Vejamos como são determinados os potenciais químicos. De acordo com a discussão acima acerca da não-conservação da estranheza, as relações entre os potenciais químicos dos quarks são determinadas apenas pela conservação de carga elétrica e número bariônico, de acordo com o procedimento apresentado no Apêndice 2. Desta forma, obtemos as

relações:

$$\mu_d = \mu_u + \mu_e, \quad (3.34)$$

$$\mu_s = \mu_d, \quad (3.35)$$

$$\mu_\mu = \mu_e. \quad (3.36)$$

A condição de neutralidade de carga fica escrita como

$$q = \sum_f \left( q_f \frac{k_f^3}{\pi^2} \right) - \frac{k_e^3}{3\pi^2} - \frac{k_\mu^3}{3\pi^2} = 0, \quad (3.37)$$

onde os dois últimos termos são as contribuições leptônicas.

Finalmente, a expressão para a densidade bariônica (3.18) fornece uma quinta relação a partir da qual, para cada densidade, podem ser determinados os cinco potenciais químicos  $\mu_u, \mu_d, \mu_s, \mu_e$  e  $\mu_\mu$ .

Conhecidos os potenciais químicos, podemos calcular a pressão e a densidade de energia para os quarks. Para os léptons, tomamos expressões similares a (3.16) e (3.17), ignorando a constante  $B$  e com o peso estatístico 2 substituindo o peso estatístico 6 considerado para os quarks, ou seja, multiplicando  $p$  e  $\varepsilon$  por  $1/3$ . O resultado é então somado à pressão e à densidade de energia dos quarks para que tenhamos a pressão total e a densidade de energia total do sistema. Lembramos que os múons estarão presentes no sistema sempre que  $\mu_e$  exceder a massa do múon.

Isso nos fornece, na aproximação do modelo de sacola, uma descrição completa da equação de estado para matéria de quarks em estrelas.

Terminamos este capítulo apresentando uma breve justificativa para a escolha do modelo de sacola MIT para a descrição da matéria de quarks neste trabalho. No Apêndice D, apresentamos um artigo publicado pelo autor desta dissertação na revista *International Journal of Modern Physics D*, volume 13, número 7, de agosto de 2004 [79]. Nesse artigo, diferentemente do que é feito nesta dissertação, utilizamos, para descrever a fase hadrônica da matéria nuclear, um modelo com acoplamento quark-méson baseado no modelo de sacola difusa; para a fase de plasma de quarks e glúons, utilizamos um modelo com constante de sacola dependente da temperatura e do potencial químico do sistema e, por estarmos trabalhando, nesse caso, com temperatura finita, adotamos a aproximação de quarks livres e sem massa. Nesse trabalho, mostramos que a equação de estado e os valores das propriedades globais das estrelas de nêutrons são muito pouco modificados em comparação com os resultados obtidos a partir de um modelo com constante de sacola fixa. Isso ocorre exatamente por causa das baixas temperaturas consideradas no estudo.

Sendo assim, como desejamos, nesta dissertação, centralizar a atenção nas estrelas de nêutrons, o que implica a adoção de um formalismo a temperatura nula, não haveria vantagem e nem sentido em utilizar um modelo mais complicado. O artigo mostra que,

mesmo para estrelas protoneutrônicas, com temperatura da ordem de  $10MeV$ , a correção nos resultados é muito pequena. Além disso, com a utilização de modelos simples, reforçamos o cunho didático pretendido para este trabalho.

Neste capítulo, discutimos o *modelo do quark* e o *modelo de sacola do MIT* para os bárions, apresentando sua densidade lagrangeana e sua equação de estado, definindo, assim, a abordagem a ser utilizada para a descrição da matéria de quarks no estudo da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP*.

No próximo capítulo, desenvolveremos, finalmente, essa transição de fase.

# Capítulo 4

## Transição de Fase no Interior de Estrelas de Nêutrons

### 4.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, discorremos sobre os princípios de evolução estelar que levam à formação das estrelas de nêutrons (bem como as mais importantes características desses corpos celestes), apresentamos as principais propriedades da matéria nuclear (e os modelos capazes de descrevê-las, destacando-se o modelo com acoplamento ajustável de Taurines) e ainda exploramos a matéria de quarks (com destaque para o modelo de sacola do MIT), tendo em vista a utilização desses conhecimentos no estudo da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP* e da repercussão da formação dessa nova fase nas propriedades globais da estrela de nêutrons (massa e raio) e na propriedade termodinâmica conhecida como índice adiabático.

Inúmeras transições de fase podem ocorrer no interior de estrelas de nêutrons, desde a transição líquido-gás, na matéria nuclear da superfície, até a transição para a matéria de quarks, condensados de káons, píons e dibárions na região mais central destas estrelas. Como dissemos, a transição de fase hádron-quark constitui um item essencial neste trabalho. A caracterização da ordem desta transição é discutida neste capítulo através do estudo da possível formação de uma fase mista de hádrons e quarks, conforme descrito em [84]. Ainda apresentamos alguns aspectos relacionados à dinâmica dessa transição ocorrida no interior de um estrela de nêutrons. Por fim, analisamos, comparativamente, o índice adiabático e as propriedades macroscópicas de estrelas de nêutrons simples (compostas apenas por matéria hadrônica) e estrelas híbridas (compostas por um caroço de matéria de quarks e um envelope de matéria hadrônica).



## 4.2 A Transição de Fase

### 4.2.1 Dinâmica da Transição

Por hipótese, todas as estrelas de nêutrons seriam meta-estáveis com respeito a estrelas estranhas que possuam o mesmo número bariônico; isso significa que uma estrela de nêutrons reduz sua massa gravitacional ao converter-se em estrela estranha. Esse postulado pode ser compreendido ao determinar-se que o potencial de Gibbs para a matéria estranha é menor do que o potencial de Gibbs para a matéria nuclear. Entretanto, uma estrela de nêutrons somente poderia realizar essa transição através da criação de  $\sim 10^{57}$  quarks estranhos.

Essa conversão de matéria hadrônica em matéria de quarks é muito mais favorável em uma estrela de nêutrons do que em um núcleo atômico. A pressão central deve favorecer a produção de matéria de quarks de dois sabores, a qual pode prontamente converter-se em matéria estranha. Se a pressão interna for alta o suficiente, partículas  $\Lambda$ , formadas pelo conjunto de quarks  $uds$ , podem aparecer e agrupar-se para formar sementes de matéria estranha. Estrelas de nêutrons nascem quentes e também podem “queimar” a matéria de nêutrons em matéria estranha. Neutrinos de raios-cósmicos podem induzir essa conversão, e, finalmente, pequenos agrupamentos de matéria estranha que entrem na estrela de nêutrons podem crescer e converter toda a estrela.

A formação de uma região mais densa, que passe a atingir o limite da transição de fase, no interior de estrelas de nêutrons, pode acontecer de diferentes maneiras:

- Poucos instantes após o colapso e explosão de uma supernova, estrelas de nêutrons nascem quentes. Após alguns segundos, essa estrela resfria rapidamente de algumas dezenas de  $MeV$  para temperaturas inferiores a  $1MeV$ , passando a resfriar de maneira mais lenta. Esse resfriamento deve gerar uma contração na estrela, aumentando a densidade no seu interior.
- O aumento da densidade no caroço de uma estrela também ocorre devido à redução da sua velocidade angular de rotação. Assim como acontece no caso do resfriamento, uma estrela de nêutrons nasce muito veloz, reduzindo sua frequência de rotação ao longo do tempo.
- Estrelas que se encontram em um sistema binário podem acretar massa de sua companheira, levando ao aumento de sua densidade e pressão interna, atingindo níveis elevados e, possivelmente, favorecendo a transição de fase de matéria nuclear para o plasma de quarks e glúons.

Em resumo: podemos, com base nos argumentos qualitativos apresentados nesta subseção, concluir que é possível ocorrer uma transição de fase no interior de estrelas de nêutrons, formando uma fase mais compacta, composta pelo plasma de quarks e glúons.

Essa transição pode ocorrer quando a região central da estrela atingir uma certa densidade crítica, seja através de seu resfriamento, diminuição do período de rotação ou por fenômeno de fertilização exterior à estrela.

### 4.2.2 Termodinâmica da Transição

Existem, atualmente, duas linhas de pesquisa distintas com relação ao estudo da transição de fase hádron-quark, que diferem quanto à formação de uma fase intermediária, com uma composição mista de hádrons e quarks no interior da estrela. Essas duas linhas de pesquisa encontradas na literatura são as seguintes:

- **Transição de Fase em Primeira Ordem:** essa transição ocorre em pressão constante na fase mista de hádrons e quarks. Nesse caso, a transição entre duas fases distintas 1 e 2 acontece, segundo o critério de Gibbs, em um único valor de potencial químico, temperatura e pressão, de acordo com as equações abaixo:

$$\mu_1 = \mu_2, \quad (4.1)$$

$$T_1 = T_2, \quad (4.2)$$

$$p_1(\mu, T) = p_2(\mu, T). \quad (4.3)$$

Ao examinarmos a estrutura da estrela formada com base nessa abordagem de transição de fase, podemos verificar que a carga elétrica se anula, localmente, em cada uma das fases. Também é possível verificar a descontinuidade das funções densidade de energia e potencial químico.

- **Transição de Fase em Segunda Ordem:** devemos observar, nesse caso, que o comportamento da pressão, durante a fase mista, deixa de ser constante, como era no caso anterior. As funções densidade de energia e potencial químico também assumem um comportamento distinto e passam a ser funções contínuas. Além disso, a carga elétrica de uma estrela que possui esta estrutura passa a ser conservada globalmente.

A Fig.4.1 mostra, de forma estritamente esquemática, como devem se comportar as equações de estado obtidas através de um tratamento com pressão constante ou com pressão variável.

A primeira linha de abordagem, com pressão constante, foi bastante utilizada nas primeiras pesquisas sobre o tema, embora ainda seja empregada em vários trabalhos recentes como uma forma de simplificação ou aproximação. As estimativas pioneiras, utilizando esse tratamento, sugeriam que a matéria hadrônica não se converteria em matéria de quarks a menos que atingisse densidades da ordem de  $10\rho_0$  [85]. Essa altíssima densidade de desconfinamento pode ser explicada, em parte, pela bastante rígida equação de

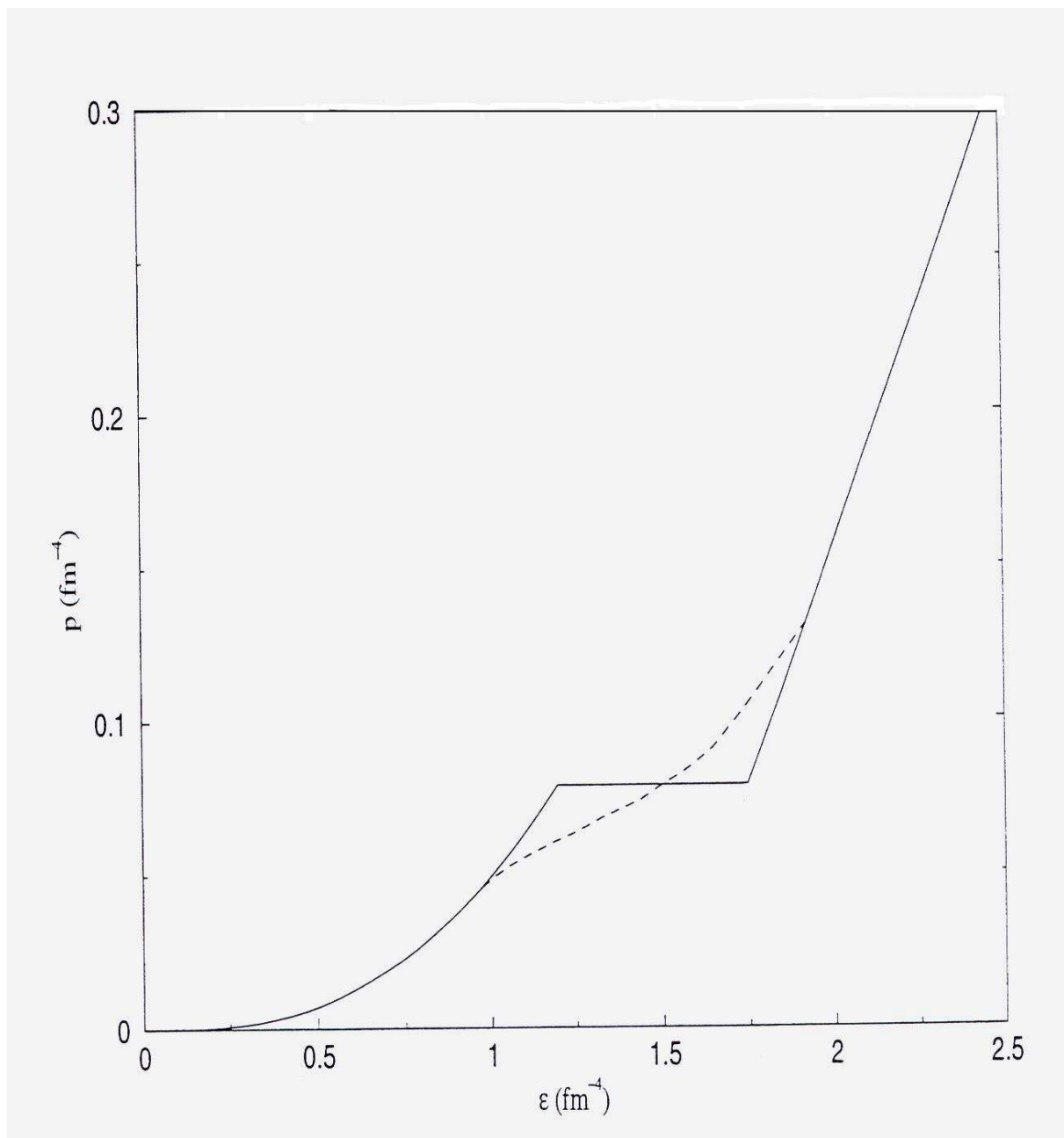


Figura 4.1: Comportamento esquemático das equações de estado obtidas através de um tratamento com pressão constante ou com pressão variável.

estado para matéria nuclear empregada nesses trabalhos ( $K = 550 \text{ MeV}$ ). Tais densidades são apenas marginalmente atingidas nos modelos de estrelas compactas; por essa razão, durante alguns anos, a existência de matéria de quarks no interior de estrelas de nêutrons foi desacreditada. Contudo, pressão constante na fase mista — independentemente da proporção entre as fases em equilíbrio — é um caso especial que não descreve a matéria constituinte das estrelas de nêutrons. Em geral, pressão constante é característica da transição de fase em primeira ordem para uma substância que tenha um único componente independente. A água é um exemplo. A transição líquido-vapor na água tem  $H_2O$  como única “carga” conservada ou único componente independente. Já a matéria das estrelas de nêutrons, como vimos, tem dois componentes independentes — o número bariônico conservado e a carga elétrica total (que é nula). De maneira geral, a pressão varia na fase mista de tais substâncias com mais de um componente<sup>1</sup>. Desse modo, o segundo tipo de abordagem citado acima parece ser o mais adequado.

Estrelas de nêutrons têm duas cargas conservadas, a elétrica e a bariônica. Portanto, a matéria das estrelas de nêutrons não é uma substância “simples”, mas sim “complexa” — ela tem mais de um componente independente. As características da transição de fase são bastante diferentes nos dois casos. A diferença surge porque uma substância complexa possui graus de liberdade que uma substância simples não tem. As estrelas devem ter neutralidade de carga. Essa afirmação é pertinente à carga da estrela como um todo. É uma restrição global, e não local, a qual, por sua vez, corresponderia a uma densidade de carga identicamente nula. Como a natureza exige apenas neutralidade global, se for energeticamente favorável que existam cargas separadas, assim será. Temos vários exemplos de sistemas desse tipo. O nêutron é um deles, e o átomo é outro. Ambos possuem distribuições de carga finitas, cuja integração em todo volume simplesmente resulta nula. Para entendermos um pouco melhor, vamos considerar uma substância com duas “cargas” conservadas ou componentes independentes —  $Z$  de um tipo e  $B$  de outro. No caso de uma estrela de nêutrons, essas letras poderiam denotar o número de cargas totais (em unidades da carga elementar  $e$ ) e o número total de carga bariônica. Esteja a substância imersa em um banho térmico. Definimos, então, a concentração  $c = Z/B$ . A razão é fixa somente enquanto o sistema estiver em uma fase pura ou em outra. Na fase mista, a concentração em cada uma das regiões de uma fase ou da outra pode ser diferente, estando o sistema sujeito apenas à conservação dos números totais,

$$c_1 = Z_1/B_1, \quad c_2 = Z_2/B_2, \quad Z_1 + Z_2 = Z, \quad B_1 + B_2 = B. \quad (4.4)$$

Se as forças internas puderem diminuir a energia do sistema fazendo um rearranjo das concentrações, elas assim o farão. O ponto essencial é que as leis de conservação na química termodinâmica são globais, e não locais. Além disso, as concentrações  $c_1$  e  $c_2$

---

<sup>1</sup>A pressão pode ser constante na fase mista de um sistema com mais de um componente apenas para certas proporções especiais dos componentes.

serão otimizadas pelas forças internas do sistema para cada proporção das duas fases, de modo que as propriedades das fases variam na fase mista. Isso contrasta claramente com a transição líquido-vapor na água ou em outra substância com componente único.

Por qual abordagem devemos, então, optar? A primeira, tem a grande vantagem da simplicidade, enquanto a segunda, bastante mais complexa, parece conduzir a resultados mais realistas. Como estamos utilizando equações de estado bastante suaves, ao contrário daquelas utilizadas nos primeiros estudos desse tipo, não corremos o risco de encontrar resultados duvidosos, mesmo optando pela abordagem através de uma transição de fase de primeira ordem (veremos, adiante, que, de fato, os resultados obtidos são bastante consistentes e compatíveis com a realidade física). Além disso, como pretendemos, sobretudo, manter a simplicidade e a didática neste trabalho (desde que não sejam prejudicados os resultados), a transição de fase de primeira ordem parece ser a mais indicada.

### 4.2.3 Metodologia do Cálculo

De acordo com o que foi estabelecido anteriormente, a metodologia do cálculo da transição da fase é bastante simples.

Em primeiro lugar, devemos desenvolver os programas computacionais para o cálculo da equação de estado da matéria nuclear e da matéria de quarks. O programa para o cálculo da equação de estado da matéria nuclear está comentado no na seção E6 do Apêndice E (Programa 6). Por sua vez, o programa para o cálculo da equação de estado da matéria de quarks está comentado no na seção E7 do Apêndice E (Programa 7).

A seguir, com os dados de saída, construímos, em um mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos de pressão *versus* potencial químico para matéria nuclear ( $p_N, \mu_N$ ) e para matéria de quarks ( $p_Q, \mu_Q$ ). Assim, no ponto em que as duas curvas se interceptam, teremos satisfeita a condição

$$\mu_Q = \mu_N, \quad (4.5)$$

$$p_Q = p_N, \quad (4.6)$$

que, em um formalismo de temperatura nula (que é o caso de nossa abordagem), identifica-se com o critério de Gibbs. Desse modo, estabelecemos o potencial químico e a pressão em que ocorre a transição de fase.

Como próximo passo, desenhamos, em um mesmo sistema de eixos as curvas  $p \times \varepsilon$  (pressão *versus* densidade de energia) para matéria nuclear e para matéria de quarks. Entre as duas curvas, ligando os pontos que correspondem à pressão de transição de fase estabelecida anteriormente, inserimos uma aproximação linear.

Finalmente, para que possamos verificar as características de uma estrela compacta composta por esse tipo de matéria híbrida, devemos levar os dados da equação de estado obtida para as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, resolvendo-as numericamente.

### 4.3 Estudo da Densidade de Transição de Fase

Seguindo os passos descritos na subseção anterior, foram confeccionados os gráficos apresentados nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4. Para a confecção desses gráficos, escolhemos, para descrição da matéria hadrônica, a versão escalar do modelo com acoplamento derivativo ajustável com  $\lambda = 0.07$ , pois, conforme discutido no Capítulo 2, nesse caso, temos, para os núcleons, uma razão entre massa efetiva e massa livre  $M^*/M = 0.71$  e, para a matéria nuclear, um módulo de compressibilidade  $K = 248MeV$ , valores que, como já dito também no Capítulo 2, estão em excelente concordância com as medidas mais modernas para essas grandezas [86][87]. Para essa modelagem, observamos que a transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP* ocorre, de acordo com o critério de Gibbs, a uma pressão de  $0.128fm^{-4}$  e um correspondente potencial químico de  $5.4fm^{-1}$  (Fig.4.2). Isso implica, de acordo com as equações de estado obtidas para a fase hadrônica e para a fase de QGP, que a fase puramente hadrônica existe até uma densidade de  $0.32fm^{-3}$  (da ordem de duas vezes a densidade da matéria nuclear na saturação), a partir da qual se estabelece a transição de fase de primeira ordem; a fase de quarks livres aparece em densidades superiores a  $0.54fm^{-3}$ ; em densidades intermediárias, temos uma fase mista (Fig.4.3). A equação de estado correspondente ( $p \times \varepsilon$ ) é apresentada na Fig.4.4.

Repetindo o procedimento descrito na subseção 4.2.3 para diferentes valores do parâmetro ajustável  $\lambda$  (ou seja, para diferentes equações de estado para a fase hadrônica), verificamos que é possível estabelecer consistentemente uma transição de fase para matéria de quarks livres para todos os valores de  $\lambda$  dentro da faixa fenomenológica (valores de  $\lambda$  que implicam  $0.7 < M^*/M < 0.8$  e  $200MeV < K < 300MeV$ ), isto é,  $0.07 < \lambda < 0.22$ . Porém, a densidade  $\rho_H$  de fim da fase hadrônica (correspondente ao ponto H em um gráfico do tipo  $p \times \rho$ , como aquele da Fig.4.3), densidade essa que estabelece o início da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP*, apresenta variação de acordo com o valor de  $\lambda$  adotado. Por outro lado, a densidade  $\rho_Q$  de início da fase de quarks livres (correspondente ao ponto Q em um gráfico do tipo  $p \times \rho$ , como aquele da Fig.4.3), densidade essa que estabelece o final da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP*, pouco varia de acordo com o valor de  $\lambda$  adotado. Esses resultados são mostrados na Fig.4.5. Observando esse gráfico, vemos que, dentro da faixa fenomenológica do parâmetro ajustável  $\lambda$ , a densidade de transição  $\rho_H$  aumenta continuamente de cerca de  $0.30fm^{-3}$  até um máximo de  $0.38fm^{-3}$  (correspondente a  $\lambda = 0.19$ ), valores esses da ordem de duas vezes a densidade da matéria nuclear na saturação; a partir daí, o valor de  $\rho_H$  decresce. Ou seja: para menores valores do parâmetro  $\lambda$ , temos menores valores de  $\rho_H$  (a densidade de transição), sendo que um máximo de  $\rho_H$  aparece em  $\lambda = 0.19$ . Para compreender o porquê desse comportamento, é elucidativo relembrar a relação entre o parâmetro ajustável  $\lambda$  na versão escalar do modelo com acoplamento ajustável e o módulo de compressibilidade  $K$ . Para isso, remetemos o leitor aos resultados obtidos no Capítulo 2, especialmente aqueles

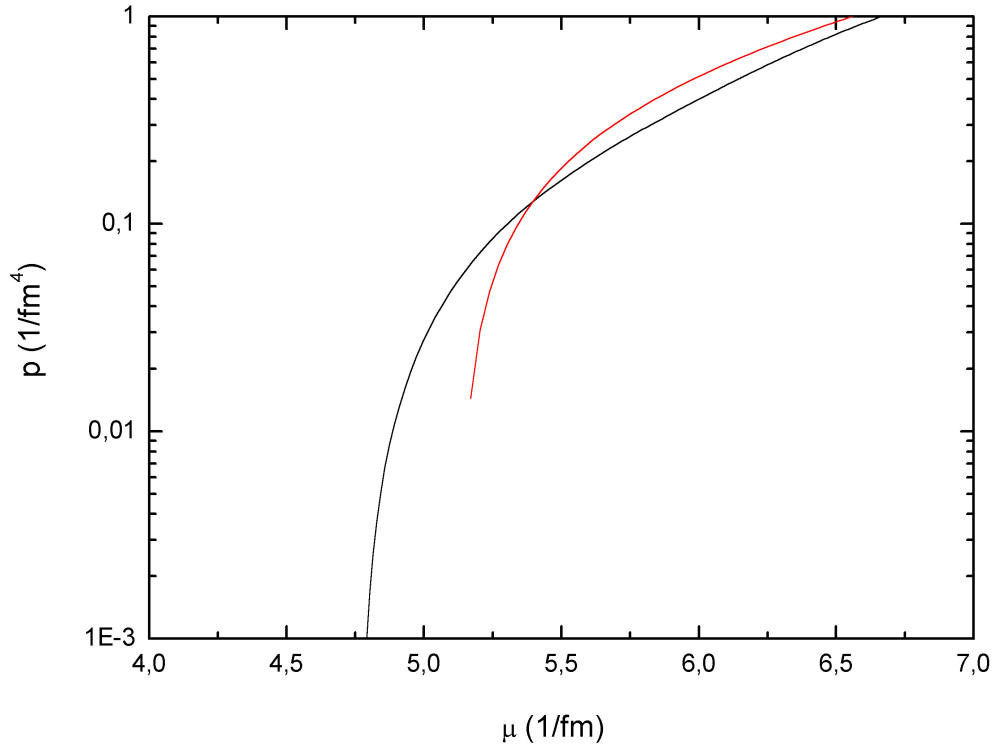


Figura 4.2: Pressão *versus* potencial químico para matéria hadrônica (curva preta, descrita pela versão escalar do modelo com acoplamento ajustável, com  $\lambda = 0.07$ ) e para matéria de quarks (curva vermelha, descrita pelo modelo de sacola do MIT). O ponto em que as duas curvas se cruzam determina a região de transição de fases de acordo com o critério de Gibbs.

apresentados na Fig.2.14. Vemos, nesse gráfico, que, para  $\lambda = 0.06$ , o módulo de compressibilidade é  $K = 262\text{MeV}$ . A partir daí, esse valor cai continuamente, atingindo um mínimo justamente em  $\lambda = 0.19$ , valor ao qual corresponde  $K = 213.1\text{MeV}$ . A seguir, o valor de  $K$  começa a aumentar lentamente, sendo  $213.2\text{MeV}$  para  $\lambda = 0.20$  e  $213.3\text{MeV}$  para  $\lambda = 0.21$ .

Portanto, podemos afirmar que, quanto maior o módulo de compressibilidade da matéria hadrônica (ou quanto mais rígida a equação de estado que a descreve), menor a densidade em que se estabelece a transição de fase. Esse resultado está em concordância com resultados obtidos por outros autores (ver, por exemplo, a referência [90]). Para ilustrar essa correlação, apresentamos, na Fig.4.5, os valores do módulo de compressibilidade  $K$  em função do parâmetro  $\lambda$  (curva azul). Para confecção desse gráfico, os valores de  $K$  estão multiplicados por um fator de escala conveniente  $1.5 \times 10^{-3}$ .

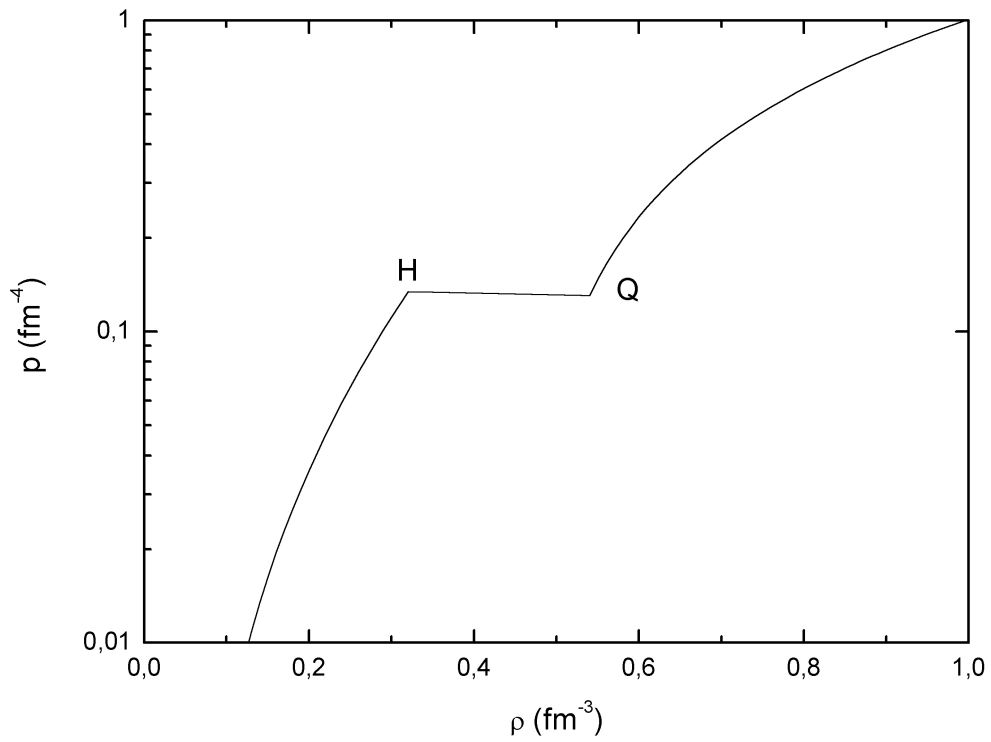


Figura 4.3: Pressão *versus* densidade na vizinhança de uma transição de fase de primeira ordem. Os pontos marcados com H e Q assinalam, respectivamente, o fim da fase hadrônica e o início da fase de quarks (QGP), sendo a região intermediária a fase mista. Os modelos utilizados são os mesmos da Fig.4.2.



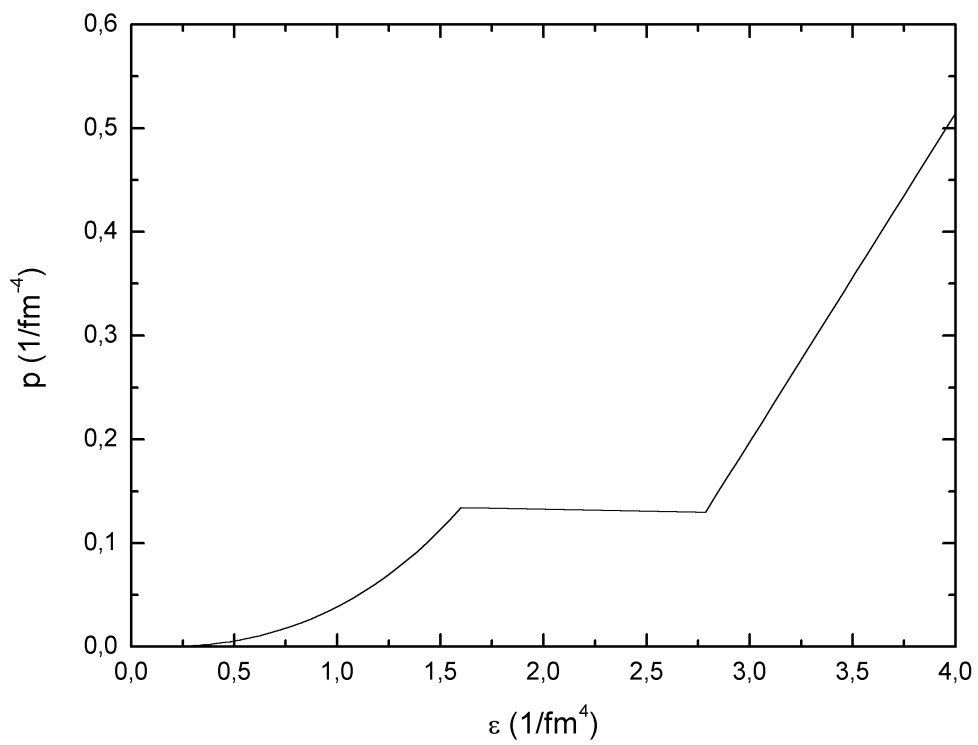


Figura 4.4: Equações de estado com transição de fase de primeira ordem. Os modelos utilizados são os mesmos da Fig.4.2 e da Fig.4.3.

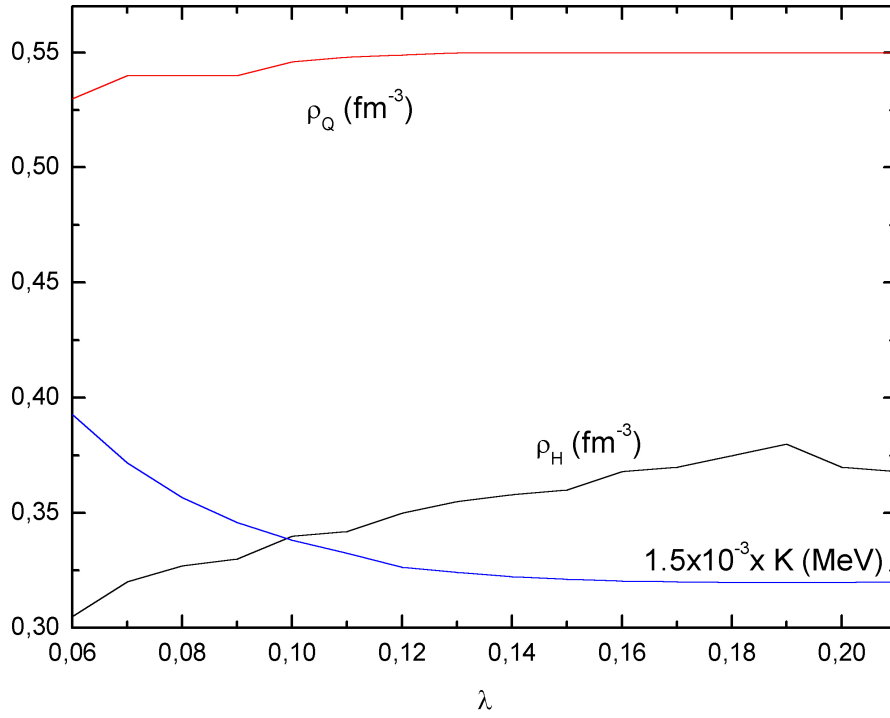


Figura 4.5: Densidade  $\rho_H$  de fim da fase hadrônica (curva preta) e densidade  $\rho_Q$  de início da fase de quarks (curva vermelha) para a versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável ( $0,06 < \lambda < 0,21$ ). A curva azul representa o módulo de compressibilidade  $K$  correspondente a cada um desses valores do parâmetro  $\lambda$ , multiplicado por um fator de escala  $1,5 \times 10^{-3}$ .

## 4.4 Estudo do Coeficiente Adiabático

### 4.4.1 O Coeficiente Adiabático

Nesta subseção, vamos estabelecer, de maneira bastante simples, o que é o *coeficiente adiabático*, grandeza física que será de especial interesse em nosso estudo da matéria no interior das estrelas de nêutrons. Para isso, iremos introduzir, inicialmente, os conceitos de *calor específico molar a volume constante* e de *calor específico molar a pressão constante* para depois, então, a partir desses dois conceitos fundamentais, apresentar a definição do coeficiente adiabático.

#### Calor Específico a Volume Constante

Consideremos  $n$  mols de um gás ideal sob pressão  $p$  e temperatura  $T$ , confinado em um cilindro de volume fixo. Suponhamos, agora, que o gás recebe uma pequena quantidade de calor  $Q$ . Então, a temperatura do gás aumenta para  $T + \Delta T$  e sua pressão aumenta para  $p + \Delta p$ .

Podemos, então, definir o *calor específico molar a volume constante*  $c_V$  a partir da equação

$$Q = nc_V \Delta T \quad (\text{volume constante}). \quad (4.7)$$

Tomemos, agora, a primeira lei da termodinâmica, escrita na forma

$$\Delta E = Q - W, \quad (4.8)$$

onde  $\Delta E$  é a variação de energia interna do sistema,  $Q$  é a quantidade de calor recebida e  $W$  é o trabalho efetuado.

Substituindo (4.7) em (4.8), encontramos

$$\Delta E = nc_V \Delta T - W. \quad (4.9)$$

Mantendo-se o volume constante, o sistema não pode realizar trabalho; portanto,  $W = 0$ . Então, isolando  $c_V$ , obtemos

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{\Delta E}{\Delta T}. \quad (4.10)$$

A equação acima informa, basicamente, que a variação da energia interna  $E$  de um gás ideal confinado depende apenas da variação de sua temperatura, não dependendo do tipo de processo termodinâmico que provocou a mudança na temperatura.

#### Calor Específico a Pressão Constante

Imaginemos, agora, que a temperatura do gás ideal aumente da mesma quantidade  $\Delta T$  considerada anteriormente, mas tendo o gás recebido a necessária quantidade de calor  $Q$

a pressão constante. Analogamente ao caso anterior, podemos definir o *calor específico molar a pressão constante*  $c_p$  a partir da equação

$$Q = nc_p\Delta T \quad (\text{pressão constante}). \quad (4.11)$$

Agora, para relacionarmos  $c_p$  e  $c_V$ , tomamos a primeira lei da termodinâmica conforme enunciada em (4.8). A seguir, no lugar de  $\Delta E$ , substituímos  $nc_V\Delta T$ , de acordo com (4.10). No lugar de  $Q$ , substituímos a expressão (4.11). No lugar de  $W$ , sendo o processo isobárico, podemos escrever que  $W = p\Delta V$ , o que, de acordo com a equação de estado dos gases ideais, pode ser escrito como  $W = p\Delta V = n\mathfrak{R}\Delta T$ , sendo  $\mathfrak{R}$  a constante dos gases ideais. Levando a cabo essas substituições e dividindo os dois lados da equação obtida por  $n\Delta T$ , encontramos

$$c_V = c_p - \mathfrak{R}. \quad (4.12)$$

### Definição do Coeficiente Adiabático

Consideremos, por fim, que o gás ideal confinado no cilindro esteja, agora, isolado termicamente e que sofra uma pequena expansão, de modo a aumentar seu volume de uma quantidade diferencial  $dV$ . Como o aumento de volume é bastante pequeno, podemos assumir que a pressão  $p$  do gás permanece constante durante o processo. Sendo assim, podemos dizer que o trabalho  $dW$  realizado pelo gás durante o aumento de volume é igual a  $p dV$ . Então, podemos escrever a primeira lei da termodinâmica na forma

$$dE = Q - p dV. \quad (4.13)$$

Como o gás está termicamente isolado (e temos, portanto, uma expansão adiabática), fazemos  $Q = 0$ . Utilizamos, a seguir, a equação (4.10) para substituir  $dE$  por  $nc_V dT$ . Com essas substituições, e depois de algum rearranjo, chegamos a

$$ndT = - \left( \frac{p}{c_V} \right) dV. \quad (4.14)$$

Agora, da equação de estado dos gases ideais ( $pV = n\mathfrak{R}T$ ), temos que

$$pdV + V dp = n\mathfrak{R}dT. \quad (4.15)$$

Substituindo, na expressão acima,  $\mathfrak{R}$  por  $c_p - c_V$ , de acordo com (4.12), obtemos

$$ndT = \frac{pdV + V dp}{c_p - c_V}. \quad (4.16)$$

Igualando as equações (4.14) e (4.16) e rearranjando, vem que

$$\frac{dp}{p} + \left( \frac{c_p}{c_V} \right) \frac{dV}{V} = 0. \quad (4.17)$$

Definimos, então, o *coeficiente adiabático* como sendo

$$\Gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}. \quad (4.18)$$

Com essa definição e integrando a equação (4.17), temos:

$$\ln p + \Gamma \ln V = \text{constante}. \quad (4.19)$$

Reescrevendo o lado esquerdo como  $\ln pV^\Gamma$  e tomando a exponencial dos dois lados, obtemos, finalmente, a lei matemática que governa os processos adiabáticos em um gás ideal:

$$pV^\Gamma = \text{constante}. \quad (4.20)$$

A fim de estabelecer valores para o coeficiente adiabático  $\Gamma$ , consideremos dois casos diferentes: o caso não relativístico (NR) e o caso ultra-relativístico (UR).

Para o caso não relativístico, temos que a energia interna do sistema é dada por

$$E = \frac{3}{2}n\mathfrak{R}T. \quad (4.21)$$

Utilizando a equação de estado do gás ideal, podemos escrever que

$$E = \frac{3}{2}pV, \quad (4.22)$$

de onde vem que

$$\varepsilon = \frac{3}{2}p, \quad (4.23)$$

sendo  $\varepsilon$  a densidade de energia. Por outro lado, de (4.21), podemos ver que

$$\frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{3}{2}n\mathfrak{R}. \quad (4.24)$$

Substituindo esse resultado em (4.10), temos que

$$c_v = \frac{3}{2}\mathfrak{R}. \quad (4.25)$$

Recordando, agora, a equação (4.12), podemos dizer que

$$c_p = c_v + \mathfrak{R} = \frac{3}{2}\mathfrak{R} + \mathfrak{R} = \frac{5}{2}\mathfrak{R}. \quad (4.26)$$

Resgatando a definição do coeficiente adiabático  $\Gamma$  como sendo a razão  $c_p/c_v$ , temos, para um gás não relativístico:

$$\Gamma = \frac{5\mathfrak{R}/2}{3\mathfrak{R}/2} = \frac{5}{3}. \quad (4.27)$$

Por outro lado, para o caso ultra-relativístico, temos que a energia interna do sistema é dada por

$$E = 3n\mathfrak{R}T. \quad (4.28)$$

Utilizando a equação de estado do gás ideal, podemos escrever que

$$E = 3pV, \quad (4.29)$$

de onde vem que

$$\varepsilon = 3p, \quad (4.30)$$

sendo  $\varepsilon$  a densidade de energia. Por outro lado, de (4.28), podemos ver que

$$\frac{\Delta E}{\Delta T} = 3n\mathfrak{R}. \quad (4.31)$$

Substituindo esse resultado em (4.10), temos que

$$c_V = 3\mathfrak{R}. \quad (4.32)$$

Recordando, agora, a equação (4.12), podemos dizer que

$$c_p = c_V + \mathfrak{R} = 3\mathfrak{R} + \mathfrak{R} = 4\mathfrak{R}. \quad (4.33)$$

Resgatando a definição do coeficiente adiabático  $\Gamma$  como sendo a razão  $c_p/c_V$ , temos, para um gás ultra-relativístico:

$$\Gamma = \frac{4\mathfrak{R}}{3\mathfrak{R}} = \frac{4}{3}. \quad (4.34)$$

O coeficiente adiabático pode ser ainda definido em termos de  $\varepsilon$  e  $p$ , as variáveis comumente envolvidas na equação de estado:

$$\Gamma = \frac{(p + \varepsilon) dp}{p d\varepsilon}. \quad (4.35)$$

Utilizando as equações (4.23) e (4.30), é fácil verificar que essa definição está em pleno acordo com os resultados estabelecidos em (4.27) e (4.34).

## Coeficiente Adiabático e Polítropos Relativísticos

Na modelagem de estrelas relativísticas, devemos levar em conta dois casos limite, o caso clássico newtoniano, ou politrópico (ver Apêndice F), cuja equação de estado é

$$p = a\varepsilon^\kappa, \quad (4.36)$$

onde  $p$  é a pressão interna e  $\varepsilon$  é a densidade de energia do gás,  $a$  é uma constante que depende da composição química (mas não depende da densidade bariônica) e  $\kappa$  denota o índice politrópico, e ainda o caso ultra-relativístico, cuja equação de estado pode ser escrita como

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (4.37)$$

Classicamente, uma discussão detalhada da estabilidade estelar para polítropos indica que um polítropo é estável ou instável se  $\kappa > 4/3$  ou  $\kappa < 4/3$ , respectivamente. Essa discussão se encontra no Apêndice F desta dissertação.

Obviamente, estrelas relativísticas não podem ser descritas por um equação de estado politrópica newtoniana com um índice politrópico fixo. Contudo, se tomarmos, por exemplo, as equações de estado analíticas comumente utilizadas na literatura para modelar estrelas relativísticas, como a equação de estado politrópica relativística de Tooper [92],

$$p = K\rho^\Gamma, \quad (4.38)$$

$$\varepsilon = \rho + \frac{p}{\Gamma - 1}, \quad (4.39)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $K$  é a constante politrópica e  $\Gamma$  é o índice politrópico, novos fatos surgem.

Em primeiro lugar, para o polítropo relativístico acima considerado, o índice  $\Gamma$  coincide com o coeficiente adiabático conforme definido em (4.35). Além disso, como  $\Gamma$  depende da densidade  $\rho$ , a equação de estado de Tooper corresponde a uma família infinita de polítropos. Todavia, para cada valor de densidade bariônica, a equação de estado de Tooper corresponde a um polítropo relativístico com índice politrópico fixo. Como consequência, para uma densidade fixa, a condição newtoniana para estabilidade deve se manter, de modo que  $\Gamma > 4/3$ .

A questão agora é: o modelo com acoplamento derivativo ajustável descreve consistentemente a matéria nuclear de acordo com esse critério? Ou equivalentemente: como se comporta o coeficiente adiabático de uma estrela de nêutrons, cuja matéria constituinte seja descrita pelo modelo de acoplamento ajustável? Além disso, como se comporta o coeficiente adiabático de uma estrela híbrida, isto é, uma estrela de nêutrons com um caroço de matéria de quarks livres? Por fim, há alguma conexão entre o coeficiente adiabático, conforme definido em (4.35), e as previsões de propriedades fundamentais das estrelas de nêutrons e das estrelas híbridas, tais como distribuição das populações de partículas, massa e raio?

Alguns resultados referentes a essas questões são apresentados nas próximas seções.

#### 4.4.2 Coeficiente Adiabático de uma Estrela de Nêutrons

De acordo com (4.35), se conhecemos a equação de estado obedecida pelo sistema (ou seja, se sabemos os valores da densidade de energia  $\varepsilon$  e os correspondente valores de pressão  $p$ ), podemos facilmente calcular o coeficiente adiabático  $\Gamma$ . O programa computacional desenvolvido para esse fim encontra-se na seção E.8 do Apêndice E (Programa 8).

Conforme dito na subseção 2.6.6, a versão escalar do modelo com acoplamento ajustável é capaz de reproduzir valores aceitáveis para massa efetiva do núcleon e módulo de compressibilidade quando o parâmetro ajustável  $\lambda$  é tomado no intervalo  $0.07 < \lambda < 0.22$ . Realizamos o cálculo do coeficiente adiabático  $\Gamma$  para um conjunto de três valores dentro desse intervalo: o limite inferior  $\lambda = 0.07$  (que corresponde a  $M^*/M = 0.71$  e  $K = 248.0 \text{ MeV}$ ), o limite superior  $\lambda = 0.22$  (que corresponde a  $M^*/M = 0.80$  e

$K = 213.5MeV$ ) e o valor intermediário  $\lambda = 0.11$  (que corresponde a  $M^*/M = 0.76$  e  $K = 221.6MeV$ ). Os resultados são mostrados nas figuras 4.7 ( $\lambda = 0.07$ ), 4.9 ( $\lambda = 0.11$ ) e 4.11 ( $\lambda = 0.22$ ). Essas figuras mostram o comportamento do índice adiabático  $\Gamma$  em função da densidade de energia  $\varepsilon$ .

Para densidades logo acima da densidade de saturação ( $0.17fm^{-3}$ ), verifica-se que a equação de estado é mais rígida, de modo que  $\Gamma$  é bastante maior do que o limite  $\Gamma = 4/3$ . Porém, com a aparição dos híperons, a suavização da equação de estado é manifestada através da considerável diminuição do coeficiente adiabático.

Como podemos ver nas figuras, o coeficiente adiabático baixa em cada densidade correspondente ao limiar para criação de um novo híperon.

Nas figuras 4.6, 4.8 e 4.10, apresentamos, para os modelos correspondentes aos mesmos valores do parâmetro ajustável  $\lambda$ , a distribuição das populações relativas de partículas ( $\rho_{part}/\rho$ ) em função da densidade. Comparando essas figuras com aquelas que representam o comportamento de  $\Gamma$ , fica evidente a relação entre o surgimento de novas partículas no sistema, o abaixamento da energia e a conseqüente queda no valor do coeficiente adiabático.

Por fim, na figura 4.12, vemos como a densidade limiar de criação de cada partícula varia em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ . Conforme dito na subseção 2.6.7, a aparição das diferentes espécies de partículas presentes no sistema não se dá, simplesmente, na ordem crescente de suas massas.

O múon, por ser um lépton e, portanto, não ter sua energia limiar de criação dependente de fatores como isospin, constantes de acoplamento mesônicas etc., surge no sistema sempre em uma densidade em torno de  $0.15fm^{-3}$ .

Já os híperons, sendo bárions, estão sujeitos a todos esses fatores, e, por conseguinte, a energia limiar de cada um deles varia bastante em função do parâmetro  $\lambda$  escolhido. Assim, a ordem de aparição dos híperons também não se mantém sempre a mesma. Todavia, para o intervalo de validade do parâmetro ajustável ( $0.07 < \lambda < 0.22$ ), a ordem de aparição dos híperons não se altera:  $\Lambda$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$  e  $\Xi^0$ .

Note-se ainda que, para maiores valores de  $\lambda$ , os híperons tendem a surgir no sistema em densidades cada vez mais altas. Esse fato pode ser explicado observando-se que, quanto maior o parâmetro  $\lambda$ , mais suave é a equação de estado resultante (menor o módulo de compressão  $K$  associado).



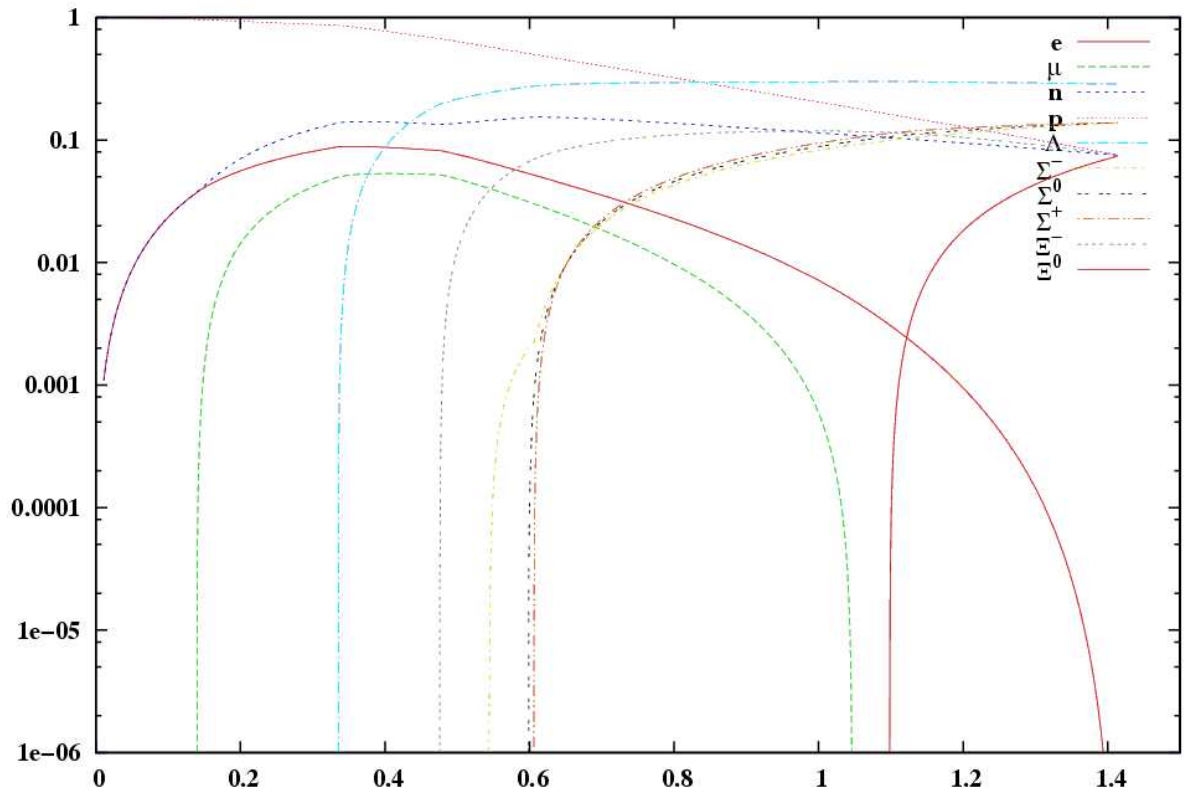


Figura 4.6: Populações relativas das partículas presentes na matéria hadrônica de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável, em função da densidade total ( $\lambda = 0.07$ ). A densidade bariônica total (eixo horizontal) está em  $fm^{-3}$ .

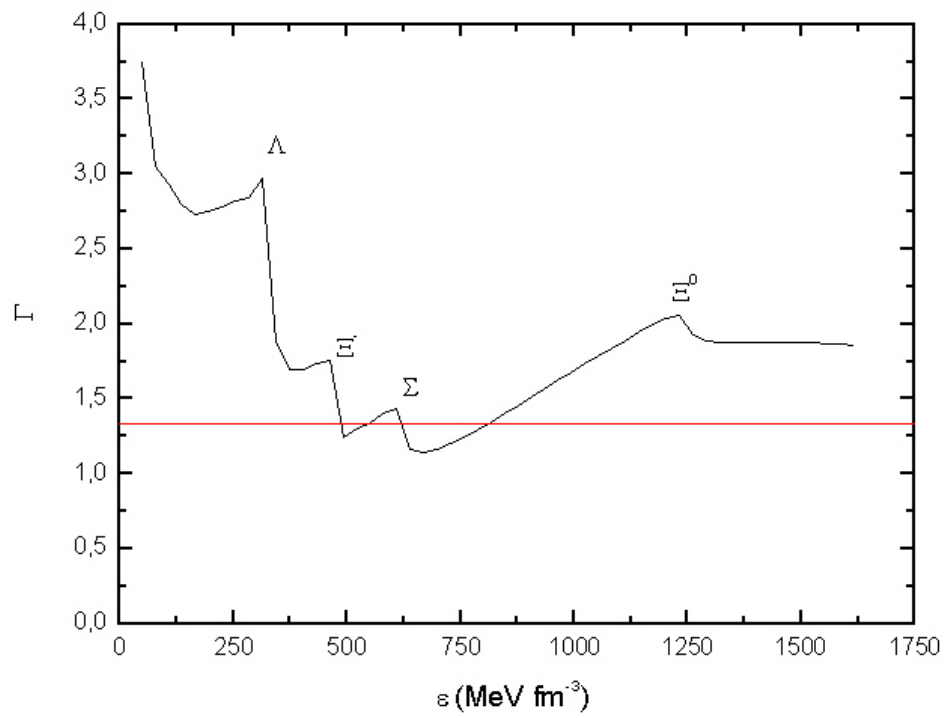


Figura 4.7: Índice adiabático da matéria hadrônica de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável, em função da densidade de energia  $\varepsilon$  ( $\lambda = 0.07$ ). A linha horizontal vermelha assinala o limite newtoniano para estabilidade ( $\Gamma > 4/3$ ).

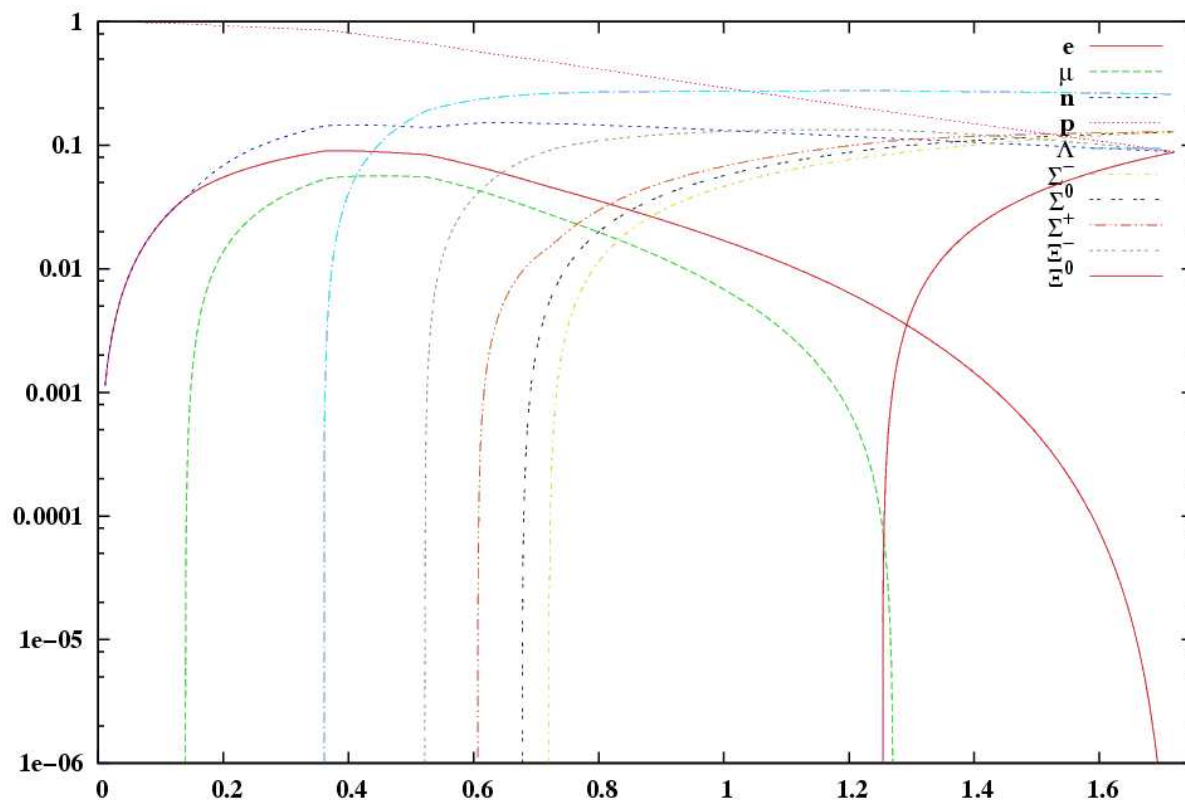


Figura 4.8: Populações relativas das partículas presentes na matéria hadrônica de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável, em função da densidade total ( $\lambda = 0.11$ ). A densidade bariônica total (eixo horizontal) está em  $fm^{-3}$ .

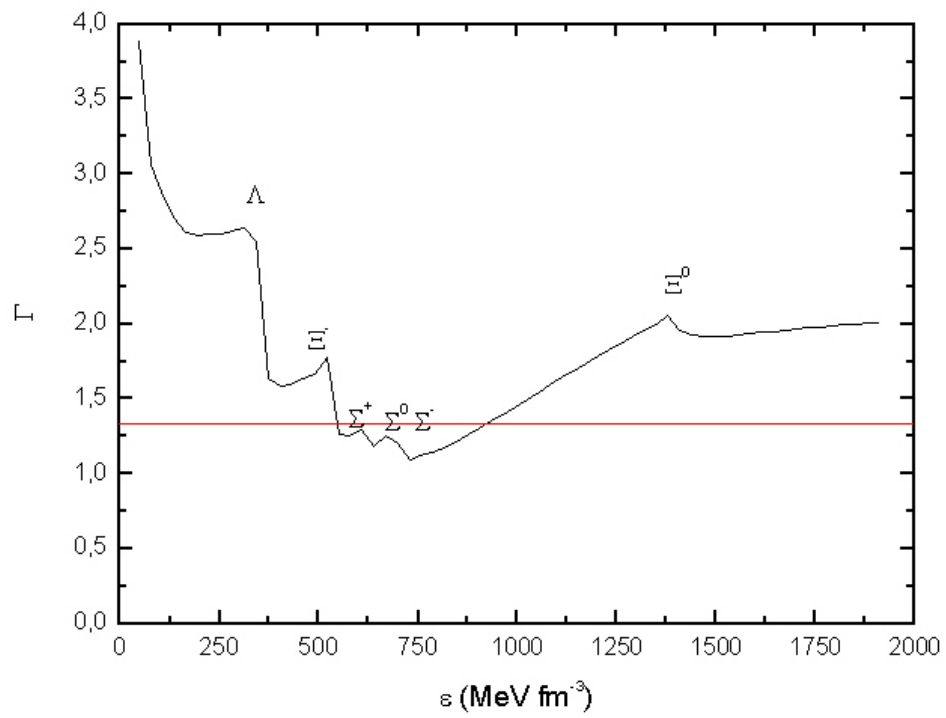


Figura 4.9: Índice adiabático da matéria hadrônica de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável, em função da densidade de energia  $\varepsilon$  ( $\lambda = 0.11$ ). A linha horizontal vermelha assinala o limite newtoniano para estabilidade ( $\Gamma > 4/3$ ).

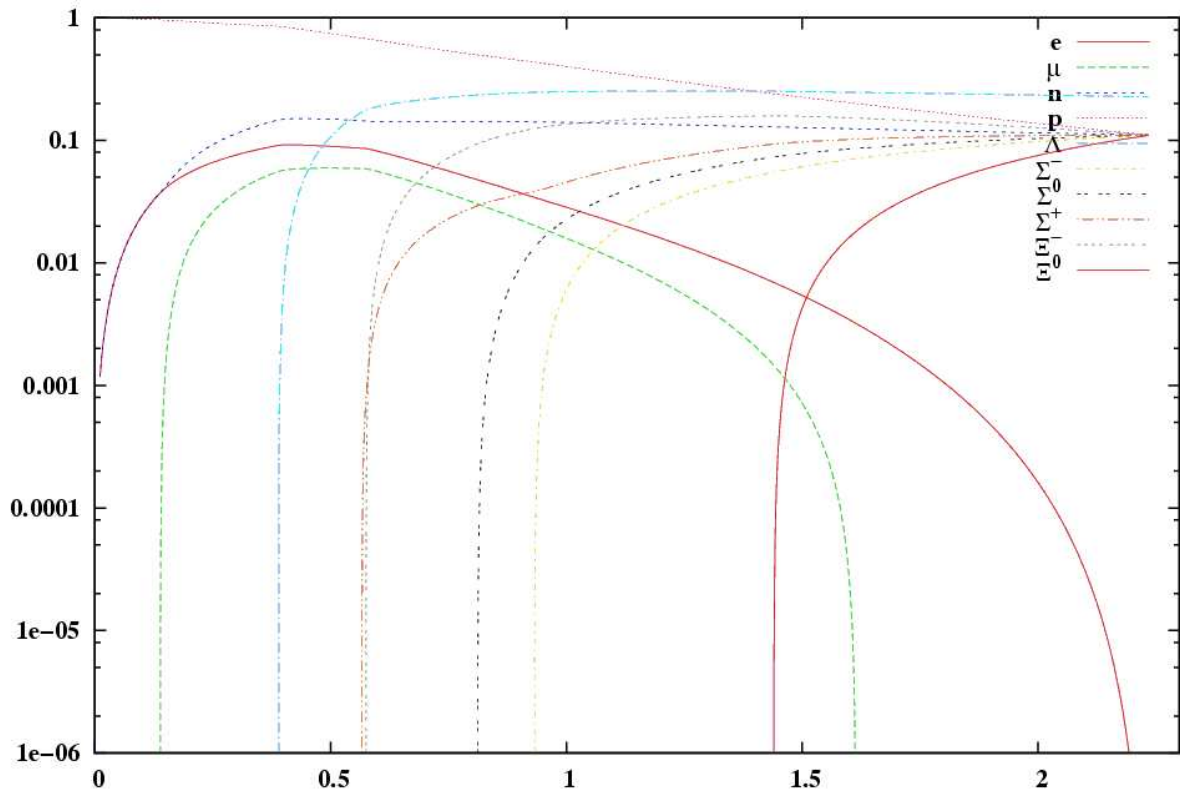


Figura 4.10: Populações relativas das partículas presentes na matéria hadrônica de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável, em função da densidade total ( $\lambda = 0.22$ ). A densidade bariônica total (eixo horizontal) está em  $fm^{-3}$ .

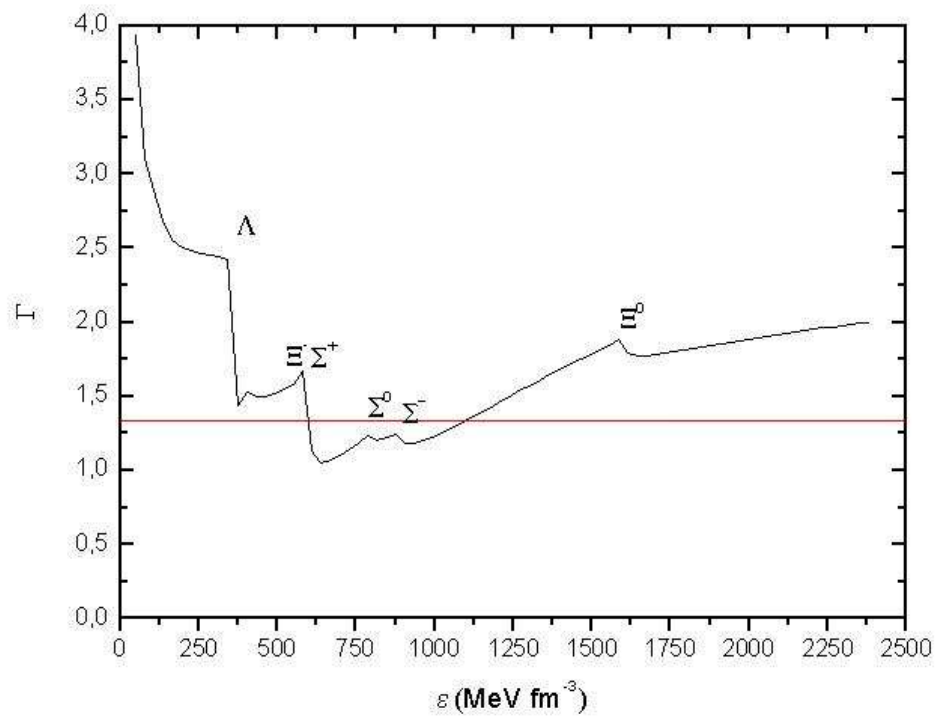


Figura 4.11: Índice adiabático da matéria hadrônica de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável, em função da densidade de energia  $\varepsilon$  ( $\lambda = 0.22$ ). A linha horizontal vermelha assinala o limite newtoniano para estabilidade ( $\Gamma > 4/3$ ).

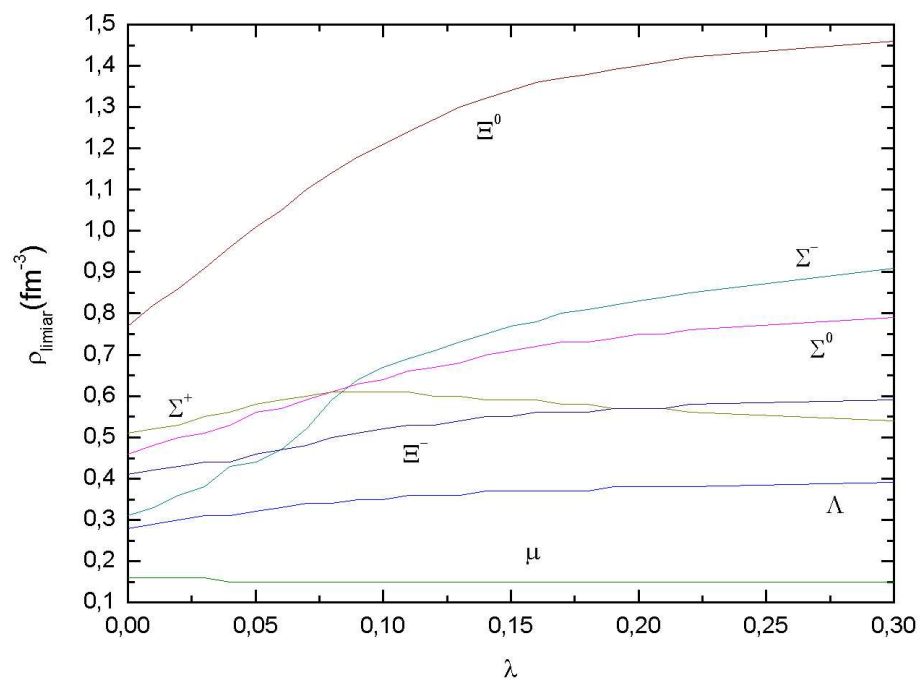


Figura 4.12: Densidade limiar de criação de partículas na versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável, em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ .

### 4.4.3 Coeficiente Adiabático de uma Estrela Híbrida

Utilizando o programa computacional apresentado na seção E.8 do Apêndice E (Programa 8), calculamos, também, o coeficiente adiabático  $\Gamma$  em função da densidade de energia  $\varepsilon$  (em  $MeV fm^{-3}$ ) para uma equação de estado com transição de fase de matéria hadrônica para matéria de quarks livres (QGP). Os resultados são apresentados na Fig.4.13. Para confecção desse gráfico, utilizamos a equação de estado mostrada na Fig.4.4 (matéria hadrônica descrita pela versão escalar do modelo com acoplamento derivativo ajustável com  $\lambda = 0.07$ ).

Vemos que, até a densidade de transição (assinalada pelo ponto H), o coeficiente adiabático é decrescente, como no caso anterior, e consideravelmente maior do que o limite newtoniano de estabilidade  $\Gamma = 4/3$  (indicado pela linha vermelha). A seguir, durante a fase mista, há uma descontinuidade em  $\Gamma$ . Na fase de quarks livres,  $\Gamma$  tem valores maiores do que aqueles previstos para a fase hadrônica, mas também decresce continuamente, sem, porém, jamais atingir valores mais baixos do que aquele estabelecido pelo critério de estabilidade.

Essa descontinuidade é intrínseca ao modelo utilizado para a transição de fase, ou seja, é uma consequência direta do critério de Gibbs, utilizado na modelagem da transição *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP*. Como vimos, esse critério estabelece que, durante a transição, a pressão permanece constante, o que implica  $dp/d\varepsilon = 0$ .

Levando-se esse resultado à definição do coeficiente adiabático  $\Gamma$  (equação (4.35)), vem que  $\Gamma = 0$ . Esse resultado é consistente, ainda, com a equação termodinâmica que rege os processos adiabáticos (equação (4.20)), segundo a qual teremos  $p = constante$  se e somente se  $V^\Gamma = 1$ , o que decorre naturalmente de  $\Gamma = 0$ .

Todavia, fica claro que, durante a fase mista,  $\Gamma < 4/3$ , o que implica instabilidade. Esse fato é, a rigor, apenas um indicativo do que já afirmamos anteriormente: a descrição da transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP* como uma transição de primeira ordem não é, de fato, a escolha mais adequada e realista, embora, como veremos, possa ser bastante elucidativa por sua simplicidade e capaz de fornecer resultados consistentes.

Para uma transição de fase de segunda ordem, teríamos, conforme esquematizado na Fig.4.2, uma pressão  $p$  sempre crescente na fase mista, o que implicaria  $dp/d\varepsilon > 0$ . Assim, teríamos, na Fig.4.13, no lugar da descontinuidade, uma curva unindo os pontos H e Q. De qualquer modo, durante a fase mista, teremos uma elevação considerável e rápida no coeficiente adiabático do sistema ( $\Gamma$  “salta” de valores da ordem de 3, no fim da fase hadrônica, para valores da ordem de 7 no início da fase de quarks livres).

Tomando-se outros valores para o parâmetro ajustável  $\lambda$  no modelo para a fase hadrônica, os resultados são bastante similares.



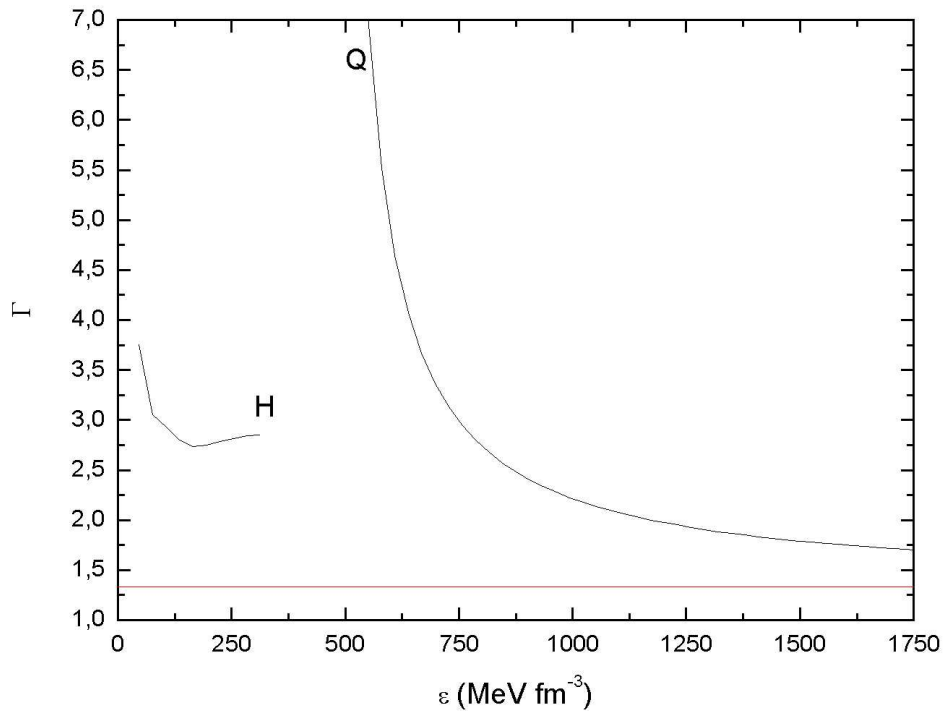


Figura 4.13: Índice adiabático de um sistema híbrido, com transição de fase *matéria hadrônica*  $\rightarrow$  *QGP*. A matéria hadrônica é modelada de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento ajustável ( $\lambda = 0.07$ ). A matéria de quarks livres é modelada de acordo com o modelo de sacola do MIT com  $B^{1/4} = 160 \text{ MeV}$ . A linha horizontal vermelha assinala o limite newtoniano para estabilidade ( $\Gamma > 4/3$ ).

## 4.5 Massa e Raio das Estrelas

### 4.5.1 Massa e Raio de Estrelas de Nêutrons

Conforme explicado no Capítulo 1 desta dissertação, o conhecimento da equação de estado obtida a partir dos nossos modelos permite, através da integração das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (equações (1.13) e (1.14)), que obtenhamos o raio máximo e a massa máxima que uma estrela de nêutrons (ou uma estrela híbrida) apresenta. Essas equações representam a redução das equações de campo de Einstein da relatividade geral para o interior de objetos estelares esféricos, estáticos e relativísticos.

Efetuamos o cálculo dessas quantidades (o raio máximo e a massa máxima) para diferentes equações de estado, considerando-se a versão escalar do modelo com acoplamento ajustável ( $\beta = \gamma = 0$  e  $\lambda$  variando de 0 a 2) na descrição da matéria hadrônica. Os resultados são apresentados na Fig.4.14 e na Fig.4.15. O programa computacional correspondente se encontra na seção E.9 do Apêndice E (Programa 9).

Observamos que tanto o raio máximo quanto a massa máxima das estrelas de nêutrons decrescem com o aumento do parâmetro ajustável  $\lambda$ . Os valores mais elevados para essas grandezas são obtidos para  $\lambda = 0$  (o que, como vimos, corresponde ao modelo de Walecka), sendo, respectivamente,  $13.4km$  e  $1.93M_{\odot}$ ; para os valores mais elevados de  $\lambda$ , os valores dessas grandezas tendem a se manter constantes, em torno de  $11.5km$  e  $1.21M_{\odot}$  respectivamente.

Dentro da faixa fenomenológica de valores para o parâmetro  $\lambda$  (valores de  $\lambda$  que implicam  $0.7 < M^*/M < 0.8$  e  $200MeV < K < 300MeV$ ), isto é,  $0.07 < \lambda < 0.22$ , os valores de raio máximo variam entre  $12.1km$  e  $11.6km$  (para  $\lambda = 0.07$  e  $\lambda = 0.22$  respectivamente); já os valores de massa máxima variam entre  $1.44M_{\odot}$  e  $1.21M_{\odot}$  (para  $\lambda = 0.07$  e  $\lambda = 0.22$  respectivamente).

Como já ressaltamos anteriormente (na seção 4.3), se tomarmos a versão escalar do modelo com acoplamento derivativo ajustável com  $\lambda = 0.07$ , temos, para os núcleons, uma razão entre massa efetiva e massa livre  $M^*/M = 0.71$  e, para a matéria nuclear, um módulo de compressibilidade  $K = 248MeV$ , valores em excelente concordância com as medidas mais modernas para essas grandezas [86][87]. Agora, além disso, constatamos que essa mesma escolha de modelo e parâmetros reproduz bastante bem o raio e a massa das estrelas de nêutrons.

Como discutido no Capítulo 1, existem cerca de 730 pulsares conhecidos, dos quais as massas de mais de 20 são conhecidas. Desses, a maioria tem uma massa em torno de  $1.40M_{\odot}$  (ver Fig.1.8), o que concorda de maneira notável com os resultados obtidos para a versão escalar do modelo com acoplamento derivativo ajustável com  $\lambda = 0.07$ . Maiores valores de  $\lambda$  fazem o valor da massa máxima prevista ser menor do que o valor observacional.

Encerrando esta subseção, apresentamos, ainda, os resultados do desvio para o ver-

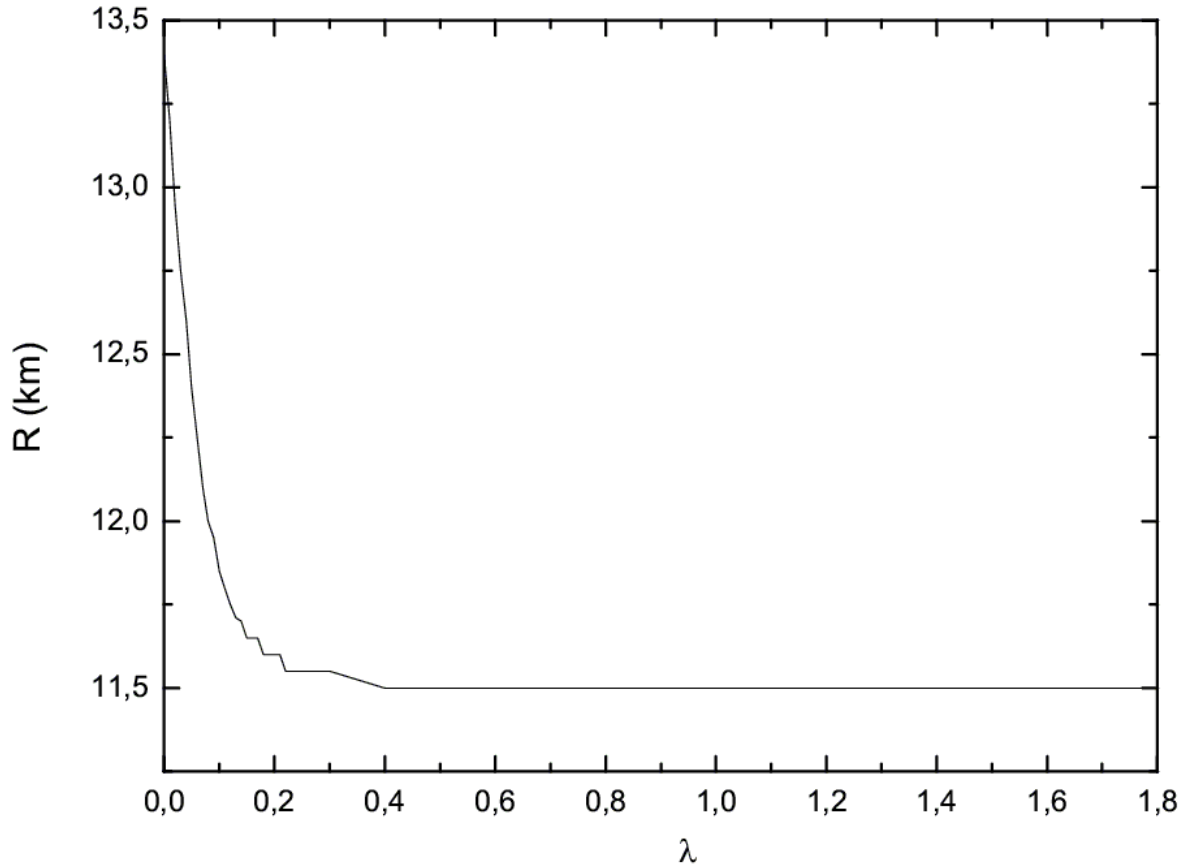


Figura 4.14: Raio máximo de estrelas de nêutrons (em  $km$ ) em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ , de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento derivativo ajustável.

melho (*redshift* gravitacional) de estrelas de nêutrons em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ , de acordo com a versão escalar do modelo com acoplamento derivativo ajustável, calculados de acordo com (1.31) (Fig.4.16).

Observamos que os valores do *redshift* gravitacional decrescem com o aumento de  $\lambda$ . O valor mais elevado para essa grandeza é obtido para  $\lambda = 0$  (o que, como vimos, corresponde ao modelo de Walecka), sendo  $z = 0.31$ ; para os valores mais elevados de  $\lambda$ , o valor dessa grandeza tende a se manter constante, em torno de  $z = 0.20$ . Cabe ressaltar que todos os valores respeitam o limite estabelecido  $z < 2$  (ver subseção 1.4.4).

Dentro da faixa fenomenológica de valores para o parâmetro  $\lambda$ , os valores de  $z$  variam entre 0.24 e 0.20 (para  $\lambda = 0.07$  e  $\lambda = 0.22$  respectivamente).

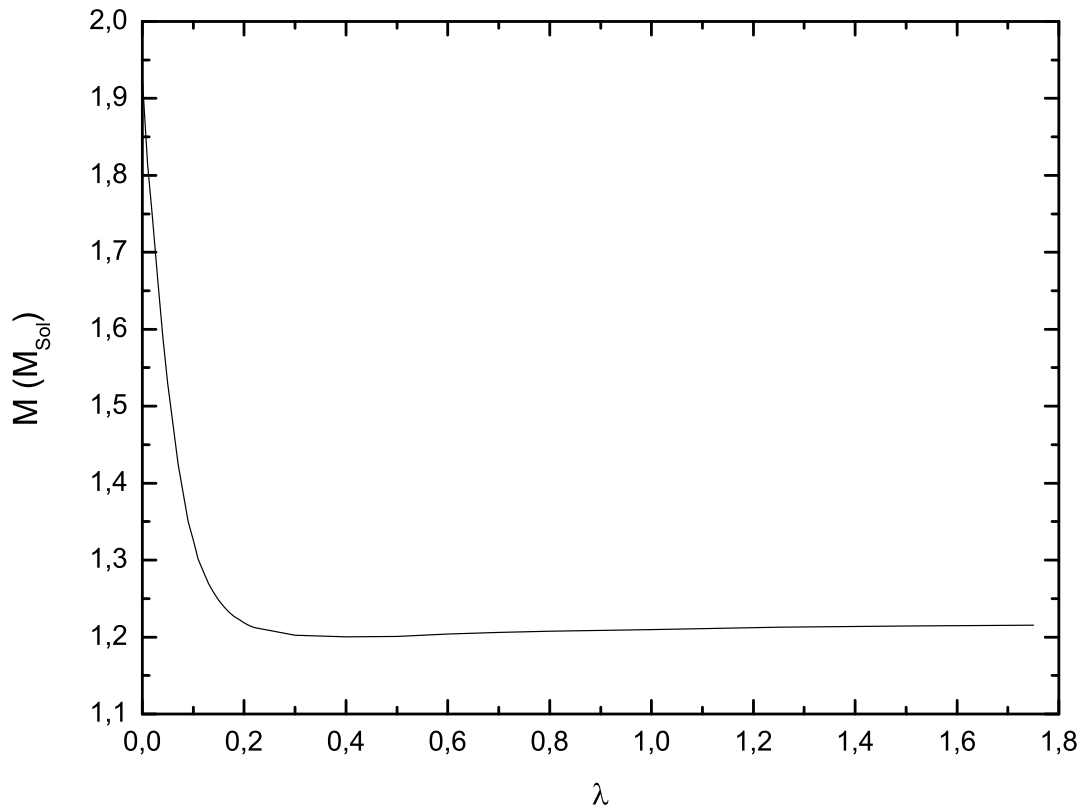


Figura 4.15: Massa máxima de estrelas de nêutrons (em massas solares  $M_{Sol}$ ) em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ , de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento derivativo ajustável.

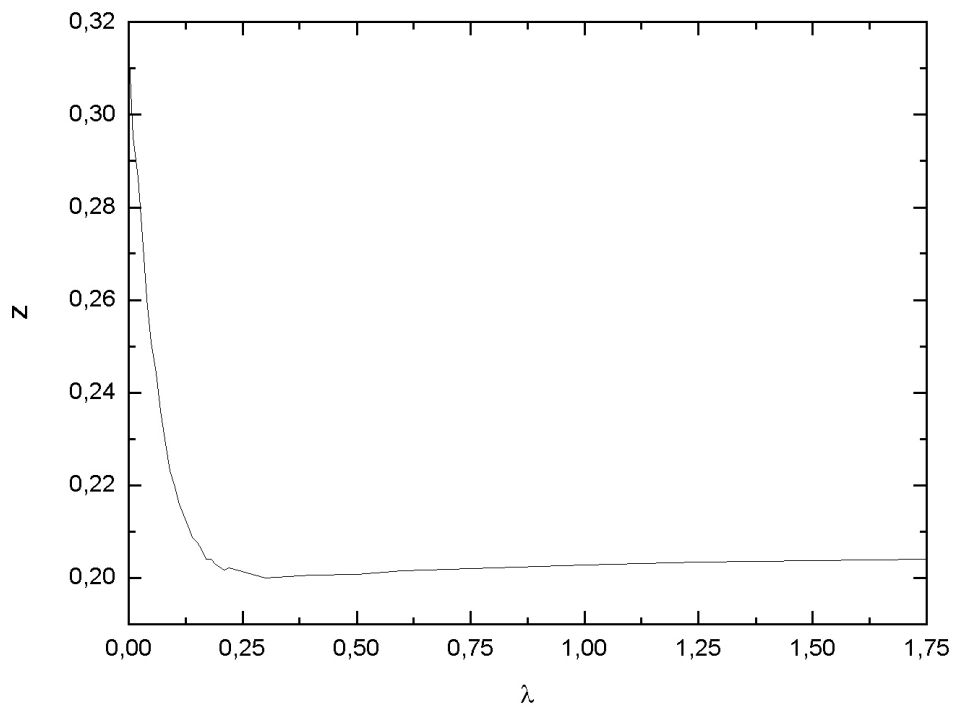


Figura 4.16: Desvio para o vermelho (*redshift* gravitacional) de estrelas de nêutrons em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ , de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento derivativo ajustável.

## 4.5.2 Massa e Raio de Estrelas Híbridas

Efetuamos, por fim, o cálculo do raio máximo e da massa máxima de estrelas híbridas (estrelas de nêutrons com um caroço de quarks livres em seu interior) para diferentes equações de estado, considerando-se a versão escalar do modelo com acoplamento ajustável ( $\beta = \gamma = 0$  e  $\lambda$  variável) na descrição da matéria hadrônica e o modelo de sacola do MIT com constante de sacola  $B^{1/4} = 160\text{MeV}$  na descrição da matéria de quarks. Comparamos esses resultados com aqueles obtidos para estrelas de nêutrons. Os resultados são apresentados na Fig.4.17 e na Fig.4.18.

Dentro da faixa fenomenológica de valores para o parâmetro  $\lambda$ , os valores de raio máximo das estrelas híbridas variam entre  $15.7\text{km}$  e  $15.0\text{km}$  (para  $\lambda = 0.07$  e  $\lambda = 0.22$  respectivamente); já os valores de massa máxima variam entre  $1.73M_{\odot}$  e  $1.45M_{\odot}$  (para  $\lambda = 0.07$  e  $\lambda = 0.22$  respectivamente).

Via de regra, podemos dizer que, em média, com a presença de um caroço de quarks livres, a estrela tem seu raio aumentado em cerca de 30% e sua massa aumentada em cerca de 20%. Isso quer dizer, basicamente, que uma estrela tem que ser mais “dura” para sustentar um caroço de quarks.

Como dissemos, a maioria dos pulsares tem uma massa em torno de  $1.40M_{\odot}$  (Fig.1.8); todavia, alguns pulsares observados mais recentemente apresentam massas consideravelmente mais elevadas, como o pulsar Vela X-1, de massa  $1.77^{+0.27}_{-0.21}M_{\odot}$ . Essas observações têm levado a uma readequação de teorias para aceitar massas desse valor mais elevado. Com os resultados aqui apresentados, podemos dizer que uma suposição teórica capaz de explicar tais medidas de massas é a presença de um caroço de quarks no interior dessas estrelas.

Em especial, se tomarmos a versão escalar do modelo com acoplamento derivativo ajustável com  $\lambda = 0.07$ , temos, para os núcleons, uma razão entre massa efetiva e massa de livre  $M^*/M = 0.71$  e, para a matéria nuclear, um módulo de compressibilidade  $K = 248\text{MeV}$ , valores em excelente concordância com as medidas mais modernas para essas grandezas [86][87]. Constatamos anteriormente, também, que essa mesma escolha de modelo e parâmetros reproduz bastante bem o raio e a massa das estrelas de nêutrons. Agora, verificamos que esse mesmo modelo para a fase hadrônica, tomado em conjunto com um simples modelo de sacola do MIT para estabelecer a equação de estado da matéria constituinte de uma estrela híbrida, é capaz de reproduzir, com precisão aceitável, a massa do pulsar Vela X-1, a qual, sem a suposição da presença de um caroço de quarks livres, não pode ser reproduzida em nosso arcabouço teórico.

Encerrando esta subseção, apresentamos, ainda, os resultados do desvio para o vermelho (*redshift* gravitacional) de estrelas de híbridas em função do parâmetro ajustável  $\lambda$  (Fig.4.19).

Observamos que os valores do *redshift* gravitacional decrescem com o aumento de  $\lambda$ . Dentro da faixa fenomenológica de valores para o parâmetro  $\lambda$ , os valores de  $z$  variam

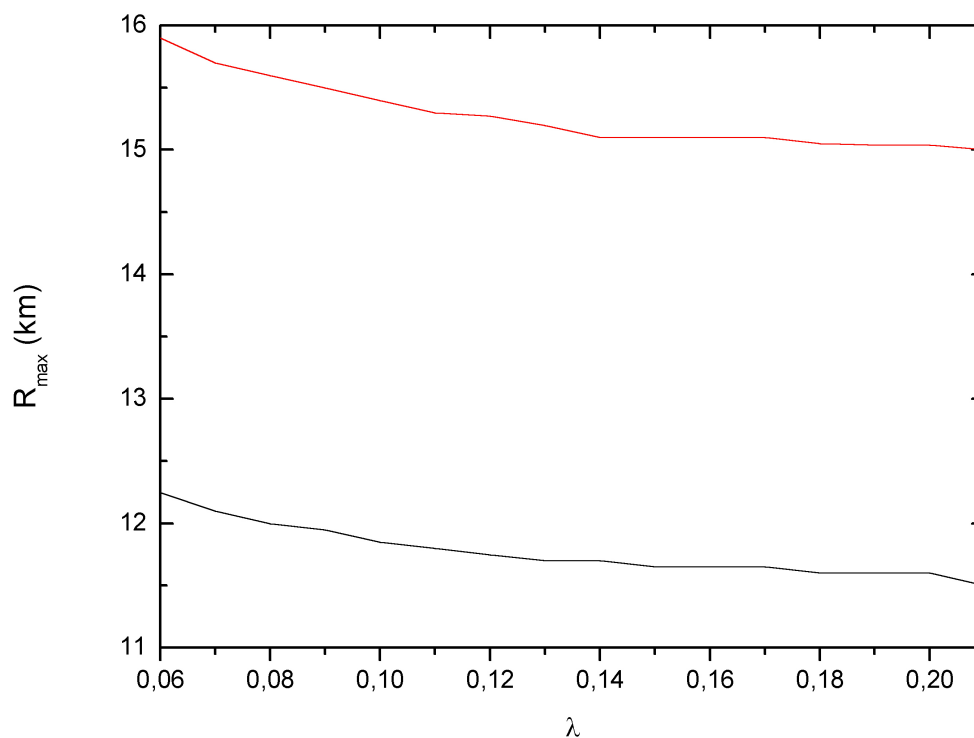


Figura 4.17: Raio máximo de estrelas de nêutrons (curva preta) e estrelas híbridas (curva vermelha) em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ , de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento derivativo ajustável.

entre 0,21 e 0,18 (para  $\lambda = 0,07$  e  $\lambda = 0,22$  respectivamente).

Cabe ressaltar, mais uma vez, que todos os valores respeitam o limite estabelecido  $z < 2$ .

Via de regra, podemos dizer que, em média, com a presença de um caroço de quarks livres, a estrela tem seu *redshift* gravitacional diminuído em cerca de 10%.

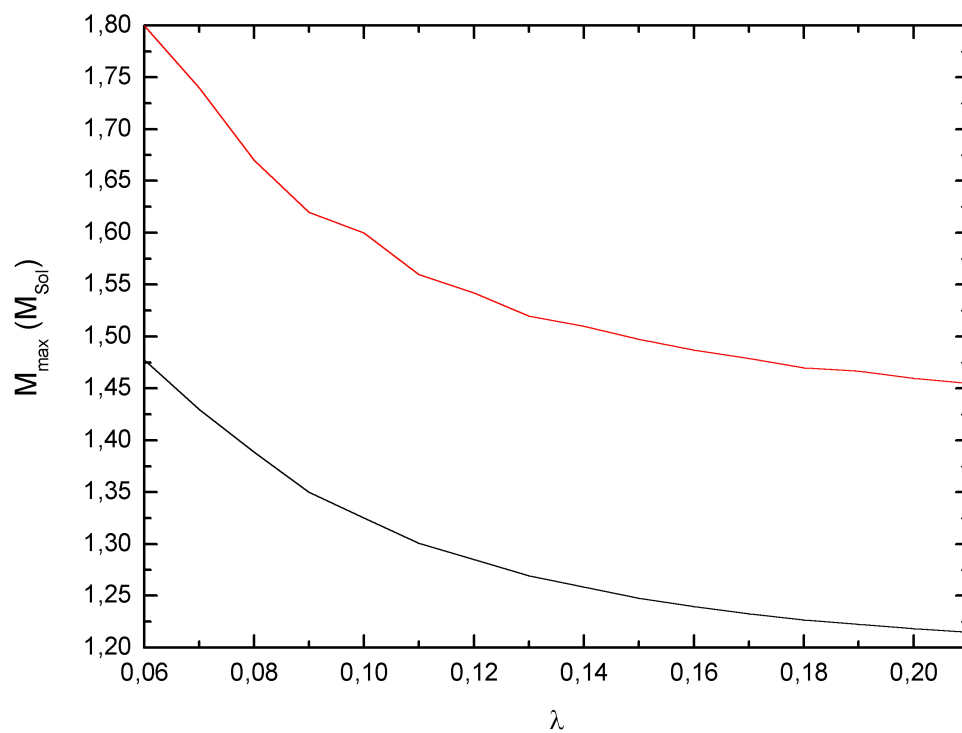


Figura 4.18: Massa máxima de estrelas de nêutrons (curva preta) e estrelas híbridas (curva vermelha) em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ , de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento derivativo ajustável.



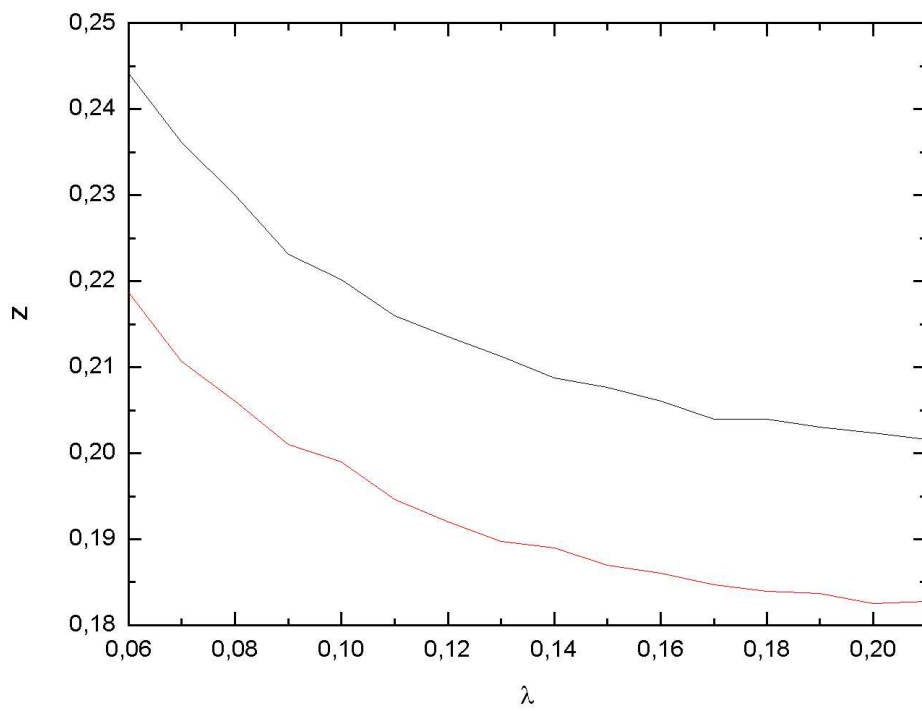


Figura 4.19: Desvio para o vermelho (*redshift* gravitacional) de estrelas de nêutrons (curva preta) e estrelas híbridas (curva vermelha) em função do parâmetro ajustável  $\lambda$ , de acordo com a versão escalar (E) do modelo com acoplamento derivativo ajustável.

# Conclusões e Perspectivas

Desenvolvemos, neste trabalho, um formalismo eficiente na descrição da matéria existente em estrelas de nêutrons, considerando a presença de híperons, núcleons, léptons e mésons, além de quarks, posteriormente. Consideramos o limite de temperatura nula, pois a temperatura típica de uma estrela de nêutrons é desprezível na escala de energia nuclear.

Concentramos nosso estudo nas propriedades de um modelo efetivo com acoplamento méson-núcleon ajustável por parâmetros matemáticos  $(\lambda, \beta, \gamma)$ , o qual consegue reproduzir os resultados dos modelos de Walecka, ZM e ZM3.

Com a introdução de graus de liberdade de quarks na equação de estado da matéria, através do modelo de sacola MIT, definimos, com base no critério de Gibbs, uma transição de fase na qual a matéria nuclear se decompõe em um plasma de quarks e glúons (QGP). Essa nova equação de estado da matéria influencia as soluções das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, determinando, assim, as propriedades estáticas globais das chamadas estrelas híbridas, estrelas de nêutrons com quarks livres em seu interior.

Nesse contexto, dois aspectos foram destacados: a influência dos parâmetros do modelo com acoplamento ajustável sobre a densidade em que ocorre a transição de fase no interior da estrela e a repercussão da existência de um caroço de quarks sobre o coeficiente adiabático da estrela.

Relativamente ao primeiro aspecto, observamos que, uma particular versão do modelo com acoplamento derivativo ajustável (aquela com parâmetros  $\lambda$  variável,  $\beta = \gamma = 0$ ) é capaz de reproduzir valores fenomenológicos da massa efetiva do núcleon e do módulo de compressibilidade da matéria nuclear se tomarmos  $0.07 < \lambda < 0.22$ . O valor de  $\lambda$  que aparentemente melhor reproduz os valores fenomenológicos mais aceitos atualmente para a massa efetiva do núcleon ( $M^* = 0.71M$ ) e para o módulo de compressibilidade da matéria nuclear ( $K = 248MeV$ ) é  $\lambda = 0.07$ . Considerando-se as equações de estado para a matéria hadrônica obtidas a partir dos valores do parâmetro  $\lambda$  tomados dentro dessa faixa fenomenológica, foi possível estabelecer, em todos eles, uma transição de fase de primeira ordem, de acordo com o critério de Gibbs, para uma fase de quarks livres, um plasma de quarks e glúons, descrito através do modelo de sacola do MIT com constante de sacola  $B^{1/4} = 160MeV$ . Dentro da faixa fenomenológica do parâmetro ajustável  $\lambda$ , a densidade de transição aumenta continuamente de cerca de  $0.30fm^{-3}$  até um máximo

de  $0.38 fm^{-3}$  (esses valores são da ordem de duas vezes a densidade da matéria nuclear na saturação). Ou seja: para menores valores do parâmetro  $\lambda$ , temos menores valores da densidade de transição. Como os menores valores de  $\lambda$  correspondem a maiores valores para o módulo de compressibilidade, podemos, então, dizer que, quanto maior o módulo de compressibilidade da matéria hadrônica (ou quanto mais rígida a equação de estado que a descreve), menor a densidade em que se estabelece a transição de fase.

Quanto ao segundo aspecto, observamos que, na matéria hadrônica pura, para densidades logo acima da densidade de saturação ( $0.17 fm^{-3}$ ), a equação de estado é mais rígida, de modo que o coeficiente adiabático  $\Gamma$  é bastante maior do que o limite newtoniano  $\Gamma = 4/3$ . Porém, com a aparição dos híperons, a suavização da equação de estado é manifestada através da considerável diminuição do coeficiente adiabático, que tem seu valor reduzido em cada densidade correspondente ao limiar para criação de um novo híperon. Isso faz com que, para alguns pequenos intervalos de densidade, o coeficiente adiabático seja menor do que o limite newtoniano. Além disso, no tocante à presença dos híperons, verificamos que, para o intervalo de validade do parâmetro ajustável ( $0.07 < \lambda < 0.22$ ), a ordem de aparição dos híperons na matéria hadrônica não se altera:  $\Lambda$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$  e  $\Xi^0$ . Quando se estabelece uma transição de fase da matéria hadrônica para matéria de quarks livres (QGP), observamos uma discontinuidade no coeficiente adiabático ou, mais precisamente, uma faixa de densidade (correspondente à fase mista) em que  $\Gamma \rightarrow 0$ . Esse fato é consequência direta do critério de Gibbs, utilizado, nesta dissertação, para modelagem da transição de fase. Para uma transição de fase de segunda ordem, mais realista, observaríamos uma elevação considerável e rápida no coeficiente adiabático do sistema ( $\Gamma$  “salta” de valores da ordem de 3, no fim da fase hadrônica, para valores da ordem de 7 no início da fase de quarks livres).

Na solução das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, observamos que, para estrelas de nêutrons que obedeçam equações de estado determinadas a partir da versão com  $\lambda$  variável e  $\beta = \gamma = 0$  do modelo com acoplamento derivativo ajustável, com o parâmetro  $\lambda$  dentro do limite fenomenológico, o raio máximo  $R_{max}$  situa-se entre  $12.1 km$  e  $11.6 km$ . Já a massa máxima está no intervalo  $1.21 M_{\odot} < M_{max} < 1.44 M_{\odot}$ , sendo que esse valor superior concorda bastante bem com os valores observacionais estabelecidos para as massas dos pulsares. Esse maior valor de massa corresponde a  $\lambda = 0.07$ , exatamente o valor do parâmetro  $\lambda$  que melhor reproduz os valores fenomenológicos mais aceitos atualmente para a massa efetiva do núcleon e para o módulo de compressibilidade da matéria nuclear. Para estrelas híbridas, tais valores são  $15.0 km < R_{max} < 15.7 km$  e  $1.45 M_{\odot} < M_{max} < 1.73 M_{\odot}$ . Mais uma vez, esse valor superior, correspondente a  $\lambda = 0.07$ , concorda com alguns pulsares observados mais recentemente, os quais apresentam massas mais elevadas, como, por exemplo, o pulsar Vela X-1, de massa  $1.77^{+0.27}_{-0.21} M_{\odot}$ . Portanto, podemos afirmar que uma suposição teórica capaz de explicar tais medidas mais elevadas de massas dos pulsares é a presença de um caroço de quarks no interior dessas estrelas. Via de regra, podemos

dizer que, em média, com a presença de um caroço de quarks livres, a estrela tem seu raio aumentado em cerca de 30% e sua massa aumentada em cerca de 20%. Ainda, o desvio para o vermelho (*redshift* gravitacional) das estrelas híbridas é, em média, 10% menor em comparação com as estrelas de nêutrons.

Podemos destacar, por fim, cinco perspectivas para a continuidade deste trabalho.

Primeiramente, pretendemos incorporar de maneira consistente a rotação no estudo da estrutura das estrelas híbridas. A propriedade de rotação é muito importante para realizarmos um estudo completo dessas estrelas, mesmo porque os dados disponíveis são obtidos, principalmente, a partir da observação de pulsares, ou seja, estrelas de nêutrons em rotação. Resultados preliminares mostram que, com a rotação, ocorre um aumento da massa máxima das estrelas de nêutrons, bem como um aumento do raio máximo. Esse aumento pode ser de até 20% do valor inicial para estrelas estáticas. O pulsar com maior massa medida até hoje tem uma massa de  $2.1M_{\odot}$ , medida com erro de  $0.2M_{\odot}$  [93]. Portanto, efeitos de rotação podem elevar a massa máxima prevista para estrelas híbridas nesta dissertação ( $1.73M_{\odot}$ ) para até  $2.0M_{\odot}$ , o que explicaria perfeitamente a supra-citada medida.

Uma segunda abordagem consiste em um estudo mais abrangente da variação dos parâmetros de ajuste do modelo com acoplamento ajustável. No presente trabalho, por simplicidade e seguindo a abordagem realizada por Taurines em seu trabalho original, estudamos o caso em que  $\lambda$  é variável e  $\beta = \gamma = 0$  e o caso em que os três parâmetros assumem diferentes valores, com o vínculo  $\lambda = \beta = \gamma$ ; em uma próxima etapa, porém, pretendemos abandonar essa condição e permitir que os três parâmetros variem independentemente, o que trará maior liberdade de escolha para os valores que melhor se adequam à fenomenologia. Estudos preliminares mostram que, para determinação do módulo de compressibilidade e da massa efetiva do núcleon na saturação, o parâmetro  $\gamma$  não tem influência [103][106]. Isso ocorre porque esse parâmetro está associado ao acoplamento do méson  $\varrho$  com os bárions, e, como essas duas grandezas fundamentais são determinadas considerando-se matéria nuclear simétrica, o parâmetro matemático que modula a intensidade do acoplamento do méson  $\varrho$  (associado com a assimetria de isospin) não terá influência no cálculo quantitativo. Além disso, verificou-se que não há valores negativos dos parâmetros  $\lambda$  e  $\beta$  que reproduzam uma massa efetiva e um módulo de compressibilidade na faixa de valores aceitáveis de acordo com a experiência. Para valores positivos de  $\lambda$  e  $\beta$ , valores aceitáveis de módulo de compressão e massa efetiva são obtidos apenas para  $\beta < 1.35$ . Para cada valor adequado de  $\beta$ , há uma pequena faixa de valores correspondentemente aceitáveis para o parâmetro  $\lambda$ . Na modelagem da matéria constituinte das estrelas de nêutrons e nas soluções das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, podemos dizer que a independência dos parâmetros não traz diferenças significativas (os valores de massa máxima e raio máximo calculados para as estrelas de nêutrons, por exemplo, são aproximadamente os mesmos obtidos para o modelo escalar abordado nesta

dissertação). Para maiores detalhes sobre esses resultados, ver a referência [106].

Uma terceira e importante linha de pesquisa está na elaboração de um modelo mais realista para o plasma de quarks e glúons e sua incorporação no estudo das estrelas híbridas. Tal modelo deverá se basear na recente descoberta feita pelos cientistas do RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) de que, na verdade, em vez de se comportar como um gás de quarks e glúons livres, como era esperado, a nova forma de matéria criada através de colisões de íons pesados parece se comportar mais como um líquido, movendo-se quase como se fosse um fluido perfeito.

Como quarta perspectiva, pretendemos estabelecer uma transição de fase mais suave, contando com uma fase mista em que os hádrons coexistam com os quarks. Nesse sentido, a implementação matematicamente rigorosa de uma transição de fase de segunda ordem é uma linha de trabalho promissora.

A quinta perspectiva é relacionar a existência da matéria de quarks no interior da estrela com o fenômeno de *glitches*. Os glitches são alterações repentinas na rotação dos pulsares, acarretando mudança detectável em seu período. Desde suas descobertas, os pulsares do Caranguejo e de Vela já produziram, cada um, mais de uma dezena de glitches com mudanças de período  $\Delta P/P$  da ordem de  $10^{-8}$  e  $10^{-6}$  respectivamente. Muitos mecanismos foram propostos na tentativa de explicar os glitches. Citaremos dois deles. Uma primeira proposta atribui os glitches ao momento angular armazenado em uma hipotética camada de nêutrons superfluidos em rotação no centro da estrela [94]. Outra proposta relaciona os glitches com a existência de uma fase mista de quarks e hádrons no interior da estrela [95][96][97][98]. Agora, porém, com a recente descoberta de que o plasma de quarks e glúons aparentemente se comporta como um fluido perfeito, será possível trabalhar conjuntamente com essas duas propostas de explicação para os glitches. Para tanto, consideraremos, apenas, que, no lugar de nêutrons superfluidos, temos o próprio plasma de quarks e glúons se comportando, agora, como fluido perfeito no caroço da estrela.

Resultados parciais desta dissertação estão na referência [102]. Esse artigo está também incluído no Apêndice D.

Diante de tantas perspectivas e de todas questões ainda em aberto expostas ao longo desta dissertação, não é exagero afirmar que o estudo da equação de estado da matéria nuclear e, em especial, de seu comportamento em altas densidades é inesgotável fonte de indagações para a ciência, maravilhando qualquer um que se aprofunde nessa vereda. Será esse sentimento que hoje experimentamos o mesmo que extasiava nossos remotos antepassados quando olhavam o céu repleto de estrelas? Terá nossa capacidade de se espantar com a natureza apenas descoberto uma nova forma de existir e transcender a si mesma? Encerramos com o seguinte trecho do texto *Imaginemos*, de Henry Cohen, que bastante tem a dizer sobre isso — se não somos plenamente capazes de compreender a ordem do universo, que possamos sempre nos surpreender e agradecer por ela:

Imaginemos um mundo sem ordem, em que ninguém possa prever a duração do dia ou o ritmo das marés. Imaginemos um universo em que os planetas deixem sua órbitas e viagem como meteoros pelos céus, um universo em que a lei da gravidade seja constantemente contrariada. Obrigado, Adonai, pela ordem maravilhosa da natureza, que rege as estrelas do céu e as partículas do átomo.

*Feci quod potui, faciant meliora potentes.*

# Apêndice A

## Unidades, Notação e Convenções

### A.1 Sistemas Natural e Relativístico de Unidades

No sistema natural de unidades (SN), a velocidade da luz,

$$c = 299792458 \text{ m/s}, \quad (\text{A.1})$$

e a constante da mecânica quântica,

$$\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}, \quad (\text{A.2})$$

são tomados iguais à unidade:

$$\hbar = c = 1. \quad (\text{A.3})$$

A conversão entre unidades dos sistemas internacional (SI) e natural é sintetizada na Tabela A.1.

quantidade física	unidade SI	unidade SN	fator de conversão SI $\rightarrow$ SN
distância	$m$	$m$	1
tempo	$s$	$m$	$c$
massa	$kg$	$m^{-1}$	$c/\hbar$
velocidade	$m/s$	adimensional	$1/c$
momentum linear	$kg \cdot m/s$	$m^{-1}$	$1/\hbar$
momentum angular	$kg \cdot m^2/s$	adimensional	$1/\hbar$
força	$kg \cdot m/s^2$	$m^{-2}$	$1/\hbar c$
energia	$kg \cdot m^2/s^2$	$m^{-1}$	$1/\hbar c$
ação	$kg \cdot m^2/s$	adimensional	$1/\hbar$
densidade de energia	$kg/(m \cdot s^2)$	$m^{-4}$	$1/\hbar c$
pressão	$kg/(m \cdot s^2)$	$m^{-4}$	$1/\hbar c$

**Tabela A.1:** Conversão de unidades entre os sistemas SI e SN.

O sistema natural de unidades é o mais utilizado em teoria de campos quânticos. Nesse sistema, a escolha  $\hbar = c = 1$  implica uma mudança nas unidades das grandezas físicas em comparação com o sistema internacional. Como as unidades das constantes  $\hbar$  e  $c$  são, respectivamente,  $M \cdot L^2/T$  e  $L/T$ , teremos  $T = L$  e  $M = 1/L$ <sup>1</sup>. Neste sistema, a densidade de energia, por exemplo, terá a mesma unidade da pressão:  $L^{-4}$ . Para se recuperar o valor no SI de uma grandeza expressa no SN, deve-se multiplicar a grandeza por uma combinação de  $\hbar$  e  $c$ . Como exemplo, vejamos o caso da energia. No SN, um valor de energia é dado por um número vezes  $1/L$ ; assim, para descobrirmos o valor dessa energia no SI, devemos multiplicar o valor de energia no SN por uma combinação de  $\hbar$  e  $c$  que reproduza a unidade de energia do SI ( $M \cdot L^2/T^2$ ). Assim, temos de resolver a equação abaixo:

$$[\hbar]^a [c]^b E_{SN} = E_{SI} \quad (\text{A.4})$$

$$\left(\frac{M \cdot L^2}{T}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \frac{1}{L} = \frac{M \cdot L^2}{T^2} .$$

Facilmente vê-se que  $a = b = 1$ . Assim, o fator de conversão será

$$\hbar c = 3.1615 \times 10^{-26} J \cdot m . \quad (\text{A.5})$$

Em física nuclear, porém, a escala de comprimento mais adequada é o fermi ( $F$ ), também chamado de fentômetro ( $fm$ ), sendo que  $1F = 1fm = 10^{-15}m$ , e a energia é comumente expressa em  $MeV$ . Portanto, a forma do fator de conversão mais utilizada é

$$\hbar c = 197.327 MeV \cdot fm . \quad (\text{A.6})$$

Para converter a densidade de energia e pressão, a combinação de  $\hbar$  e  $c$  é a mesma, mas costumamos utilizá-la nas unidades

$$\hbar c = 3.16153 \times 10^{+34} (J/m^3) fm^4 , \quad (\text{A.7})$$

pois  $[\varepsilon] = [p] = L^{-4}$ .

O mesmo raciocínio deve ser seguido quando, ao utilizarmos resultados da teoria da relatividade geral, tomamos  $G = c = 1$ , estabelecendo, assim, o que poderíamos chamar de um sistema relativístico de unidades (SR). Nesse caso, teremos também  $T = L$ , como no SN, mas, agora, teremos que  $M = L$  (note-se que isso impossibilita a escolha  $\hbar = G = c = 1$ ).

Como dissemos, no sistema relativístico de unidades (SR), a velocidade da luz,

$$c = 299792458 \text{ m/s}, \quad (\text{A.8})$$

e a constante da mecânica gravitação universal,

$$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 / (kg \cdot s^2) , \quad (\text{A.9})$$

---

<sup>1</sup> $M$  corresponde à unidade de massa,  $L$  à de comprimento e  $T$  à de tempo.



são tomados iguais à unidade:

$$G = c = 1. \quad (\text{A.10})$$

A conversão entre unidades dos sistemas internacional (SI) e relativístico é sintetizada na Tabela A.2.

quantidade física	unidade SI	unidade SR	fator de conversão SI $\rightarrow$ SR
distância	$m$	$m$	1
tempo	$s$	$m$	$c$
massa	$kg$	$m$	$G/c^2$
velocidade	$m/s$	adimensional	$1/c$
momentum linear	$kg \cdot m/s$	$m$	$G/c^3$
momentum angular	$kg \cdot m^2/s$	$m^2$	$G/c^3$
força	$kg \cdot m/s^2$	adimensional	$G/c^4$
energia	$kg \cdot m^2/s^2$	$m$	$G/c^4$
ação	$kg \cdot m^2/s$	$m^2$	$G/c^3$
densidade de energia	$kg/(m \cdot s^2)$	$m^{-2}$	$G/c^4$
pressão	$kg/(m \cdot s^2)$	$m^{-2}$	$G/c^4$

**Tabela A.2:** Conversão de unidades entre os sistemas SI e SR.

Nesse sistema, a densidade de energia, por exemplo, terá a mesma unidade da pressão:  $L^{-2}$ . Para se recuperar o valor no SI de uma grandeza expressa no SR, deve-se multiplicar a grandeza por uma combinação de  $G$  e  $c$ . Como exemplo, vejamos o caso da energia. No SR, um valor de energia é dado por um número vezes  $L$ ; assim, para descobrirmos o valor dessa energia no SI, devemos multiplicar o valor de energia no SR por uma combinação de  $G$  e  $c$  que reproduza a unidade de energia do SI ( $M \cdot L^2/T^2$ ). Assim, temos de resolver a equação abaixo:

$$[G]^a [c]^b E_{SR} = E_{SI} \quad (\text{A.11})$$

$$\left( \frac{L^3}{(M \cdot T^2)} \right)^a \left( \frac{L}{T} \right)^b L = \frac{M \cdot L^2}{T^2} .$$

Facilmente vê-se que  $a = -1$  e  $b = 4$ . Assim, o fator de conversão será

$$\frac{c^4}{G} = 1.21 \times 10^{44} kg \cdot m/s^2 . \quad (\text{A.12})$$

Analogamente, para a massa, por exemplo, o fator será

$$\frac{c^2}{G} = 1.35 \times 10^{27} kg/m . \quad (\text{A.13})$$

## A.2 Métrica

Utilizamos, neste trabalho, a convenção de Bjorken e Drell [46] para a métrica. O quadri-vetor contravariante é definido nessa forma convencional como

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) , \quad (\text{A.14})$$

enquanto o vetor covariante correspondente é dado por

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) , \quad (\text{A.15})$$

sendo o tensor métrico definido como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Usamos a convenção de que índices latinos ( $i, j, k, \dots$ ) assumem os valores 1, 2, 3 e índices gregos assumem os valores 0, 1, 2, 3. Na equação (A.15) e em todo este trabalho, a repetição de índices gregos indica soma implícita (convenção de Einstein).

O produto escalar entre dois quadri-vetores é denotado por

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu}a^\nu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} . \quad (\text{A.16})$$

As derivadas parciais quadri-vetoriais contravariante e covariantes são definidas de acordo com

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) . \quad (\text{A.17})$$

Usamos a convenção de que a derivada  $\partial_\mu AB$  atua somente em  $A$ , enquanto que  $\partial_\mu(AB)$  atua sobre o produto  $AB$ :  $\partial_\mu(AB) = (\partial_\mu A)B + A(\partial_\mu B) = \partial_\mu AB + A\partial_\mu B$ . O operador quadri-vetor momentum-linear é

$$p^\mu = i\partial^\mu = \left( i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla} \right) . \quad (\text{A.18})$$

## A.3 Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli obedecem à lei de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k , \quad (\text{A.19})$$

e a lei de anti-comutação

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2I\delta_{ij} , \quad (\text{A.20})$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker e  $\epsilon_{ijk}$  representa o símbolo anti-simétrico. Uma relação útil envolvendo operadores vetoriais  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  que comutam com as matrizes de Pauli, mas não necessariamente um com o outro, é

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) . \quad (\text{A.21})$$

A representação padrão (espaço de spin) para as matrizes de Pauli é

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

No espaço de isospin, as mesmas matrizes são denotadas por  $\vec{\tau}$ .

## A.4 Matrizes de Dirac

Neste trabalho, foi utilizada a convenção de Bjorken e Drell [46] para as matrizes de Dirac. A propriedade fundamental destas matrizes é a lei de anti-comutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} . \quad (\text{A.22})$$

As matrizes  $\alpha_i$  e  $\beta$  são definidas por

$$\gamma_i = \beta \alpha_i \quad \gamma^0 = \gamma_0 = \beta . \quad (\text{A.23})$$

Temos ainda que

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = I . \quad (\text{A.24})$$

A matriz  $\gamma^5$  é definida por

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 . \quad (\text{A.25})$$

(Note-se que 5 não é um índice tensorial.)

A representação padrão para  $\gamma_\mu$  é

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} .$$

Nesta representação, a matriz adjunta hermitiana de  $\gamma^\mu$  é

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 , \quad (\text{A.26})$$

e a matriz  $\gamma^5$  é representada por

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} .$$

## A.5 Equação de Einstein e Espaços Curvos

Neste trabalho, precisamos, muitas vezes, utilizar resultados da teoria da relatividade geral. Nesse contexto, trabalhando-se com espaços curvos, o símbolo  $g_{\mu\nu}$ , que representa o tensor de Minkowski, deve ser substituído por  $\eta_{\mu\nu}$ . A ação utilizada em nossos desenvolvimentos formais que envolvem a teoria da relatividade geral é dada por

$$I = \int (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) d^4x , \quad (\text{A.27})$$

onde  $\mathcal{L}_g$  e  $\mathcal{L}_m$  são, respectivamente, os lagrangianos gravitacional e de campos de matéria. Esse último depende da natureza da matéria estudada, mas o primeiro é geral e expresso por (no sistema de unidades relativístico, em que  $G = c = 1$ ):

$$\mathcal{L}_g = \left( \frac{-1}{16\pi} \right) R \sqrt{-g} , \quad (\text{A.28})$$

onde  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  é a *curvatura escalar*, e  $R_{\mu\nu}$  é o *tensor de Ricci*, definido como  $R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\nu\rho}$ . Por sua vez,  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  é denominado *tensor de Riemann* definido por

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} \equiv \Gamma^\rho_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^\rho_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\rho_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\rho_{\alpha\nu} ; \quad (\text{A.29})$$

(os índices precedidos por vírgulas indicam derivada comum do termo em relação à variável espaço-temporal correspondente ao índice). O pseudo-tensor  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  é chamado de *conexão afim* e expresso em função de  $g_{\mu\nu}$  por

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}) . \quad (\text{A.30})$$

Finalmente,  $g = \det(g_{\mu\nu})$  onde  $g_{\mu\nu}$  é o *tensor métrico* do espaço, definido por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} , \quad (\text{A.31})$$

o qual denota a diferença entre o espaço estudado e o espaço plano de Minkowski. Esse tensor também aparece na expressão para o intervalo invariante  $d\tau$ :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (\text{A.32})$$

A minimização da ação (A.27) nos leva às equações de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = -8\pi T^{\mu\nu} , \quad (\text{A.33})$$

onde  $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$  é o *tensor de Einstein* e  $T^{\mu\nu}$  é o *tensor momentum-energia*, o qual depende de  $\mathcal{L}_m$ . A solução dessas equações para uma métrica esférica, homogênea e isotrópica nos leva às *equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (TOV), citadas no Capítulo 1 e utilizadas ao longo deste trabalho.

# Apêndice B

## Equações de Equilíbrio Químico

Quando a quantidade dos componentes de uma reação química não muda mais, diz-se que ela alcançou o equilíbrio químico. Toda reação química se desenvolve em dois sentidos, isto é



Um desses sentidos irá predominar sobre o outro até que se atinja o equilíbrio. É importante ressaltar que o estado de equilíbrio não depende do caminho percorrido pelo sistema, ou seja, independe das reações intermediárias entre o lado esquerdo e direito da equação química.

Toda reação química pode ser escrita como uma combinação linear simbólica de seus componentes (passando-se todos termos para o mesmo membro):

$$\sum_i \nu_i A_i = 0. \quad (\text{B.2})$$

Por exemplo, na reação  $n \rightleftharpoons p^+ + e^- + \bar{\nu}$  temos  $\nu_n = -\nu_p = -\nu_e = -\nu_{\bar{\nu}} = 1$ .

Suponhamos que a reação que queremos estudar se realize em temperatura e pressão constantes. O potencial termodinâmico mais adequado a esse sistema será a energia livre de Gibbs, que é função de  $p$ ,  $T$  e do número de partículas de cada elemento da reação,  $N_i$ :

$$G \equiv G(p, T, N_i), \quad (\text{B.3})$$

de onde,

$$dG = \sum_i \left( \frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T, p, N_{j \neq i}} dN_i \quad (\text{B.4})$$

para  $T$  e  $p$  constantes.

No ponto de equilíbrio químico, a energia de Gibbs deverá ter um mínimo em relação, por exemplo, a um dos  $N_i$ :

$$\sum_j \left( \frac{\partial G}{\partial N_j} \right)_{T, p, N_{j \neq i}} \frac{dN_j}{dN_i} = 0. \quad (\text{B.5})$$

As relações entre as variações dos  $N_i$  são definidas pela reação química correspondente. Assim, se o elemento  $i$  sofrer uma variação de  $dN_i = \bar{\nu}_i$ , todos os demais elementos terão que sofrer uma variação  $dN_j = (\bar{\nu}_i/\nu_i)\nu_j$  para manter a estequiometria. Temos, portanto,  $dN_j/dN_i = \nu_j/\nu_i$  e podemos escrever a *condição de equilíbrio químico*:

$$\sum_i \nu_i \mu_i = 0, \quad (\text{B.6})$$

já que o potencial químico de um elemento  $i$ ,  $\mu_i$ , é definido como:

$$\mu_i \equiv \left( \frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,p,N_{i \neq j}}. \quad (\text{B.7})$$

Dessa forma, observa-se que os potenciais químicos obedecem à equação simbólica (B.2), substituindo-se os  $A_i$  por  $\mu_i$ .

Se a equação química tiver que respeitar algumas leis de conservação, teremos tantos potenciais químicos independentes quantas forem as leis, ou seja, se tivermos  $p$  elementos e  $q$  leis, poderemos expressar os potenciais químicos em função de apenas  $q$  deles. Para mostrar isso, consideremos o caso mais usado neste trabalho em que existem duas leis de conservação, a conservação de carga elétrica e de número bariônico; podemos expressar essas leis para uma reação do tipo (B.2) como:

$$\sum_i^N \nu_i q_{ei} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i^N \nu_i q_{bi} = 0, \quad (\text{B.8})$$

onde  $q_{ei}$  e  $q_{bi}$  são, respectivamente, a carga elétrica e bariônica do elemento  $i$ . Como temos  $N$  variáveis e 2 equações poderemos apenas expressar 2 dos  $\nu_i$  em função dos outros  $N-2$ , os quais por sua vez serão independentes:

$$\nu_1 q_{e1} + \nu_2 q_{e2} = - \sum_{i \neq 1,2}^N \nu_i q_{ei}, \quad (\text{B.9})$$

$$\nu_1 q_{b1} + \nu_2 q_{b2} = - \sum_{i \neq 1,2}^N \nu_i q_{bi}, \quad (\text{B.10})$$

Considerando-se, por exemplo, que o elemento 1 seja o nêutron e o 2 o elétron, temos que  $q_{b1} = -q_{e2} = 1$  e  $q_{b2} = q_{e1} = 0$ , e o sistema acima fica trivial:

$$\nu_n = - \sum_{i \neq 1,2}^N \nu_i q_{bi}, \quad (\text{B.11})$$

$$\nu_e = \sum_{i \neq 1,2}^N \nu_i q_{ei}. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo (B.11) e (B.12) em (B.6), encontramos:

$$\sum_{i \neq n, e}^N \nu_i \mu_i = \sum_{i \neq n, e}^N (\mu_n q_{bi}) \nu_i - \sum_{i \neq n, e}^N (\mu_e q_{ei}) \nu_i. \quad (\text{B.13})$$

Com os  $\nu_i$  são independentes, a igualdade só será verificada se seus coeficientes forem iguais, ou seja:

$$\mu_i = q_{bi} \mu_n - q_{ei} \mu_e. \quad (\text{B.14})$$

Essa linha de raciocínio pode ser estendida a um número qualquer de leis de conservação.

# Apêndice C

## Teorema de Noether

O estudo de simetrias em Física é essencial na medida em que, de acordo com o teorema de Noether, uma simetria está sempre associada a uma quantidade física conservada. Por exemplo, em um sistema que possui simetria esférica, o momentum angular é conservado. Esse teorema foi enunciado em 1918 pela matemática alemã Amalie Emmy Noether (1882-1935).

Consideremos um conjunto de  $n$  campos  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ , alguns dos quais podem se referir a diferentes estados de carga ou isospin para partículas de uma determinada massa. Não precisamos especificar se são campos fermiônicos ou bosônicos. Consideremos, agora, uma transformação interna, infinitesimal e contínua<sup>1</sup>:

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x) + \lambda_j F_i^j[\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)]. \quad (\text{C.1})$$

$F$  caracteriza a transformação e pode misturar alguns dos campos em sua estrutura. Os  $\lambda_j$  são parâmetros infinitesimais que independem das coordenadas espaço-temporais. Digamos que um certo  $\mathcal{L}$  seja invariante frente a uma transformação contínua de simetria definida por um particular conjunto de  $F_i^j$ . Sendo assim, sua variação com respeito aos parâmetros da transformação deve ser nula. Para determinarmos a consequência desse fato, vamos examinar a expressão formal para a variação,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta(\partial_\mu\phi_i). \quad (\text{C.2})$$

Como  $\delta\phi_i = \lambda_j F_i^j$  e

$$\delta(\partial_\mu\phi_i) = \partial_\mu(\delta\phi_i) = \lambda_j \partial_\mu F_i^j. \quad (\text{C.3})$$

temos que

$$\delta\mathcal{L} = \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} F_i^j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu F_i^j \right) \lambda_j. \quad (\text{C.4})$$

---

<sup>1</sup>Transformações finitas podem ser obtidas através de um conjunto de transformações infinitesimais.



Utilizando as equações de Euler-Lagrange para os campos no primeiro termo, obtemos

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \left( F_i^j \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu F_i^j \right) \lambda_j \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} F_i^j \right) \lambda_j.\end{aligned}\tag{C.5}$$

Assim, se  $\mathcal{L}$  é invariante frente à transformação, devemos ter que  $\delta\mathcal{L} = 0$ . Como os parâmetros  $\lambda_j$  são arbitrários, o conjunto de  $n$  quadri-vetores

$$J_j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} F_i^j\tag{C.6}$$

deve satisfazer à condição

$$\partial_\mu J_j^\mu = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).\tag{C.7}$$

Os quadri-vetores  $J^\mu$  com divergência nula resultantes de uma invariância do lagrangeano são chamados de correntes de Noether. Pelo fato de suas quadri-divergências serem nulas, cada corrente é conservada. A conservação de um quadri-vetor de divergência nula pode ser provada de maneira bastante simples. Escrevendo a divergência por extenso,

$$0 = \partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \partial_k J^k = \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J},\tag{C.8}$$

chegamos à *equação de continuidade*. Integrando em um volume tridimensional que contenha o sistema e utilizando o teorema de Gauss, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V J^0 d\mathbf{r} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d\mathbf{r} = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.\tag{C.9}$$

Estando o sistema contido no volume  $V$ , a corrente  $S$  que atravessa o a superfície desse volume é nula. Portanto, a integral de superfície é igual a zero. Conseqüentemente, a derivada temporal no lado esquerdo é nula, e temos, assim, as cargas conservadas

$$Q_j = \int_V J_j^0 d\mathbf{r},\tag{C.10}$$

que são constantes no tempo. A invariância de  $\mathcal{L}$  frente à transformações de simetria implica a existência de cargas conservadas.

# Apêndice D

## Publicação

Apresentamos, neste apêndice, primeiramente, o artigo citado no final do Capítulo 3, quando justificamos a adoção do modelo de sacola MIT e do formalismo a temperatura nula no estudo realizado nesta dissertação.

Esse artigo foi publicado pelo autor desta dissertação na revista *International Journal of Modern Physics D*, volume 13, número 7, de agosto de 2004 [79], resumindo resultados apresentados no primeiro *International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics*, que aconteceu na cidade de Olinda, estado de Pernambuco, Brasil, entre os dias 12 e 16 de outubro de 2003. Resultados adicionais foram apresentados no encontro *IX Hadron Physics and VII Relativistic Aspects of Nuclear Physics*, que ocorreu em Angra dos Reis, no Rio de Janeiro, Brasil, entre 28 de março e 3 de abril de 2004 [99]. Nesse artigo, desenvolvemos a equação de estado para a fase hadrônica usando uma nova versão do modelo de sacola difusa com acoplamentos quark-méson dos tipos escalar-isoescalar, vetorial-isoescalar e vetorial-isovetorial. Consideramos, ainda, graus de liberdade leptônicos, bem como os vínculos de equilíbrio químico e conservação do número bariônico e da carga elétrica. Modelamos a equação de estado para o plasma de quarks e glúons (QGP) considerando quarks e glúons assintoticamente livres e sem massa, em um modelo MIT com constante de sacola  $B(T, \mu)$  dependente da temperatura e do potencial químico, o que permite uma transição de fase isoentrópica da fase de plasma de quarks e glúons para a fase de gás de hádrons, conforme determinado pela termodinâmica. Nossas previsões levam, ainda, à equação de estado e a propriedades estáticas globais de estrelas de nêutrons e estrelas protoneutrônicas para valores de temperatura baixos e moderados. Nossos resultados são ligeiramente modificados em comparação com as previsões do modelo de sacola MIT padrão, com uma pressão de sacola constante  $B$ .

Nas páginas finais deste apêndice, apresentamos, ainda, o artigo da referência [102], contendo resultados parciais desta dissertação, que foram apresentados no segundo *International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics*, que aconteceu na cidade de Natal, estado do Rio Grande do Norte, Brasil, entre os dias 2 e 5 de outubro de 2005.

## QUARK–GLUON PLASMA IN A BAG MODEL WITH A SOFT SURFACE

RAFAEL B. JACOBSEN,\* GUILHERME F. MARRANGHELLO<sup>†</sup> and  
CÉSAR A. Z. VASCONCELLOS<sup>‡</sup>

*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
CEP 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil*

\* *jacobsen@if.ufrgs.br*

<sup>†</sup> *gfm@if.ufrgs.br*

<sup>‡</sup> *cesarzen@if.ufrgs.br*

ALEXANDRE MESQUITA

*Departamento de Física e Química, Universidade de Caxias do Sul,  
CEP 95070-560 Caxias do Sul, RS, Brazil*

*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
CEP 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil*

*falcon@if.ufrgs.br*

Received 27 November 2003

Revised 11 January 2004

We analyze the implications of quantum hadrodynamics (QHD) and quantum chromodynamics (QCD) to model, respectively, two distinct phases of nuclear matter, a baryon–meson phase and a quark–gluon phase. We develop an equation of state (EoS) in the framework of a quark–meson coupling model for the hadron–meson phase using a new version of the fuzzy bag model with scalar–isoscalar, vector–isoscalar and vector–isovector meson–quark couplings and leptonic degrees of freedom as well as the constraints from chemical equilibrium, baryon number and electric charge conservation. We model the EoS for the QGP phase for asymptotically free massless quarks and gluons using the MIT approach and a temperature and baryon chemical potential dependent bag constant,  $B(T, \mu)$ , which allows an isentropic equilibrium phase transition from a QGP to a hadron gas as determined by thermodynamics. Our predictions yield the EoS and static global properties of neutron stars and protonneutron stars at low and moderate values of temperature. Our results are slightly modified in comparison to predictions based on the standard MIT bag model with a constant bag pressure  $B$ .

*Keywords:* Bag models; neutron stars.

### 1. A Bag Model with a Soft Surface: Modelling the Masses of Neutron Stars

In this work we consider QHD and QCD to model a baryon–meson and a quark–gluon phase, respectively. For the hadron–meson phase, supplemented by lepton

degrees of freedom to account for neutron star matter in chemical equilibrium and charge neutrality, we develop an equation of state using a new version of the fuzzy bag model: as a novel element of our approach we incorporate and explore explicitly the presence of scalar–isoscalar, vector–isoscalar and vector–isovector meson–quark couplings. For the quark–gluon phase we consider an extended MIT bag model: to take into account in a consistent way entropy and baryon number conservation at the boundary of the two phases, we include a temperature and baryon chemical potential dependent bag pressure,  $B(\mu, T)$  assuming the QGP is immersed in hot dense hadron matter and the Gibbs criteria to formulate the equilibrium phase transition.

For the hadron phase we use the following Lagrangian density formulation<sup>1–4</sup>

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{FBM}} = & \frac{i}{2} [\bar{\psi}_q \gamma^\mu \partial_\mu \psi_q - \partial_\mu \bar{\psi}_q \gamma^\mu \psi_q] - B(r)F(r) \\
& - \bar{\psi}_q [m_q - g_\sigma^q \sigma + (1 + \gamma^0)V(r)] \psi_q \\
& + \frac{i}{2} \left[ \bar{\psi}_q \gamma^\mu \left( ig_\omega^q \omega_\mu + ig_\rho^q \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu \right) \psi_q \right] \\
& + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
& - \frac{1}{4} \mathbf{L}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{L}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda [i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda] \psi_\lambda \quad (1)
\end{aligned}$$

with  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ ;  $\mathbf{L}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu$ . In these expressions:  $\psi_q$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$  and  $\boldsymbol{\rho}$  represent, respectively, the quark and meson fields and  $g_\sigma^q$ ,  $g_\omega^q$ ,  $g_\rho^q$  the quark–meson coupling constants. In brief words, the main further steps in our formulation are: (a) determination of the Euler–Lagrange equations and their solutions for a given confining potential or, equivalently, for chosen suppression functions  $F(r)$  and  $G(r)$  (with an appropriate distributional behavior); (b) calculation of the energy–momentum tensor in the mean-field approximation (see Ref. 4); (c) determination of the equation of state (EoS) for hadron matter; (d) determination of the free parameters of our approach, to reproduce static global properties of nuclear matter; (e) integration of the Tolman–Oppenheimer–Volkoff equations to obtain standard plots of global static properties of neutron stars. The figures show our results for the nucleon effective mass as a function of baryon density and mass of neutron stars as a function of its central density.

## 2. Phase Transition Involving a Hadron Gas and the QGP

According to thermodynamics, the specific entropy per baryon,  $S/B$ , in a first order phase transition is larger in a QGP phase than in a hadron gas phase. On the other hand, the Gibbs criteria for the equilibrium phase across the boundary require that, at constant temperature, pressure and chemical potential of both hadron and QGP

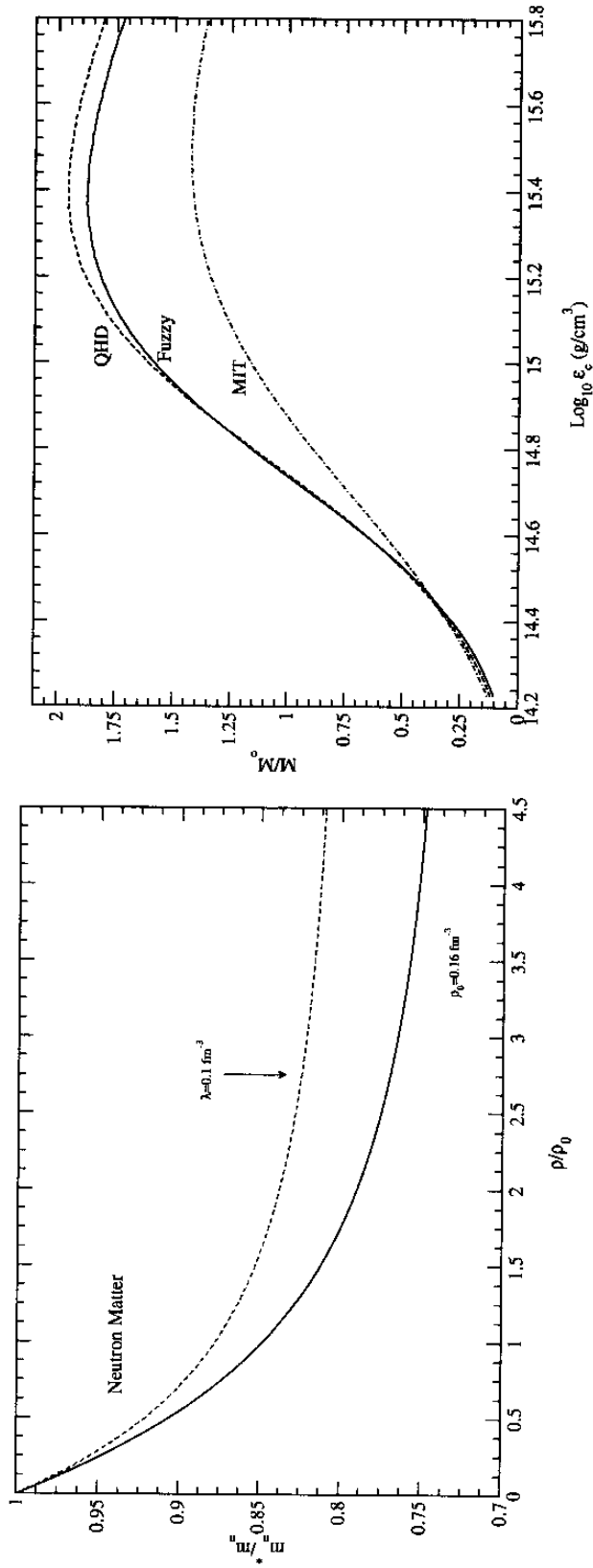


Fig. 1. Left panel: effective nucleon mass as expected in the fuzzy bag model for  $\lambda = 0.1 \text{ fm}^{-3}$  (dashed line) and  $\lambda = 0.05 \text{ fm}^{-3}$  (solid lines). Right panel: maximum mass of neutron matter as predicted by the fuzzy bag model with  $\lambda = 0.05 \text{ fm}^{-3}$  (solid line) compared to the corresponding results obtained with the Glendenning and MIT bag models.

phases are related though

$$P_{\text{QGP}} = P_H; \quad \mu_{\text{QGP}} = \mu_H, \quad (2)$$

for a conserved baryon current

$$N_{\text{QGP}}/3 + N_H = \text{constant}. \quad (3)$$

Thus, Gibbs criteria yields at constant temperature  $S/B|_{\text{QGP}} > S/B|_H$  i.e., a phase transition for which the specific entropy per baryon,  $S/B$ , is discontinuous across the phase boundary. To recover continuity as well as entropy and baryon number conservation, we follow the formalism developed by A. Leodinov *et al.*<sup>5</sup> introducing a temperature and baryon chemical potential dependence on the bag pressure

$$\frac{S_{\text{QGP}} - \frac{\partial B(\mu, T)}{\partial T}}{N_{\text{QGP}} - \frac{\partial B(\mu, T)}{\partial T}} = \frac{S_H}{N_H}, \quad (4)$$

which yields, after extending the original formalism to consider mesonic interactions<sup>a</sup>

$$B(\mu, T) = B_0 + \frac{37}{90}\pi^2 T^4 + \left( \frac{\mu^2}{9} - \left( \frac{\mu}{\theta} \right)^2 \frac{\mu^2}{81} \right) T^2 - \alpha_S(\mu, T) \left[ \frac{11}{9}\pi T^4 + \frac{2}{9\pi}\mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{81\mu^3} \right] \quad (5)$$

for the QCD running coupling constant  $\alpha_S(\mu, T)$  a slowly varying function of  $T$  at  $\theta \equiv (\mu^2 - m^2)^{1/2}$ .

We model the EoS for the QGP assuming asymptotically free massless quarks and gluons and the MIT approach. Thus, the energy density of the gas is given as

$$\epsilon = \frac{E}{V} = B(\mu, T) + \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int kd^3k (n_k(T) + \bar{n}_k(T)) + \frac{\gamma_G}{(2\pi)^3} \int \frac{kd^3k}{e^{\beta k} - 1} \quad (6)$$

while the pressure is

$$p = -B(\mu, T) + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int kd^3k (n_k(T) + \bar{n}_k(T)) + \frac{\gamma_G}{(2\pi)^3} \int \frac{kd^3k}{e^{\beta k} - 1} \right\} \quad (7)$$

with the baryon density

$$\rho_B = \frac{1}{3} \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int kd^3k (n_k(T) - \bar{n}_k(T)). \quad (8)$$

<sup>a</sup>Taking for instance a QHD baryon gas model combined with  $\sigma, \omega, \rho$  mesons in the mean-field approach, because the Hamiltonian expectation value is diagonal, the formalism of Leodinov *et al.*<sup>5</sup> may be extended simply by replacing the free baryon chemical potential  $\mu$  by the corresponding quantity  $\mu_B(k) = g_{\omega B}^* \omega_0 + g_{\rho B}^* \rho_{03} I_{3B} + \sqrt{k_{F,B}^2 + (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)^2}$  where the scalar, vector and isovector mean field potentials are, respectively,  $S = -g_{\sigma B}^* \sigma$ ,  $V = g_{\omega B}^* \omega_0$  and  $U = g_{\rho B}^* \rho_{03} I_{3B}$ . In our modelling, the quark-meson couplings allow directly this extension.

Table 1. Results of our approach for the maximum mass,  $M_{\max}$ , and radius,  $R$ , of PQG stars.

$T = 0$ MeV	$B = B_0$	$M_{\max}/M_{\odot} = 1.529$	$R(\text{km}) = 8.72$
$T = 10$ MeV	$B = B_0$	$M_{\max}/M_{\odot} = 1.524$	$R(\text{km}) = 8.77$
$T = 10$ MeV	$B = B(\mu, T)$	$M_{\max}/M_{\odot} = 1.519$	$R(\text{km}) = 8.68$

The statistical factors for degeneracy factors of quarks and gluons are  $\gamma_Q = 12$  and  $\gamma_{QG} = 16$ , respectively. Above the thermal Fermi distribution functions are defined, for quarks carrying baryon number  $1/3$ , as

$$n_k(T) = \frac{1}{e^{\beta(k-\mu/3)} + 1}; \quad \bar{n}_k(T) = \frac{1}{e^{\beta(k+\mu/3)} + 1}. \quad (9)$$

### 3. Results and Conclusions

Our approach is a first step in modelling, in a consistent way, the transition of effective hadronic degrees of freedom in a bag model with a soft surface towards a deconfined quark gluon plasma at very high densities. Results of our approach indicate the EoS and static global properties of neutron stars at low and moderate values of temperature, as the ones found in protoneutron stars, with the inclusion in the theoretical treatment of a temperature and baryon chemical potential dependence on the bag pressure, are slightly modified in comparison to the predictions based on the MIT bag model with a constant  $B$ . In fact, this result should be expected quite independently of any hadronic model used because of the low temperatures considered (see for instance Ref. 6).

### References

1. F. G. Pilotto, C. A. Z. Vasconcellos and H. T. Coelho, *Mod. Phys. Lett.* **A17**, 543 (2002).
2. F. G. Pilotto, *Eur. Phys. J.* **C28**, 535 (2003).
3. C. A. Z. Vasconcellos, H. T. Coelho, F. G. Pilotto, B. E. J. Bodmann, M. Dillig and M. Razeira, *Eur. Phys. J.* **C4**, 115 (1998); *Mod. Phys. Lett.* **A17**, 543 (2002).
4. C. A. Z. Vasconcellos and M. Dillig, in *Proceedings of the International Workshop on Strong Magnetic Fields and Neutron Stars* (Cuba, 2003) (to be published).
5. A. Leodinov *et al.*, *Phys. Rev.* **D50**, 4657 (1994).
6. G. F. Marranghello, C. A. Z. Vasconcellos, M. Dillig and J. A. F. Pacheco, *Int. J. Mod. Phys.* **E11**, 83 (2002).

## On the Role of the Adiabatic Index in the Stability of Neutron Stars

Rafael B. Jacobsen, César A. Z. Vasconcellos, Bardo E.J. Bodmann and Dimiter Hadjimichef  
*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Bento Gonçalves 9500,  
CEP 91501-970, Porto Alegre, RS, Brazil*

We study the influence of interaction strengths on nuclear properties and global static properties of neutron stars with emphasis on the adiabatic index, considering also the constraint of chemical equilibrium and charge neutrality. We develop an equation of State (EoS) in the framework of an extended effective QHD model using a parameterized phenomenological Lagrangian density containing the fundamental baryon octet, the  $\sigma$ ,  $\omega$  and  $\rho$  meson fields and the lightest charged leptons. The results show that, for a small range of values of the baryon-meson coupling parameters, we can consistently describe nuclear matter and the structure of neutron stars. Our results indicate that in the energy density range above hyperon thresholds, the behavior of the adiabatic index is roughly comparable to the corresponding one in the case of an extreme relativistic hydrodynamical perfect fluid.

*Keywords:* Effective Models; Adiabatic Index; Neutron Stars.

### 1. Introduction

The key ingredient in the description of nuclear matter shaping the interior of compact stars, its equation of state, is a constitutive equation which describes a given set of physical conditions of high density hadron matter and which provides a mathematical relationship between two or more state functions associated with such kind of matter, as for instance temperature, pressure, volume, or internal energy. There are many prominent equations of state in the literature. However, in general, these equations of state become increasingly inaccurate when describing the interior of such compact stars: at present, there is no single equation of state that accurately predicts the properties of nuclear matter under the extreme physical conditions as the ones found in the interior of neutron stars and pulsars.

In this context, a crucial issue in the understanding of properties of dense hadronic matter is, on one hand, the determination of an adequate equation of state and, on the other, the implementation of observational constraints to eliminate ambiguities in the theoretical description of a specific astrophysical scenario, as for instance, the complex structure and dynamics of neutron stars and pulsars, by imposing a sufficient number of significant observational and model constraints. Among the most accurate observational constraints, one finds that the EoS must admit non rotating neutron stars with gravitational mass about at least  $1.44M_{\odot}$  and shall allow rotational periods at least as small as  $1.56ms$ <sup>3</sup>.



The present study is a contribution into this direction, where we discuss the role of the adiabatic index in the stability of neutron stars and in the modeling of their masses, sizes and other fundamental properties. With our contribution we hope to contribute with an important constraint for future studies focussing in the elaboration of a general framework for a more consistent description of the formation process of protoneutron stars. Since the adiabatic index establishes the connection between the isothermal and adiabatic compressibilities of a gas, this quantity turns out to be a key ingredient in order to characterize the formation process of a compact star in terms of infinitesimal adiabatic cooling as well as isothermal stabilization.

## 2. A QHD Modeling of Neutron Stars

On the basis of effective theory approaches found in literature, we extend a relativistic phenomenological Lagrangian with a nonlinear parametrization<sup>1</sup> of the baryon-meson coupling strengths, characterized by adimensional parameters  $(\beta, \gamma, \lambda)$ , as shown below (eq. 2). Throughout the discussion we understand natural units ( $\hbar = c = 1$ ).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega B}^* \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B}^* \tau \cdot \rho^\mu) - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)] \psi_B \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \rho_{\mu\nu} \cdot \rho^{\mu\nu} + m_\rho^2 \rho_\mu \cdot \rho^\mu \right) + \sum_l \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_l) \psi_l, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ ;  $\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu$ , and  $g_{\sigma B}^* \equiv m_{\lambda B}^* g_{\sigma B}$ ,  $g_{\omega B}^* \equiv m_{\beta B}^* g_{\omega B}$ ,  $g_{\rho B}^* \equiv m_{\gamma B}^* g_{\rho B}$  and

$$m_{nB}^* \equiv \left( 1 + \frac{g_\sigma \sigma}{n M_B} \right)^{-n}, \quad n = \lambda, \beta, \gamma. \quad (2)$$

In these expressions, we assume  $\lambda$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  as real and positive numbers, since this is the range of best phenomenology. This Lagrangian density describes a system of eight baryons ( $B = p, n, \Lambda, \Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-, \Xi^0$ ) coupled to three mesons ( $\sigma, \omega, \rho$ ) and the lightest charged leptons ( $l = e^-, \mu^-$ ). The properties of the fields and particles of the model are shown in the two tables below.

Table 1. Y=hipercharge; J=spin; I=isospin;  $I_3$ =isospin third component; S=strangeness; Q=electric charge

Particle	Field	Nature	Mass (MeV)
Sigma	$\sigma$	scalar/isoscalar	$m_\sigma = 550$
Omega	$\omega$	vector/isoscalar	$m_\omega = 783$
Rho	$\rho$	vector/isovector	$m_\rho = 770$
Baryons	$\psi_B$	spinorial	$M_B = 939-1318$
Leptons	$\psi_l$	spinorial	$m_l = 0.511-105.66$

Table 2. The octet of baryons. Y=hipercharge; J=spin; I=isospin;  $I_3$ =isospin third component; S=strangeness; Q=electric charge.

Baryon	Mass(MeV)	Y	J	I	$I_3$	S	Q
N	939	+1	1/2	1/2	+1/2	0	+1
					-1/2	0	0
$\Lambda$	1116	0	1/2	0	0	-1	0
$\Sigma$	1193	0	1/2	1	+1	-1	+1
					0	-1	0
					-1	-1	-1
$\Xi$	1318	-1	1/2	1/2	+1/2	-2	0
					-1/2	-2	-1

For each chosen set of the parameters  $(\lambda, \beta, \gamma)$ , the nucleon-meson coupling constants  $(g_{\sigma N}, g_{\omega N}, g_{\rho N})$  are determined in order the model reproduces, at saturation, the baryon density  $\rho = 0.17 fm^{-3}$ , the binding energy of nuclear matter ( $E_B = -16 MeV$ ) and the symmetry energy coefficient  $a_4 = 32.5 MeV$  as defined in the semi-empirical nuclear mass formula. The hyperon-meson coupling constants are determined on basis of the  $SU(6)$  symmetry quark counting rules<sup>2</sup>:  $\frac{1}{3}g_{\sigma N} = \frac{1}{2}g_{\sigma \Lambda} = \frac{1}{2}g_{\sigma \Sigma} = g_{\sigma \Xi}$ ,  $\frac{1}{3}g_{\omega N} = \frac{1}{2}g_{\omega \Lambda} = \frac{1}{2}g_{\omega \Sigma} = g_{\omega \Xi}$ ,  $g_{\rho N} = \frac{1}{2}g_{\rho \Sigma} = g_{\rho \Xi}$ ,  $g_{\rho \Lambda} = 0$ .

Combining the effective adimensional parametrization of the coupling strengths,  $SU(6)$  symmetry, and the Lagrangian density (1), one is able to obtain, by using standard procedures, the equation of state of nuclear matter. Moreover, by choosing different values for the set of parameters  $(\lambda, \beta, \gamma)$ , a detailed analysis show that the range of possible values for the parameters of the theory which give satisfactory results for neutron star properties, is considerably straight: due to the form of the general coupling terms, for  $(\beta, \gamma, \lambda) \rightarrow \infty$ , (see eq. 2), a rapid convergence towards an exponential form occurs.

Among all possible choices for the values of the three adjustable parameters, we shall focus one the special case  $\lambda \geq 0$  and  $\beta = \gamma = 0$ . In this class of models, if  $\lambda$  lies between 0.07 and 0.22, we reproduce a nucleon effective mass in the range  $657 MeV - 751 MeV$  and a nuclear compression modulus in the range  $200 MeV - 300 MeV$ , both at saturation density. In fact, the values for these two quantities are not uniquely determined, and we adopted the range commonly accepted in the literature.

In order to determine the adiabatic index and its role on the equation of state of nuclear matter, we follow the standard procedure sketched out in the following: a) determination of the Euler-Lagrange equations and their solutions; b) calculation of the energy-momentum tensor in the mean-field approximation; c) determination of the equation of state (EoS) for hadron matter. Besides, the following chemical equilibrium equations must be taken into account:  $\mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = \mu_{\Lambda} = \mu_n$ ,  $\mu_{\Sigma^-} = \mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_e$ ,  $\mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_e$ ,  $\mu_{\mu} = \mu_e$ . Here, the baryon chemical potentials  $\mu_B$  correspond to eigenvalues of the Dirac equation,  $\mu_B = g_{\omega B} \omega_0 + g_{\rho B} \rho_0 I_{3B} +$

$\sqrt{k_{F,B}^2 + M_B^{*2}}$  and the lepton chemical potentials are simply  $\mu_l = \sqrt{k_{F,l}^2 + M_l^2}$ . In these expressions,  $I_{3B}$  is the isospin projection of baryon charge states  $B$ ,  $k_{F,B}$  is the Fermi momentum of species  $B$  and  $M_B^* = M_B - g_{\sigma B}^* \sigma$  is the effective mass of each baryon. Furthermore, the corresponding equations for baryon number and electric charge conservation are

$$\rho = \sum_B \frac{k_{F,B}^3}{3\pi^2} \quad ; \quad \sum_B q_{e,B} \frac{k_{F,B}^3}{3\pi^2} - \sum_l \frac{k_{F,l}^3}{3\pi^2} = 0, \quad (3)$$

where  $q_{e,B}$  is the electric charge of each baryon species  $B$ .

The relations of charge neutrality, baryon number conservation, the eight equations of chemical equilibrium and the mean-field equation for the  $\sigma$  meson form a system of eleven equations and eleven variables ( $g_{\sigma\sigma}, k_e, k_\mu, k_p, k_n, k_\Lambda, k_{\Sigma^-}, k_{\Sigma^0}, k_{\Sigma^+}, k_{\Xi^-}, k_{\Xi^0}$ ) which can be solved only numerically. Once we know the solutions, we can calculate the EoS for the hadronic matter.

### 3. The Adiabatic Index and Relativistic Polytropes

In modeling relativistic stars, one should take into account two limiting frameworks, the classical Newtonian, or polytropic, equation of state

$$p = a\varepsilon^\gamma, \quad (4)$$

where  $p$  is the internal pressure and  $\varepsilon$  the energy density of the gas,  $a$  is a constant which depends on the entropy per nucleon and chemical composition (but does not depend on the baryon density), and  $\gamma$  denotes the polytropic index, and the extreme relativistic equation of state of a perfect fluid

$$p = C_s^2 \varepsilon, \quad (5)$$

where  $C_s^2$  represents the in medium sound velocity  $C_s^2 = dp/d\varepsilon = 1/3$ , so,  $\varepsilon = 3p$ . Classically, a detailed discussion of the stellar stability of polytropes indicates that a polytrope is stable or unstable according to whether  $\gamma > 4/3$  or  $\gamma < 4/3$ .

Of course, relativistic stars cannot be described by a Newtonian polytropic equation of state with a fixed polytropic index. However, if one takes for instance one of the analytic equations of state commonly used in the literature to model relativistic stars, as the adiabatic, relativistic polytropic EoS of Tooper<sup>6</sup>,

$$p = K\rho^\Gamma \quad ; \quad \varepsilon = \rho c^2 + \frac{p}{\Gamma - 1}, \quad (6)$$

where  $\rho$  is the baryon density,  $c$  the light velocity and  $K$  and  $\Gamma$  represent respectively the polytropic constant and polytropic exponent, new trends appear.

First of all, for the above polytrope, the  $\Gamma$  index coincides with the adiabatic index of a relativistic isentropic fluid:

$$\Gamma = \frac{(p + \varepsilon) dp}{p d\varepsilon}. \quad (7)$$

Moreover, as accordingly  $\Gamma = \Gamma(\rho)$ , Tooper's equation of state corresponds to an infinite family of polytropes. However, for each fixed value of baryon density, it also corresponds to a relativistic polytrope with a fixed polytropic index. As a consequence, for a fixed value of density, the Newtonian stability condition for polytropic equations of state should apply, according to whether  $\Gamma > 4/3$ .

The question now is, does the class of generalized derivative-coupling models defined by the Lagrangian density (1) properly and consistently describes nuclear matter according to the afore mentioned criteria? Is there is any connection involving the adiabatic index as properly defined in equation (7) and the predictions of fundamental properties of neutron stars? The results for a selection of values are shown in Fig.1 ( $\lambda = 0.07$ ), Fig.2 ( $\lambda = 0.11$ ) and Fig.3 ( $\lambda = 0.22$ ), respectively. The figures show the behavior of the adiabatic index  $\Gamma$  versus the energy density  $\epsilon$  (left panel) and the population distribution ( $\rho_B/\rho$ ) for each baryon species  $B$  (right panel). For densities slightly above  $0.17 fm^{-3}$ , the EoS stiffens and  $\Lambda$  is significantly larger then the extreme relativistic perfect fluid case with  $\Gamma = 4/3$ <sup>4,5</sup>. Moreover, as indicated in the figures, the adiabatic index drops at each densities corresponding to specific hyperon thresholds: passing a threshold the equation of state is softened because of new accessible hyperon species.

The knowledge of the equation of state obtained from our model allows one, through integration of the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations<sup>7,8</sup>, to obtain the maximum mass and maximum radius for neutron stars presents. These equations represent the reduction of Einstein's field equations from general relativity for the interior of spherical, static, relativistic stellar objects. We have calculated these quantities (maximum mass and maximum radius) for different equations of state, keeping  $\beta = \gamma = 0$  and varying  $\lambda$  from 0 to 2. The results are presented in Fig.4.

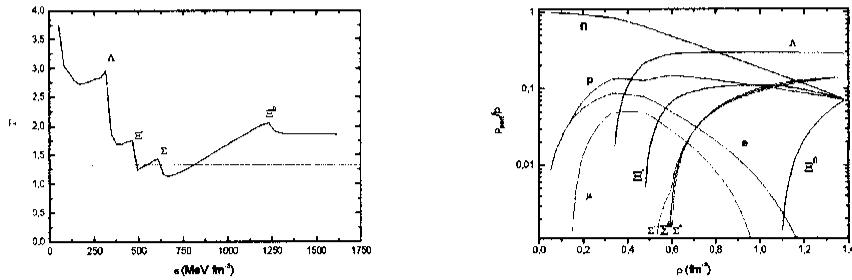


Fig. 1. The adiabatic index  $\Gamma$  versus the energy density  $\epsilon$  (left panel) and particle populations (right panel) for  $\lambda = 0.07$  and  $\beta = \gamma = 0$ . The horizontal line sets the newtonian limit.

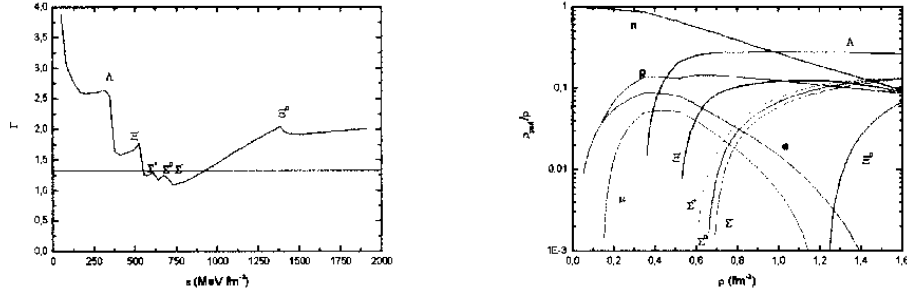


Fig. 2. The adiabatic index  $\Gamma$  vs the energy density  $\epsilon$  (left panel) and particle populations (right panel) for  $\lambda = 0.11$  and  $\beta = \gamma = 0$ . The horizontal line sets the newtonian limit.

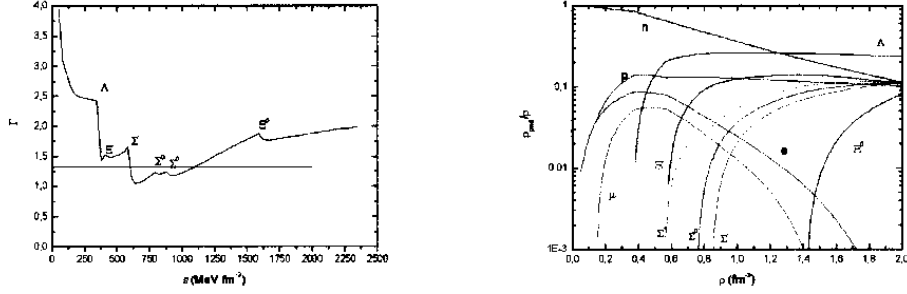


Fig. 3. The adiabatic index  $\Gamma$  vs the energy density  $\epsilon$  (left panel) and particle populations (right panel) for  $\lambda = 0.22$  and  $\beta = \gamma = 0$ . The horizontal line sets the newtonian limit.

#### 4. Conclusions

An exhaustive study has shown us that acceptable values of effective mass and compression modulus at saturation can be obtained if we choose a version of our effective generalized derivative-coupling model, classified by  $\beta, \gamma = 0$  taking the adjustable parameter in the interval  $0.07 < \lambda < 0.22$ . For this range, the EoS obtained implies a maximum neutron star mass between  $1.42M_{\odot}$  and  $1.21M_{\odot}$  and a maximum radius between  $12.10km$  and  $11.55km$ . The adiabatic index obtained from all analyzed EoS with  $(0.07 < \lambda < 0.22)$  presents a small region where it goes below the newtonian limit for stability ( $\Gamma > 4/3$ ). If the nuclear matter composition is the adequate description for the equation of state then further hadronic contributions seem to be necessary in order to stiffen the EoS, such as a repulsive contribution in the hyperon-meson interaction sector, for instance. The distribution of particle populations does not present a qualitative difference as  $\lambda$  changes from its lower (0.07) to its higher acceptable value (0.22). In a future work we intend to explore other model classes ( $\beta, \gamma \neq 0$ ) with respect to their contribution to the adiabatic index.

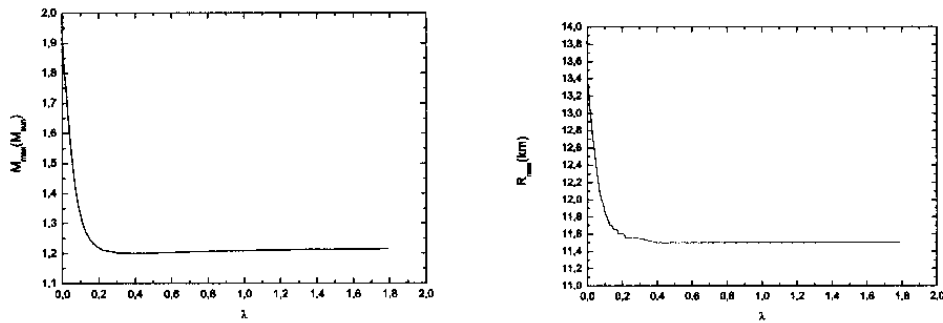


Fig. 4. Maximum mass (left panel) and maximum radius of neutron stars (right panel) as a function of the adjustable parameter  $\lambda$ .

Preliminary analysis have already shown that there will be qualitative changes.

### References

1. A. R. Taurines, C. A. Z. Vasconcelos, M. Malheiro, and M. Chiapparini, *Phys. Rev.*, **C63**, 065801 (2001).
2. S. Pal, M. Hanauske, I. Zakout, H. Stoecker, and W. Greiner, *Phys. Rev.*, **C60**, 015802 (1999).
3. Nikolaos Stergioulas, *Living Rev. Rel.* **6**, **3** (2003).
4. S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. (Dover, New York, 1969).
5. G. B. Cook, S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.*, **398**, 203 (1992).
6. R.F. Tooper, in *Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity*, *Astrophys. J.*, **142**, 1541 (1965).
7. R. C. Tolman, *Phys. Rev.*, **55**, 364 (1939).
8. J. R. Oppenheimer, and G. M. Volkoff, *Phys. Rev.*, **55**, 374 (1939).

# Apêndice E

## Documentação dos Programas

### E.1 Programa 1

O programa apresentado abaixo foi desenvolvido em Fortran90 pelo autor desta dissertação para o cálculo de  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$ ,  $(g_\omega/m_\omega)^2$ ,  $M^*/M$ ,  $k_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $r_0$  e  $a_4$  para o modelo de Walecka, fornecendo os resultados numéricos apresentados na subseção 2.3.6. Os dados de entrada são o fator  $\gamma$  (2 para matéria de nêutrons ou 4 para matéria nuclear), a densidade bariônica na saturação  $\rho_0$  e o valor da energia de ligação por núcleon na saturação  $E_l/A$ . Para realização do cálculo, foram implementadas as equações (2.142), (2.145), (2.131), (2.163), (2.105), (2.153) e (2.6).

```
program constwalecka
!   calcula as constantes de acoplamento e a massa efetiva no modelo de walecka
    real*8 m,pi,g,k,r,ep,x,y,z,dif,yn,xn,b,raio,c

!   g = fator de degenerescencia (2 para neutrons e 4 para nucleons)
!   m = massa do nucleon em fm-1
    m = 4.7582
    pi = 3.14159
    write(*,*) 'Entre o valor de gamma (2. ou 4.)'
    read(*,*) g
    write(*,*) 'Entre o valor de rho(0) (em fm-3)'
    read(*,*) r
    write(*,*) 'Entre o modulo da energia de ligacao(0) em MeV'
    read(*,*) b

!   k = momento de fermi na saturacao em fm-1
    k = ((r*6.*pi**(2.))/(g))**(1./3.)
```

```

!   ep = densidade de energia na saturacao em MeV.fm-3
    ep = r*(939. - b)
!   agora ep = densidade de energia na saturacao em fm-4
    ep = (ep*m)/(939.)
!   parametro r0
    raio = ((3.)/(4.*pi*r))**(1./3.)

!   z = (gv/mv)**2
!   y = (ms/gv)**2
!   x = m efetiva M*

do x=0.1,15.8,0.01
    y = (ep/((m - x)**2.)) - (1./((m - x)**2.))* (g/(2.0*(pi)**2.))*
      ( ((1./6.)*k**(3.)+(1./4.)*(x**2.))*k)*sqrt(x**2. + k**2.)) -
      (1./4.)*(x**4.)*log((k + sqrt(x**2. + k**2.))/(x))    )
    yn = (1./y)
    dif = x - (m - yn*((g*x)/(4.0*(pi**2.)))*( k*sqrt(x**2. + k**2.)
      - (x**2.)*log((k + sqrt(x**2. + k**2.))/(x))    ))
    if ( sqrt(dif*dif) .lt. 0.001 ) then
      goto 2
    endif
enddo

2   y = (ep/((m - x)**2.)) -
      (1./((m-x)**2.))* (g/(2.0*(pi)**2.))* (
      ((1./6.)*k**(3.)+(1./4.)*(x**2.))*k)*sqrt(x**2. + k**2.)) -
      (1./4.)*(x**4.)*log((k + sqrt(x**2. + k**2.))/(x))    )

!calculando yn = (gs/ms)**2
    yn = (1./y)
    z = (-1./r)*(sqrt(x**2. + k**2.)) + (ep/(r**2.))
!   xn = razao massaefetiva/massa do nucleon
    xn = x/m
!   agora ep = densidade de energia na saturacao em MeV.fm-3
    ep = r*(939. - b)
!   kmev = momento de fermi na saturacao em MeV
    kmev = k*197.327
!   c = coeficiente de simetria a4 em MeV
    c = (1./6.)*((kmev**2.)/(sqrt(kmev**2. + (x*197.327)**2.)))

```



```

write(*,*) 'O valor da (massa efetiva/massa nucleon) eh:'
write(*,*) xn
write(*,*) 'O valor da const p/ sigma eh (fm2):'
write(*,*) yn
write(*,*) 'O valor da const p/ omega eh (fm2):'
write(*,*) z
write(*,*) 'O valor de k0 eh (fm-1):'
write(*,*) k
write(*,*) 'O valor de e0 eh (MeV.fm-3):'
write(*,*) ep
write(*,*) 'O valor de r0 eh (fm):'
write(*,*) raio
write(*,*) 'O valor do coeficiente de simetria a4 eh (MeV):'
write(*,*) c

read(*,*)

end program constwalecka

```

## E.2 Programa 2

O programa apresentado abaixo foi desenvolvido em Fortran77 pelo autor desta dissertação para o cálculo de  $M^*/M$  para o modelo de Walecka. Os dados de entrada são  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$ , que podem ser obtidos diretamente com o programa apresentado anteriormente, na seção E1. Este programa foi utilizado na confecção dos gráficos apresentados nas figuras 2.3 e 2.4 . O looping do programa faz o fator  $\gamma$  assumir automaticamente os valores 2 e 4 para contemplar matéria de nêutrons e matéria nuclear, respectivamente. Para realização do cálculo, foi implementada a equação (2.131).

```

C  ESTE PROGRAMA CALCULA A MASSA EFETIVA DOS PROTONS E NEUTRONS C
C  NO MODELO DE WALECKA ( FIG.2 , PAG.48 REF 43)PROGRAM MASS
REAL M,PI,CS2,A,KF,EF,P1,P2,MN, RHO, R
INTEGER GAMMA
PARAMETER (PI=3.1415926, M= 4.76)
WRITE(*,*) 'QUAL O VALOR DE (GS/MS)**2 (fm**2) ?'
READ(*,*) CS2

```

```

CS2 = CS2*M**2
DO 30 GAMMA=2,4,2
OPEN (UNIT=1,FILE='massa.dat')
A = (CS2*GAMMA)/(M**2*4*PI**2)
MN = M
DO 20 KF=0.,4.,0.02
    RHO = GAMMA*(KF**3)/(6.0*PI**2)
    DO 10 I=1,20
        EF = ((KF)**2 + MN**2)**0.5
        P1 = A*KF*EF
        P2 = A*(MN**2)*LOG((KF+EF)/MN)
        MN = M/(1+P1-P2)
10 CONTINUE
    R = MN/M
    WRITE(1,*) KF,R
20 CONTINUE 30 CONTINUE
END

```

### E.3 Programa 3

O programa apresentado abaixo foi desenvolvido em Fortran77 pelo autor desta dissertação para o cálculo de  $E_l/A$  para o modelo de Walecka. Os dados de entrada são  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$ , que podem ser obtidos diretamente com o programa apresentado anteriormente, na seção E1. Este programa foi utilizado na confecção dos gráficos apresentados nas figuras 2.5 e 2.6. O primeiro looping do programa faz o fator  $\gamma$  assumir automaticamente os valores 2 e 4 para contemplar matéria de nêutrons e matéria nuclear, respectivamente. Para realização do cálculo, foram implementadas as equações (2.131), (2.105), (2.120) e (2.153).

```

C ESTE PROGRAMA CALCULA A ENERGIA/NUCLEON PARA MATERIA NUCLEAR C
C SIMETRICA NO MODELO DE WALECKA ( FIG.1 , PAG.47, Advances in C
C NP 16 ref 43) PROGRAM ENERG
REAL*4 M,PI,CS2,CV2,A,KF,EF,P1,P2,MN,RHO,E,BE
INTEGER GAMMA
PARAMETER (PI=3.1415926, M=4.76)
WRITE(*,*) 'QUAL O VALOR DE (GS/MS)**2 (fm**2) ?'
READ(*,*) CS2

```

```

CS2 = CS2*M**2
WRITE(*,*) 'QUAL O VALOR DE (GV/MV)**2 (fm**2) ?'
READ(*,*) CV2
CV2 = CV2*M**2
DO 90 GAMMA=2,4,2
OPEN (UNIT=2,FILE='energia.dat')

A = (CS2*GAMMA)/(M**2*4*PI**2)
MN = M
DO 20 KF=0.5,1.8,0.001
C  CALCULAR MASSA EFETIVA
DO 10 I=1,20
EF = ( KF**2 + MN**2 )**0.5
P1 = A*KF*EF
P2 = A*(MN**2)*LOG((KF+EF)/MN)
MN = M/(1+P1-P2)
10 CONTINUE C  CALCULAR DENSIDADE DE ENERGIA
RHO = GAMMA*(KF**3)/(6.0*PI**2)
E = (GAMMA/(2*PI**2)) * F(KF,MN)
E = E + 0.5*CV2*RHO**2/M**2
E = E + 0.5*(M-MN)**2*M**2/CS2
BE = E/RHO - M
BE = 197.32*BE
E = 197.32*E
WRITE (2,*) KF, BE
20 CONTINUE 90 CONTINUE

END

FUNCTION F(A,C)
REAL F,A,B,C
B = SQRT(A**2 + C**2)
F = B*A**3/4 + A*B*C**2/8 - C**4*LOG((A+B)/C)/8
END

```

## E.4 Programa 4

Os programas apresentados abaixo foram desenvolvidos em Fortran77 pelo autor desta dissertação para o cálculo da equação de estado  $p \times \varepsilon$  para o modelo de Walecka. Os dados de entrada são  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$ , que podem ser obtidos diretamente com o programa apresentado anteriormente, na seção E1. Este programa foi utilizado na confecção dos gráficos apresentados nas figuras 2.7 e 2.8. O primeiro programa está adaptado para  $\gamma = 2$ , a fim de contemplar matéria de nêutrons. O segundo programa, que tem exatamente a mesma estrutura do primeiro, está adaptado para  $\gamma = 4$ , a fim de contemplar matéria nuclear. Para realização do cálculo, foram implementadas as equações (2.131), (2.105), (2.120), (2.104) e (2.153).

```
C ESTE PROGRAMA CALCULA A EQ DE ESTADO PARA MATERIA de neutrons
C NO MODELO DE WALECKA (FIG.3 REF 43) PROGRAM EOS
REAL*4 M,PI,CS2,CV2,A,KF,EF,P1,P2,MN,RHO,E,E1,E2,E3,P,H

PARAMETER (PI=3.1415926, M=4.76)

WRITE(*,*) 'QUAL O VALOR DE (GS/MS)**2 (fm**2) ?'
READ(*,*) CS2
CS2 = CS2*M**2
WRITE(*,*) 'QUAL O VALOR DE (GV/MV)**2 (fm**2) ?'
READ(*,*) CV2
CV2 = CV2*M**2

OPEN (UNIT=3,FILE='eosneut.dat')

A = (CS2*2)/(M**2*4*PI**2)
MN = M
DO 20 KF=0.3,2.0,0.01
C CALCULAR MASSA EFETIVA
DO 10 I=1,20
EF = ( KF**2 + MN**2 )**0.5
P1 = A*KF*EF
P2 = A*(MN**2)*LOG((KF+EF)/MN)
MN = M/(1+P1-P2)
10 CONTINUE
C CALCULAR DENSIDADE DE ENERGIA
RHO = 2*(KF**3)/(6.0*PI**2)
```

```

E1 = (2/(2*PI**2)) * F(KF,MN)
E2 = 0.5*CV2*RHO**2/M**2
E3 = 0.5*(M-MN)**2*M**2/CS2
E = E1 + E2 + E3
P = E2 - E3 + (1/(8*PI**2))*H(KF,MN)
  IF (P.lt.0) GOTO 20
E = 3.517675d0*E
RHO = 3.161529d0*MN*RHO
P = 3.161529d0*P
P = LOG10(P) + 35.0d0
RHO = LOG10(RHO) + 15.0d0
E = LOG10(E) + 14.0d0
WRITE (3,*) E, P
20 CONTINUE
END

FUNCTION F(A,C)
REAL F,A,B,C
  B = SQRT(A**2 + C**2)
  F = B*A**3/4 + A*B*C**2/8 - C**4*LOG((A+B)/C)/8
END

FUNCTION H(A,C)
REAL*4 H,A,B,C
  B = SQRT(A**2 + C**2)
  H = 2.0d0*B*A**3/3.0d0 + C**4*LOG((A+B)/C) - B*A*C**2
END

C ESTE PROGRAMA CALCULA A EQ DE ESTADO PARA MATERIA nuclear NO C
C MODELO DE WALECKA (FIG.3 REF 43) PROGRAM EOS
REAL*4 M,PI,CS2,CV2,A,KF,EF,P1,P2,MN,RHO,E,E1,E2,E3,P,H

PARAMETER (PI=3.1415926, M=4.76)

WRITE(*,*) 'QUAL O VALOR DE (GS/MS)**2 (fm**2) ?'
READ(*,*) CS2
CS2 = CS2*M**2
WRITE(*,*) 'QUAL O VALOR DE (GV/MV)**2 (fm**2) ?'
READ(*,*) CV2

```

```

CV2 = CV2*M**2

OPEN (UNIT=3,FILE='eosbar.dat')

A = (CS2*4)/(M**2*4*PI**2)
MN = M
DO 20 KF=0.3,2.0,0.01
C  CALCULAR MASSA EFETIVA
DO 10 I=1,20
EF = ( KF**2 + MN**2 )**0.5
P1 = A*KF*EF
P2 = A*(MN**2)*LOG((KF+EF)/MN)
MN = M/(1+P1-P2)
10  CONTINUE
C  CALCULAR DENSIDADE DE ENERGIA
RHO = 4*(KF**3)/(6.0*PI**2)
E1 = (4/(2*PI**2)) * F(KF,MN)
E2 = 0.5*CV2*RHO**2/M**2
E3 = 0.5*(M-MN)**2*M**2/CS2
E = E1 + E2 + E3
P = E2 - E3 + (1/(4*PI**2))*H(KF,MN)
IF (P.lt.0) GOTO 20
E = 3.517675d0*E
RHO = 3.161529d0*MN*RHO
P = 3.161529d0*P
P = LOG10(P) + 35.0d0
RHO = LOG10(RHO) + 15.0d0
E = LOG10(E) + 14.0d0
WRITE (3,*) E, P
20  CONTINUE
END

FUNCTION F(A,C)
REAL F,A,B,C
B = SQRT(A**2 + C**2)
F = B*A**3/4 + A*B*C**2/8 - C**4*LOG((A+B)/C)/8
END

FUNCTION H(A,C)
REAL*4 H,A,B,C

```

```

B = SQRT(A**2 + C**2)
H = 2.0d0*B*A**3/3.0d0 + C**4*LOG((A+B)/C) - B*A*C**2
END

```

## E.5 Programa 5

O programa apresentado abaixo, desenvolvido em Fortran77, calcula as constantes de acoplamento  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$ ,  $(g_\omega/m_\omega)^2$  e  $(g_\rho/m_\rho)^2$ , bem como a massa efetiva do núcleon na saturação e o módulo de compressibilidade, tanto para o modelo escalar (E) como para o modelo escalar-vetorial (E-V), casos particulares do modelo com acoplamento derivativo ajustável de Taurines. Tendo como input os valores da densidade de saturação  $\rho_0 = 0.17fm^{-3}$  (e, conseqüentemente, o correspondente momentum de Fermi  $k_{F0}$  na saturação), da energia de ligação por núcleon na saturação ( $-16.0MeV$ ) e do coeficiente de assimetria  $a_4 = 32.5MeV$ , o programa resolve, primeiramente, o sistema formado pelas equações (2.300), (2.301) e (2.303) para cada valor do parâmetro ajustável  $\lambda$  (que varia, dentro de um looping, na faixa  $0.0 < \lambda < 1.8$ ), determinando, assim, valores para as variáveis  $\sigma_0$ ,  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$ . A seguir, ainda para cada valor de  $\lambda$  dentro do looping, calcula a massa efetiva do núcleon e o valor de  $(g_\rho/m_\rho)^2$  através das equações diretas (2.294) e (2.311) respectivamente. Por fim, calcula o valor de  $K$  através de uma derivação numérica implementada a partir da equação (2.8). As rotinas referentes ao método para encontrar os zeros das funções na resolução do sistema foram omitidas, mas podem ser facilmente encontradas na referência [100].

```

PROGRAM zm_classe
IMPLICIT NONE
INTEGER n
LOGICAL chec
DOUBLE PRECISION a, a4, b, c, de, fs, fv, fr, k, emin, rho,PI, x
DOUBLE PRECISION beta, gamma, lambda, m1, mnef, pq, KK
DOUBLE PRECISION dfridr, h, hh
C    DOUBLE PRECISION err
PARAMETER (n=3)
DIMENSION x(n)
EXTERNAL broydn
EXTERNAL de, dfridr, m1, mnef, pq
COMMON /bloco1/ PI
COMMON /bloco3/ beta, lambda

```

```

COMMON /bloco4/ k
COMMON /bloco5/ emin

COMMON /pquimico1/ fs, fv

open(1,FILE='som1.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(2,FILE='som2.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(3,FILE='som3.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(4,FILE='som4.dat',STATUS='UNKNOWN')

PI=3.141592654d0

C Parametros da materia nuclear simetrica

rho=0.17d0      ! rho[fm^-3]
emin=16.d0     ! emin[MeV]
a4=32.5d0/197.327d0 ! a4[fm^-1], Coeficiente de assimetria

C Parametros do modelo

C valor minimo para beta, gamma, lambda = 0.0001d0

C beta=0.00d0
C gamma=0.00d0
C lambda=1.00d0

k=((3.d0*(2.d0*PI**2)/4.d0)*rho)**(1.d0/3.d0)

C Chutes

x(1)=15.d0 !Const acopl meson escalar
x(2)=12.d0 !Const acopl meson vetorial
x(3)=0.2d0 !Condesado mesons escalares na densidade de sat

do 100 lambda=0.01,10.0d0,0.01d0

c beta=lambda
c gamma=lambda

```



```
beta=0.00d0
gamma=0.00d0
```

```
CALL broydn(x,n,chech)
```

```
a=x(1)
b=x(2)
c=x(3)
```

```
fs=a
fv=b
```

```
C The symmetry energy
```

```
fr=a4*((12.d0*PI**2)/((m1(c,gamma)**2)*k**3))
& -(1.d0/6.d0)*((k**2)/(dsqrt(k**2+mnef(c)**2)))
& *((12.d0*PI**2)/((m1(c,gamma)**2)*k**3))
```

```
C Modulo de Compressao
```

```
hh=1.d-3
KK=(9.d0*rho)*(pq(rho+hh)-pq(rho-hh))/(2.d0*hh)
```

```
C *****
```

```
write(1,*)mnef(x(3))*197.327d0, KK*197.327d0
write(2,*)lambda, (mnef(x(3))*197.327d0)/939.d0
write(3,*)lambda, fs, fv, fr
write(4,*)lambda, KK*197.327d0

write(*,*)lambda, fs, (mnef(x(3))*197.327d0)/939.d0, KK*197.327d0
```

```
100 end do
close(1)
close(2)
close(3)
close(4)
stop
END
```

```

SUBROUTINE funcv(n,x,fvec)
IMPLICIT NONE
INTEGER n
DOUBLE PRECISION f1,f2,f3,fvec,x
DIMENSION fvec(n),x(n)
EXTERNAL f1,f2,f3
fvec(1)=f1(x(1),x(2),x(3))
fvec(2)=f2(x(1),x(2),x(3))
fvec(3)=f3(x(1),x(2),x(3))
return
END

```

C \*\*\*\*\*

C Funcoes a serem zeradas simultaneamente para determinar as  
C constantes de acoplamento

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION f1(a,b,c)

```

C Derivada parcial da densidade de energia em relacao ao campo  
C medio do meson escalar.

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION a, b, c, de, err, fs, fv, h, hh, dfridr
EXTERNAL de, dfridr
COMMON /bloco2/ fs, fv
fs=a
fv=b
h=1.d-7
hh=1.d-5
f1=(de(c+hh)-de(c-hh))/(2.d0*hh)

```

C f1=dfridr(de,c,h,err)  
return  
END

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION f2(a,b,c)

```

C Energia de saturacao da materia nuclear

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION a, b, c, de, emin, fs, fv, k, M, rho, PI
EXTERNAL de

```

```

COMMON /bloco1/ PI
COMMON /bloco2/ fs, fv
COMMON /bloco4/ k
COMMON /bloco5/ emin
fs=a
fv=b
rho=(4.d0/(2.d0*PI**2))*(k**3)/3.d0
M=939.d0/197.327d0
f2=(de(c)/rho)-M+(emin/197.327d0)
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION f3(a,b,c)

```

C Pressao da materia nuclear

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION a, b, c, dp, fs, fv
EXTERNAL dp
COMMON /bloco2/ fs, fv
fs=a
fv=b
f3=dp(c)
return
END

```

C \*\*\*\*\*

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION de(c)

```

C Densidade de energia da materia nuclear simetrica.

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION c, ef, fs, fv, k, m, m1, mnef, PI
DOUBLE PRECISION beta, lambda, ifermi
EXTERNAL m1, mnef
COMMON /bloco1/ PI
COMMON /bloco2/ fs, fv
COMMON /bloco3/ beta, lambda
COMMON /bloco4/ k
m=mnef(c)
ef=dsqrt(k**2+m**2)
ifermi=(k/4)*ef**3

```

```

ifermi=ifermi-((m**2)/8.d0)*k*ef
ifermi=ifermi+((m**4)/8.d0)*dlog(abs(m/(k+ef)))
ifermi=ifermi*(4.d0/(2.d0*PI**2))
de=fv*0.5d0*(m1(c,beta)
&      *((k**3)/3.d0)*(4.d0/(2.d0*PI**2)))**2
de=de+0.5d0*(1.d0/fs)*c**2+ifermi
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION dp(c)
C Pressao da materia nuclear simetrica.
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION c, ef, fs, fv, k, m, m1, mnef, PI
DOUBLE PRECISION beta, ip, lambda
EXTERNAL m1, mnef
COMMON /bloco1/ PI
COMMON /bloco2/ fs, fv
COMMON /bloco3/ beta, lambda
COMMON /bloco4/ k
m=mnef(c)
ef=dsqrt(k**2+m**2)
ip=((k**3)/4.d0)*ef
ip=ip-(3.d0*m**2/8.d0)*k*ef
ip=ip+((3.d0*m**4)/8.d0)*dlog(abs((k+ef)/m))
ip=ip*(4.d0/(2.d0*PI**2))
dp=fv*0.5d0*((m1(c,beta)
& *(4.d0/(2.d0*PI**2))*((k**3)/3.d0)))**2
dp=dp-0.5d0*(1.d0/fs)*c**2+ip/3.d0
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION pq(rho)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION beta, c, fs, fv, k, lambda, m1, mnef, PI, rho
DOUBLE PRECISION diffe, x1, x2, tol, zbrent
EXTERNAL diffe, m1, mnef, zbrent
COMMON /bloco1/ PI
COMMON /bloco3/ beta, lambda
COMMON /pquimico1/ fs, fv

```

```

COMMON /pquimico2/ k
x1=0.01d0
x2=3.5d0
tol=1.d-5
k=((3.d0*(2.d0*PI**2)/4.d0)*rho)**(1.d0/3.d0)
c=zbrent(diffe,x1,x2,tol)
pq=fv*(m1(c,beta)*m1(c,beta)*(4.d0/(2.d0*PI**2))*((k**3)/3.d0))
& +dsqrt(k**2+(mnef(c))**2)
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION diffe(c)
C Derivada parcial da densidade de energia em relacao ao campo
C medio do meson escalar.

```

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION c, e, h, hh, dfridr
C DOUBLE PRECISION err
EXTERNAL e, dfridr
h=1.d-7
hh=1.d-3
diffe=(e(c+hh)-e(c-hh))/(2.d0*hh)
C diffe=dfridr(e,c,h,err)
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION e(c)
C Densidade de energia da materia nuclear simetrica.
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION c, ef, fs, fv, k, m, m1, mnef, PI
DOUBLE PRECISION beta, lambda, ifermi
EXTERNAL m1, mnef
COMMON /bloco1/ PI
COMMON /bloco3/ beta, lambda
COMMON /pquimico1/ fs, fv
COMMON /pquimico2/ k
m=mnef(c)
ef=dsqrt(k**2+m**2)
ifermi=(k/4)*ef**3
ifermi=ifermi-((m**2)/8.d0)*k*ef

```

```

ifermi=ifermi+((m**4)/8.d0)*dlog(abs(m/(k+ef)))
ifermi=ifermi*(4.d0/(2.d0*PI**2))
e=fv*0.5d0*(m1(c,beta)
&      *((k**3)/3.d0)*(4.d0/(2.d0*PI**2)))**2
e=e+0.5d0*(1.d0/fs)*c**2+ifermi
return
END

```

C C Rotina referente a massas efetivas C

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION m1(c,n)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION c, m, n
m=939.0d0/197.327d0
m1=((n*m)/(n*m+c))**(n)
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION mnef(c)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION c, m1, beta, lambda
EXTERNAL m1
COMMON /bloco3/ beta, lambda
mnef=(939.d0/197.327d0)*m1(c,lambda)
return
END

```

## E.6 Programa 6

O programa apresentado abaixo, desenvolvido em Fortran77, calcula a equação de estado da matéria nuclear para um sistema composto pelo octeto bariônico em equilíbrio químico e equilíbrio de carga elétrica com duas variedades de léptons: o elétron e o múon. Como dados de entrada, temos os valores de  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$ ,  $(g_\omega/m_\omega)^2$  e  $(g_\rho/m_\rho)^2$ , obtidos através do programa apresentado na seção anterior deste apêndice, bem como os correspondentes valores dos parâmetros ajustáveis  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . No programa, foram implementadas 11 equações, as de número (2.352), (2.353), (2.354), (2.355), (2.356), (2.357), (2.358) e (2.359) (equações de equilíbrio químico), a de número (2.360) (equação de neutralidade de carga elétrica), a de número (2.361) (equação de conservação do número bariônico) e

ainda a de número (2.273) (equação de campo para o méson  $\sigma$  na aproximação de campo médio). Zerando simultaneamente todas essas funções para um dado valor de densidade total do sistema, encontramos numericamente os valores para as variáveis  $k_{Fp}$ ,  $k_{Fn}$ ,  $k_{Fe}$ ,  $k_{F\mu}$ ,  $k_{F\Sigma^+}$ ,  $k_{F\Sigma^-}$ ,  $k_{F\Sigma^0}$ ,  $k_{F\Xi^-}$ ,  $k_{F\Xi^0}$ ,  $k_{F\Lambda}$  e  $\sigma_0$ . Com esses valores, o programa calcula, ainda, uma série de outras quantidades significativas: os valores dos campos mesônicos  $\omega$  e  $\rho$  na aproximação de campo médio (equações (2.276) e (2.279), respectivamente), a massa efetiva dos bárions (equação (2.294)), a densidade de energia  $\varepsilon$  e a pressão  $p$  do sistema (isto é, a equação de estado, dada pelas expressões (2.292) e (2.293)), o potencial químico de cada espécie de partícula presente (através das equações enumeradas de (2.327) até (2.336)), o potencial químico total do sistema (calculado a partir da equação de estado, utilizando-se a equação (2.324)) e, ainda, as populações relativas de cada espécie de partícula presente no meio nuclear, conforme as definições estabelecidas na subseção 2.6.7. A seguir, todos esses cálculos são repetidos para um próximo valor de densidade, em um looping que faz a densidade total do sistema variar de aproximadamente zero até valores elevados. As rotinas referentes ao método para encontrar os zeros das funções na resolução do sistema foram omitidas, mas podem ser facilmente encontradas na referência [100].

## C Octeto Barionico

```

PROGRAM simples_octeto
IMPLICIT NONE

INTEGER n, ntent

DOUBLE PRECISION tolx,tolf
DOUBLE PRECISION alpha, beta, gamma
DOUBLE PRECISION zero, rsat, rho_z
DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4

DOUBLE PRECISION ms,mw,mr
DOUBLE PRECISION ffs,ffw,ffr
DOUBLE PRECISION x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x
DOUBLE PRECISION PI,rho
DOUBLE PRECISION cgs1, cgs2
DOUBLE PRECISION meson_r, meson_v
DOUBLE PRECISION mu_ele, pqn, pqquimico
DOUBLE PRECISION d(10), m_ele, m_muon
DOUBLE PRECISION limiar, rho_el, rho_mu, rho_n,rho_p,mn,mp,

```

```

&          mnef, de, dp, dens_e, dens_p
DOUBLE PRECISION rho_c, rho_l, rho_s
DOUBLE PRECISION pn,pt3,pt4,pt5,pt6,pt7,pt8,ptel
DOUBLE PRECISION f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11
DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&          grl, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas

DOUBLE PRECISION pttotalmeu,ppmeu,pnmeu,pt3meu,pt4meu,pt5meu
DOUBLE PRECISION pt6meu,pt7meu,pt8meu,ptelmeu,ptmuonmeu

PARAMETER (n=11,ntent=1000)
DIMENSION x(n)

EXTERNAL mnewt
EXTERNAL de,dp,mnef,pquimico,meson_r,meson_v

EXTERNAL f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11

COMMON /bloco1/ PI,rho
COMMON /bloco3/ zero
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, grl, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas

COMMON /bloco23/ beta, gamma
COMMON /bloco25/ alpha

COMMON /mesons2/ms,mw,mr

open(10,FILE='dpress.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(11,FILE='eos.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(12,FILE='eos-tov.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(13,FILE='denerg.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(14,FILE='eos-tov2.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(16,FILE='mn.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(23,FILE='con-sig.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(24,FILE='con-del.dat',STATUS='UNKNOWN')

```



```

open(25,FILE='p-p.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(26,FILE='p-n.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(27,FILE='p-lam.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(28,FILE='p-sigmenos.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(29,FILE='p-sig0.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(30,FILE='p-sigmais.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(31,FILE='p-chimenos.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(32,FILE='p-chi0.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(33,FILE='p-e.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(34,FILE='p-mu.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(35,FILE='pot-mv.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(36,FILE='pot-mr.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(37,FILE='potq-e.dat',STATUS='UNKNOWN')
C   open(38,FILE='potqn-mn.dat',STATUS='UNKNOWN')
C   open(39,FILE='condensado-sig.dat',STATUS='UNKNOWN')
C   open(40,FILE='den-sat.dat',STATUS='UNKNOWN')
C   open(41,FILE='mef.dat',STATUS='UNKNOWN')
C   open(42,FILE='p-mu.dat',STATUS='UNKNOWN')
C   open(43,FILE='kf-p.dat',STATUS='UNKNOWN')
C   open(44,FILE='kf-n.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(45,FILE='zeros.dat',STATUS='UNKNOWN')
C   open(100,FILE='pressao.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(130,FILE='eos-ns.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(140,FILE='eos_file.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(150,FILE='transicao.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(160,FILE='densp.dat',STATUS='UNKNOWN')

C   x1 => momentum de fermi dos protons
C   x2 => momentum de fermi dos neutrons
C   x3 => momentum de fermi dos lambdas
C   x4 => momentum de fermi dos sigma-
C   x5 => momentum de fermi dos sigma0
C   x6 => momentum de fermi dos sigma+
C   x7 => momentum de fermi dos chi-
C   x8 => momentum de fermi dos chi0
C   x9 => momentum de fermi dos eletrons
C   x10 => momentum de fermi dos muons
C   x11 => condensado escalar

```

PI=3.1415927d0

C Conversao de fm<sup>-4</sup> -> cgs

cgs1=3.1616d35 ! dyne/cm<sup>2</sup>  
cgs2=3.5178d14 ! g/cm<sup>2</sup>

C Definicao do zero:

C zero=1.d-6  
zero=0.0d0

C Massas:

m\_ele=0.511d0/197.327d0 ! massa do eletron.  
m\_muon=105.66d0/197.327d0 ! massa do muon.  
m\_b1=939.d0/197.327d0 ! massa do nucleon.  
m\_b2=1116.d0/197.327d0 ! massa do Lambda.  
m\_b3=1189.d0/197.327d0 ! massa do Sigma.  
m\_b4=1314.d0/197.327d0 ! massa do chi.

C Massa dos mesons:

ms=600.d0/197.327d0  
mw=782.d0/197.327d0  
mr=770.d0/197.327d0

C \*\*\*\*\*

C SU(6):

write(\*,\*) 'Valor de ffs'  
read(\*,\*) ffs

write(\*,\*) 'Valor de ffw'  
read(\*,\*) ffw

write(\*,\*) 'Valor de ffr'  
read(\*,\*) ffr

```
gsn= sqrt(ffs*((ms)**2))
gwn= sqrt(ffw*((mw)**2))
grn= sqrt(ffr*((mr)**2))
```

```
gsl= (2.d0/3.d0) * gsn
gssig= (2.d0/3.d0) * gsn
gscas= (1.d0/3.d0) * gsn
```

```
gwl=(2.d0/3.d0) * gwn
gwsig=(2.d0/3.d0) * gwn
gwcas=(1.d0/3.d0) * gwn
```

```
grl=0.0d0
grsig=2.d0 * grn
grcas=grn
```

C Densidade de saturacao:

```
rho_z=0.17d0
```

C Energia limiar para criacao de muons:

```
limiar=dsqrt(m_muon**2.d0-m_ele**2.d0)
```

```
write(*,*) 'Valor de alfa(lambda)'  
read(*,*) alpha
```

```
write(*,*) 'Valor de beta'  
read(*,*) beta
```

```
write(*,*) 'Valor de gamma'  
read(*,*) gamma
```

```
c      alpha= 1.0d0 c      beta= 0.0d0 c      gamma= 0.0d0
```

C Chutes:

```
rho_n=.60d0  
rho_p=0.01d0
```

```

rho_l=0.0d0
rho_s=0.0d0
rho_c=0.0d0
rho_el=0.01d0
rho_mu=0.00d0

x(1)=(3.d0*PI**2*rho_p)**(1.d0/3.d0)
x(2)=(3.d0*PI**2*rho_n)**(1.d0/3.d0)
x(3)=(3.d0*PI**2*rho_l)**(1.d0/3.d0)
x(4)=(3.d0*PI**2*rho_s)**(1.d0/3.d0)
x(5)=(3.d0*PI**2*rho_s)**(1.d0/3.d0)
x(6)=(3.d0*PI**2*rho_s)**(1.d0/3.d0)
x(7)=(3.d0*PI**2*rho_c)**(1.d0/3.d0)
x(8)=(3.d0*PI**2*rho_c)**(1.d0/3.d0)
x(9)=(3.d0*PI**2*rho_el)**(1.d0/3.d0)
x(10)=(3.d0*PI**2*rho_mu)**(1.d0/3.d0)
x(11)=0.2d0

```

```

C      tolf = 1.d-05 ! BOM C      tolx = 1.d-04 ! BOM

```

```

tolf = 1.d-7
tolx = 1.d-6

```

```

do 100 rho=0.05d0, 2.3d0, 0.01d0
call mnewt(ntent,x,n,tolx,tolf)

```

```

x1=x(1)
x2=x(2)
x3=x(3)
x4=x(4)
x5=x(5)
x6=x(6)
x7=x(7)
x8=x(8)
x9=x(9)
x10=x(10)
x11=x(11)

```

C Potenciais Quimicos (Barions):

```

pn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
&          ,-0.5d0,gsn,gwn,grn)

pt3=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,0.d0,m_b2
&          ,0.d0,gs1,gw1,gr1)

pt4=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,0.d0,m_b3
&          ,-1.d0,gssig,gwsig,grsig)

pt5=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,0.d0,m_b3
&          ,0.d0,gssig,gwsig,grsig)

pt6=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,0.d0,m_b3
&          ,1.d0,gssig,gwsig,grsig)

pt7=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,0.d0,m_b4
&          ,-0.5d0,gscas,gwcas,grcas)

pt8=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,0.d0,m_b4
&          ,+0.5d0,gscas,gwcas,grcas)

```

C Potencial Quimico (Leptons):

```
ptel=dsqrt(x(9)**2+m_ele**2)
```

C Condicao de existencia das particulas:

C Lambdas

```

if(x(3).le.zero) then
  if(pn.gt.pt3) then
    x(3)=0.05d0
  endif
endif

```

C Sigma-

```
if(x(4).le.zero) then
```

```
        if((pn+ptel).gt.pt4) then
          x(4)=0.5d0
        endif
      endif
```

C Sigma0

```
        if(x(5).le.zero) then
          if(pn.gt.pt5) then
            x(5)=1.d0
          endif
        endif
```

C Sigma+

```
        if(x(6).le.zero) then
          if((pn-ptel).gt.pt6) then
            x(6)=1.d0
          endif
        endif
```

C Chi-

```
        if(x(7).le.zero) then
          if((pn+ptel).gt.pt7) then
            x(7)=1.5d0
          endif
        endif
```

C Chi0

```
        if(x(8).le.zero) then
          if(pn.gt.pt8) then
            x(8)=1.5d0
          endif
        endif
```

C Muons

```

    if(x(10).le.zero) then
      if(x(9).ge.limiar) then
        x(10)=dsqrt(x(9)**2.d0+m_ele**2.d0-m_muon**2.d0)
      end if
    end if

C   Descomentar para Nao incluir o octeto barionico.

C   x(3)=0.d0 C
C   x(4)=0.d0 C
C   x(5)=0.d0
C   x(6)=0.d0
C   x(7)=0.d0
C   x(8)=0.d0
C   x(10)=0.d0 ! muon

d(1)=(x1**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(2)=(x2**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(3)=(x3**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(4)=(x4**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(5)=(x5**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(6)=(x6**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(7)=(x7**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(8)=(x8**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(9)=(x9**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))
d(10)=(x10**3)/((3.d0)*((3.1415927d0)**2.d0))

if(d(10).lt.zero) then
d(10)=0.d0
x10=0.d0
endif

mn=mnef(x11,m_b1,gsn)

```

```

dens_p=dp(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)
dens_e=de(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)
pqn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
&          , -0.5d0,gsn,gwn,grn)
mu_ele=dsqrt(x9**2+m_ele**2)

      if(dens_p.le.0.d0) then
      go to 10
      else

      write(10,*)rho/rho_z,log10(dens_p*cgs1)          ! Pressao
      write(11,*)log10(dens_e*cgs2),log10(dens_p*cgs1) ! EOS

      write(12,*)log10(2.61166113d-10*dens_e),
&          log10(2.61166113d-10*dens_p) ! Utilizado em tov.f
      write(13,*)rho,dens_e    ! Dens Energ

      write(130,*)dens_e, dens_p, rho ! Utilizado em ns-moises.f
      write(140,*)rho, dens_p ! Utilizado em HnG.c

      write(14,*)dens_e,dens_p ! (fm^-4), Utilizado em tov_v2
      end if
10      continue

C      rsat=0.17d0
      rsat=1.d0

C      write(100,*)rho/rho_z,dens_p*197.327d0

      write(16,*)rho/rho_z, mn*197.327d0

      write(23,*)rho/rho_z, x11*197.327d0

      write(25,*) rho/rsat, (d(1)/rho)
      write(26,*) rho/rsat, (d(2)/rho)
      write(27,*) rho/rsat, (d(3)/rho)
      write(28,*) rho/rsat, (d(4)/rho)
      write(29,*) rho/rsat, (d(5)/rho)

```



```

write(30,*) rho/rsat, (d(6)/rho)
write(31,*) rho/rsat, (d(7)/rho)
write(32,*) rho/rsat, (d(8)/rho)
write(33,*) rho/rsat, (d(9)/rho)
write(34,*) rho/rsat, (d(10)/rho)

write(150,*) (dens_p+dens_e)/rho, dens_p
write(160,*) rho,dens_p

write(35,*)rho/rho_z,meson_v(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,
& x10,x11)*197.327d0
write(36,*)rho/rho_z,-meson_r(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,
& x10,x11)*197.327d0
write(37,*)rho/rho_z,(dsqrt(x(9)**2+m_ele**2)*197.327d0)/2.d0
C write(38,*)rho/rho_z,pqn*197.327d0-939.d0

```

#### C Materia Nuclear Simetrica

```

C write(39,*)rho/rho_z,gsn*x11*197.327d0
C write(40,*)rho/rho_z, (dens_e/rho)*197.327d0 - 939.d0
C write(41,*)rho/rho_z, mn*197.327d0/939.d0
C write(42,*)rho,d(10)/rho
C write(43,*)rho,x1 C write(44,*)rho,x2
C write(*,*)rho,x1,(dens_e/rho)*197.327d0 - 939.d0
C & ,m_n*197.327d0/939.d0

write(45,999)rho,f1(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f2(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f3(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f4(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f5(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f6(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f7(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f8(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f9(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f10(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11),
& f11(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)

write(*,998)rho, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10

```

```

100  end do

998  format(f10.2,E10.2,E10.2,E10.2,E10.2,E10.2,E10.2,
&      E10.2,E10.2,E10.2,E10.2,E10.2,E10.2,E10.2)

999  format(' ', f10.5,f10.5,f10.5,f10.5,f10.5,f10.5,f10.5,
&      f10.5, f10.5, f10.5, f10.5, f10.5, f10.5,f10.5)

      close(10)
      close(11)
      close(12)
      close(13)
      close(14)
      close(15)
      close(23)
      close(24)
      close(25)
      close(26)
      close(27)
      close(28)
      close(29)
      close(30)
      close(31)
      close(32)
      close(33)
      close(34)
      close(35)
      close(36)
      close(37)
C     close(38)
C     close(39)
C     close(40)
C     close(41)
C     close(42)
C     close(43)
C     close(44)
      close(45)
C     close(100)

```

```
close(130)
close(140)
close(150)
close(160)
```

```
stop
END
```

C \*\*\*\*\*

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION f1(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&                               ,x10,x11)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION rho, PI, x1, x2, x3, x4, x5, x6,
&                               x7, x8, x9, x10, x11,T
COMMON /bloco1/ PI, rho
COMMON /temper/ T
f1=(x1**3)/3.d0
& +(x2**3)/3.d0
& +(x3**3)/3.d0
& +(x4**3)/3.d0
& +(x5**3)/3.d0
& +(x6**3)/3.d0
& +(x7**3)/3.d0
& +(x8**3)/3.d0
f1=f1/(PI**2)-rho
return
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION f2(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&                               ,x10,x11)
```

C Neutralidade de carga

```
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION x1, x2, x3, x4, x5, x6,
&                               x7, x8, x9, x10, x11, T, PI, rho
COMMON /bloco1/ PI, rho
COMMON /temper/ T
f2=(x1**3)/3.d0
& -(x4**3)/3.d0
```

```

& +(x6**3)/3.d0
& -(x7**3)/3.d0
& -(x9**3)/3.d0
& -(x10**3)/3.d0

C      f2=x9**3-0.d0          ! mat nuclear simetrica

C f2=(x1**3)-(x9**3)-(x10**3)    ! p, n, e-, mu-

      f2=f2/(PI**2)
      return
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION f3(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&          ,x10,x11)
      IMPLICIT NONE
      DOUBLE PRECISION x1, x2, x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11
      DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon
      DOUBLE PRECISION theta
      EXTERNAL theta
      COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
      f3=(x10**2+m_muon**2)-(x9**2+m_ele**2)
      f3=f3*theta(x10,0.d0)
      return
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION f4(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&          ,x10,x11)

C Equilibrio Quimico para protons, neutrons e eletrons
      IMPLICIT NONE
      DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon, pp, pn, pe,
& x1, x2, x3, x4, x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11
      DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4,coef
      DOUBLE PRECISION pquimico
      DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&          grl, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
      EXTERNAL pquimico
      COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
      COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon

```

```

COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, gr1, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas

pp=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x1,m_b1
&          ,+0.5d0,gsn,gwn,grn)

pn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
&          ,-0.5d0,gsn,gwn,grn)

pe=dsqrt(x9**2.d0+m_ele**2.d0)
f4=pn-pe-pp

C      f4=pn-pp          ! materia nuclear simetrica
      return
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION f5(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&          ,x10,x11)

C Equilibrio Quimico para Lambdas
      IMPLICIT NONE
      DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
      DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon, plamb, pn,
&      x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11
      DOUBLE PRECISION pquimico

      DOUBLE PRECISION theta
      DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&      gr1, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
      EXTERNAL theta
      EXTERNAL pquimico
      COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
      COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
      COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
      COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, gr1, grsig, grcas
      COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas

      plamb=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x3,m_b2
&          ,0.d0,gsl,gw1,gr1)

```

```

pn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
&          ,-0.5d0,gsn,gwn,grn)

f5=pn-plamb
f5=f5*theta(x3,0.d0)
C   write(*,*)x1,f5
return
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION f6(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&          ,x10,x11)
C Equilibrio Quimico para Sigma-
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon, psigma, pn, pe,
&   x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11
DOUBLE PRECISION pquimico

DOUBLE PRECISION theta
DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&   gr1, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
EXTERNAL theta
EXTERNAL pquimico
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, gr1, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas

psigma=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x4,m_b3
&          ,-1.d0,gssig,gwsig,grsig)

pn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
&          ,-0.5d0,gsn,gwn,grn)

pe=dsqrt(x9**2.d0+m_ele**2.d0)
f6=pn+pe-psigma
f6=f6*theta(x4,0.d0)

```

```

C      write(*,*)x1,f6
      return
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION f7(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&                                     ,x10,x11)
C Equilibrio Quimico para Sigma0
      IMPLICIT NONE
      DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
      DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon, psigma, pn,
& x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11
      DOUBLE PRECISION pquimico

      DOUBLE PRECISION theta
      DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
& grl, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
      EXTERNAL theta
      EXTERNAL pquimico
      COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
      COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
      COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
      COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, grl, grsig, grcas
      COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas

      psigma=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x5,m_b3
& ,+0.d0,gssig,gwsig,grsig)

      pn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
& , -0.5d0,gsn,gwn,grn)

      f7=pn-psigma
      f7=f7*theta(x5,0.d0)
      return
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION f8(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&                                     ,x10,x11)
C Equilibrio Quimico para Sigma+
      IMPLICIT NONE

```

```

DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon, psigma, pn, pe,
&      x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11
DOUBLE PRECISION pquimico
DOUBLE PRECISION theta
DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&      grl, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
EXTERNAL theta
EXTERNAL pquimico
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, grl, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas

```

```

psigma=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x6,m_b3
&      ,+1.d0,gssig,gwsig,grsig)

```

```

pn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
&      ,-0.5d0,gsn,gwn,grn)

```

```

pe=dsqrt(x9**2.d0+m_ele**2.d0)
f8=pn-pe-psigma
f8=f8*theta(x6,0.d0)
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION f9(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&      ,x10,x11)

```

C Equilibrio Quimico para chi-

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon, pchi, pn, pe,
&      x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11
DOUBLE PRECISION pquimico
DOUBLE PRECISION theta
DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&      grl, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
EXTERNAL theta

```



```

EXTERNAL pquimico
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, gr1, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas

```

```

pchi=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x7,m_b4
&          ,-0.5d0,gscas,gwcas,grcas)

```

```

pn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
&          ,-0.5d0,gsn,gwn,grn)

```

```

pe=dsqrt(x9**2.d0+m_ele**2.d0)
f9=pn+pe-pchi
f9=f9*theta(x7,0.d0)
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION f10(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&          ,x10,x11)

```

C Equilibrio Quimico para chi0

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon, pchi, pn,
& x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11
DOUBLE PRECISION pquimico

```

```

DOUBLE PRECISION theta
DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&          gr1, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas

```

```

EXTERNAL theta
EXTERNAL pquimico
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, gr1, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas

```

```

pchi=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x8,m_b4
&          ,+0.5d0,gscas,gwcas,grcas)
pn=pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x11,x2,m_b1
&          ,-0.5d0,gsn,gwn,grn)
f10=pn-pchi
f10=f10*theta(x8,0.d0)
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION f11(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&          ,x10,x11)

```

C Derivada parcial da densidade de energia em relacao ao campo medio C do meson escalar.

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION h, x(12), x1, x2, x3, x4, x5, x6,
&          x7, x8, x9, x10, x11, hh
DOUBLE PRECISION de, dfridrm
EXTERNAL dfridrm,de
hh=1.d-5
f11=(de(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11+hh)-
& de(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11-hh))/(2.d0*hh)
return
END

```

C \*\*\*\*\*

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION de(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
&          ,x10,x11)

```

C Densidade de energia da materia nuclear.

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION zero
DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon,
&          x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11
DOUBLE PRECISION ifermi, meson_r, meson_v, mnef
DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5,m6,m7, m8
DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&          grl, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
DOUBLE PRECISION ms,mw,mr

```

```

EXTERNAL ifermi, mnef, meson_r, meson_v
COMMON /bloco3/ zero
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, gr1, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas
COMMON /mesons2/ms,mw,mr

```

```

m1=mnef(x11,m_b1,gsn)
m2=mnef(x11,m_b1,gsn)
m3=mnef(x11,m_b2,gsl)
m4=mnef(x11,m_b3,gssig)
m5=mnef(x11,m_b3,gssig)
m6=mnef(x11,m_b3,gssig)
m7=mnef(x11,m_b4,gscas)
m8=mnef(x11,m_b4,gscas)

```

```

de=ifermi(x1,m1)+ifermi(x2,m2)+ifermi(x3,m3)
de=de+ifermi(x4,m4)+ifermi(x5,m5)+ifermi(x6,m6)
de=de+ifermi(x7,m7)+ifermi(x8,m8)
de=de+ifermi(x9,m_ele)+ifermi(x10,m_muon)
de=de+(1.d0/2.d0)*(mr**2)
& *meson_r(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)**2
de=de+(1.d0/2.d0)*(mw**2)
& *meson_v(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)**2
de=de+(1.d0/2.d0)*(ms**2)*x11**2
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION dp(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9
& ,x10,x11)
C Densidade de Pressao da materia nuclear.
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION m_ele, m_muon, zero,
& x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10,x11
DOUBLE PRECISION m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5,m6,m7,m8

```

```

DOUBLE PRECISION ip, meson_r, meson_v, mnef
DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gwl, gwsig, gwcas,
&
      grl, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
DOUBLE PRECISION ms,mw,mr
DOUBLE PRECISION md

```

```

EXTERNAL ip, mnef, meson_r, meson_v
COMMON /bloco3/ zero
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco7/ m_ele, m_muon
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gwl, gwsig, gwcas, grl, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas
COMMON /mesons2/ms,mw,mr

```

```

m1=mnef(x11,m_b1,gsn)
m2=mnef(x11,m_b1,gsn)
m3=mnef(x11,m_b2,gsl)
m4=mnef(x11,m_b3,gssig)
m5=mnef(x11,m_b3,gssig)
m6=mnef(x11,m_b3,gssig)
m7=mnef(x11,m_b4,gscas)
m8=mnef(x11,m_b4,gscas)

```

```

dp=ip(x1,m1)+ip(x2,m2)+ip(x3,m3)
dp=dp+ip(x4,m4)+ip(x5,m5)+ip(x6,m6)
dp=dp+ip(x7,m7)+ip(x8,m8)
dp=dp+ip(x9,m_ele)+ip(x10,m_muon)
dp=dp/3.d0
dp=dp-(1.d0/2.d0)*(ms**2.d0)*x11**2
dp=dp+(1.d0/2.d0)*(mw**2.d0)
& *meson_v(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)**2
dp=dp+(1.d0/2.d0)*(mr**2)
& *meson_r(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)**2
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION ifermi(k,m)
IMPLICIT NONE

```

```

DOUBLE PRECISION ef, k, m, PI, rho, T
COMMON /bloco1/PI, rho
COMMON /temper/ T
ef=dsqrt(k**2.d0+m**2.d0)
ifermi=(k/4)*ef**3
ifermi=ifermi-((m**2)/8.d0)*k*ef
ifermi=ifermi+((m**4)/8.d0)*dlog(abs(m/(k+ef)))
ifermi=ifermi*(1.d0/PI**2)
return
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION ifermi2(k,m)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION ef, k, m, PI, rho, T
COMMON /bloco1/PI, rho
COMMON /temper/ T
ef=dsqrt(k**2+m**2)
ifermi2=(k/2.d0)*ef
ifermi2=ifermi2+(m**2/2.d0)*dlog(abs(m/(k+ef)))
ifermi2=ifermi2*m
ifermi2=ifermi2*(1.d0/PI**2)
return
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION ip(k,m)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION ef, k, m, PI, rho, T
COMMON /bloco1/PI, rho
COMMON /temper/ T
ef=dsqrt(k**2+m**2)
ip=((k**3)/4.d0)*ef
ip=ip-(3.d0*m**2/8.d0)*k*ef
ip=ip+((3.d0*m**4)/8.d0)*dlog(abs((k+ef)/m))
ip=ip*(1.d0/PI**2)
return
END

FUNCTION meson_v(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)
IMPLICIT NONE

```

```

DOUBLE PRECISION meson_v,PI, rho, x1, x2, x3, x4, x5,
&          x6, x7, x8, x9, x10, x11, m_b1,
& m_b2, m_b3, m_b4, ma, mb, mc, md, me,mf,mg,mh,beta, gamma
DOUBLE PRECISION m1, T

```

```

DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&          gr1, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
DOUBLE PRECISION ms,mw,mr
EXTERNAL m1

```

```

COMMON /bloco1/ PI, rho
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, gr1, grsig, grcas
COMMON /bloco21/ gsl, gssig, gscas
COMMON /bloco23/ beta, gamma
COMMON /mesons2/ms,mw,mr

```

```

ma=m1(x11,m_b1,beta,gsn)
mb=m1(x11,m_b1,beta,gsn)
mc=m1(x11,m_b2,beta,gsl)
md=m1(x11,m_b3,beta,gssig)
me=m1(x11,m_b3,beta,gssig)
mf=m1(x11,m_b3,beta,gssig)
mg=m1(x11,m_b4,beta,gscas)
mh=m1(x11,m_b4,beta,gscas)

```

```

meson_v=ma*gwn*((x1**3)/3.d0)
&      +mb*gwn*((x2**3)/3.d0)

```

```

meson_v=meson_v+mc*gw1*((x3**3)/3.d0)
&      +(PI**2/6.d0)*T**2*2.d0*x3)

```

```

meson_v=meson_v+(md*gwsig*((x4**3)/3.d0)
&      +me*gwsig*((x5**3)/3.d0)
&      +mf*gwsig*((x6**3)/3.d0))

```

```

meson_v=meson_v+(mg*gwcas*((x7**3)/3.d0)
&      +mh*gwcas*((x8**3)/3.d0))

```

```

meson_v=meson_v*(1.d0/(PI**2.d0))*(1.d0/(mw**2.d0))
return
END

FUNCTION meson_r(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION meson_r, PI, rho, x1, x2, x3,x4, x5,
&          x6, x7, x8, x9, x10, x11, m1,
& m_b1, m_b2, m_b3, m_b4, ma, mb, mc, md,me,mf,mg,mh,beta,gamma
DOUBLE PRECISION gsn, gwn, grn, gdn, gw1, gwsig, gwcas,
&          gr1, grsig, grcas, gsl, gssig, gscas
DOUBLE PRECISION ms,mw,mr

EXTERNAL m1

COMMON /bloco1/ PI, rho
COMMON /bloco6/ m_b1, m_b2, m_b3, m_b4
COMMON /bloco10/ gsn, gwn, grn
COMMON /bloco20/ gw1, gwsig, gwcas, gr1, grsig, grcas
COMMON /bloco21/  gsl, gssig, gscas
COMMON /bloco23/ beta, gamma
COMMON /mesons2/ms,mw,mr

ma=m1(x11,m_b1,gamma,gsn)
mb=m1(x11,m_b1,gamma,gsn)
mc=m1(x11,m_b2,gamma,gsl)
md=m1(x11,m_b3,gamma,gssig)
me=m1(x11,m_b3,gamma,gssig)
mf=m1(x11,m_b3,gamma,gssig)
mg=m1(x11,m_b4,gamma,gscas)
mh=m1(x11,m_b4,gamma,gscas)

meson_r=(ma*grn*((x1**3)/3.d0)
&          -mb*grn*((x2**3)/3.d0))*0.5d0

meson_r=meson_r+(mf*grsig*((x6**3)/3.d0)
&          -md*grsig*((x4**3)/3.d0))

```

```

meson_r=meson_r-mg*grcas*0.5d0*((x7**3.d0)/3.d0)

meson_r=meson_r+mh*grcas*0.5d0*((x8**3.d0)/3.d0 )

meson_r=meson_r*(1.d0/(PI**2))*(1.d0/(mr**2))
return
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION pquimico(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,
&      x8,x11,k,m,i_ispin,g1,g3,g4)
C g1-> sigma, g2-> delta, g3-> omega, g4-> rho
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION i_ispin, k, m, x1, x2
&      ,x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11
DOUBLE PRECISION m_n,m1,ma,mb,mnef,meson_r,meson_v
&      ,g1, g3, g4, beta, gamma

EXTERNAL m1, mnef, meson_r, meson_v

COMMON /bloco23/ beta, gamma

m_n=mnef(x11,m,g1)

ma=m1(x11,m,gamma,g1)
mb=m1(x11,m,beta,g1)

pquimico=ma*g4
& *meson_r(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)
& *i_ispin
pquimico=pquimico+mb*g3
&      *meson_v(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11)
pquimico=pquimico+dsqrt(k**2.d0+m_n**2.d0)

C      write(*,*) x1,k,i_ispin,m_n 10      return
END

C C Rotina referente a massas efetivas C

DOUBLE PRECISION FUNCTION m1(x11,m,n,g1)

```



```

      IMPLICIT NONE
      DOUBLE PRECISION m, n, g1, g2, I3
      DOUBLE PRECISION x11, x12,x13,g
      m1=((n*m)/(n*m+g1*x11))**(n)
C      write(*,*) x11,m,m1,x11
      return
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION mnef(x11,m,g1)
      IMPLICIT NONE
      DOUBLE PRECISION alpha, m, m1, g1, g2, I3
      DOUBLE PRECISION x11, x12,x13,g
      EXTERNAL m1
      COMMON /bloco25/ alpha
C      mnef=m*m1(x11,m,alpha,g1)          ! linha errada nunca usar
      mnef=m - (g1*x11*m1(x11,m,alpha,g1))
      return
      END

```

## E.7 Programa 7

O programa apresentado abaixo, desenvolvido em Fortran77, calcula a equação de estado da matéria de quarks para um sistema composto pelos quarks up, down e strange em equilíbrio químico e equilíbrio de carga elétrica com duas variedades de léptons: o elétron e o múon. Esse programa é bastante similar àquele apresentado na seção anterior deste apêndice, mas é consideravelmente mais simples, pois estamos tratando de um gás de partículas livres, sem interação. No programa, foram implementadas 5 equações, as de número (3.34), (3.35) e (3.36) (equações de equilíbrio químico), a de número (3.37) (equação de neutralidade de carga elétrica) e a de número (3.18) (equação de conservação do número bariônico). Zerando simultaneamente todas essas funções para um dado valor de densidade total do sistema, encontramos numericamente os valores para as variáveis  $k_u$ ,  $k_d$ ,  $k_s$ ,  $k_e$  e  $k_\mu$ . Com esses valores, o programa calcula, ainda, uma série de outras quantidades significativas: a densidade de energia  $\varepsilon$  e a pressão  $p$  do sistema (isto é, a equação de estado, dada pelas expressões (3.16) e (3.17)), o potencial químico de cada espécie de partícula presente (através da equação (3.10)), o potencial químico total do sistema (calculado a partir da equação de estado, utilizando-se a equação geral (2.324)) e, ainda, as populações relativas de cada espécie de partícula presente no sistema. A seguir, todos esses cálculos são repetidos para um próximo valor de densidade, em um looping que

faz a densidade total do sistema variar de aproximadamente zero até valores elevados. As rotinas referentes ao método para encontrar os zeros das funções na resolução do sistema foram omitidas, mas podem ser facilmente encontradas na referência [100].

## C Estrelas Estranhas

```
PROGRAM estranho
IMPLICIT NONE
INTEGER n
DOUBLE PRECISION numero, na, nq, nu, nd, ns, ne, nm, B
DOUBLE PRECISION g, gg
DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5
DOUBLE PRECISION x1, x2, x3, x4, x5, x
DOUBLE PRECISION PI, rho, limiar
DOUBLE PRECISION ft, cgs1, cgs2, zero
DOUBLE PRECISION de, dp, dens_e, dens_p
DOUBLE PRECISION pttotal, ptup, ptdown, ptstrange, pteletron, ptmuon
LOGICAL chec
PARAMETER (n=5)
DIMENSION x(n)
EXTERNAL broydn
EXTERNAL de, dp, numero
COMMON /bloco1/ PI, rho
COMMON /bloco6/ m1, m2, m3, m4, m5
COMMON /bloco7/ g, gg
COMMON /bloco10/ B

open(10, FILE='dpres.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(11, FILE='eosq.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(12, FILE='eos_tov.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(13, FILE='eos_tov2q.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(14, FILE='outs14.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(15, FILE='outs15.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(16, FILE='outs16.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(17, FILE='outs17.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(18, FILE='outs18.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(19, FILE='outs19.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(20, FILE='outs20.dat', STATUS='UNKNOWN')
open(21, FILE='outs21.dat', STATUS='UNKNOWN')
```

```

open(22,FILE='outs22.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(23,FILE='outs23.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(24,FILE='outs24.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(25,FILE='outs25.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(26,FILE='outs26.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(27,FILE='transicaoquarks.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(28,FILE='eos-ns.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(29,FILE='pdenq.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(30,FILE='mommuons.dat',STATUS='UNKNOWN')
open(31,FILE='popmuons.dat',STATUS='UNKNOWN')

```

```

C    x1 => momentum de fermi dos quarks up
C    x2 => momentum de fermi dos quarks down
C    x3 => momentum de fermi dos quarks strange
C    x4 => momentum de fermi dos eletrons
C    x5 => momentum de fermi dos muons

```

```

PI=3.1415927d0
zero=0.0d0

```

```

C Conversao de fm^-4 -> cgs

```

```

cgs1=3.1616d35      ! dyne/cm^2
cgs2=3.5178d14     ! g/cm^3

```

```

C Conversao das unidades de pressao de g/cm^3 -> MeV/fm^3 C ver
C.H.Kettner,F.Weber,N.K.Glendenning, Phy. Rev. D,51,1440(1995)

```

```

ft=(1.78d+12)**(-1)

```

```

C Constante dda sacola

```

```

B=(160.d0/197.327d0)**4

```

```

C Numero de Degenerescencia

```

```

g=6.d0      ! QUARKS
gg=2.d0     ! LEPTONS

```

C Massas

```
m1=5.d0/197.327d0      ! UP
m2=7.d0/197.327d0      ! DOWN
m3=150.d0/197.327d0    ! STRANGE
m4=0.51099907d0/197.327d0 ! ELETRON (fm^-1)
m5=105.66d0/197.327d0  ! massa do muon.
```

C Energia limiar para criacao de muons

```
limiar=dsqrt(m5**2.d0-m4**2.d0)
```

C Chutes

```
x(1)=.6d0
x(2)=.6d0
x(3)=.6d0
x(4)=.02d0
x(5)=0.1d0
```

C Limites para plotar densidades relativas rho=0.2->500

C Limites para plotar a EOS rho=0.2->20 C NAO baixar rho=.2 !!!!

```
do 100 rho=.2d0, 2.5d0, 0.01d0
```

```
CALL broydn(x,n,chech)
```

```
x1=x(1)
x2=x(2)
x3=x(3)
x4=x(4)
x5=x(5)
```

```
if(x(5).le.zero) then
  if(x(4).ge.limiar) then
    x(5)=dsqrt(x(4)**2.d0+m4**2.d0-m5**2.d0)
  end if
end if
```

```

ptup=sqrt(m1**2+x1**2)
ptdown=sqrt(m2**2+x2**2)
ptstrange=sqrt(m3**2+x3**2)
pteletron=sqrt(m4**2+x4**2)
ptmuon=sqrt(m5**2+x5**2)

pttotal=ptup+ptdown+ptstrange+pteletron+ptmuon

nu=numero(x1,m1,g)
nd=numero(x2,m2,g)
ns=numero(x3,m3,g)
ne=numero(x4,m4,gg)
nmu=numero(x5,m5,gg)

nq=(nu+nd+ns)
na=(1.d0/3.d0)*(nu+nd+ns) ! Densidade Barionica

dens_p=dp(x1,x2,x3,x4,x5)
dens_e=de(x1,x2,x3,x4,x5)

      if(dens_p.le.0.d0) then
      go to 10
      else

      write(10,*)log10(dens_e*cgs2),log10(ft*cgs2*dens_p)! Pressao
      write(11,*)log10(dens_e*cgs2),log10(dens_p*cgs1) ! EOS
      write(12,*)log10(2.61166113d-10*dens_e),
&          log10(2.61166113d-10*dens_p) ! Utilizado em tov.f
      write(13,*)dens_e,dens_p ! (fm^-4), Utilizado em tov_v2
      write(14,*)log10(dens_e*cgs2),dsqrt(x3**2+m3**2)*197.327d0

      end if
10      continue

write(15,*)log10(dens_e*cgs2), nu/(nq+ne)
write(16,*)log10(dens_e*cgs2), nd/(nq+ne)
write(17,*)log10(dens_e*cgs2), ns/(nq+ne)
write(18,*)log10(dens_e*cgs2), log10(ne/(nq+ne))

```

```
write(19,*)rho, x1
write(20,*)rho, x2
write(21,*)rho, x3
write(22,*)rho, x4
write(30,*)rho, x5
write(23,*)na, nu/nq
write(24,*)na, nd/nq
write(25,*)na, ns/nq
write(26,*)na, ne/nq
write(31,*)na, nmu/nq
write(27,*)(dens_p+dens_e)/rho, rho
write(28,*)dens_e, dens_p, rho
write(29,*)rho, dens_p
```

```
write(*,*)rho, x1, x2, x3,(1.d0/3.d0)*(nu+nd+ns),
& (2.d0*nu-nd-ns-3.d0*ne)
```

```
90 CONTINUE
100 end do
```

```
close(10)
close(11)
close(12)
close(13)
close(14)
close(15)
close(16)
close(17)
close(18)
close(19)
close(20)
close(21)
close(22)
close(23)
close(24)
close(25)
close(26)
close(27)
close(28)
```

```
close(29)
close(30)
close(31)
```

```
stop
END
```

```
C*****
```

```
SUBROUTINE funcv(n,x,fvec)
IMPLICIT NONE
INTEGER n
DOUBLE PRECISION f1,f2,f3,f4,f5,fvec,x
DIMENSION fvec(n),x(n)
EXTERNAL f1,f2,f3,f4,f5
fvec(1)=f1(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5))
fvec(2)=f2(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5))
fvec(3)=f3(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5))
fvec(4)=f4(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5))
fvec(5)=f5(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5))
return
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION f1(x1,x2,x3,x4,x5)
```

```
C Numero Barionico
```

```
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION es,eu,ed,p,a1,a2,a3
DOUBLE PRECISION g,gg,rho,numero,PI,x1,x2,x3,x4,x5
DOUBLE PRECISION m1,m2,m3,m4,m5
EXTERNAL numero
COMMON /bloco1/ PI,rho
COMMON /bloco6/ m1,m2,m3,m4,m5
COMMON /bloco7/ g,gg
p=2.d0*PI**2
es=dsqrt(x3**2+m3**2)
eu=dsqrt(x1**2+m1**2)
ed=dsqrt(x2**2+m2**2)
a1=(g/p)*(x1**3)/3.d0
a2=(g/p)*(x2**3)/3.d0
```

```

a3=(g/p)*(x3**3)/3.d0
f1=(1.d0/3.d0)*(a1+a2+a3)-rho
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION f2(x1,x2,x3,x4,x5)

```

C Neutralidade de Carga

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION es,ee,eu,ed,p,a1,a2,a3,a4,a5
DOUBLE PRECISION g, gg, PI, rho
DOUBLE PRECISION numero
DOUBLE PRECISION x1, x2, x3, x4, x5
DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5
EXTERNAL numero
COMMON /bloco1/ PI, rho
COMMON /bloco6/ m1, m2, m3, m4, m5
COMMON /bloco7/ g, gg
p=2.d0*PI**2
es=dsqrt(x3**2+m3**2)
ee=dsqrt(x4**2+m4**2)
eu=dsqrt(x1**2+m1**2)
ed=dsqrt(x2**2+m2**2)
a1=(g/p)*(x1**3)/3.d0
a2=(g/p)*(x2**3)/3.d0
a3=(g/p)*(x3**3)/3.d0
a4=(gg/p)*(x4**3)/3.d0
a5=(gg/p)*(x5**3)/3.d0
f2=2.d0*a1-a2-a3-3.d0*a4-3.d0*a5
return
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION f3(x1,x2,x3,x4,x5)

```

C Equilibrio Quimico para QUARKS DOWN, STRANGE

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5
DOUBLE PRECISION x1, x2, x3, x4, x5
COMMON /bloco6/ m1, m2, m3, m4, m5
f3=x2**2+m2**2-(x3**2+m3**2)

```

C f3=x3 ! Eliminando o quark strange



```

return
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION f4(x1,x2,x3,x4,x5)
C Equilibrio Quimico para quarks UP, DOWN
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5
DOUBLE PRECISION x1, x2, x3, x4, x5
COMMON /bloco6/ m1, m2, m3, m4, m5
f4=dsqrt(x1**2+m1**2)+dsqrt(x4**2+m4**2)-dsqrt(x2**2+m2**2)    !arrumar?
return
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION f5(x1,x2,x3,x4,x5)
C Equilibrio Quimico para eletrons e muons
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5
DOUBLE PRECISION x1, x2, x3, x4, x5
COMMON /bloco6/ m1, m2, m3, m4, m5
f5=(x4**2+m4**2)-(x5**2+m5**2)
return
END

C*****

DOUBLE PRECISION FUNCTION de(x1,x2,x3,x4,x5)
C Densidade de energia da materia.
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION g, gg, B
DOUBLE PRECISION x1, x2, x3, x4, x5
DOUBLE PRECISION ifermi
DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5
EXTERNAL ifermi
COMMON /bloco6/ m1, m2, m3, m4, m5
COMMON /bloco7/ g, gg
COMMON /bloco10/ B
de=ifermi(x1,m1,g)+ifermi(x2,m2,g)+ifermi(x3,m3,g)
de=de+ifermi(x4,m4,gg) + B +ifermi(x5,m5,gg)
return

```

END

DOUBLE PRECISION FUNCTION dp(x1,x2,x3,x4,x5)  
C Pressao da materia.

IMPLICIT NONE

DOUBLE PRECISION g, gg, B,

& x1, x2, x3, x4, x5

DOUBLE PRECISION m1, m2, m3, m4, m5

DOUBLE PRECISION ip

EXTERNAL ip

COMMON /bloco6/ m1, m2, m3, m4, m5

COMMON /bloco7/ g, gg

COMMON /bloco10/ B

dp=ip(x1,m1,g)+ip(x2,m2,g)+ip(x3,m3,g)

dp=dp+ip(x4,m4,gg) -B +ip(x5,m5,gg)

return

END

DOUBLE PRECISION FUNCTION numero(k,m,g)

IMPLICIT NONE

DOUBLE PRECISION g, k, m, PI, rho

COMMON /bloco1/PI, rho

numero=(g/(2.d0\*PI\*\*2))\*((1.d0/3.d0)\*k\*\*3)

return

END

DOUBLE PRECISION FUNCTION ifermi(k,m,g)

IMPLICIT NONE

DOUBLE PRECISION ef, g, k, m, PI, rho

COMMON /bloco1/PI, rho

ef=dsqrt(k\*\*2+m\*\*2)

ifermi=(k/4.d0)\*ef\*\*3

ifermi=ifermi-(m\*\*2/8.d0)\*k\*ef

ifermi=ifermi+(m\*\*4.d0/8.d0)\*dlog(abs(m/(k+ef)))

ifermi=ifermi\*(g/(2.d0\*PI\*\*2.d0))

return

END

DOUBLE PRECISION FUNCTION ip(k,m,g)

```

IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION ef, g, k, m, PI, rho
COMMON /bloco1/PI, rho
ef=dsqrt(k**2.d0+m**2.d0)
ip=(1.d0/4.d0)*ef**3*k
ip=ip-(5.d0*m**2/8.d0)*k*ef
ip=ip+(3.d0*m**4.d0/8.d0)*dlog(abs((k+ef)/m))
ip=ip*(g/(6.0d0*PI**2.d0))
return
END

```

## E.8 Programa 8

O programa apresentado abaixo, desenvolvido em Fortran77, realiza o cálculo numérico do coeficiente adiabático  $\Gamma$ , de acordo com a definição apresentada na equação (4.35). Os dados de entrada são os valores de densidade de energia ( $\varepsilon$ ), pressão ( $p$ ) e densidade ( $\rho$ ) em unidades do Sistema Natural de Unidades ( $\hbar = c = 1$ ), ou seja, o arquivo com os dados básicos da equação de estado considerada. Informando-se, ainda, o número de pontos nesse arquivo, o programa abaixo utiliza uma subrotina de *spline* numérico para interpolar os dados da equação de estado. A seguir, por aplicação direta da fórmula (4.35), calcula os valores de  $\Gamma$ . Este programa foi utilizado na confecção dos gráficos apresentados nas figuras 4.7, 4.9 e 4.11. As rotinas referentes ao método de *spline* numérico foram omitidas, mas podem ser facilmente encontradas na referência [100].

C C Este programa calcula o indice adiabatico

```

program ind_ad
implicit none

integer i, n1, np

parameter(np = 800)
double precision a1, a2, a3, pa1, pa, ea, rho_out
double precision e, p, rho, pxrho
double precision p1,p2,p3,e1,e2,e3,pfe,delta,dpde,adiabatico,rho1
dimension e(np), p(np), rho(np), pxrho(np)
dimension pfe(np)
external spline, splint

```

```

write(*,*) 'numero de pontos no arquivo eos-ns.dat: (< 800)'
read(*,*) n1

open(5,file='eos-ns.dat',status='unknown')
open(6,file='ind-adiabatico.dat',status='unknown')
open(7,file='ind-adiabatico2.dat',status='unknown')
open(8,file='ind-adiabatico3.dat',status='unknown')

do 10 i = 1,n1,1
  read(5,*) a1, a2, a3
  e(i) = a1 ! fm^-4
  p(i) = a2 ! fm^-4
  rho(i) = a3 ! fm^-3
10 continue

call spline(p,rho,n1,1.d+31,1.d+31,pxrho)
call spline(e,p,n1,1.d+31,1.d+31,pfe)

C Calculo do Indice Adiabatico, indiceadiabatico = (p+e)/p*dpde

delta=1.d-3

do 30 e1=e(1),e(n1),0.15d0
call splint(e,p,pfe,n1,e1,p1)
e3=e1+delta
call splint(e,p,pfe,n1,e3,p3)
e2=e1-delta
call splint(e,p,pfe,n1,e2,p2)
dpde=(p3-p2)/(2.d0*delta)
C dpde=(p3-p1)/delta
adiabatico=((p1+e1)/p1)*dpde
call splint(p,rho,pxrho,n1,p1,rho1)
write(6,*) e1*197.327d0, adiabatico
C write(7,*) log10(2.61166113d-10*e1), adiabatico C
write(7,*)log10(2.61166113d-10*e1), adiabatico
write(7,*) rho1, adiabatico
write(8,997)log10(3.5178d14*e1), adiabatico, rho1
30 continue

```

```
997  format(E15.6,E15.6,E15.6)
```

```
close(5)
```

```
close(6)
```

```
close(7)
```

```
close(8)
```

```
end
```

## E.9 Programa 9

O programa apresentado abaixo, desenvolvido em Fortran77, realiza a integração numérica das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, de acordo com a (1.13) e (1.14). A rigor, esse programa é um programa que soluciona numericamente as equações TOV não apenas para uma estrela estática; trata-se, na verdade, de um programa para estrelas em rotação lenta, uma primeira abordagem ao problema da implementação de efeitos de rotação nas estrelas de nêutrons. Todavia, escolhendo-se como dado de entrada uma velocidade angular nula, teremos os resultados para estrelas estáticas, conforme considerado nesta dissertação. Os dados de entrada são os valores de densidade de energia ( $\varepsilon$ ), pressão ( $p$ ) e densidade ( $\rho$ ) em unidades do Sistema Natural de Unidades ( $\hbar = c = 1$ ), ou seja, o arquivo com os dados básicos da equação de estado considerada e a velocidade angular de rotação da estrela em *rad/s* (no nosso caso, utilizamos o valor 0 nessa entrada). Informando-se, ainda, o número de pontos nesse arquivo, o programa abaixo utiliza uma subrotina de *spline* numérico para interpolar os dados da equação de estado. A seguir, utilizando um algoritmo do método de Runge-Kutta de quarta ordem, o programa determina a solução das equações TOV. Os dados de saída são, basicamente, a densidade de energia central da estrela (em *MeV/fm<sup>3</sup>*), seu raio (em *km*), sua massa (em  $M_{\odot}$ ), seu *momentum* angular (em unidades do sistema CGS), seu momento de inércia (também em unidades do sistema CGS) e o correspondente *redshift* gravitacional. Em nossa abordagem, interessam, de fato, os resultados para densidade de energia central da estrela, seu raio, sua massa e o correspondente *redshift* gravitacional. Este programa foi utilizado na obtenção dos resultados apresentados na seção 4.5. As rotinas referentes ao método de *spline* numérico e ao método de Runge-Kutta foram omitidas, mas podem ser facilmente encontradas na referência [100].

```

program family_slow_rot
implicit none

integer dim, n, np, neq, i, j, nm

parameter(dim=10, np = 500, neq=2)

double precision e1, p1, rho, rhop1, rhoe1, e1rho
double precision corr, corr2, corr3, PI, dr, am, G, anc
double precision anph, z
double precision r, an, e, ec, p, dpdn, phi
double precision a1, a2, a3, delta
double precision anf, pf, wbar
double precision y, dydx, x, h
double precision Integrando, ri, rf, II, JJ
double precision Omega, num, den
double precision raio
double precision raioint, int, func
double precision W0, W_velho, W_novo, wbar_velho, wbar_novo, W_K

data PI, G/3.1415927d0,1.477d0/
data corr, corr2, corr3/0.89631d-6,1.477d0,1.99d43/

dimension raio(np), raioint(np), int(np)
dimension y(dim), dydx(dim)
dimension e1(np), p1(np), rho(np), rhop1(np), rhoe1(np), e1rho(np)

external spline, splint, derivs, runge_kutta_4, qgaus, func

common /bloco1/ e1, p1, rho, rhop1, rhoe1 ,e1rho
common /bloco2/ n
common /bloco6/ raio,raioint, int
common /bloco7/ nm

```

C Constantes Fisicas

```

C      c = 299792458 m s-1 = 2.99792E10 cm s-1
C      Msol = 1.9889E+30 Kg
C      Msol = 1.9889E+33 g
C      G = 6.6731E-11 m3 Kg-1 s-2

```

```

C      G = 6.6731E-8  cm^3 g^-1 s^-2
C      G = 1.47673 Km Msol^-1 ~ 1.477 Km Msol^-1

C Unidades
C      G = c = 1
C      1 = 6.6731E-8  cm^3 g^-1 s^-2
C      1 = 299792458 m s^-1 = 29979245800 cm s^-1 = 2.99792E+10
C      1 s = 2.99792E+10 cm
C      1 g = 7.42485E-29 cm
C      1 s = 2.99792E+5 Km
C      1 cm = 3.33565E-11 s
C      1 g =5.02790E-34 Msol

      write(*,*) 'Qual o numero de pontos em eos-ns.dat:( < 500) '
      read(*,*) n

C Parametros da Estrela: Densidade Barionica Central, anc

C write(*,898)

C      read(*,*) anc

      write(*,*) ' entre com velocidade angular em rad s^-1 '
      read(*,*) W0

C      W0=276.8d0  ! rad/s^-1

      open(5,file='eos-ns.dat',status='unknown')
      open(8,file='dados_srott.dat',status='unknown')
      open(10,file='m_inercia.dat',status='unknown')

      do 10 i = 1,n,1
C      a1, a2 em fm^-4, a3 em fm^-3
      read(5,*) a1, a2, a3
C      e1(i) = a1          ! fm^-4
C      p1(i) = a2          ! fm^-4
      e1(i) = a1*197.327d0      ! MeV/fm^3
      p1(i) = a2*197.327d0      ! MeV/fm^3
      rho(i) = a3              ! fm^-3

```

10 continue

```
call spline(rho,p1,n,1.d+30,1.d+30,rhop1) ! p = p(rho)
call spline(rho,e1,n,1.d+30,1.d+30,rhoe1) ! e = e(rho)
```

C Unidades

C am:massa da estrela, e:densidade de energia, p:pressao, r:raio

C r, dr [Km]

C e, p [MeV/fm<sup>3</sup>]

C am [M\_solar]

```
j=0 ! inicializando o contador de pontos
```

C r=0.0d0

```
dr=5.d-2
```

```
h=dr
```

```
do 100 anc=rho(1),rho(n),0.001d0
```

```
call splint(rho,e1,rhoe1,n,anc,ec)
```

```
r=0.0d0
```

```
y(1)= 0.0d0 ! massa estelar
```

```
y(2)= anc ! densidade barionica central
```

```
y(3)=0.0d0
```

```
y(4)=0.d0
```

```
y(5)=1.82342 ! frequencia angular em rad s-1
```

```
do j=1, 1000
```

```
call runge_kutta_4(neq,h,r,y,derivs)
```

```
anph=y(2)
```

```
call splint(rho,e1,rhoe1,n,anph,e)
```

```
call splint(rho,p1,rhop1,n,anph,p)
```

```
if(p.le.0.d0) then
```

```
goto 50
```

```
end if
```



```

    am=y(1)
    phi=y(3)
    wbar=y(5)

    num=r*r*r*r*(e+p)*corr*wbar*DExp(-phi)
    den=(1.d0-G*2.d0*am/r)**(1.d0/2.d0)
    Integrando=(8.d0*PI/3.d0)*(num/den)

C      write(8,999) r, am, p, e, anph, phi, wbar,Integrando

raio(j) = r
    int(j) = Integrando

    r=r+dr

    end do

50  continue

C ***** Calculo do Momento de Inercia II ***

    nm=j-1
    W_novo=W0 ! s^-1
    call spline(raio,int,nm,1.d+30,1.d+30,raoint)
    ri=raio(2) ! Km
    rf=raio(j-1) ! Km
    call qgaus(func,ri,rf,JJ)
    W_velho = wbar + 2.d0/(r*r*r)*JJ*corr2 ! s^-1
    wbar_novo = wbar*(W_novo/W_velho) ! s^-1
    JJ=(W_novo-wbar_novo)*(r*r*r)/2.d0 ! Km^3 s^-1
    JJ=JJ/corr2 ! M_sol Km^2 s^-1
    JJ=JJ*corr3 ! g cm^2 s^-1
    II=JJ/W_novo ! g cm^2

C *****Frequencia de Kepler *****

C Ver N. K. Glendenning, Compact Stars, Cap 6, pag 261.

    W_K=r*r*r/(2.d0*(II/corr3))*wbar_novo*corr2

```

C Avermelhamento Gravitacional

```
z=(1.d0-2.d0*am*corr2/r)**(-0.5d0) - 1.d0
```

```
write(10,1000) anc,log10(ec*1.7827d12), r,am,JJ, II, Log10(II),  
& z, wbar_novo/W0, W0
```

C \*\*\*\*\* Formatos de saida \*\*\*\*\*

```
100 continue
```

```
898 format(' Entrar densidade barionica central em fm^-3')
```

```
998 format(f7.4, 6f11.4, '', I5)
```

```
999 format(f7.4, 7f11.4)
```

```
1000 format(f7.3,f10.4,f7.2,f9.3, 2E12.4,f9.3,f7.3,f8.4,f9.2)
```

```
close(5)
```

```
close(8)
```

```
close(10)
```

```
end program family_slow_rot
```

C \*\*\*\*\* Subrotinas \*\*\*\*\*

```
subroutine derivs(x,y,dydx)
```

```
implicit none
```

```
integer n, np, npt
```

```
parameter (n=10, np=500)
```

```
double precision PI, G
```

```
double precision dydx(n), y(n), x
```

```
double precision e1, p1, rho, rhop1, rhoe1, e1rho
```

```
double precision e, p, pf, r, anph, anf, delta, m, corr
```

```
double precision dmdr, dndr, dpdn, dphidr
```

```
double precision anin, pin
```

```
double precision a, b, wbar, z, dwbardr, dzdr
```

```
dimension e1(np), p1(np), rho(np), rhop1(np), rhoe1(np), e1rho(np)
```

```
data PI,G/3.1415927d0,1.47669d0/
```

```
data delta/1.d-3/
```

```

data corr/0.8962d-6/
external splint
common /bloco1/ e1, p1, rho, rhop1, rhoe1, eirho
common /bloco2/ npt
r=x
wbar=y(5)
z=y(4)
anph=y(2)
m=y(1)

if(r.le.0.d0) then
  dydx(1) = 0.d0
  dydx(2) = 0.d0
  dydx(3) = 0.d0
  dydx(4) = 0.d0
  dydx(5) = 0.d0
  else

  call splint(rho,e1,rhoe1,npt,anph,e)
  call splint(rho,p1,rhop1,npt,anph,p)

  anf=anph+delta
  anin=anph-delta
  call splint(rho,p1,rhop1,npt,anin,pin)
  call splint(rho,p1,rhop1,npt,anf,pf)
  dpdn=(pf-p)/delta
C   dpdn=(pf-pin)/(2.d0*delta)

  dmdr=4.d0*PI*r*r*e*corr

  dndr=-G*((e+p)*(4.d0*PI*r*r*r*p*corr+m))
&   /(r*(r-2.d0*G*m)*dpdn)

  dphidr=G*(4.d0*PI*r*r*r*p*corr+m)
&   /(r*(r-2.d0*G*m))

  dwbardr=z

  a = G*( 4.d0*PI*r*(e+p)*corr )/(1.d0-2.d0*G*m/r) - 1.d0/r

```

```

        b = G*( 8.d0*PI*(e+p)*corr )/(1.d0-2.d0*G*m/r)

        dzdr= a*z+b*wbar

        dydx(1) = dmdr
        dydx(2) = dndr
        dydx(3) = dphidr
        dydx(4) = dzdr
        dydx(5) = dwbardr

    end if

return
end

double precision function func(r)
implicit none
integer np, nm
parameter (np=500)
double precision r,raio,raioint, int, MI
dimension raio(np), raioint(np), int(np)
external splint
common /bloco6 /raio,raioint, int
common /bloco7 /nm
call splint(raio,int,raioint,nm,r,MI)
func=MI
return
end function func

```

# Apêndice F

## Estabilidade em Polítropos Clássicos

Iniciamos com a equação clássica de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)\varepsilon(r)}{r^2}, \quad (\text{F.1})$$

que, combinada com

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr, \quad (\text{F.2})$$

pode ser escrita como

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\varepsilon} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi r^2 \varepsilon. \quad (\text{F.3})$$

Ao inserirmos na equação acima uma equação de estado do tipo

$$p = a\varepsilon^\kappa, \quad (\text{F.4})$$

a massa e o raio da estrela aparecem sob a forma de uma expressão analítica, como veremos. Estrelas que obedecem a uma equação de estado do tipo (F.4) são denominadas *politrópicas*.

Uma equação diferencial conhecida pode ser obtida de (F.3) e (F.4) se introduzirmos a transformação:

$$r = \left( \frac{a\kappa}{4\pi(\kappa-1)} \right)^{1/2} \varepsilon_c^{\frac{\kappa-2}{2}} \xi, \quad (\text{F.5})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_c \theta^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad (\text{F.6})$$

onde  $\varepsilon_c = \varepsilon(0)$  e  $\theta = \theta(\xi)$ . Resulta, dessa substituição, a equação de Lane-Emdem [101] de índice  $(\kappa-1)^{-1}$ :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^{\frac{1}{\kappa-1}} = 0, \quad (\text{F.7})$$

com condições iniciais  $\theta(0) = 1$  e  $\theta'(0) = 0$ , que saem de  $\varepsilon_c = \varepsilon(0)$  e  $p'(0) = 0$ . Obtendo-se  $\theta(\xi)$ , seu primeiro zero, definido como  $\xi_1$ , corresponderá ao raio da estrela, pois, nesse ponto, a pressão se anula.

Das definições (F.5) e (F.6), temos que

$$R = \left( \frac{a\kappa}{4\pi(\kappa-1)} \right)^{1/2} \varepsilon_c^{\frac{\kappa-2}{2}} \xi_1 \quad (\text{F.8})$$

e

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr = 4\pi \varepsilon_c^{(3\kappa-4)/2} \left( \frac{a\kappa}{4\pi(\kappa-1)} \right)^{3/2} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^{\frac{1}{\kappa-1}} d\xi. \quad (\text{F.9})$$

Com auxílio da equação de Lane-Emden, a integral pode ser facilmente calculada:

$$\int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^{\frac{1}{\kappa-1}} d\xi = - \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = -\xi_1^2 \theta'(\xi_1). \quad (\text{F.10})$$

Portanto, a massa da estrela é dada por

$$M = 4\pi \varepsilon_c^{(3\kappa-4)/2} \left( \frac{a\kappa}{4\pi(\kappa-1)} \right)^{3/2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (\text{F.11})$$

No Capítulo 1, mostramos que uma região de estabilidade deve ter  $\partial M / \partial \varepsilon_c > 0$ . Aplicando essa condição a (F.11), temos que

$$\frac{(3\kappa-4)}{2} \cdot 4\pi \varepsilon_c^{[(3\kappa-4)-2]/2} \left( \frac{a\kappa}{4\pi(\kappa-1)} \right)^{3/2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| > 0. \quad (\text{F.12})$$

Como, naturalmente,

$$4\pi \varepsilon_c^{[(3\kappa-4)-2]/2} \left( \frac{a\kappa}{4\pi(\kappa-1)} \right)^{3/2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| > 0, \quad (\text{F.13})$$

a condição de estabilidade se resume a

$$\frac{(3\kappa-4)}{2} > 0, \quad (\text{F.14})$$

de onde vem que

$$\kappa > \frac{4}{3}. \quad (\text{F.15})$$

# Referências Bibliográficas

- [1 ] LEITE LOPES, J. *A Estrutura Quântica da Matéria (Do Átomo Pré-Socrático às Partículas Elementares)*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ e ERCA Editora e Gráfica, 1992.
- [2 ] ARISTÓTELES. *Da Geração e Corrupção, I, 2. 316 a 13, In Os Pensadores (Pré-Socráticos)*. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda, 2000.
- [3 ] WALECKA, J. D. A theory of high condensed matter. *Annals of Physics*, New York, v. 83, n. 2, p. 491-529, Apr. 1974.
- [4 ] YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles. *Proc. Phys.-Math. Soc.*, Tokyo, v. 17, p. 48-57, Feb. 1935.
- [5 ] BOGUTA, J.; BODMER, A. R. Relativistic calculation on nuclear matter and the nuclear surface. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 292, n. 3, p. 413-428, Dec. 1977.
- [6 ] ZIMANYI, J.; MOSZKOWSKI, S. A. Nuclear equation of state with derivative scalar coupling. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 42, n. 4, p. 1416-1421, Oct. 1990.
- [7 ] TAURINES, A. R.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; MALHEIRO, M.; CHIAPPARINI, M. Neutron stars in a class of nonlinear relativistic models. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 63, 065801, May 2001.
- [8 ] ABBOTT, A. CERN claims first experimental creation of quark-gluon plasma. *Nature*, London, v. 403, p. 581, Feb. 2000.
- [9 ] CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B.; WEISSKOPF, V. New extended model of hadrons. *Phys. Rev. D*, New York, v. 9, n. 12, p. 3471-3495, Mar. 1974.
- [10 ] TOLMAN, R. C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, New York, v. 55, n. 4, p. 364-373, Feb. 1939.
- [11 ] OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, New York, v. 55, n. 4, p. 374-381, Feb. 1939.

- [12] | CHANDRASEKHAR, S. Maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophys. J.*, New York, v. 74, p. 81-82, July 1931.
- [13] | BURROWS, A.; LATTIMER, J. M. The birth of neutron stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 307, p. 178, 1986.
- [14] | WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. New York: John Wiley, 1972.
- [15] | KEPLER, S. O.; SARAIVA, M. F. O. *Fundamentos de Astronomia e Astrofísica*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2000.
- [16] | CHADWICK, J. Possible existence of a neutron. *Nature*, London, v. 129, p. 312, Feb. 1932.
- [17] | LANDAU, L. D. *Phys. Z. Sowjetunion*, v. 1, p. 285, July 1932.
- [18] | BAADE, W.; ZWICKY, F. Supernovae and cosmic rays. *Phys. Rev.*, New York, v. 45, n. 1, p. 138, Jan. 1934.
- [19] | WOLTJER, L. X-rays and type I supernova remnants. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 140, n. 3, p. 1309-1313, Oct. 1964.
- [20] | HEWISH, A.; BELL, S. J.; PIKINGTON, J. D. H.; SCOTT, P. F.; COLLINS, R. A. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, London, v. 217, p. 709-713, Feb. 1968.
- [21] | PACINI, F. Rotating neutron stars, pulsars and supernova remnants. *Nature*, London, v. 219, p. 145-146, July 1968.
- [22] | GOLD, T. Rotating neutron stars and the nature of pulsars. *Nature*, London, v. 221, n. 5175, p. 25-26, Jan. 1969.
- [23] | LYNE, A; GRAHAM-SMITH, F. *Pulsar Astronomy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [24] | BACKER, D. C.; KULKARNI, S.; HEILES, C.; DAVIS, M. M.; GOSS, W. M. A millisecond pulsar. *Nature*, London, v. 300, n. 5893, p. 615-617, Jan. 1982.
- [25] | WOLSZCZAN, A.; FRAIL, D. A. A planetary system around the millisecond pulsar PSR 1257+12. *Nature*, London, v. 355, n. 6356, p. 145-147, Jan. 1992.
- [26] | RAWLEY, L. A.; TAYLOR, J. H.; DAVIES, M. M. Fundamental astrometry and millisecond pulsars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 326, p. 947-953, March 1988.
- [27] | GLENDENNING, N. K. Neutron stars are giant hypernuclei? *Astrophys. J.*, Chicago, v. 293, p. 470-493, June 1985.



- [28] | BANERJEE, B.; GLENDENNING, N. K.; GYULASSY, M. Pion condensation in a relativistic field theory consistent with bulk properties of nuclear matter. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 361, n. 1, p. 326-354, May 1981.
- [29] | GLENDENNING, N. K. *Compact Stars — Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [30] | MIGDAL, A. B. Pion fields in nuclear matter. *Rev. Mod. Phys.*, New York, v. 50, p. 107-172, Jan. 1978.
- [31] | SAWYER, R. F.; SCALLAPINO, D. J. Pion condensation in superdense nuclear matter. *Phys. Rev. D*, New York, v. 7, p. 953-964, Feb. 1973.
- [32] | KAPLAN, D. B.; NELSON, A. E. Strange goings on in dense nucleonic matter. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 175, p. 57-63, July 1986.
- [33] | THORSSON, V.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. Composition, structure and evolution of neutron stars with kaon condensates. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 572, p. 693-731, May 1994.
- [34] | WAAS, T.; RHO, M.; WEISE, W. Effective kaon mass in dense baryonic matter: role of correlations. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 617, p. 449-463, May 1997.
- [35] | ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introduction to General Relativity*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha LTD., 1975.
- [36] | D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [37] | RHOADES, C. E.; RUFFINI, R. Maximum mass of a neutron star. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 32, n. 6, p. 324-327, Feb. 1974.
- [38] | HARTLE, J. B. Slowly rotating relativistic stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 150, p. 1005, 1967.
- [39] | COOK, G. B.; SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. Rapidly rotating neutron stars in general relativity: realistic equations of state. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 424, p. 823, 1994.
- [40] | SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. New York: John Wiley, 1983.
- [41] | *Atlas Visuais — Universo e Dinossauros*. São Paulo: Editora Ática, 1995.
- [42] | *The Natural History of the Universe*. London: Marshall Editions Developments Limited, 1991.

- [43] | SEROT, B. D., WALECKA, J. D. *Advances in Nuclear Physics*. New York: Plenum Press, 1986. v. 16.
- [44] | JOHNSON, M. H.; TELLER, E. Classical field theory of nuclear forces. *Phys. Rev.*, New York, v. 98, n. 3, p. 783-787, May 1955.
- [45] | DUERR, H. P. Relativistic effects in nuclear forces. *Phys. Rev.*, New York, v. 103, n. 2, p. 469-480, July 1956.
- [46] | BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic Quantum Fields*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [47] | GOMES, L. C.; WALECKA, J. D.; WEISSKOPF, V. F. Properties of nuclear matter. *Ann. Phys.*, New York, v. 3, n. 3, p. 241-274, Mar. 1958.
- [48] | VON WEISZACKER, C. F. Theory of nuclear mass. *Z. Physik*, Heidelberg, v. 96, n. 7/8, p. 431-458, Sept. 1935.
- [49] | MYERS, W. D.; SWIATECKI, W. J. Average nuclear properties. *Ann. Phys.*, New York, v. 55, n. 3, p. 395-505, Dec. 1969.
- [50] | MOLLER, P.; MYERS, W. D.; SWIATECKI, W. J.; TREINER, J. Nuclear mass formula with a finite-range droplet model and a folded-Yukawa single-particle potential. *Atom. Data Nucl. Data Tables*, New York, v. 39, n. 2, p. 225-233, July 1988.
- [51] | BLAIZOT, J. P. Nuclear compressibilities. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 64, n. 4, p. 171-248, Sept. 1980.
- [52] | KRIVINE, H.; TREINER, J.; BOHIGAS, O. Derivation of a fluid-dynamical lagrangian and electric giant-resonances. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 336, n. 2, p. 155-184, Mar. 1980.
- [53] | MYERS, W. D.; SWIATECKI, W. J. Nuclear properties according to the Thomas-Fermi model. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 601, p. 141-167, May 1996.
- [54] | HUGENHOLTZ, N. M.; VAN HOVE, L. A theorem of the single particle energy in a Fermi gas with interaction. *Physica*, Amsterdam, v. 24, n. 2, p. 363-376, 1958.
- [55] | WALECKA, J. D. *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [56] | MOSZKOWSKI, S. A. Energy of neutron star matter. *Phys. Rev. D*, New York, v. 9, n. 6, p. 1613-1625, Mar. 1974.

- [57] | PAL, S.; HANUASKE, M.; ZAKOUT, I.; STÖCKER, H.; GREINER, W. Neutron star properties in the quark-meson coupling model. *Phys. Rev. C*, New York, v. 60, n. 1, p. 015802-1 - 015802-15, June 1999.
- [58] | WALDHAUSER, B. M.; MARUHN, J. A.; STÖCKER, H.; GREINER, W. Nuclear equation of state from the nonlinear relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 38, n. 2, p. 1003-1009, Aug. 1999.
- [59] | GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. *Phys. Lett.*, New York, v. 8, p. 214-215, 1964.
- [60] | ZWEIG, G. Preprints CERN-TH 401 E 412, 1964.
- [61] | MAKI, Z. The fourth baryon, Sakata model and modified B-L symmetry. *Prog. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 31, n. 2, p. 331-332, Month 1964.
- [62] | HARA, Y. Unitary triplets and the eightfold way. *Phys. Rev.*, Woodbury, v. 134, n. 3B, p. 701-704, May 1964.
- [63] | BJÖRKEN, B. J.; GLASHOW, S. L. Elementary Particles and SU(4). *Phys. Lett.*, New York, v. 11, p. 255-, 1964.
- [64] | AUBERT, J. J. et al. Experimental observation of a heavy particle J. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 33, p. 1404-1406, Dec. 1974.
- [65] | AUGUSTIN, J. E. et al. Discovery of a narrow resonance in  $e^+e^-$ -annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 33, p. 1406-1408, Dec. 1974.
- [66] | HERB, S. W. et al. Observation of a dimuon resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 39, p. 252-255, Aug. 1977.
- [67] | INNES, W. R. et al. Observation of structure in the  $\Upsilon$  region. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 39, p. 1240-1242, Nov. 1977.
- [68] | D0-Collab.: ABACHI, S. et al. Observation of the top quark. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 74, p. 2632-2637, Apr. 1995.
- [69] | CDF-Collab.: ABE, F. et al. Observation of top quark production in p-p collisions with the collider detector at Fermilab. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 74, p. 2626-2631, Apr. 1995.
- [70] | SATZ, H. The transition from hadron matter to quark-gluon plasma. *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, Palo Alto, v. 35, p. 245-270, Dec. 1985.

- [71] | MOTT, N. Metal-insulator transition. *Rev. Mod. Phys.*, New York, v. 40, p. 677-683, Oct. 1968.
- [72] | GUTBROD, H.; STÖCKER, H. The nuclear equation of state. *Sci. Amer.*, New York, n. 21, p. 60, Nov. 1991.
- [73] | WILSON, K. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, New York, v. 10, p. 2445-2459, Oct. 1974.
- [74] | CREUTZ, M. *Quarks, gluons and lattices*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- [75] | BINDER, K. *Monte-Carlo Methods in Statistical Physics*. Berlin: Springer, 1979.
- [76] | CELIK, T.; ENGELS, J.; SATZ, H. Finite-temperature lattice QCD with Wilson fermions. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 256, p. 670-686, June 1985.
- [77] | WILCZEK, F. Liberating quarks and gluons. *Nature*, London, v. 391, p. 330-331, Jan. 1998.
- [78] | SMITH, C. L. No coração da matéria. *Sci. Am. Brasil*, ed. especial, n. 8, p. 52-59, Jan. 2005.
- [79] | JACOBSEN, R. B.; MARRANGHELLO, G. F.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; MESQUITA, A. Quark-gluon plasma in a bag model with a soft surface. *Int. J. Mod. Phys. D*, Singapore, v. 13, n. 7, p. 1431-1435, Aug. 2004.
- [80] | BRAHMS-Collab.: ARSENE, I. et al. Quark-gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 757, p. 1-27, Aug. 2005.
- [81] | PHOBOS-Collab.: BACK, B. B. et al. The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 757, p. 28-101, Aug. 2005.
- [82] | STAR-Collab.: ADAMS, J. et al. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark-gluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 757, p. 102-183, Aug. 2005.
- [83] | PHENIX-Collab.: ADCOX, K. et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX Collaboration. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 757, p. 184-283, Aug. 2005.
- [84] | HEISELBERG, H.; HJORTH-JENSEN, M. Phases of dense matter in neutron stars. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 328, n. 5/6, p. 237-327, May 2000.

- [85] | BAYM, G.; CHIN, S. Can a neutron star be a giant MIT bag? *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 62, p. 241-244, May 1976.
- [86] | PIEKAREWICZ, J. Unmasking the nuclear matter equation of state. *Phys. Rev. C*, New York, v. 69, p. 041301, Apr. 2004.
- [87] | AICHELIN, J.; HARTNACK, C.; OESCHLER, H. The nuclear equation of state observed in earthbound experiments. *Int. J. Mod. Phys. D*, Singapore, v. 16, n. 2/3, p. 153-164, Feb./March 2007.
- [88] | AITALA, E. M. et al. Experimental evidence for a light and broad scalar resonance in  $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$  decay. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 86, p. 770-774, Jan. 2001.
- [89] | MARRANGHELLO, G. F. Transição de Fase em Estrelas de Nêutrons e a Emissão de Ondas Gravitacionais, Tese de Doutorado, UFRGS 2003.
- [90] | NYÍRI, A. Quark-Gluon Plasma in Neutron Stars, M.Phil. Thesis, University of Bergen 2001.
- [91] | YAO, W. M. et al. Review of Particle Physics. *J. Phys. G*, Norwich, v. 33, p. 546-550, July 2006.
- [92] | TOOPER, R. F. Adiabatic fluid spheres in general relativity. *Astrohys. J.*, Chicago, v. 142, p. 1541, Nov. 1965.
- [93] | NICE, D. J.; SPLAVER, E. M.; STAIRS, I. H.; LÖHMER, O.; JESSED, A.; KRAMER, M.; CORDES, J. M. A 2.1 solar mass pulsar measured by relativistic orbital decay. *Astrohys. J.*, Chicago, v. 634, p. 1242-1249, Aug. 2005.
- [94] | ANDERSON, P. W.; ITOH, N. Pulsar glitches and restlessness as a hard superfluidity phenomenon. *Nature*, London, v. 256, n. 5512, p. 25-26, July 1975.
- [95] | GLENDENNING, N. K. First-order phase transitions with more than one conserved charge: consequences for neutron stars. *Phys. Rev. D*, New York, v. 46, p. 1274-1287, Aug. 1992.
- [96] | HEISELBERG, H.; PETHICK, C. J.; STAUBO, E. F. Quark matter droplets in neutron stars. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 70, p. 1355-1359, March 1993.
- [97] | GLENDENNING, N. K.; PEI, S. Crystalline structure of the mixed confined-deconfined phase in neutron stars. *Phys. Rev. C*, New York, v. 52, p. 2250-2253, Oct. 1995.

- [98] | CHRISTIANSEN, M. B.; GLENDENNING, N. K. Finite size effects and the mixed quark-hadron phase in neutron stars. *Phys. Rev. C*, New York, v. 56, p. 2858-2864, Nov. 1997.
- [99] | JACOBSEN, R. B.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; BODMANN, B. E. J.; DILLIG, M. Equation of state for a quark-gluon plasma in the fuzzy bag model. *American Institute of Physics Proceedings*, New York, v. 739, p. 485-487, 2004.
- [100] | PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, FORTRAN Version*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [101] | CHANDRASEKHAR, S. Highly collapsed configurations of a stellar mass. Part II. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, London, v. 95, p. 207-225, Jan. 1935.
- [102] | JACOBSEN, R. B.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; BODMANN, B. E. J.; HADJIMICHEF, D. On the role of the adiabatic index in the stability of neutron stars. *Int. J. Mod. Phys. D*, Singapore, v. 16, n. 2/3, p. 261-267, Feb./March 2007.
- [103] | DEXHEIMER, V. A.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; BODMANN, B. E. J.; HADJIMICHEF, D. The nuclear matter compressibility function in a parametrized coupling model. *Int. J. Mod. Phys. D*, Singapore, v. 16, n. 1, p. 105-111 (a ser publicado).
- [104] | MARRANGHELLO, G. F. Estrutura Nuclear de Estrelas Compactas, Dissertação de Mestrado, UFRGS 2000.
- [105] | TAURINES, A. R. Estrelas de Nêutrons em Teorias Relativísticas de Campos Médios, Dissertação de Mestrado, UFRGS 1999.
- [106] | DEXHEIMER, V. A. Compressibilidade da Matéria Nuclear em Estrelas de Nêutrons, Dissertação de Mestrado, UFRGS 2006.
- [107] | DIRAC, P. A. M. *General Theory of Relativity*. Princeton: Princeton University Press, 1996.
- [108] | DE GRAND, T.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; KISKIS, J. Masses and other parameters of the light hadrons. *Phys. Rev. D*, New York, v. 12, n. 7, p. 2060-2076, Oct. 1974.
- [109] | MUTA, T. *Foundations of Quantum Chromodynamics*. Singapore: World Scientific, 1987.
- [110] | HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentals of Physics*. New York: John Wiley and Sons, 1997.

- [111 ] BHADURI, R. K. *Models of the Nucleon — From Quarks to Soliton*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1988.
- [112 ] POVH, B.; RITH, K.; SCHOLZ, C.; ZETSCHE, F. *Particles and Nuclei — An Introduction to the Physical Concepts*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [113 ] SHURYAK, E. V. *The QCD Vacuum, Hadrons and the Superdense Matter*. Singapore: World Scientific, 1988.
- [114 ] ISAACS, A. *Oxford Dictionary of Physics*. Oxford: Oxford University Press, 2000.
- [115 ] LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. Neutron star observations: prognosis for equation of state constraints. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 442, n. 1-6, p. 109-165, Apr. 2007.
- [116 ] SHAKESPEARE, W. *The Complete Works of William Shakespeare*. New York: Garden City Books, 1970.