

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO DO RISCO DE ESTRUTURAS REDUNDANTES CONSIDERANDO  
OS EFEITOS DAS NÃO LINEARIDADES E MÚLTIPLOS MODOS DE FALHA

por

Adelano Esposito

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2016.

OTIMIZAÇÃO DO RISCO DE ESTRUTURAS REDUNDANTES CONSIDERANDO  
OS EFEITOS DAS NÃO LINEARIDADES E MÚLTIPLOS MODOS DE FALHA

por

Adelano Esposito

Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Marcílio Sousa da Rocha Freitas ..... PROPEC / UFOP

Prof. Dr. Marcelo Maia Rocha ..... PPGEC / UFRGS

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas ..... PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de Dezembro de 2016.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela oportunidade de estar aqui e prestigiar este momento tão especial em minha vida.

Ao professor Dr. Herbert Martins Gomes, pela orientação fornecida desde os tempos do mestrado, pela paciência e pelas ideias que enriqueceram este trabalho.

À Daniela, minha noiva, por ter escutado as minhas divagações a respeito do desenvolvimento desta Tese, por ter me ajudado e por ter estado o tempo todo ao meu lado, mesmo quando distantes fisicamente.

À minha família, em especial aos meus pais e irmãos, por toda a força e por tudo que sempre me ensinaram.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, através do programa de pós-graduação em engenharia mecânica, pela oportunidade de capacitação.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

E a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

O desenvolvimento de métodos que permitam reproduzir numericamente o comportamento fiel de sistemas estruturais reais tem desafiado cientistas e pesquisadores a abordarem questões que vão além das condições de integridade do sistema. Neste sentido, uma série de novos parâmetros devem ser considerados durante um processo de otimização estrutural, zelando pela confiabilidade em níveis aceitáveis enquanto que os custos esperados de falhas sejam minimizados. Aparentemente, os objetivos segurança e economia competem entre si, nesse contexto, a otimização do risco estrutural surge como uma formulação que permite equacionar este problema através do chamado custo esperado total. Nesta Tese, apresenta-se o desenvolvimento de uma técnica precisa para satisfazer os termos que compõem a função custo esperado total, isto é, uma técnica capaz de estimar a confiabilidade de sistemas estruturais redundantes pela identificação dos múltiplos modos de falha de uma maneira mais precisa que os métodos convencionais aproximados e de simulação. Além disso, análises inelásticas de estruturas de aço incluindo as não linearidades físicas e geométricas são consideradas utilizando o MCDG, além de leis constitutivas para prever o comportamento inelástico. Em posse destas informações, o algoritmo calcula o risco como sendo a probabilidade de falha multiplicada pela consequência econômica resultante desta falha. Ao risco são acrescentados os demais custos associados ao sistema estrutural, os quais não dependem dos parâmetros aleatórios do sistema e por isso denominados custos fixos. Como produto, tem-se o custo esperado total, o qual corresponde a função objetivo do problema de otimização estrutural. Aplicações numéricas demonstram a precisão e eficiência da metodologia na avaliação da probabilidade de falha de problemas envolvendo funções de estado limite altamente não lineares com múltiplas regiões de falhas, assim como os efeitos causados pelas não linearidades físicas e geométricas nas análises probabilísticas e na otimização do risco das estruturas. Os resultados demonstraram que, em relação às incertezas e consequências monetárias da falha, a estrutura ótima pode ser encontrada apenas pela formulação da otimização do risco, onde a configuração da estrutura e os limites de segurança são otimizados simultaneamente. A otimização do risco resulta numa estrutura ótima em termos mecânicos, custo esperado total e segurança.

Palavras-chave: Confiabilidade Estrutural, Múltiplos Modos de Falha, Não Linearidades, Sistemas Redundantes, Otimização do Risco.

## ABSTRACT

The development of methods that allow to numerically reproduce the actual behavior of real structural systems has challenged scientists and researchers and urged them to address issues that extend beyond the integrity of a system. Therefore, a series of new parameters must be taken into account during the structural optimization process, looking for acceptable reliability levels while minimizing the expected failure costs. Apparently, safety and economy compete with each other, and in this context, structural risk optimization arises as a formulation that allows equating this problem through the so-called total expected cost. In this Thesis, an accurate technique is developed to satisfy the minimization of the total expected cost function *i.e.*, a technique that allows estimating the reliability of redundant structural systems by the identification of multiple failure modes in a more precise way than conventional approximation and simulation methods. Besides, inelastic analysis of steel trusses including both geometric and physical nonlinearities are considered using the generalized displacement control method, in addition to constitutive laws to predict the inelastic behavior. Based on this information, the algorithm calculates risk as the failure probability multiplied by the economic losses resulting from such failure. The other costs associated to the structural system are added to the actual risk and since they do not depend on system's random parameters, they are referred as fixed costs. As result, one obtains the total expected cost, which corresponds to the objective function of the structural optimization problem. Numerical applications shows the accuracy and efficiency of the methodology in the evaluation of the failure probability of problems represented by high nonlinear limit state functions with multiple failure regions. It is also included the effects of geometric and physical nonlinearities originated in the probabilistic analysis and risk optimization of truss structures. Results show that, in consideration of uncertainty and the monetary consequences of failure, the optimum structure can only be found by a risk optimization formulation, where structural configuration and safety margins are optimized simultaneously. Risk optimization yields a structure which is optimum in terms of mechanics and in terms of the compromise between cost and safety.

Keywords: Structural reliability, multiple failure modes, nonlinearities, Redundant Systems, risk optimization.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos e Justificativas . . . . .	3
1.2	Organização do Trabalho . . . . .	4
<b>2</b>	<b>CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução à Confiabilidade Estrutural . . . . .	7
2.2	Conceitos Gerais de Probabilidade de Falha . . . . .	8
2.2.1	Função de Desempenho Baseada no Estado de Limite Último . . . . .	8
2.2.2	Função de Desempenho Baseada no Estado Limite de Serviço . . . . .	9
2.2.3	Função de Desempenho Baseada na Falha por Fadiga . . . . .	9
2.3	Cálculo da Probabilidade de Falha: Conceitos Iniciais . . . . .	9
2.3.1	Interpretação Geométrica do Índice de Confiabilidade . . . . .	10
2.4	Distribuição Chi-Quadrado . . . . .	13
2.5	Métodos para Análise de Confiabilidade Estrutural . . . . .	16
2.5.1	Métodos de Simulação Direta de Monte Carlo . . . . .	16
2.5.2	Métodos de Simulação Direcional - Conceitos Gerais . . . . .	17
2.5.3	Métodos de Geração das Direções Uniformemente Distribuídas . . . . .	20
2.6	Confiabilidade de Sistema com Múltiplos Pontos de Projeto . . . . .	21
2.6.1	Identificação dos Múltiplos Pontos de Projeto . . . . .	22
2.7	Confiabilidade de Sistemas Considerando Múltiplos Modos de Falhas . . . . .	23
2.7.1	Sistemas em Série . . . . .	25
2.7.2	Sistema em Paralelo . . . . .	26
2.7.3	Sistemas Híbridos ou Sistemas Paralelo-Série . . . . .	27
2.7.4	Caracterização dos Modos de Falha . . . . .	27
2.7.5	Identificação dos Modos de Falhas de Estruturas Treliçadas . . . . .	28
2.8	Comportamento de Estruturas Não Lineares: Uma Abordagem Probabilística	30
2.8.1	Fontes de Não Linearidades . . . . .	30
2.9	Funções Densidade de Probabilidade Implícitas . . . . .	32

<b>3</b>	<b>INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO DO RISCO</b>	<b>34</b>
3.1	Revisão Bibliográfica . . . . .	34
3.2	Definição Teórica da Otimização do Risco . . . . .	36
<b>4</b>	<b>MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO</b>	<b>39</b>
4.1	Definição Geral do Problema de Otimização . . . . .	39
4.2	Otimização por Enxame de Partículas . . . . .	41
<b>5</b>	<b>ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS</b>	<b>45</b>
5.1	Elementos Finitos Para Treliça Espacial . . . . .	45
5.1.1	Equações Cinemáticas . . . . .	47
5.1.2	Forças Internas . . . . .	49
5.1.3	Matriz de Rigidez Tangente . . . . .	51
5.2	Não Linearidade Física . . . . .	51
5.2.1	Elastoplasticidade Unidimensional . . . . .	51
5.2.2	Processo Incremental Iterativo - Algoritmo de Retorno . . . . .	53
5.3	Critério de Falha Por Flambagem . . . . .	55
5.3.1	Modelo Constitutivo: Comportamento Pós-Flambagem . . . . .	55
5.4	Não Linearidade Geométrica . . . . .	57
5.4.1	Método do Controle de Deslocamento Generalizado . . . . .	59
5.5	Critério Para o Colapso Total da Estrutura . . . . .	64
5.5.1	Verificando a Estabilidade da Estrutura . . . . .	65
5.6	Exemplos Testados . . . . .	66
5.6.1	Exemplo 1 - Treliça Plana de 2 Barras . . . . .	67
5.6.2	Exemplo 2 - Treliça Plana em Forma de Arco . . . . .	72
5.6.3	Exemplo 3 - Treliça Plana de 10 barras . . . . .	75
5.6.4	Exemplo 4 - Pilar . . . . .	78
<b>6</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DOS MODOS DE FALHA</b>	<b>81</b>
6.1	Procedimento Fundamental . . . . .	81
6.2	Procedimento Fundamental do HDM . . . . .	82
6.3	HDM Modificado . . . . .	86
6.3.1	Geração de Pontos Uniformemente Distribuídos . . . . .	86
6.3.2	Identificação das Raízes da Função de Estado Limite . . . . .	88

6.3.3	Procedimento Adotado para Calcular a $P_f$ Associada ao Chi-quadrado . . .	91
6.3.4	Contribuição das Frações de $P_f$ na Probabilidade de Falha Total . . . . .	93
6.3.5	Identificação dos Múltiplos Modos de Falha . . . . .	95
6.4	Restrições do Problema Probabilístico . . . . .	96
6.4.1	Formulação das Funções de Estado Limite . . . . .	96
6.4.2	Exemplos de Estados Limites: Espaço Unidirecional - $g(\mathbf{x}) \times \beta_{\text{equivalente}}$ . .	99
6.4.3	Exemplos de Estados Limites: Espaço das Variáveis Aleatórias - $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ . .	102
6.5	Comentários Sobre os Exemplos . . . . .	105
<b>7</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS: CONFIABILIDADE</b>	<b>106</b>
7.1	Exemplos Numéricos: Funções Explícitas . . . . .	106
7.1.1	Função Estado Limite Contendo Múltiplas Regiões de Falha . . . . .	106
7.1.2	Múltiplas Funções de Estado Limite: Sistema em Paralelo . . . . .	108
7.2	Exemplos Numéricos: Funções Implícitas . . . . .	112
7.2.1	Treliça Plana de Seis Barras . . . . .	114
7.2.2	Treliça Plana de 10 Barras . . . . .	116
7.2.3	Conclusões a respeito da análise probabilística da treliça - 10 barras . . . .	123
7.2.4	Pilar 95 Barras . . . . .	124
7.2.5	Conclusões a respeito da análise probabilística do pilar . . . . .	132
<b>8</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DO RISCO</b>	<b>134</b>
8.1	Formulação do Problema de Otimização do Risco . . . . .	134
8.2	Exemplos Numéricos . . . . .	137
8.2.1	Treliça Plana de 10 Barras . . . . .	138
8.2.2	Otimização Determinística . . . . .	138
8.2.3	Otimização do Risco . . . . .	142
8.2.4	Conclusões e comparações entre as soluções ótimas . . . . .	149
8.2.5	Pilar 95 Barras . . . . .	150
8.2.6	Otimização Determinística . . . . .	150
8.2.7	Otimização do Risco . . . . .	153
8.2.8	Conclusões a respeito da otimização do pilar . . . . .	157
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>161</b>
9.1	Sugestões Para Trabalhos Futuros . . . . .	164



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	166
APÊNDICE A – DETALHAMENTO DO PAVILHÃO	170

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Função densidade de probabilidade para resistência e solicitação. Adaptado de Haldar e Mahadevan, 1999. . . . .	10
Figura 2.2	Função de estado limite linear no espaço normal reduzido. . . . .	11
Figura 2.3	Função de estado limite não linear no espaço normal reduzido - 3D. Adaptado de Hashemolhosseini, 2013. . . . .	12
Figura 2.4	Representação da fdp $-\chi^2$ e função de estado limite circular. . . . .	15
Figura 2.5	Função de estado limite convexa. . . . .	21
Figura 2.6	(a) Estrutura estaticamente determinada; (b) Ligação em série de elos representando sistema em série. . . . .	26
Figura 2.7	(a) Estrutura de barras em paralelo; (b) Sistema em paralelo. . . . .	26
Figura 2.8	(a) Estrutura hiperestática; (b) Sistema híbrido. . . . .	27
Figura 3.1	Equilíbrio entre custo de fabricação e custo de reparo. Adaptado de Kaufmann M. e Wennhage, 2010. . . . .	37
Figura 4.1	Tipos de otimização estrutural: (a) paramétrica, (b) forma e (c) topológica. Fonte: Bendsøe e Sigmund, 2004. . . . .	41
Figura 4.2	Representação vetorial da atualização da velocidade e posição. Fonte: Adaptado de Gomes, 2011. . . . .	43
Figura 5.1	Deformação global do elemento de barra 3D. . . . .	46
Figura 5.2	Representação gráfica do conjunto de tensão admissível $\mathbf{K}_\sigma$ . Adaptado de Rossi, 2012. . . . .	52
Figura 5.3	Representação gráfica do mapeamento de retorno. . . . .	54
Figura 5.4	Modelo constitutivo para flambagem. . . . .	56
Figura 5.5	Trajetórias de equilíbrio com seus correspondentes pontos críticos. . . . .	59
Figura 5.6	Curvas de resposta do ILM: (a) elastoplástico, (b) frágil. Adaptado de Melchers e Tang, 1984. . . . .	63
Figura 5.7	Trajetórias de equilíbrio representando a carga crítica. . . . .	64
Figura 5.8	Modelos constitutivos adotados no exemplos. Adaptado de Papadrakakis, 1983; Thai e Kim, 2009. . . . .	67

Figura 5.9	Treliça plana de 2 barras — Caso I. Adaptado de Papadrakakis, 1983; Thai e Kim, 2009. . . . .	68
Figura 5.10	Curvas de equilíbrio — Caso I. . . . .	69
Figura 5.11	Diagrama tensão $\times$ deformação — Caso I. . . . .	70
Figura 5.12	Treliça plana de 2 barras — Caso II. Adaptado de Papadrakakis, 1983; Yang e Yang, 1997. . . . .	70
Figura 5.13	Curvas de equilíbrio — Caso II. . . . .	71
Figura 5.14	Treliça plana em forma de arco. Adaptado de Crisfield, 1997 . . . . .	72
Figura 5.15	Geometria deformada considerando: (a) NLG, (b) NLG-EPP, e (c) NLG-EPB. . . . .	72
Figura 5.16	Curvas de equilíbrio da treliça plana em forma de arco. . . . .	73
Figura 5.17	Sequência de falha dos membros e seu efeito na trajetória de equilíbrio. . . . .	74
Figura 5.18	Sequência de falha dos membros e seu efeito na trajetória de equilíbrio. . . . .	74
Figura 5.19	Sequência de falha dos membros e seu efeito na trajetória de equilíbrio. . . . .	75
Figura 5.20	Treliça plana de 10 barras. . . . .	76
Figura 5.21	Curvas carga $\times$ deslocamento vertical do nó 2. . . . .	77
Figura 5.22	Curvas tensão $\times$ deformação dos elementos que ultrapassaram o limite de resistência na NLG-EPB. . . . .	77
Figura 5.23	Representação esquemática do Pilar - PM13. . . . .	79
Figura 5.24	Curvas carga $\times$ deslocamento horizontal no topo do pilar. . . . .	80
Figura 6.1	Divisão Radial do Espaço: subdomínios ativo e passivo. Adaptado de Katsuki e Frangopol, 1994. . . . .	83
Figura 6.2	Subdomínio de falha da função de estado limite $u_1^2 + u_2^2 = R^2$ . . . . .	84
Figura 6.3	Função de estado limite e sua aproximação por segmentos hiperesféri- cos. Adaptado de Katsuki e Frangopol, 1994. . . . .	85
Figura 6.4	Fluxograma do procedimento incremental-iterativo e representação ge- ométrica da atualização dos pontos. . . . .	88
Figura 6.5	Método da bissecção: análise gráfica. . . . .	89
Figura 6.6	Representação gráfica da identificação das raízes. . . . .	91
Figura 6.7	Subdomínio $\Omega_i$ do problema apresentado na Figura 6.6b. . . . .	92
Figura 6.8	Subdomínio $\Omega_i$ do problema apresentado na Figura 6.6b. . . . .	93
Figura 6.9	Cálculo das frações de $P_f$ pertencentes ao $i$ -ésimo setor (Figura 6.8). . . . .	94

Figura 6.10	Diagramas tensão $\times$ deformação de dois elementos pertencentes a uma estrutura hiperestática típica. . . . .	97
Figura 6.11	Diagramas $\sigma \times \varepsilon$ para demonstrar as considerações quanto às restrições probabilísticas. . . . .	98
Figura 6.12	Amplitude das funções de estado limite na direção 63. . . . .	100
Figura 6.13	Amplitude das funções de estado limite na direção 63. . . . .	100
Figura 6.14	Função de estado limite $g_5$ : NLG-EPB. . . . .	102
Figura 6.15	Função de estado limite $g_5$ : NLG-EPP. . . . .	103
Figura 6.16	Função de estado limite $g_5$ : NLG-EPH. . . . .	104
Figura 6.17	Função de estado limite $g_6$ : NLG-EPB. . . . .	104
Figura 6.18	Função de estado limite $g_6$ : NLG-EPP. . . . .	104
Figura 7.1	Funções de estado limite multimodal. . . . .	108
Figura 7.2	Múltiplas funções de estado limite. . . . .	112
Figura 7.3	Modelos constitutivos considerados nas análises determinísticas. . . . .	113
Figura 7.4	Treliça plana de 6 barras. . . . .	114
Figura 7.5	Treliça plana de 10 barras. . . . .	117
Figura 7.6	Funções de estado limite: NLG-EPH. . . . .	118
Figura 7.7	Funções de estado limite: NLG-EPP. . . . .	119
Figura 7.8	Funções de estado limite: NLG-EPB. . . . .	119
Figura 7.9	Função de estado limite: Linear. . . . .	120
Figura 7.10	Comparação determinística e probabilística para as diferentes formulações implementadas. . . . .	124
Figura 7.11	Representação esquemática do Pilar-PM13. . . . .	125
Figura 7.12	Funções de estado limite: NLG-EPH. . . . .	127
Figura 7.13	Funções de estado limite: NLG-EPP. . . . .	127
Figura 7.14	Funções de estado limite: NLG-EPB. . . . .	128
Figura 7.15	Funções de estado limite: NLG-Linear. . . . .	129
Figura 7.16	Funções de estado limite: Linear. . . . .	129
Figura 7.17	Comparação determinística e probabilística para as diferentes formulações implementadas. . . . .	133
Figura 8.1	Função objetivo do DDO-L. . . . .	140

Figura 8.2	Função objetivo do DDO-NL. . . . .	140
Figura 8.3	Comportamento da função objetivo para diferentes valores das variáveis de projeto. . . . .	142
Figura 8.4	Função objetivo do RBRO considerando apenas restrições probabilísticas. . . . .	143
Figura 8.5	Função objetivo do RBRO-L. . . . .	144
Figura 8.6	Função objetivo do RBRO-NL. . . . .	144
Figura 8.7	Comportamento da função objetivo para diferentes valores das variáveis de projeto. . . . .	146
Figura 8.8	Convergência do CET e massa pelo RBRO-L e RBRO-NL. . . . .	147
Figura 8.9	Convergência do índice de confiabilidade: RBRO-L e RBRO-NL. . . . .	147
Figura 8.10	Convergência do CI, $C_{fu}$ e $C_{fs}$ . . . . .	148
Figura 8.11	Custos ótimos e confiabilidade do projeto otimizado. . . . .	149
Figura 8.12	Solução ótima em termos da massa e variáveis de projeto. . . . .	149
Figura 8.13	Função objetivo do DDO-L. . . . .	152
Figura 8.14	Função objetivo do DDO-NL. . . . .	152
Figura 8.15	Comportamento da função objetivo para diferentes valores das variáveis de projeto. . . . .	153
Figura 8.16	Convergência do CET e massa: RBRO-L e RBRO-NL. . . . .	155
Figura 8.17	Convergência do índice de confiabilidade: RBRO-L e RBRO-NL. . . . .	156
Figura 8.18	Convergência do CI, $C_{fu}$ e $C_{fs}$ . . . . .	157
Figura 8.19	Custos ótimos e confiabilidade do projeto otimizado. . . . .	158
Figura 8.20	Solução ótima em termos da massa e variáveis de projeto. . . . .	159
Figura 9.1	Planta Baixa e Vista Frontal do Eixo 3. . . . .	171
Figura 9.2	Vista Frontal: Combinações Aa-Ad — Ai-Am. . . . .	172

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Referências e descrição das análises. . . . .	67
Tabela 5.2	Resultado das análises para a estrutura de duas barras - Caso I. . . . .	68
Tabela 5.3	Propriedades geométricas e material do pilar. . . . .	79
Tabela 6.1	Probabilidade de falha associada ao $\chi^2$ . . . . .	92
Tabela 6.2	Equações para as frações de $P_f$ pertencentes ao $i$ -ésimo setor (Figura 6.9). . . . .	94
Tabela 6.3	Múltiplos modos de falha pertencentes ao $i$ -ésimo setor (Figura 6.6b). . . . .	95
Tabela 6.4	Modos de falha obtidos & Formulação proposta. . . . .	96
Tabela 7.1	Solução probabilística da Equação 7.1. . . . .	107
Tabela 7.2	Solução probabilística da Equação 7.3. . . . .	108
Tabela 7.3	Solução probabilística da Equação 7.4. . . . .	109
Tabela 7.4	Solução probabilística da Equação 7.5. . . . .	111
Tabela 7.5	Parâmetros estatísticos do problema. . . . .	115
Tabela 7.6	Solução probabilística da treliça de 6 barras. . . . .	115
Tabela 7.7	Propriedades estatísticas para as variáveis aleatórias da treliça de 10 barras. . . . .	117
Tabela 7.8	Solução probabilística: análise NLG-EPB. . . . .	121
Tabela 7.9	Solução Probabilística: análise NLG-EPP. . . . .	122
Tabela 7.10	Solução Probabilística: análise NLG-EPH. . . . .	122
Tabela 7.11	Solução Probabilística: análise Linear-Elastica. . . . .	122
Tabela 7.12	Valores médios da análise determinística $\times$ índice de confiabilidade total da estrutura. . . . .	124
Tabela 7.13	Propriedades estatísticas para as variáveis aleatórias do Pilar-PM13. . . . .	125
Tabela 7.14	Solução Probabilística: análise NLG-EPH. . . . .	130
Tabela 7.15	Solução Probabilística: análise NLG-EPP. . . . .	130
Tabela 7.16	Solução Probabilística: análise NLG-EPB. . . . .	131
Tabela 7.17	Solução Probabilística: análise NLG e Linear. . . . .	131

Tabela 7.18	Valores médios da análise determinística $\times$ índice de confiabilidade total da estrutura. . . . .	132
Tabela 8.1	Parâmetros de calibração do PSO. . . . .	138
Tabela 8.2	Síntese das formulações consideradas neste capítulo. . . . .	138
Tabela 8.3	Valores ótimos das variáveis de projeto e massa. . . . .	139
Tabela 8.4	Custos de referência utilizados na treliça de 10 barras. . . . .	143
Tabela 8.5	Solução ótima do RBRO. . . . .	146
Tabela 8.6	Solução probabilística associada ao evento falha de serviço. . . . .	148
Tabela 8.7	Valores ótimos das variáveis de projeto e massa. . . . .	151
Tabela 8.8	Custos de referência do pilar. . . . .	154
Tabela 8.9	Solução ótima do RBRO. . . . .	154
Tabela 8.10	Solução probabilística associada ao evento falha de serviço. . . . .	157
Tabela 8.11	Solução ótima obtida com as diferentes formulações. . . . .	158

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
c.v.	Coefficiente de Variação
CET	Custo Esperado Total
CI	Custo Inicial
DDO	Deterministic Design Optimization
DDO-L	Deterministic Design Optimization - Linear
DDO-NL	Deterministic Design Optimization - Nonlinear
ES	Estratégias Evolutivas
fdp	Função Densidade de Probabilidade
FEM-L	Finite Element Method - Linear
FEM-NL	Finite Element Method - Nonlinear
FORM	First Order Reliability Method
GSP	Generalized Stiffness Parameter
HDM	Hyperspace Division Method
HL-RF	Hasofer and Lind-Rachwitz and Fiessler
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MCDG	Método do Controle de Deslocamento Generalizado
MSR	Matrix-Based System Reliability Method
NLG	Não Linearidade Geométrica
NLG-EPB	Não Linearidade Geométrica - Elástoplástico com efeitos pós-flambagem
NLG-EPH	Não Linearidade Geométrica - Elástoplástico com encruamento
NLG-EPP	Não Linearidade Geométrica - Elástoplástico perfeito
PAPSO	Parallel Asynchronous Particle Swarm Optimization
PSO	Particle Swarm Optimization
PSPSO	Parallel Synchronous Particle Swarm Optimization
PTV	Princípio do Trabalho Virtual
RBDO	Reliability-Based Design Optimization
RBRO	Reliability-Based Risk Optimization
RBRO-L	Reliability-Based Risk Optimization - Linear



RBRO-NL	Reliability-Based Risk Optimization - Nonlinear
SORM	Second Order Reliability Method

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área da seção transversal da barra	[m <sup>2</sup> ]
$c_1$	Componente cognitiva da partícula	[adimensional]
$c_2$	Componente social do enxame	[adimensional]
$C_{\text{descarte}}$	Custo de descarte	[\$/kg]
$C_{\text{fd}}$	Custo de falha devido ao deslocamento máximo	[\$/k]
$C_{\text{f}\varepsilon_p}$	Custo de falha devido à deformação plástica	[\$/kg]
$C_{\text{fixo}}$	Custo fixo	[\$/kg]
$C_{\text{fs}}$	Custo de falha de serviço	[\$/kg]
$C_{\text{fu}}$	Custo de falha última	[\$/kg]
$C_{\text{manutenção}}$	Custo de falha manutenção	[\$/kg]
$C_{\text{operação}}$	Custo de falha manutenção	[\$/kg]
$C_{\text{rep}}$	Custo de reparo	[\$/elemento]
CET	Custo Esperado Total	[\$]
$D_{\text{ep}}$	Módulo elastoplástico tangente	[N/m <sup>2</sup> ]
$d_j^i$	Deslocamento do $i$ -ésimo nó da $j$ -ésima direção	[m]
$d_e$	Diâmetro externo	[m]
$d_i$	Diâmetro interno	[m]
$E_i$	$i$ -ésimo evento que representa uma falha	[adimensional]
$\mathbf{e}_i$	Vetor unitário do $i$ -ésimo setor	[adimensional]
$E_{\text{Paralelo}}$	Evento falha do sistema em paralelo	[adimensional]
$E_{\text{Série}}$	Evento falha do sistema em Série	[adimensional]
$E_{\text{Sistema}}$	Evento falha total do sistema	[adimensional]
$\varepsilon^*$	Deformação pós-flambagem	[adimensional]
$\dot{\varepsilon}$	Incremento de deformação	[adimensional]
$\dot{\varepsilon}_p$	Incremento de deformação plástica	[adimensional]
$\varepsilon_e$	Deformação elástica	[adimensional]
$\varepsilon_{\text{cr}}$	Deformação crítica de Euler	[adimensional]
$\varepsilon_{GL}$	Deformação de Green-Lagrange	[adimensional]
$\varepsilon_r$	Deformação reversa	[adimensional]

$\varepsilon_y$	Deformação de escoamento	[adimensional]
$f_{n+1}^{teste}$	Tensão teste de escoamento	[N/m <sup>2</sup> ]
$f_{fu}$	Fator multiplicativo	[adimensional]
$F_H$	Carregamento Horizontal	[N]
$f_R(r)$	Função densidade de probabilidade da resistência	[adimensional]
$F_R(r)$	Função densidade de probabilidade acumulada da resistência	[adimensional]
$f_S(s)$	Função densidade de probabilidade da solicitação	[adimensional]
$F_V$	Carregamento Vertical	[N]
$f_y$	Tensão de escoamento do material	[N/m <sup>2</sup> ]
$FP_j^i$	Função penalização da função objetivo	[adimensional]
$g\cdot$	Vetor contendo as funções de estado limite	[adimensional]
$H$	Módulo plástico de encruamento	[N/m <sup>2</sup> ]
$I$	Momento de inércia da seção transversal	[m <sup>4</sup> ]
$I[g(\mathbf{X})]$	Função indicadora	[adimensional]
$I_{c_k}$	Índice do $C_k$ modo de falha	[adimensional]
$K_{ele}$	Nº de elementos adicionados à estrutura como reforço	[adimensional]
$K_t$	Matriz de rigidez tangente	[N/m]
$K_\sigma$	Conjunto de tensões admissíveis	[N/m <sup>2</sup> ]
$L$	Comprimento da barra	[m]
$m_a$	Nº total de subdomínios ativos	[adimensional]
$\mathbf{N}$	Matriz das funções de interpolação para os deslocamentos	[adimensional]
$\mathbf{N}, \xi$	Matriz de derivadas das funções de interpolação	[adimensional]
$N_{ele}$	Nº total de elementos da estrutura	[adimensional]
$n_{gl}$	Nº total de graus de liberdade da estrutura	[adimensional]
$N_{mod}$	Nº total de modos de falha	[adimensional]
$N_s$	Nº total de simulações de Monte Carlo	[adimensional]
$P_f^*$	Probabilidade de falha ótima	[adimensional]
$\hat{P}_f$	Estimador de probabilidade de falha	[adimensional]
$P_f$	Probabilidade de falha	[adimensional]
$P_f(i, n_{el})$	Probabilidade de falha da $n$ -ésima função de estado limite pertencente ao $i$ -ésimo subdomínio	[adimensional]
$P_{f Paralelo}$	Probabilidade de falha do sistema em paralelo	[adimensional]

$P_{f Série}$	Probabilidade de falha do sistema em série	[adimensional]
$P_{f Sistema}$	Probabilidade de falha do sistema	[adimensional]
$P_{fi}$	Probabilidade de falha correspondente ao $i$ -ésimo modo	[adimensional]
$P_s$	Probabilidade sucesso	[adimensional]
$\mathbf{q}_e^*$	Vetor de cargas nodais de referência	[N]
$\mathbf{q}_i$	Vetor de cargas internas	[N]
$Q_i$	Raiz da função de estado limite	[adimensional]
$r$	Resíduo das forças desequilibradas	[N]
$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$	Vetores contendo números aleatórios com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$	[adimensional]
$R_{(i,n_{fel})}^2$	Raio do segmento hipersférico na $i$ -ésima direção	[adimensional]
$R_{ik}$	Distância da origem à $k$ -ésima função de estado limite do $i$ -ésimo setor	[adimensional]
$R_N$	Valor nominal da resistência	[N/m <sup>2</sup> ]
$S^{n-1}$	Vetor das $n$ -posições igualmente distribuídas	[adimensional]
$S_N$	Valor nominal da solicitação	[N]
tol. <sub>cov</sub>	Tolerância pelo coeficiente de variação	[adimensional]
tol. <sub>FP</sub>	Tolerância pelo pelo fator de penalização	[adimensional]
$\mathbf{U}$	Vetor das variáveis aleatórias normalizado	[adimensional]
$u_{\max}^k$	Deslocamento máximo admissível	[m]
$v_{i,j}(t)$	Velocidade atual da $i$ -ésima partícula referente a $j$ -ésima variável de projeto	[adimensional]
$v_{i,j}(t+1)$	Velocidade futura da $i$ -ésima partícula referente a $j$ -ésima variável de projeto	[adimensional]
$\mathbf{X}$	Vetor contendo as variáveis aleatórias básicas	
$xgbest_j(t)$	Melhor posição do enxame para a $j$ -ésima variável de projeto	[m <sup>2</sup> ]
$x_{i,j}(t)$	Posição atual da $i$ -ésima partícula referente à $j$ -ésima variável de projeto	[m <sup>2</sup> ]
$x_{i,j}(t+1)$	Posição futura da $i$ -ésima partícula referente à $j$ -ésima variável de projeto	[m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{X}^j$	$j$ -ésimo vetor de amostras contendo $n$ -variáveis	
$xlbest_{i,j}(t)$	Melhor posição da $i$ -ésima partícula referente a $j$ -ésima	

	variável de projeto $j$	[m <sup>2</sup> ]
$xlbest_{i,j}(t)$	Melhor posição da $i$ -ésima partícula referente a $j$ -ésima variável de projeto $j$	[m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{x}_n$	Vetor posição sob o elemento na configuração final	[m]
$\mathbf{x}_o$	Vetor posição sob o elemento na configuração inicial	[m]
$\mathbf{x}^*$	Vetor das variáveis de projeto ótimas	[m <sup>2</sup> ]
$\alpha$	Histórico de deformação plástica	[adimensional]
$\alpha_n$	Metade do comprimento final da barra	[m]
$\alpha_o$	Metade do comprimento inicial da barra	[m]
$\beta$	Índice de confiabilidade	[adimensional]
$\beta_{equivalente}$	Índice de confiabilidade equivalente (ou associado) a uma determinada direção	[adimensional]
$\beta_{HDM}$	Índice de confiabilidade obtido pelo HDM Modificado	[adimensional]
$\beta_{MC}$	Índice de confiabilidade obtido pela simulação de Monte Carlo	[adimensional]
$\beta_{max}$	Comprimento máximo dos vetores unitários $\mathbf{e}_i$	[adimensional]
$\Gamma(\cdot)$	Função Gama	[adimensional]
$\dot{\gamma}$	Multiplicador incremental	[adimensional]
$\delta d$	Deslocamento virtual	[m]
$\delta\epsilon_{GL}$	Deformação virtual	[adimensional]
$\Delta\epsilon_{GL}$	Incremento de deformação de Green-Lagrange	[adimensional]
$\Delta\mathbf{u}$	Incremento de deslocamento	[m]
$\Delta\beta$	Subintervalos do método da bisseção	[adimensional]
$\Delta\lambda$	Incremento de carga	[N]
$\Delta\lambda_1^1$	Incremento inicial do fator de carga	[N]
$\lambda_{ji}$	Fator de carga na $j$ -ésima iteração do $i$ -ésimo passo de carga	[N]
$\lambda_{máx}$	Fator de carga máximo	[N]
$\mu_{fy}$	Valor médio da tensão de escoamento	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mu_P$	Valor médio do carregamento	[N]
$\mu_R$	Valor médio da resistência	[N/m <sup>2</sup> ]
$\mu_S$	Valor médio do sollicitação	[N]
$\xi$	Raiz da função contínua no intervalo [a,b] para o método da bisseção	[adimensional]

$\rho$	Densidade do material	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_{cr}$	Tensão crítica de Euler	[kg/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_{fy}$	Desvio padrão para a tensão de escoamento	[kg/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_l$	Tensão limite inferior	[kg/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_o$	Tensão admissível do material	[kg/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_P$	Desvio padrão do carregamento	[N]
$\sigma_{PK}$	2° Tensor de Piola Kirchhoff	[kg/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_r$	Tensão reversa	[kg/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_R$	Desvio padrão da Resistência	[N]
$\sigma_S$	Desvio padrão da solitação	[N]
$\Phi$	Função distribuição Gaussiana para uma distribuição normal	[adimensional]
$\phi(\cdot)$	Função densidade de probabilidade acumulada da fdp	[adimensional]
$\chi$	Fator de restrição	[adimensional]
$\chi_n^2$	Função densidade de probabilidade acumulada Chi-quadrado com $n$ graus de liberdade	[adimensional]
$\chi$	Peso de inércia do <i>Particles Swarm Optimization</i>	[adimensional]
$\Omega_{DDO}$	Domínio da otimização determinística	[adimensional]
$\Omega_{Falha}$	Domínio de falha	[adimensional]
$\Omega_{Falha \forall \varepsilon_p}$	Domínio de Falha para qualquer deformação plástica	[adimensional]
$\Omega_{Falha \forall \varepsilon_p + u_{máx}}$	Domínio de Falha para qualquer deformação plástica e/ou deslocamento máximo	[adimensional]
$\Omega_i^a, \Omega_i^p$	Subdomínio ativo e passivo	[adimensional]
$\Omega_{iF}$	Subdomínio de falha correspondente a direção $i$	[adimensional]
$\Omega_{ijF}$	Subdomínio de falha F na direção $\mathbf{e}_i$ da função estado limite $j$	[adimensional]
$\Omega_{iS}$	Subdomínio de segurança correspondente a direção $i$	[adimensional]
$\Omega_{RBRO}$	Domínio para a otimização do risco	[adimensional]
$\Omega_S, \Omega_F$	Domínio de segurança e Falha	[adimensional]

## 1. INTRODUÇÃO

A busca pela solução ideal dos projetos em engenharia, tais como a redução de peso ou mudança da forma de uma estrutura sem comprometer sua integridade estrutural, vem sendo um amplo campo de pesquisa dentro da engenharia estrutural. Ao longo das últimas décadas, a otimização estrutural vem se destacando ainda mais, principalmente na indústria aeroespacial onde o objetivo principal é se obter estruturas mais leves. A busca pelo melhor projeto, de modo a torná-lo mais competitivo, é uma das características principais para o desenvolvimento de novos métodos de otimização.

No entanto, na maioria das vezes, a otimização é tratada de forma bastante simples, assumindo geometrias satisfatórias, materiais apropriados e valores de cargas solicitantes conhecidos, os quais segundo Gomes, 2001, não consideram a presença da dispersão espacial nas propriedades dos materiais e carregamentos. Sendo assim, em projetos estruturais de engenharia, é frequente a existência de incertezas associadas às propriedades dos materiais, propriedades geométricas e carregamentos. Além disso, os sistemas estruturais devem ser projetados considerando o custo esperado total resultante das consequências atribuídas à possíveis falhas destes sistemas. Diante deste cenário, ignorar a existência de incertezas e/ou qualquer consequência associada ao custo esperado total, representa uma simplificação do problema real, podendo levar a uma medida incompleta de segurança e custo total do projeto.

Uma maneira tradicional de se considerar as incertezas e custos nos projetos, é feita pelo uso de coeficientes de segurança estabelecidos por normas. Esta abordagem pode ser atribuída aos métodos de otimização determinísticos, os quais permitem obter uma configuração ótima do ponto de vista mecânico. No entanto, a utilização deste critério, não permite encontrar um projeto que seja de fato dito como ótimo, considerando os custos referentes a eventuais falhas. A otimização baseada em confiabilidade, RBDO (*Reliability-Based Design Optimization*), consiste em incorporar a análise probabilística considerando as incertezas das variáveis existentes na avaliação da segurança quanto ao colapso da estrutura. A otimização do risco baseada em confiabilidade, RBRO (*Reliability-Based Risk Optimization*) aumenta o escopo do problema ao acrescentar as consequências que a falha possa trazer, principalmente em termos monetários, buscando um balanço entre economia e segurança, os quais competem entre si. Este tipo de otimização é o que de

fato mais se aproxima de casos reais encontrados no dia a dia do engenheiro, ou seja, o RBRO pode gerar uma estrutura menos segura<sup>1</sup>, mas que no final, em termos de custo, é mais econômica na eventualidade de falhas.

De fato, há importantes e recentes avanços sendo realizados na área da otimização do risco, em particular devido a evolução na área da confiabilidade estrutural. No entanto, os problemas estruturais de grande porte continuam encontrando empecilhos na análise da confiabilidade que não são teóricos, mas numéricos. Neste sentido, os esforços para tornar os métodos probabilísticos mais eficientes no tratamento de grandes problemas são ainda mais justificáveis ao contexto da otimização do risco, a qual requer centenas ou milhares de soluções probabilísticas, podendo a função objetivo depender de muitas variáveis de projeto. Essa problemática requer à necessidade do desenvolvimento de métodos probabilísticos que resolvam este problema de forma mais eficiente, mas sem comprometer a precisão.

Na literatura, uma série de artigos são dedicados a otimização envolvendo a formulação RBDO, por outro lado, apenas em artigos mais recentes são encontrados estudos relacionados ao RBRO, particularmente devido aos grandes avanços na área de confiabilidade estrutural. Dentre as publicações internacionais, a maior parte delas tem se dedicada a análise do risco de sistemas estruturais, e não a otimização propriamente dita, salvo algumas exceções, como Barone e Frangopol, 2014, que abordam um problema de otimização em planos de manutenção para vida útil de estruturas.

Ao contexto da otimização do risco em sistemas estruturais, os trabalhos mais próximos desta Tese, encontrados na literatura, são: Gomes, 2013, o qual se dedicou a otimização do risco considerando políticas de inspeção, focando em processos de corrosão e fadiga; Beck e Verzenhassi, 2008, onde a otimização do risco é aplicada a sistemas estruturais considerando o coeficiente de segurança parcial como variável de projeto, para o caso em estudo, o problema da confiabilidade estrutural aborda estruturas elástico lineares, negligenciando as não linearidades físicas/geométricas assim como as falhas de serviço; Gomes e Beck, 2013, apresentam um artigo com objetivos semelhantes ao artigo de Beck e Verzenhassi, 2008.

Diante deste cenário, a contribuição desta Tese de doutorado, consiste em oferecer uma ferramenta capaz de lidar com a otimização do risco evitando ao máximo as

---

<sup>1</sup>Dando um certo nível de garantida de segurança do projeto final.



simplificações. Para isto, será proposta uma metodologia que permita resolver o problema probabilístico de maneira precisa e eficiente, com possibilidade de capturar os eventos que descrevem os diversos modos de falha, presentes em sistemas redundantes, individualmente. O código computacional, oferecido como solução para problemas de otimização do risco, é finalizado ao se acoplar o método probabilístico proposto à análise determinística não linear física/geométrica e ao algoritmo heurístico de otimização PSO.

## 1.1 Objetivos e Justificativas

Este trabalho tem por objetivo principal desenvolver algoritmos capazes de tratar do problema de otimização do risco de sistemas estruturais, com possibilidade de abordar estruturas estaticamente indeterminadas considerando não linearidades físicas e geométricas. Até agora, a abordagem deste tipo de problema tem sido realizada de forma simples, não sendo capaz de modelar o problema probabilístico considerando os vários modos de falha existentes, especialmente em sistemas redundantes. Para atender a este propósito, os seguintes objetivos específicos são propostos.

- Realizar uma implementação numérica de elementos finitos capaz de representar de forma adequada o comportamento de estruturas do tipo treliça plana e espacial, considerando as não linearidades físicas e geométricas;
- Desenvolver um método probabilístico que permita identificar os múltiplos modos de falhas presentes em sistemas estruturais redundantes, e suas respectivas probabilidades de falhas de forma precisa e eficiente;
- Implementar um algoritmo de otimização metaheurístico que permita abordar o problema determinístico, probabilístico e custos, a fim de obter a solução ótima em termos do custo esperado total, a um índice de confiabilidade coerente com a responsabilidade do problema.

Nos parágrafos seguintes estão explicitadas algumas das técnicas utilizadas nesta Tese, assim como a justificativa para tais escolhas.

A abordagem do problema probabilístico através dos métodos tradicionais, tais como os métodos de primeira ordem, FORM (*First Order Reliability Method*), e segunda ordem, SORM (*Second Order Reliability Method*), pode ser inadequado para funções de

estado limite descontínuas e/ou altamente não lineares [Haldar e Mahadevan, 1999]. Em se tratando da simulação de Monte Carlo, geralmente um grande número de análises determinísticas são necessárias, tornando a solução probabilística de alguns problemas impraticáveis computacionalmente. Neste sentido, os métodos de simulação direcional podem ser considerados como uma alternativa precisa e eficiente para a análise probabilística destes problemas. O método probabilístico desenvolvido nesta Tese é, de certo modo, uma adaptação do método direcional HDM (*Hyperspace Division Method*). Entretanto, as ferramentas adaptadas ao HDM, permitem ao método identificar as raízes de funções de estado limite descontínuas assim como o domínio de falha de funções altamente não lineares. Além disso, ressalta-se a capacidade do método em identificar a falha última e/ou serviço, outra contribuição apresentada nesta Tese.

Ressalta-se também, que a gestão dos riscos de origem estrutural ainda é feita de maneira subjetiva, e que as diversas simplificações realizadas, podem negligenciar algum aspecto nocivo ao problema analisado. Como contribuição desta Tese, pretende-se reduzir ao máximo as simplificações normalmente realizada aos problemas de otimização do risco, acoplando ao método probabilístico, uma formulação de elementos finitos capaz de representar adequadamente o colapso individual de cada membro e uma correta análise global da estrutura. Esta representação associada ao método probabilístico proposto e aos custos envolvidos, tem o potencial de fomentar o problema de otimização do risco de forma mais precisa e segura.

Finalmente, busca-se um método de otimização global independente de estimativas iniciais e passível de encontrar a solução ótima de casos onde a função objetivo apresente descontinuidades e oscilações, tais como aquelas esperadas com a análise não linear. Com base nestas características requeridas, o algoritmo heurístico PSO (*Particle Swarm Optimization*) é escolhido e acoplado à formulação do risco. Segundo Yang, 2010, o PSO é de fácil implementação, com resultados satisfatórios e robusto na busca do ótimo global.

## 1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho está dividido em 9 Capítulos. No presente Capítulo é dada um introdução sobre o tema desta Tese, expondo-se os objetivos e justificativas para a mesma. Os Capítulos 2 ao 9 abordarão cada um dos temas que compõem a presente Tese.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão geral sobre confiabilidade e sua aplicação em sistemas estruturais, dando ênfase aos métodos mais tradicionais utilizados para o cálculo da probabilidade de falha. Neste Capítulo, uma atenção maior é dada aos métodos direcionais, apontando-se as principais áreas que esta metodologia vem sendo aplicada com relativo sucesso, principalmente na área da confiabilidade estrutural.

O Capítulo 3 dedica-se a contextualização do risco aplicado a sistemas estruturais. Inicialmente é apresentada uma breve revisão bibliográfica, salientando os métodos presentes na literatura que investigam o problema da otimização do risco. Posteriormente, realiza-se uma definição teórica sobre as técnicas envolvidas na análise de risco e ao final do Capítulo, define-se o problema de otimização do risco para sistemas estruturais e sua formulação.

O Capítulo 4 apresenta de forma geral o problema de otimização estrutural e o método de otimização adotado, destacando alguns detalhes quanto à sua implementação.

No Capítulo 5 estuda-se a não linearidade física e geométrica de estruturas através do Método dos Elementos Finitos. A formulação de ambas as não linearidades para elementos de treliça espacial é discutida em detalhes. São apresentados exemplos numéricos que validam os algoritmos implementados.

O Capítulo 6 aborda a formulação probabilística desenvolvida para identificar os múltiplos modos de falha de sistemas redundantes e suas medidas de confiabilidade. O início do Capítulo traz de forma sucinta a base teórica do HDM (*Hyperespace Division Method*) proposto por Katsuki e Frangopol, 1994. Em seguida, são apresentadas as adaptações realizadas ao HDM original, resultado num HDM modificado.

Alguns exemplos com funções explícitas e estruturas redundantes são avaliados com o HDM modificado no Capítulo 7, visando salientar as potencialidades do método probabilístico proposto ao lidar com múltiplas funções de estado limite não lineares e descontínuas.

No Capítulo 8 é apresentada a formulação do modelo de otimização do risco a ser empregado. O modelo proposto inclui funções de estado limite em termos dos deslocamentos, tensões ou deformações, podendo ser aplicado tanto para estruturas lineares quanto não lineares. Além disso, são considerados os custos associados aos eventos falha última e/ou serviço, normalmente presentes em sistemas redundantes. Ao final do Capítulo, dois problemas de otimização do risco são resolvidos, nos quais são consideradas as

não linearidades físicas e geométricas. O primeiro problema trata de uma treliça plana de 10 barras, enquanto o segundo problema envolve uma estrutura real.

No Capítulo 9 são apresentadas as conclusões relativas ao emprego das diversas formulações e metodologias utilizadas nas análises numéricas envolvidas nesta Tese. Em seguida, algumas sugestões são feitas a respeito de futuros trabalhos que possam vir a serem feitos na forma de aperfeiçoamento das técnicas desenvolvidas até aqui. Uma relação de referências bibliográficas mencionadas no texto é apresentada em seguida.

Finalmente, o apêndice apresenta um breve detalhamento do projeto utilizado como caso de estudo real aplicado aos algoritmos desenvolvidos.

## 2. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

### 2.1 Introdução à Confiabilidade Estrutural

Um sistema estrutural projetado dentro dos padrões normais de dimensionamento é idealizado para operar ao longo de sua vida útil sem qualquer falha, assumindo que as condições de serviço atendam as premissas consideradas na concepção do projeto. Para que isso seja atingido, normalmente, os sistemas estruturais são projetados atendendo a um certo nível de segurança, pela imposição de fatores de segurança recomendados por normas. Entretanto, mesmo assim, a chance do projeto vir a falhar pode ser maior do que foi previsto pela adição do fator de segurança.

Uma explicação conveniente para a alteração dos padrões preestabelecidos para o comportamento do sistema estrutural levando-o a falha, se deve ao caráter aleatório das variáveis envolvidas no projeto, ou seja, incertezas dos parâmetros envolvidos no dimensionamento da estrutura. As incertezas incluem: aleatoriedade das cargas, propriedades dos materiais, dados geométricos, incertezas dos modelos teóricos devidos a simplificações, etc.

De fato, considerar que todos os parâmetros envolvidos no projeto estrutural sejam tratados como variáveis determinísticas<sup>1</sup> não garante sua funcionalidade e segurança. Recentes exemplos de falhas de estruturas, como pode ser verificado em Wolchuk R., 2011, confere a necessidade de se dar uma maior ênfase aos métodos baseados em confiabilidade. Visto que grande parte das variáveis envolvidas na segurança da estrutura não são de natureza determinística, a teoria da confiabilidade estrutural é uma forma de verificar se a estrutura poderá sofrer ou não uma falha catastrófica, considerando as incertezas apontadas<sup>2</sup> para cada elemento do sistema. Em outras palavras, na confiabilidade estrutural, objetiva-se quantificar quais as chances de ocorrência de situação de operação de segurança (entendida como confiabilidade do sistema), ou de forma complementar, quais as chances de ocorrência da situação de operação de falha (entendida como probabilidade de falha)[Gomes, 2001].

Segundo Haldar e Mahadevan, 1999, a confiabilidade é a probabilidade de so-

---

<sup>1</sup>Variáveis determinísticas: variável imutável e que não possui incertezas.

<sup>2</sup>Incetezas apontadas: é praticamente impossível considerar todas as incertezas (existentes em um dado sistema) numa mesma análise, sendo assim, a confiabilidade é condicionada apenas a uma dada quantidade de incertezas apontadas (ou selecionadas) para o sistema.

brevivência de um componente ou um sistema desde que utilizado de acordo com as especificações de projeto. Matematicamente, a confiabilidade estrutural pode ser definida como a probabilidade de sucesso ( $P_s$ ) para uma dada probabilidade de falha ( $P_f$ ). A  $P_s$  corresponde ao complemento da probabilidade de falha, e pode ser definida segundo a expressão:

$$P_s = 1 - P_f \quad (2.1)$$

Vale salientar que  $P_f$  algumas vezes é empregada de forma errônea como sinônimo de risco. O risco inclui não somente a probabilidade de falha de um determinado sistema, mas também as consequências associadas a esta falha. Se o custo de falha for incluído na avaliação do risco, então é comum definir o risco como sendo o produto entre a probabilidade de falha pelo custo de falha propriamente dita [Gomes, 2007]. Uma definição mais detalhada sobre risco será dada no Capítulo 3.

Para informações mais aprofundadas quanto a definição de confiabilidade, recomenda-se consultar Holicky, 2009.

## 2.2 Conceitos Gerais de Probabilidade de Falha

O estudo da probabilidade de falha consiste em determinar uma função que represente o desempenho do sistema, conhecida como função de estado limite ou função de falha, cuja previsão da violação desse estado limite<sup>3</sup> em qualquer estágio de sua vida útil corresponde a probabilidade de falha desse sistema estrutural.

Segundo Nowak e Collins, 2000, existem três tipos de classificações para as funções de desempenho em um sistema ou componente estrutural, as quais são discutidas a seguir.

### 2.2.1 Função de Desempenho Baseada no Estado de Limite Último

Para estruturas em geral, o estado limite último corresponde a perda global de equilíbrio da estrutura em consequência aos diferentes efeitos causados pelos carregamentos atuantes, ou também, em complemento às definições da ABNT-NBR:8681, 2003, os estados limites últimos de uma estrutura são aqueles, pela sua simples ocorrência, determinam a paralisação, no todo ou em parte, da estrutura. As funções de desempenho quanto ao estado limite último podem incluir a resistência a tração ou compressão de

---

<sup>3</sup>Estado limite: é a fronteira que divide o desempenho desejado do indesejado de uma estrutura.

um elemento tensionado, capacidade de resistência a esforço cortante, torção, flambagem local e assim por diante. Cada tipo de falha corresponde a um diferente tipo de função de desempenho.

### 2.2.2 Função de Desempenho Baseada no Estado Limite de Serviço

Para os efeitos da ABNT-NBR:8681, 2003, estados limites de serviço são aqueles que, por sua ocorrência, repetição ou duração, causam efeitos estruturais que não respeitam as condições especificadas para o uso normal da construção, ou que são indícios de comprometimento da durabilidade da estrutura. Além disso, um estado limite de serviço compreende o estado pelo qual a ocupação ou uso da estrutura não é mais possível, mesmo que sua estabilidade global não esteja comprometida. De fato, este tipo de função é dependente das condições de utilização da estrutura. As funções de desempenho quanto ao estado limite de serviço podem incluir vibrações, deformações permanentes, flechas, abertura de fissuras entre outros.

### 2.2.3 Função de Desempenho Baseada na Falha por Fadiga

Um estado limite quanto à fadiga deve ser considerado em estruturas sujeitas à carregamentos cíclicos. As funções de desempenho quanto à fadiga podem ser consideradas em componentes cuja repetição dos ciclos de cargas induz ao acúmulo de dano e deterioração, levando o elemento ao colapso. A avaliação de estado limite de fadiga se torna um problema sério em pontes ferroviárias e estruturas de aeronaves.

## 2.3 Cálculo da Probabilidade de Falha: Conceitos Iniciais

A probabilidade de falha representa as chances de que um determinado estado limite (qualquer uma das funções de desempenho supracitadas) venha a ser violado. Sendo assim, uma vez que tal estado limite dependa dos parâmetros envolvidos no projeto, pode-se afirmar que a formulação da função de estado limite está condicionada a uma dada gama de parâmetros aleatórios para o cálculo da probabilidade de falha da estrutura. De forma similar, a resposta da estrutura pode ser definida por um vetor de variáveis aleatórias básicas  $\mathbf{X}=[x_1, x_2, \dots, x_n]$  que compõe a função de estado limite  $g(\mathbf{X})$  como segue:

$$g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X}) \quad (2.2)$$

onde  $R(\mathbf{X})$  representa a resistência e  $S(\mathbf{X})$  a solicitação aplicada a estrutura.

O comportamento dos termos que regem a função de estado limite (Equação 2.2), podem ser interpretados da seguinte forma: considera-se um sistema onde são identificadas incertezas em relação a resistência  $R$  e solicitação  $S$  (isto é, variáveis aleatórias do problema), conhecendo a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias, a previsão de que  $S$  exceda  $R$  corresponde à área de sobreposição entre  $f_S(s)$  e  $f_R(r)$  (ou seja, região de falha), a qual representa uma medida quantitativa da probabilidade de falha. A Figura 2.1 ilustra esta ideia, onde  $R_N$  e  $S_N$  designam os valores determinísticos (nominais), assim como seus valores médios  $\mu_S$  e  $\mu_R$ , e desvios padrão  $\sigma_S$  e  $\sigma_R$ . Sendo assim, a confiabilidade pode ser definida em termos da probabilidade de falha,  $P_f$ , pela Equação 2.3.

$$P_f = \int_0^\infty \left[ \int_0^s f_R(r) dr \right] f_S(s) ds = \int_0^\infty F_R(s) f_S(s) ds = P[g(\mathbf{X}) \leq 0] \quad (2.3)$$

tal que  $g(\mathbf{X})$  é a função que defini um estado limite de segurança quando  $g(\mathbf{X}) > 0$ , e falha quando  $g(\mathbf{X}) < 0$  (a hiper-superfície de separação entre o domínio de segurança e falha é chamada de estado limite  $g(\mathbf{X}) = 0$ ),  $f_S(s)$  é a função densidade de probabilidade da solicitação, e  $F_R(r)$  a função densidade de probabilidade acumulada da resistência.

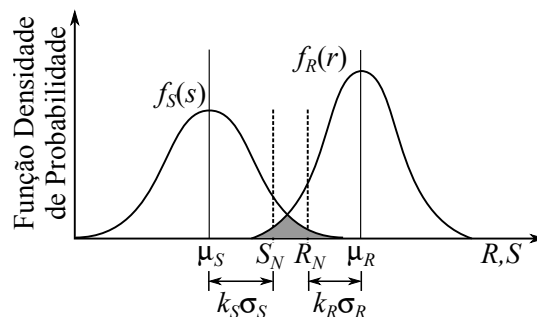


Figura 2.1 – Função densidade de probabilidade para resistência e solicitação. Adaptado de Haldar e Mahadevan, 1999.

### 2.3.1 Interpretação Geométrica do Índice de Confiabilidade

Considera-se agora um simples caso de estudo, onde  $R$  e  $S$  são reescritas em termos de duas variáveis aleatórias independentes, uma delas representando a resistência (por exemplo: tensão de escoamento  $f_y$ ) e a outra o carregamento aplicado à estrutura



(definido por  $P$ ). A função de estado limite que satisfaça a Equação 2.2 é dada por:

$$g(R, S) = f_y A - P \quad (2.4)$$

As variáveis aleatórias que compõem a função de estado limite da Equação 2.4 pertencem ao espaço real. É possível representá-la no espaço normal reduzido em termos da resistência ( $u_R$ ) e solicitação ( $u_S$ ). Para tal fim, é necessário normalizar as variáveis aleatórias e reescrever a função na seguinte forma:

$$g(u_R, u_S) = A (\mu_{f_y} + u_R \sigma_{f_y}) - (\mu_P + u_S \sigma_P) \quad (2.5)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal da barra,  $\mu_{f_y}$  e  $\mu_P$  são os valores médios das variáveis tensão de escoamento e carga, respectivamente.  $\sigma_{f_y}$  e  $\sigma_P$  são os desvios da  $f_y$  e  $P$ .

Na Figura 2.2 é possível verificar graficamente a localização do ponto de projeto e do índice de confiabilidade ( $\beta$ ). Como pode-se perceber, o ponto de projeto corresponde a posição na superfície da função de estado limite mais próxima da origem, e a correspondente distância do respectivo ponto à origem é definida como índice de confiabilidade, o qual é obtido pela seguinte expressão.

$$\beta = \frac{(\mu_{f_y} A) - \mu_P}{\sqrt{(\sigma_{f_y} A)^2 + (\sigma_P)^2}} \quad (2.6)$$

Posteriormente será demonstrado que normalmente não se conhece a forma das funções de estado limite (funções implícitas - seção 2.9), e geralmente em problemas reais elas possuem uma forma não linear. Conforme apresentado na Figura 2.2, se a superfície de falha for linear, o ponto de projeto pode ser facilmente encontrado e o índice  $\beta$  facilmente calculado pela Equação 2.6. No caso de funções de estado limite não lineares, Figura 2.3, a busca pelo ponto de projeto pode ser definido como um problema de otimização na seguinte forma:

$$\beta = \min_{g(\mathbf{U})=0} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad (2.7)$$

onde  $n$  corresponde ao número total de variáveis aleatórias que definem a dimensão do problema.

O cálculo numérico do índice  $\beta$ , definido pela Equação 2.7, pode ser realizado de várias formas. Atualmente existem inúmeros algoritmos para a solução deste problema,

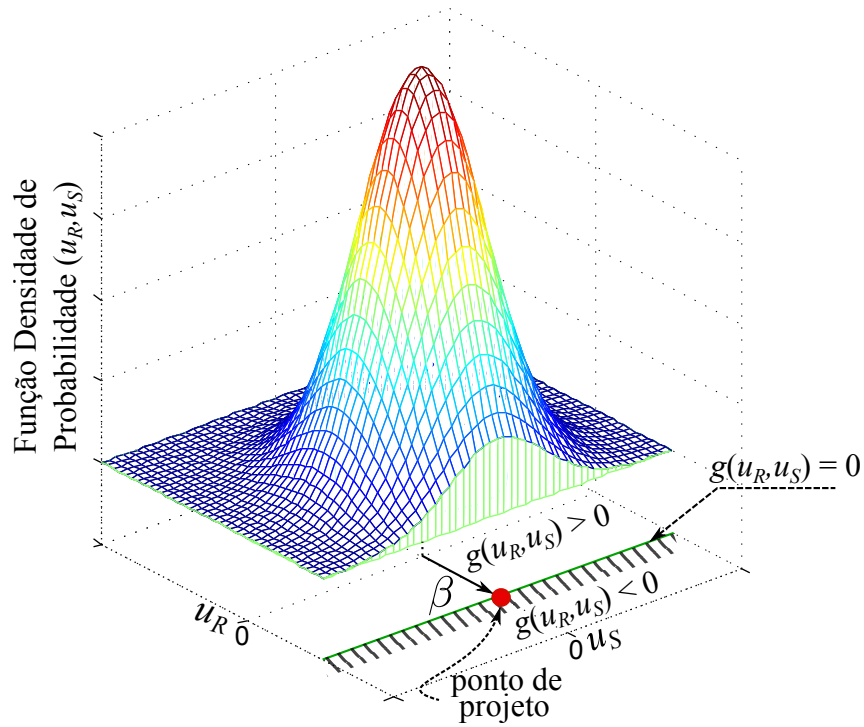


Figura 2.2 – Função de estado limite linear no espaço normal reduzido.

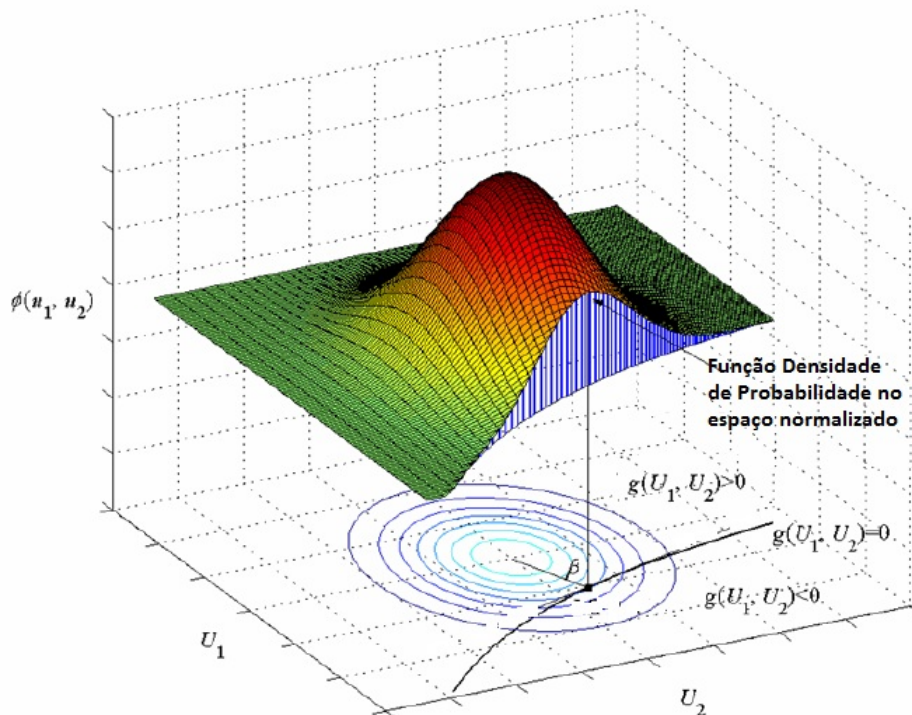


Figura 2.3 – Função de estado limite não linear no espaço normal reduzido - 3D.

Adaptado de Hashemolhosseini, 2013.

tais como o FORM e SORM que aproximam a função de estado limite por uma função de primeira e segunda ordem, respectivamente. Os métodos chegam a solução através de

um processo de otimização que consiste em encontrar as coordenadas do ponto sobre a superfície da função de estado limite, as quais correspondam ao ponto mais próximo da origem do espaço normalizado.

Segundo Gomes, 2007, o índice de confiabilidade é um importante resultado para o cálculo de confiabilidade, pois ele é utilizado para comparar e quantificar os resultados da análise de confiabilidade estrutural. Entretanto, deve-se reconhecer que o índice  $\beta$  tem um caráter operativo, uma vez que as probabilidades de falha podem ser bastante sensíveis para as variações nas probabilidades estatísticas das variáveis ou mesmo no modelo estrutural, especialmente em se tratando de pequenos valores de probabilidades de falhas.

## 2.4 Distribuição Chi-Quadrado

Os conceitos da teoria clássica de confiabilidade estrutural agora podem ser demonstrados de maneira mais formal, estendendo-os a compreensão dos métodos desenvolvidos para estimar a  $P_f$  para diferentes níveis de complexidade quanto as suas funções de estado limite.

Partindo da Equação 2.3, uma forma mais geral de representá-la é a seguinte:

$$P_f = \int \dots \int_{g(\mathbf{X}) < 0} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.8)$$

Onde  $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é a função densidade de probabilidade conjunta ou acumulada (fdp) das variáveis aleatórias  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A Equação 2.8 é considerada a equação fundamental da análise de confiabilidade.

O domínio de integração da função densidade de probabilidade conjunta normalmente tem uma forma irregular de tal complexidade que a solução da integral da Equação 2.8 é impraticável. Segundo Schuëller e Stix, 1987, a integração numérica da Equação 2.3, a qual representa a probabilidade de falha pela gaussianiana acumulada ( $\Phi(-\beta)$ ), é eficiente apenas para problemas com um pequeno número de variáveis - geralmente menos que seis - ou onde o domínio de integração possui uma forma particular (hipercubo, hipercírculo, etc.), ou seja, a probabilidade de falha utilizando-se a  $\Phi(-\beta)$  desconsidera a dimensão do problema analisado (número de variáveis de projeto), assim, para qualquer número de variáveis de projeto, a probabilidade de falha sempre será a mesma. Em Schuëller e Stix, 1987, é possível verificar que na distribuição Chi-quadrado, o número de variáveis

envolvidas no problema influencia os resultados da probabilidade de falha.

A função densidade de probabilidade acumulada Chi-quadrado (fdp -  $\chi^2$ ) quando utilizada no cálculo da probabilidade de falha para apenas uma variável ( $n=1$ ), consiste em calcular a área (simétrica a origem) abaixo da fdp, na região de falha. Para este caso, a metade da  $P_f$  pelo Chi-quadrado deve ser igual a probabilidade de falha obtida com  $\Phi(-\beta)$ . Em se tratando de duas ou mais variáveis aleatórias ( $n=2, 3, \dots, n_{var.}$ ), as  $P_f$  obtidas com o Chi-quadrado e com  $\Phi(-\beta)$  são diferentes. Schuëller e Stix, 1987, apresentam uma formulação que reduz o problema (no caso de funções de estado limite elipsoides) a uma integração unidimensional aplicando a função densidade de probabilidade Chi-quadrado para  $n$  graus de liberdade. A  $P_f$  obtida com essa integração pode ser comparada com a  $P_f$  obtida utilizando a  $\Phi(-\beta)$ . Nota-se que a medida que  $n$  é aumentado, a  $P_f$  pelo Chi-quadrado assume valores diferentes, ao passo que pela  $\Phi(-\beta)$  a  $P_f$  se mantém a mesma independente do valor de  $n$ . Nos parágrafos seguintes é apresentada uma breve explicação quanto ao cálculo da probabilidade de falha utilizando o Chi-quadrado.

Em se tratando de apenas uma variável aleatória, a metade da  $P_f$  obtida pelo Chi-quadrado é igual a  $P_f$  obtida com a  $\Phi(-\beta)$ , pois para este caso, a função densidade de probabilidade acumulada pode ser representada no espaço unidimensional, permitindo que a  $P_f$  seja obtida pela estimativa de uma dada área abaixo da fdp dentro da região de falha. Quando o problema considera duas variáveis aleatórias, a fdp assume uma forma no espaço bidimensional tal que  $P_f$  é calculada como sendo o volume abaixo da fdp na região de falha. Se três variáveis são considerada, a fdp é apresentada no espaço tridimensional, tal que a  $P_f$  corresponde ao hipervolume abaixo da fdp na região de falha e assim sucessivamente.

A Figura 2.4a, apresenta uma função densidade de probabilidade acumulada para duas variáveis aleatórias ( $n=2$ ). Para a estimativa de probabilidade de falha desta função, considera-se que a função estado limite seja circular. O volume da fdp -  $\chi^2$  fora da função estado limite circular de raio  $\beta$  pode ser visto em corte na Figura 2.4b, a qual demonstra as chances das variáveis  $x_1$  e  $x_2$  estarem fora do círculo de raio  $\beta$ . Na Figura 2.4b, a probabilidade de falha é estimada como sendo:

$$P_f = 1 - \chi_n^2(\beta^2, n) \quad (2.9)$$

sendo  $\chi_n^2$  a função densidade de probabilidade acumulada Chi-quadrado para  $n=2$ , e  $\beta$  o índice de confiabilidade, o qual corresponde ao raio da função estado limite circular abaixo da fdp -  $\chi^2$ .

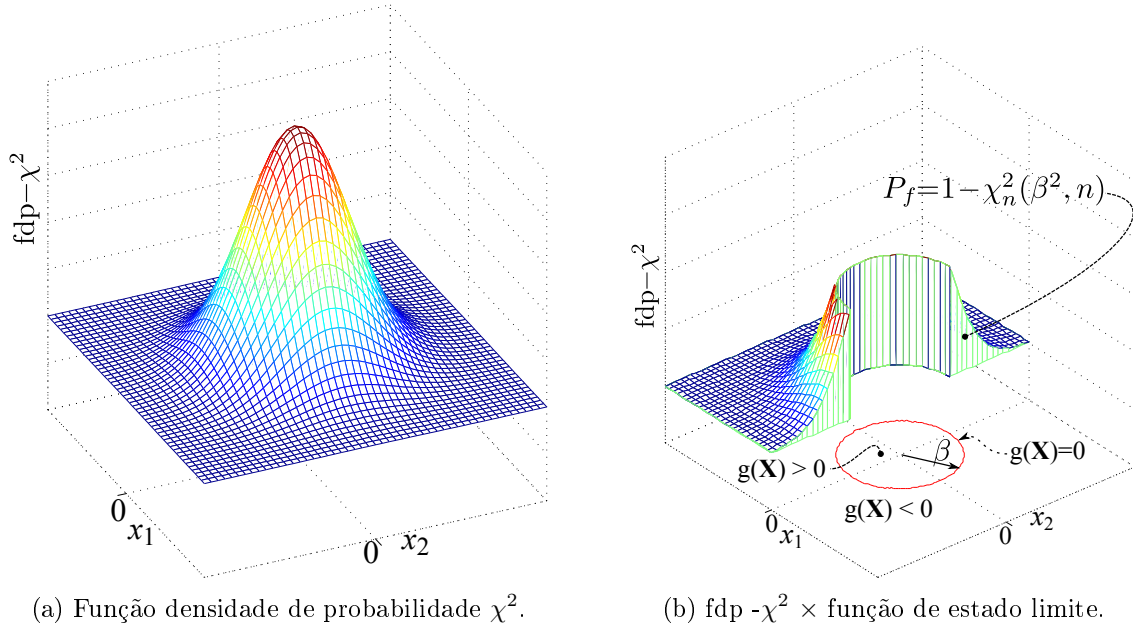


Figura 2.4 – Representação da fdp -  $\chi^2$  e função de estado limite circular.

A medida que um maior número de variáveis aleatórias são consideradas, maior deverá ser a dimensão do espaço da fdp -  $\chi^2$ . Desse modo, pode-se afirmar que a probabilidade de falha para  $n$  variáveis aleatórias corresponde ao hipervolume abaixo da fdp -  $\chi^2$  dentro da região de falha. Sendo assim, a fdp -  $\chi^2$  para  $n$  variáveis aleatórias independentes com distribuição normal, é definida pela seguinte equação:

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (2.10)$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  corresponde à função Gama.

Da mesma forma, o raio da hiperesfera ( $\beta$ ) para  $n$  variáveis aleatórias é dado por:

$$\beta = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (2.11)$$

Partindo da equação fundamental da análise de confiabilidade, Equação 2.8, Schuëller e Stix, 1987, apresentam uma formulação fechada para calcular a probabilidade de falha de uma função estado limite hiperparabólica, a qual pode ser reescrita como sendo:

$$P_f = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} \int_0^\infty \Phi[-\beta] \left(\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1} \phi(\beta) d\beta \quad (2.12)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  é a função distribuição de probabilidade acumulada e  $\phi(\cdot)$  é a função densidade de probabilidade acumulada. A Equação 2.12 transforma o problema de integração múltipla para um problema de integração unidimensional.

## 2.5 Métodos para Análise de Confiabilidade Estrutural

Ao longo dos anos, muitos métodos foram desenvolvidas para resolver a integral da Equação 2.8. Dentre as diversas técnicas existentes utilizadas para estimar a confiabilidade de sistemas estruturais, podem ser citados: métodos de primeira e segunda ordem (FORM e SORM), métodos de simulação de Monte Carlo, métodos de simulação direcional, métodos mistos ou híbridos, entre outros. Nesta seção será apresentada uma definição simplificada do método de simulação de Monte Carlo, bem como uma breve revisão bibliográfica dos métodos direcionais já desenvolvidos, enfatizando as principais características destes métodos e visando justificar sua escolha para a análise de confiabilidade estrutural deste trabalho.

### 2.5.1 Métodos de Simulação Direta de Monte Carlo

Nos métodos de simulação, em geral, é possível calcular a probabilidade de falha tanto para funções de estado limite implícitas quanto explícitas. É possível encontrar na literatura um grande número de métodos de simulação, tais como: amostragem por importância, simulação de Monte Carlo, simulação direcional, simulação por hipercubo latino, simulação adaptativa, entre outros.

Na simulação de Monte Carlo, pontos aleatórios são amostrados em todo o domínio estocástico, seguindo uma distribuição densidade de probabilidade específica, os quais são avaliados por uma função explícita ou implícita para determinar se algum deles representa falha ou não. Segundo Haldar e Mahadevan, 1999, o método é composto por seis etapas essenciais: (1) definição do problema em termos de todas as variáveis aleatórias, (2) quantificação das características probabilísticas de todas as variáveis em termos de suas funções densidade de probabilidade e parâmetros correspondentes, (3) geração e avaliação destas variáveis aleatórias, (4) avaliação do problema determinístico, (5) aquisição

das informações probabilísticas, e (6) determinação da eficiência e precisão da simulação. Estas etapas são agrupadas e discutidas da seguinte forma,

Dado um conjunto de  $n$  variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , cada uma delas caracterizadas pela sua função densidade de probabilidade marginal e respectiva função distribuição de probabilidade acumulada, a probabilidade de falha associada a função de estado limite<sup>4</sup>  $g(\mathbf{X})$  é dada por:

$$P_f = \int_{\{\mathbf{X}|g(\mathbf{X}) \leq 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (2.13)$$

onde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  é a função distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias, e  $I[g(\mathbf{X})]$  é a função indicadora, dada por:

$$I[g(\mathbf{X})] = \begin{cases} 1 & \text{Se } g(\mathbf{X}) \leq 0 \text{ Falha} \\ 0 & \text{Se } g(\mathbf{X}) > 0 \text{ Segurança} \end{cases} \quad (2.14)$$

Dessa forma, a integral da Equação 2.3, é substituída pela integral sobre todo o domínio, ponderada pela função indicadora. A integral da Equação 2.13 representa o valor esperado da função indicadora. Um estimador para a probabilidade de falha pode ser escrito na seguinte forma:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N_S} \sum_j^{N_S} I[g(\mathbf{X}^j)] \quad (2.15)$$

onde  $N_S$  corresponde ao número de simulações e  $\mathbf{X}^j$  é o  $j$ -ésimo vetor de amostras contendo as  $n$ -variáveis.

Deve ser mencionado que a simulação de Monte Carlo direta pode estar sujeita a consideráveis erros se o número de simulações não for suficientemente grande. Há alguns métodos para definir a precisão de uma simulação ou determinar o número necessário de simulações para obter uma certa precisão nas respostas.

Uma das métricas para avaliar a precisão estatística do estimador de probabilidade de falha é o coeficiente de variação (c.v.), o qual pode ser definido como sendo:

$$\text{c.v.} = \frac{\sqrt{\frac{(1-P_f)P_f}{N_S}}}{P_f} \quad (2.16)$$

---

<sup>4</sup> $g(\mathbf{X})$  inclui todas as variáveis aleatórias e define as regiões de falha e segurança.

### 2.5.2 Métodos de Simulação Direcional - Conceitos Gerais

A simulação direcional é uma boa ferramenta para a análise de confiabilidade. Geralmente, na simulação direcional, vetores direção aleatórios são gerados e distribuídos uniformemente na superfície de uma hiperesfera unitária. A distância da origem à superfície de falha é procurada em cada direção aleatória para estimar a probabilidade de falha condicional. Segundo Nie e Ellingwood, 2000, os métodos direcionais necessitam identificar um conjunto de direções nas quais a integração unidimensional é realizada na forma fechada para cada direção, ou por simulação ou de forma numérica. A integração ao longo de cada direção é obtida pela utilização da distribuição  $\chi^2$  no espaço normal padrão.

Katsuki e Frangopol, 1994, desenvolveram um método direcional para calcular a probabilidade de falha de componentes de sistemas estruturais, HDM (*Hyperspace Division Method*). A ideia proposta consiste em aproximar a superfície da função de estado limite no espaço normal padrão por uma série de segmentos hiperesféricos, cada qual tendo um raio descrito por uma distribuição  $\chi^2$ . A probabilidade de falha é dada pelo somatório das probabilidades de falha associadas a estes segmentos da hipersuperfície da função de estado limite. Os autores descrevem o método da seguinte forma: (1) Transformação do vetor de variáveis básicas num vetor normalizado; (2) divisão do espaço normal padrão em subdomínios ativos e passivos pelo uso de um método de geração de vetores de linhas centrais; (3) aproximação da superfície de estado limite por segmentos de hiperesferas; (4) estimativa da probabilidade de falha associada a cada subdomínio pela sequência de integrações unidimensionais nas direções identificadas; (5) cálculo da probabilidade de falha correspondente a hipersuperfície da função de estado limite. Segundo Katsuki e Frangopol, 1994, o método pode resolver problemas envolvendo funções não lineares, múltiplos pontos na hipersuperfície da função de estado limite e/ou múltiplas funções de estados limites. Os problemas abordados demonstram que o método obteve soluções muito próximas às obtidas pela simulação de Monte Carlo, visto que, o método probabilístico proposto no presente trabalho consiste numa adaptação do HDM, no Capítulo 6, serão descritos maiores detalhes do HDM.

Yonezawa e Okuda, 1997, propuseram um método de integração numérica para avaliar a probabilidade de falha estrutural baseado na aproximação do vetor direcional. Na proposta dos autores referenciados, a superfície da hiperesfera unitária é dividida



analiticamente num especificado número de malhas e a probabilidade de falha é calculada usando as linhas centrais dos vetores normais de cada malha. A probabilidade de falha é aproximada pelo somatório das áreas de cada malha, obtidas pela distribuição  $\chi^2$ .

Nie e Ellingwood, 2004, desenvolveram um sistema para refinar o conjunto de direções e assim reduzir o número de avaliações da função de estado limite. O método consiste num sistema de refinamento de duas fases usando dois tipos de redes neurais (*FFBPN* e *RBN*) e *Fekete Point Sets*, que identificam a localização e forma da superfície de estado limite. Na primeira fase, a rede é treinada para identificar as direções mais significativas; na segunda fase, a confiabilidade é estimada. Segundo os autores, uma alta razão efetiva<sup>5</sup> corresponde a uma suave função de estado limite e uma alta razão de esforço<sup>6</sup>, sendo assim, a utilização do refinamento com rede neural é pouco vantajosa para problemas com alta razão efetiva. Entretanto, Nie e Ellingwood, 2004, salientam que problemas práticos de confiabilidade estrutural geralmente apresentam baixos índices de razão efetiva, portanto, o uso de redes neurais em conjunto com algoritmos de simulação direcional pode reduzir o número de análises necessárias para o cálculo da confiabilidade de sistemas reais.

Grooteman, 2011, apresenta um método de amostragem por importância direcional adaptativo (*ADIS*). No algoritmo, ao invés de amostrar pontos aleatórios em todo o domínio estocástico e determinar se estes pontos representam falha ou não falha, direções aleatórias ( $\underline{\theta}$ ) são geradas e a probabilidade contida nestas direções é determinada. As direções são geradas por um vetor de variáveis aleatórias ( $\underline{x}$ ) expresso em coordenadas polares da seguinte forma:

$$\underline{x} = r\underline{\theta} \quad (2.17)$$

onde  $r$  é o raio e  $\underline{\theta}$  um vetor direção unitário. Um estimador de probabilidade de falha é dada por:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - \chi_n^2(\beta_i^2)) \quad (2.18)$$

---

<sup>5</sup>Razão efetiva: é o numero de pontos efetivos sobre a cardinalidade de todo o conjunto de pontos. [Nie e Ellingwood, 2004]

<sup>6</sup>Razão de esforço: é definido pelo número de pontos usados atualmente, o qual é a soma da cardinalidade do conjunto de pontos da primeira fase dividida pela cardinalidade do conjunto de pontos da segunda fase. [Nie e Ellingwood, 2004]

Com esta equação, a estimativa da probabilidade de falha pode ser obtida realizando  $N$  simulações do vetor  $\underline{\theta}$ , e determinando a distância da origem à função estado limite nestas direções. A distância  $\beta_i$  é determinada utilizando um algoritmo de busca linear. O método não assegura que as direções são distribuídas de maneira uniforme, gerando imprecisão nas estimativas para o  $\beta$ . O autor sugere que o *ADIS* possa ser aplicado a baixos valores de probabilidade de falha e médio número de variáveis probabilísticas (aproximadamente 40).

### 2.5.3 Métodos de Geração das Direções Uniformemente Distribuídas

A maioria dos métodos de simulação direcional necessitam estabelecer um conjunto de direções nas quais a integração numérica unidimensional é realizada. Um conjunto de pontos distribuídos uniformemente na superfície da hiperesfera unitária define estas direções. Segundo Nie e Ellingwood, 2000, a precisão da simulação direcional depende da habilidade do algoritmo em gerar o conjunto de direções de forma eficiente, ou seja, gerar pontos uniformemente distribuídos sobre a superfície da hiperesfera de raio unitário. Se a função de estado limite é altamente não linear, ou a probabilidade de falha é pequena, um grande número de pontos é necessário e o método pode tornar-se ineficiente caso os pontos não estejam distribuídos uniformemente. A importância deste tema para os métodos de análise de confiabilidade baseados em simulação direcional, levou ao desenvolvimento de métodos alternativos para gerar pontos igualmente distribuídos na hiperesfera unitária. Exemplos de tais métodos incluem *Spherical t-Designs*, *Good Lattice Point Sets*, *Spiral e Fekete Point Sets*, *Advanced Hyperspace Division Method Points*, entre outros. Nie e Ellingwood, 2000, apresentam uma descrição simplificada destes métodos e os aplicam na geração das direções para avaliação da integral probabilística. No respectivo trabalho é possível comparar a eficiência e precisão entre os métodos apresentados, destacando-se o *Fekete Points Sets* como o mais preciso e eficiente para os exemplos abordados, os quais representam problemas de baixa complexidade.

Segundo Lovisolo e Silva, 2001, para distribuir um número aleatório de pontos uniformemente na superfície de uma hiperesfera, três metodologias podem ser utilizadas: (a) a algébrica, a qual não pode ser aplicada a problemas  $n$ -dimensionais; (b) a geométrica, na qual os pontos são distribuídos na superfície da esfera usando considerações geométricas, porém, também não é válido para problemas  $n$ -dimensionais; (c) a estocástica, na

qual é usado um vetor de amostragem para gerar um *codebooks* desejado, este método é, em teoria, possível de gerar bons *codebooks* para qualquer dimensão. Lovisolo e Silva, 2001, desenvolveram um método que combina considerações geométricas e características estocásticas.

Para obter uma distribuição de vetores direção igualmente distantes no espaço rotacional, Nie e Ellingwood, 2004, utilizaram uma técnica baseada em coordenadas polares para geração de vetores em um espaço bidimensional, tridimensional e  $n$ -dimensional.

Yonezawa e Okuda, 1997, dividem a superfície da hipersfera unitária em  $n$ -malhas de elementos finitos, assim, um vetor direcional é determinado analiticamente a partir das coordenadas polares das arestas de cada malha. A distância a partir da origem à função de estado limite para uma dada direção, pode ser obtida por um método de aproximação como os métodos de Newton. O método proposto para dividir a superfície da hipersfera unitária, segundo os autores, é de fácil implementação e pode ser aplicado para resolver de forma eficiente problemas de confiabilidade estrutural com não linearidades e múltiplas funções de estado limite.

## 2.6 Confiabilidade de Sistema com Múltiplos Pontos de Projeto

Na análise probabilística de sistemas estruturais reais, geralmente, as funções de estado limite que representam a resposta da estrutura são funções implícitas que necessitam de processos numéricos, tais como o método dos elementos finitos. Nestes casos, a complexidade de tais problemas poderá resultar em funções de estado limite altamente não lineares. Entretanto, muitos métodos consistem em identificar um único ponto da função de estado limite (normalmente o ponto mais próximo da origem) e então fazer uma aproximação de baixa ordem desta função. Esta técnica é típica dos métodos de primeira e segunda ordem (FORM e SORM). No método FORM, uma aproximação da probabilidade de falha é obtida pela linearização da superfície de estado limite a partir do ponto de projeto  $\vec{U}^*$ . Este ponto corresponde a posição mais próxima da origem no espaço normal padrão e representa a maior probabilidade de falha. O conceito supracitado é demonstrado no gráfico da Figura 2.5, onde é apresentada uma função de estado limite não linear (convexa).

Como pode ser verificado na Figura 2.5, a linearização da função de estado limite, considerando apenas um ponto de projeto, não consegue representar precisamente a forma

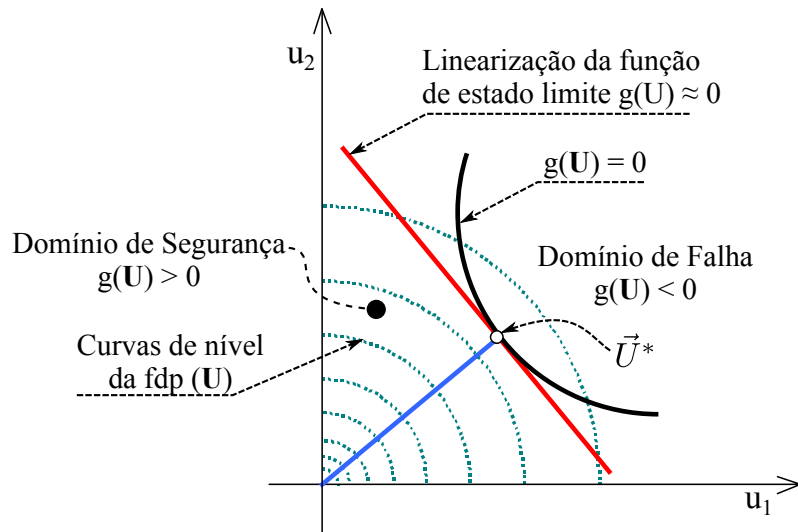


Figura 2.5 – Função de estado limite convexa.

real da função de estado limite. Sendo assim, verifica-se que esta técnica tende a apresentar uma deficiência ainda maior quando for aplicada em problemas reais de engenharia, nos quais a função de estado limite seja altamente não linear. Também para casos deste tipo, percebe-se que cada ponto representa uma grande parcela de contribuição para a probabilidade de falha do sistema, e significativos erros serão introduzidos a medida que pontos são omitidos.

Nota-se, portanto, que apenas quando a superfície da função estado limite é significativamente suave (ou seja, contínua e diferenciável) no espaço normal padrão, é possível aplicar o cálculo da probabilidade de falha por métodos como FORM e SORM com alguma precisão. Segundo Nie e Ellingwood, 2000, para funções de estado limite de componentes e sistemas estruturais altamente não lineares, FORM e SORM podem não ser suficientemente precisos.

No que se refere aos métodos direcionais, segundo Nie e Ellingwood, 2004, um dos erros associados aos métodos de simulação direcional é atribuído aos casos onde a função de estado limite é definida implicitamente pela análise de elementos finitos. Segundo esses autores, em funções implícitas, a ineficiência do método se deve a funções de estado limite que apresentam uma forma convexa com respeito a origem, tal como a Figura 2.5. Para estes casos, se o número de direções que interceptam a função de estado limite for pequeno, a descrição da superfície de falha será inadequada. Do contrário, se o número de direções for grande, muitas delas podem trazer informações irrelevantes da função de estado limite, não justificando o alto custo computacional nas análises de elementos finitos.

A procura eficiente pelos pontos de projeto é um parâmetro extremamente importante nos métodos que necessitam identificar a forma ou posição da função estado limite, pois graves erros podem ser introduzidos na avaliação da probabilidade de falha se alguns destes pontos forem negligenciados. Na seção seguinte são apresentados alguns métodos que foram desenvolvidos a fim de atender ao exposto neste parágrafo.

### 2.6.1 Identificação dos Múltiplos Pontos de Projeto

Ao longo dos anos, algumas pesquisas tem se dedicado a identificar os múltiplos pontos de projeto que descrevem a superfície da função de estado limite. Pode-se citar Kiureghian e Dakessina, 1998, os quais desenvolveram um método heurístico baseado no algoritmo *HL-RF* para identificar múltiplos pontos. Neste método, cada vez que um ponto é encontrado, a superfície de falha é deformada ao redor deste ponto. A saliência criada na superfície de falha neste ponto força o método a procurar por novos pontos em outras posições a cada nova reinicialização. Também, para realizar a análise de confiabilidade estrutural de funções de estado limite com múltiplos pontos de projeto, Barranco-Cicilia F. e Sagrilo, 2009, desenvolveram uma metodologia baseada no algoritmo de estratégias evolutivas (ES). Um método de otimização multidimensional usando o algoritmo ES é usado primeiramente para obter um mapeamento preliminar dos pontos de projeto relevantes (máximo local). As coordenadas deste ponto são utilizadas como referência para o algoritmo *HL-RF* (*Hasofer and Lind-Rackwitz and Fiessler*) onde o FORM é aplicado para avaliar a probabilidade de falha do sistema. Estes pontos também são utilizados como pontos centrais na simulação de Monte Carlo com amostragem por importância.

Tràn e Staat, 2014, utilizaram o método desenvolvido por Kiureghian e Dakessina, 1998, para encontrar os pontos de projeto de um sistema em série. Os autores aplicaram os métodos FORM e SORM em cada ponto de projeto para obter a estimativa de probabilidade de falha do sistema. Os resultados revelaram que a existência de vários pontos do projeto na análise de confiabilidade podem originar grandes erros na aproximação da probabilidade de falha pelos métodos FORM e SORM.

## 2.7 Confiabilidade de Sistemas Considerando Múltiplos Modos de Falhas

Grande parte das pesquisas que abordam problemas de confiabilidade estrutural, assumem que a probabilidade de falha pode ser descrita pelo comportamento de apenas

um componente do sistema, o qual corresponde ao elemento mais suscetível à falha. Sendo assim, o evento falha do sistema é descrito por apenas uma função estado limite, a qual representa um modo de falha em específico.

Estes métodos podem dar uma estimativa rápida da probabilidade de falha, entretanto, em estruturas reais, considerar o maior número possível de modos de falha bem como a precisão na identificação dos respectivos pontos de falha evitam que erros significativos no cálculo da confiabilidade da estrutura como um todo possa ocorrer.

Segundo Kim e Koh, 2013, um dos grandes desafios na análise da confiabilidade estrutural é que a maior parte dos problemas consistem em múltiplos modos de falhas. Isso porque estruturas reais são sistemas normalmente redundantes, e a falha de um elemento redistribui os esforços na estrutura redefinindo o estado limite dos elementos remanescentes (por exemplo, a redistribuição das tensões causada pela falha de um membro). Sendo assim, identificar o maior número possível de modos de falha existente é uma tarefa necessária porém demanda altos custos computacionais, os quais tornam-se maiores ao considerar estruturas complexas com grande número de elementos estruturais.

Conceitualmente a definição de múltiplos modos de falha é dada pela avaliação da confiabilidade total do sistema. Um sistema pode ser definido com um conjunto de possibilidades ou componentes independentes interconectados de tal modo que o estado limite do sistema dependa dos estados limites que constituem estes componentes. Na confiabilidade total do sistema, o evento falha pode ser descrito por uma função que consista de múltiplas funções de estado limite, isto é, um conjunto de possibilidades de falhas interconectadas ou falhas de componentes independentes.

A avaliação da confiabilidade total do sistema depende de diversos fatores, os quais constituem os estados limites e podem ser definidos como sendo: (1) a contribuição da falha do componente para a falha total do sistema, (2) a redundância no sistema, (3) o comportamento pós-falha do componente e do resto do sistema, (4) a correlação estatística entre eventos falhos, e (5) a falha progressiva dos componentes.

Tal análise de confiabilidade, tem como objetivo calcular a probabilidade de ocorrer o evento falha total do sistema ( $E_{\text{Sistema}}$ ). A Equação 2.19 representa esta ideia.

$$E_{\text{Sistema}} = \bigcup_{k=1}^{N_{\text{mod}}} \left[ \bigcap_{i \in I_{C_k}} E_i \right] = \bigcup_{k=1}^{N_{\text{mod}}} \left[ \bigcap_{i \in I_{C_k}} \{g_i(\mathbf{X}) \leq 0\} \right] = P_{f|\text{Sistema}} \quad (2.19)$$

Onde  $E_i$  corresponde ao  $i$ -ésimo evento que representa a falha para um dado local ou componente  $i = 1, \dots, N_{\text{comp}}$ ;  $C_k$  é o  $k$ -ésimo modo de falha,  $k = 1, \dots, N_{\text{mod}}$ ; e  $I_{C_k}$  é o índice do  $C_k$  modo de falha. Para um determinado caso, dada a existência de múltiplos modos de falha, o evento falha do sistema pode ocorrer quando qualquer critério for violado e resulte na falha geral do sistema. A Equação 2.19 aplicada a um sistema mecânico, segue três categorias: sistemas em série, sistemas em paralelo e sistemas híbridos. Sistemas em série são aqueles sistemas nos quais a falha é caracterizada pela união das falhas individuais de cada evento. Sistemas em paralelo são aqueles onde a falha do sistema é definida pela intersecção das falhas individuais dos eventos. Quando um sistema não pode ser definido como em série ou paralelo, ele é classificado como um sistema híbrido. Sistemas híbridos são aqueles sistemas nos quais “alguns” (mas não qualquer um ou todos) dos elementos falham de modo a resultar na falha geral do sistema. No conceito de mecanismos estruturais, sistemas híbridos são estruturas estaticamente indeterminadas (redundantes) com vários modos de falha. Essa classificação é apresentada em maiores detalhes na sequência.

### 2.7.1 Sistemas em Série

Nesta seção é apresentado como os modos de falha interagem uns com os outros e como a confiabilidade do sistema pode ser estimada quando os modos de falha individuais são combinados em um sistema em série de elementos falhos.

A combinação de elementos falhos em um sistema em série pode ser entendida considerando uma estrutura de barras estaticamente determinada (não redundante), conforme Figura 2.6a. Nesse tipo de estrutura, a falha de qualquer elemento resulta na falha geral da estrutura (colapso total ou falha catastrófica). Isto é chamado de sistema em série de elos e é modelado como um sistema em série, como representado pela Figura 2.6b.

Matematicamente falando, um sistema em série corresponde a operações de união sobre todos os elementos ou um subconjunto de elementos, isto é:

$$E_{\text{Série}} = \bigcup_{i \in I_{C_k}} E_i = \bigcup_{i \in I_{C_k}} \{g_i(\mathbf{X}) \leq 0\} = P_{f|\text{Série}} \quad (2.20)$$

Neste caso, o sistema falha se qualquer um de seus elementos falhar. É importante mencionar que a probabilidade de falha de sistemas em série pode fornecer uma estimativa não muito precisa se a estrutura for estaticamente indeterminada, isso porque

estes sistemas podem ser altamente redundantes, tal que, a falha de um elemento provoca uma redistribuição de esforços e o sistema como um todo pode apresentar outro modo de falha o qual não necessariamente cause a instabilidade do sistema.

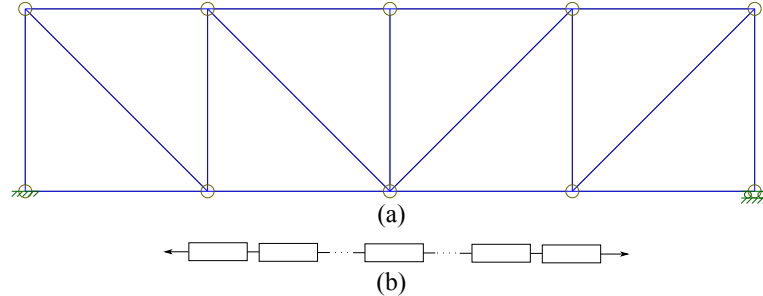


Figura 2.6 – (a) Estrutura estaticamente determinada; (b) Ligação em série de elos representando sistema em série.

### 2.7.2 Sistema em Paralelo

A Figura 2.7a corresponde a uma estrutura composta por  $n$ -barras sujeitas a esforços de tração, de modo que a falha total do sistema ocorre apenas quando todas as barras falharem, assumindo que não haja uma redistribuição de esforços. A Figura 2.7b representa um sistema em paralelo no qual a falha do sistema requer a ocorrência de todos os eventos de falha individuais. A probabilidade de falha deste sistema em paralelo, corresponde a probabilidade da ocorrência conjunta de todos os eventos de falha individuais. Assim, diferentemente dos sistemas em série, onde a união dos eventos de falha são considerados, um sistema em paralelo é caracterizado pela intersecção dos eventos de falha, isto é:

$$E_{\text{Paralelo}} = \bigcap_{i \in I_{c_k}} E_i = \bigcap_{i \in I_{c_k}} \{g_i(\mathbf{X}) \leq 0\} = P_{f|\text{Paralelo}} \quad (2.21)$$



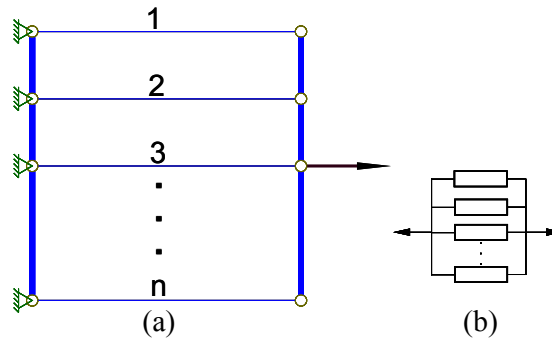


Figura 2.7 – (a) Estrutura de barras em paralelo; (b) Sistema em paralelo.

### 2.7.3 Sistemas Híbridos ou Sistemas Paralelo-Série

A importância em se modelar um sistema híbrido ou também chamado sistemas em paralelo-série para o cálculo da confiabilidade de alguns sistemas estruturais, tais como a estrutura mostrada na Figura 2.8a, pode ser atribuída a necessidade de se calcular a confiabilidade de estruturas estaticamente indeterminadas (redundantes).

Um sistema híbrido pode ser considerado como um sistema em série composto por sequências de falhas que são modeladas como um sistema em paralelo. Em sistemas híbridos, a fim de criar pares de elementos em paralelo, o elemento mais crítico é removido da estrutura e substituído por cargas fictícias correspondentes a sua resistência, isso se o elemento é dúctil (se ele é frágil, não haverá redistribuição das cargas, uma vez que a capacidade pós-falha do elemento é zero). Na sequência, realiza-se uma nova reanálise para prever a probabilidade de falha dos elementos restantes da estrutura. Tendo a parcela de probabilidade de falha dos elementos avaliados neste estágio, pares de elementos falhos podem ser formados, conforme Figura 2.8b.

Sendo assim, dada a existência de uma redistribuição do carregamento em sistemas estruturais após a falha de um ou mais elementos da estrutura, a modelagem de sistemas híbridos para o cálculo da confiabilidade, tornam-se um fator muito importante para a correta descrição do comportamento destes sistemas.

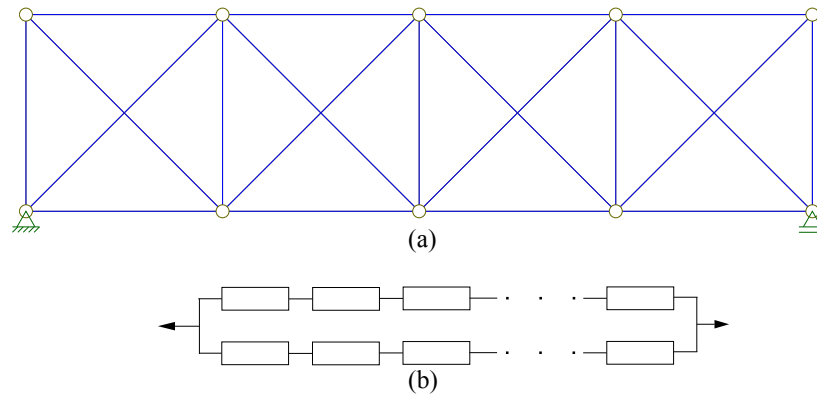


Figura 2.8 – (a) Estrutura hiperestática; (b) Sistema híbrido.

#### 2.7.4 Caracterização dos Modos de Falha

Outro desafio na análise da confiabilidade de sistemas estruturais é atribuído aos múltiplos modos de falhas existentes, isto é, possíveis combinações ou sequências de falhas dos componentes. Isso se deve ao fato de que estruturas reais são geralmente redundantes e a falha de um elemento redefine os estados limites dos membros remanescentes (por exemplo: a redistribuição de tensões causada pela falha de um elemento).

Sendo assim, segundo Kim e Koh, 2013, na maioria dos casos, é impossível enumerar todos os modos de falhas possíveis para a análise de confiabilidade do sistema. Este desafio torna-se ainda maior em se tratando de estruturas complexas com um grande número de elementos. A fim de contornar este problema, muitos estudos consideram apenas os modos de falhas dominantes, como alternativa para evitar a necessidade de detectar todos ou grande parte dos modos de falha, mesmo porque apenas alguns deles contribuem para a probabilidade de falha do sistema. Segundo Shao e Murotsu, 1999, os métodos para identificar os modos de falha dominantes podem ser classificados em dois tipos: (a) Métodos que seguem uma abordagem probabilística baseados em simulação, os quais requerem grandes custos computacionais; (b) Métodos baseados na abordagem determinística, essa abordagem garante soluções mais rápidas, porém envolvem o risco de ignorar alguns modos de falha.

#### 2.7.5 Identificação dos Modos de Falhas de Estruturas Treliçadas

Conforme mencionado por Shao e Murotsu, 1999, os métodos para identificar os modos de falhas dominantes podem ser classificados em duas categorias, e se tratando de estruturas treliçadas, alguns dos métodos que pertencem à esta classificação são: o método

da árvore de falha, simulação de Monte Carlo e o método baseado no mecanismo de plastificação. Nos três parágrafos que seguem, uma breve explicação será dada para estes métodos. Em seguida, são referenciados alguns autores e seus métodos para identificação dos modos de falhas dominantes.

O método da árvore de falha, gera uma árvore de falha incluindo vários caminhos da falha estrutural, ou seja, esta técnica é utilizada para decompor um evento principal em combinações de eventos elementares que levam a ocorrência do evento principal. Este processo de decomposição continua até que o evento principal esteja desmembrado em eventos básicos cuja probabilidade de ocorrência seja conhecida ou possa ser calculada. Do ponto de vista estrutural, um fator de carga é gradualmente incrementado para causar uma sequência de falhas dos elementos. O método enumera os caminhos de falha baseado nas probabilidades destes ocorrerem. Um caminho de falha com baixa probabilidade é truncado antes do sistema chegar a falhar, para evitar enumerações adicionais. Basicamente, este método usa uma estratégia de busca determinística. Esta técnica obtém importantes caminhos de falha necessitando de poucas análises, porém, não garante que todo os caminhos de falha sejam encontrados.

A simulação de Monte Carlo é uma ferramenta amplamente utilizada para análise de confiabilidade. Este método foi discutido na seção 2.5.1. Segundo Barron J. Bichon e Mahadevan, 2011, a simulação de Monte Carlo pode ser usado para estimar a probabilidade de falha de múltiplos modos de falha, porém, o número de simulações tende a aumentar se aplicado a sistemas envolvendo um grande número de elementos, os quais serão descritos por inúmeras funções de estado limite que caracterizam diferentes modos de falhas que deverão ser identificados.

Nos métodos baseados em mecanismos de plastificação, assumindo um material com comportamento plástico idealizado, formulações analíticas dos mecanismos plásticos podem ser obtidas a partir de análises plásticas limites baseadas no teorema do limite superior e limite inferior. Entretanto, o método não possibilita definir todos os mecanismos de colapso da estrutura assim como alguns mecanismos plásticos dominantes. Uma técnica pertencente a esta categoria consiste em aplicar programação matemática, especialmente programação linear para procurar sistematicamente os modos de falhas dominantes. A programação linear corresponde a aplicar uma combinação de cargas para obter os mecanismos mais críticos. Esse processo demanda altos custos computacionais,

entretanto, permite a geração de um modelo numérico para a integração da probabilidade. Sua eficiência pode ser melhorada se for combinado com a simulação de Monte Carlo.

Shao e Murotsu, 1999, propuseram um algoritmo genético combinado com uma estratégia de busca seletiva para encontrar os modos de falhas que mais contribuem para a falha do sistema. Kim e Koh, 2013 apresentaram um método similar ao desenvolvido por Shao e Murotsu, 1999, usando algoritmos genéticos para capturar múltiplos modos de falha de uma só vez. A fim de atender a este objetivo, desenvolveram uma nova técnica baseada na busca seletiva que utiliza um recurso de procura de múltiplos pontos do AG. Detectados os modos de falha dominantes, a probabilidade de falha de um evento pode ser calculada pelo método matricial *MSR*<sup>7</sup>. O método proposto inclui uma análise sistemática multi escala na estrutura para avaliar a dependência estatística entre os eventos (elementos falhos) e os modos de falha. Uma vez que a função densidade de probabilidade conjunta no espaço normal padrão é determinada pela distância do ponto mais próximo do modo de falha à origem, esta medida é usada para indicar de forma aproximada o domínio dos modos de falha. Entretanto, segundo os autores, a menor distância nem sempre garante a maior contribuição, pois a probabilidade de falha depende do volume do domínio de falha. No trabalho de Barron J. Bichon e Mahadevan, 2011, uma técnica para construir modelos substitutos é proposta, abordando simultaneamente questões quanto à precisão, eficiência e múltiplos modos de falhas. O método proposto pelos autores localiza precisamente apenas as regiões que mais contribuem para a falha do sistema. Segundo os autores, o método tem demonstrado ser eficiente e preciso para estimar a confiabilidade do sistema.

## 2.8 Comportamento de Estruturas Não Lineares: Uma Abordagem Probabilística

Um dos objetivos da análise estrutural consiste em determinar o comportamento da estrutura quando submetida a solicitações externas, ou seja, obter tensões, deformações e deslocamentos.

Parte das estruturas de engenharia apresentam um comportamento linear elástico sob ações externas, salvo que algumas exceções como por exemplo edifícios altos, e estruturas sujeitas a algum tipo de dano localizado (fissura) ou escoamento prematuro, que exibem um comportamento não linear. Praticamente todas as estruturas, em algum

---

<sup>7</sup>MSR: Matrix-based System Reliability method.

momento durante o ciclo de carregamento, apresentam uma resposta não linear.

Na análise não linear procura-se reproduzir o comportamento de uma estrutura o mais próximo possível do real, melhorando a simulação em alguns aspectos. O principal objetivo consiste em obter uma previsão segura do comportamento do sistema, entretanto, aumenta-se significativamente a complexidade do problema e conseqüentemente o custo computacional.

### 2.8.1 Fontes de Não Linearidades

Na análise de confiabilidade de sistemas estruturais complexos, um grande número de parâmetros ou variáveis do sistema podem ser considerados como fontes de incerteza. Conforme abordado na seção 2.1, as variáveis quanto às incertezas na especificação das propriedades dos materiais, propriedades geométricas, condições de contorno, aplicação de carregamentos, entre outros, podem comprometer o desempenho da estrutura.

Além das fontes de incertezas associadas às variáveis de projeto, uma vez que a avaliação da probabilidade de falha seja atribuída a um sistema estrutural cuja análise considere o comportamento não linear da estrutura, se faz necessário considerar as fontes de não linearidades existentes. Haldar, 2000, cita típicas fontes de não linearidades presentes em estruturas, sendo elas: geométrica, material, conexões, condições de apoio, entre outras. Todas estas não linearidades podem alterar completamente o comportamento da estrutura e em alguns casos, elas obrigatoriamente devem ser consideradas. A não linearidade do material decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear, ou seja, o comportamento do material não é elástico linear. Já a não linearidade geométrica, no caso de treliças, é decorrente do aparecimento de efeitos de segunda ordem quando a estrutura, em presença de esforço normal, é submetida a valores relativamente grandes de deslocamento. Neste último caso, os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada, e as relações deformação-deslocamento.

Nem todos os problemas de análise de confiabilidade em estruturas disponíveis na literatura abordam a importância em se considerar as fontes de não linearidade presentes no sistema. Em Hansson e Ellegaard, 2006, uma estrutura de madeira reticulada é analisada considerando os efeitos probabilísticos e a não linearidade das placas de metal utilizada como conexão entre os elementos. Na estrutura, as placas de metal são mo-

deladas como semi-rígidas com comportamento não linear. Os autores salientam que a maioria dos estudos encontrados na literatura são baseados em teorias de elasticidade linear e a variabilidade estatística dos membros envolvidos no sistema é desconsiderada por falta de dados. As propriedades quanto a tensão e rigidez são consideradas como variáveis probabilísticas tanto para os elementos de madeira quanto para as placas de metal das conexões. O comportamento do sistema considerando efeitos probabilísticos é comparado com o comportamento da estrutura através do cálculo determinístico usando valores característicos na entrada do modelo.

Segundo Haldar, 2000, em análises de estruturas metálicas, normalmente, as conexões são modeladas como completamente rígidas, entretanto, a maioria das conexões usadas na prática são classificadas como parcialmente rígidas. Além disso, as estruturas são apoiadas em fundações as quais normalmente são idealizadas como apoios engastados ou rotulados, porém, geralmente na prática os apoios são classificados com parcialmente engastados.

Portanto, se o nível de carregamento é suficientemente alto para forçar a estrutura a entrar em regime não linear e procura-se simular o comportamento real da estrutura, o método aplicado para calcular a confiabilidade do sistema deverá considerar, além das fontes de incertezas existentes, a maior quantidade de fontes de não linearidades existentes possível. Como o propósito aqui não é discutir detalhes quanto as diferentes fontes de não linearidades, mas enfatizar a importância de considerá-las na avaliação da confiabilidade de estruturas mecânicas, maiores informações podem ser obtidas em, por exemplo, Haldar, 2000.

## **2.9 Funções Densidade de Probabilidade Implícitas**

A metodologia apresentada na subseção 2.3 para o cálculo da probabilidade de falha é facilmente implementada se a função estado limite da estrutura for associada a variáveis, tais como resistência e solicitação, as quais possam ser representadas de forma explícitas. No caso do FORM, a estimativa de probabilidade é obtida por um processo de otimização que procura pela mínima distância da origem à superfície da função estado limite, a qual deve ser suave e explícita. Tratando-se da simulação de Monte Carlo, onde pontos aleatórios são amostrados em todo o domínio estocástico, cada ponto amostrado é avaliado por uma função explícita para determinar se ele representa falha ou não falha.

Em suma, funções explícitas são facilmente avaliadas, e mesmo que um grande número de pontos seja necessário, a simulação pode ser realizada de maneira eficiente. Entretanto, na maioria dos casos de importância prática, especialmente estruturas complexas, a função estado limite não pode ser avaliada de forma explícita (isso ocorre porque geralmente em sistemas reais não se conhece a distribuição das variáveis aleatórias envolvidas no sistema), sendo assim, as funções que representam a resposta de estruturas reais são funções implícitas que necessitam de processos numéricos, tais como análise via elementos finitos, para poderem ser avaliadas. Nestes casos, as derivadas não são facilmente calculadas, e cada avaliação da função estado limite pode exigir altos custos computacionais.

Segundo Haldar e Mahadevan, 1999, diversos métodos podem ser propostos para calcular a confiabilidade de estruturas com funções implícitas, os quais podem ser divididos em três categorias: simulação de Monte Carlo, método da superfície de resposta e análise de confiabilidade baseada em sensibilidade.

A simulação de Monte Carlo, conforme descrito anteriormente, geralmente exige um grande número de simulações, especialmente em problemas onde a probabilidade de falha é pequena. Tais simulações, principalmente em estruturas reais as quais são altamente não lineares, remetem a métodos numéricos que podem exigir considerável esforço computacional. O método da superfície de resposta constrói uma aproximação polinomial na forma fechada a partir de uma função implícita. A partir da expressão aproximada por um polinômio definido, a probabilidade de falha pode ser calculada usando, por exemplo, FORM, SORM ou a simulação de Monte Carlo. Segundo Haldar e Mahadevan, 1999, a aproximação pode ser inadequada para funções implícitas altamente não lineares. Também como regra geral, uma expressão na forma fechada desenvolvida usando análise de regressão é válida apenas dentro de uma determinada faixa de valores de variáveis aleatórias, extrapolando esta faixa, o método pode perder precisão.

As deduções analíticas para a confiabilidade obtida a partir de funções implícitas podem se tornar extensas. Este tema é apresentado em maiores detalhes por Haldar e Mahadevan, 1999. Em Hashemolhosseini, 2013, pode-se verificar a eficiência dos métodos citados nesta seção na análise da confiabilidade de uma estrutura de barras.

### 3. INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO DO RISCO

#### 3.1 Revisão Bibliográfica

Dentre os trabalhos pioneiros nesta área, podem ser citados, dentre outros, Surahman e Rojiani, 1984, propondo uma função objetivo para otimização do custo com limites superiores e inferiores sobre o custo total esperado. Katsuki e Frangopol, 1994, propuseram uma função objetivo a ser minimizada na qual o custo total é composto por um custo inicial, custo de inspeção esperado total, custo de reparo, custo esperado de manutenção de rotina e custo esperado de falha. O estudo é orientado à manutenção, inspeção e reparo das falhas. Em Sørensen e Burcharth, 2005, o nível de confiabilidade ótimo é identificado pela minimização dos custos totais associados à vida útil da estrutura, incluindo custos de construção, manutenção e custos de reparo, custos de tempo de parada e custos de descomissionamento. Modelos estocásticos são apresentados para os principais modos de falha. O estudo investiga a influência da minimização dos custos associados ao níveis de confiabilidade para diferentes casos reais de interesse, e revela que o estado limite crítico no projeto corresponde ao estado limite de serviço, uma vez que o custo esperado de vida útil associado com este estado limite é maior que os outros estados limites. Beck e Verzenhassi, 2008, utilizaram a otimização do risco baseada em confiabilidade para encontrar o coeficiente de segurança ótimo que minimize o custo total de uma torre de transmissão de energia, sujeita a cargas de vento devido a fortes tempestades e tornados. O problema é formulado com base no fator de segurança parcial usado nos códigos de projetos existentes. O fator de segurança parcial é introduzindo no problema de otimização como variável a ser otimizada. O estudo revela que a identificação dos níveis ótimos de segurança em sistemas estruturais é altamente dependente das consequências de falhas e da minimização dos custos esperados total de uma estrutura. Gomes, 2010, buscando uma relação de compromisso entre confiabilidade e eficiência, propõe quatro algoritmos híbridos, combinando dois métodos de otimização heurísticos (Algoritmos Genéticos e Enxame de Partículas) e dois métodos com fundamentação matemática (*Powell e Polk-Ribiere*). O autor demonstra que estruturas ótimas são encontradas apenas pela formulação mais abrangente, tal como a otimização do risco. Em Zhu e Frangopol, 2012, são investigados os efeitos gerados em sistemas estruturais segundo: a deterioração da resistência estrutural; o tipo de modelagem do sistema; a correlação entre os modos de



falha dos componentes na confiabilidade dependente do tempo, e risco do sistema estrutural. Primeiramente um sistema simplificado composto por três componentes é utilizado para uma demonstração geral do método, e em seguida, a abordagem é aplicada num caso real. No estudo é utilizado o método da árvore de falha para analisar o risco associado aos modos de falha dos componentes/sistema devido a corrosão e esforços. Os autores enfatizam, com base nos resultados do estudo, a importância da modelagem real do sistema assim como as considerações dos efeitos do tempo, para o cálculo da confiabilidade e do risco. Em Gomes, 2013, a otimização do risco é utilizada no intuito de encontrar políticas ótimas de inspeção e manutenção, isto é, quantidades de recursos a serem alocados nestas atividades que levam ao menor custo esperado total possível. Neste estudo, os processos de corrosão e fadiga são apresentados através de modelos de polinômio do caos, e com base nestes modelos, os problemas de otimização de risco envolvendo processos de fadiga e corrosão são resolvidos para diferentes configurações de custos de falha e de inspeções. O estudo revela que políticas ótimas de inspeção, manutenção e substituição podem ser bastante diferentes para configurações de custos distintas, e que a determinação destas políticas é desafiadora devido à grande quantidade de mínimos locais do problema de otimização em questão, causada por descontinuidades e oscilações da função custo esperado total. Gomes e Beck, 2013, apresentam um algoritmo híbrido *BFGS* – *PSO* para aumentar a eficiência na solução de problemas de otimização de estruturas reais, considerando as consequências esperadas de falha, e o aplica na solução de um problema de otimização real - torre de transmissão de energia elétrica. Os autores salientam que quando as incertezas são relevantes, o projeto ótimo é possível de ser obtido somente se forem consideradas as consequências associadas as falhas, e que problemas de otimização do risco apresentam muitos mínimos locais, tal que algoritmos de otimização global tornam-se necessários. A otimização dos planos de manutenção para a vida útil de estruturas motivou Barone e Frangopol, 2014, a desenvolverem um estudo objetivando: (a) comparar as vantagens e desvantagens de quatro diferentes indicadores de desempenho relacionados à otimização multi-objetivo do cronograma de manutenção da deterioração de estruturas, e (b) avaliar as soluções ótimas associadas ao custo. Dois indicadores de desempenho anual (índice de confiabilidade e risco anual), e dois indicadores de vida útil são utilizados em conjunto com o custo de manutenção. Os autores utilizam algoritmos genéticos para resolver o problema de otimização. O trabalho revelou que o método baseado no risco não exige

apenas uma estimativa das consequências de falhas diretas e indiretas, mas também a avaliação das diversas probabilidades de falha adicionais e condicionais dos componentes individualmente, o que representa um grande esforço computacional para realizar a otimização.

### 3.2 Definição Teórica da Otimização do Risco

A otimização do risco baseada em confiabilidade ou RBRO (*Reliability-Based Risk Optimization*) consiste em encontrar um projeto estrutural que mantenha o equilíbrio entre segurança e economia, ou seja, estabelecer um critério para selecionar um projeto ao qual seja maximizada sua capacidade de operação ao passo que suas perdas sejam minimizadas. O RBRO se distingue de outros métodos por considerar na formulação do problema de otimização, os efeitos das incertezas e custos associados às consequências das falhas.

Por comparação, nos métodos de otimização tradicionais, tais como os métodos determinísticos, DDO (*Deterministic Design Optimization*), as incertezas e custos relacionados às consequências de falhas, não são consideradas de forma direta, ou seja, o DDO consiste em resolver o problema de otimização considerando como restrição parâmetros característicos, os quais não carregam informação quanto a aleatoriedade das variáveis, conforme discutido no Capítulo 2. A variabilidade dos parâmetros é abordada nos métodos de otimização baseados em confiabilidade, RBDO (*Reliability-Based Design Optimization*). O RBDO vem sendo uma alternativa conveniente para garantir o mínimo de segurança de projetos obtidos pelo processo de otimização, porém, também não consideram os custos associados as consequências das falhas.

O conceito básico da otimização do risco está ilustrado na Figura 3.1, onde uma estrutura projetada para uma menor carga terá um custo inicial menor, mas custo de falha elevado. De outra forma, tornar a estrutura mais robusta reduz o custo esperado de falha à custa de um aumento no custo inicial. O nível ótimo de projeto pode ser determinado no ponto do mínimo custo esperado total. Este nível ótimo de projeto pode ser usado como um valor limite de projeto. Segundo Beck e Gomes, 2011, a estrutura ótima somente pode ser encontrada pela otimização de risco baseada em confiabilidade, a qual procura pela configuração estrutural ótima e pelas margens de segurança ótima, simultaneamente.

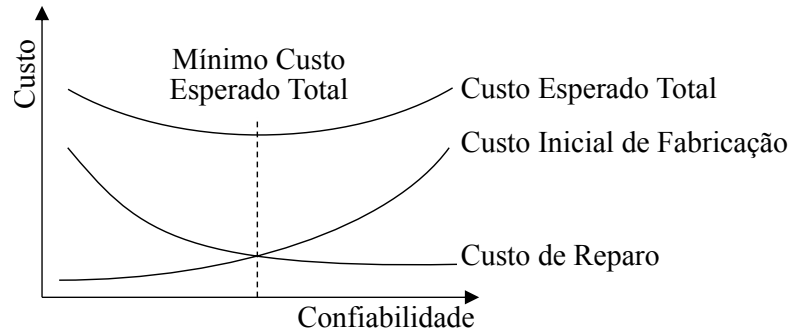


Figura 3.1 – Equilíbrio entre custo de fabricação e custo de reparo. Adaptado de Kaufmann M. e Wennhage, 2010.

A formulação do problema de otimização do risco varia de acordo com o caso a ser tratado, mas de modo geral, a solução da otimização do risco é dada em função do custo esperado total (CET), associado às incertezas do projeto, tal como:

$$CET = C_{\text{fixo}} + \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} C_{\text{falha}_i} P_{f_i} \quad (3.1)$$

A parcela que representa os custos fixos ( $C_{\text{fixo}}$ ) podem incluir: custo inicial ou de construção (CI), custo de operação, custo de inspeção e manutenção, custo de descarte, entre outros. Já o somatório corresponde aos custos associados aos  $N$ -modos de falha ( $N_{\text{mod}}$ ), os quais podem incluir os custos de reparo ou substituição dos elementos danificados, entre outros. Sendo assim, a Equação 3.1 pode ser reescrita como sendo:

$$CET = CI + C_{\text{operação}} + C_{\text{manutenção}} + C_{\text{descarte}} + \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} C_{\text{falha}_i} P_{f_i} \quad (3.2)$$

Sendo assim, considerando o CET, Equação 3.1, como função objetivo, o problema de otimização do risco consiste em:

$$\text{minimizar : } CET = C_{\text{fixo}} + \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} C_{\text{falha}_i} P_{f_i} \quad (3.3)$$

Quando a falha do sistema em questão envolve consequências de falhas indiretas, tais como morte de pessoas ou danos ao meio ambiente, a estimativa de valores monetários na maioria das vezes são difíceis de serem mensuradas. Para lidar com este tipo de

cenário na otimização do risco, um limite aceitável para a probabilidade de falha pode ser incluído no problema, conduzindo a um problema de otimização com restrição, tal como apresentado em Beck e Verzenhassi, 2008.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : CET} &= C_{\text{fixo}} + \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} C_{\text{falha } i} P_{f_i} \\ \text{Sujeito a : } P_f &< P_f^{\text{admissível}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

## 4. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

A definição da otimização do risco, apresentada no capítulo anterior, indica que esta técnica aumenta o escopo do problema, ou seja, trata-se de uma formulação complementar aos métodos DDO e RBDO. Sendo assim, percebe-se que a solução de um problema de otimização do risco requer várias análises probabilísticas, o que exige um grande esforço computacional. Em se tratando de sistemas estruturais reais, tais como estruturas estaticamente indeterminadas, as funções de estado limite necessitam de processos numéricos que exigem altos custos computacionais. Sendo assim, o tempo gasto com processamento computacional pode tornar a solução do problema probabilístico impraticável. Além disso, segundo Gomes, 2013, o custo esperado total pode ser função de muitas variáveis de projeto e representar vários mínimos locais e descontinuidades, tornando necessária a utilização de métodos de otimização que sejam eficientes e capazes de buscar o mínimo global mesmo nessas circunstâncias. Para lidar com este cenário, Gomes, 2013, utilizou o método Simplex juntamente com uma estratégia de múltiplas inicializações para otimizar políticas de inspeção e manutenção num problema com poucas variáveis de projeto. O autor justifica a escolha do método Simplex pelo fato deste método não depender de derivadas e poder ser utilizado mesmo na presença de descontinuidades e oscilações na função objetivo. No Capítulo 3 foi apresentada uma breve revisão quanto aos métodos de otimização do risco existentes, a qual revelou que uma grande atenção vem sendo dada aos métodos heurísticos para a solução deste tipo de problema, uma vez que estes métodos cobrem todo o espaço de busca, e mesmo na existência de mínimos locais, eles podem identificar a região do mínimo global. Esta e outras características dos métodos heurísticos, a serem discutidas com mais detalhes na seção 4.2, justificam a escolha do algoritmo de otimização por enxame de partículas para abordar a otimização do risco no presente trabalho.

Na próxima seção é definido o conceito geral do problema de otimização e na seção 4.2 é abordado o método de otimização por enxame de partículas.

### 4.1 Definição Geral do Problema de Otimização

Um problema onde se procura pelo máximo ou mínimo de uma função de diversas variáveis, devendo estas satisfazer alguns requisitos impostos, é chamado problema de

otimização. A função recebe o nome de função objetivo, e os requisitos impostos recebem o nome de restrições do problema.

De uma forma geral, um problema de otimização com restrições segundo Arora, 2004, e Haftka e Gürdal, 1991, pode ser definido como sendo:

Encontrar um vetor de  $n$ -variáveis de projeto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  que

*minimize uma função de custo*

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

sujeito às  $n_g$  restrições de desigualdades

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; \quad i = 1, \dots, n_g \quad (4.2)$$

e às  $n_e$  restrições de igualdade

$$h_j(\mathbf{x}) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad j = 1, \dots, n_e \quad (4.3)$$

onde cada variável de projeto  $x_n$  deve estar dentro do intervalo limitado pelas restrições laterais  $x_n^{min} \leq x_n \leq x_n^{max}$ . Uma vez que no presente trabalho a  $f(\mathbf{x})$  está relacionada ao custo da estrutura, o valor ótimo desta função corresponde ao menor custo possível para o projeto da estrutura. Os valores do vetor  $\mathbf{x}$ , como resultado do processo de otimização, representam o ponto de projeto, ou ponto ótimo.

Na formulação do problema de otimização do risco, algumas equações e inequações que dariam origem a restrições nas formulações determinísticas ou baseada em confiabilidade passam a ser escritas na forma de equações de estado limite. Essas equações são utilizadas na análise probabilística para determinar números esperados, os quais são incorporados ao cálculo da função de custo. Assim, a formulação de otimização do risco geralmente apresenta menos restrições que outras formulações, dando maior liberdade ao algoritmo de otimização para a escolha da configuração ótima, mas podendo gerar uma maior quantidade de mínimos locais [Gomes, 2013].

Basicamente, um problema de otimização estrutural pode ser classificado em três categorias, sendo elas: (a) otimização paramétrica, onde as variáveis de projeto descrevem características paramétricas, como por exemplo a geometria da estrutura, que no caso de barras, se traduz em buscar um conjunto de áreas de seção transversal de modo a minimizar ou maximizar uma grandeza física, tal como flexibilidade ou tensão, enquanto

o equilíbrio e as restrições são satisfeitas; (b) otimização de forma, onde as variáveis de projeto são geralmente as posições dos nós que pelo processo de otimização resultam na distorção da malha e conseqüente alteração na forma original do domínio de projeto; (c) otimização topológica, a qual visa a retirada/adição de material de uma estrutura contínua em diferentes regiões do domínio, formando uma nova topologia. A Figura 4.1 ilustra estes conceitos.

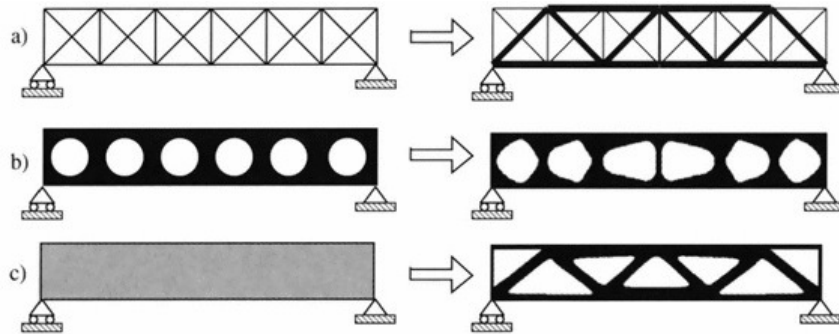


Figura 4.1 – Tipos de otimização estrutural: (a) paramétrica, (b) forma e (c) topológica.

Fonte: Bendsøe e Sigmund, 2004.

As definições e deduções analíticas para o problema de otimização estrutural podem se tornar extensas, e não convêm descrevê-las detalhadamente neste trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados em Bendsøe e Sigmund, 2004, Haftka e Gürdal, 1991, Arora, 2004, Yang, 2010, entre outros.

## 4.2 Otimização por Enxame de Partículas

O algoritmo de otimização por enxame de partículas ou PSO (*Particle Swarm Optimization*) foi proposto inicialmente por Eberhart e Kennedy, 1995, como uma técnica inspirada no comportamento social de bandos de pássaros. A busca por alimento e a interação entre os pássaros ao longo do voo são modeladas como um mecanismo de otimização. Ao contexto de um problema de otimização, o bando de pássaros é interpretado como um conjunto de pontos, denominados enxame de partículas, as quais trocam informações entre si de forma a conduzir o enxame para o ponto ótimo de uma função qualquer. Sendo assim, as partículas se movem no espaço de busca à procura da melhor solução possível. A cada unidade de tempo, o algoritmo atualiza as posições e velocidades das partículas usando as Equações 4.4a e 4.4b. Estas equações correspondem a uma

versão modificada do algoritmo original proposto por Eberhart e Kennedy, 1995. Tal modificação deve-se a inserção de dois parâmetros, o peso de inércia  $\omega$  [Shi e Eberhart, 1998] e o fator de constrição  $\chi$  [Clerc, 1999]. O parâmetro  $\omega$  tem uma grande participação na convergência do PSO. Os autores sugerem que o valor de  $\omega$  inicie em 1, favorecendo o comportamento exploratório inicial da partícula, e durante a execução do algoritmo esse valor seja reduzido para que a partícula realize uma busca mais refinada nos arredores da posição onde ela atualmente se encontra. O parâmetro  $\chi$  é usado para evitar um comportamento divergente do algoritmo. Bergh e Engelbrecht, 2006, apresentam uma expressão para o  $\chi$ , com base no estudo da convergência do algoritmo. (Equação 4.4c). Segundo Gomes, 2011, este coeficiente é fundamental para manter o algoritmo estável e evitar divergência no processo iterativo.

$$v_{i,j}(t+1) = \chi [\omega v_{i,j}(t) + c_1 r_1 (x_{lbest_{i,j}}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2 r_2 (x_{gbest_j}(t) - x_{i,j}(t))] \quad (4.4a)$$

$$x_{i,j}(t+1) = x_{i,j}(t) + v_{i,j}(t+1) \quad (4.4b)$$

$$\chi = \frac{1.6}{\left| 2 - (c_1 + c_2) - \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4(c_1 + c_2)} \right|} \quad (4.4c)$$

onde  $\omega$  é o peso de inércia para as velocidades,  $x_{i,j}(t)$  é o valor atual da variável de projeto  $j$  da partícula  $i$ ,  $v_{i,j}(t+1)$  é a velocidade atualizada da variável de projeto  $j$  da partícula  $i$ ,  $x_{lbest_{i,j}}(t)$  é a variável de projeto ótima  $j$  encontrada até agora pela partícula  $i$ ,  $x_{gbest_j}(t)$  é a variável de projeto ótima  $j$  encontrada até agora pelo enxame,  $r_1$  e  $r_2$  são dois vetores contendo números aleatórios com distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ ,  $c_1$  é uma componente cognitiva da partícula e  $c_2$  é uma componente social do enxame, elas são constantes que influenciam a direção das partículas de modo a guiá-las para melhores posições. A Figura 4.2 apresenta de forma vetorial a atualização da velocidade e posição da partícula.

Na etapa final do código, é implementado o critério de convergência do algoritmo, o qual consiste em satisfazer duas condições simultaneamente. Uma delas pode ser definida como a razão entre o desvio padrão e o valor médio das funções de todas as partículas, a qual deve ser menor ou igual a uma tolerância especificada ( $tol_{cov}$ ). A outra condição, tolerância pelo fator de penalização ( $tol_{FP}$ ), consiste em estabelecer uma tolerância para



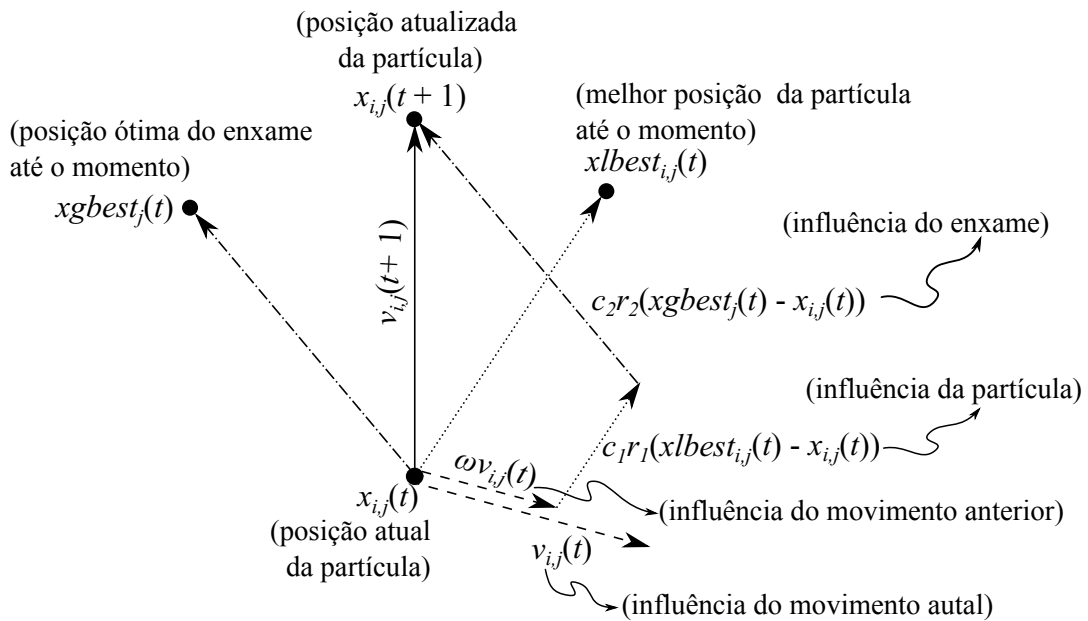


Figura 4.2 – Representação vetorial da atualização da velocidade e posição. Fonte: Adaptado de Gomes, 2011.

a violação das restrições, a qual não comprometa a validação da solução. Atendendo as duas condições, o processo é finalizado, do contrário, o algoritmo volta a iterar a partir dos últimos resultados obtidos.

Além das modificações no algoritmo PSO original, pela introdução dos parâmetros  $\omega$  e  $\chi$ , uma outra alternativa tem despertado interesse para melhorar eficiência do PSO, trata-se da forma assíncrona de atualização das velocidades e posições das partículas do enxame, uma vez que o PSO é originalmente síncrono. As definições detalhadas quanto as extensões síncronas e assíncronas do PSO podem ser encontradas em Esposito, 2012.

Esposito, 2012, implementou o PSO síncrono e assíncrono na otimização de estruturas do tipo treliça, para compará-los quanto à eficiência, robustez e acurácia. Para os casos analisados, o autor descreve o método assíncrono como sendo o mais eficiente, mantendo a mesma robustez e acurácia da extensão síncrono do PSO.

No entanto, mesmo que várias modificações tenham sido sugeridas para o algoritmo PSO, a fim de torná-lo mais robusto e eficiente, Yang, 2010, afirma que o desempenho médio sobre todas as funções de custo será o mesmo para todos os algoritmos de busca. Segundo o autor, o desempenho independe do algoritmo, ou seja, todos os algoritmos de otimização apresentarão o mesmo desempenho quando considera-se a média do desempenho de várias funções diferentes. Diante desta premissa, pesquisadores de di-

versas áreas vem desenvolvendo modelos paralelos aos algoritmos seriais existentes para reduzir seu tempo de processamento. No PSO esta abordagem tem sido aplicada com sucesso, revelando que este método pode ser facilmente paralelizado. Esposito e Gomes, 2013, apresentam duas versões paralelas do algoritmo PSO, a PPSO (*Parallel Synchronous Particle Swarm Optimization*) e a PAPS0 (*Parallel Asynchronous Particle Swarm Optimization*). Os autores afirmam que esta técnica é uma boa alternativa para reduzir o custo computacional e demonstram que quanto maior o tempo gasto com a avaliação da função objetivo, maior será a redução no custo total de processamento do algoritmo paralelo.

## 5. ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Dentre outras importantes contribuições ao estudo da resistência dos materiais, a partir do trabalho realizado por Tuner M. J. e Melosh [1960] na indústria aeronáutica, a aplicação do método dos elementos finitos deixa de ficar limitado à solução de problemas lineares, e desde então, emprega-se uma formulação para elementos finitos não lineares em inúmeros casos onde uma análise não linear é indispensável, seja ela ligada às características mecânicas dos materiais - não linearidade física, ou relacionada à geometria da estrutura - não linearidade geométrica.

Em grande parte dos projetos de estruturas, as não linearidades não são consideradas com a prerrogativa de que tais efeitos causam pouco ou nenhuma influência na resposta da estrutura em termos de deslocamento e esforços. Entretanto, ao negligenciar estes efeitos, pode-se chegar a um projeto inadequado: por exemplo, ao se avaliarem os deslocamentos de treliças muito deformáveis, ou edifícios altos, utilizando-se uma análise linear, certamente os resultados serão mais otimistas em comparação aos de uma análise não linear.

Na sequência deste capítulo, será apresentada de maneira sucinta a teoria para a análise não linear de estruturas de aço treliçadas pelo método dos elementos finitos. A respectiva formulação considera ambos os comportamentos não lineares, o físico e o geométrico das estruturas.

### 5.1 Elementos Finitos Para Treliça Espacial

Nesta seção, as equações envolvidas na dedução das equações para elementos de barra de treliças espaciais, serão formuladas levando em consideração o tensor de deformação de Green-Lagrange e um referencial Lagrangeano Total, em conformidade com o comportamento típico das estruturas abordadas neste trabalho - pequenas deformações mas grandes deslocamentos (ver seção 5.4). Segundo Yang e Leu [1991], a resposta de estruturas sujeitas à efeitos de flambagem considerando grandes deformações, em termos de tensão  $\times$  deformação ( $2^{\text{nd}}$  Tensor de Piola-Kirchhoff  $\times$  deformação de Green-Lagrange), apresenta inconsistência entre as formulações obtidas com Lagrangeano Total, Lagrangeano Atualizado e Lagrangeano Geral. Tal inconsistência é evitada quando os problemas envolvem pequenas deformações.

Um elemento de barra é definido como um membro que suporta apenas cargas axiais, cuja dimensão da seção transversal e propriedades elásticas são constantes ao longo do seu comprimento. São elementos geralmente utilizados para simular membros esbeltos, visto que seu comprimento é muito maior do que a dimensão da área transversal.

A Figura 5.1 apresenta o processo de deformação de um elemento de barra 3D. O vetor posição  $\mathbf{x}_o$  de qualquer ponto sob o elemento de barra na configuração inicial, pode ser relacionado às coordenadas nodais ( $\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2$ ) dos nós 1 e 2, através de funções de interpolação lineares, a saber:

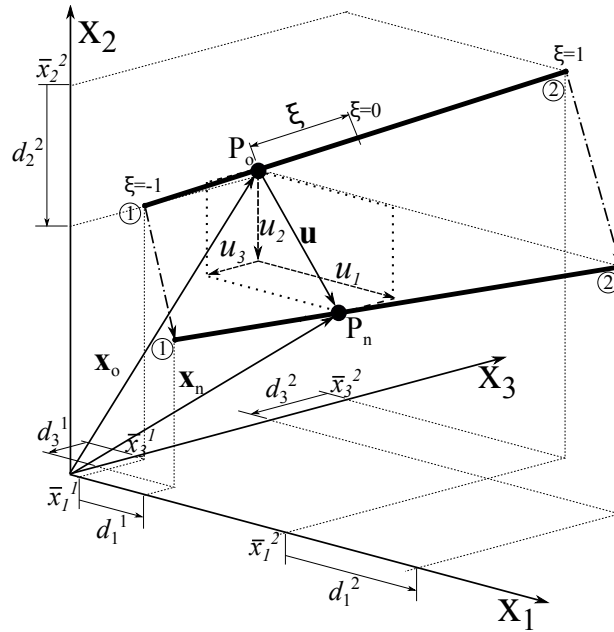


Figura 5.1 – Deformação global do elemento de barra 3D.

$$\mathbf{x}_o = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 + \xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 + \xi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \\ \bar{x}_3^1 \\ \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{N}\bar{\mathbf{x}} \quad (5.2)$$

Da mesma forma, os deslocamentos ( $u_1, u_2, u_3$ ) de qualquer ponto sob o elemento

de barra, podem ser relacionados aos deslocamentos nodais ( $d_1^1, d_2^1, d_3^1, d_1^2, d_2^2, d_3^2$ ) das duas extremidades do elemento através de funções de interpolação lineares, como sendo:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (5.4)$$

Portanto, o novo vetor posição  $\mathbf{x}_n$  do ponto  $\mathbf{P}_n$  pode ser definido como sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{x}_o + \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considera-se nesta seção e na seção seguinte que o subscrito representa a componente de direção e o sobrescrito o número do nó.

### 5.1.1 Equações Cinemáticas

Neste caso, para descrever a cinemática da barra, considera-se-ão pequenas deformações, e a deformação de Green-Lagrange pode ser expressa como:

$$\varepsilon_{GL} = \frac{dx_n^2 - dx_o^2}{2dx_o^2} \quad (5.6)$$

sendo:

$$dx_o = \|\mathbf{dx}_o\| = \left( \frac{d\mathbf{x}_o^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{x}_o}{d\xi} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi = \alpha_o d\xi \quad (5.7)$$

$$dx_n = \|\mathbf{dx}_n\| = \left( \frac{d\mathbf{x}_o^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{x}_o}{d\xi} + 2 \frac{d\mathbf{x}_o^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} + \frac{d\mathbf{u}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi = \alpha_n d\xi \quad (5.8)$$

onde  $2\alpha_o$  e  $2\alpha_n$  são os comprimentos inicial e final barra, respectivamente, e os vetores incrementais ao longo da configuração inicial e deformada são dados por:

$$d\mathbf{x}_o = \frac{d\mathbf{x}_o}{d\xi} d\xi \quad (5.9)$$

$$d\mathbf{x}_n = \frac{d(\mathbf{x}_o + \mathbf{u})}{d\xi} d\xi \quad (5.10)$$

Inserindo 5.7 e 5.8 em 5.6, tem-se:

$$\varepsilon_{GL} = \frac{1}{\alpha_o^2} \frac{d\mathbf{x}_o^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} + \frac{1}{2\alpha_o^2} \frac{d\mathbf{u}_o^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \quad (5.11)$$

Uma vez que as derivadas em 5.11 com relação a  $\xi$  são iguais a  $\frac{d\mathbf{x}_o}{d\xi} = \mathbf{N}_{,\xi} \bar{\mathbf{x}}$  e  $\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{d}$ , a Equação 5.11 resulta em:

$$\varepsilon_{GL} = \frac{1}{\alpha_o^2} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{d} + \frac{1}{2\alpha_o^2} \mathbf{d}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{d} \quad (5.12)$$

Para simplificar a Equação 5.12, pode-se definir uma matriz simétrica  $\mathbf{A}$  e vetores  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \quad (5.13)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1^T = \frac{1}{\alpha_o^2} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} = \frac{1}{4\alpha_o^2} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \\ \bar{x}_3^1 \\ \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_3^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\alpha_o^2} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^1 - \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^1 - \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_3^1 - \bar{x}_3^2 \\ -(\bar{x}_1^1 - \bar{x}_1^2) \\ -(\bar{x}_2^1 - \bar{x}_2^2) \\ -(\bar{x}_3^1 - \bar{x}_3^2) \end{bmatrix}^T, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{b}_2^T = \frac{1}{\alpha_o^2} \mathbf{d}^T \mathbf{A} = \frac{1}{4\alpha_o^2} \begin{bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\alpha_o^2} \begin{bmatrix} d_1^1 - d_1^2 \\ d_2^1 - d_2^2 \\ d_3^1 - d_3^2 \\ -(d_1^1 - d_1^2) \\ -(d_2^1 - d_2^2) \\ -(d_3^1 - d_3^2) \end{bmatrix}^T \quad (5.15)$$

Assim, a versão discretizada da Equação 5.12 é:

$$\varepsilon_{GL} = \mathbf{b}_1^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{b}_2^T \mathbf{d} \quad (5.16)$$

### 5.1.2 Forças Internas

Para calcular o vetor de forças internas  $\mathbf{q}_i$  do elemento de barra, deve-se obter uma expressão para a deformação virtual  $\delta\varepsilon_{GL}$ . Sendo assim, partindo da Equação 5.11, um incremento de deformação de Green-Lagrange  $\Delta\varepsilon_{GL}$  causado por um incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{u}$  é dado por:

$$\Delta\varepsilon_{GL} = \frac{1}{\alpha_o^2} \frac{d\mathbf{x}_o^T}{d\xi} \frac{d\Delta\mathbf{u}}{d\xi} + \frac{1}{\alpha_o^2} \frac{d\mathbf{u}^T}{d\xi} \frac{d\Delta\mathbf{u}}{d\xi} + \frac{1}{2\alpha_o^2} \frac{d\Delta\mathbf{u}^T}{d\xi} \frac{d\Delta\mathbf{u}}{d\xi} \quad (5.17)$$

A derivada de  $\Delta\mathbf{u}$  com respeito a  $\xi$  corresponde a  $\frac{d\Delta\mathbf{u}}{d\xi} = \mathbf{N}_{,\xi} \Delta\mathbf{d}$ . Substituindo as respectivas derivadas em 5.17, assim como, acrescentando a matriz  $\mathbf{A}$  e os vetores  $\mathbf{b}_1$

e  $\mathbf{b}_2$ , a Equação 5.17 torna-se:

$$\Delta\varepsilon_{GL} = \mathbf{b}_1^T \Delta\mathbf{d} + \mathbf{b}_2^T \Delta\mathbf{d} + \frac{1}{2\alpha_o} \Delta\mathbf{d}^T \mathbf{A} \Delta\mathbf{d} \quad (5.18)$$

Para o deslocamento virtual, no qual  $\Delta\mathbf{d}$  é substituído por  $\delta\mathbf{d}$ , o último termo da Equação 5.18 é negligenciado, resultando em:

$$\delta\varepsilon_{GL} = \mathbf{b}_1^T \delta\mathbf{d} + \mathbf{b}_2^T \delta\mathbf{d} \quad (5.19)$$

Para obter a expressão que representa as forças internas, o Princípio do Trabalho Virtual (PTV) pode ser usado. Sendo assim, a expressão geral para PTV em notação matricial é:

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon_{GL}^T \sigma_{PK2} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{f}} d\Gamma \quad (5.20)$$

onde  $\delta\varepsilon_{GL}^T$  é a deformação virtual de Green-Lagrange e  $\sigma_{PK2}$  o correspondente 2<sup>nd</sup> Tensor de Piola Kirchhoff.

Da Equação 5.20, pode-se extrair o vetor de forças internas nodais da estrutura  $\mathbf{q}_i$ ,

$$\sum_e \delta\mathbf{d}^T \mathbf{q}_i = \sum_e \int_{\Omega} \delta\varepsilon_{GL}^T \sigma_{PK2} dV \quad (5.21)$$

onde  $\sum_e$  indica um somatório sobre todos os elementos da estrutura.

A Equação 5.21 pode ser reescrita, uma vez que sejam realizar as simplificações pertinentes, assim como inserindo 5.19 e uma área de seção transversal dos elementos constante  $A_o$ , o vetor de forças internas  $\mathbf{q}_i$  pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= \int_V \sigma_{PK2} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) dV \\ &= A_o \sigma_{PK2} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \int dx_o \\ &= \alpha_o A_o \sigma_{PK2} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \int_{-1}^1 d\xi \\ &= 2\alpha_o A_o \sigma_{PK2} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Considerando uma lei constitutiva linear, o 2<sup>nd</sup> Tensor de Piola Kirchhoff é re-



presentado por:

$$\sigma_{PK2} = E\varepsilon_{GL} \quad (5.23)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade linear do material.

### 5.1.3 Matriz de Rigidez Tangente

A matriz de rigidez tangente é obtida derivando o vetor de forças internas  $\mathbf{q}_i$  em relação ao vetor de deslocamento nodais  $\mathbf{d}$ , tal como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{d}} \\ &= 2\alpha_o A_o (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \frac{\partial \sigma_{PK2}}{\partial \mathbf{d}} + 2\alpha_o A_o \sigma \frac{\partial (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)}{\partial \mathbf{d}} \\ &= 2E\alpha_o A_o \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \frac{2}{\alpha_o} A_o \sigma_{PK2} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$

## 5.2 Não Linearidade Física

Na não linearidade física, a relação constitutiva que descreve o comportamento do material é, por si só, não linear, sendo que a resposta associada ao fenômeno físico tal como plasticidade ou amolecimento, deverá ser capturado.

### 5.2.1 Elastoplasticidade Unidimensional

O comportamento elastoplástico, fenômeno ligado à não linearidade física, surge em materiais que sofrem deformações permanentes irreversíveis após a aplicação de um ciclo completo de carga e descarga. Este comportamento pode ser representado através do modelo constitutivo elastoplástico com encruamento isotrópico, tal como mostra a Figura 5.2.

A representação gráfica da Figura 5.2a e Figura 5.2b, mostra que o conjunto de tensões admissíveis  $\mathbf{K}_\sigma$  é invariável ao longo do tempo, mantendo o centro de  $\mathbf{K}_\sigma$  na origem - encruamento isotrópico. Já na Figura 5.2c, observa-se uma idealização do modelo constitutivo elastoplástico em um diagrama bilinear - encruamento isotrópico linear, onde se distingue um comportamento elástico na região  $oa$  com módulo de elasticidade  $E$  e uma região plástica  $ab$ , com endurecimento linear e módulo tangente  $D^{ep}$ .

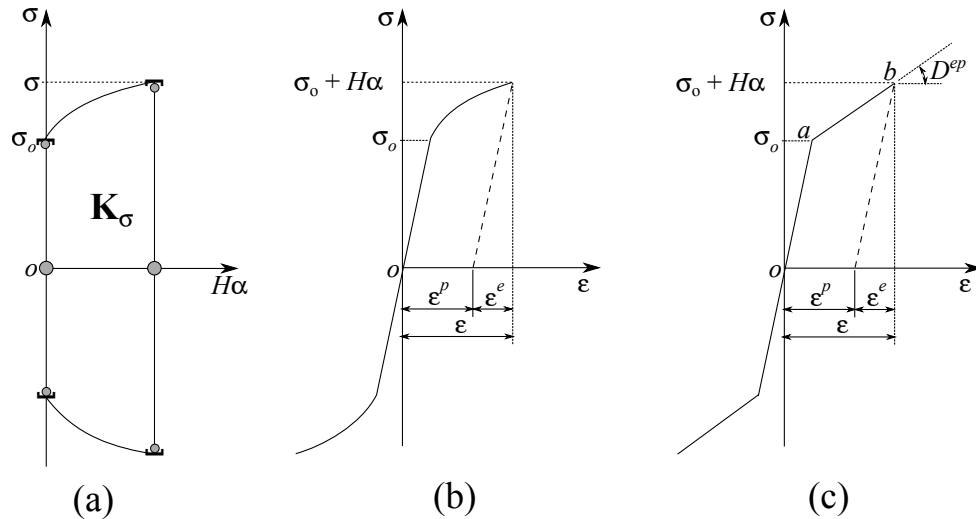


Figura 5.2 – Representação gráfica do conjunto de tensão admissível  $\mathbf{K}_\sigma$ . Adaptado de Rossi, 2012.

A formulação de  $\mathbf{K}_\sigma$  para endurecimento isotrópico pode ser definida como:

$$\mathbf{K}_\sigma = \{(\sigma, \alpha) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^+ | f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_o + H\alpha] \leq 0\}, \quad \alpha \geq 0 \quad (5.25)$$

sendo  $\sigma_o > 0$  e  $H \geq 0$ . O módulo plástico de encruamento isotrópico  $H$  é uma constante conhecida do material, e  $\alpha$  corresponde ao registro do histórico da deformação plástica durante o ciclo de carregamento, isto é, uma função do montante de fluxo plástico acumulado.

Resumidamente, é possível descrever o comportamento elastoplástico com encruamento isotrópico linear tal como segue [Muñoz-Rojas A. P., 2001]:

i. Relação tensão  $\times$  deformação:

$$\sigma = E\varepsilon^e \equiv E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

ii. Regra de fluxo e lei de encruamento isotrópico (lei de evolução da variável interna):

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$$

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| = \dot{\gamma}$$

iii. Condição de escoamento:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_o + H\alpha] \leq 0, \quad \alpha \geq 0$$

iv. Condições de carregamento e descarregamento, ou condições de Karush-Kuhn-Tucker

(KKT):

$$f(\sigma) \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} f(\sigma) = 0$$

Tais condições dão origem à chamada condição de consistência, expressa por:

$$\dot{\gamma} \dot{f} = 0, \quad \text{se } f(\sigma) = 0 \quad (5.26)$$

De modo que, se  $\dot{f} < 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0$ , mas se  $\dot{f} = 0$ , tem-se  $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma}$ , resultando em:

$$\dot{f} = E \dot{\epsilon} \text{sign}(\sigma) - \dot{\gamma} E = 0 \quad (5.27)$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\epsilon} \text{sign}(\sigma) \quad (5.28)$$

Derivando a condição de escoamento (iii) e aplicando  $\dot{f} = 0$ , obtém-se:

$$\dot{\gamma} = \frac{E}{E + H} \text{sign}(\sigma) \dot{\epsilon} \quad (5.29)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{E}{E + H} \dot{\epsilon} \quad (5.30)$$

Substituindo  $\dot{\gamma}$  e  $\dot{\epsilon}^p$  na condição (i), a qual relaciona a tensão com a deformação, resulta que:

$$D^{ep} = \frac{E}{E + H} \quad (5.31)$$

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E \dot{\epsilon} & \text{se } \dot{\gamma} = 0 \\ \frac{E H}{E + H} \dot{\epsilon} & \text{se } \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

sendo  $D^{ep}$  o módulo elastoplástico tangente para plasticidade linear isotrópica, cuja representação gráfica é apresentada na Figura 5.2(c).

### 5.2.2 Processo Incremental Iterativo - Algoritmo de Retorno

Considerando uma representação gráfica do mapeamento de retorno, tal como apresentado na Figura 5.3, para um dado campo de deformações,  $\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon_n$ , é possível calcular um valor teste da condição de escoamento  $f_{n+1}^{teste}$ . Se  $f_{n+1}^{teste} \leq 0$ , a deformação é elástica e a solução é trivial; do contrário, se  $f_{n+1}^{teste} > 0$ , um passo plástico ocorreu. Para o passo plástico, o problema consiste em encontrar  $\sigma_{n+1}$ ,  $\alpha_{n+1}$  tal que  $f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) = 0$  e  $\Delta\gamma > 0$ . Em posse destas informações, calcula-se  $\epsilon_{n+1}^p$ , o qual corresponde a nova deformação plástica total [Yaw, 2012].

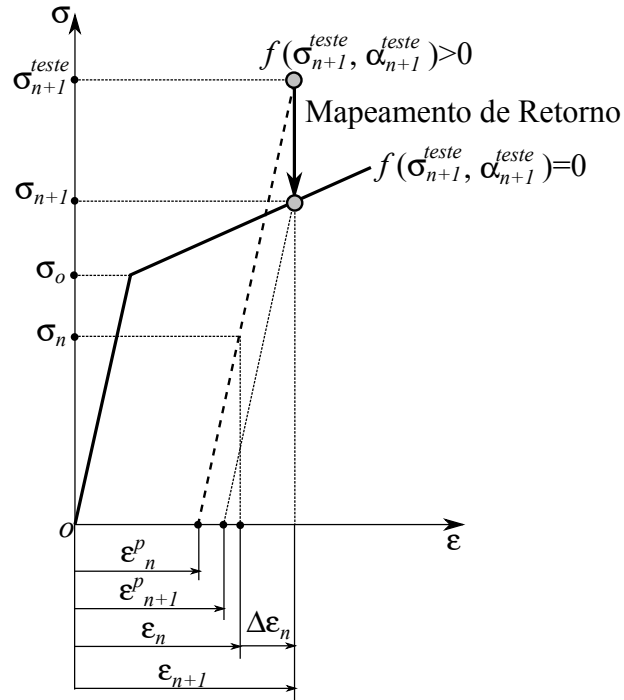


Figura 5.3 – Representação gráfica do mapeamento de retorno.

O pseudocódigo do algoritmo incremental do retorno pode ser descrito resumidamente em quatro passos, a saber :

1. Dado um histórico de variáveis conhecidas  $\{\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \alpha_n\}$ ,
2. Um incremento de deformação é dado por:  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$ ,
3. Compute a tensão elástica teste e verifique se há plastificação:

$$\sigma_{n+1}^{teste} := E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$f_{n+1}^{teste} := |\sigma_{n+1}^{teste}| - [\sigma_o + H\alpha_n]$$

SE  $f_{n+1}^{teste} \leq 0$ , ENTÃO

Passo Elástico: faça

$$(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{n+1}^{teste}$$

$$D^{ep} = E$$

SAIA do algoritmo

SENÃO

Passo Plástico: Retorno Radial;

FIM SE

4. Retorno radial:

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &:= \frac{f_{n+1}^{teste}}{(E+H)} > 0 \\ \sigma_{n+1} &:= \sigma_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma E \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^{teste}) \\ \varepsilon_{n+1}^p &:= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma E \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^{teste}) \\ \alpha_{n+1} &:= \alpha_n + \Delta\gamma \\ D^{ep} &= \frac{EH}{E+H}\end{aligned}$$

### 5.3 Critério de Falha Por Flambagem

Uma vez que as teorias apresentadas na seção 5.2 não permitem a verificação à flambagem por flexão dos elementos e pretendendo tornar o programa de análise estrutural, resultante deste trabalho, o mais abrangente possível, foi implementado um procedimento para verificação dos elementos quanto a tensão crítica de flambagem, desenvolvido a partir da generalização da Teoria de Euler, em regime elástico. Segundo Pereira, 2007, a flambagem por ser um mecanismo de colapso localizado tal como a plastificação ou fissuração, pode ser considerada como uma não linearidade física. Este comportamento é causado por uma bifurcação na solução das equações de equilíbrio estático [Barrigó, 2014].

A implementação numérica para a verificação da ocorrência da flambagem dos elementos, quando estes estão submetidos a esforços de compressão, é realizada em conjunto e de forma análoga à verificação da plastificação dos elementos dentro do processo incremental do método do controle dos deslocamentos generalizado.

#### 5.3.1 Modelo Constitutivo: Comportamento Pós-Flambagem

Um grande número de modelos computacionais tem sido propostos na literatura para reproduzir as curvas tensão-deformação na região pós-flambagem, pode-se citar o modelo proposto por Christopher D. Hill e Wang, 1989, para traçar a resposta inelástica de estruturas dentro da região pós-flambagem utilizando equações constitutivas apropriadas. Thai e Kim, 2009, estenderam a aplicação do modelo de Christopher D. Hill e Wang, 1989, para estruturas espaciais sujeitas a grandes deflexões incluindo não linearidades física e geométrica.

No presente trabalho será adotado um modelo constitutivo relativamente simples, proposto por Christopher D. Hill e Wang, 1989, e também utilizado por Thai e Kim, 2009 (ver Figura 5.4), para representar o comportamento pós-flambagem de estruturas de

barras. Sendo assim, com base neste modelo as seguintes equações podem ser deduzidas:

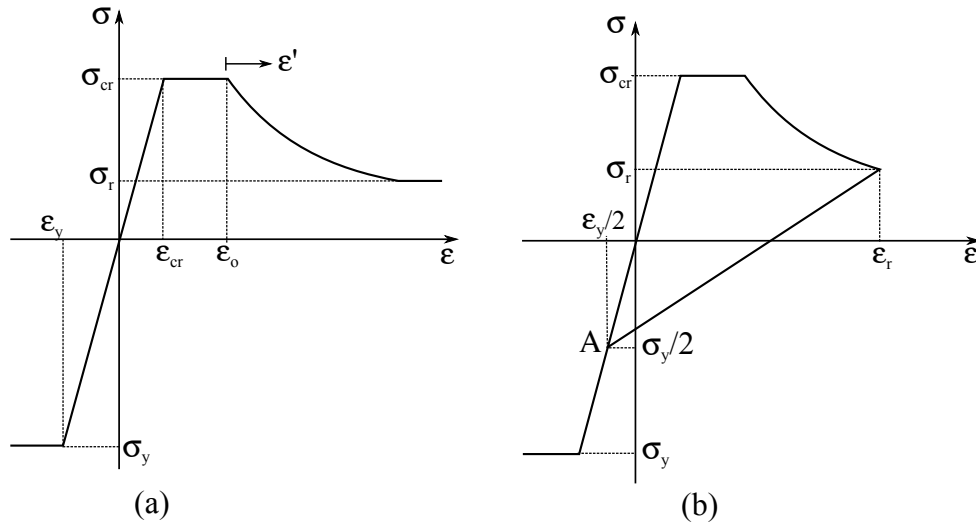


Figura 5.4 – Modelo constitutivo para flambagem.

- Para membros em tração:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad \varepsilon < \varepsilon_y \quad (5.33)$$

$$\sigma = \sigma_y, \quad \varepsilon \geq \varepsilon_y \quad (5.34)$$

- Para membros em compressão:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad |\varepsilon| < |\varepsilon_{cr}| \quad (5.35)$$

$$\sigma = \sigma_{cr}, \quad |\varepsilon_{cr}| \leq |\varepsilon| < |\varepsilon_0| \quad (5.36)$$

$$\sigma = \sigma_l + (\sigma_{cr} - \sigma_l) \exp[-(X_1 + X_2 \sqrt{\varepsilon^*}) \varepsilon^*], \quad |\varepsilon| \geq |\varepsilon_0| \quad (5.37)$$

onde  $\varepsilon$  corresponde a deformação de Green-Lagrange  $\varepsilon_{GL}$  obtida pela Equação 5.16,  $\sigma_y$  e  $\varepsilon_y$  são a tensão de escoamento e deformação correspondente ao escoamento, respectivamente;  $X_1$  e  $X_2$  são as constantes baseadas na razão de esbeltez ( $L/r$ );  $\sigma_l$  é a tensão limite inferior;  $\varepsilon^*$  corresponde a medida de deformação axial a partir do início da região inelástica pós-flambagem;  $\sigma_{cr}$  e  $\varepsilon_{cr}$  são as tensões críticas de flambagem de Euler e correspondentes deformações críticas de flambagem, respectivamente, as quais são expressas por:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{A L^2} \quad (5.38)$$

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{E} \quad (5.39)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material;  $I$ ,  $A$  e  $L$  são o momento de inércia da seção transversal, a área e o comprimento dos elementos, respectivamente.

O elemento que estiver sendo descarregado após atingir a tensão crítica de flambagem, ou seja, dentro do intervalo elástico pós-flambagem tal como apresentado na Figura 5.4b ( $|\varepsilon| > |\varepsilon_0|$ ), deverá seguir o caminho de descarga correspondente a uma linha reta partindo da tensão  $\sigma_r$  e deformação  $\varepsilon_r$  até a tensão e deformação correspondentes a metade do limite de elasticidade do material. Após atingir o ponto A na Figura 5.4b, o modelo constitutivo é atendido pela Equação 5.33.

Segundo Thai e Kim, 2009, adota-se esta simplificação pois seria difícil desenvolver uma equação constitutiva que modele adequadamente a tensão reversa dentro do intervalo elástico pós-flambagem.

#### 5.4 Não Linearidade Geométrica

Na não linearidade geométrica, a resposta física é dada pela mudança da geometria com a deformada da estrutura (efeito da geometria deformada), a qual leva em conta equações de deformação-deslocamento (cinemática) e equações de equilíbrio (balanço).

Normalmente em estruturas de barras, os efeitos das não linearidades geométricas são apresentados devido às rotações finitas (grandes rotações) que surgem em tais estruturas quando ocorrem as deformações.

Para as rotações finitas, as equações cinemáticas devem ser não lineares. Com a versão linear da medida de deformação, não é possível representar a relação entre a configuração deformada e indeformada. No caso do movimento de corpos rígidos, a deformação deve desaparecer, o que não ocorre na versão linear da deformação.

A não linearidade geométrica pode ser classificada em:

- Pequenas deformações, mas grandes deslocamentos ou rotações: para este caso, a estrutura sofre pequenas deformações, mas os deslocamentos e rotações são grandes. Geralmente, este tipo de não linearidade ocorre em arcos, molas, barras de treliças e placas e cascas finas.
- Grandes deformações: por ser grande a deformação, este tipo de não linearidade normalmente gera também não linearidade física. Em alguns casos, acima de 5% de deformação, considera-se grande deformação. Este tipo de não linearidade ocorre

na formação de metais e em materiais de borracha.

Sistemas estruturais do tipo treliça, são frequentemente utilizados em domos, torres, coberturas de grandes vão livre, entre outros. O comportamento não linear geométrico destas treliças tem sido analisado pelo uso de métodos de análise não linear os quais permitem avaliar graficamente a resposta da estrutura em um diagrama carga  $\times$  deslocamento através de uma curva contínua - trajetória de equilíbrio, na qual é possível identificar os pontos críticos<sup>1</sup>. Diversos métodos tem sido apresentados na literatura para tal fim, a saber: método de controle de deslocamento; controle de carga; controle do comprimento de arco; controle de deslocamento generalizado, cada um com suas vantagens e desvantagens. Uma boa revisão cronológica e discussão destes métodos é apresentada em Blandford, 1997; Murtha-Smith, 1994; Yang e Kuo, 1994; Gu, 2004; Chen, 2008.

Na Figura 5.5, estão ilustradas três trajetórias de equilíbrio, nas quais destaca-se a existência de diferentes pontos críticos: pontos limites<sup>2</sup> L; pontos de inflexão T; pontos de bifurcação B; pontos de falha F. Além disso, na Figura 5.5a observa-se o comportamento do salto dinâmico sob controle de carga (*snap-through*)<sup>3</sup>, e na Figura 5.5b o salto dinâmico sob controle de deslocamento (*snap-back*)<sup>4</sup>.

Em estruturas sujeitas à plastificação ou algum tipo de deterioração, é comum o aparecimento dos pontos limites, já quanto aos pontos de inflexão ou *snap-back*, estes podem ocorrer em estruturas sujeitas a falhas bruscas.

Normalmente, a solução dos problemas envolvendo não linearidades geométrica é obtida pela utilização de técnicas incrementais iterativas, as quais devem ser capazes de seguir a trajetória de equilíbrio além dos pontos críticos. Atendendo ao exposto, o método do controle de deslocamento generalizado, MCDG, proposto por Yang e Shieh, 1990, destaca-se por ser: auto-adaptativo na mudança do sentido de crescimento da carga nos pontos críticos; estável numericamente nas regiões próximas aos pontos críticos; auto-ajustável quanto aos passos de carga para representar a variação da rigidez da estrutura.

---

<sup>1</sup>Pontos Crítico: um ponto de equilíbrio é um ponto crítico se a matriz de rigidez do modelo de elementos finitos for singular.

<sup>2</sup>Pontos limites: são pontos onde a tangente é nula (horizontal), nos quais métodos como Newton-Raphson falham.

<sup>3</sup>Snap-Through: é um fenômeno associado à uma mudança instantânea entre dois estados de equilíbrio distantes um do outro. Ocorre normalmente em treliças, vigas, placas e cascas, podendo causar o colapso total da estrutura.

<sup>4</sup>Snap-back: podem ser definidos como pontos onde a tangente é infinita (vertical). O sistema pode apresentar, para um mesmo deslocamento, variação na carga aplicada. São nestes pontos onde, por exemplo, o métodos como o de controle de deslocamento falham.



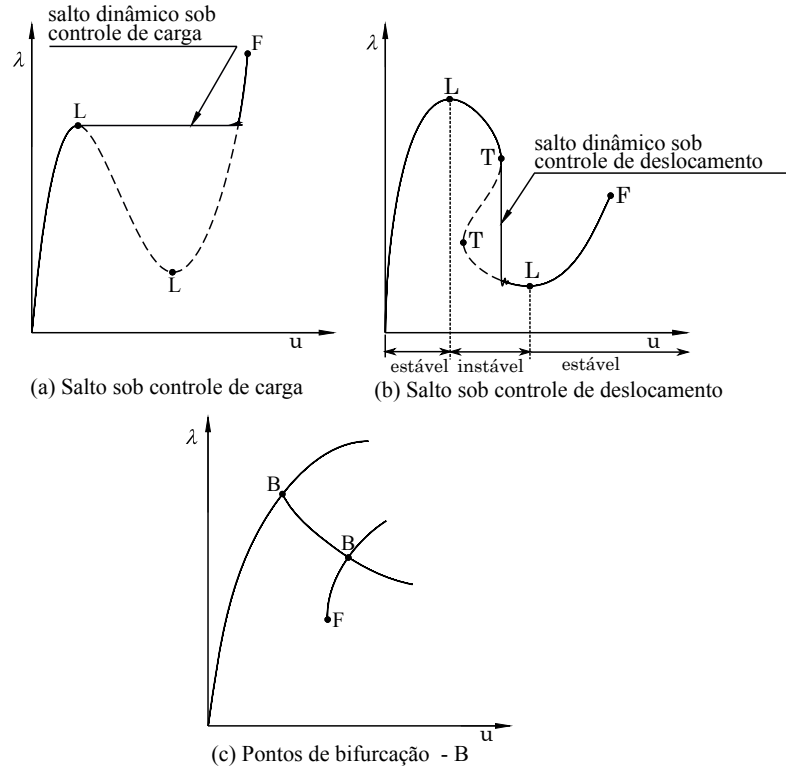


Figura 5.5 – Trajetórias de equilíbrio com seus correspondentes pontos críticos.

Mediante a utilização do referido método no presente trabalho, a seção seguinte abordará maiores detalhes do MCDG.

#### 5.4.1 Método do Controle de Deslocamento Generalizado

O método do controle de deslocamento generalizado representa a uma técnica alternativa para a análise do comportamento de estruturas em regime pré e pós-críticos [Muñoz-Rojas A. P., 2001].

Na solução incremental/iterativa de problemas não lineares, um fator de incremento de carga  $\Delta\lambda_j$  para cada passo iterativo  $j$ , pode ser considerado como uma variável incógnita adicional. Portanto, considerando que o carregamento seja proporcional, é possível escrever a equação de equilíbrio na seguinte forma [Gomes, 2001]:

$$[K]_{j-1}^i \{\Delta u\}_j^i = \Delta\lambda_j^i \{q_e^*\} + \{r\}_{j-1}^i \quad (5.40)$$

onde  $\Delta\lambda_j^i$ , define o incremento de carga da iteração  $j$ ,  $[K]_{j-1}^i$  é a matriz de rigidez tangente,  $\{\Delta u\}_j^i$  é o vetor de deslocamento incremental,  $\{q_e^*\}$  é o vetor de cargas nodais de referência,

e  $\{r\}_{j-1}^i$  corresponde ao vetor de forças desequilibradas na iteração  $j - 1$ , dado por:

$$\{r\}_{j-1}^i = \lambda_{j-1}^i \{q_e^*\} - \{q_i\}_{j-1}^i \quad (5.41)$$

onde  $\lambda_{j-1}^i$  representa o fator de carga na iteração  $j$ , e  $\{q_i\}_{j-1}^i$  o vetor de forças internas na mesma iteração.

É possível representar o vetor incremento de deslocamento  $\{\Delta u\}_j^i$  a partir da soma de vetores tal como:

$$\{\Delta u\}_j^i = \Delta \lambda_j^i \{\Delta u_1\}_j^i + \{\Delta u_2\}_j^i \quad (5.42)$$

onde os vetores  $\{\Delta u_1\}_j^i$  e  $\{\Delta u_2\}_j^i$  correspondem aos incrementos de deslocamentos gerados pelo vetor de cargas nodais de referência e forças desequilibradas, respectivamente. Estes podem ser obtidos pela solução dos seguintes sistemas de equações:

$$[K]_{j-1}^i \{\Delta u_1\}_j^i = \{q_e^*\} \quad (5.43)$$

$$[K]_{j-1}^i \{\Delta u_2\}_j^i = \{r\}_{j-1}^i \quad (5.44)$$

Determinado  $\{\Delta u\}_j^i$ , o vetor de deslocamento total  $\{u\}_j^i$  ao final da  $j$ -ésima iteração é acumulado

$$\{u\}_j^i = \{u\}_{j-1}^i + \{\Delta u\}_j^i \quad (5.45)$$

O vetor carga externa total  $\{q_e\}_j^i$  aplicada na  $j$ -ésima iteração do  $i$ -ésimo passo incremental é relacionado ao vetor das cargas nodais de referência tal como:

$$\{q_e\}_j^i = \lambda_j^i \{q_e^*\} \quad (5.46)$$

onde o fator de carga  $\lambda_j^i$  relaciona-se ao parâmetro incremental de carga  $\Delta \lambda_j^i$  por

$$\{\lambda\}_j^i = \lambda_{j-1}^i + \Delta \lambda_j^i \quad (5.47)$$

Uma vez que o fator de incremento de carga  $\Delta \lambda_j^i$  para cada passo iterativo  $j$  é desconhecido, na primeira iteração do passo  $i$ ,  $\Delta \lambda_j^i$  é determinado com base no parâmetro de rigidez generalizado (*Generalized Stiffness Parameter - GSP*), tal como:

$$\Delta \lambda_1^i = \pm \Delta \lambda_1^1 (|GSP|)^{\frac{1}{2}} \quad (5.48)$$

onde  $\Delta\lambda_1^1$  corresponde ao incremento inicial do fator de carga, ou seja, primeiro passo e primeira iteração de cálculo, enquanto que para as iterações subsequentes ( $i > 1$ ) do mesmo passo, tem-se:

$$\Delta\lambda_j^i = -\frac{\langle\Delta u_1\rangle_1^{i-1}\langle\Delta u_2\rangle_j^i}{\langle\Delta u_1\rangle_1^{i-1}\langle\Delta u_1\rangle_j^i} \quad (5.49)$$

de modo que quando  $i=1$ ,  $\langle\Delta u_1\rangle_1^0 = \langle\Delta u_1\rangle_1^1$ .

O *GSP*, permite ao método do controle dos deslocamentos generalizados, fornecer o incremento do fator de carga da primeira iteração do  $j$ -ésimo passo incremental, o qual é definido por:

$$GSP = \frac{\langle\Delta u_1\rangle_1^1\{\Delta u_1\}_1^1}{\langle\Delta u_1\rangle_1^{i-1}\{\Delta u_1\}_1^i} \quad (5.50)$$

O método do controle dos deslocamentos generalizado ajusta o sinal do parâmetro de carga baseado sinal da Equação 5.48, o qual é definido de forma simples e automática pela variação do próprio parâmetro *GSP*, visto que este possui a característica de mudar de sinal apenas nos pontos imediatamente após os pontos limites, tornando possível a identificação dos mesmos.

As etapas do MCDG implementadas ao programa responsável por realizar a análise determinística do presente trabalho, podem ser descritas resumidamente como sendo:

1. Defina um incremento inicial do fator de carga  $\Delta\lambda_1^1$ , o número total de ciclos de carregamento  $N$ , e o máximo fator de carga  $\lambda_{max}$ .
2. Inicializa  $\{q_e\}_0^1 = \{0\}$ ,  $\{r\}_0^1 = \{0\}$ ,  $\{u\}_0^1 = \{0\}$ ,  $\lambda_0^1 = \{0\}$ , etc.
3. Na primeira iteração ( $j=1$ ) para cada passo incremental  $i$ :
  - (a) Monta a matriz de rigidez global  $[K]_0^i$ .
  - (b) Resolva  $\{\Delta u_1\}_1^i$  usando a equação 5.43.
  - (c) Calcula o parâmetro incremental de carga  $\Delta\lambda_1^i$ :

Para  $i=1$

$$\Delta\lambda_1^i = \Delta\lambda_1^1$$

Para  $i>1$

Determine  $GSP$  - Equação 5.50 e calcule  $\Delta\lambda_1^i$  - Equação 5.48

Se  $GSP_j^i < 0$  e  $GSP_{j-1}^i > 0$

$$\Delta\lambda_1^i = \Delta\lambda_1^i * -1$$

4. Para as iterações seguintes ( $j \geq 2$ )
  - (a) Calcula as deformações e tensões com uma das Equações de 5.33 a 5.37 (seção 5.3).
  - (b) Verifica os passos 3 e 4 do algoritmo de retorno (subseção 5.2.2) e, se necessário, atualize as deformações, tensões e o módulo de elasticidade.
  - (c) Atualiza a matriz de rigidez global  $[K]_{j-1}^i$  com a Equação 5.24 (seção 5.1).
  - (d) Atualiza o vetor de forças internas  $\{q_i\}_{j-1}^i$  aplicando a Equação 5.22 (seção 5.1).
  - (e) Calcule  $\{\Delta u_1\}_j^i$  e  $\{\Delta u_2\}_j^i$  com as Equações 5.43 e 5.44, respectivamente.
  - (d) Determine o parâmetro de incremento de carga  $\Delta\lambda_j^i$  pela Equação 5.49.
5. Com as Equações 5.42 e 5.47, calcule  $\Delta u_j^i$  e  $\lambda_j^i$ , respectivamente.
6. Atualiza o deslocamento total e carga externa aplicando as Equações 5.45 e 5.46, respectivamente.
7. Calcule o vetor de forças desbalanceadas  $\{r\}_{j-1}^i$  usando a Equação 5.41.
8. Checando a convergência: Se a razão entre a norma da força desbalanceada  $\{r\}_{j-1}^i$  e a norma da força aplicada  $\{q_e\}_{j-1}^i$  for maior do que uma tolerância especificada, retorne ao passo 4. Do contrário, vá ao passo 9.
9. Checando a finalização: Enquanto o número total de passos é menor do que  $N$  ou o fator de carga é menor do que  $\lambda_{max}$ , volte ao passo 3. Do contrário, finaliza a processo.

Como pode ser observado nas etapas do MCDG padrão, acrescentou-se ao passo 4 os itens (a) e (b), os quais respondem pela não linearidade física, ou seja, ainda dentro do

passo incremental de carga, são verificados os critérios de falha local, diga-se, flambagem de Euler ou tensão de escoamento, para detectar se o membro ultrapassou seu limite de resistência. Se isso ocorrer, corrige-se a tensão, deformação e módulo de elasticidade do elemento que excedeu o critério de falha de acordo com as considerações apresentadas na seção 5.2 e 5.3.

A observação descrita no parágrafo anterior potencializa a implementação do modelo constitutivo acoplado ao MCDG, pois o amolecimento que ocorre no elemento devido aos efeitos pós-flambagem ou pós-limite de plastificação em compressão, impedem que ele suporte o mesmo carregamento anterior à falha, replicando na redução da sua rigidez e distribuindo os esforços remanescentes entre os outros elementos da estrutura. Este comportamento tende a refletir os efeitos que ocorrem em estruturas reais, os quais não podem ser reproduzidos a menos que algum efeito de relaxação ou amolecimento seja considerado durante o carregamento incremental na estrutura.

Se tratando dos efeitos gerados pela pós-falha à trajetória de equilíbrio da estrutura, Melchers e Tang, 1984, demonstram com base na Figura 5.6, as consequências que uma sequência de falhas produz na curva de equilíbrio usando o método da carga incremental (*Incremental Load Method - ILM*).

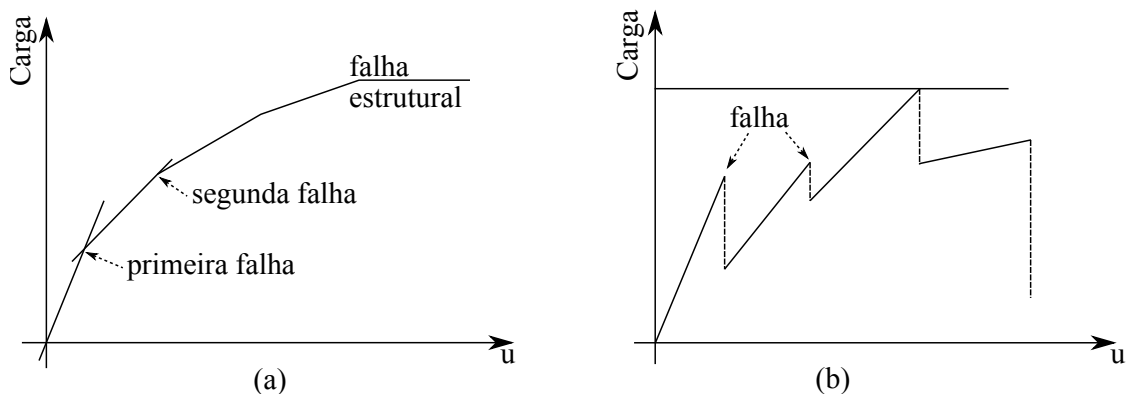


Figura 5.6 – Curvas de resposta do ILM: (a) elastoplástico, (b) frágil. Adaptado de Melchers e Tang, 1984.

O comportamento demonstrado na Figura 5.6 é característico de sistemas envolvendo materiais do tipo elastoplástico e frágil, respectivamente. Segundo os autores, em sistemas frágeis podem surgir vários picos (Figura 5.6b) como resultado da realimentação do sistema devido ao descarregamento sofrido pelas falhas anteriores.

Em acordo com os relatos apresentados por Melchers e Tang, 1984, acredita-se

que a trajetória de equilíbrio da estrutura considerando os efeitos pós-falha gerados com o modelo constitutivo aplicado ao MCDG, tenha um comportamento similar ao exposto por Melchers e Tang, 1984 na Figura 5.6b. Além disso, na seção 5.5, serão apresentadas outras particularidades desta implementação, as quais permitiram uma melhora no desempenho do algoritmo.

### 5.5 Critério Para o Colapso Total da Estrutura

Na seção anterior foi descrito o método de controle de deslocamento generalizado, o qual permitirá avaliar a resposta da estrutura pela sua trajetória de equilíbrio. Neste sentido, no tratamento de estruturas não lineares, as quais apresentem pontos críticos, dois fatores de carga devem ser considerados [Parente, 2000]. O primeiro diz respeito à carga total aplicada ( $\lambda = 1$ ), onde os deslocamentos devem ser avaliados, e o segundo corresponde à carga crítica ( $\lambda^*$ ) da estrutura. Estas duas situações são ilustradas na Figura 5.7.

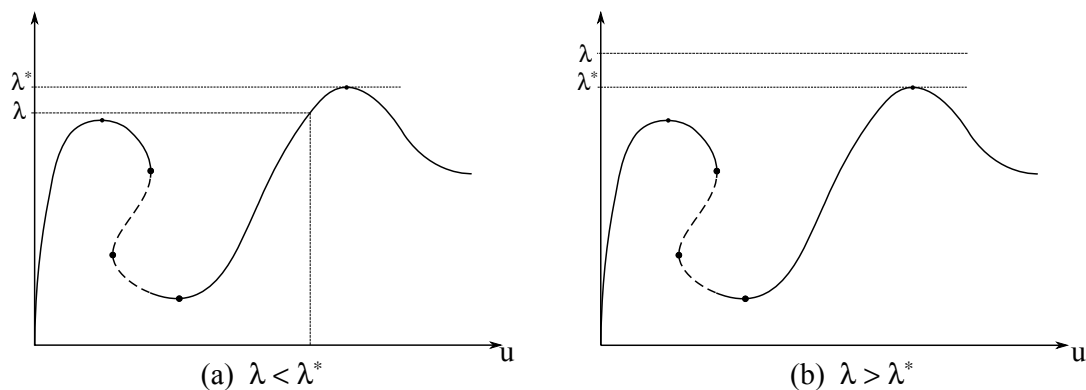


Figura 5.7 – Trajetórias de equilíbrio representando a carga crítica.

Na primeira situação, como pode ser observado na Figura 5.7a, a carga aplicada é menor que a carga crítica, sendo possível completar a análise e encontrar os deslocamentos. Já na segunda situação, demonstrada na Figura 5.7b, a carga aplicada é superior à carga limite da estrutura. Neste caso, a análise não pode ser levada ao fim, visto que a carga aplicada não corresponde a nenhum ponto do caminho de equilíbrio. Sendo assim, é impossível determinar os deslocamentos e as tensões correspondentes ao nível de carga desejado.

Para contornar o problema observado na segunda situação (Figura 5.7b), alguns métodos consistem em empregar um problema modificado, de maneira a sempre utilizar

os deslocamentos e tensões avaliados em um nível de carga inferior à carga crítica. Em Parente, 2000, é possível encontrar uma solução simples, onde o autor utiliza-se do algoritmo de pontos interiores para garantir que a carga crítica fique sempre acima da carga aplicada. Neste trabalho, optou-se pelo critério de instabilidade da estrutura como condição de finalização da análise. Com este critério, não é necessário que a análise seja levada até o fim, uma vez que o ponto do caminho de equilíbrio correspondente à instabilidade da estrutura é equivalente ao nível de carga que leva a estrutura ao colapso.

A ideia de finalizar a análise no momento que a estrutura estiver estaticamente instável, evita que o método de controle de deslocamento generalizado itere até que todo o carregamento seja aplicado ( $\lambda = 1$ ), reduzindo o número de iterações necessárias à finalização da análise e contornando problemas onde a carga aplicada é superior à carga máxima que a estrutura poderia suportar ( $\lambda > \lambda^*$ ), uma vez que esta condição não precisará ser satisfeita.

### 5.5.1 Verificando a Estabilidade da Estrutura

Segundo Melchers e Tang, 1984, a perda de estabilidade da estrutura pode ser considerada como um critério de colapso total. Partindo deste pressuposto, nesta seção será descrito o procedimento desenvolvido e acoplado ao algoritmo de análise estrutural para verificar a estabilidade da estrutura.

Conforme apresentado na seção 5.4, a solução numérica de sistemas estruturais envolvendo não linearidades geométricas, é obtida com a utilização de métodos incrementais e iterativos, tais como o MCDG. Ao descrever o MCDG, observa-se que a cada incremento de carga, uma nova análise estrutural é realizada para avaliar as forças internas, deslocamentos e tensões. Uma vez encontrado o equilíbrio entre as forças externas e internas para o passo de carga corrente, este deverá ser incrementado para que a estrutura seja reanalisada com o carregamento atualizado. Nesta etapa do processo iterativo, isto é, entre os passos incrementais, foi acoplado um teste de verificação da estabilidade global da estrutura, o qual, seguindo as etapas do MCDG (ver subseção 5.4.1) pode ser descrito resumidamente como sendo:

8. Checando a convergência: Se a razão entre a norma da força desbalanceada  $\{r\}_{j-1}^i$  e a norma da força aplicada  $\{q_e\}_{j-1}^i$  for maior do que uma tolerância especificada, retorne ao passo 4. Do contrário, vá ao passo 8.1.

- 8.1 Verificando a estabilidade global da estrutura: modifica-se a matriz de rigidez global da estrutura, zerando os termos da matriz correspondentes aos elementos que tenham violado algum critério de falha. Em seguida, verifica-se se a matriz de rigidez global modificada tornou-se singular<sup>5</sup>. Se sim, finaliza o processo. Do contrário, vá ao passo 9.
9. Checando a finalização: Enquanto o número total de passos é menor do que  $N$  ou o fator de carga é menor do que  $\lambda_{max}$ , volte ao passo 3. Do contrário, finaliza a processo.

É importante destacar que o item 8.1 permite apenas uma verificação estática quanto à estabilidade da estrutura, não são obtidas deformações, esforços ou tensões nesta etapa. Além disso, estando o sistema estável, e passando para o novo passo incremental, a matriz de rigidez global da estrutura será atualizada em função da mudança na rigidez dos elementos (efeito atribuído ao modelo constitutivo pós-falha do material) somada a variação no carregamento. Dada esta atualização, a redistribuição dos esforços na estrutura poderá provocar falhas adicionais com as quais aumentam-se as chances da estrutura se tornar instável e a análise ser finalizada mais rapidamente. Este é outro ponto favorável ao desempenho da análise determinística da estrutura.

## 5.6 Exemplos Testados

A teoria apresentada ao longo da seção 5.1 a 5.4, foi escrita em linguagem de programação *MATLAB*<sup>®</sup> e nesta seção, alguns exemplos são apresentados e discutidos para verificar a precisão do programa ao prever o comportamento elastoplástico de estruturas de aço sujeitas a grandes deflexões. Para propósito de verificação, os resultados obtidos com o presente estudo são comparados com outros resultados encontrados na literatura. Os casos testados são examinados para os modelos constitutivos apresentados na Figura 5.8, a saber: (a) linear elástico, (b) elastoplástico perfeito, (c) elastoplástico perfeito com incremento de plastificação, (d) elastoplástico perfeito com tensão crítica de flambagem e (e) elastoplástico pré e pós-flambagem com encruamento na tração. A exemplo de Thai e Kim, 2009, as seguintes propriedades serão consideradas para os efeitos pós-falha:  $X_1 =$

---

<sup>5</sup>Matriz de Rigidez Singular: uma matriz de rigidez é dita singular quando seu determinante é igual a zero, não sendo possível obter a sua inversa.



50;  $X_2 = 100$ ;  $\sigma_l = 0.4\sigma_{cr}$ . No caso da tensão crítica de flambagem  $\sigma_{cr}$ , considera-se que  $\varepsilon_{cr} = \varepsilon_o$ .

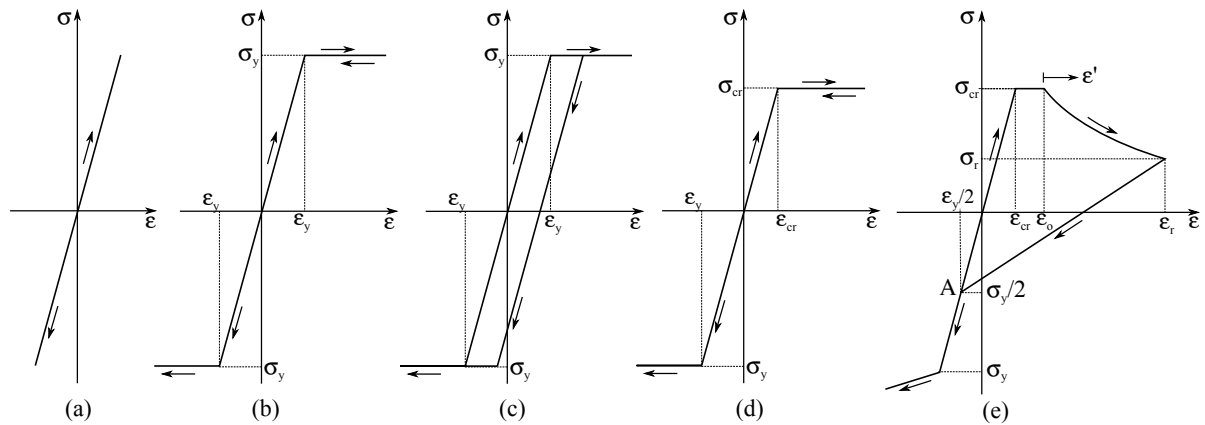


Figura 5.8 – Modelos constitutivos adotados no exemplos. Adaptado de Papadrakakis, 1983; Thai e Kim, 2009.

A Tabela 5.1 apresenta as referências e respectivas descrições dos tipos de análises que serão realizadas nos exemplos deste capítulo. Vale ressaltar que a não linearidade física engloba os modelos constitutivos apresentados na Figura 5.8.

Tabela 5.1 – Referências e descrição das análises.

Referência	Descrição da Análise	
	Geométrica	Física
NLG-EPH	Não Linear	Elastoplástico com encruamento linear isotrópico
NLG-EPP	Não Linear	Elastoplástico perfeito
NLG-EPB	Não Linear	Elastoplástico com efeitos pós-flambagem
NLG	Não Linear	Elástico
Linear	Linear	Elástico

Nos exemplos de 1 a 3, para que a precisão do algoritmo seja explorada ao longo de toda a trajetória de equilíbrio da estrutura, não será considerado o critério de colapso total, apresentado na seção 5.5. Já no exemplo 4, os efeitos gerados pelo comportamento pós-falha serão avaliados em termos da trajetória de equilíbrio, sequência de falhas dos membros e desempenho do algoritmo. Para este caso será considerado o critério de instabilidade como condição para o colapso total da estrutura.

Nesta versão do algoritmo, são admitidos que todos os nós são rótulas perfeitas e os carregamentos considerados como estáticos e aplicados somente nos nós da treliça.

### 5.6.1 Exemplo 1 - Treliça Plana de 2 Barras

Um problema não linear clássico é o da treliça plana composta por dois membros idênticos. Este problema foi investigado para dois casos, os quais divergem entre si em termos das configurações geométricas e propriedades constitutivas, a saber: Caso I, em referência aos pesquisadores Thai e Kim, 2009, Christopher D. Hill e Wang, 1989 e ilustrado na Figura 5.9, os autores consideraram como área da seção transversal  $96,77 \text{ cm}^2$ , momento de inércia  $745,18 \text{ cm}^4$ , módulo de elasticidade e tensão de escoamento do material  $E = 7,03 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  e  $\sigma_y = 4 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ , respectivamente; Caso II, fazendo referência ao trabalho de Papadrakakis, 1983, Figura 5.12, cuja área assumida pelo autor equivale a  $0,06452 \text{ m}^4$ , o  $E = 206 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $\sigma_y = 2,35 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$  e índice de esbeltez  $\lambda = 150$ .

Segundo Thai e Kim, 2009, a resposta pós-flambagem desta estrutura é muito sensível ao modelo constitutivo considerado, portanto, a Figura 5.8 apresenta uma aproximação de alguns dos modelos frequentemente utilizado nas análises de estruturas de aço.

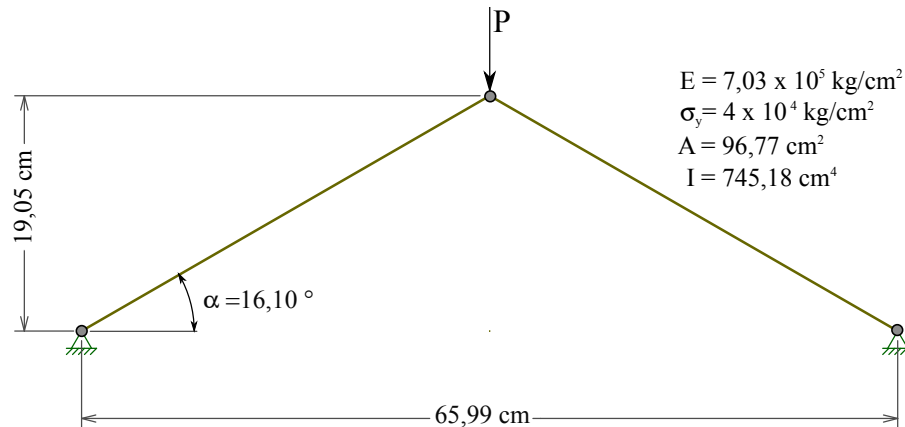


Figura 5.9 – Treliça plana de 2 barras — Caso I. Adaptado de Papadrakakis, 1983; Thai e Kim, 2009.

Considerando o Caso I, a Figura 5.10 apresenta uma comparação das curvas de equilíbrio carga  $\times$  deslocamento do presente estudo com Thai e Kim, 2009 para análise linear, NLG e NLG-EPB. Pode ser observado que as curvas obtidas com o programa desenvolvido sobrepõem as trajetórias de equilíbrio encontradas por Thai e Kim, 2009. Os valores exatos encontrados para as cargas limites são apresentados na Tabela 5.2, onde é possível compará-los com Christopher D. Hill e Wang, 1989 e também Thai e Kim, 2009.

Tabela 5.2 – Resultado das análises para a estrutura de duas barras - Caso I.

Análise	Carga Limite [kg]		
	Christopher D. Hill e Wang, 1989	Thai e Kim, 2009	Presente
NLG	$3,84 \times 10^6$	$3,76 \times 10^6$	$3,76 \times 10^6$
NLG-EPB	$2,91 \times 10^6$	$2,87 \times 10^6$	$2,89 \times 10^6$

Na Figura 5.11 são apresentadas as respostas da estrutura em termos de tensão  $\times$  deformação dos membros equivalente à análise não linear apresentada na Figura 5.10. Os algoritmos romanos indicados nas Figuras 5.10 e 5.11c, identificam os pontos de partida para os diferentes estágios na resposta individual do membro e sua correspondente influência no comportamento da estrutura. Os comportamentos dos estágios são: I - amolecimento após atingir a tensão crítica de flambagem; II - descarregamento após a flambagem em regime pós-flambagem; III - recarga linear elástica; e IV - tensão de tração em regime elastoplástico com encruamento.

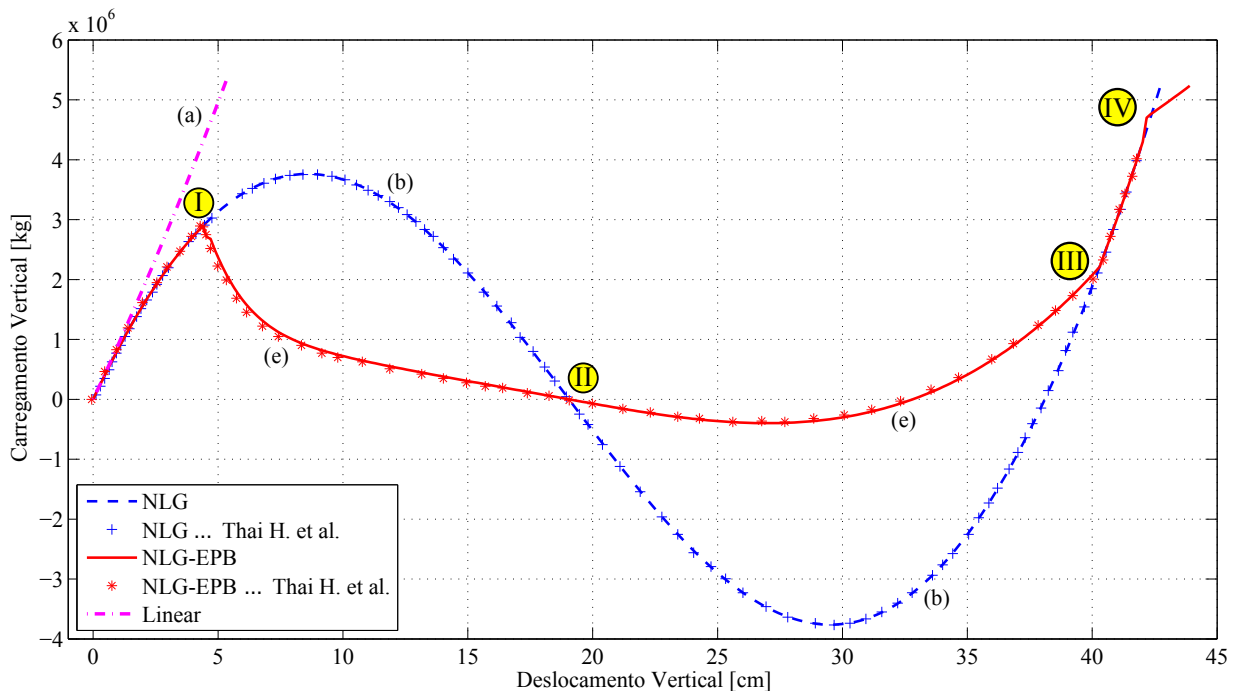


Figura 5.10 – Curvas de equilíbrio — Caso I.

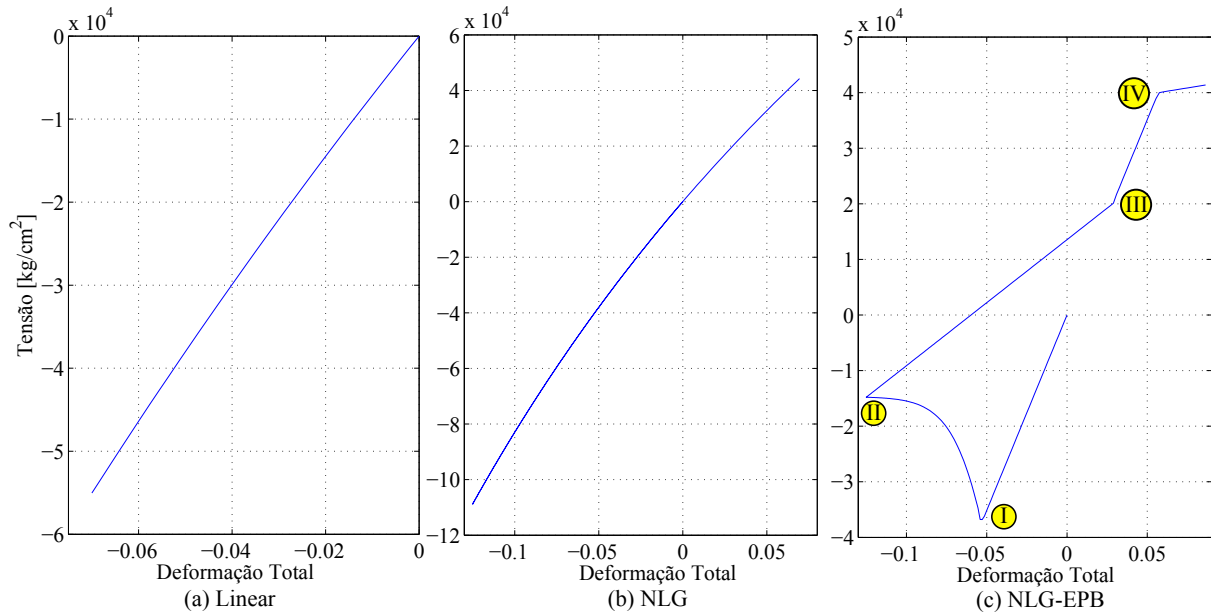


Figura 5.11 – Diagrama tensão  $\times$  deformação — Caso I.

Para o Caso II, a estrutura plana de duas barras é novamente analisada, uma vez que Thai e Kim, 2009 não investigaram o comportamento da estrutura frente ao modelo elastoplástico do material - propriedade constitutiva demonstrada na Figura 5.8c e 5.8d. Além disso, a configuração geométrica do caso I resultou em grandes deformações e grandes deslocamentos, comportamento não esperado, ao menos com tamanha intensidade, para o caso II. A verificação da precisão do programa implementado é demonstrada no gráfico da Figura 5.13 ao sobrepor as curvas obtidas neste trabalho com as apresentadas por Papadrakakis, 1983.

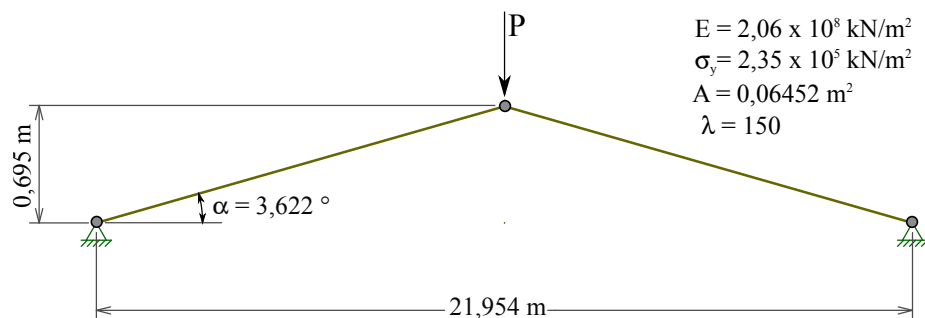


Figura 5.12 – Treliça plana de 2 barras — Caso II. Adaptado de Papadrakakis, 1983; Yang e Yang, 1997.

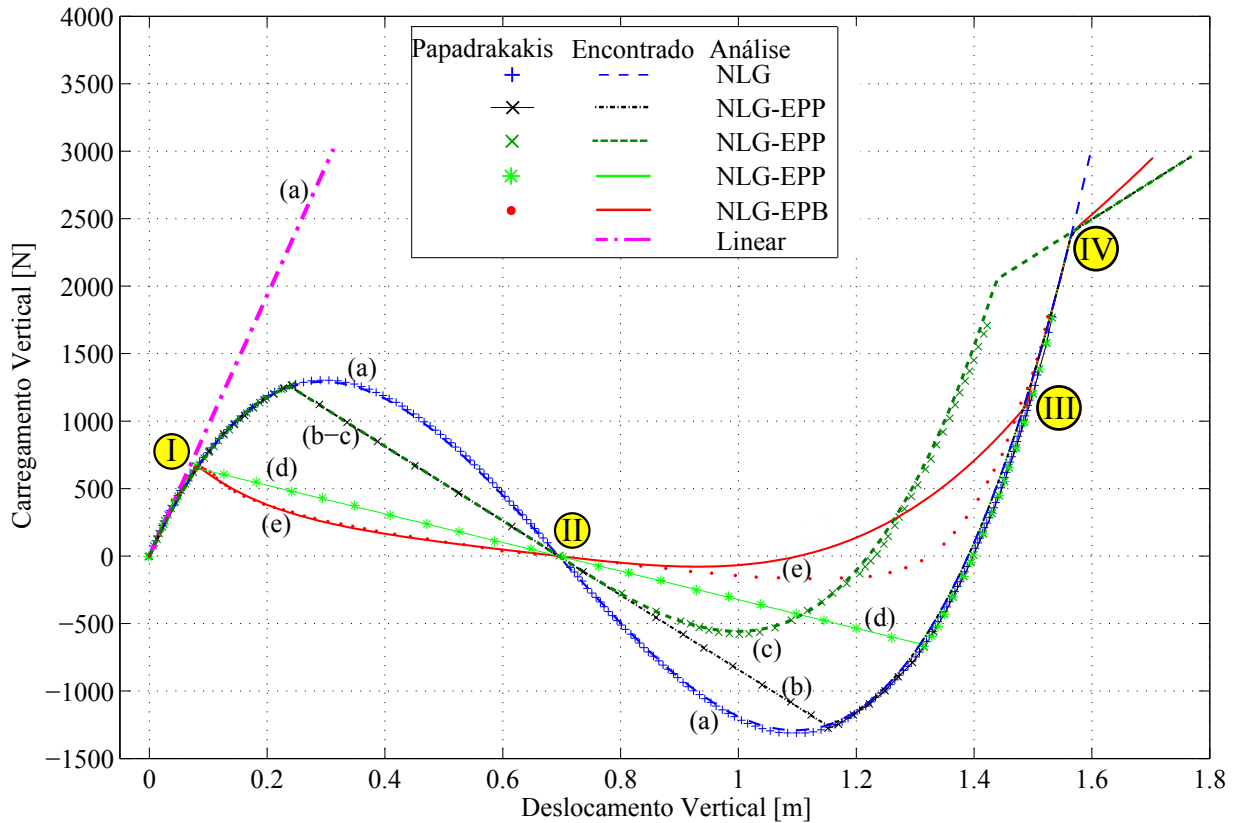


Figura 5.13 – Curvas de equilíbrio — Caso II.

Um aspecto comum observado nos dois casos (Figura 5.10 e 5.13) diz respeito ao ponto limite de escoamento; verifica-se que a força aplicada ao membro nunca atingirá a intensidade de carregamento de uma análise linear ou não linear geométrica e, além disso, ela continua a decair com a plastificação do membro devido ao escoamento em compressão. Sendo assim, de um modo geral, estas análises demonstram que a capacidade de carga para uma estrutura inelástica é muito menor do que em uma estrutura elástica, reforçando a ideia de que: assumir o material como linear elástico assim como negligenciar os efeitos do escoamento, poderá superestimar significativamente a resistência máxima da estrutura.

Outros efeitos a serem investigados estão relacionados a tensão de escoamento. A partir da Figura 5.11 pode ser observado que a tensão de escoamento não representa a resistência última da estrutura, contanto que ela seja maior do que a tensão crítica correspondente à carga de flambagem de Euler.

### 5.6.2 Exemplo 2 - Treliça Plana em Forma de Arco

O modelo de estrutura bidimensional em forma de arco foi estudado primeiramente por Crisfield, 1997. Posteriormente Hrinda, 2007, analisou o mesmo problema utilizando a método do comprimento de arco, o qual mais tarde foi referenciado por Thai e Kim, 2009, aplicando-o ao MCDG utilizando uma formulação lagrangiana atualizada. Em comum aos autores citados, são consideradas apenas não linearidades geométricas da estrutura. O modelo é composto por 101 elementos e submetido a um carregamento vertical de  $1 \times 10^6$  lbf no topo, conforme demonstrado na Figura 5.14. Assume-se que todos os membros possuem a mesma seção transversal, com  $EA = 5 \times 10^7$ . A finalidade deste exemplo é demonstrar a capacidade do algoritmo proposto em traçar a trajetória de equilíbrio de estruturas altamente não lineares que apresentam os fenômenos *snap through* e *snap-back*, aliados aos efeitos pós-falha provocados pela não linearidade física.

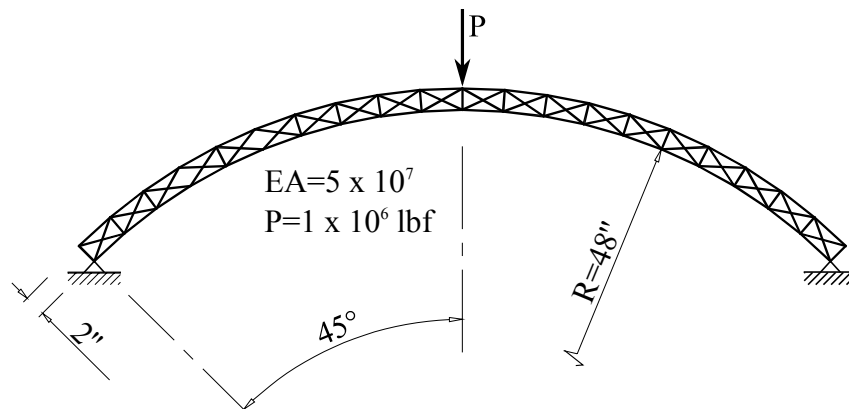


Figura 5.14 – Treliça plana em forma de arco. Adaptado de Crisfield, 1997

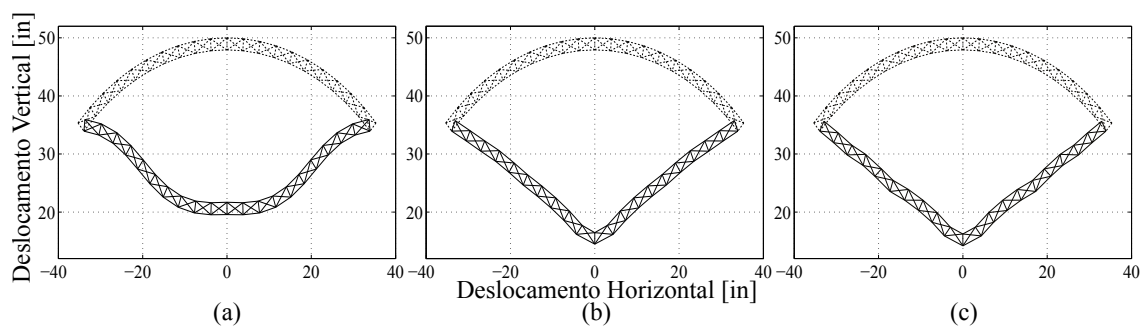


Figura 5.15 – Geometria deformada considerando: (a) NLG, (b) NLG-EPP, e (c) NLG-EPB.

Na Figura 5.16 são apresentadas as curvas de equilíbrio referentes ao nó central localizado no topo do arco. A curva correspondente a NLG mostra que o método implementado neste trabalho consegue seguir a mesma trajetória de equilíbrio encontrada por Crisfield, 1997, comprovando seu potencial em transpor os pontos críticos.

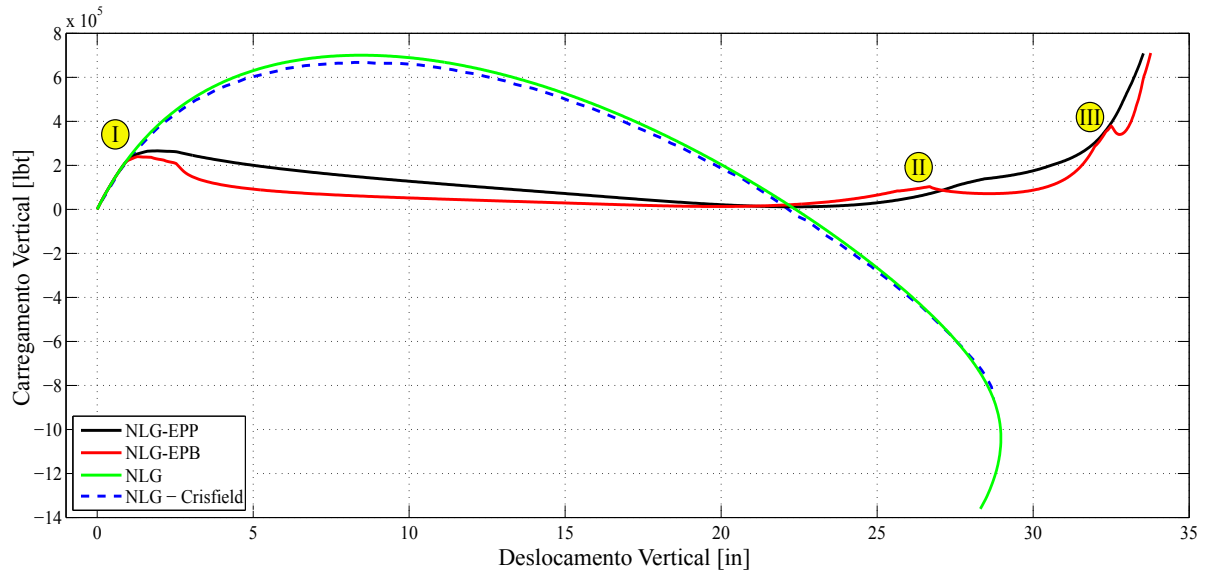


Figura 5.16 – Curvas de equilíbrio da treliça plana em forma de arco.

As Figuras 5.17, 5.18 e 5.19, são apresentadas para permitir avaliar mais precisamente as consequências que uma sequência de falha produz na curva de equilíbrio. É possível perceber que dada a falha de um elemento, os efeitos pós-falha reduzem o incremento de carga aplicado à estrutura, produzindo um pico na trajetória de equilíbrio. Este comportamento, observado por Melchers e Tang, 1984, assim como nos exemplos anteriores, é mais uma evidência de que a resistência da estrutura continua a decair após a plastificação do elemento, principalmente quando considera-se os efeitos pós-flambagem.

Inicialmente, pode-se notar que a complexidade da estrutura em forma de arco não muda as conclusões feitas anteriormente para a treliça plana de duas barras. Além das observações anteriores, com o auxílio das Figuras 5.17, 5.18 e 5.19, é possível verificar que dependendo do modelo constitutivo considerado, seus efeitos pós-falha alteram a sequência e a quantidade de elementos que atingem o critério de falha<sup>6</sup>. Ao contexto da análises probabilísticas realizadas neste trabalho, esta informação é de extrema importância, visto que para estimar a probabilidade de falha de serviço é necessário a identificação dos elementos que representam este modo de falha. Além disso, lembrando que o colapso total da estrutura deve-se à sua instabilidade, a identificação correta da ordem de falha

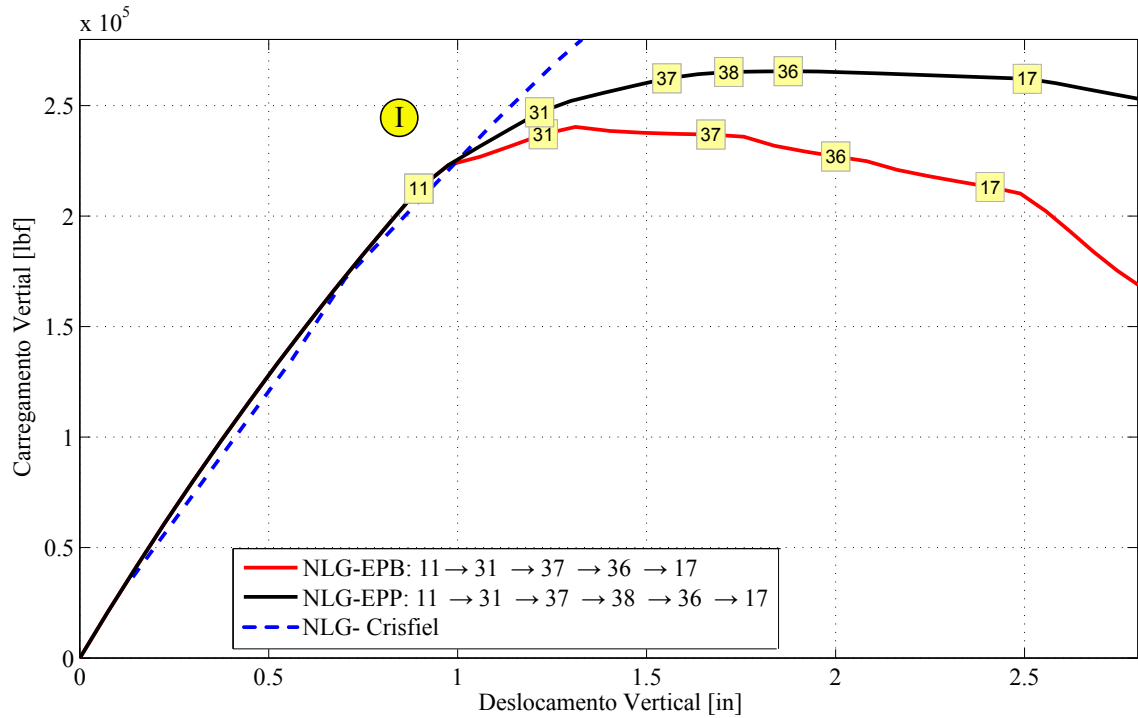


Figura 5.17 – Sequência de falha dos membros e seu efeito na trajetória de equilíbrio.

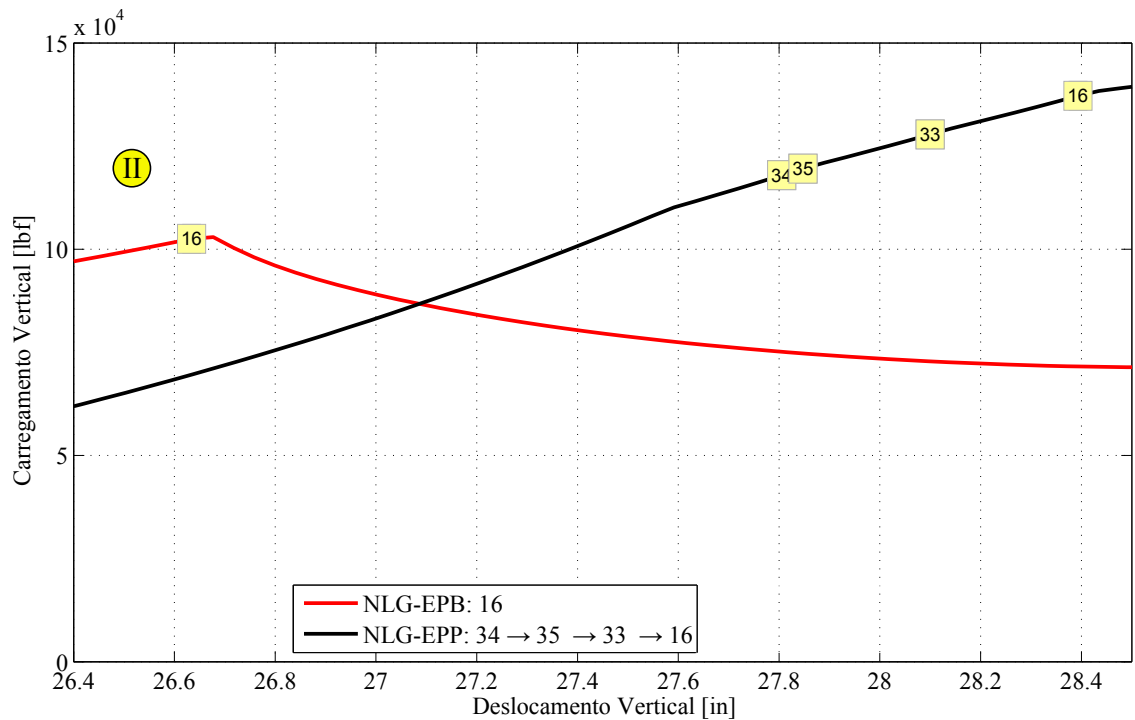


Figura 5.18 – Sequência de falha dos membros e seu efeito na trajetória de equilíbrio.

dos elementos permitirá que o critério de falha adotado na seção 5.5 finalize a análise no momento que a estrutura não suportar mais o carregamento imposto.

<sup>6</sup>As seqüências das falhas são apresentadas pela numeração dos elementos falhos tanto sobre as curvas de equilíbrio no momento que ocorreu a falha, quanto nas legendas em cada figura.



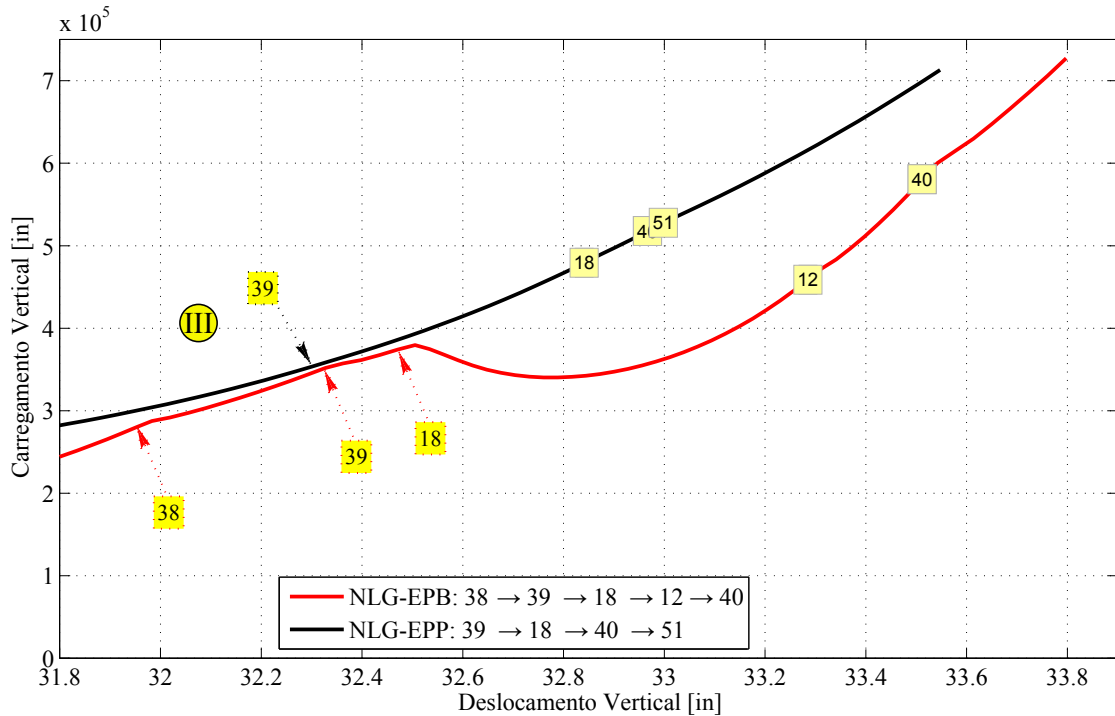


Figura 5.19 – Sequência de falha dos membros e seu efeito na trajetória de equilíbrio.

### 5.6.3 Exemplo 3 - Treliça Plana de 10 barras

A treliça plana de 10 barras é apresentada na Figura 5.20. Este problema é um clássico exemplo da literatura, que por representar uma estrutura hiperestática, é frequentemente utilizada como *benchmark* para os métodos de otimização. A estrutura está sujeita a dois carregamentos aplicados nos nós 2 e 4. As barras são combinadas em três grupos, a saber: banzos (1 - 4), montantes (5 - 6) e diagonais (7 - 10). Os valores das áreas foram obtidos por um processo de otimização determinístico, sob a hipótese de um carregamento 50% menor que o apresentado na Figura 5.20 para permitir que o comportamento pós-falha pudesse ser avaliado; sendo assim, as áreas utilizadas são:  $A_{1-4} = 0,017798762 \text{ m}^2$ ,  $A_{5-6} = 0,0008327425 \text{ m}^2$  e  $A_{7-10} = 0,013291024 \text{ m}^2$ . Os perfis em forma de tubo, possuem as seguintes propriedades:  $E = 68,95 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,  $H = 60,0 \times 10^8 \text{ Pa}$ ,  $\sigma_y = 517,11 \times 10^6 \text{ Pa}$  para a barra 9 e  $\sigma_y = 172,3 \times 10^6 \text{ Pa}$  para as demais. Quanto à tensão admissível em tração e compressão, segue-se as considerações discutidas nas seções 5.2 e 5.3, com base nas Equações 5.33 a 5.39. A relação entre o momento de inércia mínimo da seção ( $I$ ) e a área da seção transversal ( $A$ ) foi obtida mantendo-se fixa a relação entre o diâmetro externo e o interno dos perfis, da seguinte forma:

$$I(A) = \frac{\left( \left( \frac{d_e}{d_i} \right)^2 + 1 \right) A^2}{4\pi \left( \left( \frac{d_e}{d_i} \right)^2 - 1 \right)} \quad (5.51)$$

onde  $d_e$  e  $d_i$  são respectivamente os diâmetros externo e interno do perfil, cuja razão  $d_e/d_i$  para este exemplo fixou-se em 1,25.

Devido à sua configuração relativamente simples, a treliça de 10 barras permite explorar o algoritmo implementado sob outros aspectos e de forma mais clara que nos exemplos anteriores. Como característica principal deste exemplo, procura-se identificar as consequências que os diferentes modelos constitutivos causam à resposta da estrutura em termos da sequência e ordem de falha dos elementos, assim como seus efeitos sob o critério de colapso total.

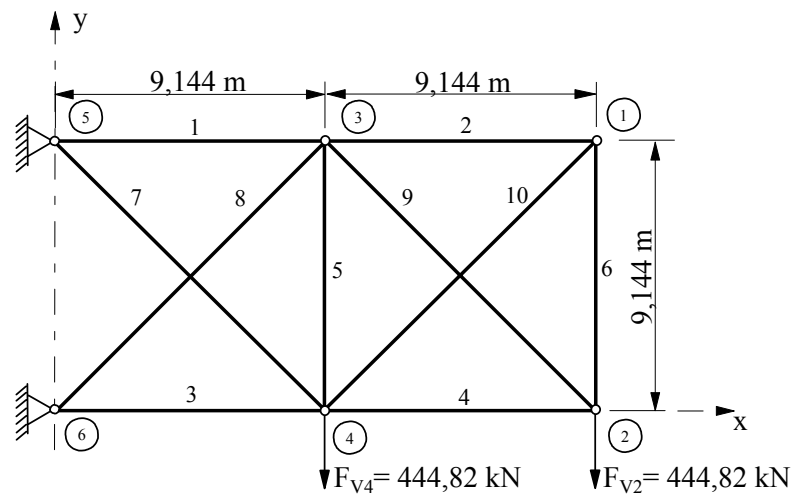


Figura 5.20 – Treliça plana de 10 barras.

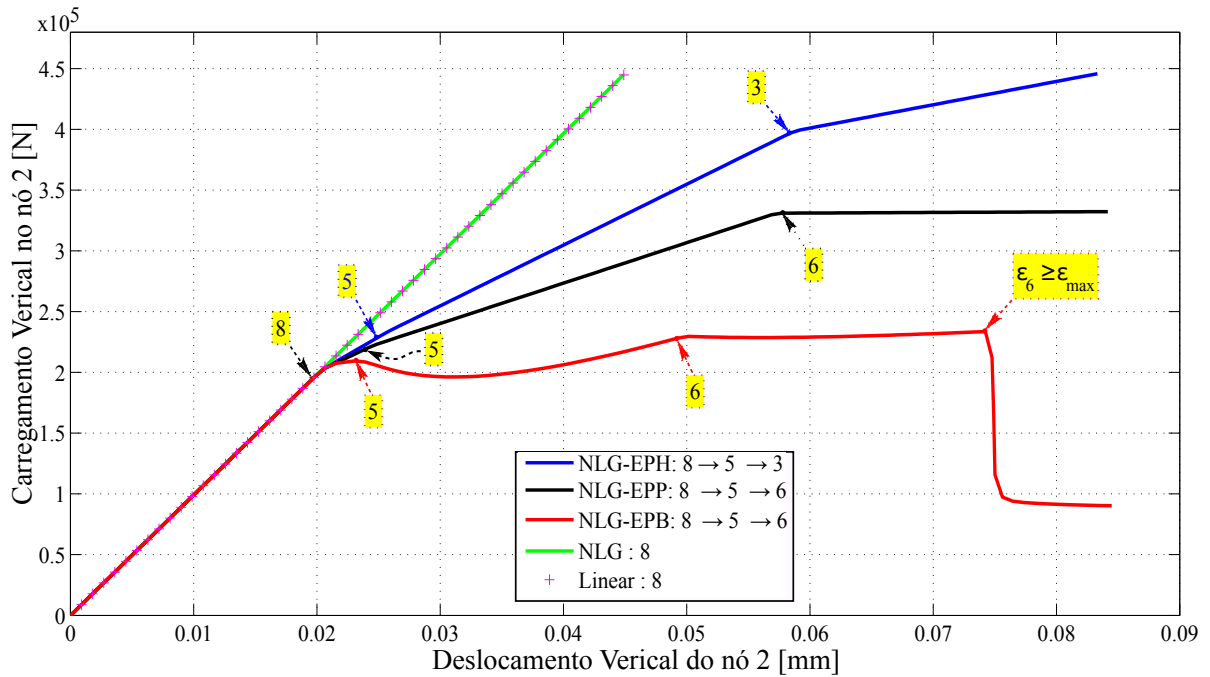


Figura 5.21 – Curvas carga  $\times$  deslocamento vertical do nó 2.

Em comum aos exemplos 1 a 3, observa-se na Figura 5.21 que a condição crítica é atribuída aos efeitos pós-flambagem representados pelo modelo constitutivo apresentado na Figura 5.8e. Tais efeitos podem ser avaliados em termos da tensão  $\times$  deformação dos membros 8, 5 e 6 na Figura 5.22.

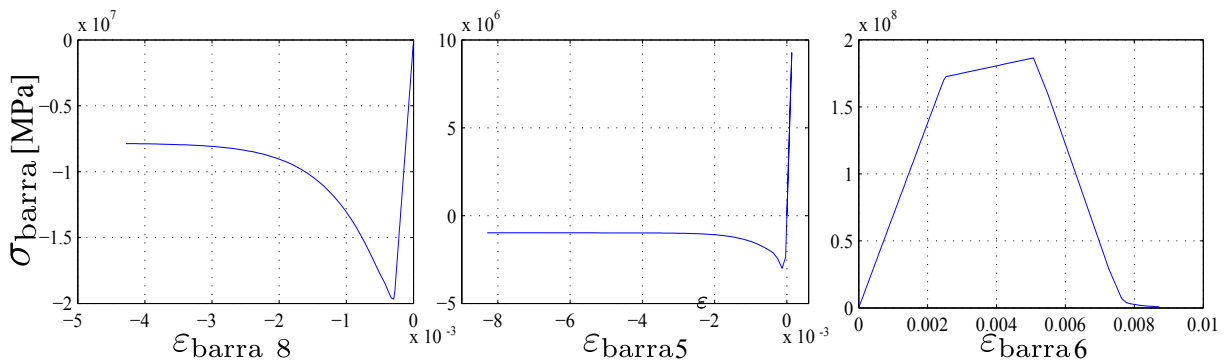


Figura 5.22 – Curvas tensão  $\times$  deformação dos elementos que ultrapassaram o limite de resistência na NLG-EPB.

Outro aspecto relevante deste problema, o qual também foi observado no exemplo 3, pode ser atribuído à ordem de falha dos elementos. As curvas de equilíbrio demonstram que dependendo do modelo de material considerado, a ordem de falhas dos elementos pode ser alterada<sup>6</sup>, isto é: considerando que o material atribuído aos elementos seja do tipo elastoplástico com encruamento em tração e efeitos pós-flambagem em compressão

(Figura 5.8e), a ordem de falha dos elementos é dada por  $8 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ , a qual coincide com a sequência de falha dos elementos considerando o material como elastoplástico perfeito (Figura 5.8c); já assumindo o material como elastoplástico com encruamento em tração e compressão, sem efeitos pós-flambagem, a seguinte sequência é observada  $8 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ .

Além disso, deve-se destacar o momento em que estas falhas acontecem, o qual também depende do modelo constitutivo de material aplicado. Neste sentido, supondo que a instabilidade desta estrutura seja atribuída à falha de um terceiro elemento, observa-se que a curva correspondente à NLG-EPB, tornaria o sistema instável mais rapidamente, além de resistir a um carregamento inferior aos demais. Esta característica permite que a análise seja finalizada antes mesmo que a carga total ( $\lambda = 1$ ) venha a ser aplicado à estrutura, melhorando assim o desempenho do algoritmo e evitando problemas onde  $\lambda > \lambda^*$ , conforme discutido na seção 5.5.

#### 5.6.4 Exemplo 4 - Pilar

O problema abordado neste exemplo trata de um caso real, oferecendo à formulação implementada, um aspecto mais realista e fiel aos problemas habituais enfrentados por engenheiros e projetistas de estruturas metálicas.

A Figura 5.23 apresenta o pilar central de um pavilhão. As barras do pilar são representadas na figura de forma unifilar. A escolha deste componente deve-se à sua importância estrutural, ou seja, com base na configuração geométrica do pavilhão, um possível colapso do pilar comprometerá todo a estrutura, levando-a à ruína. A informação precedente foi fornecida pela empresa responsável pelo dimensionamento do pavilhão, cujo detalhamento encontram-se no Apêndice A deste trabalho.

Tanto os carregamentos, quando as propriedades de material apresentados na Tabela 5.3, fazem referência ao projeto real. Em posse destas informações, os valores para as áreas das seções transversais são obtidos por um processo de otimização determinístico, tal como realizado no exemplo anterior.

Para traçar a trajetória de equilíbrio da estrutura, tanto o carregamento horizontal quanto vertical,  $F_H$  e  $F_V$ , são majorados em 80%. Esta hipótese tem o propósito de provocar a falha dos elementos durante o carregamento a fim de permitir traçar a curva de equilíbrio em regime pós-falha, tal como pode ser observado na Figura 5.24, de acordo com o modelo físico e geométrico adotado.

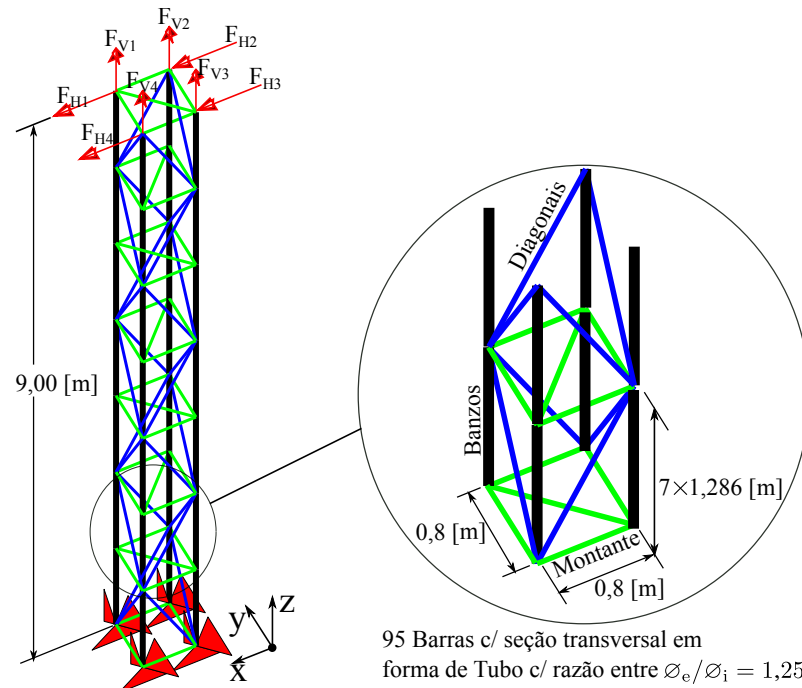


Figura 5.23 – Representação esquemática do Pilar - PM13.

Tabela 5.3 – Propriedades geométricas e material do pilar.

Banzos	$A_{1-28}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,339976 \times 10^{-3}$
Diagonais	$A_{29-56}$ [m <sup>2</sup> ]	$2,847579 \times 10^{-4}$
Montantes	$A_{57-95}$ [m <sup>2</sup> ]	$7,556803 \times 10^{-5}$
Tensão de Escoamento	$\sigma_{1-95}$ [Pa]	$250 \times 10^6$
Módulo de Elasticidade	$E_{1-95}$ [Pa]	$205 \times 10^9$
Módulo de Encruamento	$H_{1-95}$ [Pa]	$68,33 \times 10^9$
Carregamento Horizontal	$F_{H 1-4}$ [N]	$1,2731 \times 10^5$
Carregamento Vertical	$F_{V 1-4}$ [N]	$4,3836 \times 10^3$

Os pontos sobre as curvas, apresentados na Figura 5.24, representam o instante que a barra viola o critério de falha que, em comum aos exemplos anteriores, produzem um efeito mais pronunciado quando são considerados os efeitos pós-falha em flambagem aliados ao comportamento não linear geométrico da estrutura — NLG-EPB. Novamente observa-se que ao negligenciar o amolecimento pós-flambagem, as curvas NLG-EPH, NLG e Linear, demonstram pequenos valores de deslocamento no topo do pilar quando o carregamento total for aplicado ( $\lambda = 1.0$ ), com exceção da NLG-EPP que atinge 0,06694 [m].

Devido a configuração geométrica desta estrutura, diferentemente do exemplo anterior, a não linearidade geométrica causa uma variação na trajetória de equilíbrio da

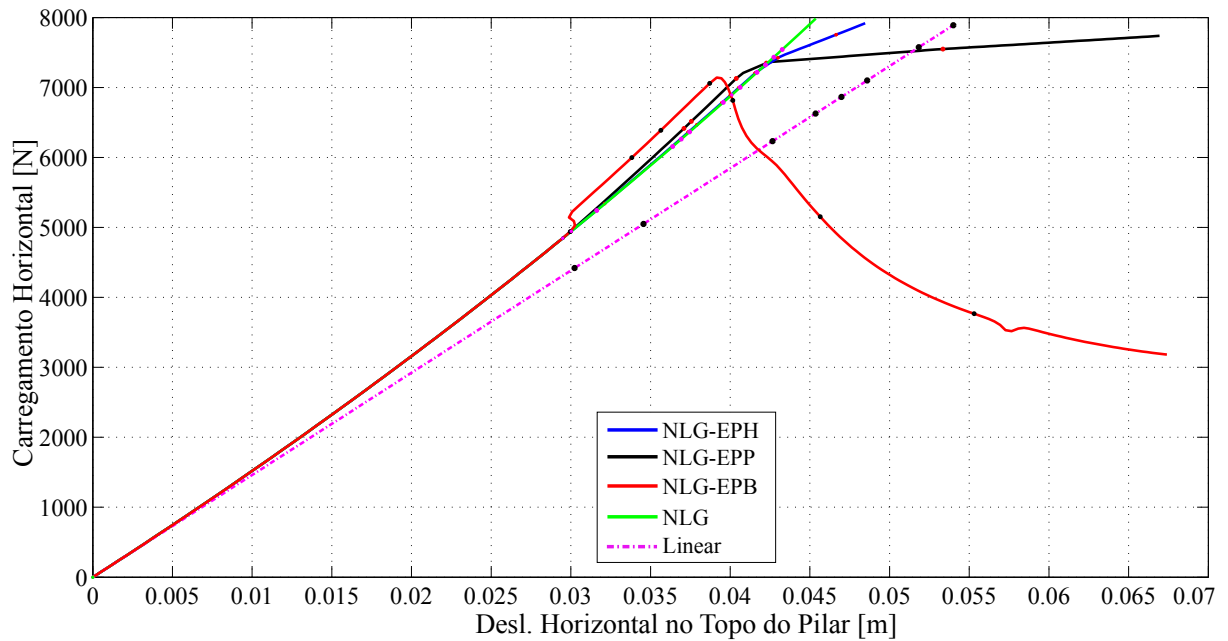


Figura 5.24 – Curvas carga  $\times$  deslocamento horizontal no topo do pilar.

estrutura. Esse efeito não é observado para a análise puramente linear, tanto que para esta condição, a estrutura apresenta elementos falhos sob um carregamento inferior às demais não linearidades, de modo que, ao contexto da otimização estrutural, a análise linear (geométrica e física) fornecerá uma incorreta capacidade de carga da estrutura, permitindo que ela suporte menos carga e resultando numa solução ótima mais robusta.

Demais comentários acerca do gráfico apresentado na Figura 5.24, são comuns às observações realizadas no exemplo anterior.

Em suma, com base no comportamento registrado para as estruturas analisadas nesta seção, assegura-se que o programa desenvolvido possibilita identificar o caminho de equilíbrio que representa adequadamente o colapso individual de cada elemento, sendo assim, acredita-se que este programa suprirá a análise probabilística de forma precisa e eficiente, permitindo avaliar os efeitos que as não linearidades física e geométrica poderão causar à estrutura em termos de confiabilidade e risco.

## 6. IDENTIFICAÇÃO DOS MODOS DE FALHA

Este Capítulo apresenta a metodologia utilizada para satisfazer uma questão fundamental para resolver os problemas de otimização do risco. Trata-se da identificação dos modos de falha de sistemas redundantes e suas respectivas frações de probabilidade, as quais também exigem uma classificação pertinente. Para cumprir com este propósito, na seção 6.2 é realizada uma descrição simplificada do método HDM original, o qual foi utilizado como plataforma para o método probabilístico proposto neste trabalho. Em seguida, na seção 6.3 são apresentadas as etapas que compõem o método proposto de forma detalhada.

### 6.1 Procedimento Fundamental

Conforme descrito no Capítulo 2, a função de estado limite  $g(\mathbf{X}) = 0$  separa o domínio de segurança  $\Omega_S \equiv \{g(\mathbf{X}) > 0\}$  do domínio de falha  $\Omega_F \equiv \{g(\mathbf{X}) < 0\}$ , tal que a equação utilizada para calcular a probabilidade de falha é dada por:

$$P_f = \int_{\Omega_F} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (6.1)$$

Porém, sabe-se que a integral sob todo o domínio  $\Omega_F$  é difícil de ser avaliada, especialmente para problemas envolvendo um grande número de variáveis (ou seja, espaço altamente dimensional). Para contornar este problema, a probabilidade de falha pode ser aproximada pelo somatório das probabilidades de falhas associadas a segmentos do domínio  $\Omega_F$ , onde a integração direcional unidimensional é realizada de forma fechada. No espaço normal padrão, a integração ao longo de cada direção é obtida de forma exata utilizando a distribuição Chi-quadrado ( $\chi^2$ ).

Partindo-se da hipótese de que a função de estado limite possa ser aproximada por segmentos de círculos, a técnica utilizada para dividir o espaço (de modo a resultar em segmentos do domínio  $\Omega_F$  para realizar a integração unidimensional), tem como base o método HDM - *Hyperspace Division Method*. Segundo Katsuki e Frangopol, 1994, o HDM pode lidar com problemas de confiabilidade envolvendo funções de estado limite não lineares e múltiplos modos de falhas. Em comparação com o método de Monte Carlo, o HDM exige um número de simulações significativamente menor e chega a resultados

muito próximo da solução exata. Essa, dentre outras particularidades do HDM, justificam a escolha desse método como base para a técnica desenvolvida no presente trabalho, permitindo calcular a  $P_f$  que compõe a função objetivo do problema de otimização do risco, conforme Equação 3.3.

## 6.2 Procedimento Fundamental do HDM

Como procedimento geralmente utilizado pelos métodos existentes (FORM, SORM), inicialmente é realizada a transformação do vetor das variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  para um vetor normal padrão  $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$  pela transformação *Rosenblatt*  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{X})$ .

Considerando que os domínios de falha e segurança no espaço normal padrão sejam,  $\Omega_S \equiv \{g(\mathbf{U}) > 0\}$  e  $\Omega_F \equiv \{g(\mathbf{U}) < 0\}$  respectivamente, o domínio inteiro  $\Omega$  é dado por

$$\Omega = \Omega_S \cup \Omega_F \quad (6.2)$$

A técnica de divisão radial do hiperespaço consiste em repartir o espaço  $\Omega$  radial e igualmente, a partir da sua origem (isto é,  $\mathbf{U} = 0$ ) em  $m$  subdomínios  $\Omega_i$  tal como:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i \quad (6.3)$$

As regiões de segurança e falha do subdomínio  $i$ , respectivamente são:

$$\Omega_{iS} = \Omega_i \cap \Omega_S \quad (6.4)$$

$$\Omega_{iF} = \Omega_i \cap \Omega_F \quad (6.5)$$

O ponto de intersecção entre a linha central do subdomínio  $\Omega_i$  e a função de estado limite em  $g(\mathbf{U}) = 0$ , é definido como  $Q_i$ . Se existir tal intersecção, então o subdomínio está ativo ( $\Omega_i^a$ ), do contrário, o subdomínio será passivo ( $\Omega_i^p$ ). Tais definições podem ser melhor compreendidas com auxílio da Figura 6.1, na qual também pode-se verificar que um subdomínio inteiramente ou parcialmente ativo é repartido pela função de estado limite em dois subdomínios: um subdomínio de segurança ( $\Omega_{iS}^a \subset \Omega_S$ ) e um subdomínio de falha ( $\Omega_{iF}^a \subset \Omega_F$ ).

Com base na Figura 6.1, a probabilidade de falha pode ser obtida pela seguinte



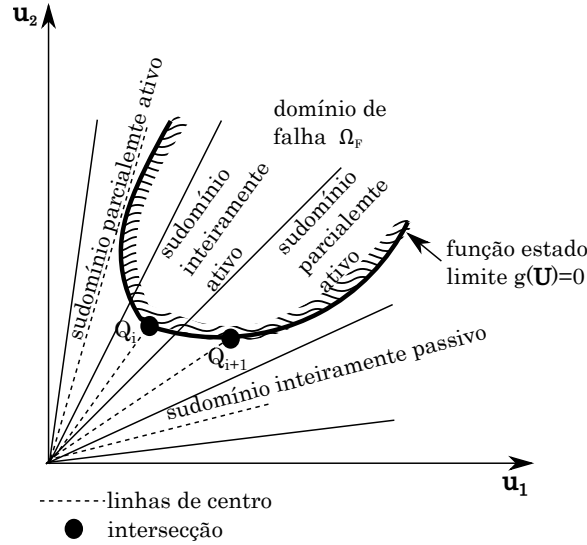


Figura 6.1 – Divisão Radial do Espaço: subdomínios ativo e passivo. Adaptado de Katsuki e Frangopol, 1994.

equação:

$$P_f = \sum_{i=1}^{m_a} \int_{\Omega_{iF}^a} f_{\mathbf{U}}(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (6.6)$$

onde  $m_a$  corresponde ao número total de subdomínios ativos.

Por simplificação, dado um hiperespaço, cujo domínio inteiro é tal que  $\Omega = \Omega_S \cup \Omega_F$ , com  $n$  variáveis independentes normais padrão  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{X})$ , a nova variável aleatória  $Z^2$ , é definida por:

$$Z^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \quad (6.7)$$

a qual corresponde a variável aleatória Chi-quadrado com  $n$  graus de liberdade. Se a função de estado limite é uma hipersfera de raio  $R$  no hiperespaço do domínio inteiro  $\Omega$ , então:

$$g_n(\mathbf{U}) = -u_1^2 - u_2^2 - \dots - u_n^2 + R^2 = 0 \quad (6.8)$$

e a probabilidade de falha associada com esta hipersfera pode ser obtida de maneira exata por [Ang, 1984]:

$$P_f = P[g_n(U) < 0] = 1 - \chi_n^2(R^2) \quad (6.9)$$

onde  $\chi_n^2$  é a função densidade de probabilidade acumulada Chi-quadrado com  $n$  graus de liberdade, discutida na seção 2.4.

Na Figura 6.2 é apresentado o subdomínio de falha da função densidade de probabilidade acumulada Chi-quadrado, cuja função de estado limite é simplificada por um função circular (a função de estado limite hiperesférica está associada com o espaço bi-dimensional:  $g_2(\mathbf{U}) = -u_1^2 - u_2^2 + R^2 = 0$ ). O domínio  $\Omega$  é dividido igualmente em 4 subdomínios que correspondem a 4 arcos iguais (segmentos da hiperesfera) da função de estado limite.

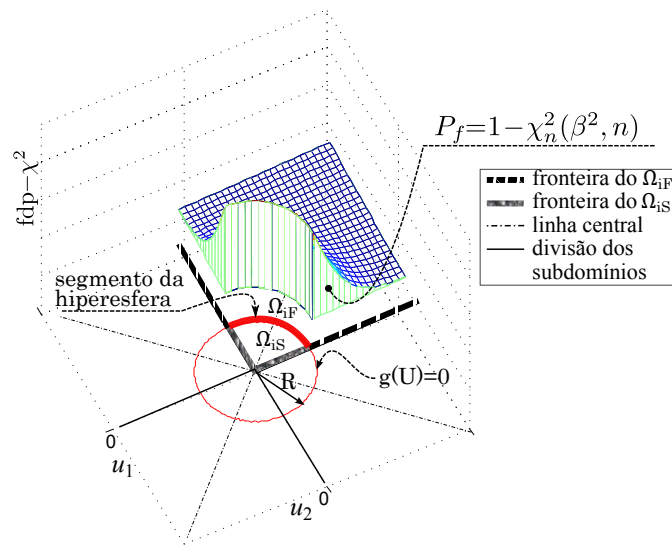


Figura 6.2 – Subdomínio de falha da função de estado limite  $u_1^2 + u_2^2 = R^2$ .

Uma vez que todos os subdomínios dentro do domínio de falha estão ativos  $m_a = m$ , bem como todos os subdomínios dentro do domínio de segurança também estão ativos, ambos são definidos da seguinte forma:

$$\Omega_F = \bigcup_{i=1}^{m_a=m} \Omega_{iF}^a \quad (6.10)$$

$$\Omega_S = \bigcup_{i=1}^{m_a=m} \Omega_{iS}^a \quad (6.11)$$

Então a probabilidade de falha associada com cada subdomínio  $\Omega_{iF}$ , é dada por:

$$P_{fi} = [1 - \chi_n^2(R^2)]/m; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.12)$$

sendo que, para este caso, a dimensão do problema é  $n = 2$ , e o número de subdomínios é  $m = 4$ . É importante salientar que existem várias interpretações para  $m$ , tais como,

número de direções de amostragem nos métodos de simulação direcional, número de subdomínios no HDM, entre outros. Visto que a  $P_{fi}$  é a mesma para todos os subdomínios de falha  $\Omega_{iF}$ , a probabilidade de falha total para a função de estado limite circular de raio  $R$  é obtida por:

$$P_f \approx \sum_{i=1}^m P_{fi} \quad (6.13)$$

Na maioria dos problemas de confiabilidade envolvendo casos reais, a função de estado limite não é uma hipersfera, mas um tipo de hipersuperfície similar a aproximação apresentada na Figura 6.3. A hipersuperfície é aproximada por uma série de segmentos hiperesféricos. Cada segmento possui seu ponto central ( $Q_i$ ) situado na intersecção entre o vetor direção unitário ( $\mathbf{e}_i$ ) com a função de estado limite corrente. A probabilidade de falha para um dado subdomínio  $\Omega_{iF}$  é aproximada pela equação:

$$P_{fi} = [1 - \chi_n^2(R_i^2)]/m \quad (6.14)$$

onde  $R_i$  corresponde ao raio do segmento hiperesférico do subdomínio  $i$ . Sendo assim, conforme Figura 6.3, a probabilidade de falha total  $P_f$ , e o índice de confiabilidade ( $\beta$ ), são obtidos pelas seguintes equações, respectivamente:

$$P_f \approx \sum_{i=1}^m P_{fi} = \sum_{i=1}^m [1 - \chi_n^2(R_i^2)]/m \quad (6.15)$$

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad (6.16)$$

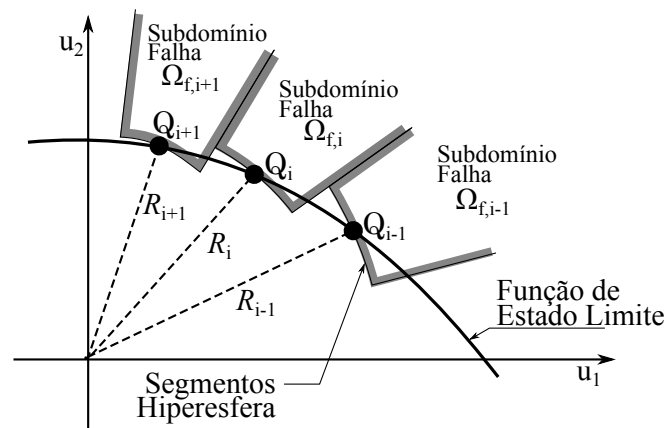


Figura 6.3 – Função de estado limite e sua aproximação por segmentos hiperesféricos.

Adaptado de Katsuki e Frangopol, 1994.

### 6.3 HDM Modificado

Na seção anterior, foram descritas as etapas fundamentais do HDM proposto por Katsuki e Frangopol, 1994. As deduções revelaram as potencialidades do método em lidar com problemas envolvendo funções de estado limite não lineares, característica desejada neste trabalho. Além disso, observa-se a possibilidade de ampliar sua gama de aplicações. Neste sentido, a contribuição deste trabalho, quanto ao método probabilístico, consiste numa adaptação do HDM original permitindo-o lidar com problemas envolvendo múltiplas funções de estado limite.

O procedimento fundamental entre o método probabilístico proposto, nomeado HDM modificado, e o HDM original, é o mesmo; entretanto, são desenvolvidas ferramentas diferentes para identificar as raízes das funções de estado limite, as quais permitirão ao método lidar com funções de estado limite descontínuas. Além disso, novas etapas são acrescentadas ao HDM original a fim de obter a solução de problemas probabilísticos cujos eventos de falha devam ser identificados individualmente. Sendo assim, com esta adaptação do HDM original, pretende-se que o HDM modificado consiga contabilizar os modos de falha última e de serviço, assim como suas respectivas probabilidades de falha.

A ideia chave do HDM modificado pode ser resumidamente dividida nas seguintes etapas:

- a) Geração de pontos aleatórios uniformemente distribuídos na superfície de uma hipersfera unitária;
- b) Identificação das raízes da função de estado limite;
- c) Procedimento adotado para calcular a  $P_f$  associada ao Chi-quadrado;
- d) Contribuição das frações de  $P_f$  na probabilidade de falha total;
- e) Identificação dos múltiplos modos de falha;

Tais etapas descrevem sucintamente o método desenvolvido neste trabalho, as quais são detalhadas nas subseções seguintes.

#### 6.3.1 Geração de Pontos Uniformemente Distribuídos

Gerar uma distribuição aleatória de múltiplos pontos sob a superfície de um espaço  $n$ -dimensional, se resume em distribuir  $n$ -pontos aleatoriamente assegurando que a

distância em linha reta entre eles seja aproximadamente a mesma. Para isso, normalmente parte-se do mesmo princípio. Princípio este que geralmente é atribuído ao físico Thomson, 1904, o qual ao determinar a mínima energia potencial eletrostática de  $n$ -elétrons sob a superfície de uma esfera unitária, propôs um modelo atômico chamado *Plum Pudding Model*, baseando-se na existência de elétrons carregados negativamente que se repelem a uma dada força.

Seguindo o modelo proposto por Thomson, 1904, e estendido por Marsaglia, 1972, no qual  $n$ -pontos são igualmente distribuídos sob a superfície de uma hipersfera, um processo iterativo é apresentado. O algoritmo se resume em:

- geração aleatória de  $n$ -pontos sobre a superfície de uma hipersfera de raio unitário;
- calcula as coordenadas de cada ponto;
- calcula a distância Euclidiana de cada ponto para com seus vizinhos ( $r_{m_i}^{\vec{}}$ ) no espaço  $n$ -dimensional;
- calcula a força repulsiva ( $\vec{f}_i$ ) de cada ponto em relação aos seus vizinhos.

A força repulsiva permite atualizar as coordenadas direcionais (com um incremento de distância  $s$ , tal que  $s$  varia de 0.0 a 1.0) do vetor  $\vec{f}_i$  indicando a direção de atualização da posição do ponto (isto é,  $\vec{f}_i$  pode ser interpretado como um movimento do ponto). Após o movimento do ponto, suas coordenadas são projetadas novamente para a superfície da hipersfera de raio unitário. O processo é iterativo e é interrompido quando as forças estão em equilíbrio, isto é, quando a força repulsiva não tem magnitude suficiente para mover o ponto.

A Figura 6.4a apresenta as etapas do método e uma representação geométrica da atualização dos pontos sob uma superfície tridimensional (Figura 6.4b).

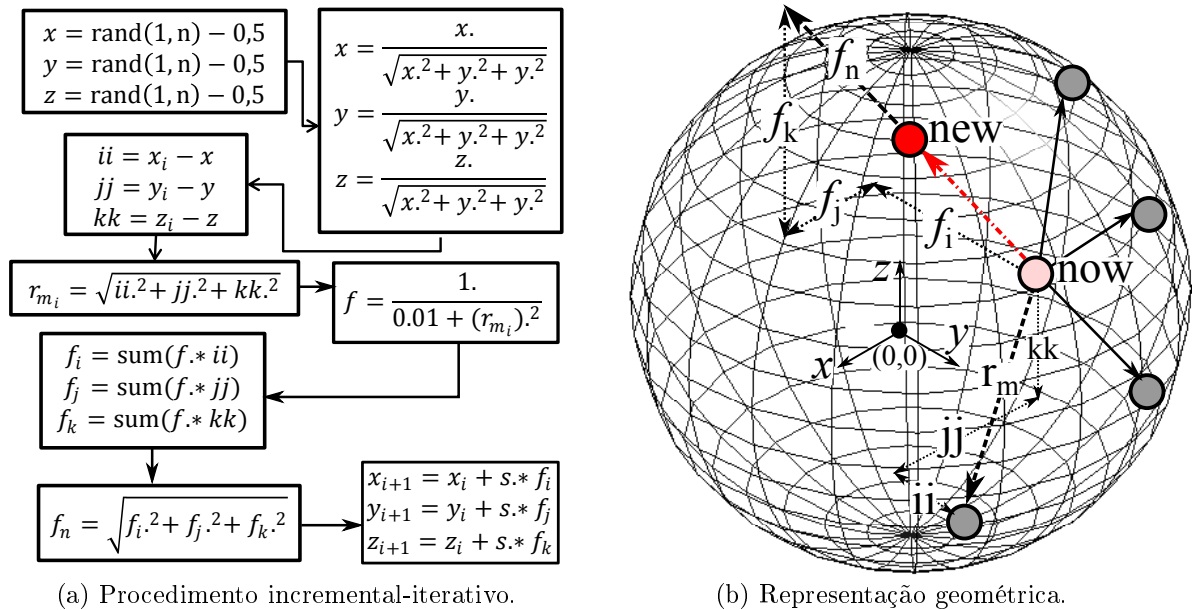


Figura 6.4 – Fluxograma do procedimento incremental-iterativo e representação geométrica da atualização dos pontos.

### 6.3.2 Identificação das Raízes da Função de Estado Limite

As coordenadas polares das posições equidistantes, indicam as direções pelas quais realiza-se a procura pelas raízes da função de estado limite, ou seja, para uma dada posição, seu vetor de coordenadas polares fornece a direção na qual deve ser realizada uma busca unidirecional pelo ponto de intersecção  $Q_i$  entre a respectiva direção e a função de estado limite (ou seja, a raiz da função). A procura pelas raízes da função de estado limite pode ser feita por meio de um método simples, tal como o método da bissecção.

O método da bissecção consiste em realizar uma busca incremental, diminuindo o intervalo  $[a,b]$  através de repetidas divisões ao meio do intervalo de tal forma que o valor de  $x_a$  tenda ao valor de  $x_b$ . Após cada subdivisão, aplicam-se os critérios que caracterizam este método: se a função muda de sinal em um intervalo, calcula-se o seu ponto médio. A posição da raiz é determinada como sendo este ponto médio dentro do subintervalo no qual a mudança de sinal ocorreu. Este processo é repetido até que a raiz da função seja aproximadamente nula dentro de uma certa tolerância. Na Figura 6.5, é apresentada uma análise gráfica do método, onde  $\xi$  representa a raiz de uma função contínua num intervalo  $[a,b]$ .

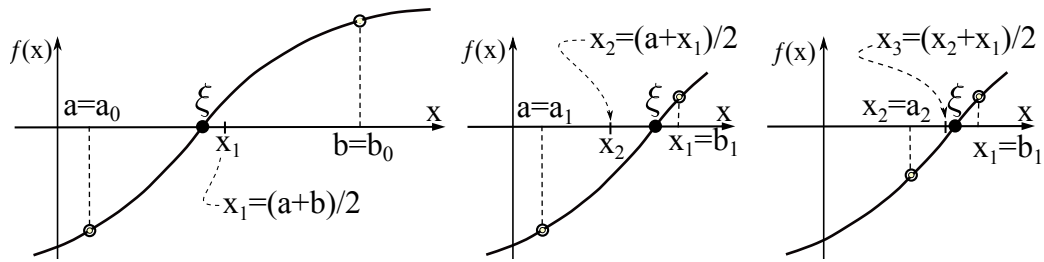


Figura 6.5 – Método da bissecção: análise gráfica.

Ao contexto da presente proposta, a função contínua no intervalo  $[a, b]$  da Figura 6.5, corresponde a função de estado limite do problema de confiabilidade, e o eixo  $x$  pode ser associado ao vetor direção unitário  $\mathbf{e}_i$ . A raiz  $\xi$  representa o ponto de intersecção  $Q_i$  entre a função de estado limite e a direção  $\mathbf{e}_i$ . Sabendo que o método da bissecção permite encontrar apenas uma raiz dentro de um dado intervalo, algumas considerações deverão ser feitas para estendê-lo aos casos de interesse, tais como: funções estado limite com múltiplas raízes (Figura 6.6a); problemas envolvendo múltiplas funções estado limite (Figura 6.6b), isto é, problemas com múltiplos modos de falha.

Normalmente os métodos desenvolvidos para calcular a probabilidade de falha lidam com problemas cuja falha corresponde a uma região localizada ao extremo da função densidade de probabilidade acumulada, entretanto, podem existir problemas onde as regiões de falha estão localizadas internamente à função densidade de probabilidade, como pode ser visualizado na Figura 6.6a. Estas regiões de falha, ao contexto da metodologia apresentada, são definidas como subdomínios de falha  $\Omega_{iF}$ , os quais denunciam a existência de múltiplas raízes para uma única função de estado limite.

Problemas reais de confiabilidade estrutural geralmente são formados por um conjunto de funções estado limite, cada qual apresentando uma ou mais raízes. Estas características impedem que o método da bissecção seja executado num intervalo que envolva o comprimento total de uma dada direção  $\mathbf{e}_i$ , pois sabe-se que o método da bissecção detecta apenas uma raiz para um dado intervalo, mesmo que neste intervalo existam várias raízes. A alternativa encontrada para satisfazer esta condição é sintetizada nas etapas a seguir:

- a) Cada vetor direção unitário  $\mathbf{e}_i$  de comprimento  $\beta_{max}$  é dividido em  $k$  subintervalos iguais tais como  $\Delta\beta = \beta_{max}/k$ ;
- b) O método da bissecção é executado conforme o detalhe apresentado na Figura 6.6a

para cada subintervalo  $\Delta\beta$ . Os limites inferior e superior do  $\Delta\beta$  para uma dada direção  $i$  são, respectivamente,  $x_i^j$  e  $x_i^{j+1}$ , tal que:  $j = 1, 2, \dots, k$ ;

- c) Após a convergência do método da bisseção em um dado  $\Delta\beta$  (isto é  $[x_i^j, x_i^{j+1}]$ ), o método é executado no subintervalo seguinte ( $[x_i^{j+1}, x_i^{j+2}]$ ) da direção corrente  $\mathbf{e}_i$ . Se a raiz for encontrada, as coordenadas polares desta posição são guardadas, as quais correspondem ao ponto  $Q_i$ . O processo é repetido até que todos os subintervalos tenham sido avaliados, ou seja,  $[x_i^{k-j}, x_i^k]$ ;
- d) Uma vez executado o método ao longo de toda a extensão da direção  $\mathbf{e}_i$ , verifica-se a seguinte condição: dada a existência de alguma raiz, o processo é repetido na direção corrente  $\mathbf{e}_i$ ; caso contrário, o processo é executado na direção  $\mathbf{e}_{i+1}$ . Em caso de reinicialização na mesma direção  $\mathbf{e}_i$ , as funções estado limite já interceptadas na direção corrente são desativadas, assim, o método deverá procurar pela(s) raiz (ou raízes) de outra função de estado limite. Deve-se salientar que apenas uma função de estado limite está ativa durante um determinado processo de busca numa dada direção  $\mathbf{e}_i$  (Figura 6.6b);
- e) O processo é repetido para uma dada direção  $\mathbf{e}_i$  até que todas as raízes existentes nesta direção sejam encontradas. Satisfeita esta condição, o método passa a ser executado na direção  $\mathbf{e}_{i+1}$ .
- f) A procura pelas raízes da função de estado limite é realizada para todas as direções  $\mathbf{e}_i$ , tal que:  $i = 1, 2, \dots, m$ .

A técnica desenvolvida para detectar as raízes em uma determinada direção  $\mathbf{e}_i$ , considerando uma função com múltiplas regiões de falha é ilustrada na Figura 6.6a. Já a Figura 6.6b apresenta como o método detecta as raízes de um problema contendo múltiplas funções estado limite (cada qual contendo apenas uma região de falha).



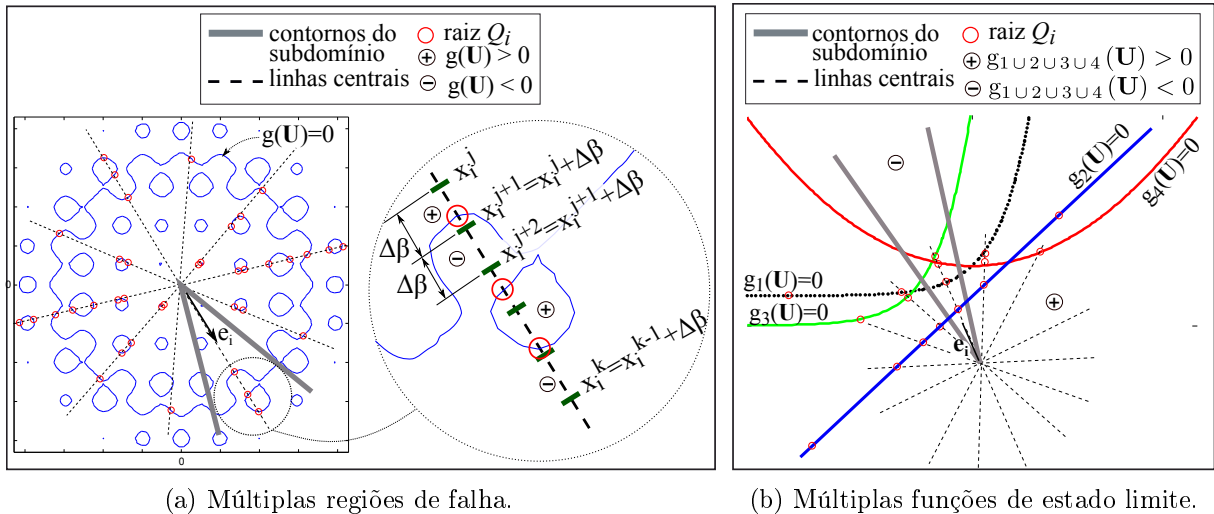


Figura 6.6 – Representação gráfica da identificação das raízes.

### 6.3.3 Procedimento Adotado para Calcular a $P_f$ Associada ao Chi-quadrado

Conforme afirmado anteriormente, a probabilidade de falha de sistemas reais geralmente envolvem múltiplas funções de estado limite (tal como o problema apresentado na Figura 6.6b). A probabilidade de falha de uma dada função de estado limite num determinado subdomínio pelo método Chi-quadrado, segue os preceitos discutidos no Capítulo 2.4.

A  $P_f$  para uma função densidade de probabilidade acumulada Chi-quadrado (fdp- $\chi^2$ ) considerando duas variáveis aleatórias, corresponde ao volume da fdp- $\chi^2$  fora de uma função de estado limite circular (ver Figura 2.4b). Essa premissa é aplicada na Equação 6.14, a qual pode ser reescrita para o presente caso da seguinte forma:

$$P_{f(i,n_{fel})} = [1 - \chi_n^2(R_{(i,n_{fel})}^2)]/m \quad (6.17)$$

onde  $P_{f(i,n_{fel})}$  corresponde a probabilidade de falha do subdomínio  $\Omega_i$  (direção  $\mathbf{e}_i$ ) para uma dada função de estado limite  $n_{fel}$ , onde  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $n_{fel} = 1, 2, \dots, N_{total\ fel}$ .

A técnica desenvolvida para satisfazer a Equação 6.17 consiste nas etapas listadas abaixo. Por motivos de simplificação da descrição do método, considera-se o problema apresentado na Figura 6.7, onde os pontos  $Q_{(i,n_p)}$  foram previamente identificados.

- Define-se o raio do segmento da hipersfera  $R_{(i,n_{fel})}^2$ , o qual corresponde a distância da origem do espaço normal padrão reduzido  $(0,0)$  ao ponto  $Q_{(i,n_p)}$ , onde  $n_p =$

$1, 2, \dots, N_p$ . Sendo  $n_p$  o número do ponto corrente e  $N_p$  o número total de pontos encontrados numa dada direção  $i$ .

- b) A aproximação da  $P_{f(i,n_{fel})}$  para um dado subdomínio de falha  $\Omega_{iF}$ , corresponde ao volume abaixo da fdp- $\chi^2$ , entre as fronteiras do setor correspondente a direção  $\mathbf{e}_i$ , e fora do segmento da hiperesfera. Essa ideia pode ser melhor compreendida pela Figura 6.8.

Referindo-se ao problema representado pela Figura 6.6b, no qual o espaço bidimensional é dividido igualmente em 14 setores (isto é:  $n = 2$  e  $m = 14$ ), a  $P_{f(i,n_{fel})}$  para cada um dos subdomínios pertencentes a direção  $\mathbf{e}_i$ , é apresentada na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Probabilidade de falha associada ao  $\chi^2$ .

Subdomínio de Falha	Probabilidade de Falha
$\Omega_{i1F}$	$P_{f(i1)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i2}^2)]/m\}$
$\Omega_{i2F}$	$P_{f(i2)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i1}^2)]/m\}$
$\Omega_{i3F}$	$P_{f(i3)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i4}^2)]/m\}$
$\Omega_{i4F}$	$P_{f(i4)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i3}^2)]/m\}$

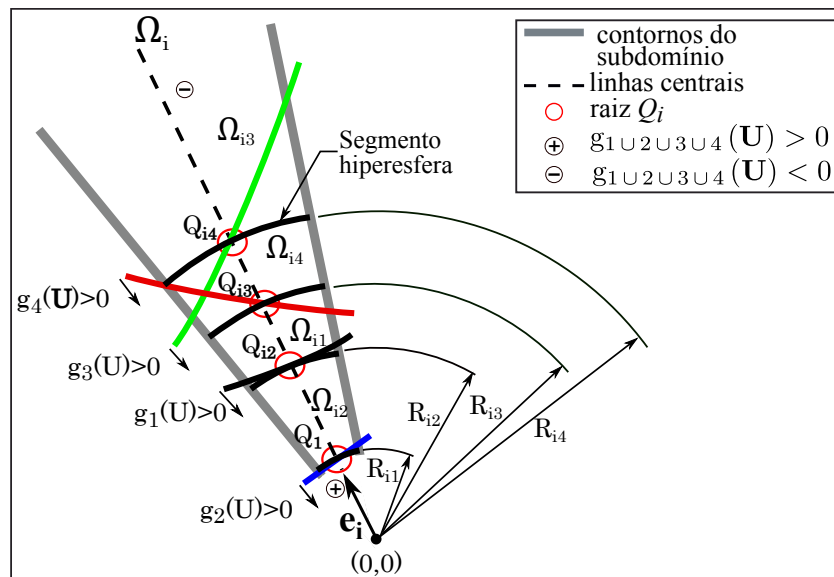


Figura 6.7 – Subdomínio  $\Omega_i$  do problema apresentado na Figura 6.6b.

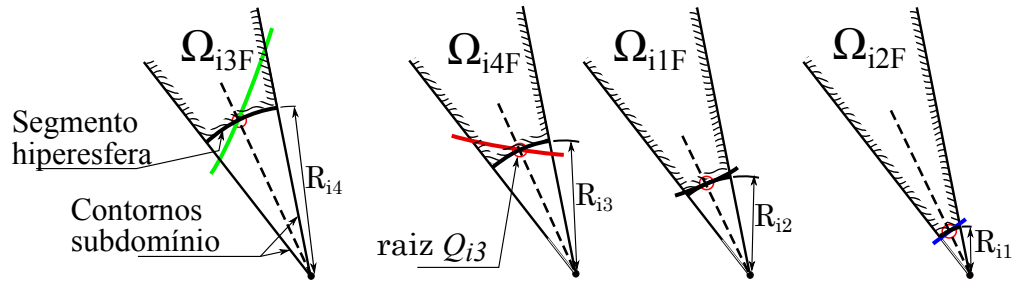


Figura 6.8 – Subdomínio  $\Omega_i$  do problema apresentado na Figura 6.6b.

### 6.3.4 Contribuição das Frações de $P_f$ na Probabilidade de Falha Total

No Capítulo 2.7 foi descrito que a probabilidade de falha para um problema que envolva múltiplos modos de falha, é conceitualmente definida como a probabilidade de falha total do sistema  $P_{f|\text{Sistema}}$ , a qual objetiva calcular a probabilidade de que o evento falha total do sistema possa ocorrer. Segundo a Equação 2.19, um sistema mecânico pode ser enquadrado em três categorias a saber: sistemas em série, sistemas em paralelo e sistemas híbridos.

Nesse contexto, referindo-se a Figura 6.6b, a probabilidade de falha (dado que o problema seja caracterizado como um sistema em série ou em paralelo) pode ser atribuída a dois casos extremos de falha, os quais são associados à mínima e máxima distância da função estado de limite com relação a origem  $(0,0)$ , ou seja:

$$P_{f|\text{Série}} = \sum_i^m [1 - \chi_n^2(R_i)^2]/m \quad | R_i = \min[R_{ik}] \quad (6.18)$$

$$P_{f|\text{Paralelo}} = \sum_i^m [1 - \chi_n^2(R_i)^2]/m \quad | R_i = \max[R_{ik}] \quad (6.19)$$

onde,  $P_{f|\text{Série}}$  e  $P_{f|\text{Paralelo}}$  são as probabilidades de falha em série e em paralelo, respectivamente. Para casos gerais,  $R_{ik}$  corresponde a distância entre a origem e a  $k$ -ésima função de estado limite pertencente ao  $i$ -ésimo setor, onde  $k = 1, \dots, n_{fel}$ .

Considera-se agora que as funções de estado limite apresentadas na Figura 6.6b, representem os estados limites de quatro componentes pertencentes a um sistema redundante. Conforme descrito nas seções anteriores, a falha de sistemas redundantes normalmente é acompanhada por uma sequência de falhas individuais que descrevem diversos modos de falhas. Este comportamento é característico de sistemas híbridos, nos quais a falha de apenas um componente nem sempre provoca o colapso do total do sistema. Para

calcular a probabilidade de falha de sistemas híbridos, é necessário estimar a contribuição da probabilidade de falha pertencente a cada componente do sistema. Neste sentido, uma das contribuições deste trabalho consiste em adaptar o HDM original a fim de atender ao propósito supracitado, a qual reside na seguinte ideia:

- posto que a  $P_f$  para uma determinada função de estado limite é determinada pela sua distância com relação à origem  $|\mathbf{U}|$ , a função de estado limite mais próxima da origem é a que mais contribui para a probabilidade de falha total do sistema; sendo assim, o volume da função de estado limite mais próxima da origem, ao longo da direção  $\mathbf{e}_i$ , é subtraído do volume da segunda função de estado limite mais distante da origem. Esta sequência é aplicada para todas as funções de estado limites ao longo da direção  $\mathbf{e}_i$ , e está esquematicamente apresentada na Figura 6.9.

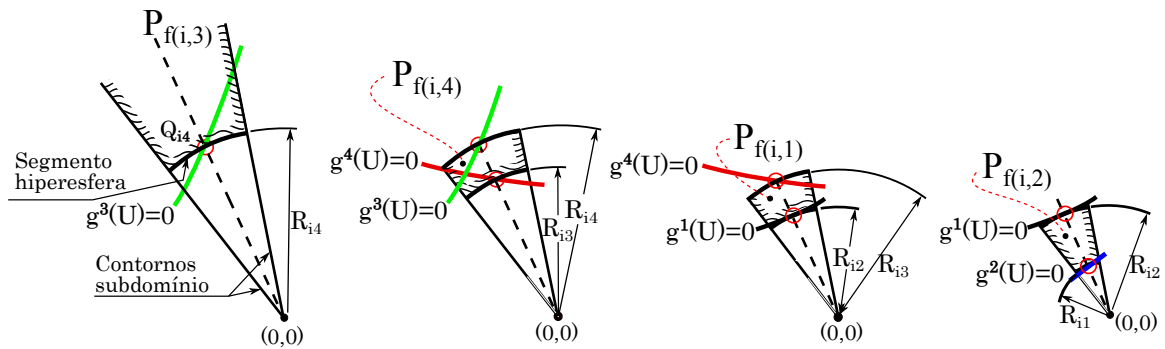


Figura 6.9 – Cálculo das frações de  $P_f$  pertencentes ao  $i$ -ésimo setor (Figura 6.8).

A Tabela 6.2 apresenta a formulação desenvolvida para estimar as frações de probabilidades de falha pertencentes ao  $i$ -ésimo setor.

Tabela 6.2 – Equações para as frações de  $P_f$  pertencentes ao  $i$ -ésimo setor (Figura 6.9).

Classificação quanto ao Sistema	Formulação
Paralelo	$P_{f(i3)} = [1 - \chi_n^2(R_{i4}^2)]/m$
Série	$P_{f(i2)} = [1 - \chi_n^2(R_{i1}^2)]/m$
Híbrido	$P_{f(i4)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i3}^2)]/m\} - \{[1 - \chi_n^2(R_{i4}^2)]/m\}$
Híbrido	$P_{f(i1)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i2}^2)]/m\} - \{[1 - \chi_n^2(R_{i3}^2)]/m\}$
Híbrido	$P_{f(i2)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i1}^2)]/m\} - \{[1 - \chi_n^2(R_{i2}^2)]/m\}$

### 6.3.5 Identificação dos Múltiplos Modos de Falha

A técnica proposta nas subseções anterior, permite identificar as frações de  $P_f$ , em ordem decrescente. Visando contabilizar os múltiplos modos de falha, o passo seguinte consiste em realizar uma combinação das sequências de falha, mantendo a ordem decrescente de sua probabilidade. Sendo assim, pode-se dizer que a sequência de um dado modo de falha segue a ordem de relevância dos elementos pertencentes ao sistema estrutural. Em seguida, os modos de falhas são guardados e a frequência em que eles ocorrem é então contabilizada. A primeira coluna da Tabela 6.3 apresenta os múltiplos modos de falha e respectivas sequências de falha, presentes no  $i$ -ésimo setor. Já na segunda coluna, estão deduzidas as equações correspondentes a estes modos de falha.

Tabela 6.3 – Múltiplos modos de falha pertencentes ao  $i$ -ésimo setor (Figura 6.6b).

Modos de Falhas	Formulação Proposta
2	$P_{f(i2)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i1}^2)]/m\} - \{[1 - \chi_n^2(R_{i2}^2)]/m\}$
2 → 1	$P_{f(i1)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i2}^2)]/m\} - \{[1 - \chi_n^2(R_{i3}^2)]/m\}$
2 → 1 → 4	$P_{f(i4)} = \{[1 - \chi_n^2(R_{i3}^2)]/m\} - \{[1 - \chi_n^2(R_{i4}^2)]/m\}$
2 → 1 → 4 → 3	$P_{f(i3)} = [1 - \chi_n^2(R_{i4}^2)]/m$

Um sistema mecânico é qualquer combinação de elementos individuais a fim de desempenhar uma determinada função mecânica. Para o propósito deste estudo, os sistemas estruturais mecânicos poderão ser enquadrados numa das três categorias descritas anteriormente: sistema em série, sistema em paralelo, ou sistema híbrido. Neste sentido, qualquer combinação de elementos ou sequência de falhas que resulte na falha total do sistema é denominado modo de falha última. De outra forma, dependendo da combinação de elementos falhos, o modo de falha pode representar apenas uma falha de serviço, a qual permite que o elemento falho seja substituído ou reparado, de modo que a sistema permaneça estável e ainda funcional<sup>1</sup>. Atendendo a premissa supracitada, supõe-se que a falha última do problema apresentado na Figura 6.6a ocorra após a falha de um terceiro elemento. Sob essa hipótese, a Tabela 6.4 demonstra os modos de falha última e serviço para o  $i$ -ésimo setor.

<sup>1</sup>Uma vez atingido o modo de falha de serviço, o sistema estará mais suscetível a atingir um modo de falha última.

Tabela 6.4 – Modos de falha obtidos &amp; Formulação proposta.

Modos de Falha	HDM Modificado	
	Confiabilidade $\beta$	Probabilidade Falha
<b>Modos de Falha Última</b>		
2 → 1 → 4 → 3	$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_{f(i3)})$	$P_{f(i3)}$
2 → 1 → 4	$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_{f(i,4)})$	$P_{f(i4)}$
<b>Modos de Falha Serviço</b>		
2	$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_{f(i2)})$	$P_{f(i2)}$
2 → 1	$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_{f(i1)})$	$P_{f(i1)}$
$P_{f Sistema}$	$\beta = \Phi^{-1}(1 - (P_{f(i3)} + P_{f(i4)}))$	$P_{f(i3)} + P_{f(i4)}$

## 6.4 Restrições do Problema Probabilístico

O propósito desta seção é apresentar o procedimento adotado para equacionar as funções de estado limite que compõem as restrições probabilísticas.

Visto que, para calcular a confiabilidade faz-se necessário identificar os modos de falha existentes, deve-se definir quais os estados limites que melhor representam o comportamento destes modos, isto é, se um modo de falha de serviço é dado por um deslocamento limite no topo de uma torre, é fundamental que a função de estado limite utilizada seja condizente ao fenômeno físico observado quando o modo de falha for ativado. Sendo assim, a seguir, serão apresentadas as funções de estado limite propostas neste trabalho, e ao final da seção, a treliça de plana de 10 barras será utilizado para demonstrar as potencialidades da formulação empregada.

### 6.4.1 Formulação das Funções de Estado Limite

Grande parte dos métodos probabilísticos descrevem a função de estado limite relacionando a tensão admissível do material com a tensão devido às forças internas atuantes no elemento. Tal condição pode ser aplicada ao considerar análises do tipo linear/não linear geométrica, ou para casos onde o modo de falha esteja associado à falha de apenas um elemento. Entretanto, os efeitos gerados pela não linearidade física às tensões atuantes no elemento, dificultam sua aplicação como restrição probabilística. Para melhor compreensão do exposto neste parágrafo, dois gráficos tensão  $\times$  deformação, são reapresentados agora para demonstrar a influência da tensão sob a Equação 6.20, a qual representa uma função de estado limite muito utilizada na literatura.

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = 1 - \frac{|[\sigma]_j^i|}{[\sigma_o]_j^i}, \quad j = 1, \dots, n_{el}, \quad (6.20)$$

onde  $[\sigma]_j^i$  corresponde a tensão axial atuante no  $j$ -ésimo elemento pertencente ao  $i$ -ésimo modo de falha.  $[\sigma_o]_j^i$  é definida como a tensão admissível do material, referindo-se a tensão de escoamento ou tensão crítica de flambagem.

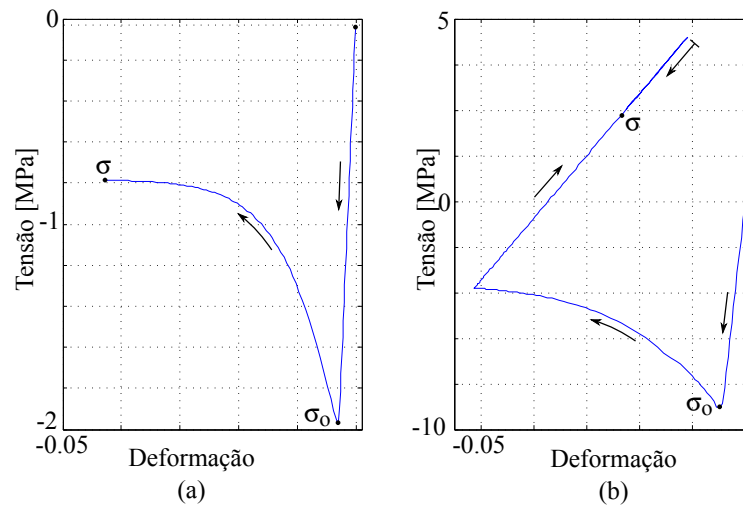


Figura 6.10 – Diagramas tensão  $\times$  deformação de dois elementos pertencentes a uma estrutura hiperestática típica.

Sabendo que a treliça de 10 barras é uma estrutura hiperestática (Exemplo 4 da seção 5), o primeiro elemento que sofrer a falha e não provocar a instabilidade do sistema, continuará recebendo carga e sua tensão se comportará segundo o modelo constitutivo pós-falha adotado. Este fenômeno está representado na Figura 6.10a para o elemento 8 da treliça de 10 barras, onde é possível verificar que o modelo pós-flambagem do material corrige a tensão atuante para um valor exponencialmente menor que a tensão crítica no instante da falha. Desta forma, a função de estado limite dada pela Equação 6.20 estaria indicando que os valores atribuídos às variáveis de projeto estariam pertencendo ao domínio de segurança, o que de fato não procede. A Figura 6.10b apresenta outra situação onde a falha do elemento estaria sendo negligenciada pela aplicação da Equação 6.20, uma vez que a tensão atuante no elemento ao final da análise encontra-se na região elástica.

Para melhor representar a restrição probabilística quanto à resistência do material em regime pré e pós-falha, será proposta uma formulação para a função de estado limite em termos de deformação.

Na seção 5.2, foram apresentadas as equações e fundamentos teóricos necessário para implementar um processo incremental iterativo, diga-se algoritmo do retorno, o qual permite quantificar o nível de deformação total e/ou plástica que surge como resultado da aplicação de um ciclo completo de carga e descarga. Agora, em posse destas informações, pretende-se formular as função de estado limite sob três aspectos, os quais podem ser interpretadas com auxílio da Figura 6.11:

- i. Deformação elastoplástica resultante dos efeitos pré e pós-falha associados à tensão admissível do material ( $\sigma_o$ ) - Figuras 6.11a e 6.11b;
- ii. Deformação elastoplástica resultante dos efeitos pré e pós-flambagem associados à tensão crítica de Euler ( $\sigma_{cr}$ ) - Figura 6.11c;
- iii. Combinação de efeitos: compressão – resultando em falha por escoamento  $\sigma_o$  ou flambagem  $\sigma_{cr}$  –, seguida por tração - Figura 6.11d com 6.11a ou 6.11d com 6.11b.

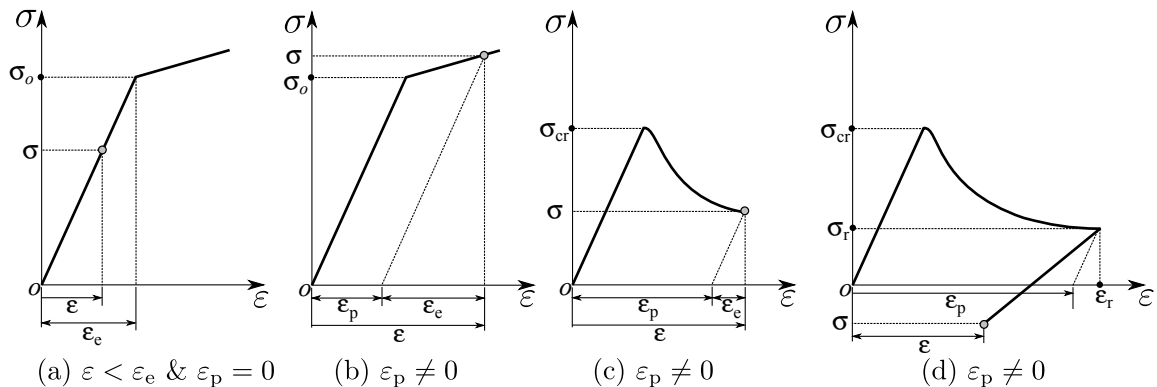


Figura 6.11 – Diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  para demonstrar as considerações quanto às restrições probabilísticas.

Sendo assim, aplicando as respectivas hipóteses, as restrições probabilísticas quanto à resistência do material, são definidas neste trabalho em termos das seguintes funções de estado limite:

- PARA  $\varepsilon < \varepsilon_e$  &  $\varepsilon_p = 0$ , a  $j$ -ésima função de estado limite pertencente ao  $i$ -ésimo domínio de segurança devido a deformação elástica, é denotada por:

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = \frac{[\varepsilon_e]_j^i - [\varepsilon]_j^i}{[\varepsilon_e]_j^i}, \quad j = 1, \dots, n_{el} \quad (6.21)$$



- PARA  $\varepsilon_p \neq 0$ , a  $j$ -ésima função de estado limite pertencente  $i$ -ésimo modo de falha devido a deformação plástica é:

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = - \left| \frac{[\varepsilon_p]_j^i}{[\varepsilon]_j^i} \right|, \quad j = 1, \dots, n_{el} \quad (6.22)$$

onde  $\varepsilon_e$  e  $\varepsilon_p$  são as deformações elástica e plástica, respectivamente, e  $\varepsilon$  corresponde a deformação no instante em que a análise determinística for finalizada.

Dentre as considerações para dimensionamento de estruturas metálicas, sugeridas pela ABNT-NBR:8800, 2008, e utilizadas por projetistas, o método dos estados-limites é normalmente utilizado como restrição de projeto sob condições usuais referentes aos estados-limites últimos e de serviço. Neste aspecto, as restrições probabilísticas serão abordadas agora ao contexto dos deslocamentos excessivos que não causam danos aos componentes da estrutura, definidos pela ABNT-NBR:8800, 2008, como estado limite de serviço.

Portanto, a  $j$ -ésima função de estado limite pode ser relacionada ao deslocamento do  $k$ -ésimo grau de liberdade, de acordo com a seguinte equação:

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = 1 - \frac{|u^k|}{u_{\max}^k}, \quad j = j + k \mid k = 1, \dots, n_{gl} \quad (6.23)$$

onde  $u_{\max}^k$  é o deslocamento máximo permitido e  $u^k$  o deslocamento nodal do grau de liberdade selecionado. A função de estado limite associada ao deslocamento é aplicada aos  $n$ -graus de liberdade ( $n_{gl}$ ) com restrição de deslocamento máximo.

#### 6.4.2 Exemplos de Estados Limites: Espaço Unidirecional - $g(\mathbf{x}) \times \beta_{\text{equivalente}}$

Procurando explorar a metodologia proposta, a amplitude das funções de estado limite para uma determinada direção será avaliada para o caso da treliça plana de 10 barras. Na seção 5.6.3, foram apresentadas as respostas desta estrutura frente à análises puramente determinísticas, portanto, pretende-se agora verificar quais os efeitos que os comportamentos registrados na Figura 5.21 poderão causar às funções de estado limite do problema probabilístico.

Considerando como restrições probabilísticas as funções de estado limite dadas pelas Equações 6.21, 6.22 e 6.23, onde  $i = 1, \dots, 10$  e  $k = 1, \dots, 4$ ; as Figuras 6.12 e 6.13a apresentam o comportamento destas funções ao longo da direção 63. Para fins de

comparação, a Figura 6.13b demonstra as funções de estado limite obtidas em termos da restrição de tensão - Equação 6.20.

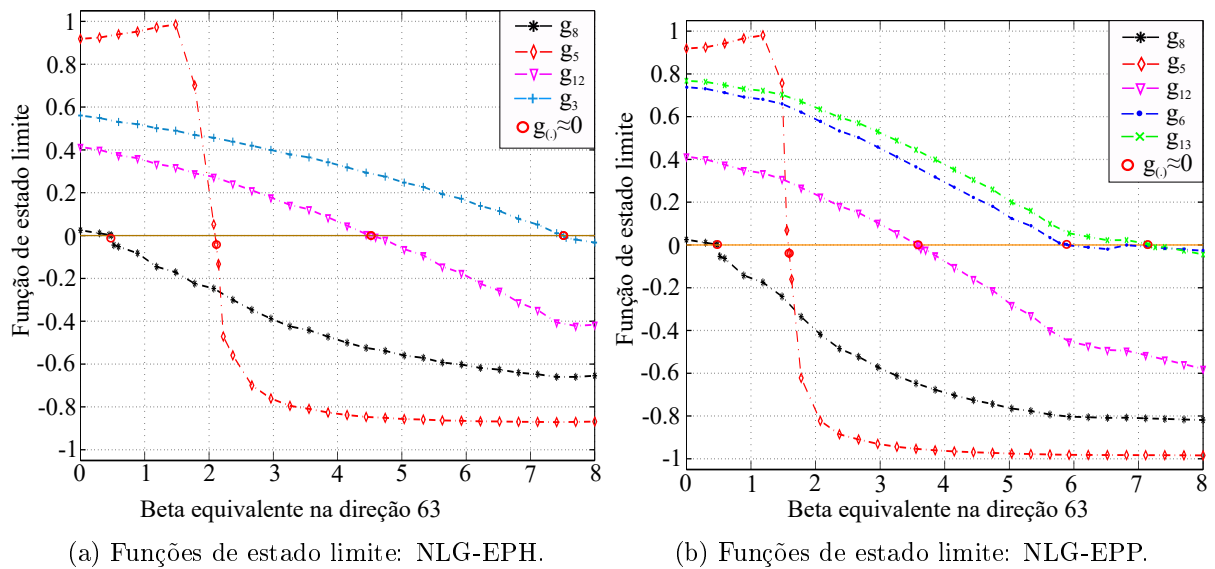


Figura 6.12 – Amplitude das funções de estado limite na direção 63.

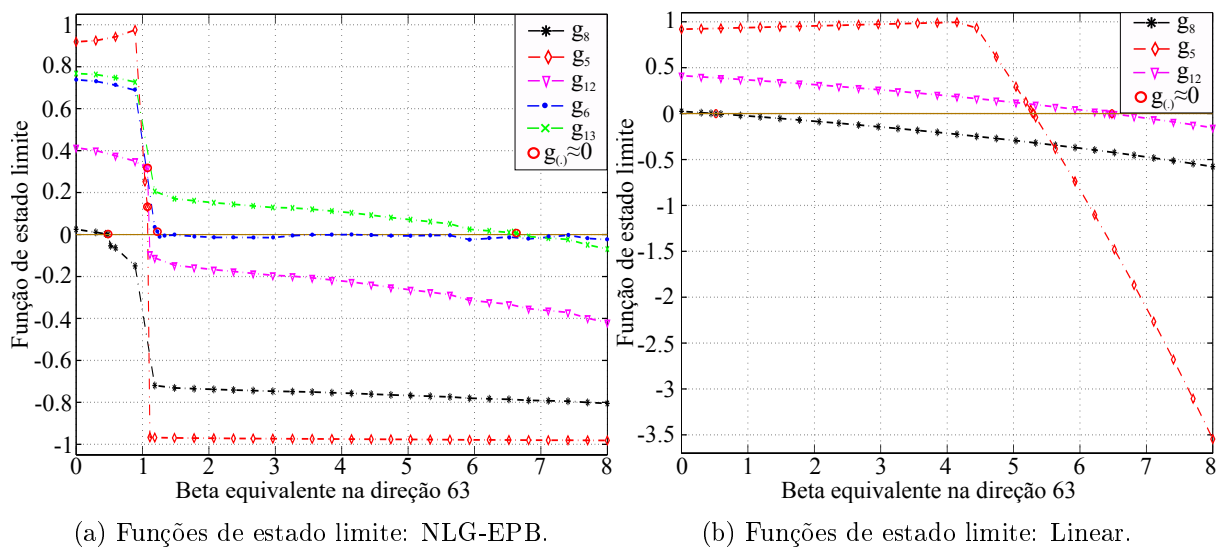


Figura 6.13 – Amplitude das funções de estado limite na direção 63.

As Figuras 6.12 a 6.13a demonstram claramente as consequências causadas pelo modelo constitutivo às funções de estado limite, e por conseguinte, à resposta probabilística do sistema. Tal comportamento pode ser justificado com base nas seguintes observações:

- a. Os diferentes modelos constitutivos de material, por interferirem na rigidez da estrutura, podem influenciar fortemente na resposta do sistema em termos de segurança, ou seja, quanto maior a resistência pós-falha dos elementos, maior a rigidez oferecida ao sistema, resultando em maiores betas equivalentes;
- b. Observa-se que antes de ocorrer a falha da barra 8,  $g_8(\mathbf{x}) > 0$ , o comportamento das funções de estado limite para todos os gráficos é muito semelhante. Portanto, pode-se dizer que em regime pré-falha, o modelo constitutivo de material não altera o domínio de segurança do problema probabilístico.
- c. Na Figura 6.13a verifica-se que após a falha da barra 8,  $g_8(\mathbf{x}) < 0$ , ocorre um significativo aumento no domínio de falha para as demais funções de estado limite,  $g_{5 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 13}(\mathbf{x}) < 0$ . Este comportamento ocorre devido aos efeitos pós-falha causarem um pico na trajetória de equilíbrio durante a análise determinística [Melchers e Tang, 1984], provocando uma redução brusca na amplitude das funções. Matematicamente isto pode ser interpretado como uma descontinuidade da função, desafiando os métodos probabilísticos que necessitam conhecer a forma e localização da função de estado limite. Neste sentido, destaca-se uma das potencialidades do método de procura pelas raízes da função desenvolvido neste trabalho, o qual como pode ser observado na Figura 6.13a, possibilita uma boa estimativa do ponto onde ocorre a inversão no sinal da função;
- d. Na Figura 6.13b, são apresentadas as funções de estado limite obtidas pela aplicação da Equação 6.20. Os efeitos geométricos desta estrutura não influenciam na sua resposta, tanto que as funções de estado limite obtidas com ambas as formulações – NLG e Linear –, são exatamente iguais. Observa-se uma variação suave da função assim como um significativo aumento no domínio de segurança para  $g_5(\mathbf{x}) > 0$  e  $g_{12}(\mathbf{x}) > 0$ . Além disso, apenas três funções de estado limite foram identificadas, provavelmente por terem sido negligenciados os efeitos que o modelo constitutivo do material causariam aos elementos em regime pós-falha.

Maiores detalhes em relação ao comportamento das funções de estado limite no espaço unidirecional serão discutidos na seção 7.2.

### 6.4.3 Exemplos de Estados Limites: Espaço das Variáveis Aleatórias - $X_1 \times X_2$

Com o intuito de continuar explorando o estado limite do sistema devido aos efeitos causados pelas não linearidades, o propósito deste exemplo consiste em demonstrar as consequências que tais efeitos causam à forma e tamanho do domínio de falha para um determinado componente da treliça plana de 10 barras. Para que seja possível demonstrar o domínio estocástico no espaço bidimensional, consideram-se apenas duas variáveis probabilísticas, as quais serão representadas no espaço real (a) e reduzido (b). Os gráficos apresentados nas Figuras 6.14 a 6.16, correspondem ao comportamento da função de estado limite para as variáveis tensão de escoamento e carregamento, com base na Equação 6.23. Já nos gráficos das Figuras 6.17 a 6.18, são consideradas como variáveis probabilísticas as áreas transversais dos banzos e das diagonais, cuja função de estado limite será formulada pelas Equações 6.21 e 6.22.

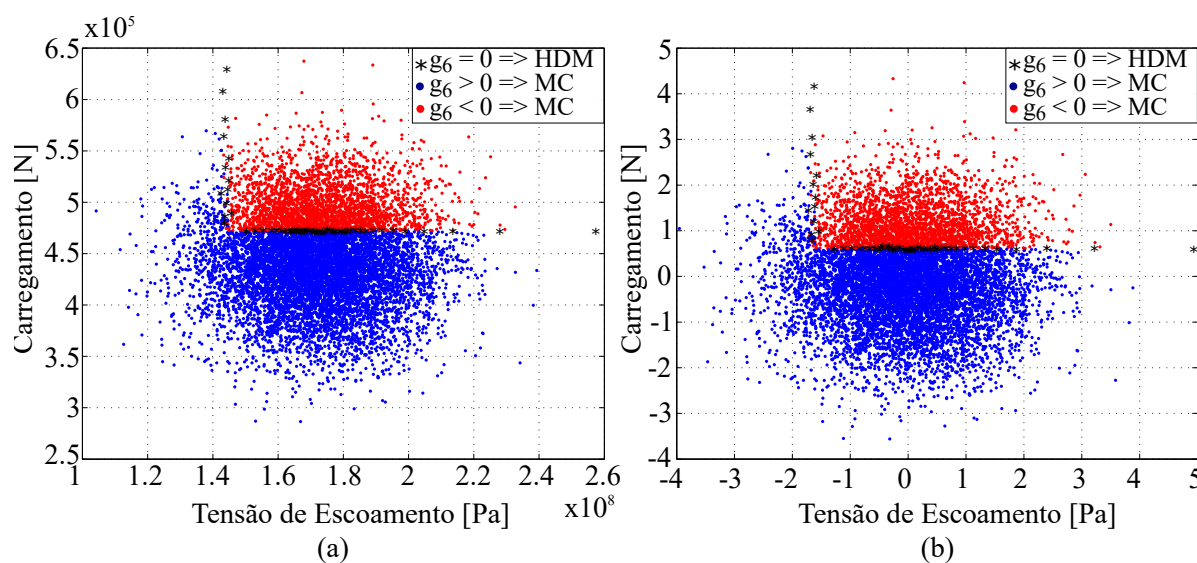


Figura 6.14 – Função de estado limite  $g_5$ : NLG-EPB.

As Figuras 6.14(a) e (b), apresentam os domínios de falha e segurança no sistema de coordenadas real e reduzido, respectivamente. Para este caso, a análise determinística foi realizada considerando os efeitos pós-flambagem. Percebe-se que o estado limite poderia ser representado por duas retas, uma horizontal e outra vertical, separando as regiões. A grosso modo, seria leviano pensar que a região de falha é fácil de ser estimada, pois as superfícies poderiam ser tratadas como retas, passíveis da utilização de métodos como FORM. Entretanto, pode-se observar que a disposição ortogonal destes planos resulta na existência de uma parcela de falha interna ao domínio de segurança, localizada

no lado esquerdo do domínio de falha. Como consequência, o estado limite não permite ser representado apenas por uma superfície horizontal.

No estudo realizado acerca da análise determinística da treliça plana de 10 barras (Figura 5.22), observou-se que os efeitos pós-flambagem reduziram o nível de carregamento suportado pela estrutura. Tal comportamento projetou-se ao problema probabilístico por intermédio das Equações 6.21 a 6.23, as quais resultaram em menores betas equivalentes quando os efeitos pós-flambagem são considerados (Figuras 6.12 e 6.13). Para tornar ainda mais clara as observações supracitadas, na Figura 6.15 é possível verificar uma notável redução no domínio de falha quando considera-se o material como elastoplástico perfeito em comparação com a Figuras 6.14. Na Figura 6.16, o aumento no domínio de segurança é ainda mais expressivo quando assume-se que o material seja elastoplástico com encruamento.

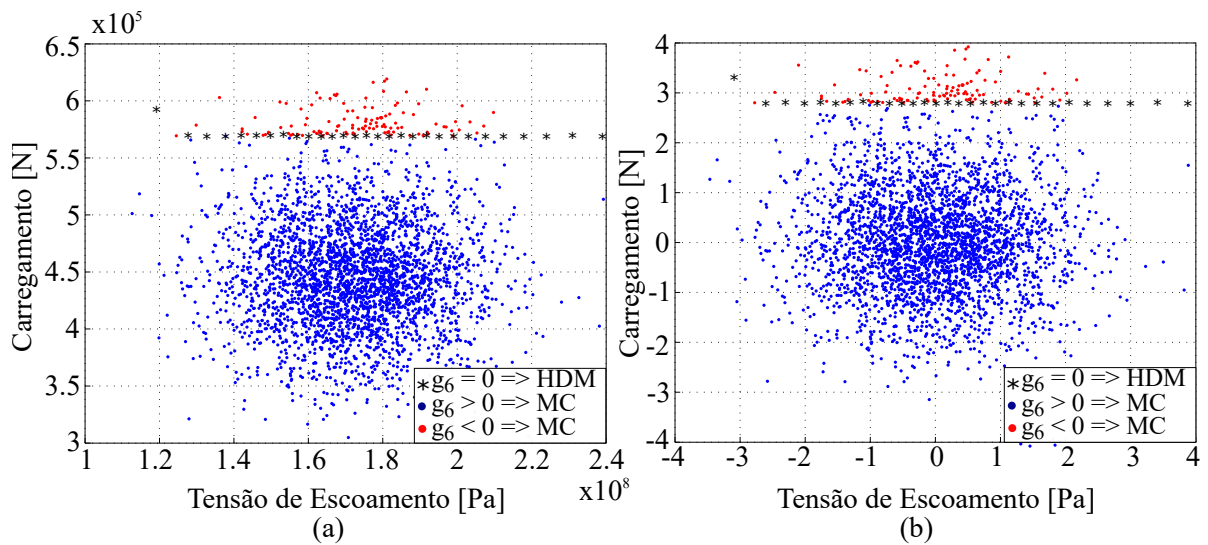


Figura 6.15 – Função de estado limite  $g_5$ : NLG-EPP.

As Figuras 6.17 e 6.18, permitem explorar ainda mais o problema probabilístico, agora considerando como variáveis aleatórias os valores médios para as áreas dos banzos e diagonais.

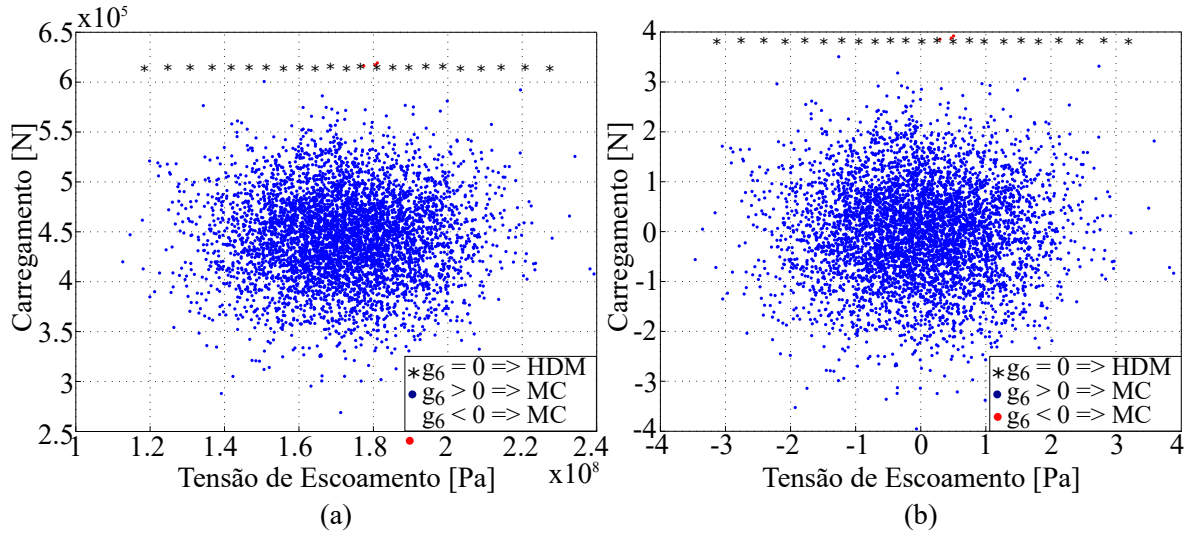


Figura 6.16 – Função de estado limite  $g_5$ : NLG-EPH.

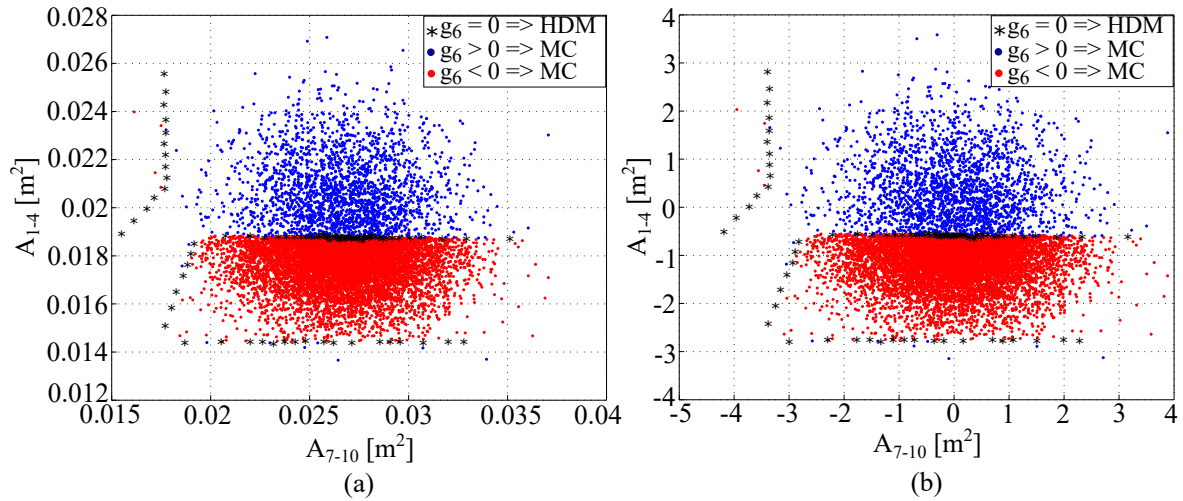


Figura 6.17 – Função de estado limite  $g_6$ : NLG-EPB.

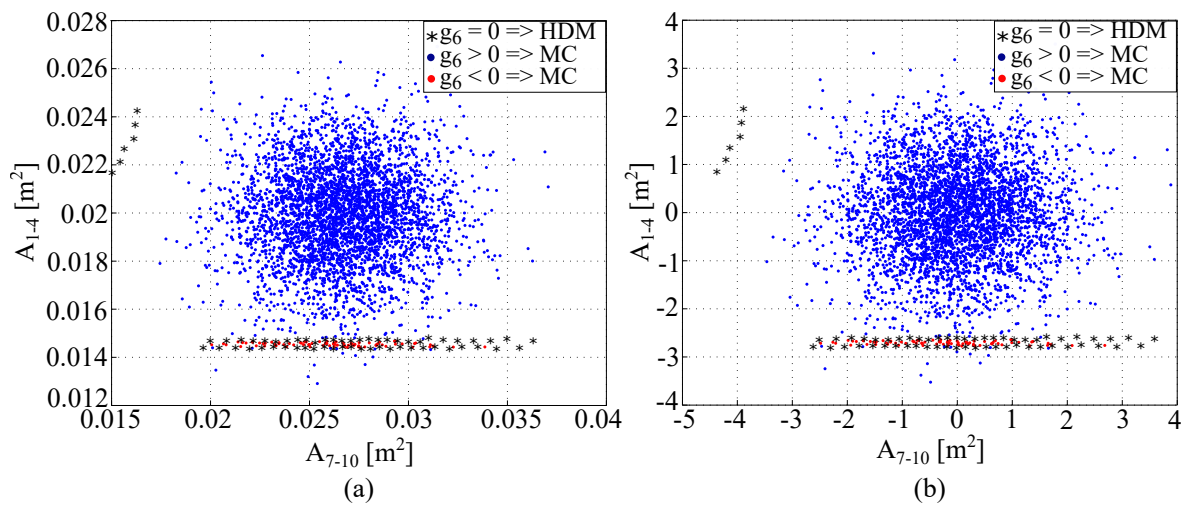


Figura 6.18 – Função de estado limite  $g_6$ : NLG-EPP.

Primeiramente, as Figuras 6.17 e 6.18, demonstram a precisão do HDM modificado em detectar as raízes das funções de estado limite do problema corrente,  $g_6(A_{1-4}, A_{7-10})=0$ . Além disso, observa-se na Figura 6.17, que os efeitos da flambagem produziram duas regiões de falha para a mesma função de estado limite, uma delimitada por uma curva aberta, e a outra internamente ao domínio de segurança. A Figura 6.18 mostra que os efeitos causados pela plastificação perfeita aumentaram significativamente o domínio de segurança, entretanto, prevalece uma pequena região de falha internamente este domínio.

## 6.5 Comentários Sobre os Exemplos

Nos exemplos anteriores foi possível aplicar as várias técnicas aqui desenvolvidas de maneira a se validar as implementações e testar a sua precisão. Os dois exemplos foram resolvidos com sucesso e vários aspectos puderam ser observados. Em suma, a resposta probabilística da estrutura oferece indícios que permitem potencializar o HDM modificado, assim como a formulação não linear física e geométrica desenvolvida neste trabalho. Na seção 7.2 as potencialidades desta formulação não linear ficarão mais evidentes.

## 7. EXEMPLOS NUMÉRICOS: CONFIABILIDADE

O HDM modificado é aplicado agora para a solução de funções explícitas e estruturas redundantes. Os resultados serão comparados com a simulação de Monte Carlo e com os melhores resultados encontrados na literatura para avaliar a precisão e o desempenho da formulação proposta. Além disso, são analisados os efeitos causados pelas não linearidades físicas e geométricas ao comportamento da função de estado limite e, conseqüentemente, à solução probabilística da estrutura.

### 7.1 Exemplos Numéricos: Funções Explícitas

Nesta seção, aplica-se o HDM modificado a um conjunto problemas testes encontrados na literatura, os quais representam uma faixa de funções de estado limite, possíveis de ocorrerem na prática. Devido as funções estado limite pertencerem a um domínio bidimensional, elas podem ser avaliadas varias vezes, permitindo que a simulação de Monte Carlo se aproxime da solução exata, tal que esta solução será considerada como parâmetro para comparação e assumida como exata. Os testes realizados nesta seção são necessários para examinar a técnica proposta quanto a sua capacidade de chegar a soluções próximas às obtidas pela simulação de Monte Carlo e/ou resultados apresentados pelos *benchmarks*. Também será possível monitorar graficamente o comportamento do método, uma vez que as funções bidimensionais permitem que uma análise gráfica possa ser feita de acordo com topologia de cada função, essa possibilidade permite que alguns resultados, não disponíveis na literatura, possam ser interpretados e avaliados.

#### 7.1.1 Função Estado Limite Contendo Múltiplas Regiões de Falha

O primeiro caso de estudo<sup>1</sup> foi escolhido, dentre vários disponíveis na literatura, pois representa um grande desafio para os métodos que lidam com funções de estado limite que apresentam múltiplas regiões de falha. Tamaña complexidade se deve ao domínio de falha apresentar diversas regiões desconectadas (ou seja, subdomínios), como pode ser observado na Figura 7.1a. A função de estado limite é dada por:

---

<sup>1</sup>Este problema foi apresentado na seção 6.3.2, Figura 6.6a, o qual foi utilizado para descrever algumas características quanto ao método desenvolvido.



$$g(\mathbf{U}) = 10 - \sum_{i=1}^2 (u_i^2 - 5 \cos(2\pi u_i)) \quad (7.1)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  resultam da transformação das variáveis aleatórias independentes  $x_1$  e  $x_2$  do espaço real para o espaço normal padrão  $\mathbf{U}$ . O mesmo problema foi resolvido por Cadini e Zio, 2014, o qual combina o FORM com a técnica de amostragem por importância baseado no modelo de *Kriging* (*Adaptive Kriging-based Importance Sampling - AK-IS*).

Os resultados do HDM modificado são comparados com o método de simulação de Monte Carlo e com Cadini e Zio, 2014 na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Solução probabilística da Equação 7.1.

Método & Referência	Equação 7.1	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
HDM Modificado	1,4628	$7,175 \times 10^{-2}$
MC  c.v.: 0,004	1,4550	$7,284 \times 10^{-2}$
Cadini e Zio, 2014	1,4502	$7,35 \times 10^{-2}$

O segundo caso de estudo, também contendo múltiplas regiões de falha, é formulado a partir de um sistema de vibrações amortecido. A amplitude do sistema é dada pela função de transferência descrita como sendo:

$$f(\beta_1, \beta_2) = \frac{\left|1 - \left(\frac{1}{\beta_2}\right)^2\right|}{\sqrt{\left[1 - R \left(\frac{1}{\beta_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\beta_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\beta_2}\right)^2 + \frac{1}{\beta_1^2 \beta_2^2}\right]^2 + 4\zeta^2 \left[\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_1 \beta_2^2}\right]^2}} \quad (7.2)$$

onde  $R$  é a razão de massa do sistema original amortecido,  $\zeta$  é a razão de amortecimento do sistema original,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são as razões de frequência natural e vibração amortecida do sistema com respeito a frequência de excitação, respectivamente. As variáveis determinísticas são  $R = 0,01$  e  $\zeta = 0,01$ . As variáveis aleatórias são  $\beta_1$  e  $\beta_2$  com distribuição  $\beta_1 \sim N(1; 0,025)$  e  $\beta_2 \sim N(1; 0,025)$ . A função estado limite para este caso é dada por:

$$g(x_1, x_2) = 28,0 - f(x_1, x_2) \quad (7.3)$$

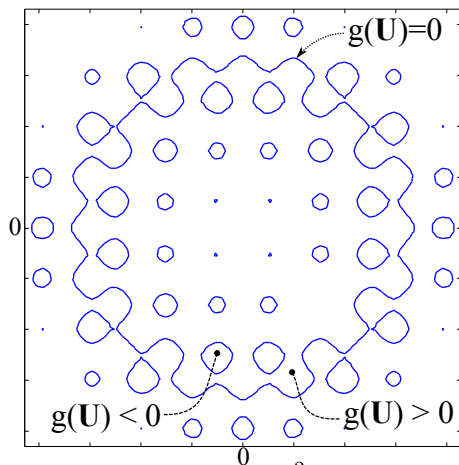
onde  $x_1$  e  $x_2$  correspondem à  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , respectivamente. O problema contém múltiplas

regiões de falha, como pode ser verificado na Figura 7.1b, e segundo Wang e Shan, 2006, este caso é de extrema complexidade.

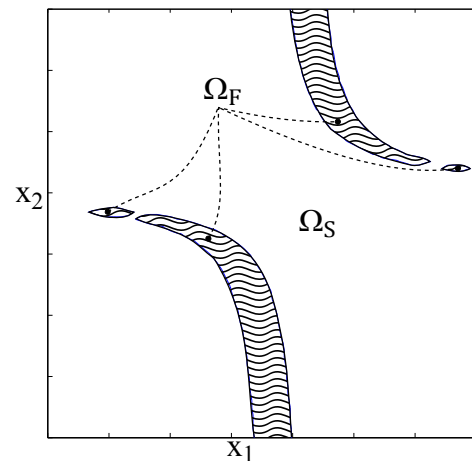
A probabilidade de falha obtida pelo HDM modificado pode ser comparada com os resultados encontrados por Wang e Shan, 2006, e com a simulação de Monte Carlo na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Solução probabilística da Equação 7.3.

Método & Referência	Equação 7.3	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
HDM Modificado	2,3180	$1,022 \times 10^{-2}$
MC  c.v.: 0,001	2,3180	$1,022 \times 10^{-2}$
Wang e Shan, 2006	2,2938	$1,09 \times 10^{-2}$



(a) Problema 1:  $g(\mathbf{U}) = 10 - \sum_{i=1}^2 (u_i^2 - 5 \cos(2\pi u_i))$ .



(b) Problema 2:  $g(x_1, x_2) = 28.0 - f(x_1, x_2)$

Figura 7.1 – Funções de estado limite multimodal.

Comparando os resultados obtidos pelo HDM modificado com os valores encontrados pelos autores referenciados, assim como pela simulação de Monte Carlo, nota-se que as soluções estão muito próximas. Portanto, as Tabelas 7.1 e 7.2 comprovam a precisão do método na solução de problemas envolvendo múltiplas regiões de falhas internamente à função de estado limite.

### 7.1.2 Múltiplas Funções de Estado Limite: Sistema em Paralelo

No primeiro problema envolvendo múltiplas funções de estado limite, o HDM modificado é utilizado para calcular a probabilidade de falha associada à intersecção entre duas funções de estado limite não lineares, como apresentado na Figura 7.2a. Este caso foi resolvido por Mechers e Ahammed, 2001, tal que seus resultados serão comparados com os obtidos pela técnica aqui desenvolvida e pela simulação de Monte Carlo. A descrição do problema é apresentada na sequência.

Considere um sistema com dois elementos que falham. Após a transformação das variáveis aleatórias  $x_1$  e  $x_2$  para o espaço normal padrão  $u_1$  e  $u_2$ , os dois elementos falhos são descritos por duas funções estado limite, as quais representam a região de falha  $\{g_1(\mathbf{U}) < 0\} \cap \{g_2(\mathbf{U}) < 0\}$  de um sistema em paralelo tal que:

$$g_1(\mathbf{U}) = u_1^2 - 5u_1 - 8u_2 + 16 \quad (7.4a)$$

$$g_2(\mathbf{U}) = -16u_1 + u_2^2 + 32 \quad (7.4b)$$

As funções de estado limite ( $g_1 = 0$  e  $g_2 = 0$ ) e o domínio de falha deste sistema em paralelo, são mostrados na Figura 7.2a.

Na Tabela 7.3, são listados os modos de falha, respectivos índices de confiabilidade e probabilidade de falha obtidos com o HDM modificado. Para fins de comparação, a mesma tabela apresenta os valores encontrados por Mechers e Ahammed, 2001, assim como pela simulação de Monte Carlo.

Tabela 7.3 – Solução probabilística da Equação 7.4.

Modos de Falha	HDM Modificado	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
<b>Modos de Falha Última</b>		
1 $\rightarrow$ 2	3,0341	$1,20 \times 10^{-3}$
2 $\rightarrow$ 1	3,3617	$3,87 \times 10^{-4}$
<b>Modos de Falha de Serviço</b>		
1	1,8727	$3,055 \times 10^{-2}$
2	2,0896	$1,832 \times 10^{-2}$
HDM Modificado $P_{f \text{Sistema}}$	2,9491	$1,5934 \times 10^{-3}$
MC   c.v.: 0,008 $P_{f \text{Sistema}}$	2,9510	$1,58 \times 10^{-3}$
Mechers e Ahammed, 2001 $P_{f \text{Sistema}}$	2,621	$4,38 \times 10^{-3}$

Com auxílio da Tabela 7.3, as seguintes considerações podem ser feitas:

- Quanto aos modos de falha último: a Figura 7.2a permite que através de uma análise gráfica do domínio de falha  $\Omega_F$ , é possível perceber que existem apenas dois modos de falha último, os quais coincidem com aqueles apresentados na Tabela 7.3, sendo que um deles ( $1 \rightarrow 2$ ) corresponde a maior parcela da região de falha ( $P_{f(1\cup 2)}$ ).
- Quanto aos modos de falha de serviço: novamente, com auxílio da Figura 7.2a, é possível observar graficamente que existem apenas dois modos de falha de serviço, condizentes aos apresentados na Tabela 7.3;
- Quanto a probabilidade de falha total do sistema ( $P_{f|\text{Sistema}}$ ): a  $P_{f|\text{Sistema}}$  comprova a precisão do método proposto ao lidar com problemas envolvendo múltiplas funções de estado limite, pois os resultados estão muito próximos aos obtidos pela simulação de Monte Carlo. Em comparação com Mechers e Ahammed, 2001, nota-se que o HDM modificado se aproximou mais da solução exata.

O segundo problema envolvendo múltiplas funções de estado limite foi proposto inicialmente por Sørensen, 2004, o qual consiste em um sistema paralelo formado por quatro elementos<sup>2</sup>. Após a transformação das variáveis probabilísticas  $x_1$  e  $x_2$  para o espaço normal não correlacionado, em termos das variáveis  $u_1$  e  $u_2$ , as quatro funções de estado limites são dadas pela Equação 7.5.

$$g_1(\mathbf{U}) = \exp(u_1) - u_2 + 1 \quad (7.5a)$$

$$g_2(\mathbf{U}) = u_1 - u_2 + 1 \quad (7.5b)$$

$$g_3(\mathbf{U}) = \exp(u_1 + 2) - 2 \quad (7.5c)$$

$$g_4(\mathbf{U}) = 0.1u_1^2 - u_2 + 2 \quad (7.5d)$$

A Figura 7.2b apresenta este problema no espaço normal bidimensional não correlacionado. As linhas correspondem aos contornos das funções de estado limite, enquanto a região hachurada representa o domínio de falha. Para este caso, a violação de quatro funções de estado limite caracteriza um modo de falha última. A Tabela 7.4 apresenta as sequências dos componentes falhos, respectivos índices de confiabilidade e probabilidade de falha obtidos com o HDM modificado.

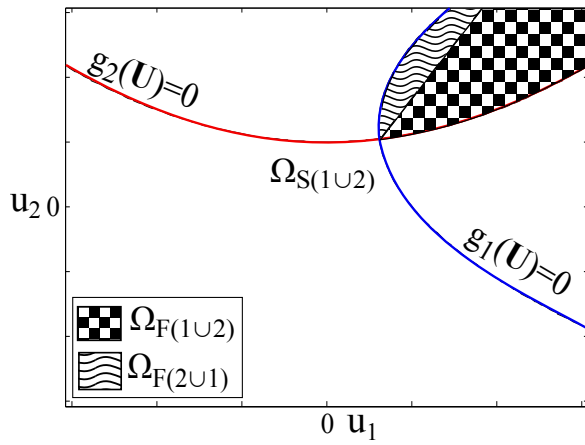
---

<sup>2</sup>Este problema foi apresentado na subseção 6.3.2, Figura 6.6b, sendo utilizado para descrever algumas características quanto ao método desenvolvido.

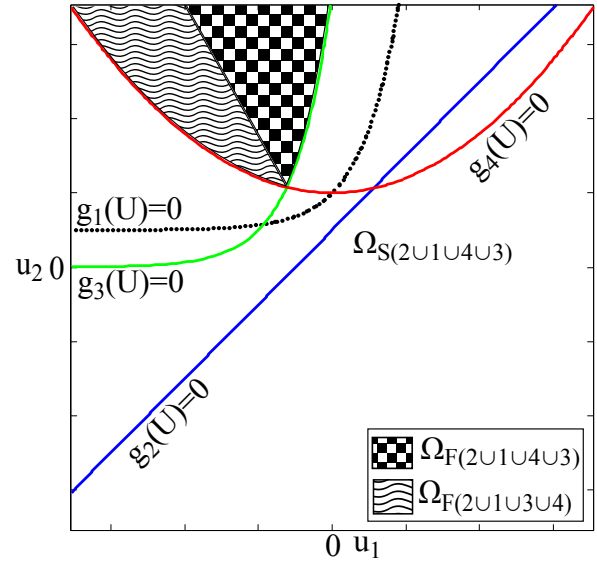
Tabela 7.4 – Solução probabilística da Equação 7.5.

Modos de Falha	HDM Modificado	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
<b>Modos de Falha Última</b>		
$2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$	3,7519	$8,7749 \times 10^{-4}$
$2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$	3,7704	$8,1843 \times 10^{-4}$
<b>Modos de Falha de Serviço</b>		
2	1,8117	$1,9376 \times 10^{-1}$
$2 \rightarrow 4$	3,2057	$5,8681 \times 10^{-3}$
$2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	3,4444	$2,6537 \times 10^{-3}$
$2 \rightarrow 3$	3,4638	$2,4811 \times 10^{-3}$
$2 \rightarrow 1$	2,8255	$1,8468 \times 10^{-2}$
$2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$	3,2219	$5,5701 \times 10^{-3}$
$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	3,5996	$1,5362 \times 10^{-3}$
$2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$	3,1294	$7,4728 \times 10^{-3}$
4	3,8146	$6,9231 \times 10^{-4}$
$4 \rightarrow 2$	4,0978	$2,2576 \times 10^{-4}$
HDM Modificado $P_{f \text{Sistema}}$	3,5720	$1,6959 \times 10^{-4}$
MC   c.v.: 0,001 $P_{f \text{Sistema}}$	3,5640	$1,8262 \times 10^{-4}$

A solução “exata”,  $\beta_{\text{Sistema}} = 3,5640$  (pela distribuição chi-quadrado) ou  $\beta_{\text{Sistema}} = 2,9209$  (pela distribuição normal), foi obtida por Monte Carlo para um milhão de simulações. O índice de confiabilidade calculado por Sørensen, 2004, foi de 2,92. Nota-se que o HDM modificado obteve valores muito próximos ao autor referenciado e por MC, reforçando a precisão do método probabilístico proposto ao lidar com problemas envolvendo múltiplas funções de estado limite não lineares. Além disso, fazendo uma análise gráfica da Figura 7.2b e, comparando com a Tabela 7.4, observa-se uma coerência entre os modos de falha última e de serviço apresentados, dando consistência aos resultados obtidos com o HDM modificado.



(a) Múltiplas funções: Equação 7.4.



(b) Múltiplas funções: Equação 7.5.

Figura 7.2 – Múltiplas funções de estado limite.

## 7.2 Exemplos Numéricos: Funções Implícitas

Conforme discutido na seção 2.9, quando o problema probabilístico envolve funções de estado limite explícitas, tais como àquelas apresentadas na seção anterior, a avaliação probabilística do problema não exige grandes esforços computacionais, e mesmo que um grande número de análises da função de estado limite sejam necessários, normalmente é possível se chegar a uma solução aproximadamente exata e de forma rápida. Entretanto, no Capítulo 5, vimos que para uma melhor representação do comportamento real da estrutura, é necessário considerar os efeitos não lineares existentes no sistema. Sob esta hipótese, uma formulação numérica foi desenvolvida para permitir que a análise determinística represente adequadamente o colapso individual e/ou global da estrutura, e na seção 6.4 as consequências que tais efeitos causam à forma e ao tamanho do domínio de falha foram avaliadas. As observações acerca das funções de estado limite obtidas para a treliça plana de 10 barras (subseção 6.4.3), demonstram que a superfície de falha pode apresentar formas difíceis de serem representadas por aproximação, ou seja, uma representação exata das funções de estado limite nos problemas reais dificilmente poderá ser expressa na forma explícita, a menos que a aproximação seja realizada com a utilização de um grande número de pontos amostrais. Neste sentido, sendo o método probabilístico desenvolvido neste trabalho possível de contemplar o problema determinístico e suas funções

de estado limite na forma implícita, os exemplos a seguir permitirão potencializar vários aspectos das metodologias implementadas frente ao comportamento não linear geométrico (NLG) e físico das estruturas. Para tanto, a Figura 7.3 ilustra os modelos constitutivos dos materiais que serão considerados nas análises determinísticas, sendo: (a) elástico, (b) elastoplástico perfeito com incremento de plastificação (EPP); (c) elastoplástico com endurecimento isotrópico linear (EPH); (d) elastoplástico com efeitos pré e pós-flambagem (EPB).

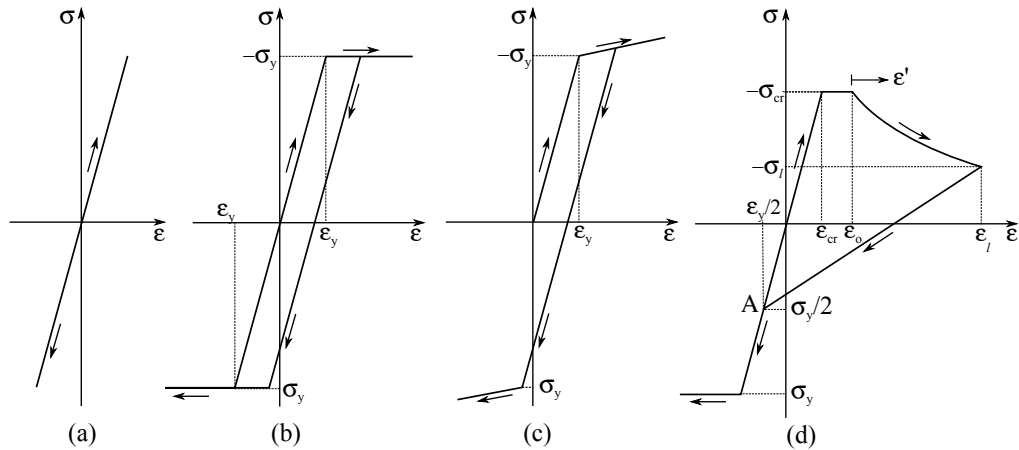


Figura 7.3 – Modelos constitutivos considerados nas análises determinísticas.

As propriedades úteis para a formulação do modelo de material pré e pós-flambagem (Equação 5.37) são as mesmas utilizadas por Thai e Kim, 2009;  $X_1 = 50$ ;  $X_2 = 100$ ;  $\sigma_l = 0.4 \sigma_{cr}$ . No caso da tensão crítica de flambagem  $\sigma_{cr}$ , considera-se que  $\varepsilon_{cr} = \varepsilon_o$ .

Por fim, destaca-se que nesta seção serão analisadas apenas estruturas hiperestáticas. Sendo assim, reforçando os conceitos descritos na seção 2.7, se a  $j$ -ésima função de estado limite pertencente ao  $i$ -ésimo modo de falha violar a restrição probabilística ( $[g(\mathbf{x})]_j^i \leq 0$ ) e o sistema permanecer estável, tem-se uma falha de serviço, cuja probabilidade de falha é definida pela Equação 7.6,

$$P_{f|\text{Serviço}} = \left[ \bigcap_{j=1} \left\{ [g(\mathbf{x})]_j^i \leq 0 \right\} \right], \quad (7.6)$$

do contrário, se surgir uma combinação das  $j$ -ésimas funções de estado limite no instante que a estrutura apresentar sinais de instabilidade, o  $i$ -ésimo modo de falha é representado como um modo de falha última da estrutura, tendo sua probabilidade calculada pela

Equação 7.7.

$$P_{f|Última} = \left[ \bigcup_{j=1} \{ [g(\mathbf{x})]_j^i \leq 0 \} \right], \quad (7.7)$$

e finalmente as  $j$ -ésimas funções de estado limite pertencentes ao domínio de falha combinadas aos  $i$ -ésimos modos de falha último, compõem o modo de falha total do sistema, tal que sua probabilidade é estimada pela Equação 7.8.

$$P_{f|Sistema} = \bigcup_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \left[ \bigcap_{j=1} \{ [g(\mathbf{x})]_j^i \leq 0 \} \right] \quad (7.8)$$

### 7.2.1 Treliça Plana de Seis Barras

Consideramos agora o mesmo exemplo usado em Shao e Murotsu, 1999, Kim e Koh, 2013 e Park S. e Stubbs, 2004, o qual corresponde a uma estrutura de seis barras com um grau de redundância, conforme apresentado na Figura 7.4. A área da seção transversal de cada membro é  $2.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . A estrutura está submetida a cinco forças concentradas, como demonstrada na figura. Assume-se que os membros tenham comportamento elastoplástico perfeito. Os parâmetros estatísticas para as variáveis probabilísticas são apresentadas na Tabela 7.5 [Kim e Koh, 2013].

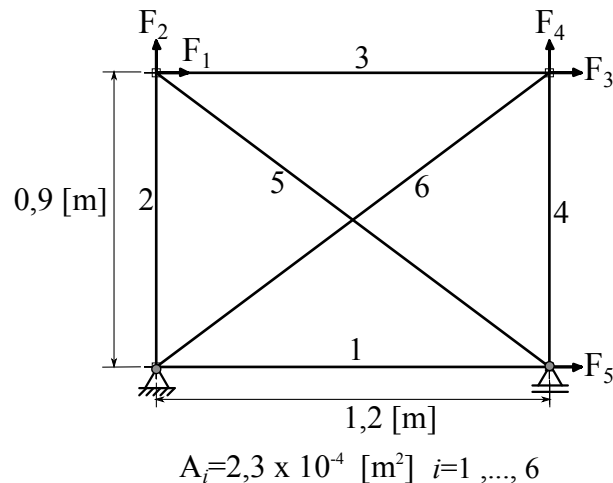


Figura 7.4 – Treliça plana de 6 barras.

O HDM modificado é aplicado para identificar os possíveis modos de falha desta treliça. Uma vez que a estrutura possui apenas um grau de redundância, a falha do



Tabela 7.5 – Parâmetros estatísticos do problema.

Variáveis Aleatórias	Distribuição	Média	c.v.
F <sub>1</sub>	Normal	50 kN	0,1
F <sub>2</sub>	Normal	30 kN	0,1
F <sub>3</sub>	Normal	20 kN	0,1
F <sub>4</sub>	Normal	30 kN	0,1
F <sub>5</sub>	Lognormal	20 kN	0,1
$\sigma_{yi} \mid i = 1, \dots, 6$	Normal	276 MPa	0,05

segundo membro resultará no colapso total da treliça, portanto, para cada modo de falha última, dois prováveis componentes falhos deverão ser identificados. Além disso, para fins de comparação com os autores referenciados, as restrições probabilísticas deste problema serão formuladas em termos da tensão, conforme equação abaixo.

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = 1 - \frac{|[\sigma]_j^i|}{[\sigma_o]_j^i}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (7.9)$$

A solução probabilística obtida pelo HDM modificado, é apresentada na Tabela 7.6, juntamente com os melhores resultados encontrados na literatura e pela simulação e Monte Carlo puro.

Tabela 7.6 – Solução probabilística da treliça de 6 barras.

Modos de Falha	Kim e Koh, 2013	HDM Modificado
	Índice $\beta$	Índice $\beta$
<b>Falha Última</b>		
6 → 2	3,0735	3,1142
2 → 6	3,4300	4,5334
6 → 1	3,4316	3,5110
6 → 5	-	6,3732
<b>Falha de Serviço</b>		
6	-	1,2902
2	-	3,5533
1	-	5,2863
<b>Falha Total do Sistema</b>		
MC   $\beta_{\text{Sistema}}$	3,0330	2,9775
<b>Número de Simulações</b>		
MC   $c.v.:0,028$	$1 \times 10^6$	28400
		2983

Sabendo que o modo de falha última deve conter, ao menos, dois elementos falhos,

a Tabela 7.6 — Falha Última, demonstra que o HDM modificado cumpriu com esta condição satisfatoriamente. As demais colunas da tabela apresentam os respectivos índices de confiabilidade ( $\beta$ ) para cada modo de falha última. Com estas informações, pode-se perceber que a maior incidência de falhas recai sobre a barra 6, seguida pela falha da barra 2 devido a redistribuição dos esforços. Além disso, com base na Tabela 7.6, as seguintes observações podem ser feitas:

- Quanto aos modos de falha último: pode-se verificar que os modos de falha detectados pelo HDM modificado coincidem com os apresentados por Kim e Koh, 2013, exceto o modo  $6 \rightarrow 5$  que, possivelmente pela probabilidade de falha ser muito pequena, os autores tenham o desconsiderado;
- Quanto ao índice de confiabilidade: os resultados demonstram que o índice de confiabilidade obtido com o HDM modificado se aproxima daqueles encontrados na simulação de Monte Carlo. Em comparação com Kim e Koh, 2013, uma leve diferença é verificada;
- Quanto a falha total do sistema: a probabilidade de falha total do sistema é dada pela soma das probabilidades de falha associadas aos modos de falha últimos. Como pode-se verificar, os resultados obtidos com o HDM modificado estão muito próximo aos encontrados pela simulação de Monte Carlo e Kim e Koh, 2013;
- Quanto ao número de simulações: o desempenho do HDM modificado representa uma expressiva redução no número de simulações necessárias para identificar os múltiplos modos de falha, em comparação com Monte Carlo e com Kim e Koh, 2013;
- Quanto aos modos de falha de serviço: a falta desta informação perante as referências utilizadas, assim como a impossibilidade do método de Monte Carlo implementado neste trabalho de obter este tipo de resposta, impede a comparação destes resultados.

### 7.2.2 Treliça Plana de 10 Barras

O comportamento não linear da treliça plana de 10 barras (Figura 7.5) foi estudado na seção 5.6.3, assim como seus efeitos sobre as funções de estado limite nas

seções 6.4.2 e 6.4.3. Realiza-se agora uma análise probabilística deste problema, procurando complementar os estudos anteriores quanto aos efeitos causados pelas não linearidades e modelos constitutivos. As propriedades geométricas, material e carregamentos são iguais aos utilizados na seção 5.6.3. Para o tratamento do problema probabilístico, consideram-se sete variáveis aleatórias não correlacionadas, cujas propriedades estatísticas são apresentadas na Tabela 7.7.

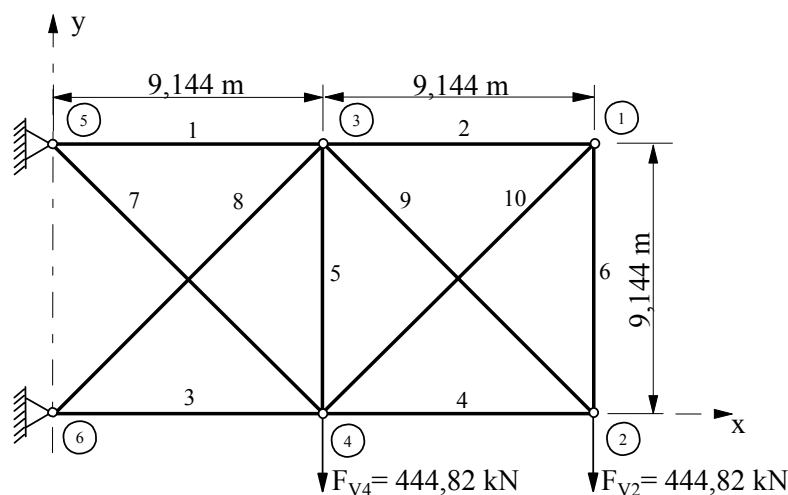


Figura 7.5 – Treliça plana de 10 barras.

Tabela 7.7 – Propriedades estatísticas para as variáveis aleatórias da treliça de 10 barras.

Variáveis Aleatórias		Valor Médio	c.v.	Distribuição
Banzos	$A_{1-4}$ [m <sup>2</sup> ]	$2,75880811 \times 10^{-2}$	0,05	Normal
Montantes	$A_{5-6}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,2907508 \times 10^{-3}$	0,05	Normal
Diagonais	$A_{7-10}$ [m <sup>2</sup> ]	$2,06010872 \times 10^{-2}$	0,05	Normal
Tensão de Escoamento	$\sigma_{1-8}, \sigma_{10}$ [Pa]	$172,3 \times 10^6$	0,05	Normal
	$\sigma_9$ [Pa]	$517,11 \times 10^6$	0,05	Normal
Módulo de Elasticidade	$E_{1-10}$ [Pa]	$68,9 \times 10^9$	0,05	Normal
Carregamento nó 2	$F_{V2}$ [N]	$444,82 \times 10^3$	0,1	LogNormal
Carregamento nó 4	$F_{V4}$ [N]	$444,82 \times 10^3$	0,1	LogNormal

As restrições probabilísticas deste problema são determinadas em termos das seguintes funções de estado limite:

- Restrição probabilística em termos de deformação.

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = \frac{[\varepsilon_e]_j^i - [\varepsilon]_j^i}{[\varepsilon_e]_j^i}, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_e \ \& \ \varepsilon_p = 0 \quad j = 1, \dots, 10, \quad (7.10)$$

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = - \left| \frac{[\varepsilon_p]_j^i}{[\varepsilon]_j^i} \right|, \quad \forall \varepsilon_p \neq 0 \quad j = 1, \dots, 10, \quad (7.11)$$

- Deslocamento vertical máximo permitido para os nós de 1 a 4.

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = 1 - \frac{|u^k|}{u_{\max}^k}, \quad j = 10 + k \ | \ k = 1, \dots, 4, \quad (7.12)$$

sendo  $u_{\max} = 50.8 \times 10^{-3}$  [m].

Para a solução probabilística deste problema, consideram-se os efeitos que as não linearidades físicas e geométricas causam às funções de estado limite. Além disso, o serem consideradas sete variáveis aleatórias, os domínios de segurança/falha não serão representados no espaço bidimensional. Entretanto, a exemplo da seção 6.4.2, é possível monitorar a amplitude das funções de estado limite para um dado setor sob uma análise unidirecional. Essa particularidade do método proposto, permite avaliar os efeitos que as não linearidades físicas e geométricas causam às restrições probabilísticas e consequentemente, à confiabilidade da estrutura. O resultado desta técnica pode ser analisado nos gráficos apresentados nas Figuras 7.6 a 7.9 para a direção 24, na qual foi detectado o modo de falha último. Além das funções de estado limite, o gráfico da direita de cada figura ilustra a trajetória de equilíbrio da estrutura no instante que ocorreu a instabilidade do sistema, falha última. Os pontos sobre a curva representam o momento exato que os critérios de falha foram violados.

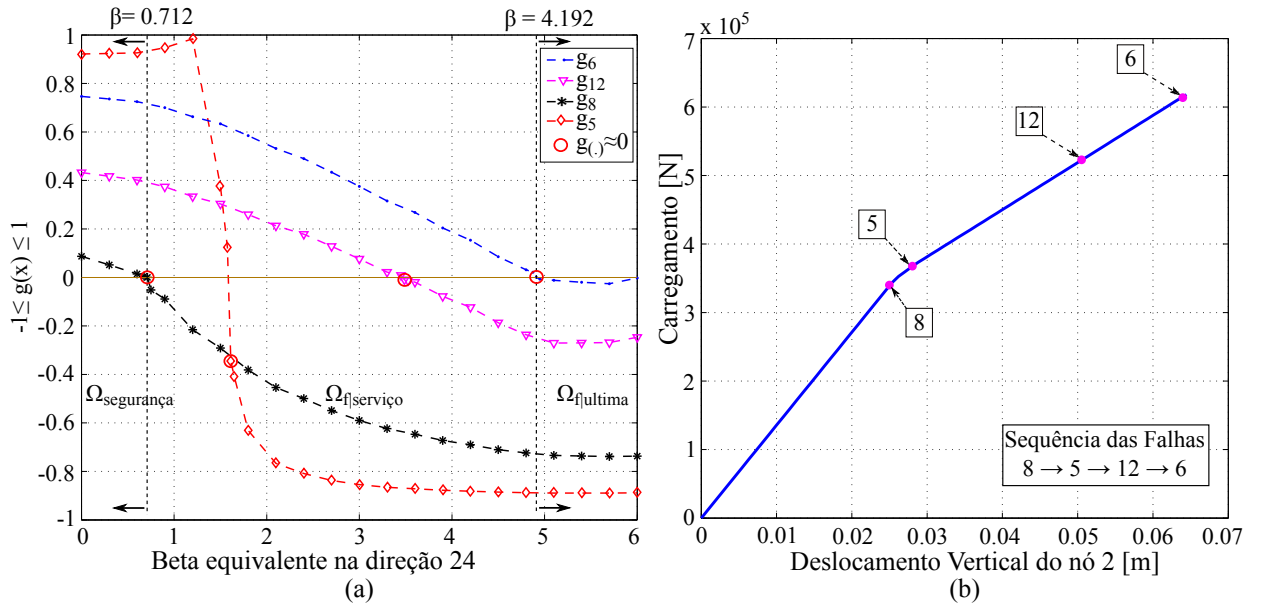


Figura 7.6 – Funções de estado limite: NLG-EPH.

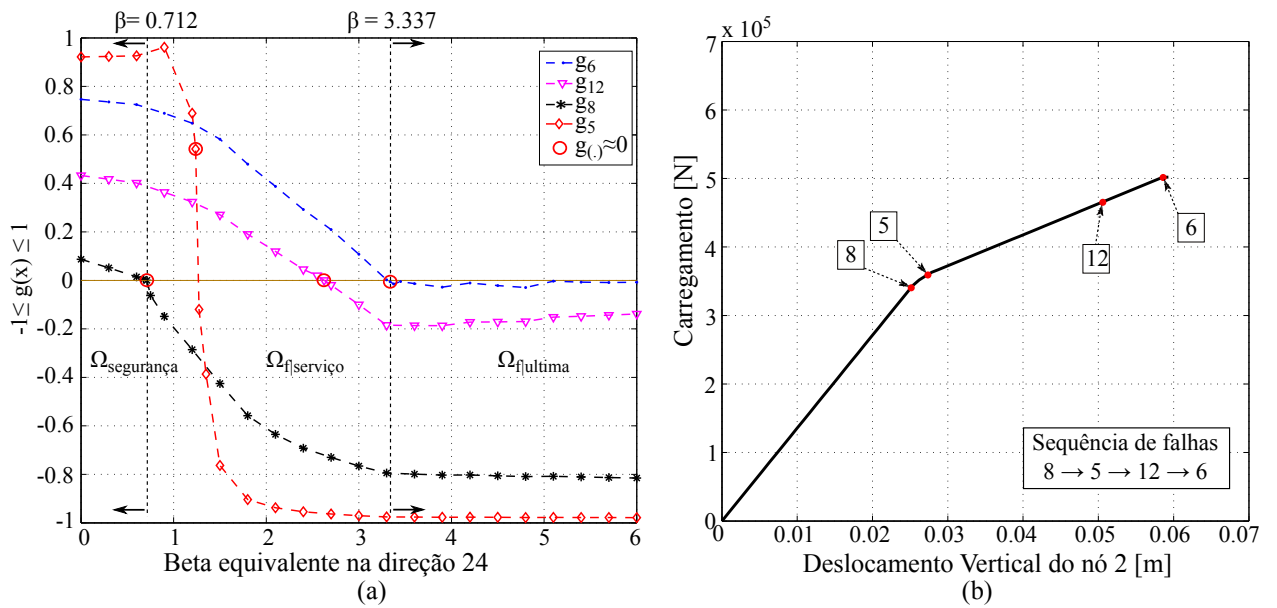


Figura 7.7 – Funções de estado limite: NLG-EPP.

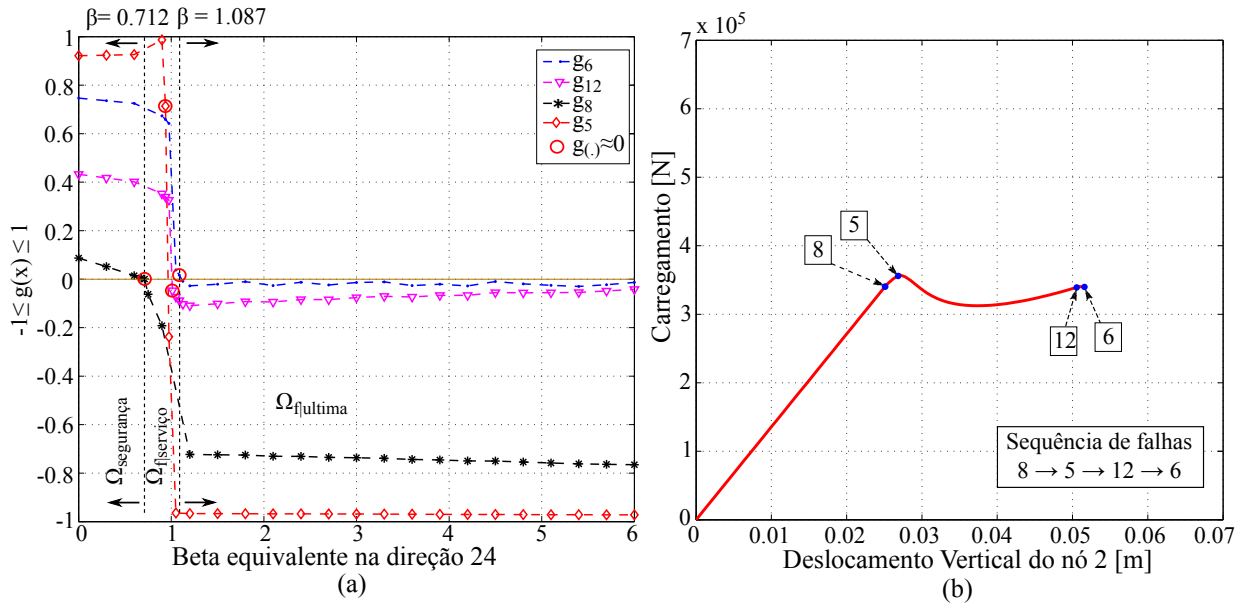


Figura 7.8 – Funções de estado limite: NLG-EPB.

O propósito de mapear a amplitude das funções de estado limite e a trajetória de equilíbrio para uma determinada direção, consiste em oferecer indícios à resposta probabilística da estrutura, isto é, ao analisar os gráficos subsequentes, é possível prever que a não linearidade geométrica associada ao modelo constitutivo com efeitos pós-flambagem (NLG-EPB), resultará no menor índice de confiabilidade do sistema. Em contrapartida, a medida que são minimizados os efeitos pós-falha — elastoplástico perfeito (Figura 7.7)  $\Rightarrow$  elastoplástico com encruamento (Figura 7.6), espera-se que ocorra um aumento no índice de confiabilidade do sistema.

Na seção 6.4.1 foi demonstrado que os efeitos pós-falha desqualificam a formulação da função de estado limite em termos da tensão. Entretanto, mencionou-se que sua utilização seria conveniente sob a hipótese de uma análise determinística linear. Sendo assim, a propósito de comparação, a Equação 7.13 será utilizada como restrição probabilística na análise linear da treliça.

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = 1 - \frac{|[\sigma]_j^i|}{[\sigma_o]_j^i}, \quad j = 1, \dots, 10, \quad (7.13)$$

O resultado da utilização da Equação 7.13 como função de estado limite é apresentado na Figura 7.9. A trajetória de equilíbrio corresponde aos valores médios das variáveis aleatórias no instante que o índice de confiabilidade for  $\beta = 6.0$ .

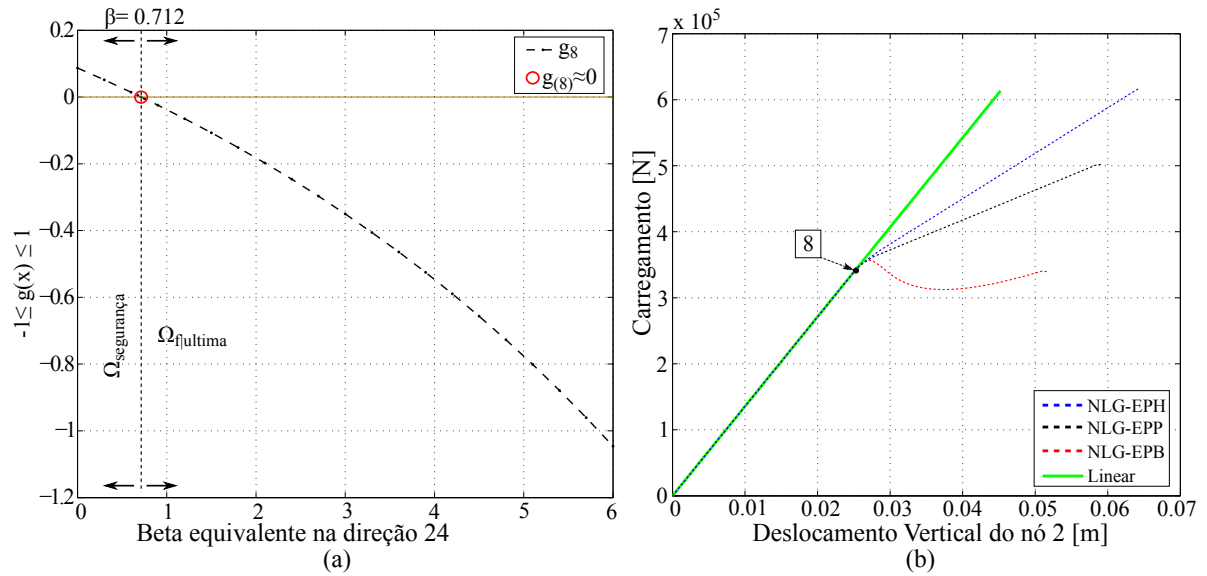


Figura 7.9 – Função de estado limite: Linear.

Os gráficos apresentados na Figura 7.9 demonstram que apenas uma restrição foi violada,  $g_8(\mathbf{x}) < 0$ , justificando que: ao negligenciar o comportamento não linear da estrutura, não haverá a redistribuição dos esforços entre os elementos, caso algum deles venha a falhar. Esta condição impede que outros elementos recebam as cargas remanescentes da falha anterior, mascarando possíveis falhas adicionais e permitindo que a estrutura suporte mais carga.

Além disso, a suavidade apresentada pela função de estado limite  $g_8$  também está vinculada ao comportamento linear físico e geométrico da estrutura, ou seja, a variação da rigidez da estrutura entre uma análise determinística e outra, segue um comportamento linear, uma vez que desconsideram-se os efeitos causados pela mudança na resistência do material ou geometria. Por esta razão, é justificável o decaimento repentino das funções de estado limite demonstradas nas Figuras 7.6 a 7.8, pois os efeitos não lineares produzem variações na rigidez da estrutura durante e entre as análises determinísticas e, conseqüentemente, oscilações na trajetória de equilíbrio, tanto que: quanto maior os efeitos pós-falha ao equilíbrio da estrutura, mais repentino deverá ser o decaimento da função de estado limite.

Demais comentários acerca das funções de estado limite foram relatados na seção 6.4.2, os quais podem ser replicados à interpretação do comportamento das funções no problema corrente, apresentadas nas Figuras 7.6 a 7.9.

Uma complementação da solução unidirecional discutida até agora é apresentada

em termos da solução geral do problema nas Tabelas 7.8 a 7.10. As tabelas envolvem várias informações que descrevem a resposta da treliça plana de 10 barras segundo: os modos de falha, a probabilidade de ocorrer determinada sequência de falhas, as quais correspondem à falha total ou de serviço da estrutura, além de permitir a verificação da precisão e desempenho do método desenvolvido em comparação com Monte Carlo.

Tabela 7.8 – Solução probabilística: análise NLG-EPB.

Modos de Falha Última	HDM Modificado	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
8 → 5 → 6 → 12	1,12678	$1,29918 \times 10^{-1}$
8 → 5 → 6	3,08421	$1,02047 \times 10^{-3}$
8 → 5 → 6 → 12 → 13	3,34105	$4,17313 \times 10^{-4}$
<b>Modos de Falha Serviço</b>		
8	1,46726	$7,11525 \times 10^{-2}$
8 → 5 → 12	1,73346	$4,15069 \times 10^{-2}$
8 → 5	1,86179	$3,13165 \times 10^{-2}$
HDM Modificado $P_{f Sistema}$	1,12000	$1,31356 \times 10^{-1}$
Simulação MC $P_{f Sistema}$	1,11867	$1,31640 \times 10^{-1}$
Número de Simulações	HDM Modificado 1142	MC   c.v: 0,001 $1 \times 10^5$

Tabela 7.9 – Solução Probabilística: análise NLG-EPP.

Modos de Falha Última	HDM Modificado	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
8 → 5 → 6 → 12	3,25059	$5,75828 \times 10^{-4}$
<b>Modos de Falha Serviço</b>		
8	0,99269	$1,60431 \times 10^{-1}$
8 → 5	1,23822	$1,07817 \times 10^{-1}$
8 → 5 → 12	2,48398	$6,49624 \times 10^{-3}$
5 → 8 → 12	4,22782	$1,17983 \times 10^{-5}$
HDM Modificado $P_{f Sistema}$	3,25059	$5,75828 \times 10^{-4}$
Simulação MC $P_{f Sistema}$	3,25018	$5,7666 \times 10^{-4}$
Número de Simulações	HDM Modificado 977	MC   c.v: 0,076 $3 \times 10^5$



Tabela 7.10 – Solução Probabilística: análise NLG-EPH.

Modos de Falha Última	HDM Modificado	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
8 → 5 → 6 → 12	4,66761	$1,52364 \times 10^{-6}$
<b>Modos de Falha Serviço</b>		
8	0,87439	$1,90953 \times 10^{-1}$
8 → 5	1,47594	$6,99805 \times 10^{-2}$
8 → 5 → 12	3,23337	$6,11700 \times 10^{-4}$
5	3,89007	$5,01068 \times 10^{-5}$
HDM Modificado $P_{f Sistema}$	4,66761	$1,52364 \times 10^{-6}$
Simulação MC $P_{f Sistema}$	4,56479	$2,50000 \times 10^{-6}$
Número de Simulações	HDM Modificado 1138	MC   c.v: 0,070 $8 \times 10^5$

Tabela 7.11 – Solução Probabilística: análise Linear-Elástica.

Método	$\beta$	Probabilidade de Falha
HDM Modificado $P_{f Sistema}$	0,60666	$2,72038 \times 10^{-1}$
Simulação MC $P_{f Sistema}$	0,61070	$2,71700 \times 10^{-1}$
Número de Simulações	HDM Modificado 704	MC   c.v: 0,0164 $1 \times 10^4$

Nas Tabelas 7.8 a 7.11, é possível observar uma boa precisão alcançada pelo método proposto. Para todos os casos tratados, pode-se observar que a probabilidade de falha total do sistema obtida com o método desenvolvido neste trabalho, está muito próxima aos resultados encontrados com a simulação de Monte Carlo. Ao constatar tamanha proximidade entre as soluções, valida-se a precisão do método proposto, garantindo seguridade para aplicações futuras.

Um segundo aspecto relevante diz respeito ao desempenho apresentado pelo método. O número de simulações necessária à solução do problema probabilístico chega a ser 0,1138% menor que Monte Carlo (ver Tabela 7.10). Esse bom desempenho, justifica os esforços dedicados à identificação eficiente das funções de estado limite, pois para a otimização do risco, é crucial uma boa eficiência por parte da análise probabilística. Isso permitirá que a otimização seja realizada em tempo hábil, principalmente se tratando de problemas não lineares os quais demandam altos custos computacionais.

Em relação a probabilidade associada aos modos de falha, uma interpretação

gráfica das Figuras 7.6 a 7.9, pode complementar a compreensão dos resultados apresentados nas tabelas. Observa-se que o modo dominante tanto para falha última quanto para falha de serviço —  $8 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 12$  e  $8$  — é comum à todos os casos tratados, entretanto, podem surgir sequências diferentes aos demais modos, tal como o modo de falha última  $8 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ , o qual é identificado apenas quando os efeitos pós-flambagem são considerados.

### 7.2.3 Conclusões a respeito da análise probabilística da treliça - 10 barras

Agrupando os valores médios de carga e deslocamento<sup>3</sup> correspondente a cada modelo físico/geométrico<sup>4</sup>, e comparando com o índice de confiabilidade total da estrutura<sup>5</sup>, conclui-se que a formulação determinística desenvolvida permitiu ao HDM modificado identificar os diferentes modos de falha de acordo com o modelo físico/geométrico considerado. Com isso, foi possível verificar uma expressiva redução na capacidade de carga da estrutura ao assumirem os efeitos pós-flambagem (Figura 7.10a), justificando o baixo índice de confiabilidade da treliça quando este modelo constitutivo é considerado (Figura 7.10b). Entretanto, sob considerações determinísticas puramente lineares<sup>6</sup>, observa-se que o critério de falha por escoamento reduz ainda mais o índice de confiabilidade desta estrutura, denunciando um significativo conservadorismo ao utilizar este tipo de análise determinística nos métodos de otimização tais como DDO, RBDO ou RBRO<sup>7</sup>.

Tabela 7.12 – Valores médios da análise determinística  $\times$  índice de confiabilidade total da estrutura.

Análise	Análise Determinística			Análise Probabilística	
	$F_{V2}$ [N]	$u_{V2}$ [m]	Sequência	$\beta_{HDM}$	$\beta_{MC}$
NLG-EPH	$6,181 \times 10^5$	0,06446	8-5-12-6	4,6676	4,5648
NLG-EPP	$5,020 \times 10^5$	0,05931	8-5-12-6	3,2506	3,2502
NLG-EPB	$3,394 \times 10^5$	0,05174	8-5-12-6	1,1200	1,1187
Linear	$3,435 \times 10^5$	0,02533	8	0,6066	0,6107

<sup>3</sup>Registrados no instante que ocorre a falha última da estrutura (Figuras 7.6 a 7.9).

<sup>4</sup>Análise Determinística: Tabela 7.12 — Figura 7.10a.

<sup>5</sup>Análise Probabilística: Tabela 7.12 — Figura 7.10b.

<sup>6</sup>Análise determinística linear física e geométrica: A probabilidade de falha total do sistema é atribuída à violação de qualquer função de estado limite.

<sup>7</sup>A seção 8.2 demonstrará esta ideia.

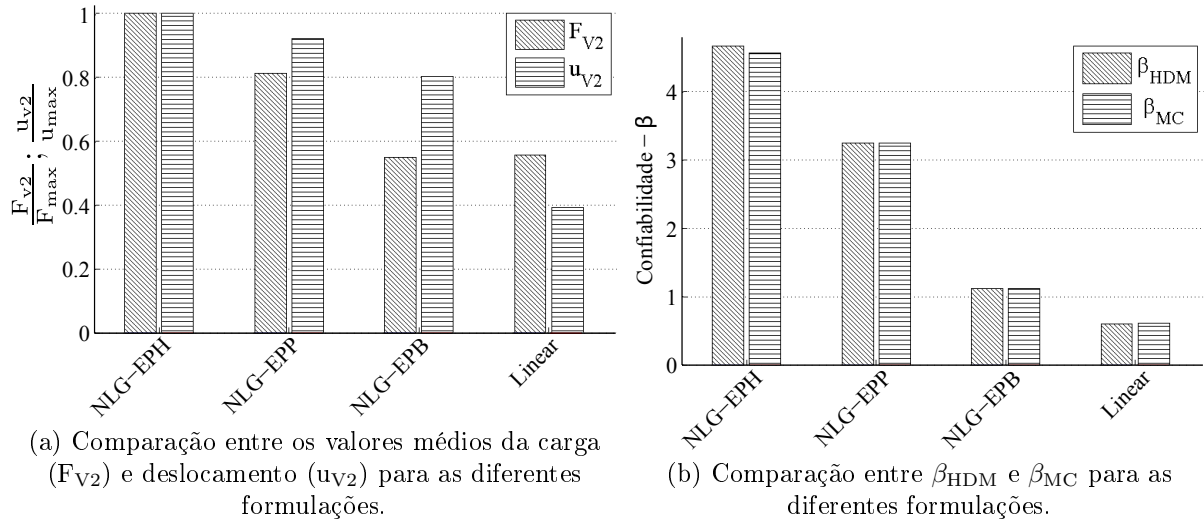


Figura 7.10 – Comparação determinística e probabilística para as diferentes formulações implementadas.

#### 7.2.4 Pilar 95 Barras

O problema probabilístico que será abordado agora, refere-se ao pilar de 95 barras, cuja análise determinística foi realizada na subsecção 5.6.4. Para atender a este propósito, consideram-se as propriedades estatísticas apresentadas na Tabela 7.13, nas quais assume-se que as variáveis são não correlacionadas. Conforme discutido anteriormente, este problema está representando uma estrutura real, tal que os valores médios apresentados na tabela, com exceção das áreas, foram fornecidos pela empresa responsável pelo dimensionamento e execução deste estrutura. Para as demais propriedades estatísticas, assume-se parâmetros comumente utilizados pelos pesquisadores da área.

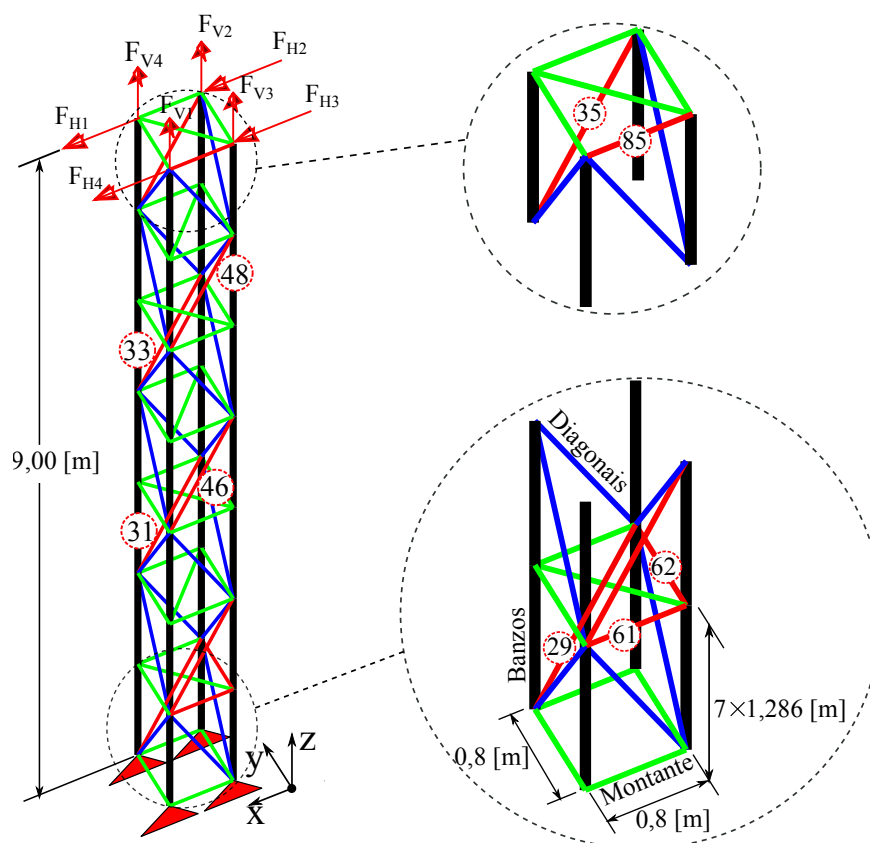


Figura 7.11 – Representação esquemática do Pilar-PM13.

Tabela 7.13 – Propriedades estatísticas para as variáveis aleatórias do Pilar-PM13.

Variáveis Aleatórias		Valor Médio	c.v.	Distribuição
Banzos	$A_{1-28}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,750276 \times 10^{-3}$	0,05	Normal
Diagonais	$A_{29-56}$ [m <sup>2</sup> ]	$3,623051 \times 10^{-4}$	0,05	Normal
Montantes	$A_{57-95}$ [m <sup>2</sup> ]	$8,454403 \times 10^{-5}$	0,05	Normal
Tensão de Escoamento	$\sigma_{1-95}$ [Pa]	$250 \times 10^6$	0,05	Normal
Módulo de Elasticidade	$E_{1-95}$ [Pa]	$205 \times 10^9$	0,05	Normal
Carregamento Horizontal	$F_{H 1-4}$ [N]	$1,2731 \times 10^5$	0,14	LogNormal
Carregamento Vertical	$F_{V 1-4}$ [N]	$4,3836 \times 10^3$	0,14	LogNormal

São consideradas 92 restrições probabilísticas neste problema, as quais correspondem às funções de estado limite representadas pelas Equações 7.14, 7.15 e 7.16.

- Restrição probabilística em termos de deformação.

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = \frac{[\varepsilon_e]_j^i - [\varepsilon]_j^i}{[\varepsilon_e]_j^i}, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_e \ \& \ \varepsilon_p = 0 \quad j = 1, \dots, 95, \quad (7.14)$$

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = - \left| \frac{[\varepsilon_p]_j^i}{[\varepsilon]_j^i} \right|, \quad \forall \varepsilon_p \neq 0 \quad j = 1, \dots, 95, \quad (7.15)$$

- Deslocamento horizontal máximo permitido no topo do pilar.

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = 1 - \frac{|u^k|}{u_{\max}^k}, \quad j = 95 + k \mid k = 1, \quad (7.16)$$

sendo  $u_{\max} = \frac{9.00[\text{m}]}{300} = 0.03 \times 10^{-3}[\text{m}]$ , definido com base na ABNT-NBR:8800, 2008.

Por questões de comparação, tal como no caso da treliça plana de 10 barras, será realizado o cálculo probabilístico do pilar considerando o modelo constitutivo linear. Por esta razão, torna-se possível avaliar a função de estado limite em termos da tensão, como mostra a Equação 7.17.

$$[g(\mathbf{x})]_j^i = 1 - \frac{|[\sigma]_j^i|}{[\sigma_o]_j^i}, \quad j = 1, \dots, 95, \quad (7.17)$$

A exemplo do problema anterior, a amplitude das funções de estado limite será monitorada ao longo de uma determinada direção, com o propósito de oferecer uma avaliação gráfica dos subdomínios de segurança e falha (para aquela direção) e sua variação em função do modelo físico e geométrico considerado. Os gráficos que representam este comportamento são apresentados nas Figuras 7.12 a 7.16. Além disso, nos gráficos à direita de cada figura, é possível observar a curva de equilíbrio do instante que a estrutura torna-se instável —  $\beta$  equivalente à falha última —, assim como a carga  $\times$  deslocamento para cada restrição probabilística violada —  $[g(\mathbf{x})]_j^i < 0$ ,  $j = 1, \dots, 96$ . A análise dos valores das funções de estado limite será realizada ao longo da direção 105.

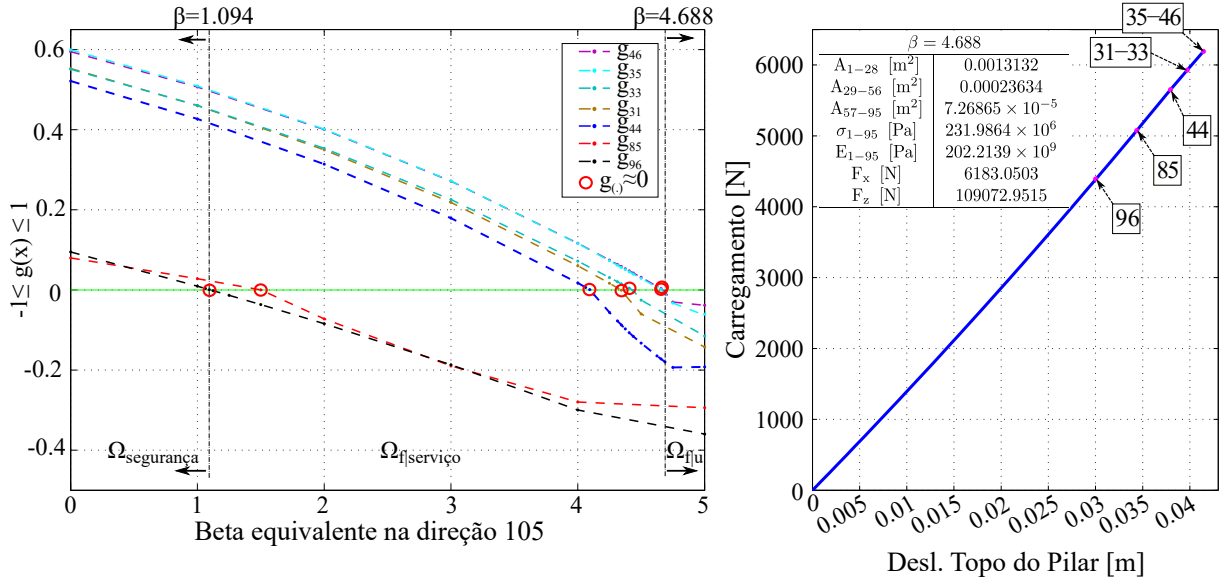


Figura 7.12 – Funções de estado limite: NLG-EPH.

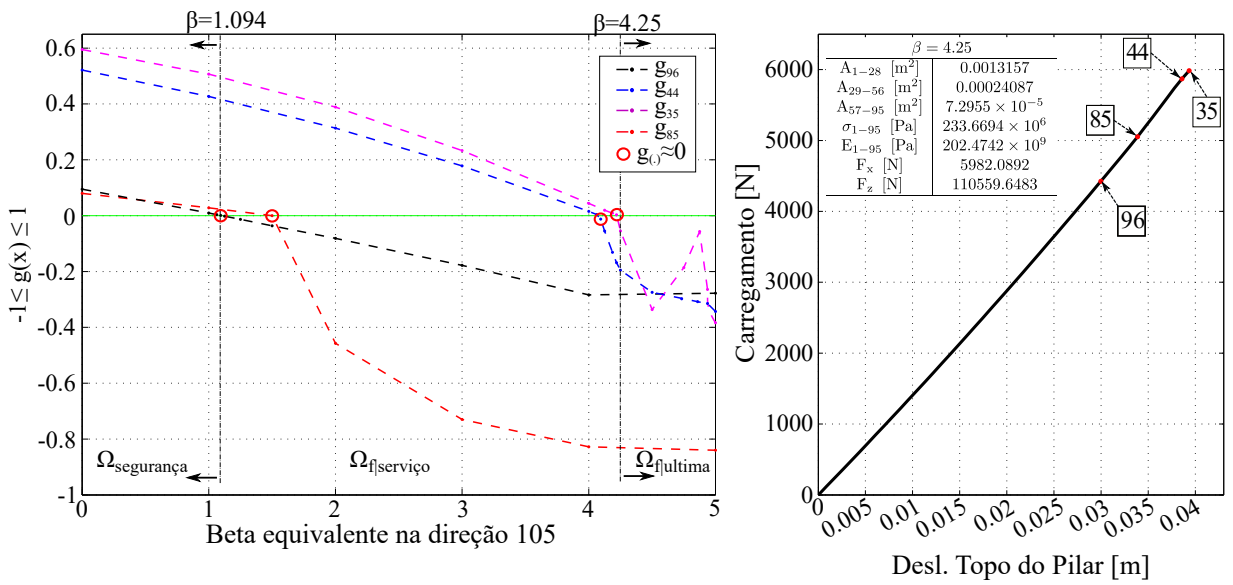


Figura 7.13 – Funções de estado limite: NLG-EPP.

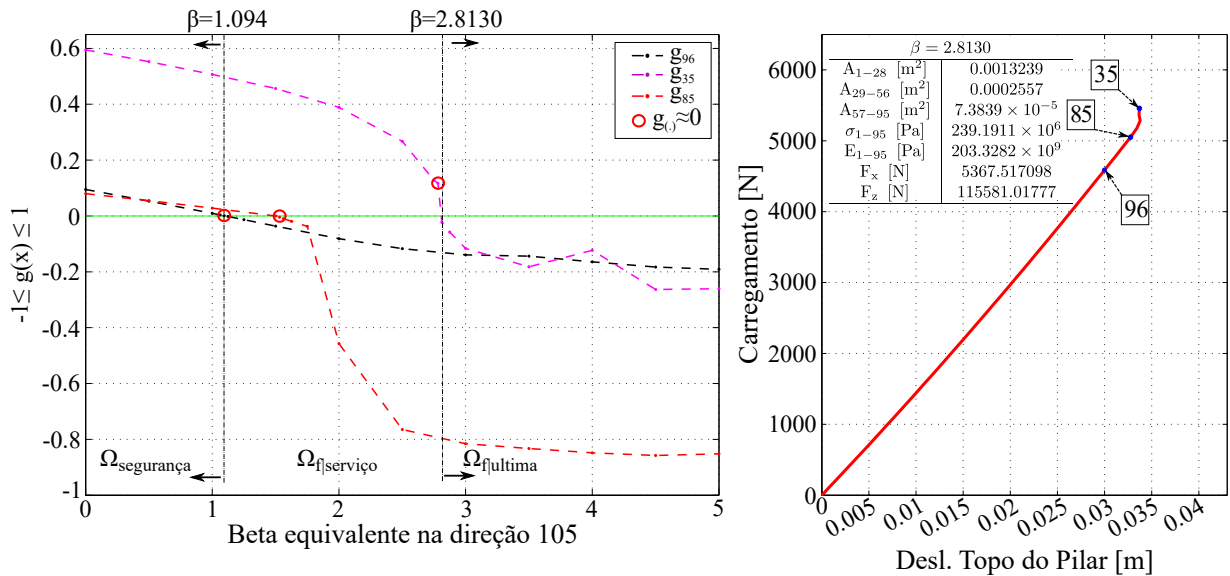


Figura 7.14 – Funções de estado limite: NLG-EPB.

Nota-se que as funções de estado limite para o problema corrente apresentam um comportamento muito semelhante ao registrado no problema anterior, treliça plana de 10 barras, principalmente em se tratando dos efeitos que as não linearidades causam ao índice de confiabilidade. Neste sentido, referindo-se a análise probabilística total deste problema, acredita-se que a NLG-EPB resultará na maior probabilidade de falha total do pilar, já as demais não linearidades, conforme Figuras 7.12 e 7.13, tendem a aumentar o índice de confiabilidade do problema.

As curvas de equilíbrio demonstram que dependendo do tipo de material adotado, altera-se a sequência de falha dos elementos, assim como, o momento em que elas ocorrem. Observa-se claramente que a NLG-EPB provoca a instabilidade do pilar a um carregamento inferior aos demais casos, além de violar apenas três restrições probabilísticas,  $g_{96} \rightarrow g_{85} \rightarrow g_{35}$ .

Ao considerar na análise determinística o modelo constitutivo linear, é possível aplicar a função de estado limite dada pela Equação 7.17. Destaca-se que com esta formulação, o estado de falha último é definido pela falha de qualquer função de estado limite, tal como ocorre nos sistemas em paralelo onde não são considerados os modos de falha de serviço. As Figuras 7.15 e 7.16 apresentam os gráficos obtidos com esta formulação. Optou-se por demonstrar a curva de equilíbrio do pilar para valores médios das variáveis correspondentes a um  $\beta = 5.00$  (gráfico da direita).

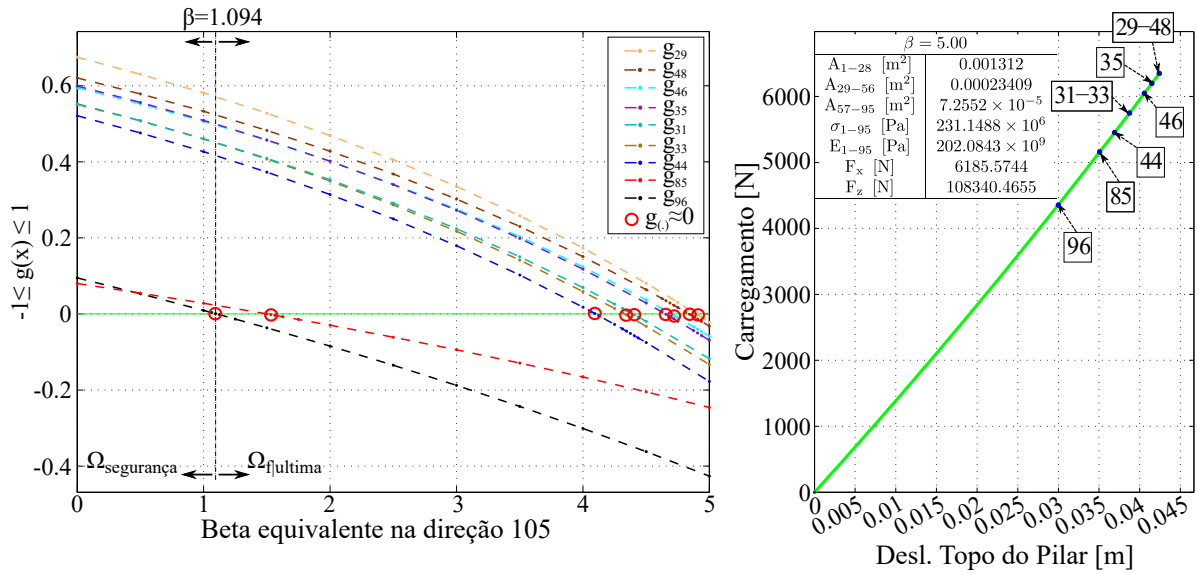


Figura 7.15 – Funções de estado limite: NLG-Linear.

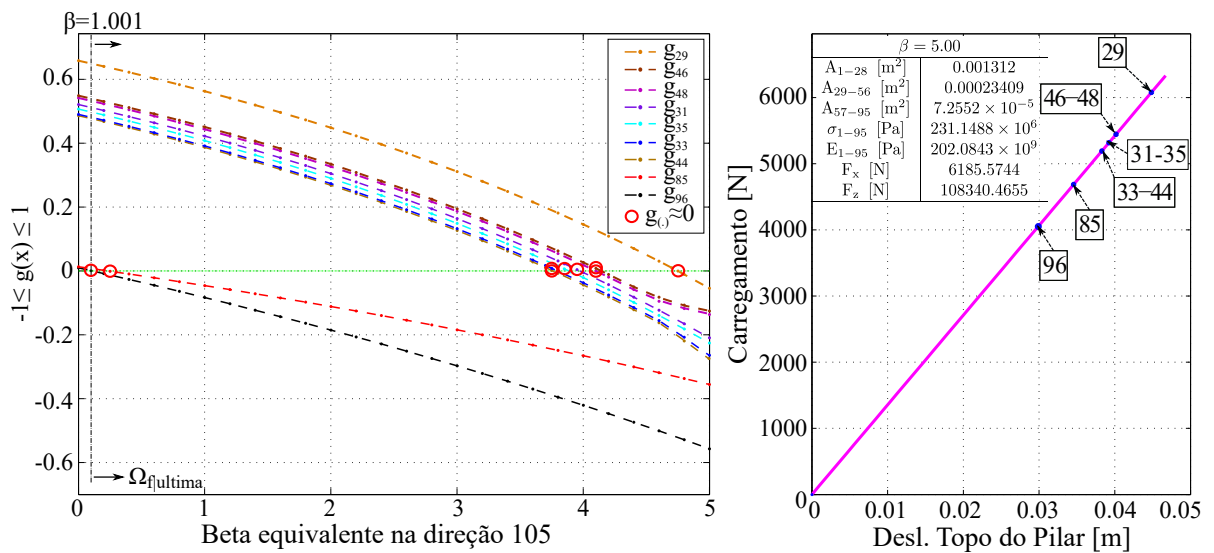


Figura 7.16 – Funções de estado limite: Linear.

Os gráficos apresentados nas Figuras 7.15 e 7.16, revelam que a análise linear geométrica e material, resulta no maior subdomínio de falha (ver Figura 7.16), assim como o menor carregamento necessário para ativar o estado limite último, neste caso representado pela  $g_{96} < 0$ . Portanto, acredita-se que esta formulação resultará nos menores índices de confiabilidade deste problema.

A combinação dos resultados probabilísticos, obtidos com o HDM modificado para cada direção, resulta nas seqüências e probabilidades de falhas que estão apresentadas nas Tabelas 7.14 a 7.17.



Tabela 7.14 – Solução Probabilística: análise NLG-EPH.

Modos de Falha Última	HDM Modificado	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
61 → 62	2,63713	$4,18057 \times 10^{-3}$
85 → 61 → 62	2,89433	$1,89987 \times 10^{-3}$
<b>Modos de Falha Serviço</b>		
96	2,34335	$9,55576 \times 10^{-3}$
85	2,40265	$8,13840 \times 10^{-3}$
85 → 96	2,81263	$2,45689 \times 10^{-3}$
85 → 61	3,70227	$1,06840 \times 10^{-4}$
HDM Modificado $P_{f Sistema}$	2,50744	$6,08044 \times 10^{-3}$
Simulação MC $P_{f Sistema}$	2,52046	$5,8600 \times 10^{-3}$
Número de Simulações	HDM Modificado 561	MC   c.v: 0,058 $5 \times 10^4$

Tabela 7.15 – Solução Probabilística: análise NLG-EPP.

Modos de Falha Última	HDM Modificado	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
61 → 62	2,63727	$4,17887 \times 10^{-3}$
85 → 61 → 62	2,82731	$2,34701 \times 10^{-3}$
<b>Modos de Falha Serviço</b>		
96	2,34335	$9,55576 \times 10^{-3}$
85	2,41204	$7,93176 \times 10^{-3}$
85 → 96	2,82673	$2,35233 \times 10^{-3}$
85 → 61	3,67129	$1,20666 \times 10^{-4}$
61	3,93383	$4,18010 \times 10^{-5}$
HDM Modificado $P_{f Sistema}$	2,48235	$6,52588 \times 10^{-3}$
Simulação MC $P_{f Sistema}$	2,50515	$6,120 \times 10^{-3}$
Número de Simulações	HDM Modificado 977	MC   c.v: 0,057 $5 \times 10^4$

Tabela 7.16 – Solução Probabilística: análise NLG-EPB.

Modos de Falha Última	HDM Modificado	
	$\beta$	Probabilidade de Falha
61 → 62	2,63713	$4,18057 \times 10^{-3}$
85 → 61 → 62	2,84402	$2,22738 \times 10^{-3}$
85 → 89	3,01339	$1,29172 \times 10^{-3}$
85 → 89 → 96	3,67948	$1,16853 \times 10^{-4}$
<b>Modos de Falha Serviço</b>		
96	2,34335	$9,55576 \times 10^{-3}$
85	2,45871	$6,97181 \times 10^{-3}$
85 → 96	2,87907	$1,99423 \times 10^{-3}$
HDM Modificado $P_{f Sistema}$	2,41737	$7,81653 \times 10^{-3}$
Simulação MC $P_{f Sistema}$	2,45420	$7,0600 \times 10^{-3}$
Número de Simulações	HDM Modificado 565	MC   c.v: 0,053 $5 \times 10^4$

Tabela 7.17 – Solução Probabilística: análise NLG e Linear.

Falha última   NLG	$\beta$	Probabilidade de Falha
HDM Modificado	1,93756	$2,63383 \times 10^{-2}$
Simulação de MC	1,9430	$2,600 \times 10^{-2}$
Número de Simulações	HDM Modificado 561	MC   c.v: 0,031 $1 \times 10^5$
<b>Falha última   Linear</b>		
HDM Modificado	1,54622	$6,10260 \times 10^{-2}$
Simulação de MC	1,6122	$5,3460 \times 10^{-2}$
Número de Simulações	HDM Modificado 729	MC   c.v: 0,028 $1 \times 10^5$

A descrição dos resultados apresentados nas Tabelas 7.8 a 7.10 do exemplo anterior, pode ser utilizada na interpretação das Tabelas 7.14 a 7.17. Vários aspectos são comuns às respostas encontradas para o pilar com a treliça plana de 10 barras, a saber: a proximidade das soluções obtidas entre o HDM modificado com a simulação de Monte Carlo, assim como seu bom desempenho.

### 7.2.5 Conclusões a respeito da análise probabilística do pilar

A exemplo do problema anterior, os valores médios de carga e deslocamento<sup>8</sup>, assim como o índice de confiabilidade total, são agrupados na Tabela 7.18 e projetados na Figura 7.17, a fim de demonstrar a variação na resistência do pilar<sup>9</sup> e quanto isso influencia na confiabilidade da estrutura<sup>10</sup>.

Em comum ao comportamento registrado na treliça de 10 barras, observa-se que utilização da formulação NLG-EPB, também reduz a capacidade de carregamento estimado do pilar e conseqüentemente seu índice de confiabilidade, conforme Figura 7.17. A restrição de deslocamento permite uma menor exposição dos elementos ao seu limite de resistência, sendo assim, observando que o modo de falha dominante está associado ao deslocamento máximo no topo do pilar, acredita-se que nos problemas de otimização, a restrição de deslocamento resultará em estruturas mais robustas sob um índice de confiabilidade expressivo<sup>11</sup>

Tabela 7.18 – Valores médios da análise determinística  $\times$  índice de confiabilidade total da estrutura.

Análise	Análise Determinística			Análise Probabilística	
	$F_{v2}$ [N]	$u_{v2}$ [m]	Sequência	$\beta_{HDM}$	$\beta_{MC}$
NLG-EPH	6191	0,04144	96-85-44-31-33-35-46	2,5074	2,5205
NLG-EPP	5984	0,03934	96-85-44-35	2,4823	2,5051
NLG-EPB	5394	0,03573	96-85-35	2,4173	2,4542
NLG	4433	0,0300	96	1,9375	1,9430
Linear	4178	0,0300	96	1,5462	1,6122

<sup>8</sup>Registrados no instante que ocorre a falha última da estrutura (Figuras 7.12 a 7.16).

<sup>9</sup>Devido ao modelo físico/geométrico considerado na análise determinística – Tabela 7.18 — Figura 7.17a.

<sup>10</sup>Análise Probabilística: Tabela 7.18 — Figura 7.17b.

<sup>11</sup>Dado que a violação da restrição de deslocamento representa um modo de falha de serviço.

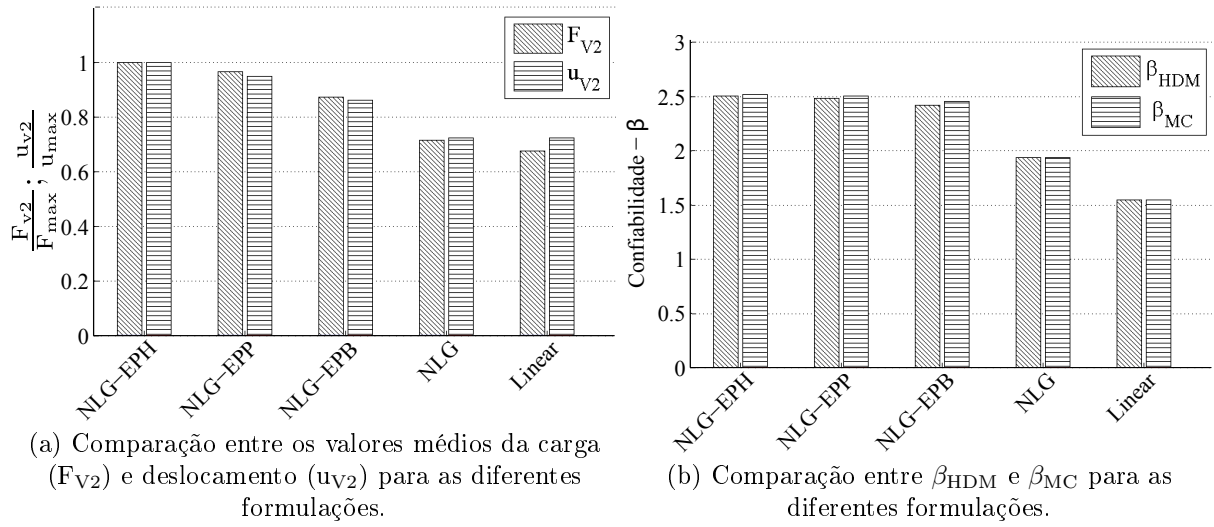


Figura 7.17 – Comparação determinística e probabilística para as diferentes formulações implementadas.

## 8. OTIMIZAÇÃO DO RISCO

Neste Capítulo serão abordadas algumas estratégias e detalhes a respeito da solução de problemas de otimização do risco, tendo em vista suas definições teóricas apresentadas no Capítulo 3 e os problemas abordados nas seções 5.6 e 7.2.

### 8.1 Formulação do Problema de Otimização do Risco

No intuito de buscar um projeto ótimo pelo aspecto econômico e de segurança, é necessário definir em termos monetários o critério de otimalidade adotado. Neste trabalho, o projeto ótimo é aquele que leva ao mínimo custo esperado total, isto é, o custo esperado total é a função objetivo do problema de otimização.

O problema de otimização do risco (RBRO - *Reliability-Based Risk Optimization*) é formulado segundo uma perspectiva de projeto inicial, ou seja, os custos são quantificados na fase de desenvolvimento do projeto, instante onde são realizadas as tomadas de decisões; desta forma, não são considerados nenhum modelo de desvalorização monetária. Neste contexto, o propósito do RBRO é de auxiliar na elaboração de um projeto que seja economicamente viável e seguro, a partir da escolha de seus parâmetros ótimos.

Em referência a Equação 3.2, a função custo esperado total (CET), definida como função objetivo para o RBRO, depende basicamente de dois parâmetros: o vetor  $\mathbf{x}$ , que corresponde aos parâmetros probabilísticos — características geométricas, propriedades de resistência dos materiais, solicitações — e o vetor  $\mathbf{z}$ , que contém as variáveis do problema de otimização, as quais também podem envolver as variáveis probabilísticas. Portanto, a função CET é definida da seguinte forma:

$$\text{CET}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \text{CI}(\mathbf{z}) + C_{\text{fu}}(\mathbf{z}) P_{\text{fu}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \langle C_{\text{fs}}(\mathbf{z}) \rangle^i \cdot \{P_{\text{fs}}(\mathbf{z}, \mathbf{x})\}^i \quad (8.1)$$

onde CI é o custo de fabricação inicial e instalação da estrutura,  $C_{\text{fu}}$  corresponde aos custos relacionados ao colapso total da estrutura, cuja probabilidade que este modo de falha ocorra (probabilidade de falha última) é definida por  $P_{\text{fu}}$ . O somatório faz referência aos n-modos de falhas de serviço,  $N_{\text{mod}}$ , cada qual pode envolver uma combinação de funções de estado limite pertencentes ao domínio de falha de serviço ( $C_{\text{fs}}$ ), ou seja, aquelas restrições probabilísticas cuja violação não comprometa a estabilidade da estrutura, porém

permitted to estimate the costs related to the repair of the structure. In this sense, it is emphasized that the importance of identifying the modes and sequences of failures, since these information bring fundamental elements to the formulation of the CET function, that is, each failure mode allows detecting the probabilistic restrictions violated along the analysis, which are associated with the consequences that they can cause to the system, allowing to quantify the  $C_{fs}$  and  $C_{fu}$  in monetary values in the following form:

$$\langle C_{fs}(\mathbf{z}) \rangle^i = \sum_{j=1}^{N_{\varepsilon_p}} [C_{f_{\varepsilon_p}}(\mathbf{z})]_j^i + \langle C_{fd}(\mathbf{z}) \rangle^i \quad \forall \{g\}^i \leq 0 \quad (8.2)$$

Equation 8.2 shows that the cost of failure of service for a determined  $i$ -th failure mode is composed by a set of active probabilistic restrictions,  $g(\mathbf{z}, \mathbf{x}) < 0$ . These, in their turn, refer to failures by plastic deformation or by maximum displacement. In this sense, considering initially the cost due to failure by plastic deformation of the  $j$ -th element belonging to the  $i$ -th failure mode,  $[C_{f_{\varepsilon_p}}(\mathbf{z})]_j^i$ , we have:

$$[C_{f_{\varepsilon_p}}(\mathbf{z})]_j^i = [A]_j^i [L]_j^i [\rho]_j^i \$_{mat} + \langle C_{rep} \rangle_j, \quad \forall [\varepsilon_{ep}]_j^i \neq 0 \quad (8.3)$$

where  $[A]_j^i$ ,  $[L]_j^i$  and  $[\rho]_j^i$  correspond, respectively, to the area of the transversal section of the  $j$ -th bar, its length and the density of the material, for the  $i$ -th failure mode.  $\$_{mat}$  refers to the cost of creation of the project added to the cost of the material, per unit of mass. The cost of repair per element, includes various fixed costs, being them: labor, materials — welding, painting, accessories, bolts, etc. —, equipments, elements of anchorage. If the cost of repair of the  $j$ -th failed element is denoted by  $\langle C_{rep} \rangle_j$ , Equation 8.3 allows to quantify the cost of failure of service proportional to the quantity of repairs executed on the structure.

In addition to the  $C_{f_{\varepsilon_p}}$ , the costs involved in the recovery of the structure due to the violation of the maximum displacement for the  $i$ -th failure mode  $\langle C_{fd}(\mathbf{z}) \rangle^i$ , are defined in the following form:

$$\langle C_{fd}(\mathbf{z}) \rangle^i = \sum_{k=1}^{K_{ele}} A_k L_k \rho_k \$_{mat} + \langle C_{rep} \rangle_k, \quad \forall \{u\}^i \geq u_{max} \quad (8.4)$$

onde  $K_{ele}$  corresponde a quantidade de elementos que devem ser acrescentados à estrutura para reforçá-la. Para se obter esta informação, estima-se uma massa incremental de acordo com o grau de violação da restrição probabilística do  $i$ -ésimo modo de falha  $\{u\}^i \geq u_{max}$ . Em seguida, fraciona-se esta massa gerando novas barras que serão anexadas aos elementos que apresentarem maior deformação.

Por fim, o custo de falha total da estrutura é denotado pela Equação 8.5, como resultado da multiplicação do CI pelo fator de falha última  $f_{fu}$ . Este fator multiplicativo é aplicado para obtenção de um custo relativo ao evento colapso total da estrutura, visto que no CI não são consideradas as consequências devido a falha total da estrutura, tais como; custos de descarte, indenizações, danos a terceiros, etc. Sendo possível prever os custos envolvidos no evento falha última, o  $C_{fu}$  é associado ao próprio valor estimado para o evento, desmerecendo a utilização da Equação 8.5.

$$C_{fu}(\mathbf{z}) = f_{fu} CI(\mathbf{z}) \quad (8.5)$$

$$CI(\mathbf{z}) = \sum_{n=1}^{N_{ele}} A_n L_n \rho_n \$_{mat} \quad (8.6)$$

onde  $N_{nel}$  refere-se ao número total de elementos da estrutura.

O problema de otimização do risco, portanto, é formulado como sendo:

$$\begin{aligned} &\text{encontrar : } \mathbf{z}^*, \mathbf{P}_f^*(\mathbf{z}^*, \mathbf{x}) \\ &\text{que minimize : } CET(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a : } \mathbf{z} \in (z_i^{\min}, z_i^{\max}), \quad i = 1, \dots, n_{vp} \end{aligned} \quad (8.7)$$

onde  $z_i^{\min}$  e  $z_i^{\max}$  são os limites inferiores e superiores das  $n$ -variáveis de projeto,  $n_{vp}$ , do problema de otimização, respectivamente.

A solução da Equação 8.7, é obtida empregando o algoritmo de otimização por enxame de partículas, PSO (*Particle Swarm Optimization*), em conjunto com o HDM modificado, ou seja, para cada combinação de variáveis de projeto  $(z_1, z_2, \dots, z_{n_{vp}})$  su-

geridas pelo otimizador — PSO —, as probabilidades de falha última e/ou serviço, são estimadas via análise probabilística com o HDM modificado. Além disso, sabendo que estamos abordando problemas implícitos, durante as simulações probabilísticas são feitas várias chamadas às análises determinísticas.

## 8.2 Exemplos Numéricos

Ao longo das seções que antecedem este Capítulo, a treliça plana de 10 barras e o pilar de 95 barras foram analisados sob dois aspectos, a saber: na seção 5.6 foram realizadas apenas análises determinísticas a fim de avaliar os efeitos causados pelo modelo constitutivo e geométrico à curva de equilíbrio destas estruturas; já na seção 7.2, estes mesmo efeitos foram avaliados segundo uma abordagem probabilística. Agora, aumenta-se o escopo do problema, submetendo estas estruturas, inicialmente, à otimização determinística e em seguida à otimização do risco, utilizando como otimizador o algoritmo PSO.

A função objetivo será demonstrada pela variação das áreas dos banzos e diagonais, mantendo fixas as áreas dos montantes<sup>1</sup>. O propósito deste estudo consiste em interpretar o comportamento da função objetivo frente às formulações DDO e RBRO, permitindo assim analisar os efeitos que as restrições determinísticas e probabilísticas causam à topologia desta função.

Ao final de cada exemplo, é realizada uma comparação entre as soluções ótimas. Contudo, sabendo que as formulações DDO e RBRO não são comparáveis diretamente<sup>2</sup>, tanto que os objetivos são de grandezas diferentes, a seguinte hipótese será adotada: (i) primeiramente, é realizada uma análise probabilística da configuração ótima do pilar, obtida com o DDO-L e DDO-NL; (ii) em seguida, conhecendo as probabilidades de falha última e/ou serviço, assim como os respectivos modos de falha, calculam-se os custos associados à configuração geométrica proposta pelo DDO-L e/ou DDO-NL com as Equações 8.1 a 8.6. O mesmo procedimento é aplicado aos parâmetros utilizados no projeto real (áreas dos banzos, diagonais e montantes), destacando-se que no cálculo probabilístico do problema real são realizadas análises determinísticas não lineares a fim de captar os modos de falha de serviço.

---

<sup>1</sup>Áreas dos montantes: os valores considerados para as áreas dos montantes correspondem à solução ótima obtida com o algoritmo PSO.

<sup>2</sup>O DDO considera como restrição parâmetros determinísticos, os quais não carregam informações quanto a aleatoriedade das variáveis. Diferentemente do RBRO, cujas restrições probabilísticas consideram os efeitos das incertezas e custos esperados de falha.



Uma vez que os problemas de otimização aqui considerados possuem somente três variáveis de projeto, a solução ótima pelo PSO pode ser encontrada utilizando apenas 15 partículas. Esse e demais parâmetros do PSO estão disponíveis na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 – Parâmetros de calibração do PSO.

$N^{\circ}$ partículas	$\omega$	$c_1$	$c_2$	tol.cov	tol.FP
15	0,7	2,03	2,03	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-5}$

A Tabela 8.2 sumariza as otimizações realizadas neste trabalho, descrevendo as características chaves de cada formulação que será aplicada aos exemplos que seguem.

Tabela 8.2 – Síntese das formulações consideradas neste capítulo.

Referência	Descrição	Restrição	Solução
DDO-L	Análise determinística linear	Determinística <sup>3</sup> : $\sigma$ & $u_{\max}$	Configuração ótima
DDO-NL	Análise determinística não linear <sup>4</sup>	Determinística: $\varepsilon$ & $u_{\max}$	Configuração ótima
RBRO-L	Custos $\rightarrow$ Cálculo probabilístico $\rightarrow$ Análise determinística linear	Probabilística: $\sigma$ & $u_{\max}$	CET ótimo ; $P_f^*$ ótima; Configuração ótima
RBRO-NL	Custos $\rightarrow$ Cálculo probabilístico $\rightarrow$ Análise determinística não linear <sup>4</sup>	Probabilística: $\varepsilon$ & $u_{\max}$	CET ótimo ; $P_f^*$ ótima; Configuração ótima

### 8.2.1 Treliça Plana de 10 Barras

As propriedades geométricas e estatísticas são as mesmas apresentadas nas subseções 5.6.3 e 7.2.2 — Tabela 7.7, respectivamente, sendo a área da seção transversal dos banzos, montantes e diagonais, tomadas como variáveis de projeto/probabilísticas, tal que:  $\mathbf{z} = [A_{1-4}, A_{5-6}, A_{7-10}]$  e  $\mathbf{x} = [A_{1-4}, A_{5-6}, A_{7-10}, \sigma_{1-10}, F_{v_2}, F_{v_4}]$ . Os valores inferiores e superiores das variáveis de projeto, são tomados como  $[6,4500 \times 10^{-5}, 0,1][m^2]$ .

<sup>3</sup>Restrição Determinística: na seção 6.4.1, as Equações 6.20 a 6.23 representavam as restrições probabilísticas do problema de confiabilidade, entretanto, na formulação DDO elas passam a ser escritas na forma de restrições determinísticas do problema.

<sup>4</sup>Os estudos realizados nas seções anteriores, demonstraram que a não linearidade geométrica associada aos efeitos pós-flambagem, representam a condição crítica de análise não linear dos problemas abordados. Sendo assim, este tipo de análise será utilizada tanto no DDO-NL quanto no RBRO-NL.

### 8.2.2 Otimização Determinística

O problema de otimização da treliça plana de 10 barras, segundo a formulação DDO, consiste basicamente em:

$$\begin{aligned}
 & \text{encontrar : } \mathbf{z}^* \\
 & \text{que minimize : } \text{massa}(\mathbf{z}) \\
 & \text{sujeito a : } g_i(\mathbf{z}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, 12 \\
 & 6,450 \times 10^{-5} \leq z_j \leq 0,1, \quad j = 1, \dots, 3
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

A solução deste problema consiste em minimizar a massa da estrutura, sujeita às restrições determinísticas ( $g_i(\mathbf{z})$  — Equações 7.10 a 7.13), e aos limites inferiores e superiores dos três grupos de variáveis de projeto ( $\mathbf{z} = [A_{1-4}, A_{5-6}, A_{7-10}]$ ).

Na Tabela 8.3 são apresentados os valores ótimos para as variáveis de projeto e massa, obtidos através do PSO, com as formulações DDO-L e DDO-NL.

Tabela 8.3 – Valores ótimos das variáveis de projeto e massa.

Variável de Projeto & Massa	DDO-L	DDO-NL
$A_{1-4}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,7705 \times 10^{-2}$	$1,7417 \times 10^{-2}$
$A_{5-6}$ [m <sup>2</sup> ]	$8,3265 \times 10^{-4}$	$6,4500 \times 10^{-5}$
$A_{7-10}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,9820 \times 10^{-2}$	$2,0553 \times 10^{-2}$
Massa [kg]	$4,6724 \times 10^3$	$4,7128 \times 10^3$

A solução ótima encontrada com ambas as formulações é muito semelhante. Isto pode ser justificado pela ausência dos efeitos geométricos para esta configuração de estrutura. Na análise determinística deste problema (subseção 5.6.3 — Figura 5.21), não foram detectados efeitos geométricos na curva de equilíbrio da treliça de 10 barras, tanto que a carga crítica<sup>5</sup>, não varia entre as formulações linear e não linear. Sendo assim, os limites do domínio de segurança pela formulação DDO-L e DDO-NL não apresentam grandes diferenças, como pode ser observado nas Figuras 8.1 ,8.2 e 8.3.

<sup>5</sup>Neste caso, trata-se do carregamento responsável por provocar a falha do primeiro elemento.

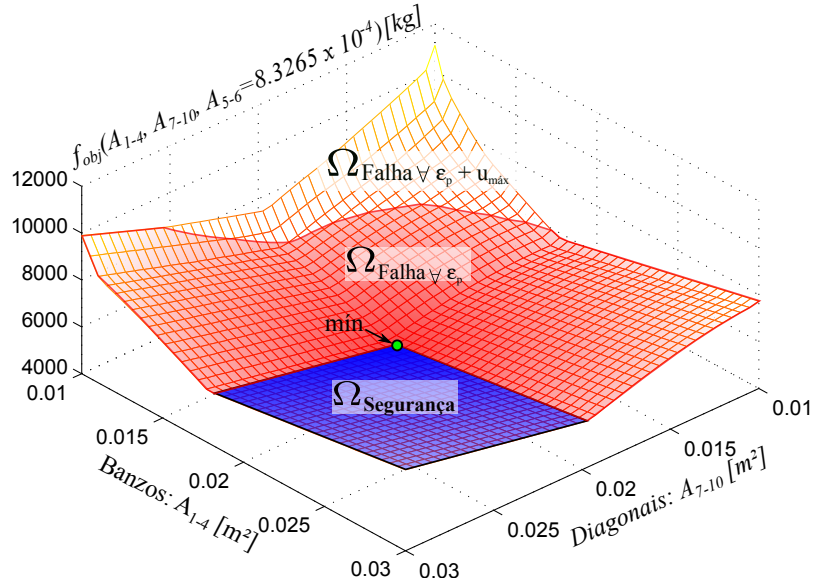


Figura 8.1 – Função objetivo do DDO-L.

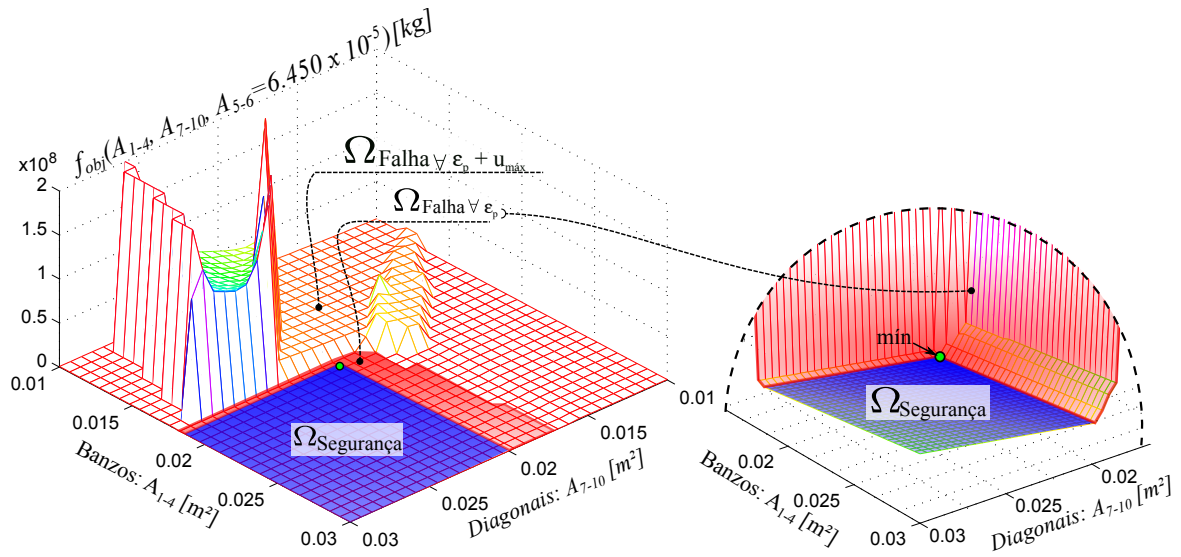


Figura 8.2 – Função objetivo do DDO-NL.

O domínio de falha manifesta uma incontestável diferença entre a DDO-L e DDO-NL. Para a Figura 8.2, tal comportamento deve-se aos efeitos causados pelas não linearidades aos deslocamentos e deformações (restrição do problema), os quais provocam perturbações na equação de penalização da função objetivo (Equação 8.9).

$$FP_{j+1}^i = FP_j^i + \left( \frac{|\varepsilon_p^i|}{|\varepsilon^i|} \right), \quad \forall \varepsilon_p^i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n_{\varepsilon_p^i} \quad (8.9a)$$

$$FP_{j+1}^k = FP_j^k + \left( \frac{|u^k|}{u_{\max}^k} \right), \quad \forall |u^k| \geq u_{\max}^k, \quad k = 1, \dots, n_{u^k} \quad (8.9b)$$

onde  $n_{\varepsilon_p^i}$  e  $n_{u^k}$  são, respectivamente, o número total de elementos com deformação plástica e o número total de deslocamentos maior do que a flecha máxima admissível  $u_{\max}^k$ .

Como resultado, a topologia do domínio de falha recai ao nível de deformação plástica acumulado pelo elemento, isto é, com base na Equação 8.9a, observa-se que o aumento da deformação plástica resulta numa maior penalização ( $FP_{j+1}^i$ ) que será aplicada à função objetivo, portanto, visto que a análise determinística é finalizada pelo critério de instabilidade da estrutura, tanto menor será  $\varepsilon_p^i$  quanto antes a estrutura se tornar instável. Neste sentido, se as variáveis de projeto oferecidas pelo otimizador tornarem o sistema instável rapidamente, o pequeno acúmulo de deformação plástica provocará uma flutuação na topologia da função objetivo e possivelmente a formação de mínimos locais no domínio de falha.

Na Figura 8.1, o domínio de falha pelo DDO-L surge em função do comportamento linear da tensão, pois a medida que a combinação das variáveis resultar em maiores tensões atuando nas barras, as restrições incrementam a função objetivo de forma proporcional ao nível de tensão excedida pelas barras, permitindo assim que a função seja suave e convexa.

De acordo com o exposto nos parágrafos anteriores, o comportamento altamente não linear da função objetivo obtida com a DDO-NL, mostra a presença de mínimos locais no domínio de falha. Desta forma, sabendo que os mínimos locais dificultam a solução do problema de otimização, é justificável a utilização do algoritmo de otimização por enxame de partículas (PSO) como otimizador deste tipo de problema, uma vez que o PSO não fica “preso” a mínimos locais muito diferentes do mínimo global.

Ressalta-se ainda que na DDO-L, a função objetivo é suave e convexa, demonstrando a existência de um único ponto de mínimo para esta função. Para este tipo de problema, os algoritmos de otimização baseados em gradientes são mais apropriados.

A Figura 8.3, apresenta o comportamento da função objetivo pela variação das áreas dos banzos (Figura 8.3a) e diagonais (Figura 8.3b), mantendo fixa as áreas dos montantes.

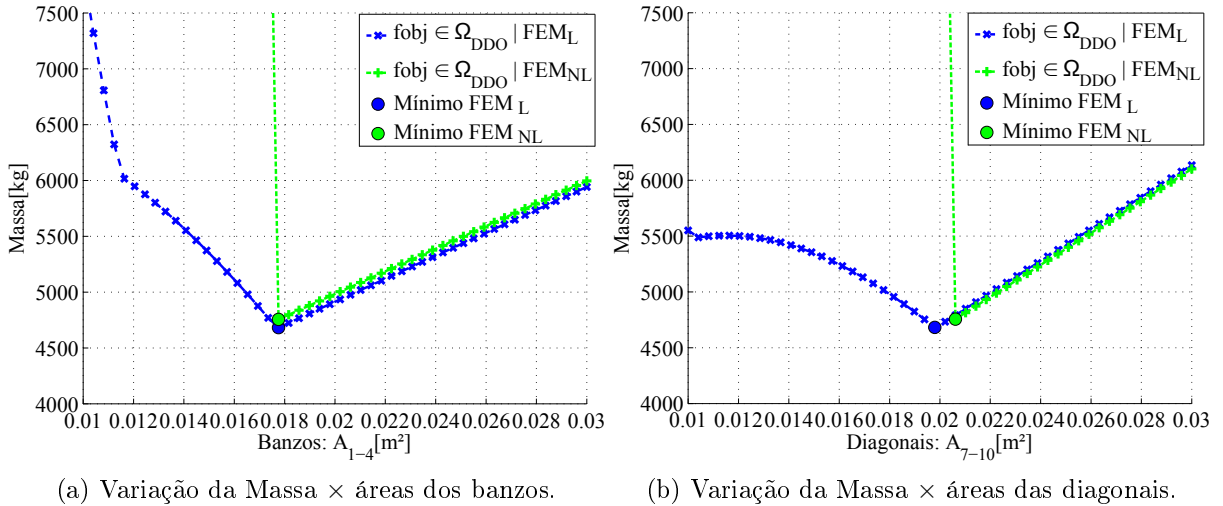


Figura 8.3 – Comportamento da função objetivo para diferentes valores das variáveis de projeto.

Os gráficos apresentados na Figura 8.3 mostram que, a violação da restrição nas vizinhanças do mínimo global, produz um expressivo salto na função objetivo pelo DDO-NL. Esta perturbação é provocada pela penalização aplicada à função objetivo no momento da falha, conforme Equação 8.9. Entretanto, como era esperado, a formulação DDO-L é pouco sensível às restrições nas fronteiras do mínimo global, resultando num comportamento suave da função objetivo nas proximidades da solução. Além disso, os gráficos mostram que os limites e a forma do domínio de segurança para ambas as formulações são muito semelhantes, justificando a proximidade entre as soluções via DDO-L e DDO-NL.

### 8.2.3 Otimização do Risco

Conforme discutido anteriormente, a função objetivo do RBRO está associada aos custos envolvidos em todas as etapas do projeto estrutural, os quais exercem grande influência sobre o CET. Claramente, é necessário definir valores apropriados para os custos, no intuito de executar uma otimização do risco de origem estrutural prática. Com este propósito, uma configuração de custos de referência é denotada na Tabela 8.4 após um breve levantamento à campo<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Para evitar uma gestão subjetiva do RBRO, realizou-se uma pesquisa à campo procurando obter uma série de informações e parâmetros normalmente utilizados pelos engenheiros e projetistas de estruturas metálicas.

Tabela 8.4 – Custos de referência utilizados na treliça de 10 barras.

Referência	Valor(es)	Unidade
$C_{\text{rep}}$	450,00	R\$/elemento
$\$_{\text{mat}}$	12,00	R\$/kg
$f_{\text{fu}}$	50	-

Na função objetivo do RBRO (Equação 8.1), atuam apenas restrições probabilísticas em termos dos custos esperados de falha. No intuito de avaliar a influência destas restrições sobre a solução do RBRO, a Figura 8.4 apresenta a superfície da função objetivo para dois grupos de variáveis de projeto – área dos banzos e das diagonais.

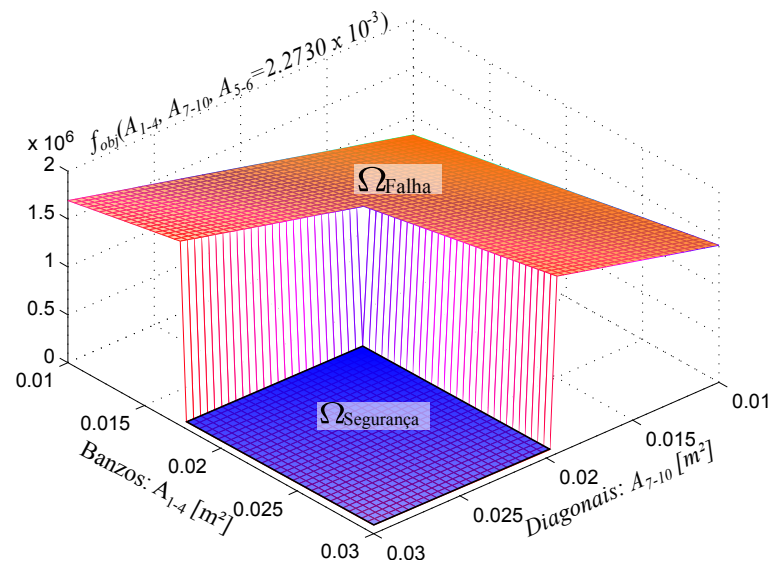


Figura 8.4 – Função objetivo do RBRO considerando apenas restrições probabilísticas.

A forma da função objetivo apresentada na Figura 8.4, denuncia um aspecto preocupante da Equação 8.1, a saber: se a função objetivo do RBRO, for aplicada para todo o domínio estocástico, o otimizador poderá ficar “preso” em algum ponto pertencente ao domínio de falha. A Figura 8.4 mostra claramente este comportamento, dando indícios de que a formulação do RBRO com base no CET, poderá convergir dentro do domínio de falha  $\Omega_{\text{Falha}}$ . Diante deste cenário, acredita-se que devam ser aplicadas restrições determinísticas ao problema a fim de impor limites ao domínio de atuação do RBRO, ou seja, criar uma região viável de utilização do CET como função objetivo do problema de otimização.

Para contornar este problema, acrescentou-se à otimização do risco uma análise determinística previamente à análise probabilística. Com isso, estando o projeto originalmente falho, aplicam-se restrições determinística, tal como é feito no DDO, para que a topologia da função pertencente ao  $\Omega_{\text{Falha}}$  “conduza” o otimizador para dentro do domínio  $\Omega_{\text{Segurança Determinístico}}$ . Sendo assim, no  $\Omega_{\text{Segurança Determinístico}}$ , a Equação 8.1 pode ser utilizada satisfatoriamente pelo RBRO, considerando apenas as restrições probabilísticas.

Os resultados desta nova abordagem aplicada ao RBRO podem ser observados nas figuras abaixo.

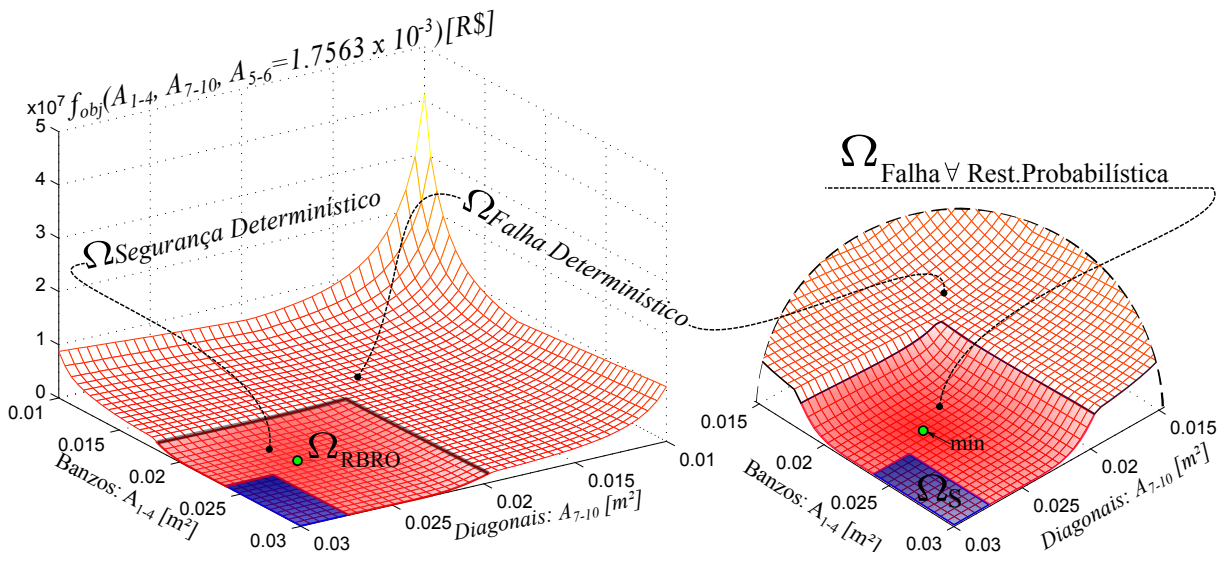


Figura 8.5 – Função objetivo do RBRO-L.

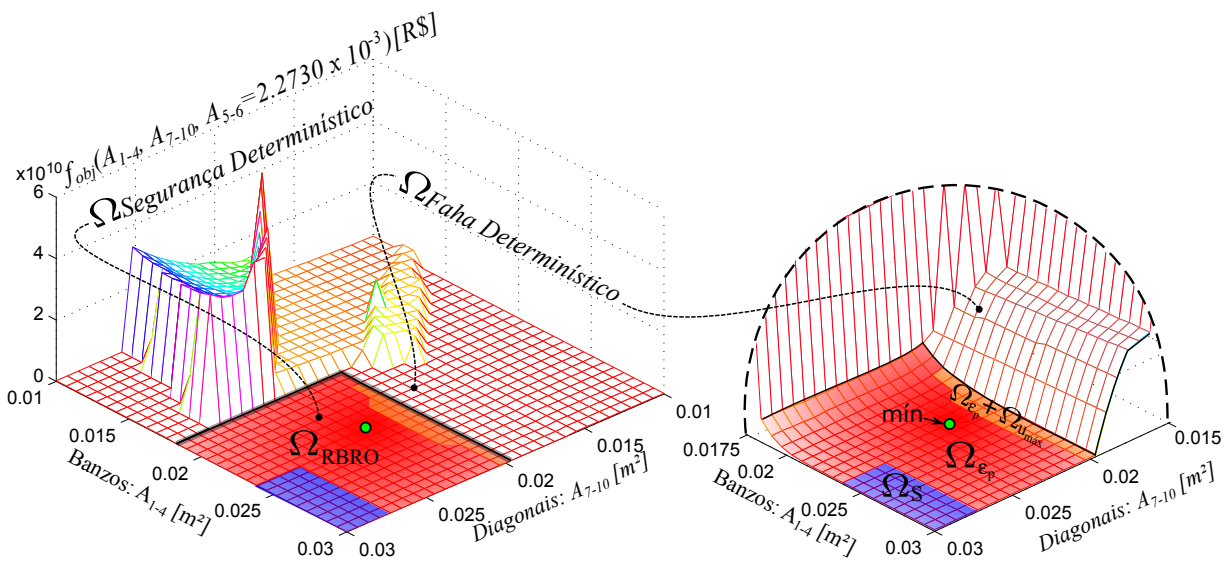


Figura 8.6 – Função objetivo do RBRO-NL.

As Figuras 8.5 e 8.6 mostram claramente os efeitos causados pelas restrições determinísticas ao domínio de falha, o qual se assemelha ao apresentado nas Figuras 8.1 e 8.2 para o DDO. Desta forma, assegura-se que a função objetivo apresentará um ponto de mínimo localizado dentro do domínio de segurança.

O detalhe em maior escala do  $\Omega_{\text{Segurança Determinístico}} \cap \Omega_{\text{Falha Determinístico}}$ , à direita em cada figura, tenta representar de forma mais clara o domínio pelo qual nenhuma restrição determinística foi violada. Esta região corresponde ao domínio de atuação do RBRO ( $\Omega_{\text{RBRO}}$ ), no qual o número esperado de falha associado aos respectivos custos, permite que as restrições probabilísticas atuem de forma eficaz. Vale ressaltar que dentro do  $\Omega_{\text{RBRO}}$  concorrem duas regiões. Para uma delas,  $\Omega_{\text{S}}$ , qualquer combinação das variáveis ( $A_{1-4}$  com  $A_{7-10}$ ) resultará num projeto 100% seguro, já na outra,  $\Omega_{\text{Falha Probabilístico}}$ , observa-se a incidência de restrições probabilísticas, as quais surgem em função da probabilidade de ocorrer o evento falha de serviço devido à: deformação plástica ( $\Omega_{\varepsilon_p}$ ), violação do limite de deslocamento ( $\Omega_{u_{\text{máx}}}$ ) ou combinação dos dois ( $\Omega_{\varepsilon_p} + \Omega_{u_{\text{máx}}}$ ).

A Figura 8.7a permite uma avaliação do função objetivo para diferentes valores das áreas dos banzos, mantendo fixas as áreas dos montantes e diagonais<sup>7</sup>. Já na Figura 8.7b, a função objetivo assume diferentes valores pela variação das áreas dos montantes, mantendo fixas as áreas dos banzos e diagonais<sup>8</sup>.

Nos gráficos da Figura 8.7, observa-se que a função objetivo é suave e convexa nas proximidades do ponto de mínimo, demonstrando que há um mínimo global que representa o custo esperado total da estrutura.

Sendo assim, aplicando o algoritmo PSO ao problema corrente, chega-se a solução ótima apresentada na Tabela 8.5.

<sup>7</sup>RBRO - Análise Linear:  $A_{1-4} = [0, 01; 0, 03]$ ,  $A_{5-6} = 2, 2730 \times 10^{-3}$  e  $A_{7-10} = 2, 5275 \times 10^{-2}$ ; RBRO - Análise Não Linear:  $A_{1-4} = [0, 01; 0, 03]$ ,  $A_{5-6} = 2, 2730 \times 10^{-3}$  e  $A_{7-10} = 2, 2425 \times 10^{-2}$

<sup>8</sup>RBRO - Análise Linear:  $A_{7-10} = [0, 01; 0, 03]$ ,  $A_{1-4} = 2, 3053 \times 10^{-2}$  e  $A_{5-6} = 2, 5275 \times 10^{-3}$ ; RBRO - Análise Não Linear:  $A_{7-10} = [0, 01; 0, 03]$ ,  $A_{1-4} = 2, 3053 \times 10^{-2}$  e  $A_{5-6} = 2, 2730 \times 10^{-3}$



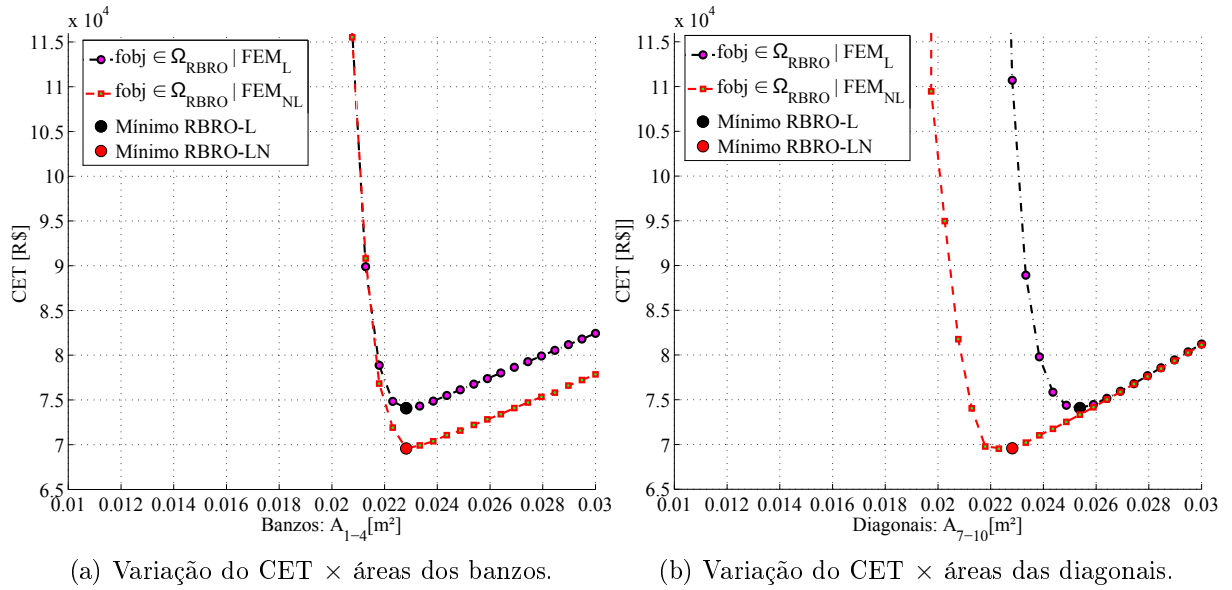


Figura 8.7 – Comportamento da função objetivo para diferentes valores das variáveis de projeto.

Tabela 8.5 – Solução ótima do RBRO.

Parâmetros de Otimização	RBRO-L	RBRO-NL
$A_{1-4}$ [m <sup>2</sup> ]	$2,2803 \times 10^{-2}$	$2,3053 \times 10^{-2}$
$A_{5-6}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,7563 \times 10^{-3}$	$2,2730 \times 10^{-3}$
$A_{7-10}$ [m <sup>2</sup> ]	$2,5275 \times 10^{-2}$	$2,2425 \times 10^{-2}$
Massa [kg]	$6,0208 \times 10^3$	$5,664 \times 10^3$
CET [R\$]	$7,3903 \times 10^4$	$6,8719 \times 10^4$

A Tabela 8.5 permite observar que o RBRO-L obteve uma estrutura menos otimizada em termos de massa, a um maior CET em relação ao RBRO-NL. Isto se deve à ausência do evento falha de serviço, ou seja, na análise determinística linear ignora-se a redundância do problema, tal que a falha total do sistema ocorre sempre que pelo menos uma função de estado for violada, típico de sistemas em série<sup>9</sup>. Com base nesta hipótese, à medida que a combinação das variáveis de otimização resultam numa estrutura mais susceptível à violação de qualquer restrição probabilística, o número esperado de falhas

<sup>9</sup>Esta hipótese é adotada para demonstrarmos a relevância atribuída à identificação dos múltiplos modos de falhas, propriedade do HDM modificado, tal que para sistemas redundantes um único modo de falha não permite representar adequadamente o estado limite do sistema, entretanto, grande parte dos estudos sobre otimização do risco tratam o problema probabilístico condicionado apenas ao estado limite último.

última aumenta, levando a uma maior influência dos custos de falha sobre o CET.

As Figuras 8.8a e 8.8b mostram a convergência do CET e da massa, respectivamente, durante as iterações do PSO.

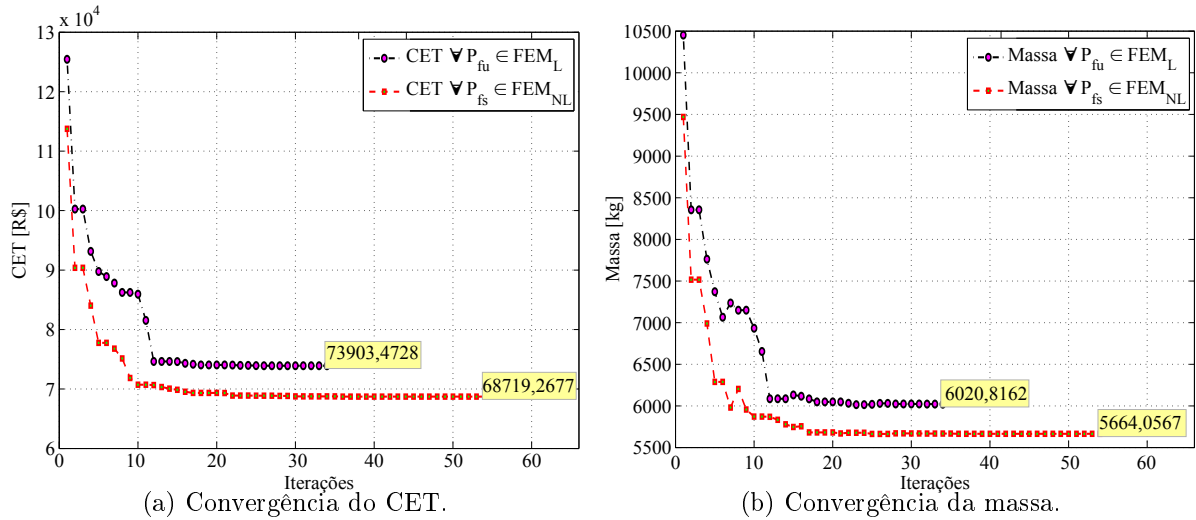


Figura 8.8 – Convergência do CET e massa pelo RBRO-L e RBRO-NL.

A Figura 8.9 apresenta a variação do índice de confiabilidade ( $\beta$ ) ao longo das iterações. Esse gráfico complementa as soluções do RBRO apresentadas anteriormente, ou seja, observa-se que o RBRO - Não Linear, atinge um maior  $\beta$  em relação ao RBRO - Linear ao final da otimização, demonstrando que: a estrutura otimizada com o RBRO - Não Linear, além de ser mais leve e mais econômica financeiramente, é mais segura em relação a solução oferecida pelo RBRO - Linear.

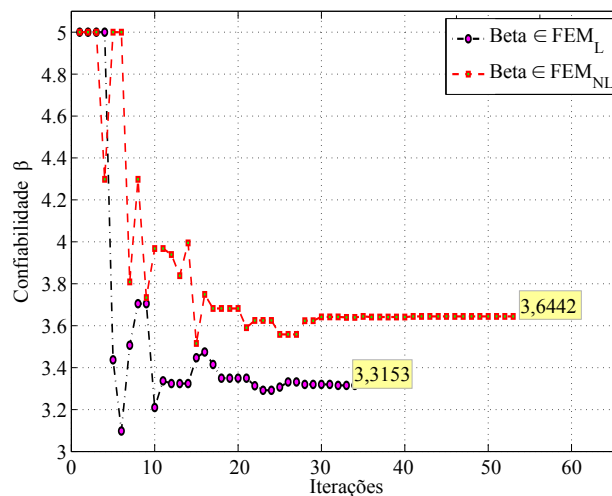


Figura 8.9 – Convergência do índice de confiabilidade: RBRO-L e RBRO-NL.

Os gráficos que seguem apresentam a convergência dos custos inicial de fabricação ( Figura 8.10a) e dos custos relacionados à probabilidade de ocorrerem os eventos falha última e falha de serviço (Figura 8.10b). Observa-se que o RBRO - Não Linear, chega a um custo inicial de fabricação da estrutura inferior ao RBRO - Linear. Além do mais, os riscos de falha última associados ao RBRO - Não Linear também são menores do que o RBRO - Linear (aproximadamente 3,62 vezes – Figura 8.10b). Sendo assim, além do RBRO - Não Linear encontrar uma solução mais leve e econômica, a segurança associada à esta configuração de estrutura, resulta em baixos custos para as eventuais falhas de serviço ou falha última da estrutura.

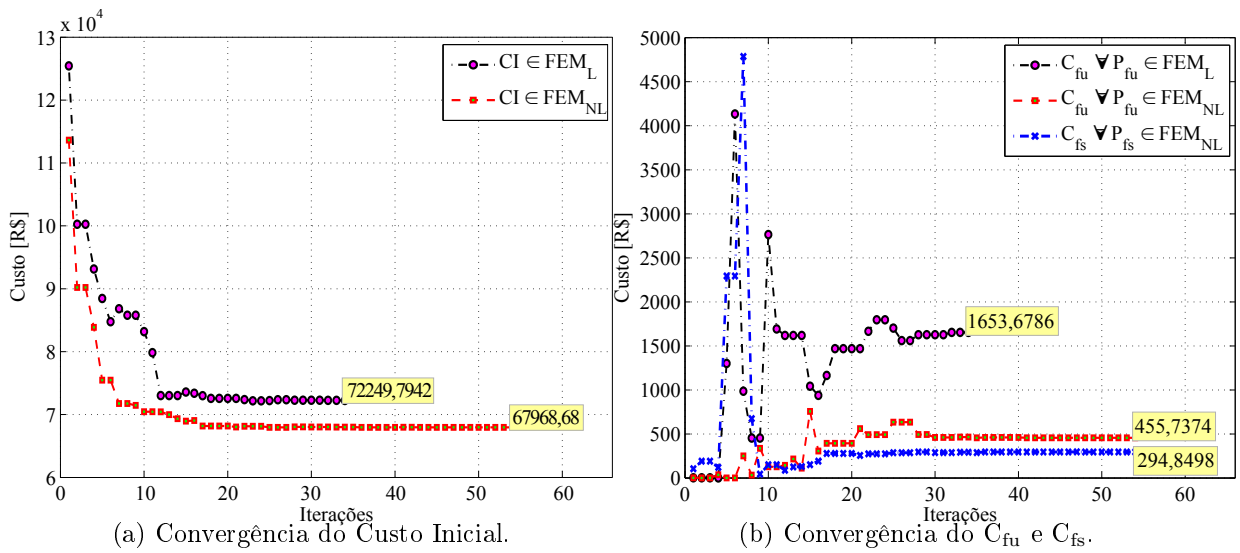


Figura 8.10 – Convergência do CI,  $C_{fu}$  e  $C_{fs}$ .

Para complementar a Figura 8.10b, a Tabela 8.6 apresenta os eventos correspondentes aos modos de falha de serviço, respectivas probabilidades de falha e índices de confiabilidade.

Tabela 8.6 – Solução probabilística associada ao evento falha de serviço.

Modo de Falha	$P_{f Serviço}$	$\beta_{Serviço}$
8	$1,8636 \times 10^{-2}$	2,08278
8 → 5 → 12	$3,0544 \times 10^{-3}$	2,74189
8 → 5	$1,8113 \times 10^{-3}$	2,90928
8 → 5 → 12 → 13	$3,8138 \times 10^{-4}$	3,36596
3	$1,3941 \times 10^{-5}$	4,19011

### 8.2.4 Conclusões e comparações entre as soluções ótimas

Procurando oferecer uma maior clareza dos resultados obtidos com o DDO e RBRO, as soluções ótimas apresentadas nas Tabelas 8.3 e 8.5 serão replicadas na forma de gráficos a fim de potencializar suas diferenças em termos de custos, confiabilidade, massa e valores das variáveis de projeto. As Figuras 8.11 e 9.2 mostram esta ideia.

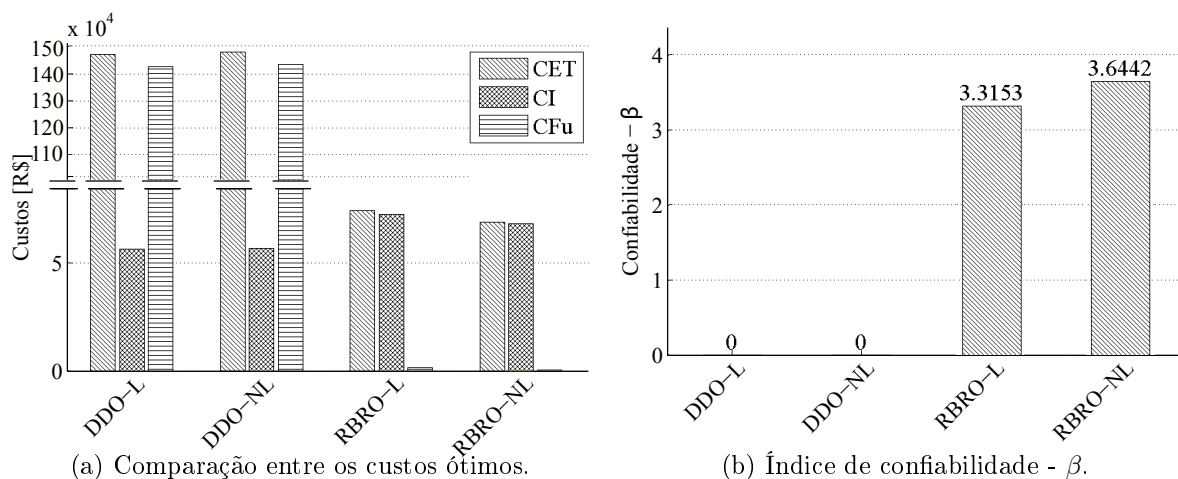


Figura 8.11 – Custos ótimos e confiabilidade do projeto otimizado.

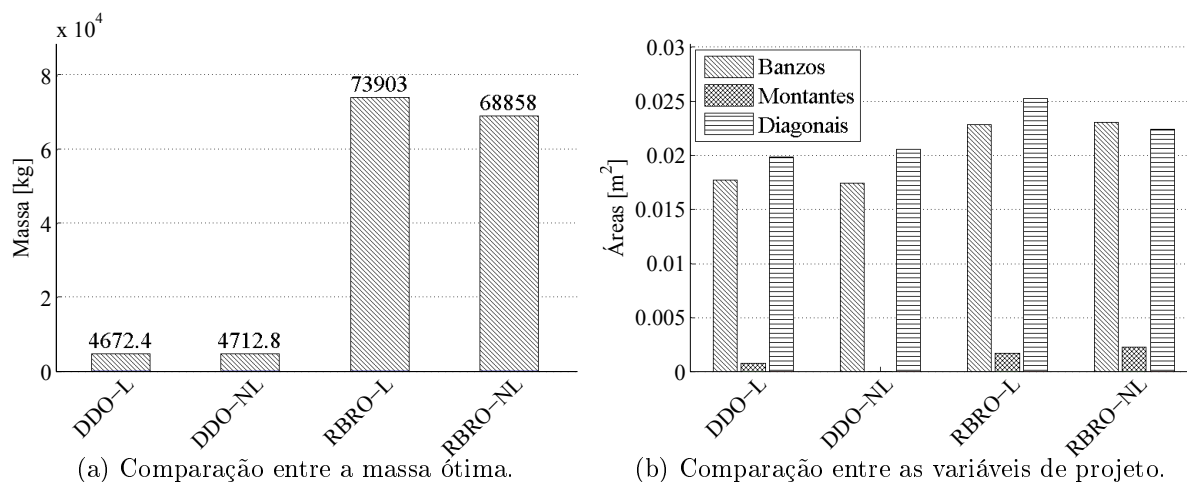


Figura 8.12 – Solução ótima em termos da massa e variáveis de projeto.

Analisando a Figura 8.12a, observa-se que a otimização determinística permite obter uma estrutura mais leve em relação à otimização baseada em risco<sup>10</sup>. Entretanto,

<sup>10</sup> Isso é justificado pela ausência das incertezas e custos nas restrições do problema de otimização,

como a solução da DDO localiza-se nos limites do domínio de segurança<sup>11</sup>, seu índice de confiabilidade é zero (Figura 8.11b). Isso causa um aumento expressivo no risco de falha última da estrutura e, conseqüentemente, ao CET (de acordo com a Equação 8.1). Esta ideia é confirmada nos gráficos da Figura 8.11.

Por fim, pela Figura 8.11, conclui-se que o CET ótimo foi encontrado com a formulação RBRO-NL. Esta solução é atribuída à particularidade do RBRO-NL em detectar os eventos falha de serviço<sup>12</sup>, os quais exercem uma menor influência sobre a função objetivo em comparação com o RBRO-L<sup>13</sup>, resultando num menor valor de custo esperado total.

### 8.2.5 Pilar 95 Barras

Na seção 5.6.4 – Tabela 5.3 e seção 7.2.4 – Tabela 7.13, foram apresentadas as propriedades geométricas e estatísticas deste problema, as quais são replicadas à otimização corrente, sendo:  $\mathbf{z}=[A_{1-28}, A_{29-56}, A_{57-95}]$  e  $\mathbf{x}=[A_{1-28}, A_{29-56}, A_{57-95}, \sigma_{1-95}, E_{1-95}, F_{V1-4}, F_{H1-4}]$ . Os valores inferiores e superiores das variáveis de projeto na otimização correspondem à  $[6, 4520 \times 10^{-5}, 0, 05][m^2]$ .

### 8.2.6 Otimização Determinística

A exemplo do caso anteriormente analisado, treliça plana de 10 barras, realiza-se primeiramente uma otimização determinística do pilar. Atendendo as premissas consideradas na concepção do projeto real, um fator de majoração igual a 1.4 será aplicado ao carregamento no topo do pilar<sup>14</sup>, corrigindo o carregamento para:  $F_{V1-4} = 6,1370 \times 10^3$ ,  $F_{H1-4} = 1,9728 \times 10^5$ . Salienta-se que o referido fator aplica-se apenas ao DDO. Sob estas considerações, o problema de otimização do pilar, segundo a formulação DDO, consiste basicamente em:

---

visto que o DDO consiste em resolver o problema de otimização considerando como restrições apenas parâmetros característicos, sem quaisquer informação quanto a aleatoriedade das variáveis e/ou custos.

<sup>11</sup>Observar a localização do ponto de mínimo da função objetivo nas Figuras 8.1 e 8.2.

<sup>12</sup>A identificação dos eventos falha de serviço deve-se: (i) a formulação numérica não linear, a qual permite que a análise determinística represente adequadamente o colapso individual e/ou global da estrutura; (ii) ao método probabilístico proposto que torna possível a identificação dos múltiplos modos de falhas existentes

<sup>13</sup>No RBRO-L são consideradas apenas os eventos falha última, os quais exercem maior influência sobre a função objetivo.

<sup>14</sup>Pelos padrões normais de dimensionamento de estruturas metálicas, os sistemas estruturais são projetados atendendo a um certo nível de segurança pela imposição de fatores de majoração para os carregamentos e de minoração para os materiais, recomendados por normas.

$$\begin{aligned}
& \text{encontrar : } \mathbf{z}^* \\
& \text{que minimize : } \text{massa}(\mathbf{z}) \\
& \text{sujeito a : } g_i(\mathbf{z}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, 96 \\
& 6,450 \times 10^{-5} \leq z_j \leq 0,05, \quad j = 1, \dots, 3
\end{aligned} \tag{8.10}$$

A solução deste problema consiste em minimizar a massa da estrutura, sujeita às restrições determinísticas ( $g_i(\mathbf{z})$  — Equações 7.14 a 7.17), e aos limites inferiores e superiores dos três grupos de variáveis de projeto ( $\mathbf{z} = [A_{1-28}, A_{29-56}, A_{57-95}]$ ).

Aplicando o algoritmo de otimização PSO na Equação 8.10, encontra-se a solução ótima apresentada na Tabela 8.7.

Tabela 8.7 – Valores ótimos das variáveis de projeto e massa.

Variáveis de Projeto & Massa	DDO-L	DDO-NL
$A_{1-28}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,888 \times 10^{-3}$	$1,6663 \times 10^{-3}$
$A_{29-56}$ [m <sup>2</sup> ]	$3,860 \times 10^{-4}$	$3,6067 \times 10^{-4}$
$A_{57-95}$ [m <sup>2</sup> ]	$8,8889 \times 10^{-5}$	$9,0080 \times 10^{-5}$
Massa [kg]	685,4216	614,6570

Observa-se que a configuração ótima encontrada pelo DDO-NL, em termos de massa, é melhor otimizada em comparação ao DDO-L. Possivelmente esta diferença esteja relacionada aos efeitos físicos e geométricos captados pela DDO-NL, isto é, os efeitos das não linearidades física e geométrica alteram a rigidez da estrutura e conseqüentemente sua trajetória de equilíbrio. Desta forma, a estrutura poderá suportar mais carga até que o primeiro critério de falha seja violado<sup>15</sup>.

A fim de avaliar e comparar os efeitos causados pelas não linearidades física e geométrica na função objetivo deste problema, as Figuras 8.13 e 8.14, mostram o comportamento da função objetivo pela análise linear<sup>16</sup> e não linear, respectivamente.

<sup>15</sup>Este comportamento foi registrado no seção 5.6.4, Figura 5.24.

<sup>16</sup>O gráfico em detalhe (à direita da Figura 8.13) representa um aumento de escala nas proximidades do mínimo da função.

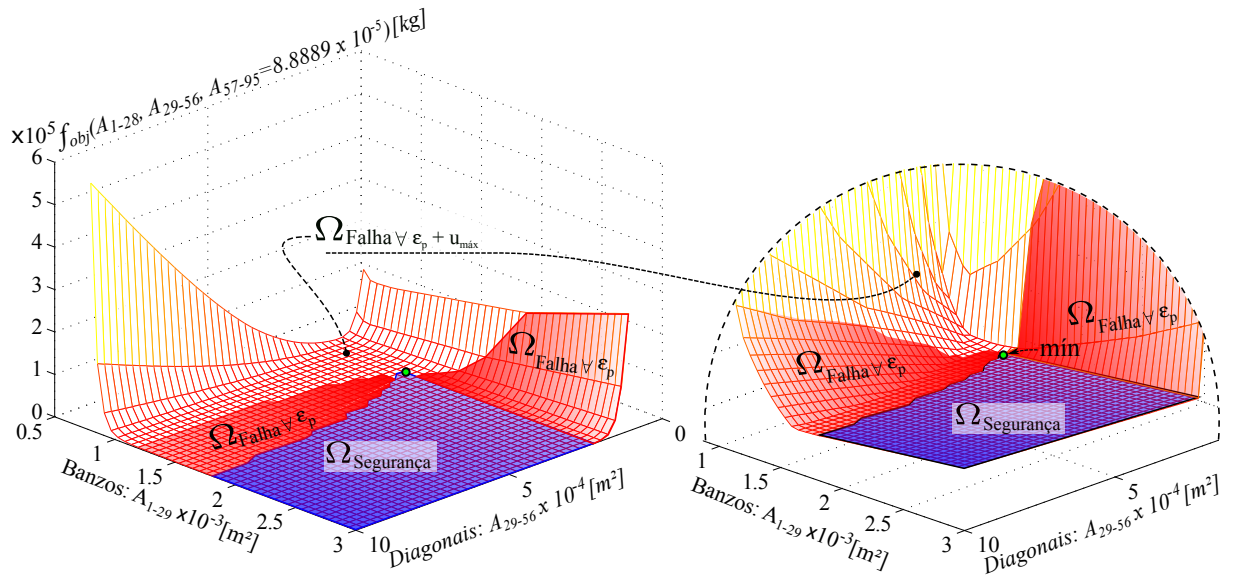


Figura 8.13 – Função objetivo do DDO-L.

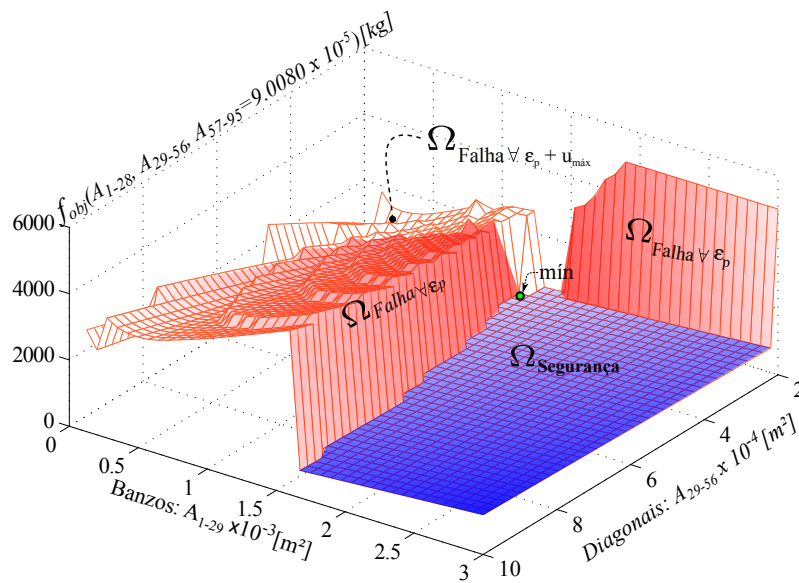


Figura 8.14 – Função objetivo do DDO-NL.

Nas funções objetivo apresentadas nas Figuras 8.13 e 8.14, são apresentados os domínios de segurança ( $\Omega_{\text{Segurança}}$ ) e de falha, assim como a localização do mínimo da função. No domínio de falha, são destacadas as regiões onde qualquer restrição de deformação foi violada ( $\Omega_{\text{Falha} \nabla \varepsilon_p}$ ) assim como a região de ativação das restrições de deformação e deslocamento máximo ( $\Omega_{\text{Falha} \nabla \varepsilon_p + u_{\text{max}}}$ ).

Conforme observou-se no caso da treliça plana de 10 barras, a função objetivo do DDO considerando análise não linear, apresenta discontinuidades mais evidentes em

comparação com a DDO pela análise linear, a qual é contínua e convexa. As flutuações na função objetivo obtidas com a DDO - não linear, denunciam a formação de mínimos locais, os quais representam uma das principais fontes de problemas de convergência dos algoritmos baseados em gradientes. Frente ao problema relatado, a escolha do algoritmo metaheurístico, PSO, é uma opção apropriada para este caso.

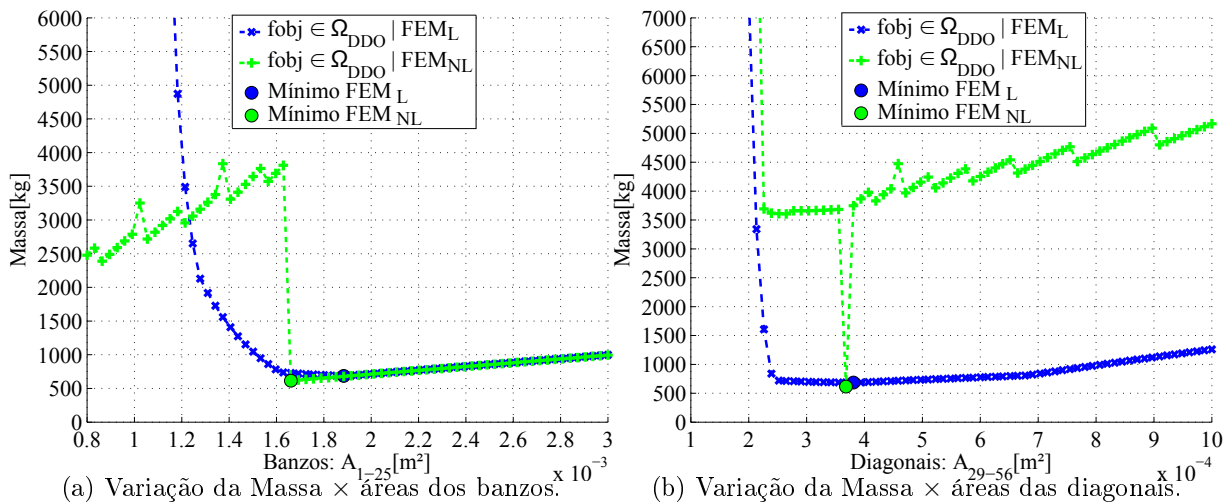


Figura 8.15 – Comportamento da função objetivo para diferentes valores das variáveis de projeto.

A Figura 8.15a apresenta o comportamento da função objetivo da DDO-L e DDO-NL para diferentes valores das áreas dos banzos, mantendo-se fixa as áreas dos montantes de diagonais<sup>17</sup>. Já na Figura 8.15b, a oscilação da função objetivo ocorre pela variação nas áreas das diagonais, fixando os valores das áreas dos banzos e montantes<sup>18</sup>

Para ambos os gráficos, as descontinuidades na função objetivo da DDO-NL, tornam-se mais evidentes, potencializando ainda mais a utilização do algoritmo PSO para a solução deste problema de otimização.

### 8.2.7 Otimização do Risco

Os estudos realizados anteriormente com a função objetivo da treliça plana de 10 barras, revelaram que o RBRO, se aplicado a todo o domínio estocástico poderá convergir

<sup>17</sup>DDO-L:  $A_{1-28} = [8,0 \times 10^{-4}; 0,003]$ ,  $A_{29-56} = 3,860 \times 10^{-4}$  e  $A_{57-95} = 8,8889 \times 10^{-5}$ ; DDO-NL:  $A_{1-28} = [8,0 \times 10^{-4}; 0,003]$ ,  $A_{29-56} = 3,6067 \times 10^{-4}$  e  $A_{57-95} = 9,0080 \times 10^{-5}$ .

<sup>18</sup>DDO-L:  $A_{29-56} = [1,1 \times 10^{-4}; 1,0 \times 10^{-3}]$ ,  $A_{1-28} = 1,888 \times 10^{-3}$  e  $A_{57-95} = 8,8889 \times 10^{-5}$ ; DDO-NL:  $A_{29-56} = [1,1 \times 10^{-4}; 1,0 \times 10^{-3}]$ ,  $A_{1-28} = 1,6663 \times 10^{-3}$  e  $A_{57-95} = 9,0080 \times 10^{-5}$ .



dentro do domínio de falha. Sob essa problemática, delimitou-se o domínio de atuação do RBRO correspondente a região de segurança do DDO. As análises demonstraram que esta abordagem é satisfatória, sendo assim, o RBRO será aplicado ao problema corrente mantendo as mesmas considerações previamente abordadas.

No intuito de avaliar a influência dos custos esperados de falha sobre a solução do problema de otimização, o RBRO é aplicado ao pilar de 95 barras considerando os custos apresentados na Tabela 8.8.

Tabela 8.8 – Custos de referência do pilar.

Referência	Valor(es)	Unidade
$C_{rep}$	450,00	R\$/elemento
$S_{mat}$	12,00	R\$/kg
$C_{fu}$	3802600.00 + CI	R\$

Os custos apresentados na Tabela 8.8 foram fornecidos pela empresa responsável pela execução do projeto estrutural referenciado neste trabalho. Vale ressaltar que o  $C_{fu}$  considera o custo estimado de reconstrução de todo o projeto fabril (apresentado no Apêndice A).

As Figuras 8.13 e 8.14 revelaram que o domínio de segurança deste problema é contínuo e convexo. Aliado a isso, sabendo que as restrições probabilísticas não causam descontinuidades na função objetivo, espera-se encontrar o ponto de mínimo custo esperado total dentro desta região utilizando o algoritmo PSO.

A Tabela 8.9 apresenta os valores ótimos do custo esperado total, variáveis de projeto e massa, obtidos através do algoritmo PSO. Comparando as soluções ótimas pelas formulações RBRO-L, RBRO-NL e com o projeto real, observa-se uma proximidade entre estas soluções, o que indica haver consistência nos resultados.

Tabela 8.9 – Solução ótima do RBRO.

Referência	RBRO-L	RBRO-NL	Proj. Real
$A_{1-28}$ [m <sup>2</sup> ]	$2,3449 \times 10^{-3}$	$1,6341 \times 10^{-3}$	$2,2228 \times 10^{-3}$
$A_{29-56}$ [m <sup>2</sup> ]	$4,8868 \times 10^{-4}$	$3,1667 \times 10^{-4}$	$2,5341 \times 10^{-4}$
$A_{57-95}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,0423 \times 10^{-4}$	$1,0731 \times 10^{-4}$	$1,6364 \times 10^{-4}$
Massa [kg]	852,7399	595,4468	755,5666
CET [R\$]	10594,52	7658,89	9109,68

A solução ótima em termos do CET, apresentadas na Tabela 8.9, está de acordo com o esperado, pois a capacidade do método probabilístico em detectar os modos de falha de serviço<sup>19</sup> tornaram possível ao RBRO-NL encontrar um custo ótimo  $\approx 27,71\%$  menor que o obtido com o RBRO-L. Esse comportamento é replicado à massa total do pilar, que pelo RBRO-NL chegou-se a um valor ótimo  $\approx 30,17\%$  menor em comparação ao RBRO-L. A convergência da função objetivo pode ser observada na Figura 8.16a.

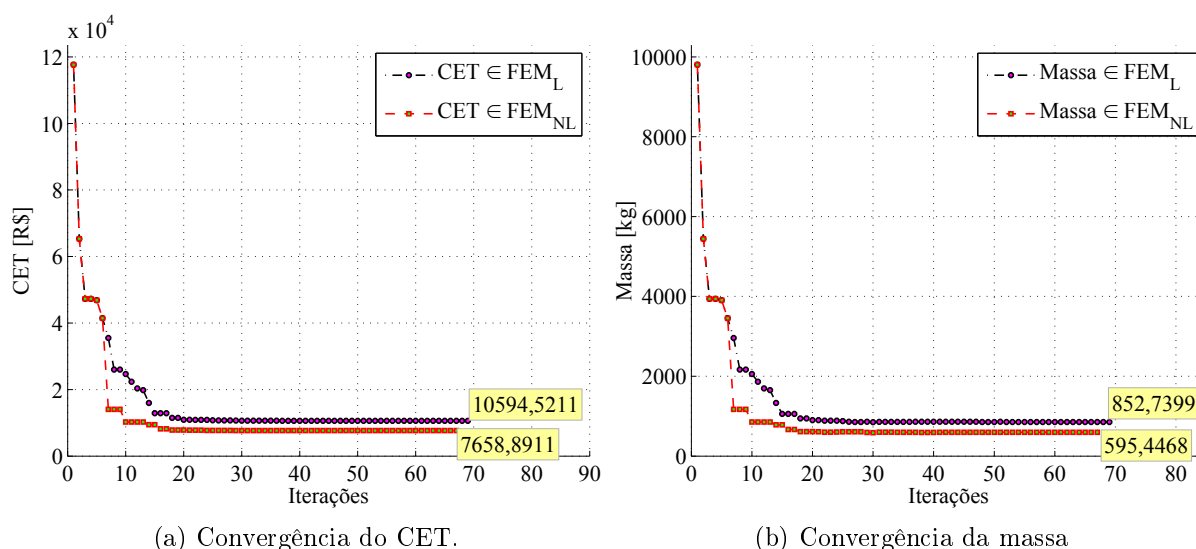


Figura 8.16 – Convergência do CET e massa: RBRO-L e RBRO-NL.

O gráfico abaixo apresenta o índice de confiabilidade quanto a falha última da estrutura. Observa-se um alto nível de segurança para a configuração ótima obtida com o RBRO-NL. Isto se deve ao modo de falha dominante deste problema não representar um estado limite último<sup>20</sup>, entretanto, os custos associados a este modo de falha são tão elevados que causam uma grande influência sobre o CET. Diante deste cenário, o otimizador tende a encontrar uma combinação de variáveis de projeto que melhorem a resistência mecânica da estrutura a fim de reduzir o número esperado de falhas de serviço<sup>21</sup>. O resultado disso consiste em uma estrutura mais resistente mecanicamente e segura, como mostra a Figura 8.17. No caso do RBRO-L, os efeitos causados pelo modo de falha dominante ao CET são ainda maiores que no RBRO-NL, resultando numa estrutura

<sup>19</sup>Ressalta-se que isso só é possível graças à análise determinística não linear.

<sup>20</sup>Estudos anteriores demonstraram que o modo de falha dominante do pilar é descrito pela restrição de deslocamento, o qual pertence ao evento falha de serviço (ver subseção 7.2.5).

<sup>21</sup>Levando a um menor valor do custo esperado total.

mais robusta estruturalmente, porém “ilusoriamente” menos segura<sup>22</sup>, ao compará-la com o RBRO-NL na Figura 8.17.

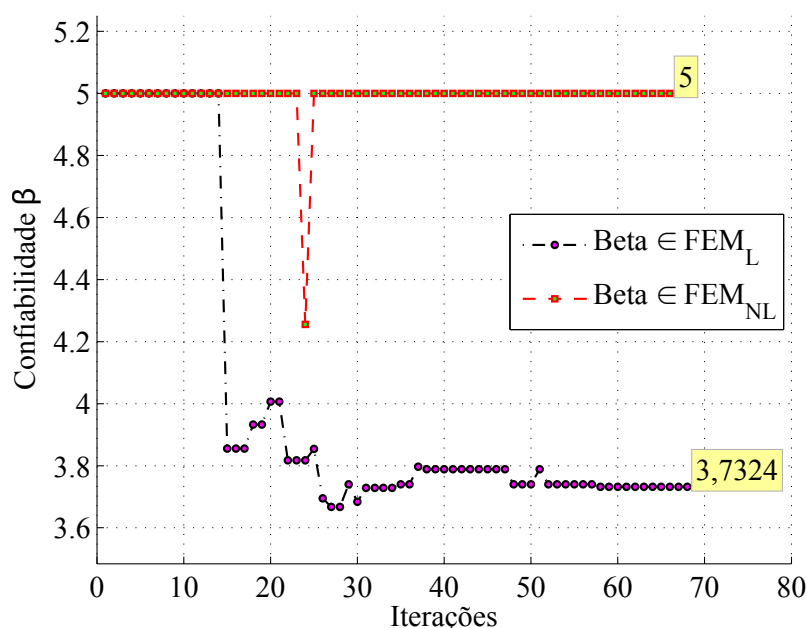


Figura 8.17 – Convergência do índice de confiabilidade: RBRO-L e RBRO-NL.

Nas Figuras 8.18a e 8.18b, é possível observar a convergência do custo inicial de fabricação da estrutura e custos associados aos eventos falha última e falha de serviço, respectivamente. Em comum a solução ótima em termos do CET e massa, o custo inicial ótimo via RBRO-NL, também obteve menores valores em relação ao RBRO-L ( $\approx 30,17\%$ ). O mesmo comportamento é observado para o  $C_{fu}$ , cuja redução obtida pelo RBRO-NL é ainda mais expressiva ( $\approx 331,14$  vezes). A justificativa para este comportamento recai ao índice de confiabilidade apresentado na Figura 8.17, pois tanto o CI quanto o  $C_{fu}$  se apresentam diretamente proporcional ao nível de segurança da estrutura, isto é, a medida que a confiabilidade da estrutura aumenta, o número esperado de falhas diminui, causando uma menor influência dos custos de falha sobre o custo de falha de serviço, custo de falha última e custo inicial de fabricação.

<sup>22</sup>Motivada por uma análise probabilística que considera o evento falha de serviço como um modo de falha total do sistema, incoerente com a atual condição mecânica do pilar.

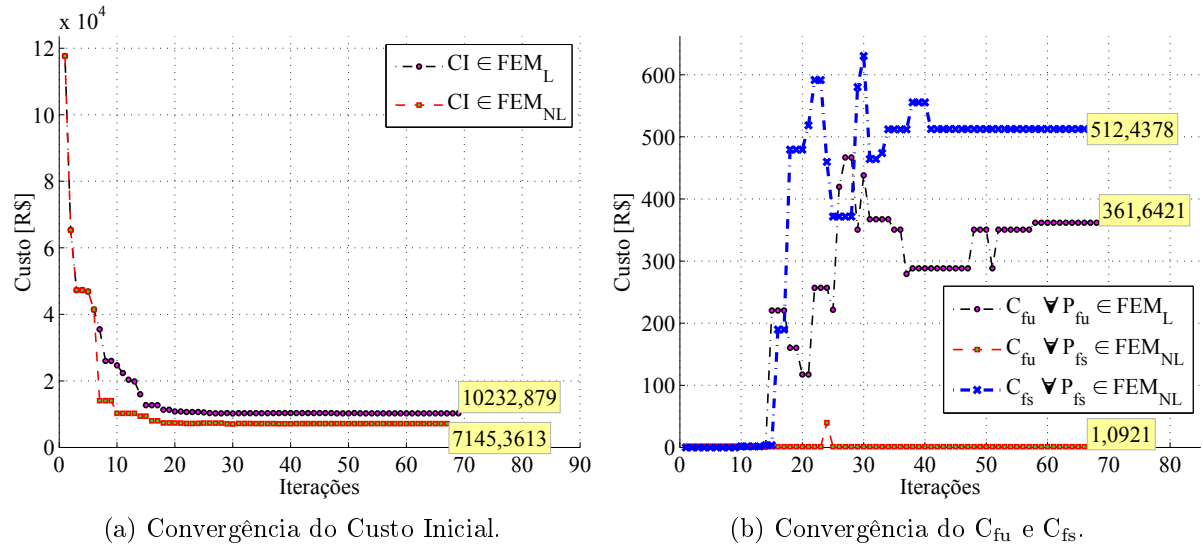


Figura 8.18 – Convergência do CI,  $C_{fu}$  e  $C_{fs}$ .

Para complementar a Figura 8.18, a Tabela 8.10 apresenta os eventos correspondentes aos modos de falha de serviço, respectivas probabilidades de falha e índices de confiabilidade.

Tabela 8.10 – Solução probabilística associada ao evento falha de serviço.

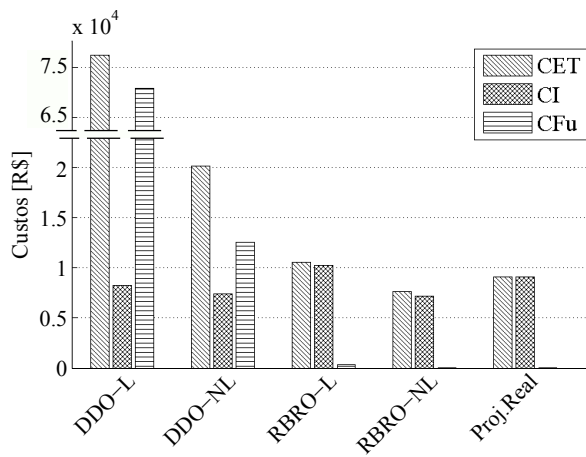
Modo de Falha	$P_{f Serviço}$	$\beta_{Serviço}$
96	$4,1839 \times 10^{-2}$	1,72973
61 $\rightarrow$ 96	$7,1796 \times 10^{-6}$	4,33830

### 8.2.8 Conclusões a respeito da otimização do pilar

Nas subseções 8.2.6 e 8.2.7, foram apresentadas as soluções ótimas do pilar, para as formulações DDO e RBRO. A fim de complementar as comparações, as Figuras 8.19 e 8.20 sintetizam as soluções ótimas do DDO e RBRO, rerepresentadas na Tabela 8.11, de forma gráfica.

Tabela 8.11 – Solução ótima obtida com as diferentes formulações.

	<b>DDO-L</b>	<b>DDO-NL</b>	<b>RBRO-L</b>	<b>RBRO-NL</b>	<b>Proj.Real</b>
$A_{1-28}$ [m <sup>2</sup> ]	$1,888 \times 10^{-3}$	$1,6663 \times 10^{-3}$	$2,3449 \times 10^{-3}$	$1,6341 \times 10^{-3}$	$2,2228 \times 10^{-3}$
$A_{29-56}$ [m <sup>2</sup> ]	$3,860 \times 10^{-4}$	$3,6067 \times 10^{-4}$	$4,8868 \times 10^{-4}$	$3,1667 \times 10^{-4}$	$2,5341 \times 10^{-4}$
$A_{57-95}$ [m <sup>2</sup> ]	$8,8889 \times 10^{-5}$	$9,0080 \times 10^{-5}$	$1,0423 \times 10^{-4}$	$1,0731 \times 10^{-4}$	$1,6364 \times 10^{-4}$
Massa [kg]	685,4216	614,6570	852,7399	595,4468	755,5666
CET [R\$]	78068,59	20185,2429	10594,52	7658,89	9109,68
CI [R\$]	8225,06	7375,8849	10232,88	7145,36	9066,80
$C_{fu}$ [R\$]	69843,53	12526,4282	361,64	1,092	1,092
$C_{fs}$ [R\$]	-	282,9296	-	512,43	41,78
$\beta_{\text{Sistema}}$	2,0896	2,7176	3,7324	5,00	5,00



(a) Comparação entre os custos ótimos.

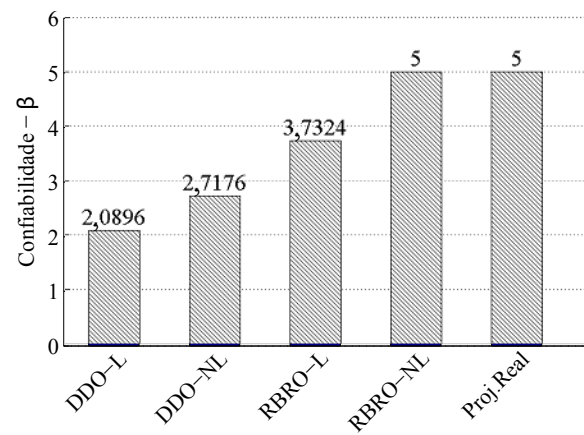
(b) Índice de confiabilidade -  $\beta$ .

Figura 8.19 – Custos ótimos e confiabilidade do projeto otimizado.

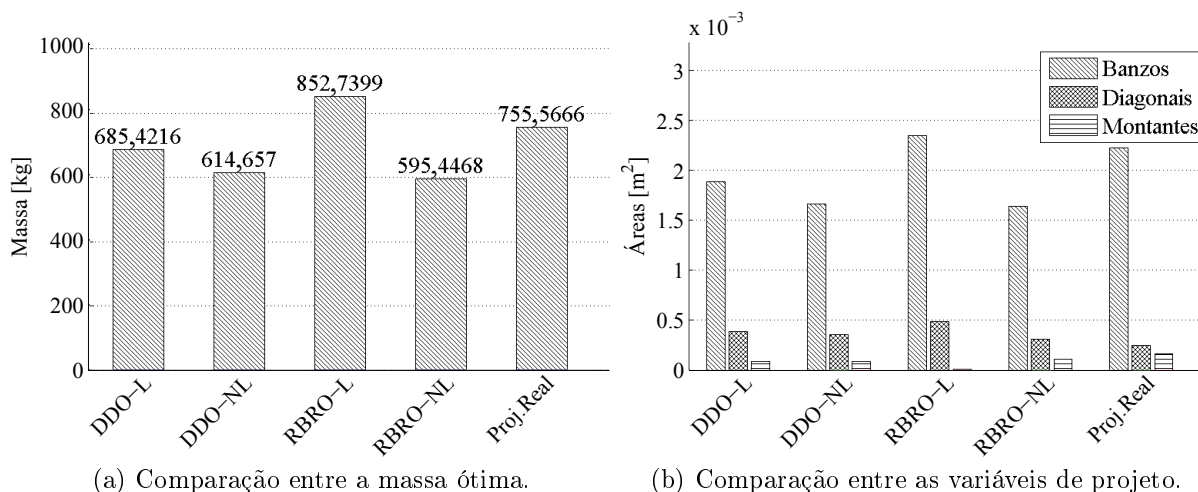


Figura 8.20 – Solução ótima em termos da massa e variáveis de projeto.

A Figura 8.19 mostra os valores ótimos do custo esperado total e índice de confiabilidade pelas formulações DDO, RBRO e também do projeto real. Valores ótimos das massas e das variáveis de projeto são mostrados na Figura 8.20. Comparações entre as figuras revelam que tanto as variáveis de projeto quanto os valores de massa ótima foram similares aos utilizados pelo projeto real, o que indica haver consistência nos resultados. Deve-se enfatizar que apesar de majorarmos o carregamento no DDO, observa-se que a confiabilidade desta solução resulta em altos CET e  $C_{fu}$ , ressaltando a incoerência do fator de majoração utilizado pelo DDO<sup>23</sup>. As diferenças em termos de massa são mais pronunciadas para o RBRO-L, uma vez que esta formulação não considera falha de serviço.

Segundo a ISO:2394, 2015 - classe 2<sup>24</sup>, os estados limites último de instalações industriais, cujas consequências esperadas causam danos materiais, ambientais e perdas de vidas humanas, pertencem a uma faixa entre  $\beta = 3,1(P_f \approx 10^{-3})$  a  $\beta = 4,2(P_f \approx 10^{-5})$ . Sendo assim, considerou-se como limite máximo de confiabilidade para o HDM modificado na otimização do risco,  $\beta = 5,0(P_f \approx 10^{-7})$ . Com esta hipótese, evita-se gasto computacional na identificação dos modos de falhas para  $\beta > 5,0$ .

De acordo com o exposto no parágrafo anterior, é justificável que os valores de  $\beta_{HDM}$  apresentados na Figura 8.19b, não ultrapassaram um limite máximo de  $\beta = 5,0$ , visto que a contribuição da  $P_f$  pertencentes aos modos de falha para  $\beta > 5,0$  será muito

<sup>23</sup>Deve-se realizar uma busca mais refinada para decidir o fator de majoração ideal para o problema.

<sup>24</sup>ISO:2394, 2015 - Anexo F.2: Classificação das estruturas de acordo com as consequências de falha.

pequena para a probabilidade de falha total da estrutura. Além disso, garante-se que a faixa de confiabilidade pertencente aos modos de falha última recomendado pela ISO:2394, 2015, está sendo atendida.

De modo geral, observa-se que a otimização do risco, considerando as não linearidades físicas e geométricas, oferece a melhor solução para este problema; mais leve e econômica em termos monetários, mantendo um equilíbrio entre os custos esperados de falha e o nível ideal de segurança do sistema.

## 9. CONCLUSÕES

Basicamente, esta Tese consistiu no desenvolvimento de um método probabilístico capaz de estimar a confiabilidade de sistemas estruturais redundantes considerando a presença das não linearidades físicas e geométricas, e na aplicação de tal método na formulação de dois problemas de otimização do risco.

Após uma breve revisão bibliográfica envolvendo confiabilidade estrutural, otimização do risco de sistemas estruturais e métodos de otimização, verificou-se um grande interesse do meio científica em desenvolver técnicas de otimização que possam lidar com problemas cada vez mais complexos. Esse interesse é justificado pela crescente demanda por tecnologias que possam ser aplicadas na prática, garantindo maior confiança em seus resultados.

Neste contexto, mesmo que as pesquisas na área de otimização do risco enfatizem a importância em se modelar o problema com o maior número possível de parâmetros que possam interferir no comportamento do sistema, foi verificado que grande parte dos métodos existentes não atendem a esta premissa, e várias simplificações são realizadas. Parte das simplificações se devem à dificuldade enfrentada por esses métodos em identificar os múltiplos modos de falha de sistemas redundantes, lembrando que ao negligenciar um modo de falha dominante, a precisão no cálculo da confiabilidade do sistema estará comprometida. Outro aspecto verificado está relacionado ao comportamento não linear físico e geométrico, o qual poderá exigir um grande esforço computacional nas análises determinísticas e inviabilizar o cálculo probabilístico destes sistemas. Diante da problemática supracitada, a otimização do risco assume um escopo ainda maior e mais complexo.

O ineditismo desta Tese constitui no desenvolvimento de um método probabilístico capaz de identificar os múltiplos modos de falha de estruturas redundantes, nas quais são considerados os efeitos causados pelas não linearidades físicas e geométricas. As características inovadoras do método proposto, possibilitam que o cálculo probabilístico destes sistemas seja realizado em tempo hábil, permitindo que a otimização do risco seja aplicada à solução de problemas inéditos envolvendo não linearidades, redundância e custos relacionados aos modos de falha última e de serviço.

Para satisfazer a formulação que representa o problema de otimização do risco aplicado à sistemas redundantes considerando as não linearidades e múltiplos modos de



falha, a Tese foi subdividida em três etapas: (i) implementação numérica não linear física e geométrica; (ii) adaptação do método HDM permitindo-o identificar os modos de falha última/serviço de forma precisa e eficiente; (iii) otimização do risco propriamente dita.

A realização da primeira etapa exigiu uma implementação numérica de elementos finitos aplicado à treliças espaciais. Esta formulação permite avaliar o comportamento da estrutura frente os efeitos de segunda ordem (não linearidade geométrica) associados à três modelos constitutivos (elastoplástico perfeito, encruamento e flambagem). Além disso, implementou-se um critério de falha última definido pela instabilidade da estrutura. A validação da formulação numérica se deu pela solução de problemas normalmente utilizados na literatura, os quais se aproximam dos casos de interessa desta Tese. Os resultados demonstraram que o método representou adequadamente o colapso individual de cada membro, permitindo a correta análise global da estrutura assim como uma estimativa para a carga limite muito próxima à indicada pelos autores referenciados. Além disso, observou-se que os efeitos causados pela não linearidade geométrica associados à flambagem individual dos elementos, pode resultar em uma redução expressiva na resistência da estrutura, influenciando o comportamento da otimização estrutural e por conseguinte na confiabilidade final.

Posteriormente, desenvolveu-se um método probabilístico, nomeado HDM modificado, capaz de identificar os eventos falha de serviço e falha última, descrevendo o domínio estocástico através da formulação não linear de elementos finitos. O desenvolvimento desta técnica foi realizada sob a plataforma do método HDM original. Os testes iniciais foram executados com funções explícitas possíveis de ocorrerem na prática, as quais representam domínios de falhas complexos representando um grande desafio para o HDM modificado. Constatou-se que a solução probabilística obtida com o HDM modificado se aproxima da solução “exata” encontrada pela simulação de Monte Carlo puro, assim como das melhores soluções apresentadas na literatura. Nos problemas envolvendo múltiplas funções de estado limite, também é constatada a precisão do método em comparação com a simulação de Monte Carlo, e com os autores referenciados. Para estes casos, foi possível comparar os modos de falha detectados pelo HDM modificado com o domínios de falha/segurança no espaço bidimensional das variáveis reduzidas. Esta verificação demonstrou coerência entre os modos de falhas previstos pela avaliação gráfica em relação aos obtidos com o HDM modificado.

Outras potencialidades do HDM modificado foram evidenciadas na solução de três problemas estruturais redundantes. O primeiro, a treliça plana de 6 barras, demonstrou uma boa precisão e desempenho do HDM modificado em comparação com um trabalho publicado recentemente, utilizado como *benchmark*. Isto validou o método probabilístico desenvolvido, permitindo aplicá-lo aos casos de interesse desta Tese. O segundo problema, a treliça plana de 10 barras, permitiu avaliar o comportamento das funções de estado limite frente aos efeitos causados pelas não linearidades. Este estudo revelou a existência de regiões de falhas internamente ao domínio de segurança assim como descontinuidades na função de estado limite. Frente a isso, demonstrou-se a capacidade do método proposto em lidar com este tipo de problema de forma precisa e eficiente. O terceiro problema probabilístico envolveu um caso real, uma estrutura de 95 barras. O comportamento da resposta probabilística deste problema é similar ao da treliça de 10 barras, reforçando a consistência do método quando aplicado à problemas reais. Os dois problemas estruturais permitiram observar uma expressiva variação na confiabilidade destas estruturas em função do tipo de análise determinística considerada, revelando que sob considerações não lineares, a flambagem representa o caso crítico de falha destas estruturas e, em contra partida, a análise linear oferece uma confiabilidade ainda menor, sugerindo um projeto bastante conservador.

Uma vez validadas as formulações determinísticas e probabilísticas, realizou-se a otimização do risco. O primeiro caso de estudo foi a treliça plana de 10 barras, tendo como variáveis de projeto os valores da áreas dos banzos, diagonais e montantes. Verificou-se que as não linearidades causam descontinuidades no domínio de falha da função objetivo, justificando a utilização dos métodos heurísticos para a solução deste tipo de problema. Além disso, foi demonstrado que a otimização do risco deve ser aplicada internamente ao domínio de segurança da otimização determinística, onde a função é contínua e convexa. As soluções ótimas demonstraram que a otimização determinística chegou a uma estrutura mais leve, entretanto, seu elevado risco de falha aumentou expressivamente o custo esperado total desta solução. Diante disto, pode-se dizer que a otimização do risco oferece uma solução mais segura e econômica monetariamente, principalmente quando considera-se a existência das falhas de serviço.

O segundo problema de otimização envolveu uma estrutura real, e, portanto, foi possível fazer comparações entre a solução obtida pela formulação desenvolvida nesta

Tese com o projeto real. Neste caso também foram consideradas como variáveis de projeto os valores da áreas dos banzos, diagonais e montantes. Em comum ao problema anterior, o algoritmo de otimização teve que lidar com as descontinuidades e oscilações da funções objetivo pertencente ao domínio de falha, causadas pelas não linearidades físicas e geométricas. Constatou-se que a configuração geométrica obtida com a otimização determinística e do risco, apresenta coerência com os valores utilizados no projeto real, dando consistência aos resultados obtidos pelas otimizações. Mesmo considerando um fator de majoração no carregamento, a fim de obter uma estrutura mais robusta e segura pela DDO, a RBRO-NL obteve a solução ótima mais leve, segura e econômica monetariamente. Neste sentido, frente as dificuldades em decidir o fator de majoração (ou segurança) ideal na DDO, potencializa-se otimização do risco proposta nesta Tese, na qual os custos esperados de falha auxiliam na procura pela solução ótima sem a necessidade de uma estimativa inicial de confiabilidade para o projeto.

Para ambos os casos, apesar do bom desempenho apresentado pelo HDM modificado, a otimização do risco exigiu altos custos computacionais, suficiente para alertar quanto aos desafios enfrentados ao se resolver problemas de otimização reais envolvendo incertezas. Além disso, possivelmente o desgaste computacional seria ainda maior, ou até impraticável, se a análise probabilística utilizasse métodos de simulação como Monte Carlo puro.

Finalmente, destaca-se que os objetivos da presente Tese foram alcançado com êxito e que as ferramentas numéricas aqui desenvolvidas podem ser utilizadas como base para trabalhos futuros tanto na área de confiabilidade aplicada à otimização estrutural quanto aos problemas envolvendo custos esperados de falha última e serviço, tal como na otimização do risco de sistemas estruturais redundantes.

## 9.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Algumas sugestões de trabalhos futuros, dando continuidade ao que foi desenvolvido nesta Tese, são apresentadas a seguir:

- O método probabilístico desenvolvido, o HDM modificado, demonstrou ser eficiente e preciso para os problemas abordados nesta Tese. Entretanto, observou-se que tanto a precisão quanto o desempenho deste método podem ser afetados pela dimensão do problema analisado. Dessa maneira, sugere-se uma maior investigação do método

para testar sua viabilidade frente aos problemas que envolvam um maior número de variáveis probabilísticas.

- As funções objetivos, quando são consideradas as não linearidades físicas e geométricas, demonstraram que o domínio de falha é altamente não linear, justificando a utilização do algoritmo heurístico PSO. Entretanto, observou-se que a região de segurança é contínua e convexa, na qual os métodos baseados em gradientes são mais indicados. Neste sentido, sugere-se uma adaptação do PSO, tal como é feita no métodos híbridos, a fim de torná-lo mais eficiente, mantendo sua robustez.
- No presente trabalho, o foco foi mantido na otimização do risco de sistemas estruturais, zelando pela representação adequada do comportamento real destas estruturas ao considerar as não linearidades e múltiplos modos de falha. As consequências desta abordagem recaem a custo computacional gasto na otimização do risco. Sendo assim, uma alternativa para melhorar o desempenho seria a utilização de extensões paralelas aos códigos computacionais desenvolvidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT-NBR:8681. **Ações e Segurança nas Estruturas - Procedimento - ABNT NBR 8681:2002**, 2003.

ABNT-NBR:8800. **Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios - ABNT NBR 8800:2008**, 2008.

Ang, A. H.-S. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design**. volume 2. John Wiley & Sons Inc, 1984.

Arora, J. S. **Introduction to Optimization Design**. Elsevier Academic Press, 2 edition, 2004.

Barone, G.; Frangopol, D. M. Life-Cycle Maintenance of Deteriorating Structures by Multi-Objective Optimization Involving Reliability, Risk, Availability, Hazard and Cost, **Structural Safety**, vol. 48, p. 40 – 50, 2014.

Barranco-Cicilia F., L. E. C. P.; Sagrilo, L. V. S. Structural Reliability Analysis of Limit State Functions With Multiple Design Points Using Evolutionary States, vol. X(2), p. 87 – 97, 2009.

Barrigó, J. **Nonlinear Analysis of Spatial Trusses**, 2014.

Barron J. Bichon, J. M. M.; Mahadevan, S. Efficient Surrogate Models for Reliability Analysis of Systems with Multiple Failure Modes, **Reliability Engineering System Safety**, vol. 96(10), p. 1386 – 1395, 2011.

Beck, A. T.; Gomes, W. J. S. A Comparison of Deterministic, Reliability-based and Risk-based Structural Optimization Under Uncertainty, **Probabilistic Engineering Mechanics**, (28), p. 18–29, 2011.

Beck, A. T.; Verzenhassi, C. C. Risk Optimization of a Steel Frame Communications Tower Subject to Tornado Winds, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 5(3), p. 187 – 203, 2008.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. Springer - Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004.

Bergh, F.; Engelbrecht, A. P. A Study of Particle Swarm Optimization Particle Trajectories, **Information Sciences**, vol. 176(8), p. 937 – 971, 2006.

Blandford, G. E. Review of Progressive Failure Analyses for Truss Structures, **Journal of Structural Engineering**, vol. 123(2), p. 122 – 129, 1997.

Cadini, F. F. S.; Zio, E. An Improved Adaptive Kriging-based Importance Technique for Sampling Multiple Failure Regions of Low Probability, **Reliability Engineering and System Safety**, vol. 131, p. 109 – 117, 2014.

Chen, W. F. Structural Engineering: Seeing the Big Picture, **KSE Journal of Civil Engineering**, vol. 12(1), p. 25 – 29, 2008.

Christopher D. Hill, G. E. B.; Wang, S. T. Post-Buckling Analysis of Steel Space Trusses, **Journal of Structural Engineering**, vol. 115(4), p. 900 – 919, 1989.

Clerc, M. The Swarm and the Queen: Towards a Deterministic and Adaptive Particle Swarm Optimization, **International Conference on Evolutionary Computation**, vol. 3, p. 1951 – 1957, 1999.

Crisfield, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. volume 2. John Wiley & Sons Ltd, 1997.

Eberhart, R. C.; Kennedy, J. A new optimizer using particle swarm theory, **Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science**, pages 39–43, 1995.

Esposito, A. **Programação Paralela e Sequencial Aplicada à Otimização de Estruturas com o Algoritmo PSO**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

Esposito, A.; Gomes, H. M. A Parallel and Serial Programming With an Evolutionary Algorithm for Structural Optimization, **Proceedings of the 14th WSEAS International Conference on Evolutionary Computing**, vol. 1, p. 82 – 87, 2013.

Gomes, H. M. **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

Gomes, H. M. **MEC117 Confiabilidade em Sistemas Mecânicos**. Apostila do curso de Confiabilidade em Sistemas Mecânicos - MEC117, 2007.

Gomes, H. M. Truss Optimization with Dynamic Constraints Using a Particle Swarm Algorithm, **Expert Systems with Applications**, vol. 38, p. 957 – 968, 2011.

Gomes, W. J. S. **Estudo do Efeito de Incertezas na Otimização Estrutural**. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade e São Paulo, 2010.

Gomes, W. J. S. **Otimização de Risco sob Processos Aleatórios de Corrosão e Fadiga**. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade e São Paulo, 2013.

Gomes, W. J. S.; Beck, A. T. Optimization of a Transmission Line Tower under Random Wind Loads Considering Expected Consequences of Failure, **International Symposium on Solid Mechanics**, 2013.

Grooteman, F. An Adaptive Directional Importance Sampling Method for Structural Reliability, **Probabilistic Engineering Mechanics**, (26), p. 134 – 141, 2011.

Gu, J. **Large Displacement Elastic Analysis of Space Frame Allowing for Flexural-Torsional Buckling of Beams**. Ph.d. dissertation, Hong Kong Polytechnic University, 2004.

Haftka, R. T.; Gürdal, Z. **Element of Structural Optimization**. volume 11. Kluwer Academic Publishers, 3 edition, 1991.

Haldar, A. **Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis**. New York : John Wiley, 2000.

Haldar, A.; Mahadevan, S. **Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design**. Wiley and Sons, 1st edition, 1999.

Hansson, M.; Ellegaard, P. System Reliability of Timber Trusses Based on Non-Linear Structural Modelling, **Springer Netherlands**, vol. 39(6), p. 593 – 600, 2006.

Hashemolhosseini, S. **Algorithmic Component and System Reliability Analysis of Truss Structures**. Master's thesis, Department of Civil Engineering, University of Stellenbosch,, 2013.

Holicky, M. **Reliability Analysis for Structural Design**. SUN MeDIA, 2009.

Hrinda, G. A. Geometrically nonlinear static analysis of 3D trusses using the arclength method, **WIT Transactions on Modelling and Simulation**, vol. 46, p. 243 – 252, 2007.

ISO:2394. **General Principles on Reliability Assessment of Systems - ISO 2394:2015**, 2015.

Katsuki, S.; Frangopol, D. M. Hyperspace Division Method for Structural Reliability, **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 120(11), p. 2405 – 2427, 1994.

Kaufmann M., D. Z.; Wennhage, P. Integrated Cost/Weight Optimization of Aircraft Structures, **Struct Multidisc Optim**, (41), p. 325 – 334, 2010.

Kim, D.-S.; Ok, S.-Y. J. S.; Koh, H.-M. System Reliability Analysis Using Dominant Failure Modes Identified by Selective Searching Technique, **Reliability Engineering and System Safety**, (119), p. 316–331, 2013.

Kiureghian, A. D.; Dakessina, T. Multiple Design Points in First and Second-order Reliability, **Structural Safety**, (20), p. 37 – 49, 1998.

Lovisolio, L.; Silva, E. A. B. Uniform distribution of points on a hyper-sphere with applications to vector bit-plane encoding, **Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings**, vol. 148(3), p. 187–193, 2001.

Marsaglia, G. Choosing a Point from the Surface of a Sphere, **Annals of Mathematical Statistics**, vol. 43(2), p. 645 – 646, 1972.

Mechers, R.; Ahammed, M. Estimation of Failure Probabilities for Intersections of Non-linear Limit States, **Structural Sa**, vol. 23(2), p. 123 – 135, 2001.

Melchers, R. E.; Tang, L. Dominant Failure Modes in Atochastic Structural Systems, **Structural Safety**, vol. 2(2), p. 127 – 143, 1984.

Muñoz-Rojas A. P., Duarte Filho, L. A. **Análise Não-Linear Geométrica e Material de Treliças Espaciais - Programa ATENAS**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1 edition, 2001.

Murtha-Smith, E. Compression-Member Models for Space Trusses: Review, **Journal of Structural Engineering**, vol. 120(8), p. 2339 – 2407, 1994.

Nie, J.; Ellingwood, B. R. Directional methods for structural reliability analysis, **Structural Safety**, (17), p. 233–249, 2000.

Nie, J.; Ellingwood, B. R. A New Directional Simulation Method for System Reliability. Part II: Application of Neural Networks, **Probabilistic Engineering Mechanics**, (19), p. 437 – 447, 2004.

Nowak, A. S.; Collins, K. R. **Reliability of Structures**. Chongqing University Press, 2000.

Papadrakakis, M. Inelastic Post-Buckling Analysis of Trusses, **Structural Engineering**, vol. 109(9), p. 2129 – 2147, 1983.

Parente, E. **Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma de Estruturas Geometricamente Não-Lineares**. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2000.

Park S., Choi S., C. S.; Stubbs, N. Efficient Method for Calculation of System Reliability of a Complex Structure, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 41(18 - 19), p. 5035 – 5050, 2004.

Pereira, A. **Otimização Baseada em Confiabilidade: Aplicação a Treliças Espaciais**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2007.

Rossi, R. One Dimensional Elastoplastica. Lecture notes, 2012.

Schuëller, G. I.; Stix, R. A Critical Appraisal of Methods to Determine Failure Probabilities, **Structural Safety**, vol. 4, p. 293 – 309, 1987.

Shao, S.; Murotsu, Y. Approach to Failure Mode Analysis of Large Structures, **Probabilistic Engineering Mechanics**, (14), p. 169 – 177, 1999.

Shi, Y.; Eberhart, R. C. A Modified PartPart Swarm Optimizer, **Proceedings Conference on Evolutionary Computation**, pages 69 – 73, 1998.

Sørensen, J. D. Structural Reliability Theory And Risk Analysis. Notes in Structural Reliability Theory And Risk Analysis, 2004.

Sørensen, J. D.; Burcharth, H. F. **Risk-based Optimization and Reliability Levels of Coastal Structures**. In *Proceedings of 1st IFED (International Forum on Engineering Decision Making) Conference*, number 1, page 13, 2005.

Surahman, A.; Rojjani, K. B. Reliability Based Optimum Design of Concrete Structures, **Journal of Structural Engineering**, vol. 110(3), p. 671 – 672, 1984.

Thai, H.-T.; Kim, S.-E. Large Deflection Inelastic Analysis of Space Trusses Using Generalized Displacement Control Method, **Journal of Constructional Steel Research**, vol. 1(65), p. 1987–1994, 2009.

Thomson, J. J. On the Structure of the Atom: an Investigation of the Stability and Periods os Oscillation of a number of Corpuscles arranged at equal intervals around the Circumference of a Circle; with Application fo the Results to the Theory of Atomic Structure, **Philosophical Magazine**, vol. 7(39), p. 237 – 265, 1904.



Tràn, T. N.; Staat, M. Uncertain Multimode Failure and Limit Analysis of Shells, **11 th World Congress on Computational Mechanics**, 2014.

Tuner M. J., Dill E. H., M. H. C.; Melosh, R. J. Large Deflection of Structures Subject to Heating and External Load, **Aerospace Research Central**, vol. 27(2), p. 97 – 106, 1960.

Wang, G. G.; Shan, S. Failure Surface Frontier for Reliability Assessment on Expensive Performance Function, **Journal of Mechanical Design**, vol. 128(6), p. 1227 – 1235, 2006.

Wolchuk R. Discussion of “I-35W Bridge Collapse” by S. Hao, **Journal of Bridge Engineering**, vol. 16(4), p. 570–571, 2011.

Yang, X.-S. **Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications**. volume 1. John Wiley & Sons, 2010.

Yang, Y.-B.; Kuo, S.-R. **Theory and Analysis of Nonlinear Frame Structures**. Prentice Hall, 1 edition, 1994.

Yang, Y.-B.; Leu, L.-J. Constitutive Laws and Force Recovery Procedures in Nonlinear Analysis of Trusses, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 92, p. 121 – 131, 1991.

Yang, Y.-B.; Shieh, M.-S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Point, **AIAA Journal**, vol. 28(12), p. 2110 – 2116, 1990.

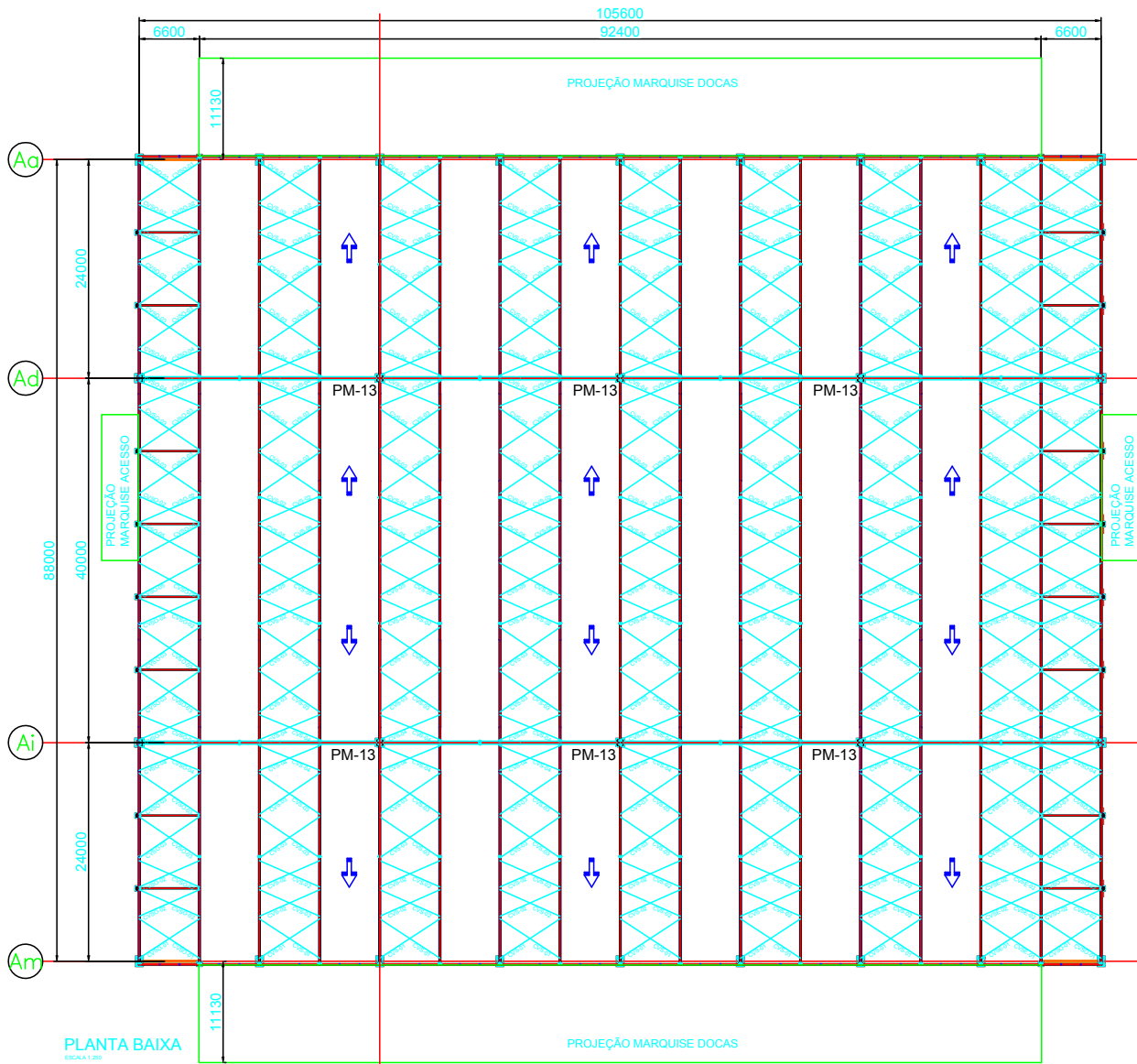
Yang, Y.-B.; Yang, C.-T. Effects of Member Buckling and Yielding on Ultimate Strengths of Space Trusses, **Engineering Structures**, vol. 19(2), p. 179 – 191, 1997.

Yaw, L. L. Nonlinear Static - 1D Plasticity - Various Forms of Isotropic Hardening, 2012.

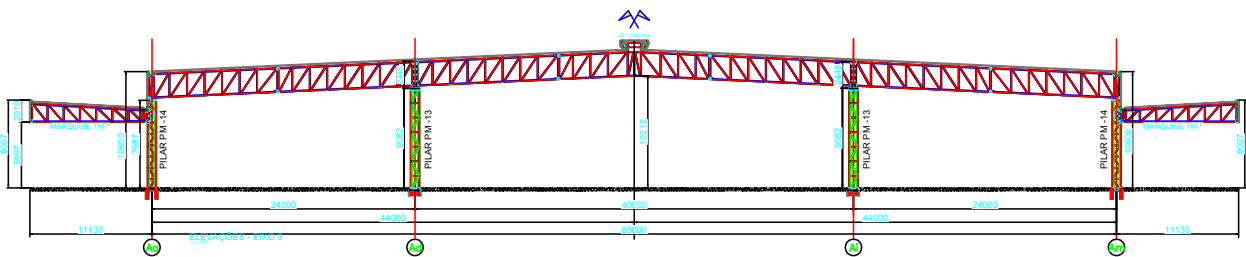
Yonezawa, M.; Okuda, S. Structural Reliability Assessment Based on Directional Vector Approximation Method, **Elsevier Science Ltd**, vol. 33(3 - 4), p. 749 – 752, 1997.

Zhu, B.; Frangopol, D. M. Reliability, Redundancy and Risk as Performance Indicators of Structural System During Their Life-Cycle, **Engineering Structures**, (41), p. 34 – 49, 2012.

APÊNDICE A – Detalhamento do Pavilhão

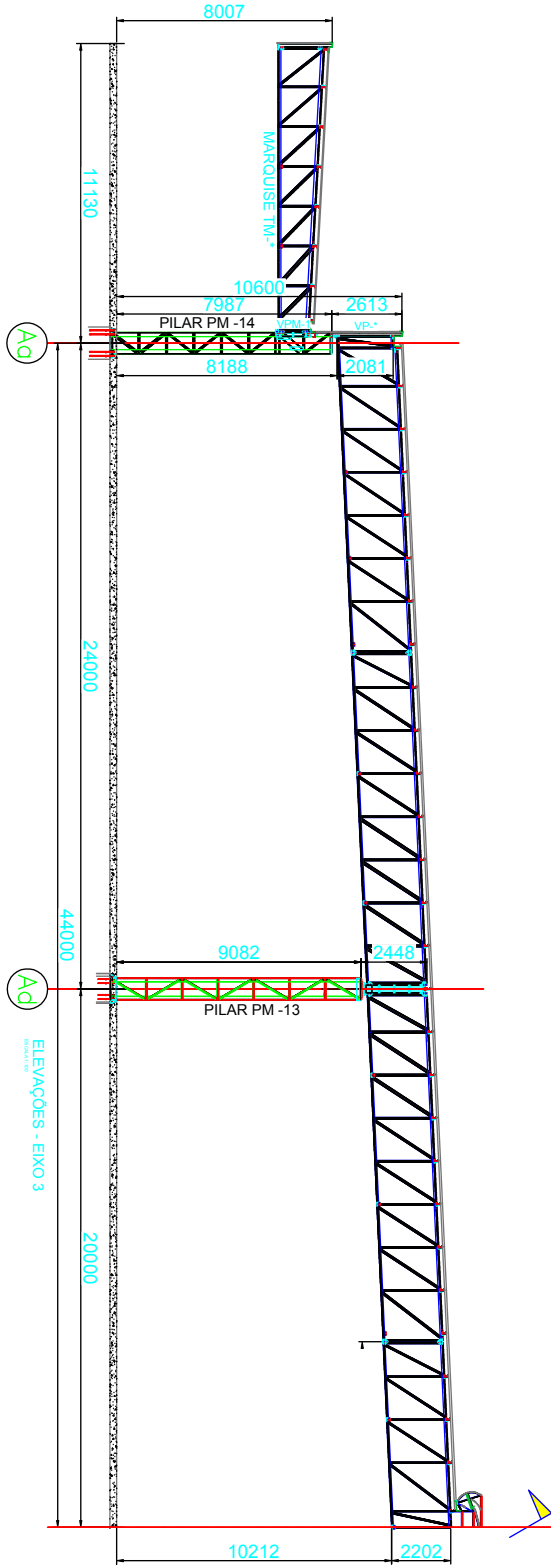


(a) Planta Baixa do Pavilhão.

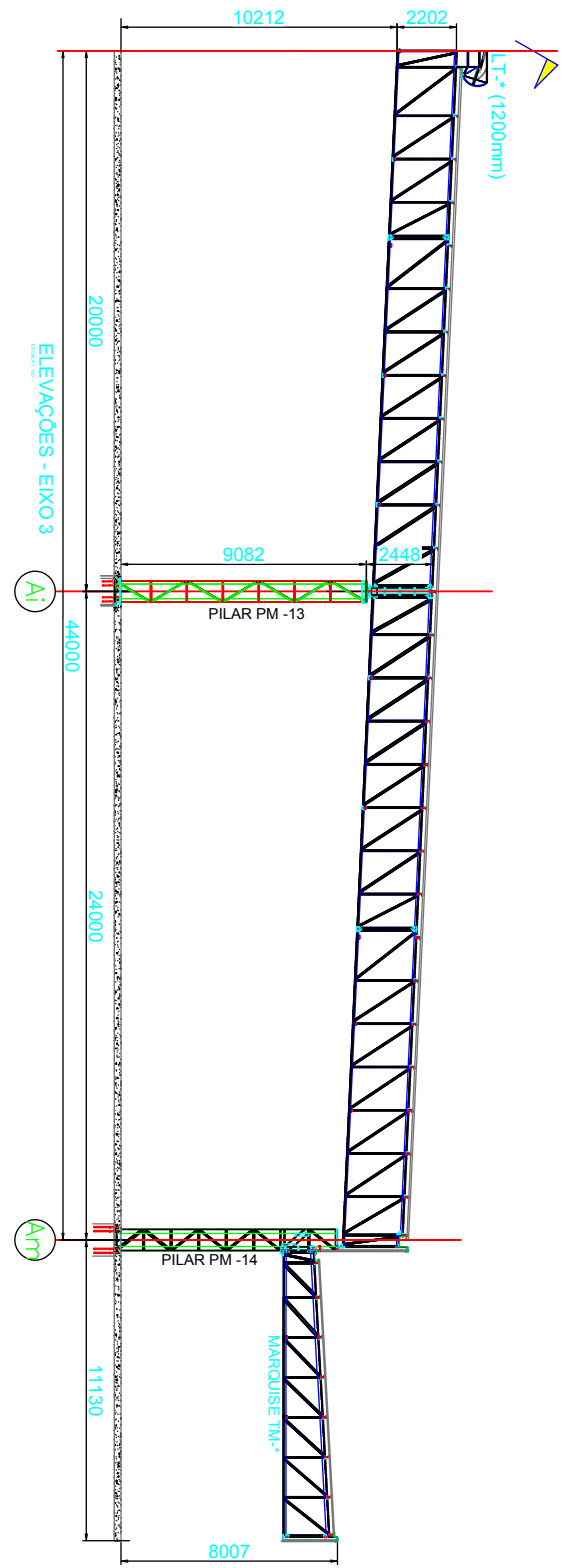


(b) Vista Frontal — Elevação - Eixo 3.

Figura 9.1 – Planta Baixa e Vista Frontal do Eixo 3.



(a) Vista Frontal: Combinação Aa-Ad.



(b) Vista Frontal: Combinação Ai-Am.

Figura 9.2 – Vista Frontal: Combinações Aa-Ad — Ai-Am.