UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

POSSIBILIDADES NA CONVERSÃO ENTRE REGISTROS DE GEOMETRIA PLANA

Porto Alegre
2016

PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

POSSIBILIDADES NA CONVERSÃO ENTRE REGISTROS DE GEOMETRIA PLANA

Dissertação realizada sob a supervisão da Professora Doutora Luisa Rodriguez Doering, apresentada no Instituto de Matemática da UFRGS, em preenchimento parcial dos requisitos, para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Porto Alegre

2016

PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

POSSIBILIDADES NA CONVERSÃO ENTRE REGISTROS DE GEOMETRIA PLANA

Dissertação realizada sob a supervisão da Professora Doutora Luisa Rodriguez Doering, apresentada no Instituto de Matemática da UFRGS, em preenchimento parcial dos requisitos, para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Dissertação aprovada pela banca em 14/12/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana – UFRGS

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo – UFRGS

Prof. Dr. Marlene Alves Dias – UNIBAN

Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering – Orientadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço à UFRGS pela oportunidade e pelo espaço disponibilizado.

Ao Rafael, meu companheiro, pela eventual compreensão.

Aos meus colegas, pela companhia e pela possibilidade de aprendizado.

À Dafne, à Laís, à Kátia e à Mariana, pela amizade nesse curso.

Ao meu local de trabalho, que possibilitou a execução de parte desta atividade.

Aos meus alunos, que participaram das tarefas propostas.

À minha Orientadora, professora Luisa, por ser meu exemplo de educadora.

E a mim mesmo, porque continuo me surpreendendo com o que sou capaz.

RESUMO

Nesta pesquisa, que consiste de um estudo de caso, elaboramos uma sequência didática que prevê atividades que devem ser resolvidas de duas maneiras distintas. Uma das maneiras utiliza conceitos de Geometria Plana – como Teorema de Pitágoras e semelhanças – e a outra maneira utiliza conceitos de Geometria Analítica – como equações de reta e cálculos de área via determinantes. Para analisar os dados coletados, com a aplicação desta sequência, a Teoria de Registros de Representação Semiótica foi utilizada. Duval (2009), autor da teoria, trata sobre a importância dos registros em Ensino de Matemática, sobre a conversão de um registro em outro e sobre a necessidade de utilização de mais de um registro como um meio de entender o modo matemático de pensar. Como meio de dar um suporte a nossa pesquisa, em nossa revisão bibliográfica, procuramos produções recentes, nas quais foram utilizadas a mesma teoria sob o aspecto da conversão, e analisamos também se os livros didáticos de Matemática, do terceiro ano do Ensino Médio, contemplam atividades que incentivem a utilização de mais de um registro para resolução de atividades. Esta sequência foi aplicada em uma turma de alunos do terceiro ano, de uma escola de Ensino Médio Técnico integrado e sua estrutura foi inspirada na Investigação Matemática de Ponte (2006). Nesta pesquisa, os registros, majoritariamente utilizados pelos alunos, foram os de Geometria Plana – Figural – e de Geometria Analítica – Gráfico – e verificamos que os alunos conseguiram, quando solicitados, articular a utilização destes dois tipos de registro.

Palavras-Chave: Conversão. Geometria. Geometria Analítica. Geometria Plana. Registros.

ABSTRACT

In this case study we elaborate a didactic sequence that predicts activities that should be solved in two different ways. One of them uses the concepts of plane geometry – such as the Pythagorean theorem and similarities – and the other uses the concepts of analytic geometry – such as the equations of a line and area calculations. To analyze the data assembled with the application of this sequence we used The Theory of Registers of Semiotic Representation. Duval (2009), the author of this theory, addresses the importance of registers in Mathematics Teaching, the conversion of one register to another, and the need to use more than one register as a way to understand the mathematical way of thinking. To support our research, we looked in our bibliographical review for recent articles that made use of the same theory under the conversion aspect, and we also analyzed whether third year high school mathematics textbooks offer activities that encourage the use of more than one register in the solution of activities. This sequence was applied in a class of third-year students, from an integrated technical high school and its structure was inspired by Ponte's Mathematical Investigation (2006). In this research, the registers most used by the students were those of plane geometry – figure – and of analytic geometry – graph – and we verified that the students, on request, achieved to articulate the use of these two types of registers.

Keywords: Conversion. Geometry. Analytic Geometry. Plane Geometry. Registers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PPGEMat-IME-UFRGS Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

PCN Parâmetros Curriculares Nacionais

ProfMat Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PNLD Programa Nacional do Livro Didático

OBM Olimpíada Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros parágrafos desta introdução estão em primeira pessoa. Apesar de todo o envolvimento da minha orientadora, creio na compreensão por parte do leitor. Sem ela, este trabalho não seria possível, nem viável e é por ela que eu começo. Entrei no curso sabendo exatamente o que queria fazer e logo no primeiro mês de aula nós já estávamos prontos para começar a pesquisa. Ela me recebeu tão bem, sendo sempre responsável e acolhedora, mesmo em momentos de adversidade, que eu poderia recomendá-la a todos os alunos do curso. Além disso, a disciplina que fiz com ela foi tão incrível que não consigo mais olhar para polinômios como os via antes.

Esse, porém, é o começo do relato. Eu quero voltar a um tempo mais longínquo ainda e tornar claro ao leitor o que exatamente me trouxe aqui. Desde os sete anos de idade queria ser professor de Matemática. Fazia operações com facilidade e adorava probleminhas matemáticos. Isso é comum nesta idade, mas a primeira vez em que me deparei com um problema sério em Matemática foi quando precisei construir uma estrela de cinco pontas ‘perfeita’. Foi chocante, porque eu não sabia calcular o ângulo interno de um pentágono e acabei deduzindo que eu poderia dividi-lo em três triângulos, somar as medidas dos ângulos e dividí-lo em cinco.

Como consequência, me dei conta que a soma dos ângulos de um polígono convexo, com n vértices é $180. (n-2)$, e, acredite, pensei que só eu sabia isso no mundo todo e que tinha sido o primeiro a descobrir. Pouco tempo depois, descobri nos livros didáticos, para minha tristeza, que esta fórmula já existia. Aí começaram os outros questionamentos: *“o que mais de Matemática eu não sei?”* ou *“existem outros livros que mostrem coisas diferentes de Matemática?”*.

Nesta altura já estava no início do Ensino Médio e minha professora na época falou: “*Inscreva-se na OBM. Tenho alguns livros que vão te ajudar com esses questionamentos matemáticos teus*”. Inscrevi-me e estudei tanta Matemática naquele ano, para participar das Olimpíadas, que logo me dei conta que sabia muito pouco, mas que queria aprender cada vez mais. O leitor vai verificar, no decorrer do texto, que esta parte de problemas olímpicos vai aparecer no decorrer do texto e digo que eles não foram escolhidos aleatoriamente. Muitos deles foram vivenciados por mim enquanto estudante.

Durante meus estudos, foi difícil não me apaixonar por Geometria. E foi incrível quando li um artigo intitulado “Geometria com Contas”, de Carlos Yuzo Shine. Neste artigo, o autor resolve problemas de Geometria Sintética (Plana), em Olimpíadas, utilizando

Geometria Analítica. No momento da leitura a sensação que tive foi de uma epifania, com o perdão do termo. Como eu pude, por tanto tempo não pensar que uma circunferência não pode ser representada por uma equação, por exemplo?

Chegando à graduação, licenciatura em Matemática, meu trabalho de conclusão de curso abordou uma parte desta possibilidade. Resolvi atividades de Geometria Sintética, utilizando Geometria Analítica. Mas eu queria mais. Quando consegui entrar no Mestrado, não queria apenas resolver problemas assim, mas queria poder possibilitar aos alunos esta opção de trabalho.

Ao expor à orientadora minha proposta, ela logo aceitou e no mesmo momento indicou um autor francês, que desenvolve pesquisas na área da Educação Matemática, que daria suporte à nossa pesquisa: Raymond Duval. Duval é um pesquisador francês que se preocupa com os registros (escritos, orais, figurais, gráficos, etc.) utilizados em Matemática e com a conversão de um registro em outro. O encaixe entre os textos de Duval e a nossa proposta foi imediato, ou seja, desenvolvemos todo o trabalho tendo esta teoria como norte.

Sou professor de Matemática de Ensino Básico desde 2011 e de Ensino Preparatório de Vestibulares desde 2006. Em todos estes anos, tenho observado o quanto alguns elementos geométricos têm aparecido como objetos distintos, tanto em livros didáticos, quanto na maneira como o educando entende a Matemática. É interessante notar que um elemento da geometria euclidiana plana como a reta, por exemplo, é tratado de maneiras distintas na Geometria Sintética e na Geometria Analítica, mesmo que estejamos tratando da mesma Geometria. Esta diferença de tratamento é importante por possibilitar que o estudante considere o elemento de mais de uma maneira, em suas diversas representações.

Dessa forma, penso que é interessante propor ao educando registros que lhe permitam interpretar um ente geométrico de mais de uma forma. Neste trabalho, em que trabalhamos com a geometria euclidiana, optamos por denominar a Geometria Sintética Plana, que se utiliza mais do registro figural como Geometria Plana e a Geometria Analítica Plana, que se utiliza mais do registro gráfico, como Geometria Analítica, como um meio de diferenciar um tipo de registro do outro. Esta escolha se deve ao fato de que estas são a nomenclaturas usuais encontradas nos livros didáticos da educação básica.

Voltando ao exemplo inicial, uma reta pode ser representada como uma equação da Geometria Analítica e não apenas como uma figura da Geometria Plana, por exemplo. Esta variedade de representações pode produzir compreensões muito interessantes, pois o objeto estudado é o mesmo, visto sob outros pontos de vista.

Uma quantidade mínima de livros didáticos propõe atividades de conversão de registros de representações de um objeto dentro da geometria, o que faz parecer que, apesar de se referirem ao mesmo objeto, estes registros não podem ser tratados em uma linguagem ou convertidos de uma em outra.

Obviamente, nem toda atividade relacionada a um objeto é tão facilmente tratada em representações distintas. Uma atividade de Geometria Analítica pode, por exemplo, ser mais facilmente entendida como Geometria Analítica mesmo. Isso não exclui, porém, o fato de que ela pode ser entendida também na Geometria Plana, mesmo que seu tratamento seja diferente.

O tema da pesquisa concerne então à conversão de registros entre Geometria Plana e Geometria Analítica que será experimentada por meio do emprego de uma sequência didática planejada e desenvolvida para este fim. Esta sequência visa proporcionar ao estudante questões que possibilitem a conversão de registros e será realizada com alunos de terceiro ano do Ensino Médio Técnico Integrado de uma escola pública.

A pesquisa encontra-se dentro da linha de pesquisa "Ensino de Tópicos Específicos de Matemática e Abordagens Alternativas" do PPGEMat-IM-UFRGS e seus objetivos são:

1. Verificar se a conversão entre registros de Geometria Plana e Geometria Analítica faz parte dos livros didáticos de 3º ano de Ensino Médio.

2. Elaborar, sob o ponto de vista da Teoria de Registros de Representação Semiótica, uma sequência didática que utilize a conversão de registros entre Geometria Plana e Geometria Analítica e que exponha ao aluno esta possibilidade.

3. Aplicar esta sequência didática em turmas de 3º ano de uma escola pública de Ensino Médio Técnico Integrado.

4. Analisar a produção dos alunos e avaliar se a sequência didática proposta contribui para a compreensão das possibilidades de resolução de atividades, utilizando-se uma variedade de registros.

Portanto, a sequência didática elaborada visa propor atividades que exponham o aluno a possibilidades de converter registros entre Geometria Plana e Geometria Analítica, de modo que, apesar de constituírem representações distintas, as atividades produzam as "mesmas" respostas que possam ser traduzidas umas nas outras. Não apenas porque alunos distintos pensam de maneira distinta e mesmo assim chegam à mesma resposta, mas também porque representações distintas produzem tratamentos distintos e também chegam ao "mesmo" lugar.

A questão que norteia a pesquisa é: "**Como a conversão de registros, entre Geometria Plana e Geometria Analítica, ocorre quando atividades de Geometria são propostas?".** Partindo desta questão, podemos pensar também no seguinte: "**Como a**

realização de atividades em Geometria, por meio do emprego de vários registros de representação, pode contribuir para a Educação Básica?" Em nossas considerações finais, procuramos responder estas questões.

O produto didático desta dissertação é uma sequência didática que foi aplicada e utilizada em três turmas de alunos de 3º ano de uma escola pública de Ensino Médio Técnico Integrado e uma coletânea de problemas e roteiros, sugeridos para que professores, que tenham interesse na conversão de registros, possam se envolver com o tema. Esperamos que esta sequência didática sirva como um apoio ao educador que procura novas ideias e que possa estimular que projetos semelhantes possam incorporar nossas atividades em sala de aula.

Estruturamos, por fim, a dissertação em mais sete capítulos, além da Introdução. No capítulo 2, tratamos sobre a Teoria de Registros de Representação Semiótica. No capítulo 3, mostramos os resultados de nossa revisão bibliográfica em repositórios de dissertação sobre conversões entre registros de Geometria. No capítulo 4, mostramos os resultados de nossa análise de livros didáticos de 3º ano de Ensino Médio e o que eles apontam sobre conversões.

Prosseguimos com o capítulo 5 no qual descrevemos a metodologia utilizada para a elaboração da sequência didática e descrevemos os sujeitos da pesquisa. Os capítulos 6 e 7 são dedicados à descrição e análise do trabalho, desenvolvidos durante a execução de nossa sequência didática. Por fim, no capítulo 8, tecemos nossas considerações finais, discutindo as questões e objetivos que nortearam esta dissertação.

É importante ressaltar que, logo após as Referências, inserimos três anexos: o termo de consentimento informado, a sequência didática original e o produto final da dissertação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A utilização de representações para objetos em Matemática é um dos alvos principais da Teoria de Registros. Duval, em “Registros de Representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento”, trata destas representações e de sua importância para a Matemática, pois, “[...] os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção intuitiva imediata, […] É preciso, portanto, dar representantes” (DUVAL, 2012, p. 268).

Porém, ao entender que o objeto estudado não é o mesmo que a sua representação, criamos um paradoxo, pois o entendimento de objetos matemáticos é um entendimento conceitual e só por meio de representações é que conseguimos acessá-los. Sendo assim, é evidentemente fácil confundir um objeto e sua representação, mesmo que ambos sejam distintos. Por outro lado, é difícil que o objeto seja representado sem um entendimento conceitual.

As representações, sugeridas por Duval podem ser mentais – as que o indivíduo tem sobre um objeto –, ou semióticas – aquelas associadas ao emprego de signos para sua representação como uma fórmula, por exemplo. De maneira ampla, as representações semióticas são as manifestações exteriores das representações mentais.

Pensando nas representações semióticas, é interessante observar que um objeto pode ter representações distintas, considerando-se o contexto em que é trabalhado, dependendo da função que desempenha e da compreensão que se tem do objeto.

Partindo do paradoxo mencionado anteriormente, Duval (2012, p.269) afirma que “Se é chamada ‘semiose’ a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e ‘noesis’ a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noesis é inseparável da semiose”.

Refletindo sobre as dificuldades provenientes da dissociação entre noesis e semiose, o autor aponta para a necessidade de exposição a muitos registros para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com a maneira como os representamos. Esta variedade de registros tem como objetivo um maior entendimento do conceito e, como consequência, uma redução na referida dissociação e um melhor reconhecimento de cada maneira de registrar.

Duval afirma que para que determinado conjunto de signos possa representar um sistema semiótico ele precisa permitir três atividades cognitivas ligadas à semiose:

a) a formação de uma representação de fácil identificação com regras bem estabelecidas, que possa facilmente ser entendida pelo sujeito;

b) a possibilidade de tratamento interno do próprio sistema de registro;
c) a transformação de um registro em outro, de maneira parcial ou total, que será denominada conversão. A conversão independe totalmente do tratamento interno.

A conversão não pode ser feita por aplicação de algoritmos que já prevejam seus representantes em outro sistema. Isso seria uma codificação.

É importante observar que Duval afirma que

> Das três atividades cognitivas ligadas à semiose, somente as duas primeiras – a formação e o tratamento – são levadas em conta no ensino, mesmo em se tratando da organização de sequências de aprendizagem ou da construção de questionários de validação. (DUVAL, 2012, p. 277).

Desconsidera-se, portanto, no ensino escolar, o fato de que a conversão é muito importante para perceber o quanto se internaliza um conceito quando ocorre a variedade de registros.

Mesmo que tenhamos esta importância em mente, Duval (2009, p. 281) continua a questionar: “Em outros termos, a atividade conceitual implica na atividade semiótica ou é independente desta?”.

Para respondê-la, Duval (2012) tem três respostas possíveis. A primeira delas é sobre a economia de tratamento. Para exemplificar, ele toma dois registros distintos: imagine uma equação matemática escrita em linguagem natural, algo como “o dobro de um número mais três é igual a sete. Qual é esse número?”. É mais econômico não apenas expressar com linguagem matemática “$2x + 3 = 7$”, mas também é mais econômico tratar – fazer operações matemáticas – as informações com esta linguagem do que em linguagem natural.

Outra resposta dada ao questionamento é a de que, ao optarmos por um sistema semiótico, estamos selecionando-o em função dos elementos que ele representa e suas possibilidades de utilização e dos inconvenientes que ele possa apresentar. Para exemplificar esta situação, Duval (2012, p. 280) relata que “Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama”.

E, por fim, a última resposta dada por Duval é a mais densa das três. Duval afirma que a conceitualização implica necessariamente a coordenação de registros, para que o sujeito seja capaz de conseguir distinguir a representação do que ela, de fato, representa.

A base apresentada para esta resposta repousa em duas hipóteses. A primeira hipótese é a de que se um sistema semiótico é bem escolhido, então, ele é suficiente para a compreensão do conceito apresentado. O sujeito pode saber ou não convertê-lo em outro registro, mas no momento em que ele encontra um que é suficiente acaba por negligenciar esta possibilidade. Para os que sabem resolver utilizando um dos registros, não há obstáculo aparente. Mas para os que não sabem fazê-lo utilizando um registro, ao tentar resolver utilizando outro sistema, o problema residirá na conversão.

Um exemplo possível seria: imagine que um aluno precisa calcular quanto vale a expressão *1/10 + 3/10*. Este problema não precisa ser resolvido na forma de fração. Ele poderia, por exemplo, convertê-lo para a forma decimal, ou para a forma figural (como um gráfico de pizzas, por exemplo). Para os alunos que sabem resolver a expressão tal como aparece, não há problema algum. Eles resolverão e colocarão a resposta em forma fracionária e isso é suficiente para resolver o problema. O aluno que não sabe resolver a expressão da forma fracionária pode converter para a forma decimal ou para a forma figural. E se ele não consegue converter? Isso não significa que ele não saiba operar com figuras ou com decimais, mas que não consegue converter um registro em outro. Assim sendo, o aluno não diferencia 3/10 do número que significa, pois, senão, conseguiria representá-lo em outro sistema conhecido.

A segunda hipótese apresentada é a de que a compreensão de um conceito reside na mobilização de ao menos dois registros e isso se torna evidente na espontaneidade da atividade de conversão. Para exemplificar isso, Duval relata que, no Ensino Básico, os alunos, mesmo tendo à disposição uma série de registros, não conseguem converter um no outro. Em suas pesquisas, ele mostra que a grande maioria dos alunos não reconhece a expressão gráfica de uma equação, ou a forma literal de uma equação escrita em linguagem natural.

De qualquer modo, no exemplo que apresentamos, na hipótese 2, esta ausência não indica uma completa incompreensão dos conceitos, mas na compreensão limitada a um registro e, consequentemente, não se consegue utilizar outras ideias para resolver outras atividades.

Uma das razões levantadas para que a conversão não ocorra é o que Duval chama de fenômenos de não-congruência. Existem três critérios para que dois registros sejam congruentes:

> Os três critérios de congruência são: - a possibilidade de uma correspondência “semântica” de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar; - A univocidade “semântica” terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada; - A organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem apreender as unidades em correspondência semântica,

> segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjamento das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão. Estes três critérios permitem determinar o caráter congruente ou não congruente da conversão a ser efetuada entre duas representações semióticas diferentes, e que representam, ao menos parcialmente, o mesmo conteúdo. Permitem, igualmente, determinar um grau de não congruência. (DUVAL, 2012, p. 83-84).

Quando a conversão é trivial, isto é, quando existem representações de partida e chegada bem determinadas, ela parece intuitivamente uma codificação. Quando não há congruência, a conversão pode se tornar um problema ainda maior do que a atividade proposta. Além disso, não existem regras a priori que permitam informar se duas representações são, de fato, congruentes – nem poderiam existir.

Assim sendo, para que a hipótese 1 – de que um registro é suficientemente efetivo – ocorra, mesmo que superficialmente, a ocorrência da hipótese 2 é absolutamente necessária.

Em nossa dissertação, que trata de questões geométricas, trabalhamos com maior ênfase em dois tipos de registros: o figural e o gráfico e analisamos como as congruências ocorrem – ou não – em algumas atividades. Tivemos também o registro escritos, registros orais e registros algébricos, mas nos detivemos nos dois tipos relatados.

Ao tratar dos registros figurais, Duval (2012, p. 85) também acaba por tornar claras as operações de que lançamos mão quando trabalhamos com Geometria. Primeiramente define que, em Matemática, "Ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados.".

Logo a seguir, quando vimos a figura, existem dois tipos distintos de operações figurais. Um tipo de operação é transformando figuras em outras de mesma dimensão. O outro tipo de operação é aquele de decomposição dimensional, que é quando transformamos uma forma em outra de modo que ela pareça diferente. Estes dois tipos de operação são utilizados em justificativas e provas matemáticas, estando presentes na vida escolar dos alunos.

Sobre o registro Figural Duval não trata apenas sobre as operações. Trata também sobre modelagem geométrica de situação problema. Duval (2011) afirma que toda situação problema, em Geometria, tem uma superposição de dois registros figurais: uma imagem esquematizada do problema – geralmente dada – e uma visualização geométrica em que se reconhecem os dados do problema. Ou seja, quando trabalhamos com problemas geométricos, trabalhamos com dois registros figurais distintos que têm funcionamentos cognitivos distintos. Além disso, quando queremos mostrar determinada propriedade geométrica, devemos lançar mão de um registro algébrico, que é o registro formal matemático da propriedade em questão. Nesse ponto, Duval afirma que a coordenação dos dois tipos de registros figurais é necessária para uma maior compreensão da propriedade.

Quando trata dos registros gráficos, Duval tem pesquisas muito consistentes no que tange a equações de reta, principalmente no que diz respeito à identificação das curvas, relacionando-as com sua equação.

Ele relata que existem três operações usuais no registro gráfico. A primeira delas é aquela abordada ponto a ponto, em que o aluno escolhe os pontos e os traça no gráfico. A segunda é relativa à abordagem e traçado que a curva apresenta, em que o aluno tem o formato do gráfico em mente e consegue reconhecer pontos da curva no gráfico.

Já a terceira é aquela abordagem da interpretação global das propriedades figurais apresentadas, em que se procura descrever todas as propriedades que determinada forma apresenta.

Aliamos estes dois registros possíveis em nossa dissertação quando preparamos nossa sequência didática. Partindo da Teoria de Registros, pretendemos analisar os dados, responder nossa questão, atingir nossos objetivos e tecer nossas considerações finais.

Além disso, o trabalho com conversão entre registros e os estudos relacionados à Teoria de Registros têm se tornado mais frequente e influenciado as pesquisas educacionais brasileiras, devido à expansão dos programas de pós-graduação em Ensino de Matemática. Dessa maneira, acreditamos que o foco na conversão auxilia a desenvolver o trabalho do educador em Matemática na parte relacionada à linguagem e à representação, como previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), referentes à Matemática, no que diz respeito às competências esperadas sobre as representações e a comunicação. O texto afirma que do educando é esperado que ele possa:

> a) Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.
> b) Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.
> c) Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo. (BRASIL, 2006, p.114)

Assim sendo, pesquisar estas representações e conversões, sob a luz da teoria de registros, pode prover uma ferramenta potente ao educador, no que diz respeito ao que é proposto à sua função, e ao educando, que acaba por mobilizar mais de um registro como meio de compreender, de maneira mais profunda, o objeto matemático em questão.

3 DISSERTAÇÕES DE MESTRADO E CONVERSÕES DE REGISTRO

A disseminação dos estudos de Duval no Brasil sobre o papel dos Registros de Representação acabou por gerar um grande número de artigos, dissertações e teses que se utilizam da teoria, principalmente no que diz respeito à conversão dos registros.

Nossa pesquisa no Repositório de Dissertações da Capes, da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDBTD), da Universidade de Brasília (UnB), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), da Universidade de São Paulo (USP) e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat) dão uma mostra desta expansão. Utilizamos como palavras-chave da pesquisa os termos “geometria” e “conversão”. Na tabela 1 a seguir, contabilizamos as dissertações encontradas que utilizam a conversão de Registros como tema de suas pesquisas. Para organizar esta tabela, analisamos exclusivamente os resumos das dissertações de Mestrado.

Tabela 1 – Distribuição das Dissertações por Repositório

Repositório	Número de Dissertações
Capes	9
BDBTD	16
UnB	1
PUCSP	4
USP	3
ProfMat	1

Fonte: Os autores (2016).

É interessante notar que, durante nossa pesquisa nos repositórios, as dissertações mais antigas foram encontradas nos programas de Educação, principalmente. As mais recentes encontram-se dentro dos Programas de Ensino ou Educação em Matemática. Isso remete ao fato de que os Programas de Pós-Graduação, em Ensino de Matemática, são muito recentes. Acreditamos que com a ampliação destes Programas mais trabalhos sobre conversão de Registros sejam realizados.

Durante nossa pesquisa foi notório o fato de que muitas destas envolviam a Teoria de Registros Semióticos unicamente para trabalhar questões de linguagem – representação – ou tratamento interno dos registros. Apesar de não contabilizarmos aqui a quantidade de dissertações que se utilizam de Duval, é um exercício interessante pensar o quanto a Teoria de Registros tem sido trabalhada em todos os seus detalhes no Brasil.

Tendo apenas as dissertações com foco em conversão computadas, notamos que apenas uma destas dissertações tem como foco conversão entre as Geometrias Plana e Analítica, que é o foco de nossa pesquisa.

A dissertação de Paula (2011), intitulada “Mobilização e articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos de geometria analítica”, trabalha especificamente com conversão de registros entre Geometria Plana e Geometria Analítica com alunos de graduação em uma licenciatura. Analisando minuciosamente esta dissertação, notamos que, além de o objeto ser a conversão, o autor utilizou registros tecnológicos do GrafEq para realizar algumas conversões. Além disso, no referido trabalho, a proposta é realizar conversões de registro analítico para o algébrico ou vice-versa diretamente, sem intermédio de uma questão problema.

A experiência desta dissertação ocorreu com inicialmente 11 acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS) na disciplina de Vetores e Geometria Analítica. Por se tratar de um grupo de estudos em Ensino Superior, foi considerado que os educandos já tinham conhecimento em Geometria Analítica. Ao término da experiência, apenas 4 acadêmicos permaneceram até o final do experimento. Para realizar a pesquisa, Paula (2011) utilizou-se de uma sequência didática baseada na Engenharia Didática de Artigue.

Analisando a proposta de Paula (2011), podemos verificar que ele utilizou lápis, papel e registro computacional para resolução de atividades pré-determinadas que visavam à conversão entre registro geométrico e analítico. Nestas atividades o educando tem a possibilidade de receber a informação com um tipo de registro e convertê-la em outro. Tendo em mente a Teoria de Registros, o autor analisa conversões no Ensino de Geometria, principalmente quando afirma:

> Enfim, nossos resultados mostram que um trabalho que explore a Geometria Analítica em estreita relação com a Álgebra e a Geometria, levando os alunos a praticarem transformações do tipo tratamento e conversões deve levar a uma melhor apreensão dos objetos da Geometria Analítica (PAULA, 2011, p.168)

Consideramos importante também analisar as dissertações de mestrado que trabalhassem com utilização da Geometria Analítica para a resolução de problemas em Geometria Plana (e vice-versa) e não utilizassem a Teoria de Registros. Esta análise é importante por possibilitar uma ampliação de nossa visão sobre como este assunto tem sido discutido.

Analisando os mesmos repositórios, encontramos, no Repositório de Dissertações do ProfMat, uma dissertação disponível sobre o referido tema. Esta dissertação foi desenvolvida na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUCRJ) em 2015. A dissertação "Geometria Analítica: Caminhos para a aprendizagem", de Silva (2015), tem como objetivo

> [...] propor caminhos para o ensino da geometria analítica tendo como base três eixos norteadores: a história das geometrias, a proposição de problemas matemáticos que podem ser resolvidos tanto pela geometria plana quanto analítica e o uso da ferramenta tecnológica através do software Geogebra. (SILVA, 2015, p.12).

Tomando conhecimento da dissertação de Silva (2015), verificamos que a metodologia de pesquisa ocorreu em forma de revisão bibliográfica, não resultando em um experimento na educação básica. Um dos capítulos da dissertação de Silva (2015) tem uma visão comum com a de Paula (2011) no que diz respeito à utilização das tecnologias para o aprendizado em Matemática. O software utilizado, porém, é o Geogebra e Silva (2015) propõe resoluções e construções possíveis com a utilização do software, já que não existe uma prática na pesquisa.

O capítulo que tem mais interesse de nossa parte, porém, é o que trata sobre resolução de exercícios com Geometria Plana ou Geometria Analítica. Silva (2015) propõe e resolve doze problemas retirados de livros didáticos, do repositório de questões do ProfMat e da Revista do Professor de Matemática. Considerando-se que a metodologia da pesquisa trata de uma pesquisa bibliográfica, o autor mostra as possibilidades da utilização da Geometria Analítica para resolução de problemas de Geometria Plana.

Nery (2008) fala da importância desta conexão ao afirmar que

> A Geometria Analítica fica parecendo uma parte da matemática que se encerra em si mesma. Para mim é aí que está a maior falha do Ensino da Geometria Analítica. Não nego que devemos valorizar as fórmulas, afinal a Geometria Analítica é basicamente isso, um estudo da Geometria Plana por meio das equações. Mas se a Geometria Analítica é isso, é primordial que nós, professores, revisitemos a Geometria Plana para resolver alguns exercícios aparentemente específicos de Geometria Plana, porém utilizando recursos específicos na Geometria Analítica (NERY, 2008, p.19).

Neste aspecto as duas dissertações convergem, por terem como objetivo uma articulação entre Geometria e promover um ambiente em que esta mobilização seja possível e profícua. Apesar de ser diferente em relação a nossa proposta, que será conduzida por uma prática que não se utiliza de registro tecnológico, esta articulação proposta pelas dissertações também faz parte de nossos objetivos, conforme descrevemos na Introdução.

4 LIVROS DIDÁTICOS E AS POSSIBILIDADES DE CONVERSÃO.

As escolas públicas do país selecionam seus livros didáticos em intervalos de três anos. Esta seleção de livros didáticos é promovida atualmente pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que dispôs, na Resolução n°42, de 28 de agosto de 2012, as seguintes justificativas para seu estabelecimento:

> CONSIDERANDO o disposto na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e no Plano Nacional de Educação quanto à universalização do acesso e à melhoria da qualidade da educação básica, bem como a previsão constitucional sobre o fornecimento de material didático e
> CONSIDERANDO a importância da participação dos docentes no processo de escolha dos livros, em função do conhecimento da realidade dos seus alunos e das suas escolas. (MEC-FNDE, 2012, p.1).

É interessante notar a importância operacional do livro dentro da educação no país e ter em mente que analisá-lo deve ser uma tarefa constante. Choppin (2002) exprime a necessidade desta tarefa ao afirmar que:

> Um manual não é um livro que lemos, mas um instrumento que usamos. A complexidade do manual – e por consequência de sua análise – vem do fato que ele assume funções múltiplas (e, com o passar do tempo, são mais e mais numerosas) junto aos diversos destinatários (alunos, professores, famílias, ...) cujas expectativas variam segundo os momentos (professor preparando sozinho o seu curso, professor lecionando, etc.). É a tomada de consciência da dimensão dinâmica do manual (ele só existe, em definitivo, pelos usos que dele fazemos!) o que falta à maioria dos trabalhos de análise. (CHOPPIN, 2002, p.22-23).

Assim sendo, optamos pela análise de livros didáticos da Educação Básica como meio de verificar como (e se) a conversão tem aparecido neste instrumento amplamente utilizado pelos professores.

Para esta análise, selecionamos em cinco coleções de livros, voltados para o Ensino Médio, os volumes de 3º ano, que é quando a Geometria Analítica tradicionalmente tem espaço. Os livros analisados fazem parte dos livros do PNLD que as escolas públicas recebem para análise e são os que estão disponibilizados na escola onde ocorreu a pesquisa. A tabela 2, na próxima página, indica os livros analisados, o autor e sua sigla neste trabalho.

Tabela 2 – Livros analisados

Nome do Livro	Autor	Denominação neste trabalho
Contexto e Aplicações	Dante	L1
Conexões com a Matemática	Leonardo	L2
Ciência e Aplicação	Gelson Iezzi	L3
Matemática Paiva	Paiva	L4
Novo Olhar	Joamir Souza	L5

Fonte: Os autores (2016).

Optamos por dividir a análise em relação aos seus conteúdos e traçar um comparativo entre as coleções. Dividimos a análise em quatro tópicos abordados: plano cartesiano, pontos, reta e triângulos. Cada tópico foi dividido conforme os conteúdos específicos e, para cada divisão, analisamos como a teoria – conceitos e exemplos – e os exercícios propostos de Geometria Analítica são apresentados nos livros didáticos. Neste momento optamos por não analisar a parte do livro que diz respeito à circunferência, à elipse, à parábola e à hipérbole, pois esta parte da Geometria Analítica não é contemplada no planejamento da sequência didática que desenvolvemos.

O primeiro dos tópicos analisados – plano cartesiano – foi introduzido em dois dos livros, quando foi utilizada a História da Matemática, usando Descartes e Fermat (L1 e L3), dois livros utilizando o sistema de GPS (Global Positioning System), para exemplificar sistemas de localização (L4 e L5), e um dos livros introduz diretamente a ideia de localização de pontos no plano cartesiano (L2).

A maioria dos livros, logo após esta introdução, discute as possibilidades de utilização da álgebra para a geometria, ao relatar a algebrização de elementos geométricos através da Geometria Analítica. Apenas um dos textos (L5) vai além e relata também a possibilidade de uma leitura possível entre Geometria Analítica e resolução de sistemas lineares, proporcionando ao educando mais uma possibilidade de utilização da Geometria Analítica.

Além disso, a maioria dos textos supõe o plano cartesiano conhecido e, portanto, não o descreve, assim como suas partes e elementos. O fato de os alunos utilizarem o plano cartesiano com antecedência, nas séries anteriores, possibilita esta abordagem. Todos os exercícios apresentam exercícios de marcação e identificação de pontos no plano. Um dos livros (L5) traz também exercícios que preveem localização em um mapa geográfico, mostrando uma possibilidade de aplicação da Matemática em Cartografia, por exemplo.

A análise do segundo tópico – pontos – foi dividida entre três conteúdos que aparecem nesta ordem nos livros: 'distância entre dois pontos', 'ponto médio' e 'condição de alinhamento'.

Sobre o conteúdo 'distância entre dois pontos', verificamos que todos os livros introduzem o conceito de distância com um exemplo numérico e que a maioria destes apresentam os casos em que não existe variação em uma das coordenadas. Um dos livros, apenas (L2), trata diretamente o caso em que existe variação tanto no eixo das abscissas quanto no eixo das ordenadas.

Em todos os livros, logo após esta abordagem numérica, uma fórmula para a distância é desenvolvida, utilizando o Teorema de Pitágoras. Notamos aqui a utilização de um resultado de Geometria Plana (Teorema de Pitágoras no Triângulo Retângulo) para seu equacionamento em Geometria Analítica. Todos os exercícios podem ser resolvidos com a utilização da fórmula e nenhum deles propõe alguma atividade em que se utilize conversão na Geometria.

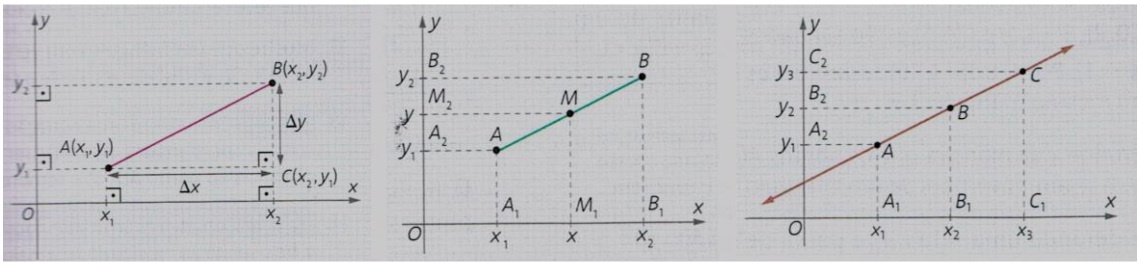
Quando analisamos o conteúdo "ponto médio", verificamos que a maior parte dos livros, já na introdução, não utiliza exemplos numéricos, mas, sim, representações genéricas de pontos no plano. Em apenas dois deles (L4 e L5) a introdução é numérica. De qualquer forma, em todos os casos, o desenvolvimento de uma fórmula, para o cálculo do ponto médio, é feito utilizando semelhança entre triângulos, apresentando mais uma ideia de conversão na geometria.

Finalmente, ao analisarmos o conteúdo 'condição de alinhamento', a pesquisa mostrou que, na maioria das vezes, a abordagem deixa de ser numérica para a introdução e torna-se algébrica. Além disso, a maioria se utiliza do conceito de determinante nulo como condição de alinhamento, apresentando a condição '$det=0 \rightarrow$ pontos colineares', apenas citando a volta.

Um dos livros, porém, foge desta abordagem (L4). A introdução é numérica e logo em seguida a condição de alinhamento é apresentada relacionando o alinhamento ao conceito de declividade da reta. Por apresentá-lo desta forma, é nítida a conversão existente na geometria. Este livro apresenta o conceito de determinantes para o alinhamento como um aprofundamento.

Outro fator que aparece muito evidente nas cinco coleções é o de que quando se pretende fazer uma generalização algébrica, os pontos aparecem, preferencialmente (em 14 dos 15 casos analisados), no do primeiro quadrante, formando um segmento de reta ou reta com inclinação positiva, como mostra a figura 01, na próxima página.

Figura 01 – Retas crescentes para representação algébrica



Fonte: Dante (2014, p. 71-73-75).

Trabalha-se pouco, portanto, com a questão das possibilidades de Registro destas generalizações, podendo dar ao educando uma visão de que as generalizações dependem dos quadrantes em que estão representados os pontos genéricos.

Por fim, analisando os exercícios propostos e verificando aqueles que fazem a conversão entre Geometria Plana e Geometria Analítica, não encontramos problemas expostos na forma de Geometria Plana, apenas na forma de Geometria Analítica, não possibilitando ao educando uma vivência de conversão entre registros.

Seguindo nossa análise, partimos ao terceiro tópico – retas – dividindo também o grupo em conteúdos: ‘equações da reta’, ‘posição relativa entre duas retas’ e ‘distância de um ponto até uma reta’.

O conteúdo ‘equações da reta’ é de vital importância dentro da Geometria Analítica, por descrever com precisão algébrica um elemento essencial da Geometria Plana. Na maioria dos casos este conteúdo é introduzido tratando da inclinação da reta. Em um dos livros (L3) a abordagem é feita por condição de alinhamento entre pontos.

Logo após a introdução do conteúdo, todos os livros explicam o que significa o coeficiente angular a de uma reta. A maioria dos livros separa o caso da reta com inclinação positiva da reta com inclinação negativa, indicando o sinal (positivo ou negativo) do coeficiente angular como representante do crescimento ou decrescimento. Apenas um dos livros (L4) não faz esta divisão, tomando um caso genérico e utilizando o sinal da tangente de um arco: se a reta tem inclinação positiva, a inclinação da reta é um ângulo agudo e $a>0$. Caso contrário, a inclinação da reta é um ângulo obtuso e $a<0$. Em todos os casos, porém, a abordagem é algébrica e em todos os livros existe uma nota sobre retas que são paralelas a um dos eixos coordenados.

Analisando os formatos de equação em que a reta pode ser representada, vimos que a predileção dos textos é a dos formatos geral e reduzido. Todos os livros utilizam a forma geral, reduzida e simétrica, mas a forma simétrica é pouco explorada. Três deles (L1 e L2 e L3) apresentam a forma segmentária e apenas um não apresenta a forma paramétrica (L5).

Podemos inferir que mesmo em alguns dos livros as conversões entre equações da Geometria Analítica não são trabalhadas, podendo causar uma sensação de que três formatos Fundamental, Paramétrica e Segmentária são dispensáveis. É importante salientar que a utilização de diferentes representações da equação da reta já é um exercício de conversão, por proporcionar um momento de troca de um registro em outro.

Verificando o conteúdo 'posição relativa entre duas retas', verificamos que a maioria dos livros começa retomando quais são os casos possíveis e apenas um deles (L3) não trata deste conteúdo em um tópico específico. No livro (L3), o conteúdo é distribuído em várias partes do texto.

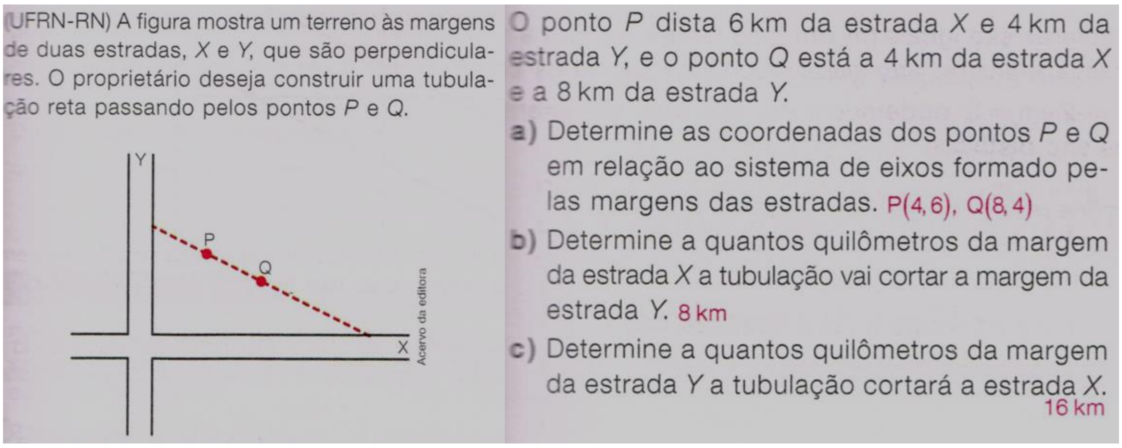
Quando analisamos quais são as posições relativas entre duas retas que são apresentadas, vimos que, em dois livros (L1 e L5), as retas são divididas em dois casos: paralelas ou concorrentes, deixando uma pequena nota sobre retas coincidentes. Vimos também que dois dos livros analisados (L3 e L4) dividem as posições em três casos: paralelas ou paralelas distintas, coincidentes ou paralelas coincidentes e concorrentes. Um dos livros (L2) divide em quatro casos: paralelas, coincidentes, concorrentes perpendiculares e concorrentes não-perpendiculares.

Em todos os casos analisados, as retas perpendiculares são tratadas em separado e todas as relações apresentadas, para classificação da posição, aparecem apenas algebricamente, sem introdução numérica. Quando o trabalho de verificação de concorrência entre duas retas ocorre, abre-se geralmente um espaço para a discussão de sistemas lineares do tipo 2×2. Dois dos livros (L2 e L3), porém, não trazem este fato em seu desenvolvimento. Consideramos importante este trabalho de relacionar retas com sistemas do tipo 2×2, por possibilitar a conversão entre a Geometria Plana e o estudo dos sistemas.

O conteúdo 'distância de um ponto até uma reta' é trabalhado nos cinco livros. Porém em um deles (L4) a abordagem é vista como um complemento. Em todos os casos analisados a primeira abordagem é numérica e a distância é calculada através da distância do ponto P até a intersecção entre a reta r dada e a perpendicular a r por P. Esta é uma abordagem muito interessante, por converter a linguagem da Geometria Plana para a Geometria Analítica sem se utilizar de fórmulas.

Quando analisamos os exercícios, encontramos apenas dois deles – figuras 02 e 03 – em que se resolvem problemas de Geometria Plana utilizando Geometria Analítica.

Figura 02 – Problema de Geometria Plana que pode ser resolvido com Geometria Analítica


(UFRN-RN) A figura mostra um terreno às margens de duas estradas, X e Y, que são perpendiculares. O proprietário deseja construir uma tubulação reta passando pelos pontos P e Q.

O ponto P dista 6 km da estrada X e 4 km da estrada Y, e o ponto Q está a 4 km da estrada X e a 8 km da estrada Y.

a) Determine as coordenadas dos pontos P e Q em relação ao sistema de eixos formado pelas margens das estradas. P(4, 6), Q(8, 4)

b) Determine a quantos quilômetros da margem da estrada X a tubulação vai cortar a margem da estrada Y. 8 km

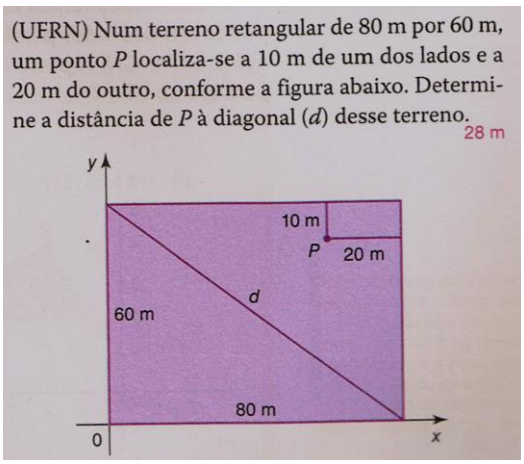
c) Determine a quantos quilômetros da margem da estrada Y a tubulação cortará a estrada X. 16 km

Fonte: Souza (2013, p.171).

Podemos verificar que o problema da figura 02 sugere a utilização da Geometria Analítica para localização dos pontos *P* e *Q* no plano cartesiano. Isso resolve o enunciado “a” do exercício.

Para os enunciados “b” e “c” da atividade podemos utilizar ao menos duas maneiras para encontrar as distâncias solicitadas. Em uma das maneiras o aluno pode verificar que os pontos pedidos são aqueles em que uma das coordenadas (*x* ou *y*) é nula, aplicando a condição de alinhamento de três pontos e calculando a variável desconhecida. Em outra opção o aluno pode determinar a equação da reta que passa por *P* e *Q* e determinar, posteriormente, suas intersecções com os eixos coordenados. A figura 03 ilustra o assunto.

Figura 03 – Outro problema de Geometria Plana que pode ser resolvido com Geometria Analítica


(UFRN) Num terreno retangular de 80 m por 60 m, um ponto *P* localiza-se a 10 m de um dos lados e a 20 m do outro, conforme a figura abaixo. Determine a distância de *P* à diagonal (*d*) desse terreno. 28 m

Fonte: Paiva (2013, p.75).

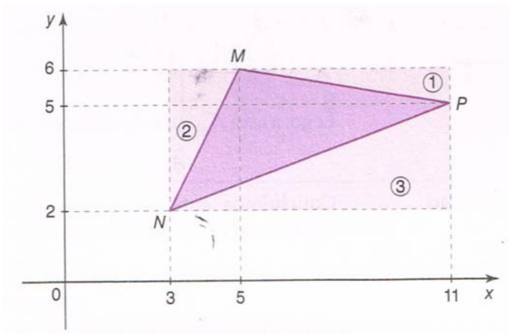
Já o problema proposto na figura 03 pede a distância de um ponto (P) até uma reta (d). Isso já sugere a determinação da equação da reta diagonal e o posterior cálculo da distância entre ponto e reta. Este cálculo pode ser realizado com as seguintes etapas: i) determinando-se a reta perpendicular r à reta d que passa por P; ii) a intersecção I entre r e d e iii) a distância entre I e P. Pode-se também utilizar a fórmula da distância entre ponto e reta.

Em ambos os casos, as conversões são facilmente identificáveis, pela utilização dos eixos em lugares estratégicos e intencionais, que facilitam o desenvolvimento das atividades utilizando Geometria Analítica. Mesmo assim, evidenciam a possibilidade de resolução de problemas com enunciado em Geometria Plana através de Geometria Analítica.

Finalizamos analisando nosso quarto tópico: 'triângulos', quando focaremos apenas o cálculo da área de um triângulo.

Na maioria das abordagens introdutórias do tema, os livros tratam de retomar a fórmula da área do triângulo de Geometria Plana para o cálculo em Geometria Analítica. Um dos livros (L5) faz uma construção algébrica da fórmula que utiliza determinantes diretamente e um deles (L4) faz uma abordagem utilizando Geometria Plana para o cálculo (figura 04).

Figura 04 – Uma abordagem numérico-geométrica para o cálculo da área do triângulo



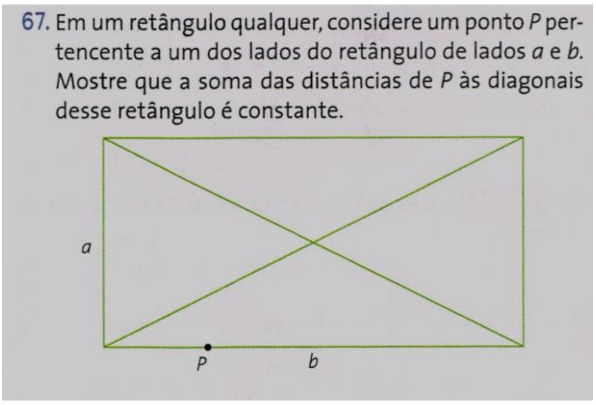
Fonte: Paiva (2013, p. 77).

Como o triângulo é apresentado após os casos já analisados, seria importante que fosse utilizado para fazer conexões com as retas, por exemplo. Isso, porém, não ocorre, deixando uma lacuna que evidencia uma falta de utilização conjunta entre os elementos da própria Geometria Analítica estudada. Separa-se o conteúdo em blocos não como se ele fosse linear, mas como se fosse independente e não tivesse ligação alguma.

Ao final da análise dos quatro tópicos, procuramos, no material de aprofundamento dos livros, sugestões de conversão na Geometria e estas foram encontradas em dois dos livros (L1 e L4).

Um deles (L4) sugere quatro atividades de utilização de Geometria Analítica para resolver problemas de Geometria Plana. O outro livro (L1) dedica uma página de seu texto – a que os alunos têm acesso – à resolução de três problemas de Geometria Plana, resolvidos com Geometria Analítica. Um destes três exemplos é o exposto na figura 05.

Figura 05 – Um problema de demonstração em geometria utilizando álgebra



Fonte: Dante (2014, p. 92).

Os três exemplos são de demonstrações em geometria e são tratados como "Aplicações da Geometria Analítica". Nesse caso, não há resolução de um problema, mas apenas uma proposta de demonstração que deve ser realizada pelo aluno.

Neste exemplo, a possibilidade de conversão prevê uma algebrização intensa, por não tratar de valores numéricos determinados. É um exercício de Geometria Plana que tem uma resolução em Geometria Analítica interessante por tratar de uma grande quantidade de conceitos de Geometria Analítica. Seria interessante que este tipo de atividade tivesse mais espaço em livros didáticos.

Nossa pesquisa revelou que a conversão aparece em algumas generalizações de fórmulas e que aparece com pouca frequência nos exercícios, já que em apenas três atividades trabalham-se questões de Geometria Plana por meio da Geometria Analítica.

A análise dos livros evidenciou, portanto, que existe muito espaço para um trabalho de conexão entre as Geometria Plana e Analítica, pois, apesar de se utilizarem de Geometria Plana para desenvolver alguns resultados da Geometria Analítica, esta coordenação é abandonada nas atividades.

5 POSSIBILIDADE DE CONVERSÕES EM ATIVIDADES

5.1 METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesta seção apresentaremos a metodologia da pesquisa realizada, indicando a abordagem utilizada e caracterizando-a em relação aos objetivos e procedimentos adotados.

Em nossa pesquisa, construímos uma sequência didática utilizando como referencial teórico a Teoria de Registros de Representação Semiótica. Nesta sequência propusemos atividades que permitam a conversão de registros na geometria. Considerando as questões norteadoras de nossa pesquisa, caracterizamos nossa coleta de dados como, essencialmente, uma pesquisa de campo, que é

> [...] aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode se dar por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa-ação, aplicação de questionário, teste, entre outros. (FIORENTINI, 2006, p.106).

A abordagem utilizada para esta pesquisa foi do tipo qualitativa que Silveira (2009, p.31) descreve como "A pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc." Considerando-se que elaboramos uma sequência didática, que visa proporcionar ao estudante um espaço em que ele possa utilizar dois tipos de registros para resolver atividade em Geometria, acreditamos que a pesquisa qualitativa, neste caso, se justifica, já que pretendemos olhar com maior profundidade os fenômenos que surgem na conversão entre registros.

Considerando ainda nossos objetivos, nossa pesquisa pode ser caracterizada com uma pesquisa exploratória que, segundo Gerhardt e Silveira (2009, p. 35) "tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses".

Para estruturar os procedimentos a serem utilizados, optamos pelo Estudo de Caso que é aquele que "Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefatos" (YIN, 1984 apud PONTE, 2006, p. 7), já que tomamos informações de um grupo específico composto por alunos de 3º ano do Ensino Médio dentro de seu espaço real de sala de aula, sobre o conteúdo de Geometria.

De maneira mais específica, conforme Borba (2004, p. 7) trata, afirmamos que o Estudo de Caso de nossa pesquisa qualitativa exploratória é um Experimento de Ensino, que é descrito como aquele em que "atividades pedagógicas são propostas a estudantes de forma que o pesquisador-professor possa "ouvir" de forma detalhada a Matemática desenvolvida por estudantes.".

Tendo isso em mente, acabamos por descrever também, baseados em Ponte (2006, p.7), o que caracteriza de fato um estudo de caso. Necessariamente um estudo de caso é uma pesquisa empírica e de maneira fortemente descritiva, mas não apenas descritiva. Além disso, não é um tipo de estudo experimental, já que o pesquisador não tem controle sobre as suas variáveis. E, finalmente, os resultados de um estudo de caso podem ser apresentados de diversas maneiras como textos e vídeos, por exemplo.

Nosso estudo de caso, em especial, tem estas características, pois nossa pesquisa é empírica, não fizemos um experimento com variáveis controláveis e nossa coleta de dados ocorreu de duas maneiras principais: vídeo e registros escritos nossos e dos alunos.

5.2 SUJEITOS DA INVESTIGAÇÃO

A escola, que foi alvo da investigação, é uma Escola Pública do Rio Grande do Sul, e atende alunos de Ensino Médio oriundos de mais de 50 municípios do Estado. O Ensino Médio Técnico integrado é diurno e organizado em quatro anos presenciais. A Matemática aparece como componente curricular nos três primeiros anos.

Os estudantes, que participaram desta pesquisa, fazem parte do 3º ano do Ensino Médio Técnico integrado diurno. No referido curso existem três turmas de 3º ano, perfazendo um total de setenta e oito alunos, e todas as turmas têm o mesmo professor de Matemática, que é mestrando autor desta dissertação. Desses setenta e oito alunos, cinquenta e seis já foram alunos do professor em outras séries e anos.

Optamos por propor as atividades de pesquisa nas três turmas, para que todos os alunos pudessem tomar conhecimento das possibilidades de trabalho em Geometria, mas, em nossa dissertação, escolhemos alunos de uma das turmas como sujeitos de investigação e posterior análise.

A turma selecionada para a pesquisa é composta por vinte e cinco alunos, sendo cinco integrantes do sexo feminino e vinte integrantes do sexo masculino. Um dos integrantes é da cidade de Campo Bom, um de Canoas, quatro de Dois Irmãos, um de Estância Velha, dois de Esteio, seis de Novo Hamburgo, sete de São Leopoldo, um de Sapiranga e dois de Sapucaia do Sul. Todas as cidades são da região do Vale do Rio dos Sinos, com uma proximidade de até 29 km. Os integrantes têm idade entre dezesseis e vinte anos. Temos 3 alunos com 16 anos, 10 alunos com 17 anos, 5 alunos com 18 anos, 6 alunos com 19 anos e 1 aluno com 20 anos.

É complexo definir questões socioeconômicas, baseado apenas em relação à mensalidade paga pelos alunos. Pretendemos, nesse parágrafo, ao menos elucidar um pouco a questão financeira da escola e não da turma. Alguns cálculos que relacionam renda estabelecem vinte e seis faixas intermediárias de pagamento de bolsas parciais. A escola atende alunos das mais variadas camadas sociais, desde os mais financeiramente necessitados (Faixa 1 – Isenção Total) aos que pagam a mensalidade completa (Faixa 26 – Pagamento integral). De maneira muito geral, a escola oferece bolsa integral a uma quantia próxima de 50% dos alunos da escola e o restante dos alunos paga uma das faixas que pode chegar até R$ 769,00 mensais. Nesta turma existem 11 alunos na Faixa 1 e 3 alunos na Faixa 26. Entre as faixas intermediárias, temos 2 alunos na Faixa 2 (R$ 112,00), 2 alunos na faixa 03 (R$ 133,00), 1 aluno na Faixa 6 (R$ 196,00), 1 aluno na Faixa 8 (R$ 238,00), 2 alunos na Faixa 9 (R$ 266,00), 1 aluno na Faixa 13 (R$ 378,00), 1 aluno na Faixa 16 (R$ 461,00) e 1 aluno na Faixa 24 (R$ 685,00).

Sobre questões de avaliação, a porcentagem necessária para a promoção de um aluno para a série seguinte é de 60%. As avaliações são trimestrais e emitidas por meio de notas que variam conforme o trimestre. No primeiro trimestre as notas inteiras são entre 0 e 25, no segundo entre 0 e 35 e no último entre 0 e 40. Assim sendo, no primeiro trimestre a média fica em 15 dos 25 pontos, por exemplo. Ao final do ano, somam-se as três notas e é considerado aprovado o aluno que conseguiu somar mais que 60 pontos. Os alunos que não obtiveram êxito passam pelo chamado "Conselho de Classe" que opta por promover ou não o aluno. A turma em que a pesquisa ocorreu teve, em seu primeiro trimestre, em Matemática, 17 alunos com nota inferior a 15 pontos, que é um resultado comum durante o primeiro trimestre.

O horário semanal de aula da turma selecionada é dividido entre quatro manhãs das 7h30min às 12h, com cinco períodos de 50 min, e duas tardes das 13h15min às 18h35min, com seis períodos de 50 min. Os intervalos em cada um dos turnos são de vinte minutos. Em um dos dias a turma tem aula o dia inteiro. As aulas de Matemática ocorrem na segunda-feira na parte da tarde, das 13h15min às 14h05min (um período) e nas terças-feiras de manhã das 7h30min às 9h10min (dois períodos), totalizando três períodos semanais, distribuídos em 150 minutos.

O Plano de Estudos da disciplina de Matemática prevê que os alunos devem ter, no primeiro trimestre letivo do ano (que terminou em 26 de maio), os seguintes conteúdos de Geometria Analítica: coordenadas cartesianas, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, área de um triângulo, equação geral da reta, intersecção entre duas retas, equações geral, reduzida e simétrica da reta, análise dos coeficientes da equação reduzida da reta, posições relativas entre duas retas, ângulo entre duas retas, retas perpendiculares, distância entre um ponto e uma reta, circunferência e suas equações, posições relativas entre ponto e circunferência e entre reta e circunferência.

Optamos por descrever o conteúdo do primeiro trimestre para deixar à mostra que nossa pesquisa ocorre com os alunos já tendo esta base em Geometria Analítica. Assim sendo, pretendemos, também, com a sequência, dar um fechamento ao conteúdo de Geometria Analítica.

5.3 A CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção descrevemos nossa sequência didática, indicando nossos objetivos gerais e específicos, aula por aula. No Anexo A, apresentamos uma cópia da sequência entregue e aplicada nos alunos.

Considerando-se nosso estudo de caso, de viés qualitativo e pretendendo com isso um experimento de ensino, montamos nossa sequência didática como um meio de obter dados que nos permitissem responder nossas questões norteadoras da pesquisa.

Para iniciarmos nossa sequência didática, identificamos todas as questões de geometria do repositório de provas antigas de primeira fase da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática). Dentre estas questões, selecionamos oito questões que conseguimos resolver utilizando dois registros em geometria para inserirmos em nossa pesquisa.

Inspiramo-nos em Ponte (2005) que, em seu livro “Investigações Matemáticas em Sala de Aula”, sugere procedimentos para uma investigação matemática. Nossa sequência tem o seguinte formato, portanto:

Aulas 01 e 02 – Exploração e Formulação das questões – Ponte (2005) sugere que uma investigação deve começar com o reconhecimento de uma situação problema e suas posteriores explorações e formulações das problemáticas. Em nossa sequência este primeiro momento é adaptado da seguinte maneira: o professor expõe uma situação problema de geometria que pode ser resolvida de pelo menos duas maneiras distintas e a resolve em conjunto com os alunos. Logo após propõe aos alunos uma atividade que possa ser trabalhada com Geometria Plana e Geometria Analítica.

Aulas 03,04 e 05 – Conjecturas/Testes e Reformulação – Neste momento, Ponte (2005) sugere que os alunos devem primeiramente organizar dados e formular conjecturas, para, posteriormente, realizar testes e refinar. Aqui adaptamos a parte da organização de dados e formulação de maneira que a 'conjectura' não fosse apenas um resultado matemático, mas também uma possibilidade: a possibilidade de resolver um problema, utilizando dois registros geométricos distintos.

Já a parte do teste foi adaptada para um momento em que o aluno tem a sua disposição, para resolver determinado problema, utilizando dois registros. É um momento de verificar se é possível ou não resolver determinada situação problema, utilizando dois registros. Assim sendo, a parte de refinamento será feita através da prática.

Aulas 06, 07 e 08 – Justificação e avaliação – Este é o momento final da sequência de uma investigação sugerida por Ponte (2005), que sugere que os alunos justifiquem suas conjecturas e avaliem o raciocínio ou o resultado do raciocínio utilizado. Adaptamos aqui para um momento em que os alunos revelam, ao grande grupo, suas contribuições, justificando os passos de resolução e mostrando suas possíveis dificuldades e facilidades em resolver uma atividade, utilizando as duas geometrias. Isso ocorre com uma apresentação por grupos e uma posterior análise das resoluções.

Esta sequência didática tomou lugar no início do 2º trimestre, conforme a Tabela 3, na próxima página, logo após 29 períodos de aula de Geometria Analítica do primeiro trimestre.

Tabela 3 – Distribuição das aulas

Etapa	N° da Aula	Data da realização
Exploração e Formulação	Aula 01	14/06/2016
	Aula 02	14/06/2016
Conjecturas, Testes e Reformulações	Aula 03	20/06/2016
	Aula 04	21/06/2016
	Aula 05	21/06/2016
Justificação e Avaliação	Aula 06	27/06/2016
	Aula 07	28/06/2016
	Aula 08	28/06/2016

Fonte: Os autores (2016).

Passamos agora a relatar cada uma das aulas e atividades propostas, uma a uma, em ordem cronológica, com seus respectivos objetivos e expectativas, mostrando como foi o desenrolar das aulas e analisando os resultados obtidos à luz da Teoria de Registros.

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA – PARTE 1

Neste capítulo descrevemos e analisamos o que ocorreu nas cinco primeiras aulas da nossa sequência didática.

6.1 AULA 01 – SEQUÊNCIA E PLANEJAMENTO

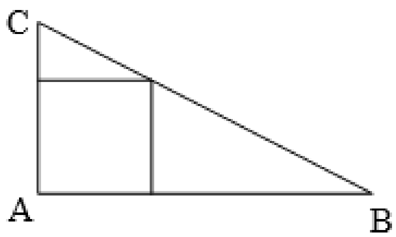
A aula 01 foi elaborada com duração de 50 minutos e tinha como objetivo propor e resolver com os alunos uma atividade em Geometria que pudesse ser resolvida de duas maneiras distintas, por meio de Geometria Plana e de Geometria Analítica.

A questão original que selecionamos para a Aula 01 foi a que aparece na figura 06.

Figura 06 – Atividade Proposta para a aula 01

No triângulo retângulo ABC da figura abaixo está inscrito um quadrado. Se AB = 20 e AC = 5, que porcentagem a área do quadrado representa da área do triângulo ABC?

A) 25%
B) 30%
C) 32%
D) 36%
E) 40%



Fonte: OBM (1997).

Dividimos esta aula em duas partes (1 e 2). Para a primeira parte, elaboramos o roteiro que aparece na figura 07.

Figura 07 – Parte 01 da Aula 01

Parte 1 – Construa um plano cartesiano e siga os **passos** abaixo:
a) marque os pontos com as seguintes coordenadas: A(0,0), B(0,5) e C(20,0);
b) trace e determine a equação da reta r que passa pelos pontos B e C;
c) trace e determine a equação da reta s bissetriz dos quadrantes ímpares;
d) determine algebricamente e marque no gráfico o ponto P de intersecção entre as retas r e s.
e) trace e determine as projeções M e N de P sobre os eixos x e y, respectivamente.

Questionamentos:
a) Que figura é formada pelos vertices M, P, N e A?
Resposta:

b) Qual á a área do triângulo ABC?
Resposta:

c) Qual é a área do quadrilátero MPNA?
Resposta:

Fonte: Os autores (2016).

Elaboramos esta parte como uma proposta de resolução do problema, utilizando a Geometria Analítica. Pretendíamos, com esta atividade, que o aluno pudesse:

1) marcar os vértices de um triângulo dado no plano cartesiano;

2) determinar e representar duas equações de reta relacionadas a este triângulo: a equação da reta que contém a hipotenusa do triângulo e da reta que contém a bissetriz do ângulo reto do triângulo;

3) determinar a intersecção entre essas duas retas;

4) determinar as projeções desta intersecção sobre os eixos para, finalmente, obter um novo polígono;

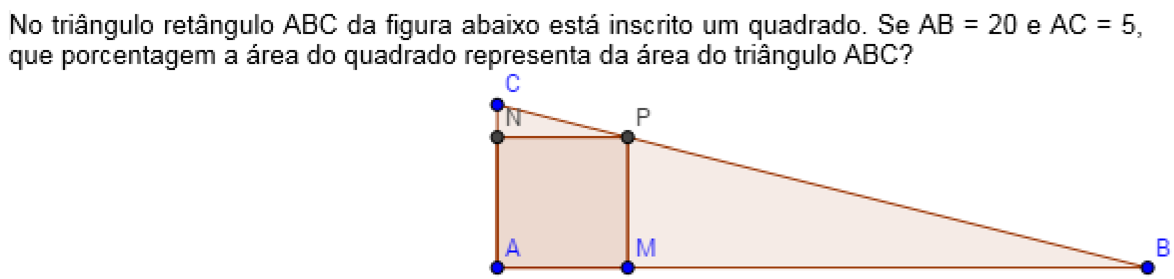
5) questioná-los sobre o formato do novo polígono obtido;

6) questioná-los sobre as áreas do triângulo e do quadrilátero obtido, através da utilização de determinantes.

Para esta aula inicial, o aluno deveria ler a atividade e resolvê-la até o passo “c”. Após isso, o professor organizaria no quadro as ideias sugeridas para resolver o restante da atividade e pediria que os alunos expressassem por escrito suas respostas aos questionamentos.

Para a parte 02 da aula, não elaboramos um roteiro, apenas adaptamos o texto original da questão da OBM de modo que o aluno não tivesse alternativas e nomeamos os vértices, do triângulo conforme figura 08 a seguir.

Figura 08 – Parte 02 da Aula 01



Fonte: OBM (1997).

Nosso objetivo, nesta parte da aula, era que o aluno resolvesse a questão utilizando semelhança de triângulos (entre *CNP*, *CAB* ou *PMB*) e calculasse a área através das fórmulas de áreas que utilizam a base e a altura. Deveria também finalizar a questão indicando a porcentagem pedida. Aqui, os alunos não deveriam resolver o problema sozinhos. O professor construiria uma solução para a atividade no quadro em conjunto com os alunos, de maneira que eles visualizassem que a questão era semelhante à anterior, porém resolvida de uma maneira diferente.

Tínhamos como expectativa que, nesta aula, os alunos notariam que as atividades eram semelhantes, salvo o tipo de registro utilizado para resolvê-lo. Poderia ocorrer também que alguns alunos entendessem uma das maneiras como mais fácil que a outra.

6.2 AULA 01 – RESULTADOS

A aula 01 ocorreu, como já mencionamos, em um intervalo de um período no dia 14/06/2016. Estiveram presentes dezoito alunos, sentados em duplas, conforme divisão elaborada por eles. Ao começar a aula, o professor explicou que os alunos participariam da presente pesquisa de Mestrado. Foi entregue a todos os termos de Consentimento Informado, conforme Anexo B, e o professor explicou que a duração da prática seria de oito períodos.

Tendo entregue os termos e esclarecido eventuais dúvidas sobre os termos, o professor explicou como a prática foi pensada. Foi solicitado aos alunos que associassem, de maneira oral, termos que caracterizam a Geometria Plana e a Geometria Analítica. A Geometria Analítica foi descrita pelos alunos utilizando os termos *‘eixos’*, *‘pontos* e *‘equações’*. Já em Geometria Plana os termos utilizados foram *‘áreas’*, *‘Pitágoras’* e *‘Tales’*. Observadas estas respostas, foi explicado aos alunos que trabalharíamos com questões utilizando dois registros em geometria.

Alguns alunos demostraram interesse e outros estranheza. Houve também aqueles que relataram nunca ter passado por uma situação em que seriam sujeitos de uma pesquisa em sala de aula. Outros também perguntaram se “valia nota”, mostrando a força da avaliação no ambiente escolar. Tendo este primeiro momento ocorrido, foi entregue aos alunos nosso roteiro. Como meio de ter registros desta aula, foi solicitado que os alunos devolvessem, ao final da aula, os roteiros preenchidos com caneta e foi utilizado também um caderno de notas, em que o professor registrou todas as observações feitas durante a aula.

No primeiro momento os alunos leram a atividade proposta e realizarem os itens “a”, “b” e “c” da Parte 1. Houve uma pequena discussão por parte de alguns que não lembravam o que significava a “bissetriz dos quadrantes ímpares”. Neste momento, o professor dirigiu-se ao quadro e explicou do que se tratava. Os itens “d” e “e” foram resolvidos pelos alunos após esta explicação. Feito isso, o professor construiu uma solução de toda a Parte 1 no quadro, utilizando-se dos resultados obtidos pelos alunos.

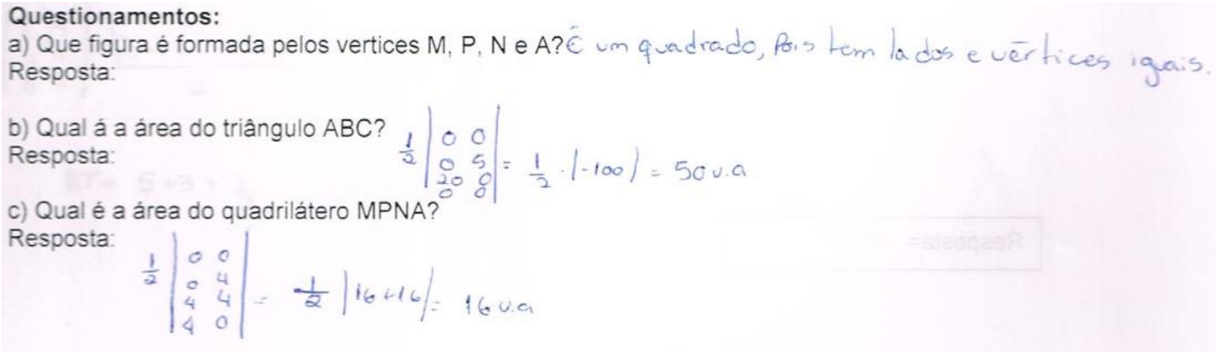
Foi solicitado que os alunos não alterassem seus desenvolvimentos após as correções realizadas no quadro e que mantivessem todos os apontamentos para posterior análise. Nossa análise, porém, mostrou que nenhum dos alunos cometeu falhas de cálculo em Geometria Analítica.

O item “a”, que previa a marcação dos pontos no plano, não trouxe problema algum, por se tratar apenas de representação no plano e o item “b”, que pretendia determinar a equação da reta, ocorreu em todos os casos, utilizando-se a equação Geral da Reta através do cálculo do determinante. Dez dos alunos mantiveram o formato $x+4y-20=0$ para a equação geral. Poucos mantiveram o formato não-simplificado $20y+5x-100=0$ e apenas um mostrou a equação da reta $-x-4y+20=0$.

Como já citamos, na parte “c” do exercício, o professor precisou dirigir-se ao quadro para explicar o que seria a equação da reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Neste caso, todos os alunos registraram a equação da mesma maneira, calculando o coeficiente angular $a=tg45°=1$ e o coeficiente linear $b=0$. Quando analisamos a parte “d”, verificamos que todos os alunos resolveram a intersecção utilizando-se de sistema de equações lineares. Alguns resolveram por adição e a maioria por substituição. Em nenhum dos casos ocorreu erro de cálculo. O item “e” do exercício foi automático após termos resolvida o item “d” e um aluno relatou ao professor que, durante a resolução em conjunto no quadro, a ideia de projeção de um ponto sobre o plano lembrava o estudo de vetores em Física.

Quando passamos aos questionamentos, verificamos que no item “a” todos os alunos conseguiram distinguir o polígono MPNA como um quadrado. Um dos alunos, além da definição do quadrado, definiu o polígono como *“equilátero, quadrado”*. Quando verificamos as justificativas para o fato de a figura ser um quadrado, apenas um dos alunos justificou por escrito que *“É um quadrado, pois tem lados e vértices (sic) iguais”*, como podemos ver na figura 09.

Figura 09 – Uma solução aos questionamentos da Atividade 01 – Aula 01

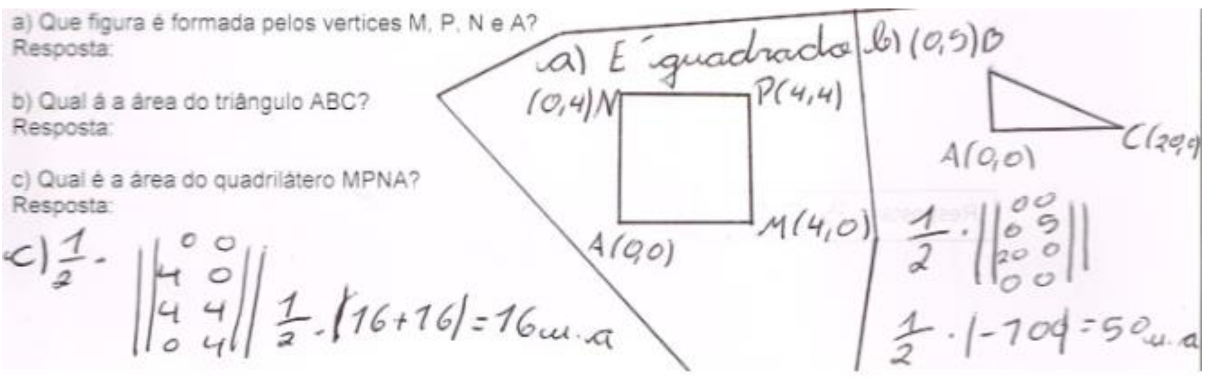


Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Este primeiro recorte de solução mostra uma justificativa para o fato do quadrilátero formado ser um quadrado. Notamos aqui uma preocupação por parte do aluno em deixar claro o motivo de a figura ser um quadrado. É importante que o aluno consiga não apenas calcular o valor ou reconhecer a figura, mas que ele também possa justificar com argumentos os questionamentos que são feitos.

Para as letras “b” e “c”, os cálculos de área, realizados com o auxílio da Regra de Gauss, servem como justificativa para o valor encontrado. Consideramos esta justificativa para a área válida, já que este método de cálculo já foi utilizado pelos alunos durante o primeiro trimestre e a pergunta é bem específica. Mostramos na figura 10 outra solução apresentada.

Figura 10 – Outra solução aos questionamentos da Atividade 01 – Aula 01



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Apesar de muito semelhantes, os dois recortes apresentam uma diferença interessante. Os itens “b” e “c” têm as mesmas justificativas que já citamos acima. Já o item “a” apresenta como justificativa o fato de a figura ser um quadrado através das coordenadas dos vértices do quadrado. Oito dos alunos apresentaram as coordenadas do vértice do quadrado como justificativa. Não existe aqui uma justificativa formal deste fato. Estes alunos desconsideram, portanto, um fato que Duval (2011, p. 91) trata ao falar das representações geométricas: “Não podemos jamais ter certeza se o que é dado a ver representa realmente a propriedade desejada (paralelismo, perpendicularismo, ponto médio, simetria)”. Acreditamos que os alunos, nesta parte, consideram suficiente indicar a figura como resposta sem considerar o que Duval (2011, p. 91) afirma na sequência “Naturalmente, para um mesmo desenho, podemos ter hipóteses diferentes”.

O restante, metade da turma, apenas colocou a resposta sem apresentar justificativa. Esperávamos que eles tivessem justificado, mas acreditamos que este fato ocorreu por não termos apresentado esta solicitação por escrito. Parece suficiente para estes alunos responder ao que foi questionado sem justificativa.

O item “b”, que pedia a área do triângulo, foi realizado com sucesso por todos os alunos. Cinco destes alunos, porém, não justificaram o cálculo de obtenção da área e o valor aparece sem justificativa alguma. Dos alunos que justificaram, todos utilizaram o cálculo de áreas com determinantes e um deles – o mesmo que definiu o quadrado como equilátero – utilizou-se de duas possibilidades: o determinante e a fórmula de área como o semi-produto da base pela altura.

O item “c” do questionamento não teve justificativa por parte dos mesmos cinco alunos que não justificaram o item “b”. O restante da turma apresentou o cálculo da área de um quadrado com a Regra de Gauss.

A Parte 2 teve uma sistemática diferenciada da Parte 1. Neste momento, optamos por deixar os alunos tomarem conhecimento da atividade e posteriormente, com pouco intervalo de tempo, o professor construiu uma resolução no quadro, com o auxílio dos alunos. Os registros apresentados nesta parte da aula são, portanto, idênticos, já que os alunos apenas registraram a solução conjunta apresentada no quadro.

Logo que a leitura da atividade acabou, grande parte dos alunos queria resolver o problema utilizando os dados do anterior. Como o problema pedia a porcentagem de área definida, um aluno afirmou que *“é só fazer a porcentagem de 16 em relação a 50”*, sem tentar resolver o problema de outra maneira. Ao ouvir a maioria concordar, o problema foi posto da seguinte forma: *“Como poderíamos resolver este problema, da maneira como foi apresentado, se não tivéssemos resolvido a Parte 1 antes?”*.

Aqui alguns alunos sentiram-se meio deslocados, pois como um aluno afirmou *"o problema é o mesmo, professor"*. Duval (2011, p. 116) alerta que "Do ponto de vista matemática, um único registro é suficiente para realizar um encaminhamento matemático", o que justificaria a fala deste aluno que estava interessado em apenas resolver o problema, determinando uma resposta. Mostra também um hábito em resolver as atividades de uma maneira apenas, já que normalmente não são incentivados a fazer diferente. Se nosso interesse fosse apenas a simples resolução, não precisaríamos propor uma outra resolução. Duval (2011, p. 116), porém, continua no mesmo texto afirmando que "A análise do funcionamento cognitivo do pensamento exigida pela matemática mostra, ao contrário, a necessidade de uma mobilização simultânea e coordenada de diversos registros para poder compreender", justificando nossa pretensão em propor a atividade de outra forma.

A discussão com estes alunos teve prosseguimento até o momento em que um aluno falou que poderíamos fazer o problema usando *"proporções entre os triângulos"*. Neste momento, o foco da discussão voltou-se ao aluno que sugeriu que *"o triângulo menor é proporcional ao grandão (sic)"*. Tendo esta observação feita, o problema foi resolvido em seguida. Salientamos que o problema foi resolvido utilizando-se semelhança de triângulos, calculando-se o lado do quadrado e, posteriormente, calculando a área.

Feito isto, o professor voltou os olhos para a turma e disse que este é um dos objetivos desta pesquisa: possibilitar situações em que o aluno possa resolver um problema de Geometria utilizando as duas Geometrias. Este arranque inicial da atividade é essencial. Neste sentido, Duval (2011) afirma que:

> Pensar em matemática mobiliza sempre pelo menos, dois registros. Mesmo se, de um ponto de vista matemático, o trabalho parece utilizar apenas um único registro, a compreensão necessária para conduzir o trabalho exige a mobilização pelo menos implícita de um segundo registro assim como a sua coordenação. [...] Assim, em geometria, mobilizamos a linguagem e a visualização para a desconstrução de formas, em seguida, pedimos os tratamentos de um terceiro registro, para calcular as relações numéricas. (DUVAL, p. 99-100).

Justifica-se esta atividade inicial, pois possibilitamos ao aluno esta vivência de resolução de uma atividade com mais de um registro. Este primeiro momento de contato nos ajudou a dar prosseguimento para as outras aulas.

6.3 AULA 02 – SEQUÊNCIA E PLANEJAMENTO

Previmos para a Aula 02 uma duração de 50 minutos e nosso objetivo era propor aos alunos uma atividade em geometria que pudesse ser resolvida pelo menos de duas maneiras distintas sem o auxílio do professor.

Assim como na Aula 01, esta aula foi dividida em duas partes conforme descrevemos logo a seguir. Na Parte 1 sugerimos a atividade da figura 11.

Figura 11 – Parte 01 da Aula 02

Parte 1 – Construa um plano cartesiano e determine a área do polígono formado pelos vértices A(2,0) , E(1,1), D(0,3), C(3,4) e B(4,1).

Fonte: Os autores (2016).

Com esta atividade pretendíamos que o aluno pudesse:

1) construir um plano cartesiano e representar os pontos indicados;
2) calcular a área do polígono, utilizando os vértices fornecidos.

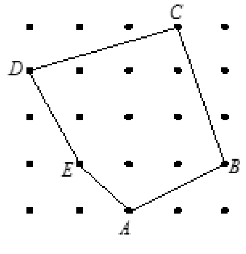
Este exercício é uma aplicação da Geometria Analítica que foi o último conteúdo visto com os alunos em sala de aula, antes do início de nossa sequência didática.

Já na Parte 2 adaptamos a questão original de modo que as alternativas não aparecessem. Mantivemos também a figura original. A figura 12 a seguir mostra a questão.

Figura 12 – Parte 02 da Aula 02

Parte 2 - Resolva o problema abaixo utilizando Geometria Plana:

Na organização retangular de pontos da figura abaixo, a distância entre pontos vizinhos em uma mesma linha ou coluna é igual a 1 cm. Determine a área do pentágono *ABCDE* em cm^2



Fonte OBM (2004).

Solicitamos também que os alunos resolvessem a atividade utilizando Geometria Plana. Com esta atividade, pretendíamos que o aluno conseguisse:

1) calcular a área do pentágono apresentado, dividindo-o em triângulos e quadriláteros internos e apresentando a soma destas áreas posteriormente ou

2) calcular a área do pentágono apresentado, descontando os triângulo e quadriláteros da região exterior.

Considerando a resolução em Geometria Plana, a variedade de resoluções possíveis é grande. Nossa expectativa, em relação a esta parte da aula, era a de que alguns alunos realizariam divisões simples da figura. Poderia ocorrer também, devido à liberdade da tarefa, divisões excepcionais da figura.

De uma maneira mais ampla, nossa expectativa para esta aula era a de que o aluno conseguiria resolver um problema de Geometria, utilizando dois caminhos distintos. Tendo o aluno vivenciado esta experiência na Aula 01, este momento foi importante para que o aluno pudesse, em dupla ou individualmente, experienciar esta atividade.

6.4 AULA 02 – RESULTADOS

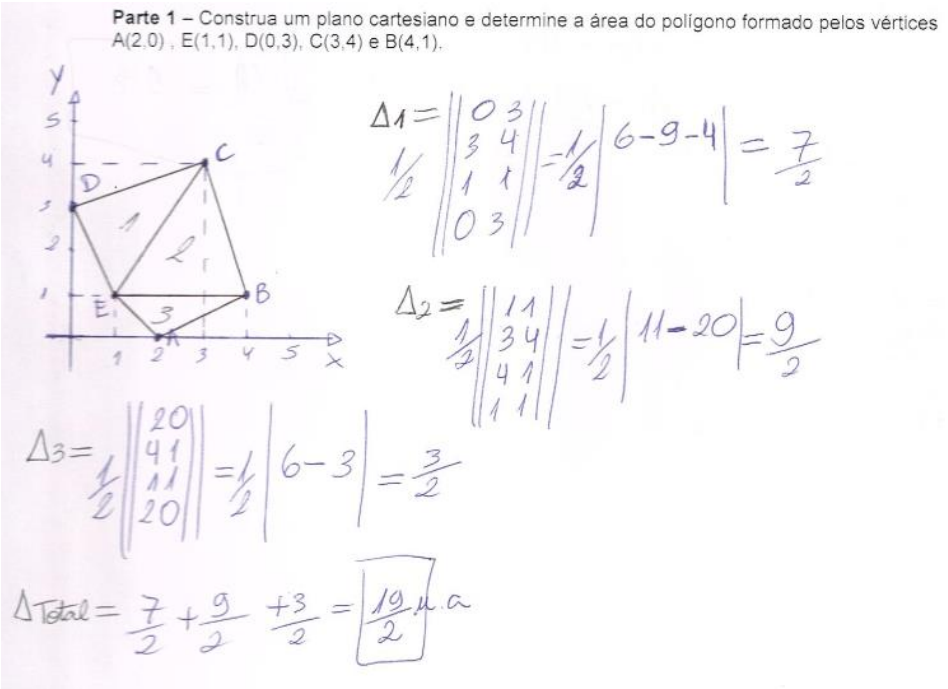
A aula 02 ocorreu no mesmo dia e logo após a Aula 01. Neste caso, mantivemos os alunos conforme suas duplas e entregamos uma folha para cada aluno. Pedimos que trabalhassem em duplas, como um meio de promover uma troca de ideias entre eles. O PCN já prevê este tipo de atividade, quando afirma que

> Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o trabalho em grupo. Apesar de rejeitado por muitos, sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver. (BRASIL, 2006, p. 129).

Nesta aula, o professor deixou que os alunos trabalhassem e verificassem as possibilidades de resolução entre si. Apesar de ter o valor final do problema em mãos, as intervenções foram apenas de como apresentar os registros das resoluções, fazendo os alunos trabalharem sem direcionamento a priori.

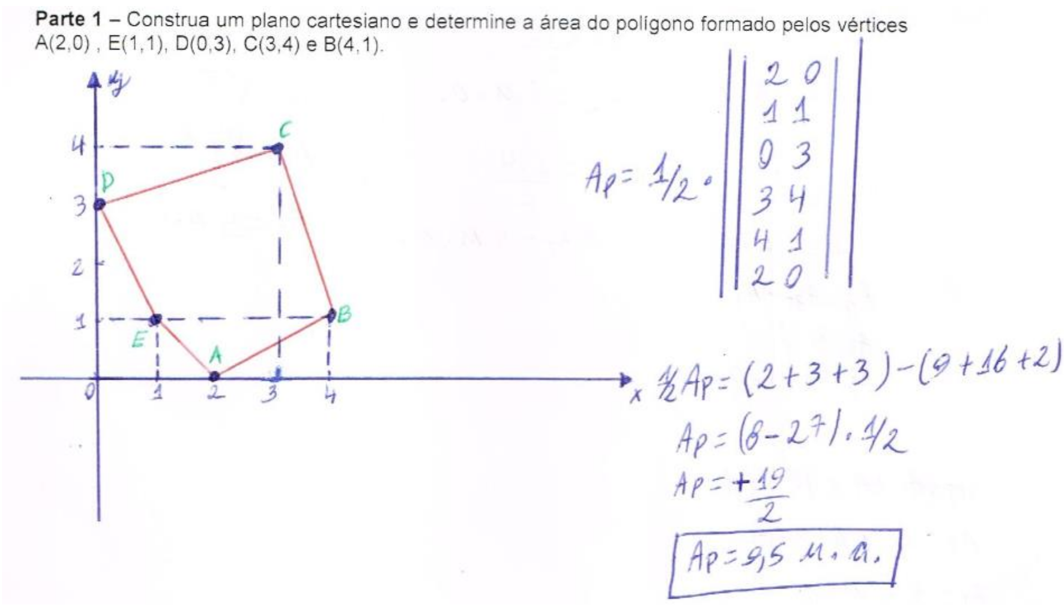
Primeiro foi solicitado que resolvessem a atividade utilizando Geometria Analítica. O professor disponibilizou os pontos e pediu que representassem no plano o polígono formado e calculassem a área da região. O que verificamos foi que, ao representar a figura no plano, todos os alunos calcularam a área, utilizando determinantes ou a regra de Gauss. Como a figura formada era um pentágono, dois dos alunos dividiram o pentágono em outros três triângulos. Estas soluções estão apresentadas nas figuras 13 e 14 a seguir.

Figura 13 – Solução dividindo o pentágono em três triângulos – Parte 01 da Aula 02



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

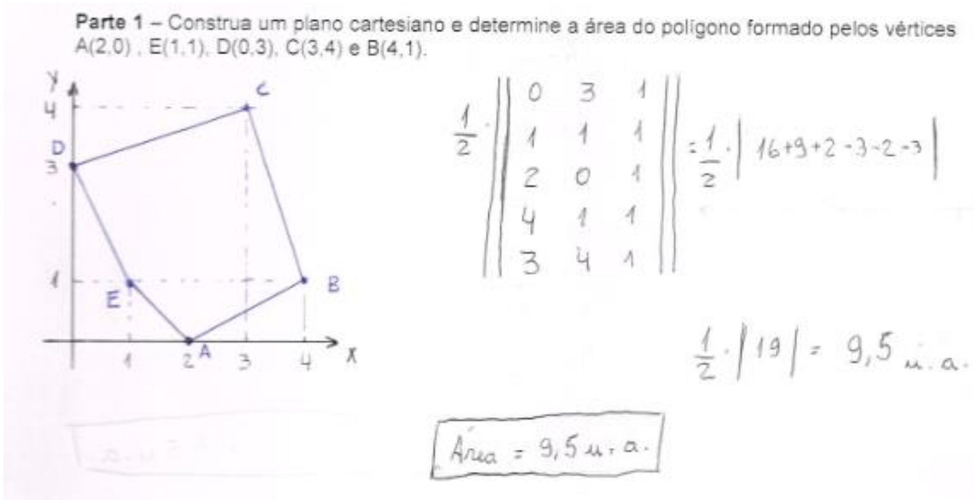
Figura 14 – Solução sem divisão em triângulos – Parte 01 da Aula 02



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Um dos alunos utilizou o método, porém de maneira inadequada, chegando ao resultado correto, mas com incorreções de tratamento algébrico, conforme figura 15.

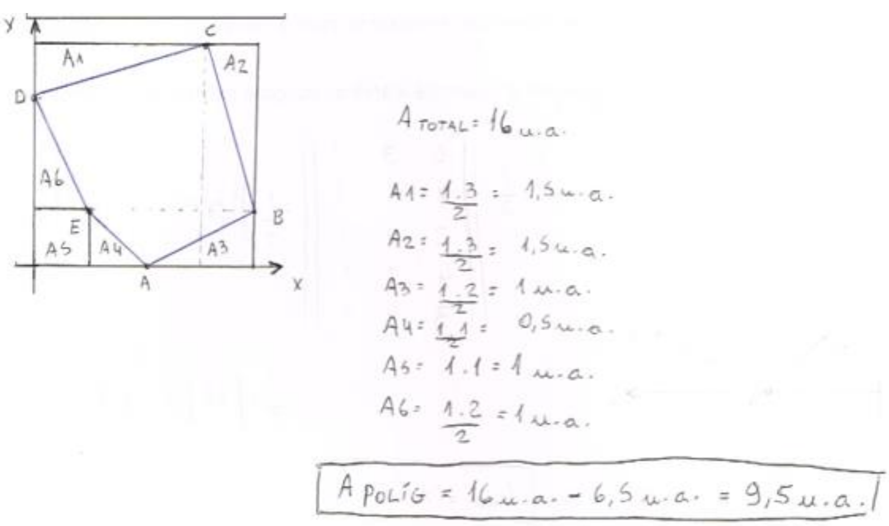
Figura 15 – Resposta correta, mas registro inadequado – Parte 01 da Aula 02



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

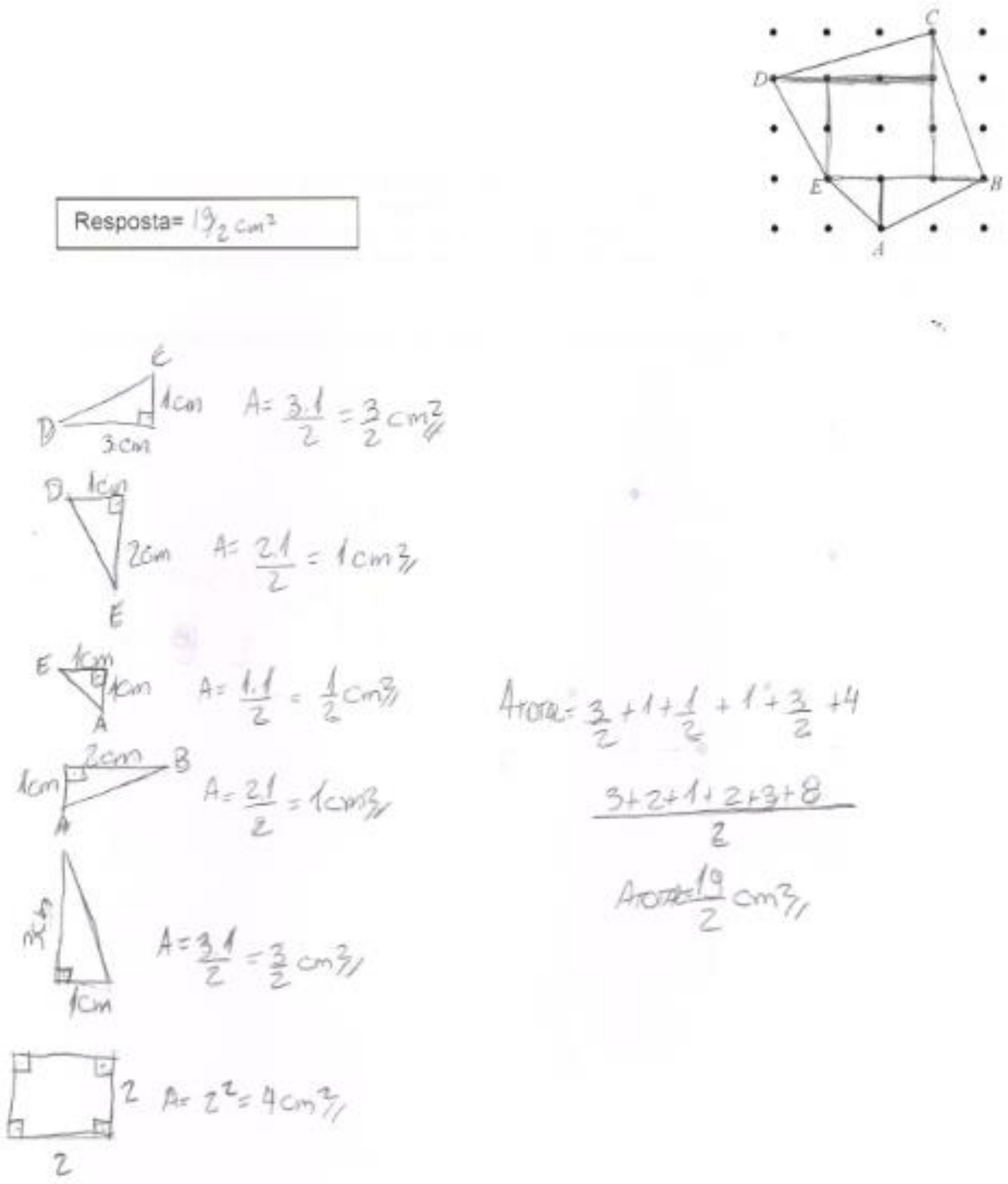
Já na Parte 2 da aula, quando resolveram utilizando Geometria Plana, tivemos três soluções apresentadas. Uma delas, conforme figura 16, na próxima página, deu-se retirando os excessos, fazendo-se a área do quadrado menor menos as seis áreas ao redor, sendo que sete alunos assim o fizeram. Nove alunos fizeram a área dividindo-a em exatamente seis partes, como vemos na figura 17.

Figura 16 – Calculando a área descontando do quadrado maior – Parte 02 da Aula 02



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Figura 17 – Calculando a área somando as regiões interiores – Parte 02 da Aula 02



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Um dos alunos chegou a uma resposta exata, mas seus cálculos apresentaram-se bastante dispersos, não apresentando justificativas.

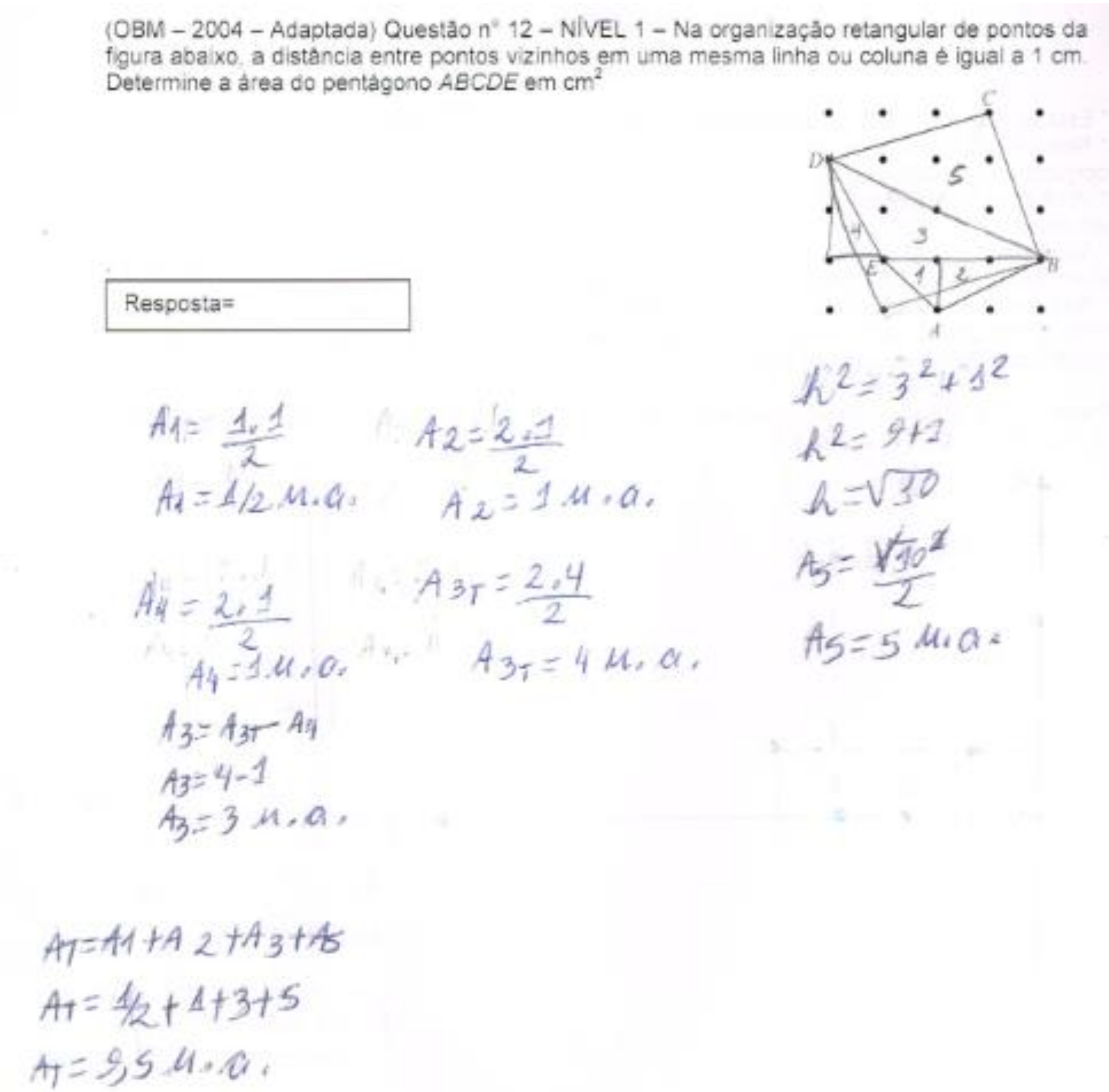
E o último aluno somou as áreas de maneira bastante peculiar. Ele a dividiu em quatro regiões e utilizou-se inclusive do teorema de Pitágoras. Registramos na figura 18 sua solução, por se tratar de um registro diferenciado.

Note na figura 18 que o aluno constrói um meio quadrado de nome A5. Para calcular sua área, ele calculou o lado do quadrado e fez a área do quadrado divido por dois.

Os triângulos A1 e A2 são idênticos aos apresentados pelos colegas que fizeram conforme figura 18.

Por fim, o triângulo A3 é obtido fazendo-se o triângulo A3T que, na verdade, é o triângulo A3, adicionado ao A4. Finaliza somando os quatro valores obtidos.

Figura 18 – Um registro diferenciado – Parte 02 da Aula 02



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Considerando-se a maneira como nossa sequência foi montada, Ponte (2006, p. 30) afirma que “É nessa fase que se vão embrenhado na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa”. Este primeiro momento, em que o aluno tem como tarefa resolver um problema de duas maneiras, foi montado partindo da ideia da exploração da situação proposta pelo professor. Oferecemos ao aluno, portanto, a possibilidade de utilizar mais de um registro para a resolução de um mesmo problema, já que

Duval (2011, p. 116) afirma que “A atividade matemática real não se limita a utilização de um único registro”.

6.5 AULA 03 – SEQUÊNCIA E PLANEJAMENTO

A aula 03 foi elaborada com duração de 50 minutos e tinha como objetivo organizar as próximas aulas e propor seis problemas que pudessem ser resolvidos, utilizando pelo menos dois registros da geometria. Oportunizamos assim um momento em que os alunos pudessem trocar ideias e discutir possíveis soluções a um mesmo problema, utilizando diferentes registros.

Para isso, os alunos da turma dividiram-se em seis grupos, de modo a incentivar a troca de ideias, questionamentos e possibilidades. Após esta divisão, o professor realizou com os grupos três sorteios. Em cada sorteio, foram distribuídas as seis atividades, uma para cada grupo. Como nenhuma atividade foi sorteada para o mesmo grupo duas vezes, não houve necessidade de resorteio. Assim sendo, cada grupo resolveu três atividades distintas e cada atividade foi resolvida por três grupos distintos.

As questões apresentadas aos alunos também foram adaptadas da OBM e todas elas envolveram áreas de polígonos, com uma predileção pelos triângulos e quadriláteros. Nós tivemos o cuidado de resolver as questões anteriormente, utilizando registros de Geometria Plana e Geometria Analítica.

Apesar de termos ciência de que as resoluções em Geometria Plana podem ser bem distintas, as questões previam a utilização, por exemplo, de semelhança ou congruência de triângulos. Já as soluções por Geometria Analítica previam o cálculo de equações de retas e áreas de polígonos. Optamos por mostrar as questões propostas aos alunos nos relatos das aulas 06, 07 e 08, para não deixarmos o texto repetitivo.

Além disso, cada grupo resolveu as atividades de duas maneiras distintas, como Geometria Plana e Geometria Analítica. Feita esta organização inicial, os alunos tiveram como tarefa não apenas resolver o problema. Eles deviam também organizar uma apresentação das atividades resolvidas para os colegas, justificando os passos de suas resoluções, disponibilizando, portanto, um espaço para testes e reformulações de suas soluções.

Para as apresentações, organizamos as seguintes orientações, conforme figura 19, extraída da sequência didática entregue aos alunos.

Figura 19 – Aula 03 – Orientações para apresentação

* Já tendo resolvidas as Atividades de duas maneiras diferentes, você deve, em grupo, organizar uma **Apresentação** para a turma sobre a primeira e a segunda Atividades sorteadas na AULA 03.

<u>Orientações para a **Apresentação**:</u>

* A apresentação deve conter cartazes ou Power Point;
* Cada apresentação deve conter todos os passos de resolução e a justificativa de cada passo.
* Cada apresentação tem, no máximo dez minutos, com direito a mais cinco minutos de pergunta no final, totalizando quinze minutos;
* As apresentações ocorrerão nos dias 27 e 28/06;
* As apresentações ocorrerão em ordem crescente de Atividade, começando com a Atividade 1;
* Primeiro veremos a resolução em Geometria Plana e depois veremos em Geometria Analítica;
* Quando uma atividade for concluída, os dois grupos debaterão sobre as vantagens e desvantagens de determinada resolução. Este debate deverá versar sobre o tratamento das informações e suas eventuais facilidades ou dificuldades. Após o debate, faremos uma votação para eleger a Geometria mais indicada para a resolução da Atividade.
* Ao **final** da última apresentação, este documento deve ser entregue ao professor, com a resolução completa das três atividades sorteadas com as duas Geometrias.

Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Cada grupo foi responsabilizado a elaborar duas apresentações. Uma delas com Geometria Plana – a primeira atividade sorteada para o grupo – e a outra utilizando Geometria Analítica – a segunda atividade sorteada para o grupo. Tivemos assim, um total de doze apresentações, sendo que cada atividade foi apresentada duas vezes.

Como a Aula 03 tinha apenas 50 minutos, até que os alunos tivessem entendido a proposta, acreditávamos que a aula deveria estar se encaminhando para o final e pouco ou muito pouco teria sido produzido. Assim sendo, esta aula deveria ter um caráter mais estruturador para que as próximas corressem com bom rendimento.

6.6 AULA 03 – RESULTADOS

A aula 03 foi mais ágil do que prevíamos e ocorreu em um intervalo de 50min no dia 20/06/2016. Separados em cinco grupos, com quatro integrantes, e um grupo com cinco integrantes, solicitamos que cada grupo resolvesse três atividades de duas maneiras distintas. Estas atividades foram sorteadas dentre um total de seis atividades. O grupo do aluno V foi composto por cinco integrantes. Como meio de indicarmos os alunos, optamos pela utilização da primeira letra do primeiro nome.

As atividades ficaram assim distribuídas:

1) Grupo do aluno S: atividades 3,4 e 7;
2) Grupo do aluno I: atividades 3,5 e 8;
3) Grupo do aluno J: atividades 4,5 e 6;
4) Grupo do aluno R: atividades 5,6 e 7;
5) Grupo do aluno V: atividades 6,7 e8;
6) Grupo do aluno M: atividades 3,4 e 8.

Sorteadas as atividades, solicitamos que os grupos resolvessem as questões, utilizando duas maneiras dsitintas. Os grupos acabaram por se dividir em duplas ou trios para resolver as atividades. Eventualmente alguns deles solicitavam ajuda ao professor sobre como devia ocorrer o registro e sobre como proceder em relação à apresentação.

Acreditamos que o trabalho cooperativo proporcionou aos grupos que ficassem bem concentrados na atividade. Além disso, os grupos acabaram conversando entre si para verificar se suas respostas eram as mesmas e verificar as resoluções apresentadas, já que cada atividade foi realizada por três grupos distintos.

Acreditamos também que o fato de já terem resolvido uma atividade de duas maneiras, na Aula 02, fez com que os alunos se mantivessem focados no que precisavam fazer, pois tinham como conjectura, naquele momento, que todas as atividades poderiam ser resolvidas de duas maneiras.

É importante relatar também que não tivemos novamente o questionamento *"vale nota"*, o que ocorreu na Aula 01. Estes três fatos – o trabalho cooperativo, o foco nas atividades e a realização da atividade que não *"vale nota"* – leva a crer que os alunos aceitaram o desafio proposto. Não se tratava mais de uma atividade tradicional de sala de aula, mas de um caminho e uma nova possibilidade de encarar problemas em Matemática.

Apesar do curto intervalo da aula 03 – que é o início das "Conjecturas, Testes e Reformulações", – notamos grande agilidade dos alunos em testar suas respostas e compartilhar com os outros grupos suas dúvidas. Mesmo se tratando de atividades que pediam um valor como resposta, a possibilidade de troca entre alunos é fundamental. Feita esta etapa de organização das tarefas, o papel do professor passa a ser outro diferente da aula tradicional. Ponte (2006) afirma que:

> O professor precisa estar atento a todo esse processo de formulação e teste de conjecturas, para garantir que os alunos vão evoluindo na realização de investigações. Desse modo, cabe-lhe colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar em outras direções e os façam refletir sobre aquilo que estão a fazer. (PONTE, 2006, p. 36).

Tendo como objetivo que os alunos possam resolver as atividades, utilizando mais de um registro, o professor precisa estar atento ao que ocorre como um meio de dar suporte caso seja necessário. Isso não indica que o professor traz as respostas prontas às atividades, mas, sim, que se mostra disponível a ajudar os alunos a sobrepor este desafio.

6.7 AULAS 04 E 05 – SEQUÊNCIA, PLANEJAMENTO E RESULTADOS

As aulas 04 e 05 foram organizadas de maneira a oportunizar um tempo para que os alunos realizassem a proposta feita na Aula 03. Estas aulas foram compostas de 50 minutos cada, totalizando 100 minutos. Aqui eles precisariam organizar as apresentações e terminar as resoluções utilizando duas maneiras distintas.

Encaminhamos os alunos ao Laboratório de Informática da instituição e logo verificamos que todos os alunos estavam presentes. Como comentamos na aula anterior, os alunos estavam muito imersos nas atividades propostas. Além de aceitarem a proposta feita, eles se mantiveram concentrados durante todo o tempo em que trabalhavam.

Nós esperávamos que os alunos talvez ficassem dispersos com esta possibilidade nova e discutissem entre si de maneira um pouco mais volumosa, trocando de lugares, caminhando, tirando dúvidas entre si. Isso já havia ocorrido na Aula 03, que foi quando os alunos trocaram dúvidas entre os grupos na sala de aula tradicional. O que vimos, porém, foi que os alunos trabalharam exclusivamente dentro de seus grupos, resolvendo as atividades em duplas ou trios e organizando as apresentações propostas. Além do PowerPoint, que era o recurso sugerido, dois grupos trabalharam utilizando Prezi, – para apresentações –Adobe Reader – para apresentação – e Geogebra – para construção de figuras.

Estávamos preparados para uma abordagem mais interrogativa com os alunos, esperando que eles viessem com questionamentos e possibilidades de trabalho, já que Ponte (2006) afirma que

> [...] o professor tem um papal determinante nas aulas de investigação. Contudo, a interação que ele tem de estabelecer com os alunos é bem diferente da que ocorre em outros tipos de aula, levando-o a confrontar-se com algumas dificuldades e dilemas. (PONTE, 2006, p. 47).

O que vivenciamos, porém, foram grupos muito autônomos e focados. Mas, de certa forma, isso não deveria causar espanto e este é um momento interessante para relatar porque acreditamos nisso.

A Instituição em que desenvolvemos a pesquisa é referência internacional em Pesquisa e Investigação Científica e Tecnológica em Nível Médio. Não é raro que, dentre as turmas que o professor trabalha, alunos venham a participar de exposições internacionais de suas pesquisas.

A disciplina de Projetos – equivalente à Iniciação Científica – é trabalhada como componente curricular desde a primeira semana de aula do primeiro ano destes alunos. Além disso, quando estes alunos chegam ao 3º ano é obrigatório que apresentem um Projeto de Pesquisa Científica ou Tecnológica que tem um peso equivalente a dez por cento da pontuação total do ano.

Estes alunos têm, portanto, uma noção maior que os alunos de idade semelhante em outras escolas sobre pesquisa e investigação. É notório então que os alunos tenham entendido a proposta do professor como uma proposta de pesquisa/investigação e tenham adotado postura semelhante àquela que já tem quando elaboram seus projetos: organização, divisão de tarefas e responsabilidades.

Tendo ocorrido estas aulas, as próximas aulas (06, 07 e 08) são destinadas à “Justificação e Avaliação”. Nessa parte do texto, que está no Capítulo 7, mostraremos as soluções apresentadas, confrontando-as com a Teoria de Registros.

7 SEQUÊNCIA DIDÁTICA – PARTE 2

7.1 AULAS 06, 07 E 08 – PLANEJAMENTO

As aulas 06, 07 e 08 são dedicadas à apresentação das soluções encontradas pelos grupos e ocorreram no intervalo de três períodos entre os dias 27 e 28 de junho de 2016. Começamos as apresentações pela Atividade 3 e seguimos em ordem, crescente até a Atividade 8. Esta é a fase de nossa sequência didática que dedicamos à "justificação e avaliação" do trabalho desenvolvido. Não elaboramos este momento apenas para apresentação, mas como um momento essencial dentro de nossa proposta, já que aqui, conforme Ponte (2006, p. 41) afirma, "Os alunos podem pôr em confronto suas estratégias conjecturas e justificações".

As apresentações das Atividades 03 e 04 ocorreram no dia 27/06/2016 e das Atividades 05, 06, 07 e 08, no dia 28/06/2016. Cada grupo ficou encarregado de organizar e apresentar duas das atividades propostas na aula designada. Em uma das apresentações utilizariam Geometria Plana e na outra Geometria Analítica.

Sugerimos aos alunos que a fizessem a apresentação em PowerPoint ou cartazes, conforme figura 19. Além disso, as apresentações foram gravadas para que tivéssemos registrados os relatos dos alunos na íntegra. Ao final de cada uma, o professor propôs uma discussão sobre as vantagens e desvantagens de resolver o problema com um ou outro método. Recolhemos também os registros escritos que possibilitaram a construção dos PowerPoint.

Como meio de organizar melhor nosso texto, estruturamos nossa escrita da seguinte forma: iniciamos enunciando o exercício proposto; em seguida, exibimos as duas soluções apresentadas e um relato da apresentação juntamente com a análise das soluções apresentadas. Finalizamos resumindo a discussão final feita com os alunos e seus desdobramentos para esta pesquisa. Fizemos isso para cada uma das seis atividades.

7.2 AULA 06 – ATIVIDADE 03 – RESULTADOS

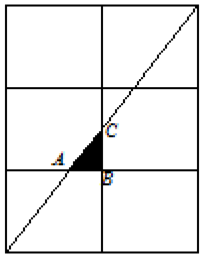
Conforme nosso sorteio, o grupo do aluno M. começaria apresentando sua solução com Geometria Plana e o grupo do aluno S. utilizando Geometria Analítica.

Apresentamos o problema proposto na figura 20. Na figura 21 apresentamos a solução registrada pelo grupo que a apresentou, utilizando Geometria Plana.

Figura 20 –Aula 06 – Atividade 03

Atividade 03

Na malha quadrada abaixo, há 6 quadrados de lado 30 cm. Determine a área do triângulo *ABC*.



Fonte: OBM (2002).

Figura 21 – Aula 06 – Atividade 03 – Solução com Geometria Plana

$$\frac{60}{30} - \frac{90}{30+y}$$

$$1800+60y = 2700$$
$$60y = 2700-1800$$
$$y = \frac{900}{60}$$
$$y = 15 = \overline{BC}$$

$$\frac{30}{x} - \frac{45}{15}$$

$$45x = 450$$
$$x = \frac{450}{45}$$
$$x = 10 = \overline{AB}$$

$$A_\Delta = \frac{15 \cdot 10}{2} = 75 cm^2$$

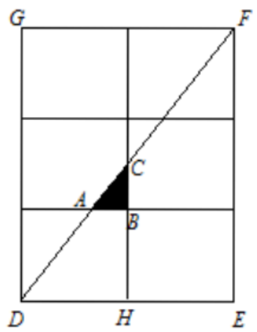
Fonte: Arquivo dos autores (2016).

A apresentação estava muito bem estruturada e eles utilizaram o programa Prezi e não o PowerPoint. A apresentação, feita em Geometria Plana, foi mais explicativa que seu registro. Os alunos tiveram um cuidado em explicar seus passos de maneira a dar ao ouvinte o que foi realizado. Dos quatro integrantes do grupo apenas dois deles apresentaram, pois os outros dois integrantes não puderam se fazer presentes.

A apresentação consistiu em informar primeiramente os valores encontrados. Logo no início da apresentação os alunos relataram que encontraram que: *"Usando o lado BC, chegamos numa equação e resulta em y = 15. Pra chegar no lado AB usando semelhança de triângulos que resulta em x=10. E pra fazer a área a gente fez base vezes altura sobre dois, já que é um triângulo. Resultou em 75cm^2"*

Logo a seguir revelaram como encontraram estes valores. Primeiramente eles fizeram uma leve alteração na figura, atribuindo vértices ao retângulo exterior, conforme figura 22.

Figura 22 – Aula 06 – Atividade 03 – Alteração proposta pelo grupo de alunos



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

A solução foi feita por semelhança entre os triângulos *DFE* e *DHC*. Assim, encontraram os lados *BC* e *AB* – conforme registro com manual da figura 21.

Um dos apresentadores finalizou dizendo que *"Esse método que a gente usou é o método da geometria plana que é o que a gente aprende desde lá do Ensino Fundamental. Esta foi a lógica que encontramos."*.

Esta solução apresenta uma resolução mais imediata, já que o enunciado da questão tem uma parte escrita e a outra parte em figura, que se complementam. O grupo de alunos decompõe a figura em quadrados e triângulos semelhantes. Estes triângulos semelhantes têm suas medidas expostas (algumas conhecidas e outras desconhecidas) e, finalmente, calcula-se a área solicitada.

Esquematizamos na figura 23 a ordem da solução apresentada pelos alunos.

Figura 23 – Aula 06 – Atividade 03 – Esquema de resolução utilizando Geometria Plana

Fonte: Os autores (2016).

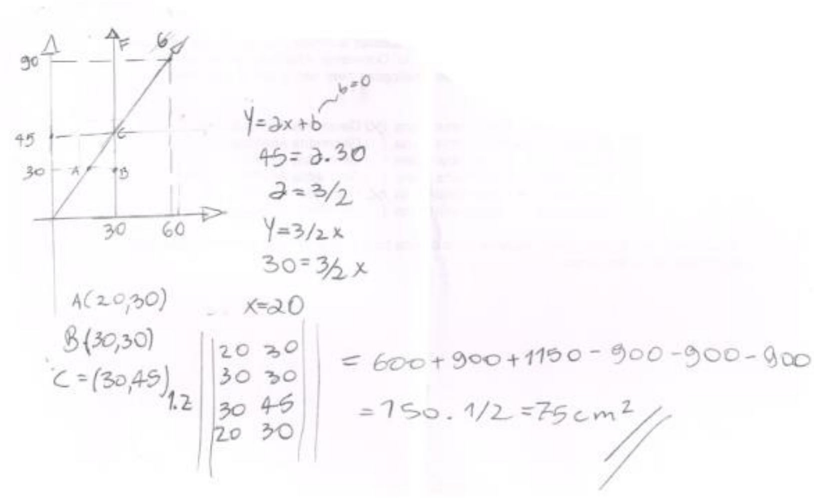
Duval (2011) afirma que

> Em matemática uma representação só é interessante à medida que ela pode se transformar em outra representação. Isso vale evidentemente para as figuras. Elas dão lugar a dois tipos de operações figurais. Existem aquelas que se apoiam diretamente na percepção e que transformam unidades figurais 2D/2D (ou objetos 3D/3D) em outras de mesma dimensão. E existem aquelas que dependem das operações de desconstrução dimensional. (DUVAL, 2011, p. 88).

Nesse caso, a importância da representação figural reside no fato de que os alunos transformaram a representação original (quadrilátero) em outra (triângulos semelhantes), que seria a segunda operação descrita por Duval no parágrafo acima. Duval afirma também que esta divisão em partes “constitui um dos maiores processos heurísticos das figuras geométricas. E ele foi utilizado como prova convincente para propriedades matemáticas” (p. 89), justificando, assim, esta possibilidade de solução e conversão realizada pelos alunos.

Relataremos agora o trabalho com Geometria Analítica, apresentado por todos os integrantes do grupo. Notamos, porém, que um dos alunos tinha mais facilidade que os outros três para a apresentação. Além disso, foi feita utilizando não um software de apresentação, mas, sim, um pdf. Vemos na figura 24 a seguir a solução apresentada

Figura 24 – Aula 06 – Atividade 03 – Solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Tão logo a apresentação começou, o grupo solicitou se poderia reiniciar, pois a maneira como dispuseram o pdf inviabilizou uma apresentação direta, pois eles avançavam e recuavam o arquivo com muita frequência. Acabaram se confundindo e precisaram de um tempo para rever a apresentação e, por isso, solicitaram esse reinício.

O grupo começou afirmando que marcou pontos para os extremos do retângulo com o auxílio do plano cartesiano com origem em um dos pontos do retângulo. O objetivo que os alunos traçaram era de que *"Pra conseguir calcular a área do triângulo a gente só precisava de saber as coordenadas dos três pontos. "*

Afirmaram ter as coordenadas do ponto *B (30,30)* que é um dos vértices dos quadrado interiores e relataram precisar encontrar as coordenadas dos pontos *A* e *C*.

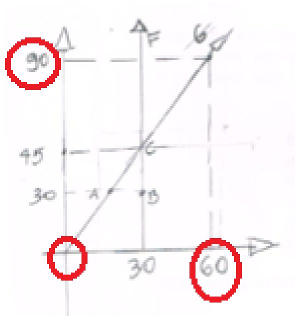
Do ponto *C*, já tinham à disposição o *x=30* e deduziram, justificando que *"Dá dois triângulos ali. Daí ficou bem no meio entre o 30 e o 60 logo ficou no 45."*

Para encontrar o *A*, do qual já tinham o *y=30*, acharam a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto *C*. Encontraram a equação, determinando seu coeficiente linear *b=0*, pois passa pela origem. Determinaram o coeficiente linear a, utilizando o fato de que a equação reduzida da reta é *y=ax+b* e substituíram o ponto *C* encontrando assim *a=3/2*.

Para fechar a questão, os alunos relataram que *"Aí a gente substituiu o ponto que a gente já tinha do A que era do y e conseguiu calcular x que deu 20 e daí pra descobrir a área a gente aplicou esta fórmula fez determinante e é isso. E descobriu que deu 75cm^{2}."*.

Esta solução demanda conversões não tão imediatas, pois o enunciado não tem nenhum indício evidente de Geometria Analítica. Primeiramente os alunos estabelecem um plano cartesiano com origem em um dos vértices da figura original, conforme figura 25.

Figura 25 – Aula 06 – Atividade 03 – Conversão para a Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

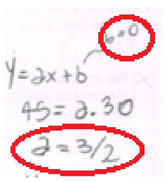
Esta é a primeira conversão realizada. Os alunos aqui convertem a figura original em outra com registros distintos, já que aqui aparecesram os eixos. Esta primeira conversão desencadeia uma série de procedimentos distintas daquelas do outro grupo.

Acreditamos ser este o principal momento da atividade. Esta esquematização, que destacamos com círculos na figura 25, acaba por transformar o problema original em outro. Duval (2011, p. 96) afirma que “As atividades relativas à produção de imagens esquematizadas e sua articulação com a figura de um teorema são tão fundamentais quanto aquelas que dizem respeito aos cálculos que é preciso para aplicar um teorema”.

Apesar de não tratarmos com um teorema, a utilização de uma figura esquematizada pelo aluno, que já transformou a figura em outra, é fundamental ao andamento da atividade, tanto quanto os cálculos posteriores apresentados.

O primeiro procedimento feito, após a conversão para o plano cartesiano, foi estabelecer a reta que passa pela diagonal do quadrilátero e determinar uma equação para a mesma. Calcularam o coeficiente linear e o angular, conforme figura 26.

Figura 26 – Aula 06 –Atividade 03 – Registro algébrico da solução com Geometria Analítica

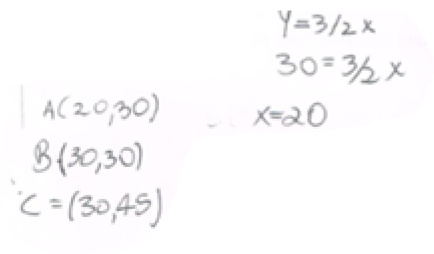


Fonte: Arquivo dos autores (2016).

No registro escrito não aparece o motivo de o ponto *C* ser *(30,45)*. Na apresentação, como já relatamos, o aluno informa que o ponto *C* "*ficou bem no meio entre o 30 e o 60 logo ficou no 45".* Apesar da falta de justificativa para esta localização, que poderia comprometer o cálculo da equação da reta, o valor está correto.

Esta reta foi determinada de modo a transformar o ponto *A* em um ponto do plano também, com *x* e *y*. Feito este tratamento, os três vértices do triângulo têm coordenadas bem determinadas no plano, conforme vemos no destaque na figura 27, na próxima página.

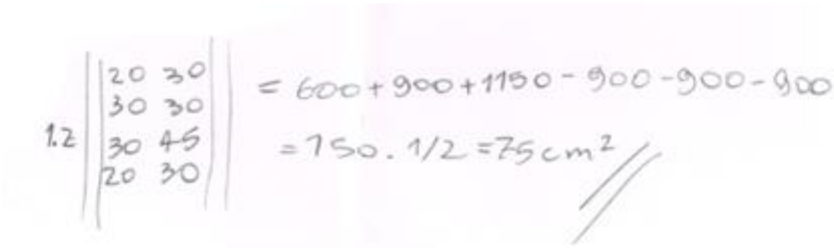
Figura 27 – Aula 06 – Atividade 03 – Outro registro algébrico da solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Finalmente, conforme figura 28, a área é calculada utilizando a Regra de Gauss como maneira de tratar os dados.

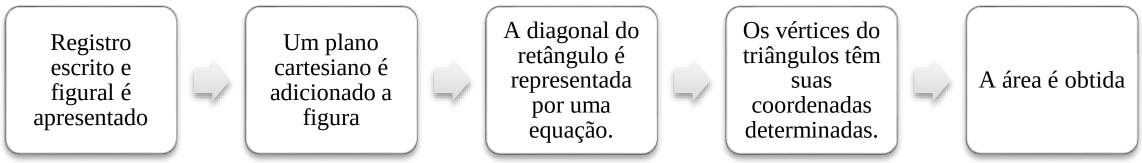
Figura 28 – Aula 06 – Atividade 03 – Último registro algébrico da solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Observamos aqui um outro esquema de trabalho. Observando a figura 29, na qual esquematizamos a solução, temos que, apesar de os extremos serem idênticos, os meios são distintos.

Figura 29 – Aula 06 – Atividade 03 – Esquema de resolução utilizando Geometria Analítica



Fonte: Os autores (2016).

Nossa discussão final com os alunos pretendia levantar quais foram as dificuldades e as facilidades apresentadas na resolução, como meio de discutir, em nossa dissertação, sobre as possibilidades da utilização de múltiplos registros e conversão.

Questionamos o grande grupo sobre as resoluções apresentadas. A resolução feita por Geometria Plana foi descrita pelos alunos como *"simples"*, *"rápida"* e *"conhecida"*. Já a Geometria Analítica foi descrita como *"sistemática"* e *"trabalhosa"*

Como esta foi a primeira discussão que fizemos com os alunos sobre as resoluções e suas possibilidades, eles ainda estavam receosos em dar suas opiniões. Conversando um pouco mais sobre o que foi feito e sobre as soluções, o aluno relatou que:

> Fazer com a Plana é mais fácil, pois é o básico que a gente sabe da Geometria Plana então é fácil olhar pra figura e conseguir identificar qual é a base e qual é a altura e fazer essa semelhança dos triângulos e acho que uma das qualidades é ser fácil porque a gente já sabe fazer isso é uma coisa simples.

Alguns alunos concordaram com a ideia da colega até que dois alunos contrapuseram e afirmaram que: *"Geometria Plana precisa de um desenvolvimento melhor do raciocínio que a Analítica. Analítica é só botar na fórmula é pronta já"*. Já outro aluno afirmou que *"Por mais que seja simples é preciso pensar."*. Finalmente, um aluno decidiu defender a Geometria Analítica afirmando que *"É mais sistemática, acha os pontos, já tem as fórmulas de Analítica prontas. Fica melhor entendido. Fica mais prático, porque é mais explícito no gráfico."*

Esta discussão é muito importante. A conjectura de que é possível resolver a atividade de duas maneiras virou alvo de um debate sobre as vantagens de uma ou de outra maneira. Além disso, como Ponte (2006, p. 41) afirma, "É ainda, um momento privilegiado para despertar os alunos para a importância da justificação matemática de suas conjecturas".

Para finalizarmos esta discussão, realizamos uma votação com os dezessete alunos presentes para verificar com qual das soluções eles se sentiram mais incentivados a resolver o problema.

A votação contou com doze alunos defendendo a solução com Geometria Analítica e cinco preferindo a Geometria Plana.

Tecnicamente falando, a resolução por Geometria Plana foi muito precisa e muito bem apresentada. Notou-se que os alunos se empenharam em organizar uma apresentação clara aos colegas, justificando todos os passos de sua resolução.

Já a solução por Geometria Analítica, além de não ser feita em formato PowerPoint, o que causou uma interrupção no andamento da apresentação, tem um passo com uma justificativa incompleta que é quando os alunos determinaram o ponto *C* (quando o aluno relata que o ponto fica bem no meio).

Mesmo assim, a turma optou pela solução por Geometria Analítica, conforme discutimos, pois a solução apresenta uma fórmula bem estruturada e algoritmizada, prevendo todos os passos. Apesar de os cálculos da Geometria plana serem mais simples, os alunos acharam difícil encontrar a semelhança sozinhos, demandando um *"desenvolvimento melhor do raciocínio"* como relatou um dos alunos.

Duval (2009, p. 80) já prevê uma predileção de um registro em detrimento de outro ao afirmar que "Em efeito, um registro pode permitir efetuar certos tratamentos de uma maneira muito mais econômica e mais possante que outro registro".

Apesar de ambos os grupos alterarem as figuras, acreditamos que a transformação feita pelo segundo grupo fez os alunos decidirem, após discussão, que a segunda solução era a melhor. A transformação do retângulo em plano cartesiano é mais imediata, à medida que o plano apresenta coordenadas retangular. Na solução do primeiro grupo, a figura precisou ser dividida em outra que não era evidente antes de ser mostrada, o que caracterizou um trabalho mais complexo.

7.3 AULA 06 – ATIVIDADE 04 – RESULTADOS

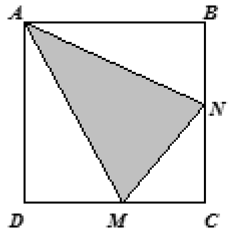
Terminadas as apresentações e os questionamentos sobre a Atividade 03, começamos as apresentações da Atividade 04. Os grupos responsáveis pela apresentação foram os grupos dos alunos S. e J. O grupo do aluno S. já havia apresentado a atividade 3 utilizando Geometria Analítica e agora apresentaria um problema utilizando Geometria Plana.

A Atividade proposta número 4 está apresentada na figura 30 a seguir.

Figura 30 – Aula 06 –Atividade 04

Atividade 04

O quadrilátero *ABCD* é um quadrado de área $4m^2$. Os pontos *M* e *N* estão no meio dos lados a que pertencem. Determine a área do triângulo em destaque, em m^2,

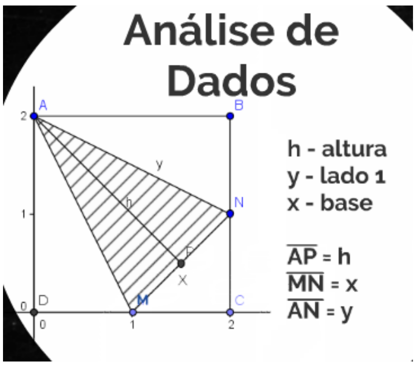


Fonte: OBM (1999).

Assim como na aula anterior, começamos com a Geometria Plana e, portanto, o grupo do aluno S. começou a apresentação. Esta apresentação utilizou Prezi e estava muito bem estruturada. O leitor deve lembrar que a Atividade 03, apresentada pelo grupo do aluno S., não foi feita em PowerPoint e precisou ser reiniciada, pois eles acabaram por se confundir. Acreditamos que o grupo deste aluno se dividiu em dois: uma parte trabalhou com a Atividade 03 e a outra parte com a Atividade 04, o que acabou gerando esta diferença.

O grupo iniciou a sua apresentação explicando qual foi sua estratégia de resolução. Eles afirmam que primeiro "*A gente analisou os dados que a gente tinha e a gente chegou à conclusão que a gente precisava da base e da altura do triangulo*". Inserimos na figura 31 um print screen da apresentação elaborada pelos alunos, pois, como veremos a seguir, os alunos fizeram um registro escrito distinto do apresentado para a turma.

Figura 31 – Aula 06 –Atividade 04 – Print screen de uma parte da solução com Geometria Plana

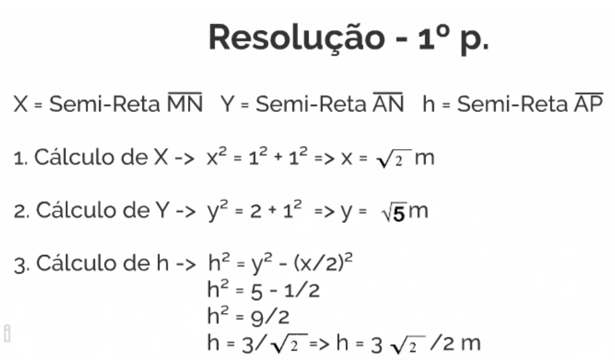


Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Os alunos decidiram nomear, como vemos na figura, que “*A gente teria que a semirreta AP que é a altura e a semirreta MN seria a base*”.

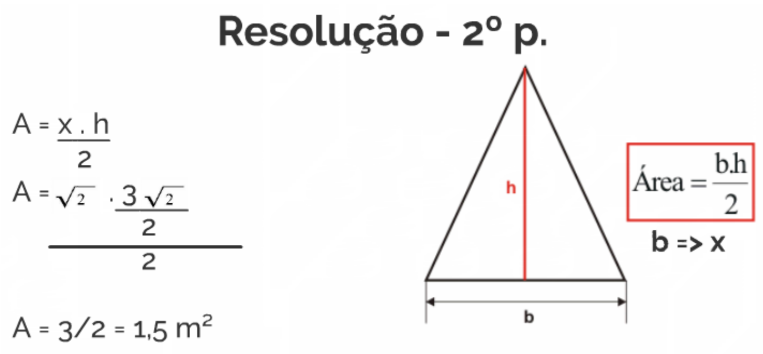
O grupo dividiu a resolução em duas partes. Na primeira das partes, o grupo calculou a base e a altura, utilizando os dados que o problema apresentava, conforme figura 32, e na segunda parte o grupo calculou finalmente a área, conforme figura 33.

Figura 32 – Aula 06 –Atividade 04 – Outro print screen de uma parte da solução com Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

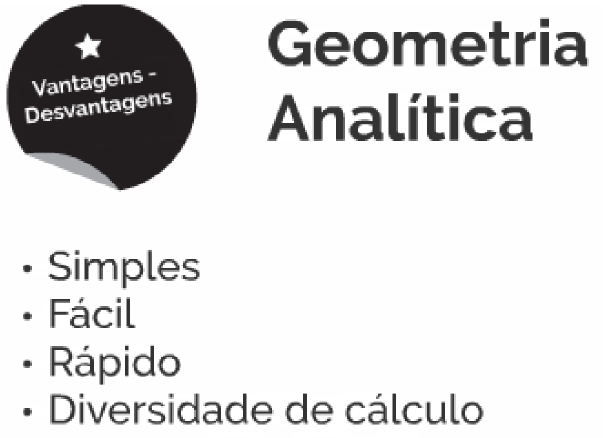
Figura 33 – Aula 06 –Atividade 04 – Último print screen de uma parte da solução com Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

O que havíamos previsto para esta aula é que os grupos apresentariam suas soluções e, posteriormente, discutiríamos. O que aconteceu aqui não foi o previsto. O grupo preparou em um dos quadros algumas vantagens sobre a solução que apresentaram, conforme figura 34.

Figura 34 – Aula 06 –Atividade 04 – Vantagens apresentadas pelo grupo com Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

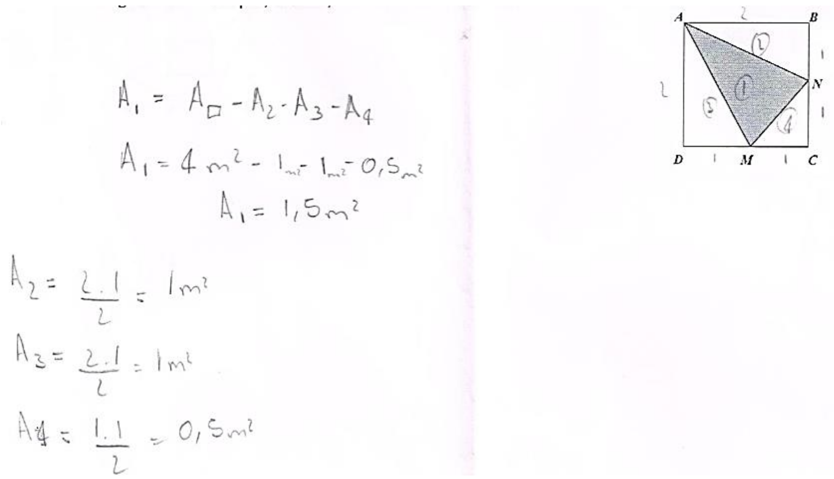
O grupo relatou que:

> Alguma das vantagens da Geometria Analítica que a gente achou foi que ela é bem simples de se fazer, bem fácil, é bem rápido e tem dois métodos de que ela pode ser desenvolvida que é calculando a base e a altura do triângulo e a gente fez ou calculando a área dos outros triângulos que tinha dentro do quadrado e depois só diminuindo. Por isso a diversidade de cálculo.

Gostaríamos de salientar dois eventos neste quadro adicional que causaram surpresa. Primeiramente o grupo cometeu um equívoco ao escrever "Analítica", como o leitor deve ter notado na figura 34. Além disso, isso ficou registrado em sua apresentação, quando o aluno relatou que *Algumas das vantagens da Geometria* ***Analítica*** *que a gente achou foi"*. Acreditamos ter ocorrido uma pequena falha aqui de atenção, pois tanto a apresentação quanto os registros feitos são de Geometria Plana.

O segundo evento que cabe destacar é o que o aluno chamou de *diversidade de cálculo*, conforme observamos na figura 34. Para isso, os alunos apresentaram de uma maneira o exercício, mas, em seus registros escritos, mostraram uma solução distinta, conforme podemos ver na figura 35 a seguir.

Figura 35 – Aula 06 –Atividade 04 - Outra solução possível utilizando Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

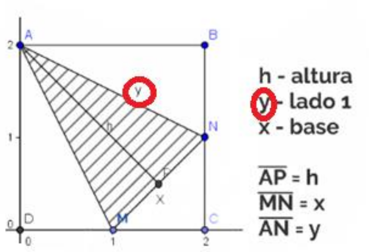
Essa solução apresentada na figura 35 é a que o grupo se refere quando diz que *calculando a área dos outros triângulos que tinha dentro do quadrado e depois só diminuindo*. Questionados, afirmaram ter feito de duas maneiras, pois viram que o problema tinha esta possibilidade.

Este é um fato muito pertinente quando trabalhamos com Registros. Duval (2011, p. 116) aponta que “em Matemática, não pensamos jamais em um único registro, mas em vários ao mesmo tempo, mesmo se as produções vão privilegiar um único registro”. O grupo, quando colocado nesta posição, em que duas opções de registro dentro de Geometria Plana eram possíveis, optou por apresentar uma, mas deixar a outra registrada também. Além disso, salientaram na apresentação esta outra possibilidade, tendo em vista que a existência de um registro não elimina o outro.

Não analisaremos, portanto, apenas uma das soluções, mas as duas, já que ambas foram registradas.

Na solução apresentada pelo grupo, vimos que o grupo decidiu calcular os lados do triângulo. Note também que o grupo supõe que o triângulo é isósceles, sem mencionar este fato. Destacamos isso com dois círculos na figura 36

Figura 36 – Aula 06 – Atividade 04 – Parte de uma das soluções utilizando Geometria Plana

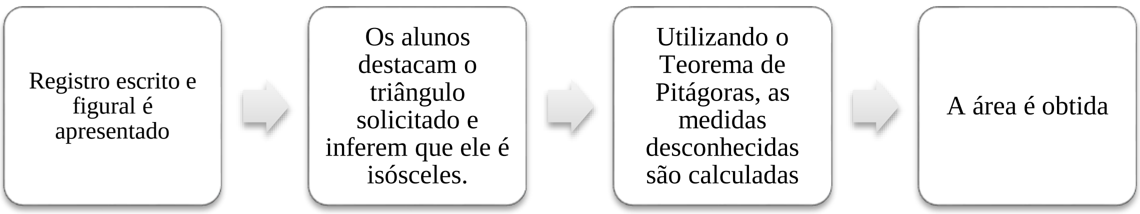


Fonte: Arquivo dos autores (2016)

Tratando do aspecto matemático, seria pertinente que o aluno tivesse citado isso, como meio de justificar o porquê do cálculo da altura que é feito dividindo a base *x* em duas partes e posteriormente alicando Teorema de Pitágoras. Duval (2011, p. 84) alerta que “a construção instrumental das figuras, sobretudo utilizando software, confere às figuras uma confiabilidade e uma objetividade que permitem efetuar verificações e observações”, o que nos leva a inferir que, apesar de os alunos não terem dito isso, a maneira como a figura foi construída levou a isso.

Feito este cálculo, o aluno trata o triângulo solicitado como um triângulo isósceles qualquer. Assim como na nossa análise da Atividade 03, elaboramos um esquema das conversões apresentadas, apresentado na figura 37. Note que elas são muito semelhantes às realizadas na Atividade 03.

Figura 37 – Aula 06 – Atividade 04 – Esquema de resolução utilizando Geometria Plana



Fonte: Os autores (2016).

As conversões das medidas do triângulo, para cálculos de área ocorreram em todo o tempo desta pesquisa. Utilizamos, em todas as atividades, cálculo como meio de obter os resultados. Duval (2011, p. 100) prevê isso ao afirmar que “Assim, em Geometria, mobilizamos a linguagem e a visualização para a decomposição de formas, em seguida, pedimos os tratamentos em um terceiro registro para calcular as relações numéricas.”.

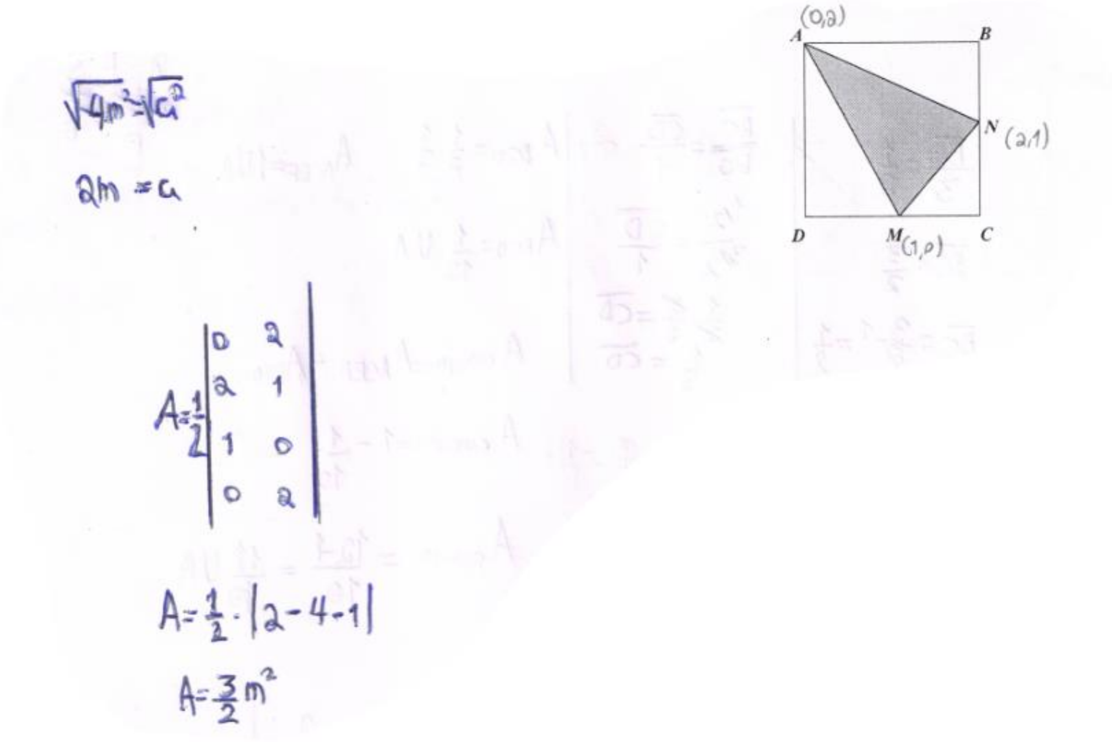
Já a segunda ideia construída pelo grupo é bem conhecida. Eles descontaram do quadrado inicial alguns triângulos retângulos como meio de calcular a área do triângulo central. Esta solução é a mesma que o livro didático, que apresentamos na figura 4, do capítulo 4, além de ser a mesma ideia que o professor utilizou em sala de aula para introduzir o conteúdo de áreas.

Aqui temos novamente uma decomposição da figura em outras quatro. Apesar de os alunos apenas citarem esta ideia e não a apresentarem formalmente ao grande grupo, consideramos de grande valia este novo registro. Não pelo registro em si, mas muito fortemente pelo que Duval (2011, p. 86) afirma ao dizer que "As figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato de que existem várias maneiras de reconhecer as formas ou unidades figurais", o que corrobora a importância desta *diversidade de cálculo*.

Consideramos a primeira solução bastante elaborada e muito bem estruturada, pois os alunos estabeleceram uma meta e a seguiram como meio de alcançar seus objetivos. Nós já esperávamos que os alunos resolvessem a atividade da outra maneira apresentada e a primeira solução causou uma certa surpresa. Não deveria, porém, causar, já que, conforme Duval (2012, p. 272) "A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico." Esta nova solução não se trata então de uma conversão, mas, sim, de um tratamento dado à figura apresentada.

Passamos agora à apresentação do grupo do aluno J. em que um dos integrantes não esteve presente. O grupo elaborou sua solução em um PowerPoint e o registro de sua apresentação é o mesmo que o registro escrito, apenas digitalizado, conforme figura 38. A apresentação foi bem objetiva.

Figura 38 – Aula 06 – Atividade 04 – Solução com Geometria Analítica

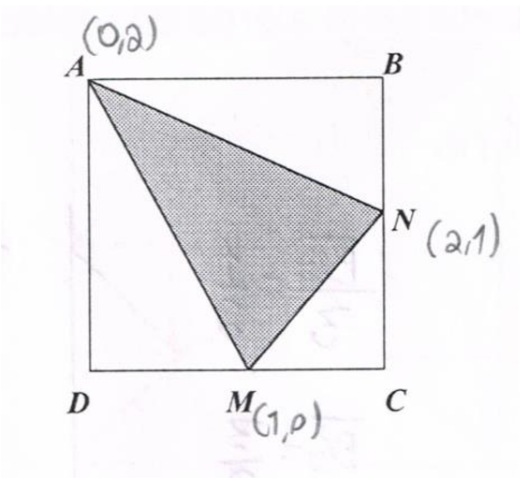


Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Primeiramente os alunos calcularam o lado do quadrado em questão. Chama atenção aqui novamente o fato de o grupo anterior também ter desconsiderado esta informação. Parece evidente que o lado do quadrado de área *4u.a* seja *2u.c*. Mesmo assim, o segundo grupo tomou este cuidado como meio de deixar sua justificativa mais evidente. Um dos alunos, ao apresentar, relatou que *"Bom a primeira coisa que eu vou dizer é que é um quadrado e pra achar uma aresta deles a gente fez uma raiz ali pra achar uma aresta que no caso seria 2 m ali."*

Esta é a única menção feita às fórmulas da Geometria Plana. Logo que este cálculo acaba, os alunos colocam coordenadas nos vértices do triângulo e do quadrado da figura, conforme figura 39.

Figura 39 – Aula 06 – Atividade – Parte da solução com geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

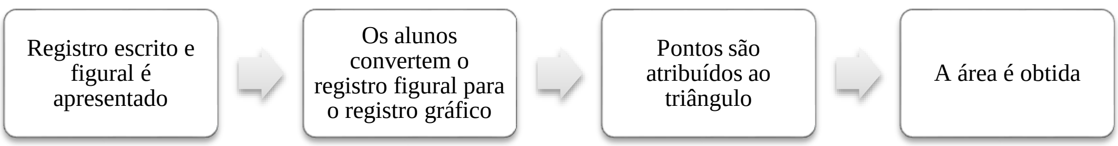
Este é talvez o momento crucial da conversão. O aluno aqui converte uma figura da Geometria Plana para um Registro em Geometria Analítica. Apesar de não colocarem os eixos coordenados, vemos que a origem do Sistema ficou no ponto *D*. Feito isso, eles afirmaram, durante o relato, que *“Como é dois ali a base o M estaria num ponto que é (1,0) o N estaria no (2,1) e o A estaria no (0,2)”*.

A conversão feita pelos alunos é tão imediata que eles concluem o problema, afirmando que *“a gente conseguiu fazer uma fórmula matemática da geometria analítica. Calcula a área desse triângulo usando pontos do gráfico que nós fizemos. Assim a gente conseguiu chegar à conclusão que este triângulo tem 3/2 m^2 de área.”*.

Duval (2012, p. 275) afirma que “A regra de codificação permite não mais do que duas coisas: a leitura de uma dupla de números sobre o gráfico, a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto, a partir de uma dupla de números”. Estes alunos, ao relatarem que “*Calcula a área desse triângulo usando pontos do gráfico”*, demonstram entender a figura como um triângulo e não apenas alguns vértices do plano.

O que vimos na solução foi o que está esquematizado na figura 40.

Figura 40 – Aula 06 – Atividade 04 – Esquema de resolução utilizando Geometria Analítica



Fonte: Os autores (2016).

Notamos, porém, que os alunos não calcularam os pontos médios, apenas atribuíram valores – corretos – aos vértices sem se preocuparem com a justificativa. Como o vértice *M* estava localizado no eixo das abscissas, a localização deste é bastante simples. Mas o vértice *N* não fica em um dos eixos. Duval (2011, p. 101), ao estudar as representações dos gráficos e equações de retas, relata algo semelhante. Ele afirma que “Omitimos dois casos em que a reta é paralela a um dos eixos: não é necessário levar em conta os valores das variáveis precedentes, basta ler o valor do ponto de intersecção da reta com o eixo”, o que nos leva a crer que foi este o motivo de não terem calculado os vértices. O registro algébrico é bastante rápido.

Finalizando as apresentações, nossa discussão foi sobre as vantagens e as desvantagens de cada um dos métodos. Solicitados a responder, os alunos afirmaram que em Geometria Plana é “*difícil de encontrar, pois na plana temos várias figuras*” e que “a *plana demora um pouco mais de tempo e tem de calcular muitas coisas antes até chegar no resultado da área do triângulo”*. Ao passo que em Geometria Analítica os alunos relataram que *“analítica é muito mais simples, só botar os pontos ali e estão explícitos”* e que *“na analítica não tem problema, é só achar os pontos fazer o gráfico”.*

Ao final, quando fizemos a votação para decidir qual seria a solução preferida pelos alunos, apenas um dos alunos preferiu a solução em Geometria Plana, mesmo que os alunos tivessem feito de duas maneiras distintas e tivessem a apresentação visualmente muito bem estruturada. Quinze dos alunos votaram na solução em Geometria Analítica como melhor e um aluno se absteve, afirmando que “*os dois são o mesmo nível de dificuldade.”.*

Gostaríamos de ressaltar algo que nos ficou muito evidente. Após os alunos discutirem, a solução em Geometria Analítica foi evidentemente preferida. Feita a conversão, os alunos preferiram esta por um fator muito interessante levantado por Duval (2011, p. 127): “A existência de muitos registros permite a mudança de um deles e a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada.”. Neste caso isso ficou evidenciado devido à facilidade de tratamento dos vértices em Geometria Analítica.

7.4 AULA 07 – ATIVIDADE 05 – RESULTADOS

As aulas 07 e 08 ocorreram no dia 28/06/2016 e, por se tratar de dois períodos, terminamos as apresentações neste mesmo dia. A atividade 05 foi apresentada pelo grupo do aluno I., utilizando Geometria Analítica e pelo grupo do aluno R., utilizando Geometria Plana.

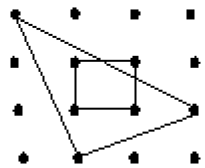
Dois dos alunos não se fizeram presentes, totalizando vinte e três alunos na sala de aula. Neste ponto do trabalho, os grupos apresentaram maior agilidade em suas soluções e estavam mais tranquilos. Assim sendo, tivemos soluções e conversões interessantes que aparecerão aqui em nossas análises.

Apresentamos na figura 41 a Atividade 5.

Figura 41 – Aula 07 – Atividade 05

Atividade 05

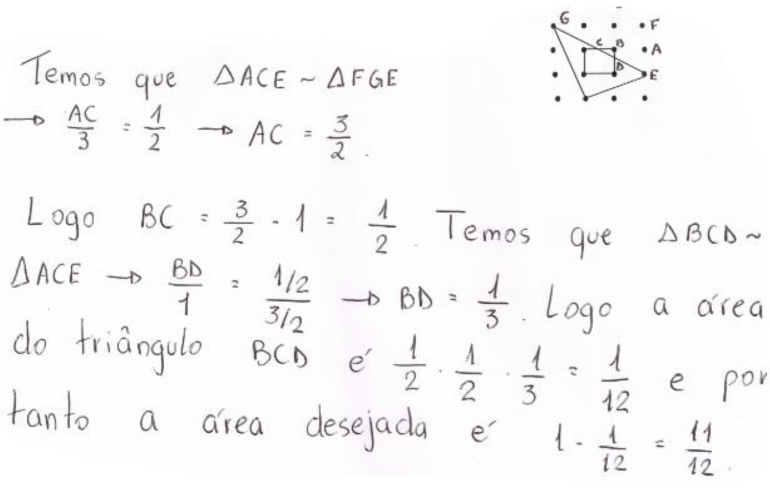
Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. Determine a área da região comum ao triângulo e ao quadrado.



Fonte: OBM (2000).

Iniciamos com a apresentação feita em Geometria Plana. O grupo de alunos organizou os slides PowerPoint, porém as figuras se encontravam em um arquivo separado. Durante toda a apresentação, portanto, os alunos ficaram trocando de aba, causando uma sensação de descontinuidade durante o relato. A figura 42 apresenta o registro escrito da solução elaborada pelos alunos. Este registro é melhor organizado no papel do que o apresentado pelo grupo aos colegas.

Figura 42 – Aula 07 – Atividade 05 – Solução utilizando Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Os alunos iniciaram nomeando os vértices das figuras em destaque. Na primeira fala os alunos relataram que *"E temos que o triângulo ACE é semelhante ao triangulo FGE"*, sem justificar este fato, pois provavelmente o aluno entende que a figura é suficiente para obter a semelhança de triângulos.

Duval (2011, p. 96) atenta para esta utilização das figuras como fundamental ao afirmar que "As atividades relativas à produção de figuras esquematizadas e sua articulação com a figura de um teorema são tão fundamentais quanto aquelas que dizem respeito aos cálculos que é preciso para aplicar um teorema". Não consideramos, por fim, que a ausência desta justificativa venha a causar algum transtorno na resolução da atividade. Podemos, assim, incentivar o uso das figuras como meio de auxiliar no entendimento das propriedades geométricas em atividades de Geometria Plana.

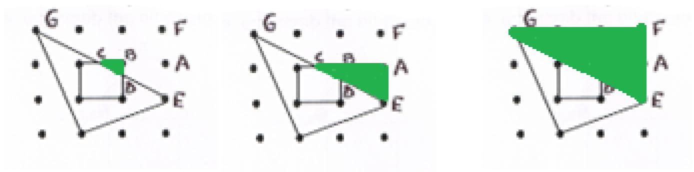
A apresentação seguiu com os alunos dizendo quais foram os próximos passos. Eles determinaram as medidas dos catetos do triângulo *CDB* e, posteriormente, descontaram do quadrado central. Durante a apresentação os alunos apenas relataram os cálculos feitos e como chegaram à resposta, de maneira idêntica ao relatado no registro escrito.

Para determinar estas medidas, os alunos relacionaram os triângulos *ACE* e *FGE* como meio de calcular *AC*. Posteriormente calcularam o cateto *BC* do triângulo retângulo *CDB*. Para finalizar as partes que relacionam medidas, fizeram semelhança entre os triângulos *ACE* e *BCD* como meio de encontrar o cateto *BD*.

Finalizaram calculando a área do triângulo *BCD* e descontaram do quadrado original. Durante a apresentação os alunos apenas leram o que fizeram através de cálculos e concluíram rapidamente. A apresentação feita pelos alunos não foi tão clara. Analisando seu registro escrito, verificamos que os passos estão um pouco desorganizados; por isso, descrevemos a solução apresentada pelo grupo nos dois parágrafos que seguem.

O trabalho efetuado pelos alunos teve a seguinte ordem: primeiro eles identificam três triângulos semelhantes exclusivamente pelas figuras. Destacamos os triângulos semelhantes na figura 43 a seguir.

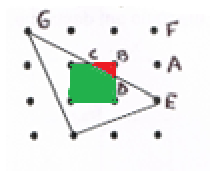
Figura 43 – Aula 07 –Atividade 05 – Parte da solução com Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Feito isto, eles calcularam as medidas do menor destes triângulos para calcular, por fim, a área do pentágono indicado. Identificamos o triângulo CDB na figura 44, o triângulo obtido e o pentágono restante que são necessários para a resolução do problema.

Figura 44 – Aula 07 – Atividade 05 – Outra parte da solução com Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

As operações e conversões efetuadas por estes alunos são muito semelhantes àquelas realizadas pelo grupo de alunos da Atividade 03. A ordem apresentada pelos alunos é inclusive a mesma, conforme vemos no esquema da figura 45 a seguir.

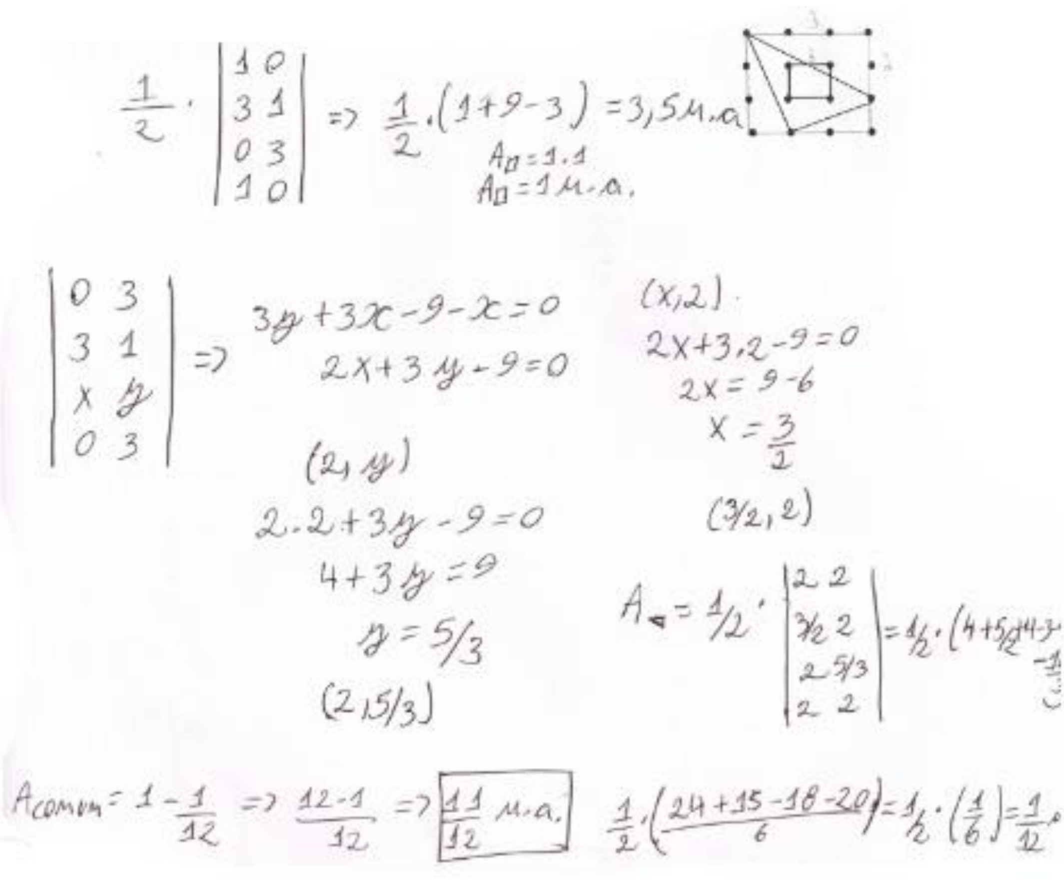
Figura 45 – Aula 07 – Atividade 05 – Esquema de resolução utilizando Geometria Plana

Fonte: Os autores (2016).

Como justificativa deste fato, temos como hipótese que, sendo a solução da Atividade 3 conhecida e já apresentada com sucesso, seguir os mesmos passos poderia levar a uma solução nesta atividade também. Manter as mesmas conversões entre o registro geométrico e o registro algébrico da semelhança mostrou-se, nesta atividade, uma boa possibilidade de resolução. Voltamos a afirmar, portanto, a importância da operação de decomposição de uma figura em outras como meio de resolução de uma atividade.

Para a resolução em Geometria Analítica, passamos por uma situação muito semelhante. A solução apresentada pelo grupo, apesar de distinta, lembrou muito a apresentada na Atividade 03. A figura 46 mostra o registro escrito apresentado.

Figura 46 – Aula 07 –Atividade 05 – Solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

O grupo deixa claro que fez a conversão do problema escrito em linguagem figural para a linguagem gráfica. Eles começam a apresentação afirmando que *"Bom, o primeiro passo foi construir o plano cartesiano com o ponto (0,0) aqui e botando os vértices na figura. E foram (1,0) (3,1) (0,3).".*

Esta conversão, porém, apesar de escrita e falada, não aparece na solução. Os alunos, aqui, apenas dizem os pontos, mas não marcam os eixos coordenados, nem na apresentação. Analisando suas soluções, verificamos que a origem foi colocada no canto inferior esquerdo do plano.

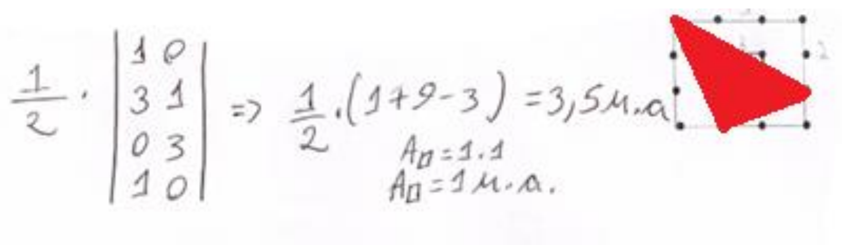
Estes alunos não nomearam os pontos de maneira a tornar mais claro o que exatamente foi feito. Além disso, os alunos, como próximo passo, apresentam o cálculo da área de um triângulo que não se faz necessário.

Continuando a solução, os alunos encontram a equação da reta que passa pela intersecção deste triângulo com o quadrado central, dizendo que *"O terceiro passo foi descobrir os pontos desconhecidos que a reta do triângulo passa pelo quadrado".*

E, para finalizar, eles afirmam que *"Depois a gente calculou a área com a mesma fórmula ½ vezes os pontos que a gente tinha descoberto, seguindo a mesma ordem que a gente usou no primeiro, a gente chegou a 11/12 de unidade de área.".* Apesar de não ficar claro durante a apresentação, verificamos que o grupo calculou a área do triângulo menor, com os pontos conhecidos, através da Regra de Gauss e, por fim, descontou do quadrado central.

Nossa análise mostrou que os alunos destacaram e calcularam um triângulo que não se faz necessário. Destacamos o triângulo na figura 47 logo a seguir.

Figura 47 – Aula 07 – Atividade 05 – Parte da solução com Geometria Analítica

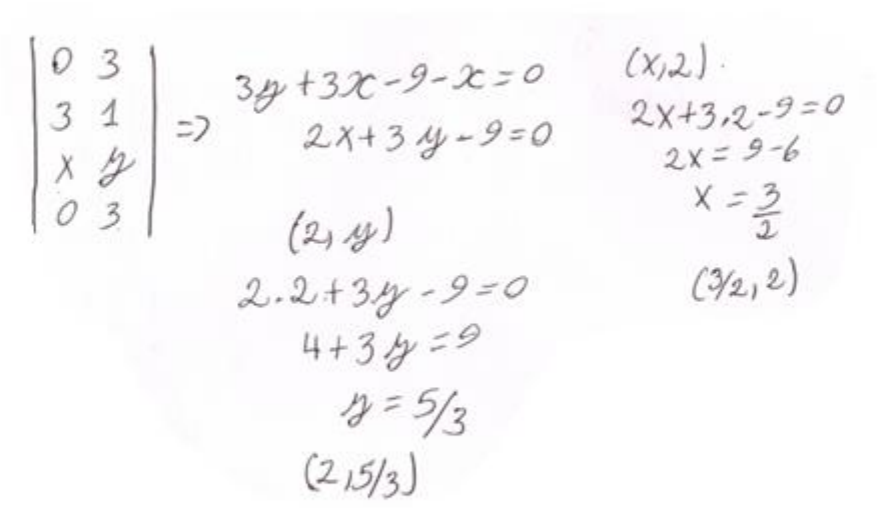


Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Duval (2011, p. 92) atenta para o fato de que cada produção esquematizada leva a ver produções distintas ao afirmar que "Naturalmente, para um mesmo desenho, podemos ter hipóteses diferentes. Mas, assumimos que o que é dado a ver será então visto diferentemente pelos alunos! Em outras palavras, supomos que os alunos vão olhar a configuração produzida com os óculos das hipóteses". Acreditamos que os alunos quisessem, portanto, enxergar o triângulo dado no problema e, sem se dar conta, calcularam sua área sem motivação aparente.

Na continuidade o grupo teve como objetivo determinar os pontos que determinam o triângulo. Para isso encontraram a equação geral da reta, utilizando a Regra de Gauss, conforme vemos na figura 48. A maneira como eles conduziram a resolução aqui é distinta daquela apresentada por outro grupo na Atividade 03, quando os alunos utilizaram a forma reduzida da equação da reta. É importante que o aluno tenha à disposição mais de um formato da equação para que possa converter e utilizar aquela que for mais conveniente.

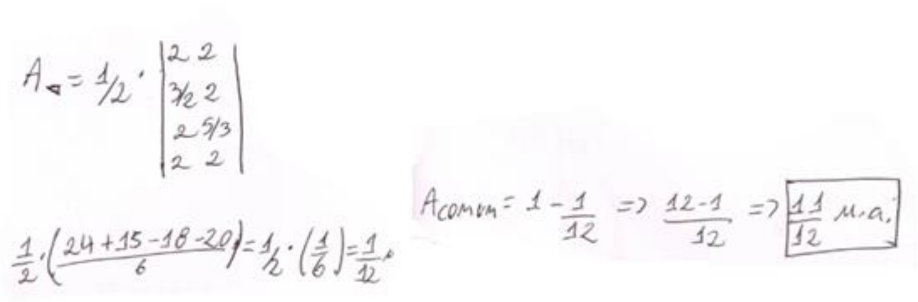
Figura 48 – Aula 07 –Atividade 05 – Outra parte da solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Por fim, como podemos ver na figura 49 a seguir, ocorre um fato muito importante: o aluno utiliza mais de um registro para resolver o problema. Os alunos calcularam a área do triângulo utilizando a Regra de Gauss e terminaram calculando a área do pentágono, descontando do quadrado central. Tendo à disposição os pontos do pentágono, esta operação de desconstrução da figura não se faz necessária. Bastava colocar os pontos e efetuar diretamente a área do pentágono.

Figura 49 – Aula 07 – Atividade 05 – Última parte da solução com Geometria Analítica

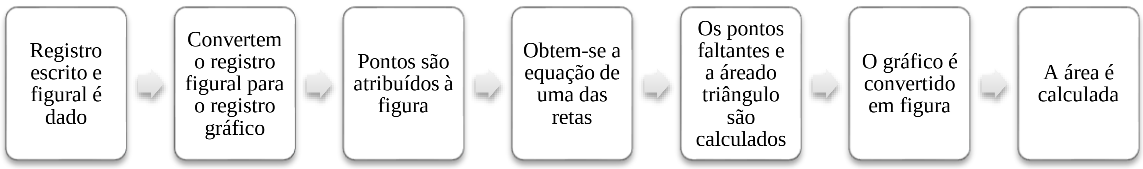


Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Converteram a figura obtida em Geometria Analítica para uma reconstrução em Geometria Plana, fazendo o mesmo que o grupo de Geometria Plana fez. Agiram os alunos, então, de acordo com o tratamento que lhes foi mais econômico. Duval (2009, p. 81) afirma que “Esta ‘utilidade’ da variedade de registros de representação é um dado fundamental e trivial que ninguém contesta”, justificando, assim, esta predileção, mesmo quando o outro registro foi solicitado.

Seguiram os alunos o esquema apresentado na figura 50.

Figura 50 – Aula 07 – Atividade 05 – Esquema de resolução utilizando Geometria Analítica



Fonte: Os autores (2016).

Ao finalizarmos esta aula, fizemos nossa discussão e os alunos informaram que as vantagens da Geometria Analítica são as de que “*é mais fácil*” e “*mais rápida*” e que “*é sempre de um jeito*”. Já sobre a Geometria Plana os alunos relataram que necessita “*um maior raciocínio, mais cuidado pra calcular* e *precisa ter um conhecimento maior.*”.

Pela terceira vez a solução com Geometria Analítica foi a com maior número de votos – treze – e o restante – dez alunos – votou pela Geometria Plana. Acreditamos que o fato de que a solução apresentada pelos alunos envolve um equacionamento mais imediato fez com que houvesse este favoritismo.

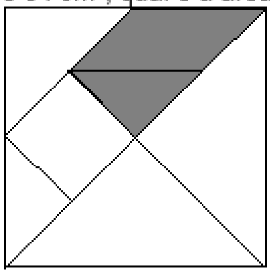
7.5 AULA 07 – ATIVIDADE 06 – RESULTADOS

A atividade proposta 06 é a que mostramos na figura 51 na próxima página.

Figura 51 – Aula 07 – Atividade 06

Atividade 06

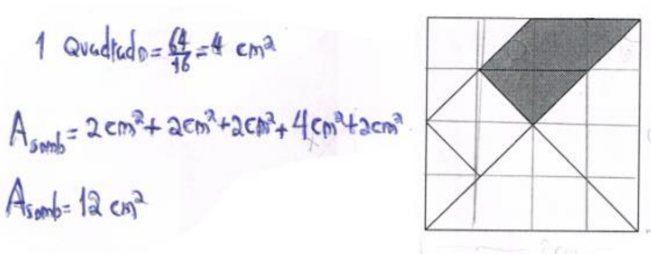
A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é 64 cm^2, qual é a área, em cm^2, da região sombreada?



Fonte: OBM (2006).

O grupo do aluno J. ficou responsável pela resolução e apresentação em Geometria Plana e o grupo do aluno V., utilizando Geometria Analítica. Para resolver a atividade em Geometria Plana, o grupo registrou o que vemos na figura 52.

Figura 52 –Aula 07 – Atividade 06 – Solução com Geometria Plana

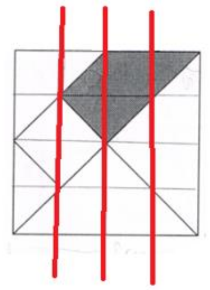


Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Observando a solução apresentada pelos alunos, verificamos que ela consiste em dividir o quadrado maior do Tangram em dezesseis quadrados menores. Feita esta divisão, o grupo soma as áreas que aparecem. As áreas a serem somadas são um quadrado e quatro triângulos. Durante a apresentação o grupo afirmou que: "*Daí a gente dividiu em quadradinhos pra conseguir fechar figuras geométricas conhecidas como triângulos e quadrados"* e isso aparece evidente em seu registro escrito e no PowerPoint que estruturaram. Feita esta divisão, o grupo apenas soma as áreas e chega ao resultado doze.

Como podemos notar, este problema poderia ser resolvido, em Geometria Plana, de diversas maneiras. Voltamos aqui a retomar a importância da operação de reconfiguração em Geometria e o quanto esta reconfiguração ajudou na solução do problema. Poderiam os alunos, porém, ter justificado o motivo de as retas traçadas na horizontal e vertical estarem de fato alinhadas aos vértices dos polígonos internos. Nosso questionamento é: *"na figura 53, as retas que contém os segmentos destacados são paralelas às retas suportes do lado?"*

Figura 53 – Aula 07 – Atividade 06 – Parte da Solução com Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Ponte (2006) já alerta para tais situações ao afirmar que

> As conjecturas podem surgir ao aluno de diversas formas, por exemplo, por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. Esse trabalho indutivo tende, por vezes, a ficar confinado ao pensamento do aluno, não existindo uma formulação explícita da conjectura. (PONTE, 2006, p. 33).

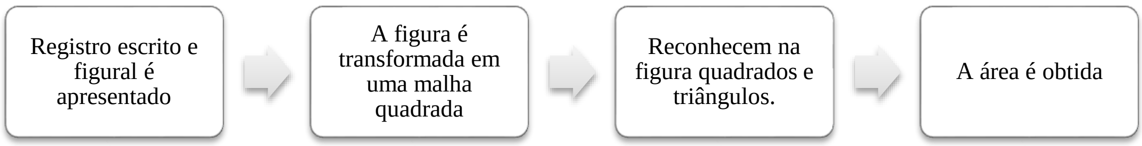
As considerações de Ponte nos ajudam a entender o porquê de os alunos terem apenas dividido a figura em malhas sem se importarem com o fato de elas formarem de fato uma malha ortogonal. Ou seja, eles não conseguiram expressar tal conjectura e apenas observaram os dados apresentados na figura.

Este não é um fato isolado e aparece várias vezes quando alunos se veem desafiados por um problema matemático. Com frequência os alunos estão interessados em chegar às respostas dos problemas, sem se preocupar com a extensão da validade das propriedades que utilizam na resolução dos problemas.

Incentivamos em nossa proposta, inspirada na Investigação Matemática, que os grupos justificassem tudo o que fizessem em suas resoluções não apenas pela questão matemática de resolver o problema, mas também para que os grupos pudessem discutir e argumentar com seus colegas os procedimentos. Ponte (2006, p. 23) alerta que "O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa”.

O quadro que apresenta as conversões realizadas nesta atividade é este da figura 54.

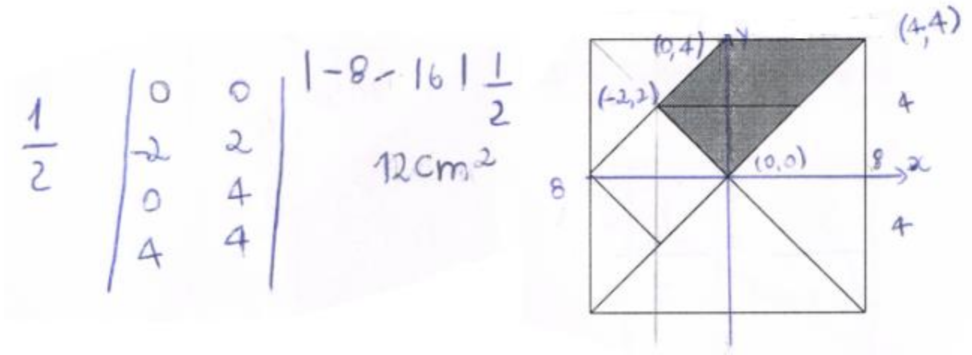
Figura 54 – Aula 07 – Atividade 06 – Esquema de resolução utilizando Geometria Plana



Fonte: Os autores (2016).

Apresentamos agora, na figura 55, a solução do grupo que utilizou Geometria Analítica.

Figura 55 – Aula 07 –Atividade 06 – Solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

A apresentação feita pelos alunos foi confusa. Os alunos dividiram-na em quatro passos. Eles relatam que *“O passo 1 é determinar o lado do quadrado maior”*. Para este passo, finalizam concluindo que o lado mede 8.

O passo 2, conforme eles falaram, é *“Criar o eixo que a origem se localiza no centro do quadrado, obtendo assim o primeiro ponto da figura que é (0,0)”*.

A partir daí eles afirmam que o passo 3 é *“Observar que o triângulo equilátero de lado 2 onde tem o segundo ponto da figura que está no lado negativo do eixo x, ou seja -2 e no positivo do eixo y, ou seja 2”*. Entendemos que o ponto relatado seja o ponto *(-2,2)*, mas não conseguimos entender a justificativa apresentada pelos alunos, pois o triângulo apresentado não é equilátero. Cometeram aqui um erro de nomenclatura, já que o triângulo não é equilátero, mas que não impossibilitou o desenvolvimento da solução.

O *"Passo 4 é observar que o terceiro ponto da figura está localizado no eixo y, sendo assim, x=0 e y=4 pois está na extremidade do quadrado"* e, para finalizar, o passo 5 é *" observar que o ponto que está no canto do quadrado maior é x=4 e y=4. "*

Durante toda a apresentação, porém, o grupo estava muito nervoso e não mostrou a figura. Eles precisaram reabri-la ao final para explicar quais eram os pontos e onde estava o eixo descrito. O aluno relatou que *"Tinha mais um slide que não apareceu aí não sei por quê. Só que fica melhor pra explicar se tiver a figura sor."*.

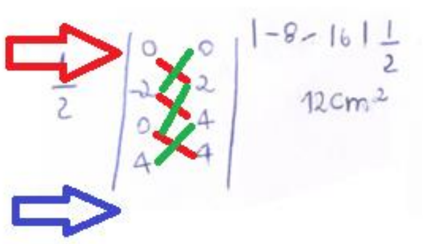
Outro fato que chamou a atenção foi o de que os alunos não disseram o valor encontrado durante a apresentação. Quando o professor os questionou, eles relataram ter esquecido de colocar a resposta final do problema e daí o finalizaram.

Como podemos notar, o registro escrito apresenta poucas justificativas. O grupo converte a figura para um gráfico esquematizado de Geometria Analítica, mas não se preocupa em justificar por escrito. Durante a apresentação conseguimos compreender como encontraram os pontos necessários, mas os alunos não utilizaram uma figura durante a apresentação, apenas leram os passos, o que dificultou muito a visualização por parte dos espectadores.

Duval (2011, p. 106), ao tratar dos registros gráficos, atesta que, ao trabalhar com gráficos, "Existe apenas uma regra de codificação a ser aplicada: um par de números corresponde a um ponto sobre o plano quadriculado munido de dois eixos graduados e orientados", o que justifica a facilidade com que o grupo converte o registro em Geometria Plana para o registro em Geometria Analítica.

Mesmo assim, o grupo comete um pequeno erro ao efetuar o registro algébrico, conforme verificamos na figura 56.

Figura 56 – Aula 07 – Atividade 06 – Parte da solução com Geometria Analítica



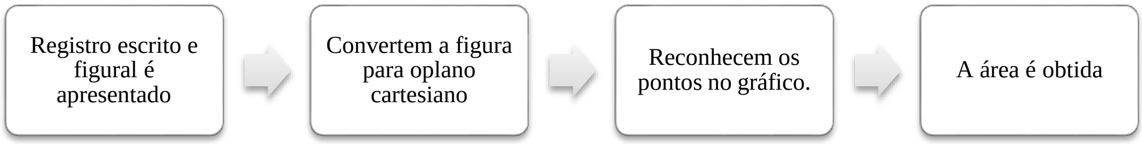
Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Note que o grupo começa com o ponto *(0,0)* – primeira flecha – e faz a conta efetuando as multiplicações marcadas no sentido decrescente menos as multiplicações mostradas no sentido crescente. Ao final, fazem o módulo do resultado e concluem a área.

O correto seria repetir o primeiro ponto para onde indicamos com a segunda flecha. Acreditamos que os alunos não se atentaram a este fato e como o ponto *(0,0)* não afetaria em nada o cálculo tiveram, por coincidência, o mesmo valor.

A resolução seguiu o roteiro apresentado na figura 57.

Figura 57 – Aula 07 – Atividade 06 – Esquema de resolução utilizando Geometria Analítica



Fonte: Os autores (2016).

Ao finalizarmos as apresentações, questionamos os alunos sobre quais foram as facilidades e dificuldades encontradas para a resolução destas atividades. Os alunos já pareciam cansados das discussões pouco falaram. Quando tratamos sobre Geometria Plana um aluno relatou que tem *“figuras conhecidas no Tangram e fica mais fácil”*, além de *“mais rápida e simples”*.

Mesmo assim, os alunos optaram, na votação, pela solução em Geometria Analítica por quatorze votos a nove, sem abstenções, mesmo com as confusões apresentadas pelo grupo responsável pela atividade. Quando este grupo abriu a figura, os alunos conseguiram entender melhor a proposta de resolução; assim, podemos inferir que, apesar do fato de a apresentação não ter sido muito bem estruturada, os alunos preferiram a solução por Geometria Analítica por ser *“fácil de encontrar os pontos e concluir a questão”*, como um dos alunos relatou.

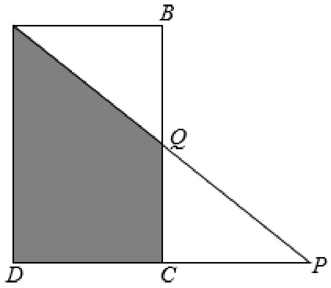
7.6 AULA 08 – ATIVIDADE 07 – RESULTADOS

Mostramos agora a penúltima atividade proposta aos alunos. A Atividade 07 foi apresentada em Geometria Plana pelo grupo do aluno V. e pelo grupo do aluno R. em Geometria Analítica. Esta foi a última aula destinada às apresentações. A questão proposta é a seguinte, conforme figura 58.

Figura 58 – Aula 08 – Atividade 07

Atividade 07

Na figura, *P* é um ponto da reta *CD*. A região cinza é comum ao retângulo *ABCD* e ao triângulo *ADP*. Se *AB* = 5 cm, AD = 8 cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância *PC*?

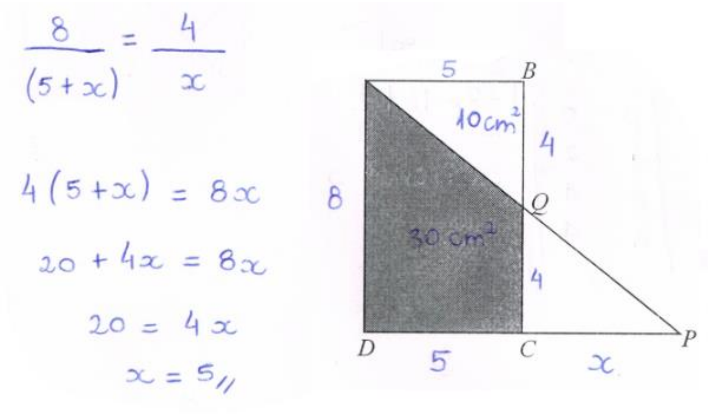


Fonte: OBM (2009).

O grupo do aluno V. já apresentou a atividade 6, porém utilizando Geometria Analítica. Como relatamos, aquela apresentação foi pouco estruturada, o que não ocorreu nesta Atividade. Levando em consideração o fato de que eles apresentaram as duas atividades no mesmo dia, imaginamos que o grupo tenha se dividido para organizar os PowerPoint e, por isso, uma apresentação ficou tão diferente da outra.

O registro escrito para a resolução foi o apresentado na figura 59.

Figura 59 – Aula 08 –Atividade 07 – Solução com Geometria Plana



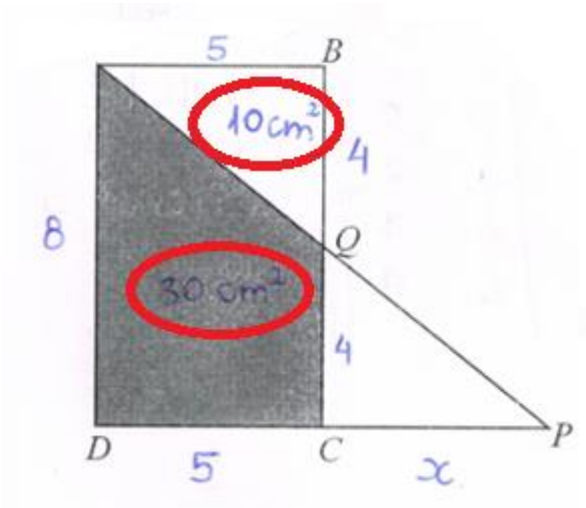
Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Na apresentação feita, os alunos começaram marcando as medidas indicadas pelo texto escrito na figura dada. Calcularam a área do retângulo *ABCD* (o vértice *A* não apareceu na figura por um erro de digitação do professor, mas é o que fica no canto superior esquerdo da figura).

Feito o cálculo da área, calcularam os *3/4* desta área como sendo a área do trapézio *AQCD*. Feito isso, descobriram a área do triângulo *ABQ*. Tendo a área e a base deste triângulo, descobriram, por fim, que *BQ* mede *4cm*. Finalizaram estabelecendo semelhança entre os triângulos *ABQ* e *PCQ*, informando que *"realizamos, portanto uma operação de triângulos semelhantes com esses dois triângulos chegamos que o resultado de x é 5."*.

Analisando a resolução apresentada pelos alunos, sob o ponto de vista de registro e conversão, verificamos que os alunos não registraram exatamente o que foi apresentado. Muito do que foi feito foi apenas escrito e pouco justificado. Note que o cálculo das áreas dos polígonos *ABCD*, *ABQ* e *AQCD* não aparece e os valores apenas aparecem na figura, conforme destacado na figura 60 a seguir.

Figura 60 – Aula 08 –Atividade 07 – Parte da solução com Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Reiteramos aqui a necessidade de levar em consideração o que foi dito pelos alunos – e que gravamos para posterior análise – durante sua solução. Para Duval (2011, p. 76) "A língua não é um código, mas um registro de representação semiótica". Neste caso em especial, mesmo que os alunos não tenham escrito o que fizeram, eles têm consciência e sabem expressar oralmente o que fizeram.

O fato de não registrarem por escrito não significa que não tenham feito e entendido estes três cálculos de área. Duval (2011, p. 75) atenta para a necessidade da expressão ao relatar que "Exprimir-se não é codificar um pensamento já explícito, mas objetivá-lo por si mesmo, tomar consciência, mesmo quando o endereçamos a outros", o que nos ajuda a justificar a importância das apresentações realizadas pelos alunos. Quando um aluno apresenta o que fez não apenas codifica e passa a informação, mas também toma consciência do que foi feito, mesmo que isso não apareça por escrito.

Seguindo a solução, verificamos que os alunos estabelecem uma semelhança para determinar a medida desconhecida. Uma análise dos dados do problema, porém, mostra que os triângulos não são apenas semelhantes, mas congruentes. De qualquer forma os alunos estabelecem a semelhança sem explicar o porquê disso. Vimos o mesmo ocorrer nas atividades 3 e 5 em que os alunos se utilizaram da semelhança de triângulos sem justificativa. É possível que tenha ocorrido aqui algo que Duval (2011) relata:

> Uma mudança importante ocorreu no ensino da geometria no decorrer destes últimos quinze anos. Ela diz respeito aos objetivos desse ensino e à maneira de introduzir os objetos estudados. Não se visa mais compreensão da demonstração, mas uma abordagem empírica dos objetos estudados. (DUVAL, 2011, p. 94).

Como decorrência desta abordagem empírica, Duval (2011, p. 95) afirma que o ensino de Geometria passou a se utilizar de representações *mistas*, utilizando coordenadamente pelos menos dois registros para o trabalho em Geometria: “uma imagem esquematizada dos dados significativos da situação” e “uma figura cujas unidades figurais possam ser colocadas em correspondência com as unidades figurais da imagem esquematizada, e que permitirá explicitar os tratamentos dependendo do teorema a ser utilizado”.

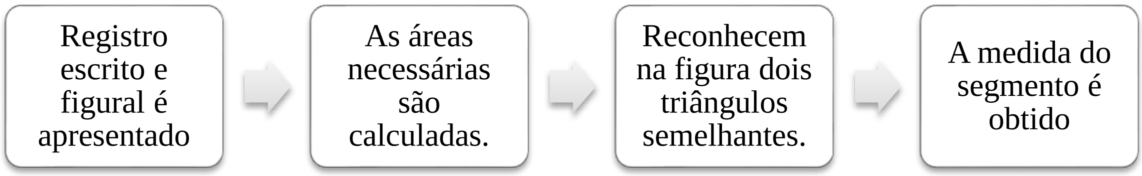
Como consequência desse fato, Duval alerta para o exemplo do ensino de triângulos semelhantes e Teorema de Tales. Duval (p. 96-97) relata que “Em muitos livros didáticos, encontramos atualmente as representações mistas que superpõem uma figura geométrica codificada a uma imagem esquematizada” e finaliza afirmando que a complexidade da utilização desta representação mista “não leva em conta a dificuldade de manipulação de relações numéricas, mas a articulação de duas visualizações semioticamente diferentes”.

É possível, portanto, que estes alunos, durante o ensino de semelhança de triângulos, no Ensino Fundamental, tenham trabalhado apenas empiricamente, sem a utilização de justificativa para a utilização do teorema e que tenham também trabalhado com a esquematização da figura, convertendo-a do registro de Geometria Plana para a identificação de unidades que permitam a semelhança de triângulos. Duval (2011, p. 97) critica isso ao afirmar que o que ocorre é que “Deixamos, portanto, a cargo dos alunos adivinhar as diferentes situações e representações que é preciso relacionar para que sejam capazes de ver”. Estes alunos adivinham, portanto, onde está a semelhança e daí esquematizam a figura para sua posterior aplicação.

Isso explica não apenas a ausência de justificativa de semelhança, mas também o fato de que as soluções, envolvendo semelhança, sempre são preteridas quando fizemos as votações, pois os alunos apenas palpitam onde está a semelhança, como provavelmente fizeram desde o Ensino Fundamental.

Podemos resumir esta solução com o esquema apresentado na figura 61 a seguir.

Figura 61 – Aula 08 – Atividade 07 – Esquema de resolução utilizando Geometria Plana

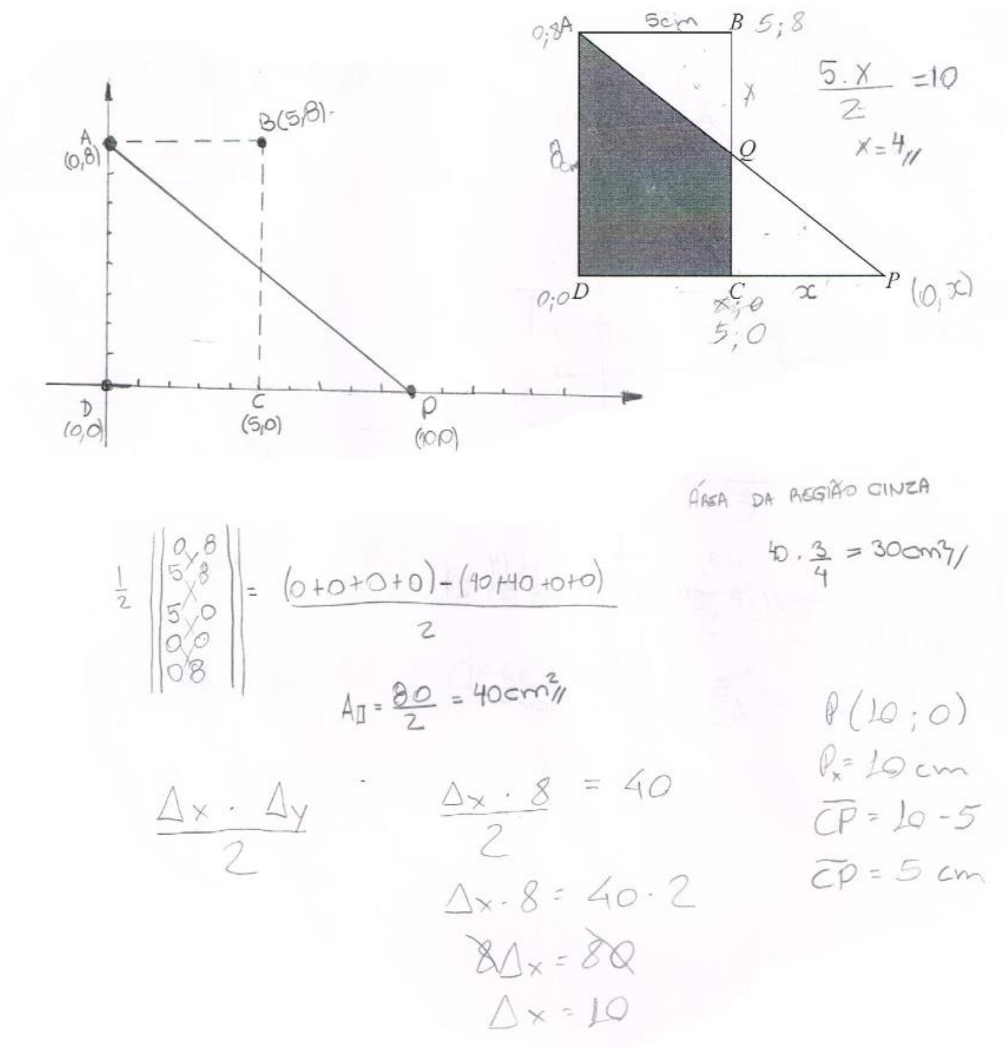


Fonte: Os autores (2016).

Este problema diferenciou-se também por fazer um procedimento inverso aos dos outros. Se retornarmos, veremos que primeiramente os alunos obtinham as medidas dos segmentos para posteriormente calcular a área. Aqui, inverte-se esta ordem e os alunos obtêm as áreas e, por fim, a medida dos segmentos.

Apresentamos agora na figura 62 o registro escrito feito pelo grupo que utilizou Geometria Analítica.

Figura 62 – Aula 08 –Atividade 07 – Solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

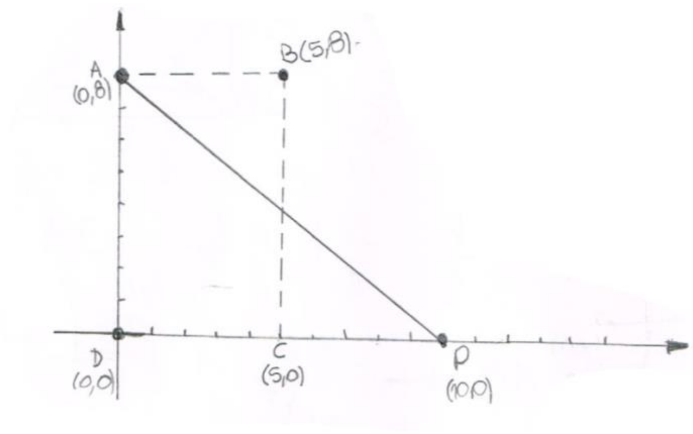
A apresentação dos alunos foi feita em PowerPoint, mas eles optaram por construir no quadro negro a figura e ir apontando passo a passo o que fizeram na própria figura.

Eles iniciam afirmando que *“A gente levou isso pro plano cartesiano e no plano cartesiano a gente definiu alguns pontos pro triângulo maior que seriam o ponto D, o ponto A, o ponto B e o ponto C e esse aqui seria o ponto P a distância que a gente gostaria de descobrir seria esta daqui que é a distância BC”.*

Feito isso, calcularam a área do retângulo utilizando a fórmula de Gauss. Seguindo daí eles passaram a utilizar os registros em Geometria Plana, não mais utilizam a figura esquematizada em Geometria Analítica e fizeram cálculos de área, utilizando fatos já conhecidos de Geometria Plana. Obtiveram *BQ* valendo *4cm* e, sendo *Q* o ponto médio de *BC*, concluíram que os triângulos *ABQ* e *CPQ* tinham a mesma área.

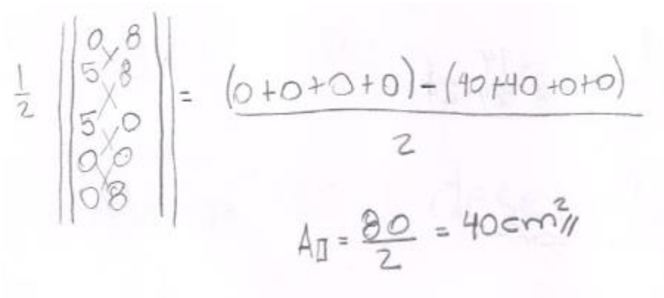
Logo a área do triângulo *APD* é igual à área do retângulo *ABCD*, o que os levou a calcular a medida do segmento *CP*. Estes alunos não conseguiram, portanto, se utilizar do registro de Geometria Analítica de maneira integral durante o processo de resolução. Note que, embora a esquematização da figura plana para a analítica tenha sido feita de forma correta, conforme figura 63, eles se utilizaram mais do plano cartesiano para obter apenas a área do retângulo ABCD, conforme cálculo mostrado na figura 64. As outras informações foram obtidas utilizando as fórmulas de Geometria Plana de área, como vemos na figura 65.

Figura 63 – Aula 08 – Atividade 07 – Parte da solução com Geometria Analítica



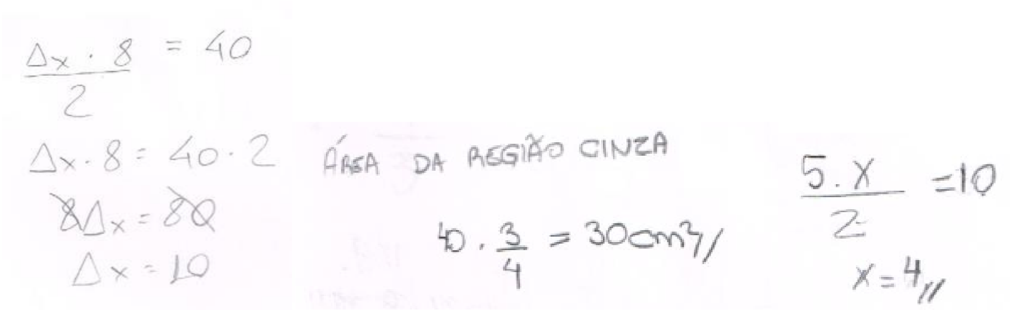
Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Figura 64 – Aula 08 – Atividade 07 – Outra parte da solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Figura 65 – Aula 08 – Atividade 07 – Última parte da solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Embora os alunos tenham obtido uma resposta correta, observamos um desvio em relação à proposta. Os alunos convertem momentaneamente o problema em outro, mas acabam voltando para a Geometria Plana logo em seguida. Duval (2011, p. 113) alerta a uma possível pane que possa ocorrer quando trabalhamos com a resolução de um problema. Ele afirma que “De um ponto de vista matemático, privilegiamos como situação de aprendizagem a resolução de problemas” e afirma que “a escolha dos problemas é feita em função dos objetos e propriedades matemáticas a descobrir e utilizar” e foi o que nós fizemos em nossa proposta de converter um registro em outro. Afirma ele, porém, que “em uma resolução de problemas as produções são globais, e elas envolvem uma parte implícita que podem variar consideravelmente, podendo ficar incompletas ou em pane”, o que levou os alunos a sistematicamente trocarem o registro utilizado.

Embora tivéssemos solicitado que os alunos continuassem a resolução utilizando Geometria Analítica, Duval (2011) afirma que

> [...] para analisar uma resolução de problemas, não podemos privilegiar o registro no qual fazemos os tratamentos matemáticos que resolvem o problema. A mobilização dos outros registros relativos ao dado problema, a maneira pela qual eles são representados é também essencial. (DUVAL, 2011, p. 116).

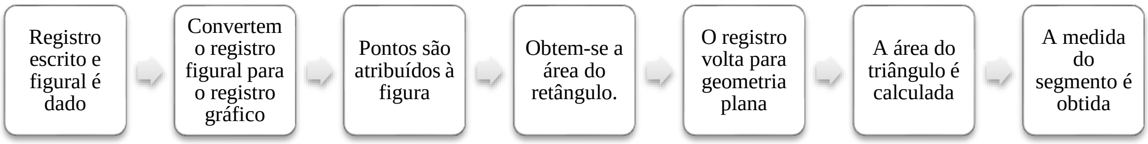
Acreditamos que o momento de pane, vivido pelos alunos, durante a resolução, fez com que partissem para um outro registro, abandonando, portanto, o analítico e mobilizando o registro de Geometria Plana em que as figuras têm sua área calculada como vimos na figura 65.

Deixamos que os alunos terminassem a atividade e, quando terminaram, relatamos à turma que a atividade não fora realizada como o previsto. Nesse caso, explicamos que uma opção possível seria traçando-se a reta que passa por A e Q, conhecidos e calculando sua intersecção P com o eixo das abscissas.

Pelo caráter peculiar que esta atividade teve, optamos por não fazer a votação, já que os alunos não conseguiram vivenciar a solução nos dois registros de maneira integral. Discutimos, portanto, a solução apresentada pelo professor em comparação àquela apresentada pelos dois grupos.

Apresentamos também na figura 66 o esquema de conversões feitas pelo grupo ao resolver a atividade.

Figura 66 – Aula 08 – Atividade 07 – Esquema de resolução utilizando Geometria Analítica



Fonte: Os autores (2016).

Cabe ressaltar aqui o expresso pelo aluno que afirmou que *"Eu acredito que a Geometria Plana te dá muito espaço pra induzir erro. Por exemplo, quando procura pela área tu supõe e palpita se o ponto fica no meio ou não. Enquanto em Geometria Analítica a gente trabalha com os vértices e tendo os valores a gente poderia colocar na equação e teria um valor coerente e justificado."*.

Este relato, em conjunto com a análise que fizemos sobre a questão da semelhança nos problemas de geometria apresentados, faz-nos entender cada vez mais o motivo de os alunos preferirem as soluções em Geometria Analítica.

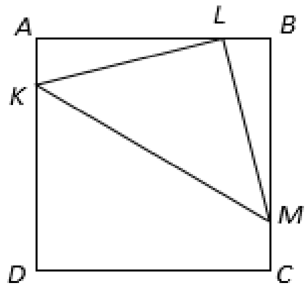
7.7 AULA 08 – ATIVIDADE 08 – RESULTADOS

A última apresentação, que termina nossa análise, foi sobre o seguinte problema, conforme figura 67.

Figura 67 – Aula 08 –Atividade 08

Atividade 08

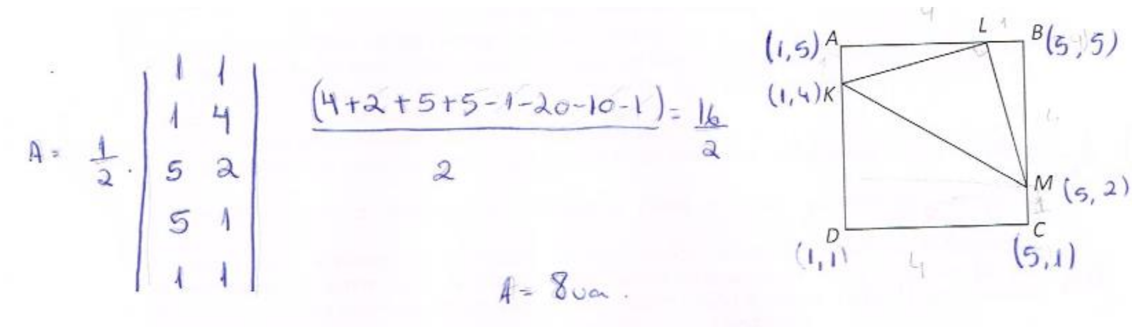
Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado de lado 4, *K* pertence ao lado *AD*, *L* pertence ao lado *AB*, *M* pertence ao lado *BC* e *KLM* é um triângulo retângulo isósceles, sendo *L* o ângulo reto. Determine a área do quadrilátero *CDKM* é



Fonte: OBM (2009).

O primeiro grupo a apresentar foi o do aluno M., utilizando Geometria Analítica e o grupo do aluno I. finalizou utilizando Geometria Plana. A solução apresentada pelo grupo do aluno M. está na figura 68.

Figura 68 – Aula 08 –Atividade 08 – Solução com Geometria Analítica



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

O grupo do aluno M. iniciou afirmando que *"Como a questão ele deu a distância nós assumimos que esta altura aqui era um pra que isso facilitasse o nossos cálculos"*, que é o segmento *MC* no polígono dado.

Observando a solução, verificamos que os alunos atribuíram pontos ao polígono desejado, partindo desta medida *MC,* mas não traçam o plano cartesiano. Além disso, não colocaram o ponto *(0,0)* em um dos pontos do polígono, iniciando a figura em *(1,1)*. Por fim, eles calcularam a área do polígono utilizando a Regra de Gauss e afirmando que *"Então pra* *fazer o cálculo a gente usou determinante pegando os pontos (1,1) (1,4), (5,2) e (5,1) que eram os pontos do quadrilátero e daí a gente chegou na área de oito unidades de área"*.

Vemos que os alunos assumiram como verdadeira uma informação, atribuindo um valor, isto é, dizendo que o segmento *MC* mede *1*. Durante o processo de apresentação desta solução, a aluna comentou também que *"a distância não importava quais seriam os números a gente chegaria na área."*

Durante as Aulas 03 a 05, nós verificamos que a execução desta tarefa, apenas literalmente com a utilização de Geometria Analítica, é demasiado extensa e exige muito algebrismo. Ao tratar das investigações matemáticas, Ponte (2006) afirma que:

> É que, por vezes, conjecturas aparentemente simples, formuladas até por alunos dos níveis elementares, escondem processors de prova bastante complexos, mesmo para o professor. Este tem de avaliar rapidamente se será apropriado parar para pensar ou deixar isto para um momento posterior. (PONTE, 2006, p. 50).

Assim, quando os alunos trabalhavam com este problema, já havíamos notado que seria muito custoso tratá-lo algebricamente sem supor um valor para as coordenadas e assumir que o segmento *AK* mede o mesmo que *MC*. Decidimos, então, apoiá-los em sua conjectura de que uma das medidas deveria ser indicada e de que estes segmentos têm a mesma medida, para que o problema pudesse ser de fato realizado.

Apesar de acreditarmos que os alunos têm condições de compreender a solução e realizá-la, optamos por aceitar estas conjecturas sem prova, pois nosso objetivo maior é verificar como as conversões são feitas. Poderíamos ter dado no problema estas informações, a fim de que os alunos pudessem agir mais rapidamente sem criar conjecturas que causassem tanto trabalho.

Estando já na última apresentação, verificamos que o processo de resolução e conversões foi o mesmo apresentado nas atividades 04 e 06, conforme figura 69.

Figura 69 – Aula 08 –Atividade 08 – Esquema de resolução utilizando Geometria Analítica

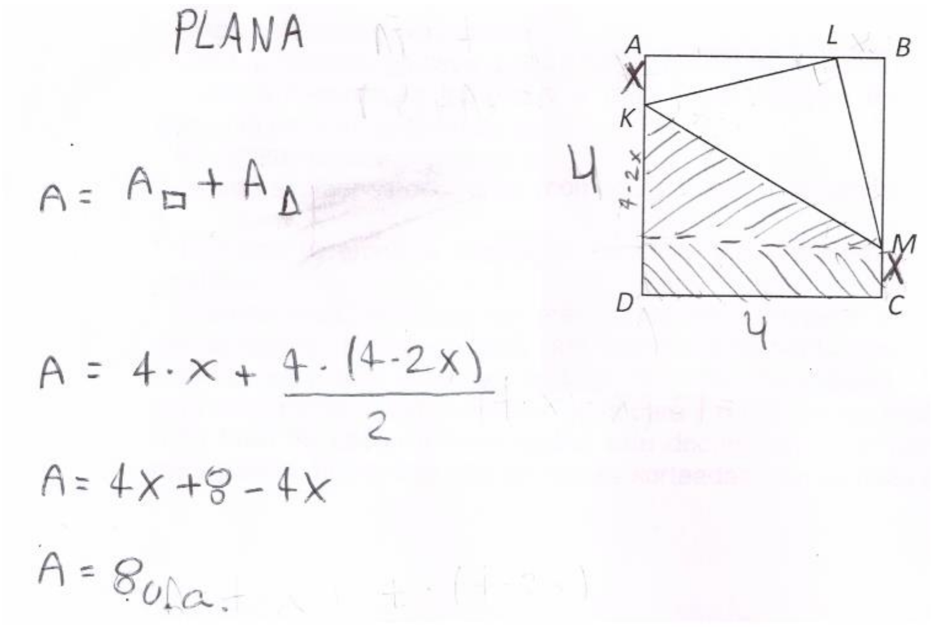
Fonte: Os autores (2016).

Não é fato aleatório que isso ocorra. Reconhecer e marcar pontos no gráfico é o primeiro de três tratamentos previstos por Duval quando tratamos com a linguagem gráfica. Esta primeira abordagem é denominada “abordagem ponto a ponto” e, segundo Duval (2011, p. 98), “É por meio desta abordagem que são introduzidas e definidas as representações gráficas [...] Favorece ainda quando se quer LER as coordenadas de algum ponto interessante”. Os alunos convertem então a informação do triângulo para o plano cartesiano por reconhecerem em um ponto sua respectiva coordenada.

As outras duas abordagens tratadas por Duval são a abordagem por extensão do traçado – quando queremos determinar uma curva que passa por pontos específicos do plano e inferimos que esta acaba por passar por infinitos pontos – e a abordagem global – que é quando atribuímos relações algébricas a regiões do plano cartesiano. As Atividades 03, 05 e 07 preveem tratamentos do tipo extensão do traçado, pois os alunos traçam uma reta que contém alguns dos pontos obtidos.

A última apresentação, utilizando Geometria Plana, teve o registro escrito conforme figura 70.

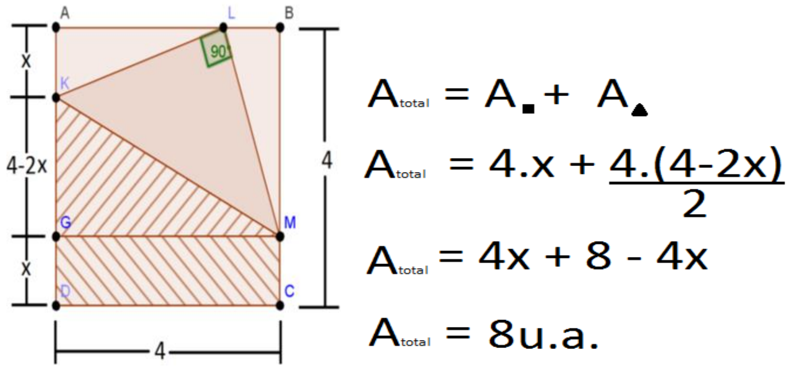
Figura 70 – Aula 08 – Atividade 08 – Solução com Geometria Plana



Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Para a apresentação em PowerPoint o grupo manteve esta mesma figura construindo-a no Geogebra. Na figura 71 mostramos um print screen da tela de apresentação.

Figura 71 – Aula 08 –Atividade 08 – Print screen de uma parte da solução com Geometria Plana

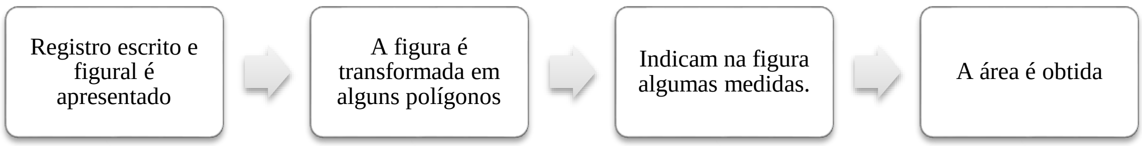


Fonte: Arquivo dos autores (2016).

Para a solução relataram que "*Nós dividimos o quadrilátero em duas áreas e duas figuras planas um retângulo BMCD e um triângulo retângulo KBM*". Continuando, afirmaram que "*O segundo passo foi botar as medidas*" e finalizaram dizendo que "*Aqui está o cálculo que nós fizemos somando a área do triângulo mais a área do retângulo e o resultado deu oito unidades de área, confirmando o que a colega anterior fez*".

O esquema de conversões foi o que elaboramos na figura 72.

Figura 72 – Aula 08 – Atividade 08 – Esquema de resolução utilizando Geometria Plana



Fonte: Os autores (2016).

Podemos notar, pelo esquema que apresentamos, que a sistemática foi a mesma que a das Atividades 04 e 06. As figuras são decompostas e recompostas a fim de construir outras. Alguns segmentos tomam medidas e a área é calculada. Já relatamos isso em todas as outras atividades, mas reafirmamos o que Duval (2011, p. 90) enfatiza "A desconstrução dimensional é onipresente em toda definição, em todo raciocínio como em toda explicação em relação às figuras em Geometria".

Verificamos também que este grupo não supôs medida alguma para a resolução da atividade. Por outro lado, fica evidente que eles não demonstram que os triângulos *KAL* e

LBM são congruentes. A demonstração deste fato não é tão extensa em Geometria Plana quanto em Geometria Analítica e poderia constar na resolução.

Acreditamos que os alunos consideraram que o fato de que as figuras parecerem congruentes na figura era suficiente para deduzir que eram congruentes de fato. De fato, Duval (2011, p. 84) afirma que “Tratando-se de resolver um problema, de demonstrar ou aplicar a geometria à realidade, as figuras permitem ver”, mas isso não implica que o simples fato de ver garante a congruência.

Tirando esta ausência, a resolução é rápida e chega ao mesmo valor obtido pelos colegas anteriores.

Ao discutirmos sobre a preferência dos colegas, nove deles preferiram a solução por Geometria Analítica e catorze deles por Geometria Plana. Esta foi a única vez que os alunos optaram pela segunda e não pela primeira opção. Isso fica evidente quando um aluno comenta que “*A dificuldade da Geometria Analítica é que tu tem de chegar à conclusão que tu tem que decidir os ponto. Se não tem o raciocínio de decidir qual ponto é qual e quanto vale não tem como fazer e pode dificultar.”*, indicando que os ouvintes ficaram inseguros com a solução proposta, já que esta parte do problema não foi devidamente provada.

Ao questionarmos a solução por Geometria Plana, o aluno relatou um fato que também merece destaque: “*Eu acho muito mais fácil fazer por plana porque se tu olhar bem na figura é a metade da área no exercício e daí por geometria plana é muito mais simples de pensar e só raciocinar e fazer a conta direto*”. Ele reforça aqui algo que o grupo, que fez por plana, não chegou a informar, mas que analisamos logo acima: o aluno vê que a área é metade do quadrado, assim como o grupo apresentador também viu triângulos congruentes. A figura permite este tipo de suposição, mas o fato de ver não configura uma demonstração rigorosa dos fatos. Faltou neste problema, portanto, o que Ponte (2006, p. 41) afirma ser a “importância da justificação matemática de suas conjecturas”. Note que abrimos mão desta justificativa na resolução por Geometria Analítica, por questões de tratamento excessivamente trabalhoso. Mas a resolução em Geometria Plana poderia ter se apresentado com uma justificativa melhor.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste espaço da pesquisa olhamos para nossos objetivos e para nossa pergunta norteadora, com o intuito de verificar se nossos objetivos foram de fato alcançados e para responder nosso questionamento, utilizando nossa análise de dados feita.

Tínhamos em mente quatro objetivos que serão novamente enumerados aqui e discutidos um por um:

1. Verificar se a conversão entre registros de Geometria Plana e Geometria Analítica faz parte dos livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio.

Para nosso primeiro objetivo, verificamos que os cinco livros didáticos analisados pouco exploram a possibilidade de conversão entre registros de Geometria Plana e Geometria Analítica em seus conceitos, resultados e exemplos. A conversão entre Geometria Analítica e Geometria Plana, que poderia ser abundante, é pouco explorada em suas atividades e, em alguns casos, somente como um aprofundamento. Nos cinco livros analisados em nossa pesquisa, existem 517 atividades sobre os tópicos estudados e em apenas 4 atividades a conversão entre registros aparece. Esta é uma taxa de incidência muito baixa e reflexo de uma possível escolha metodológica dos livros sobre a não utilização da conversão entre registros.

Verificando a importância do livro didático como um objeto de fácil acesso, salientamos que o espaço para atividades de conversão deveria ser maior no escopo do livro e maior ainda em seus exercícios. Duval (2012) aponta nesta direção ao afirmar que:

> [...] o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou por esta compreensão. (DUVAL, 2012, p.284).

Este trabalho mostrou também que as poucas possibilidades de conversão, nas atividades dos livros didáticos analisados, não sugerem mobilização entre registros de Geometria, sendo induzidas pela edição do livro/autor, não desafiando o aluno, portanto, a utilizar mais de um registro geométrico.

Acreditamos que é necessário que o aluno faça a conversão sem a indução de um roteiro, tomando para si o protagonismo em atividades do gênero. Para isso julgamos necessária a proposição de atividades em que o aluno seja instigado a realizá-las de mais de uma maneira, utilizando mais de um registro.

2. Elaborar, sob o ponto de vista da Teoria de Registros de Representação Semiótica, uma sequência didática que se utilize da conversão de registros entre Geometria Plana e Geometria Analítica e que exponha ao aluno esta possibilidade.

Para este objetivo, elaboramos a sequência estruturando-a como um momento inspirado na Investigação Matemática de Ponte. Optamos por esta abordagem, baseados no que Ponte (2006) relata:

> Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes da investigação. (PONTE, 2006, p.23).

Falamos muito em mobilização de registros em nosso texto e podemos falar também de outro tipo de mobilização que é esta que Ponte (2006) traz. A mobilização de recursos cognitivos apresentados pelos alunos nas etapas também se mostrou fundamental.

Quando dividimos as aulas nas etapas, de “Exploração e Formulação”, “Conjecturas, Testes e Reformulações” e “Justificação e Avaliação” tínhamos como objetivo tornar a execução desta sequência didática um momento ímpar, para que o aluno mobilizasse seus recursos, a fim de discutir e aprimorar suas aprendizagens em Matemática.

Consideramos que esta elaboração nos permitiu atingir este segundo objetivo, já que o educando pode investigar as atividades, utilizando conceitos matemáticos prévios com uma nova abordagem. disso, o fato de os alunos terem como prática anterior da pesquisa científica colaborou para o bom andamento da execução da sequência.

3. Aplicar esta sequência didática em turmas de 3º ano de uma escola pública de Ensino Médio Técnico Integrado.

Este objetivo, de ordem mais prática, foi integralmente atingido sem problemas. Os alunos aceitaram a proposta e mantiveram-se focados em sua realização. Acreditamos que isso está ligado a uma série de fatores, mas um deles se mostra mais evidente: o fato de que os alunos já conhecem os procedimentos de pesquisa científica trouxe agilidade ao andamento das aulas.

Salientamos, porém, que nossa sequência didática foi elaborada para nossa turma. Ela pode exigir adaptações em outras aplicações. Sugerimos possíveis adaptações em nosso Produto de Dissertação, que é o nosso Anexo C, dentre as quais estão a possibilidade de um tempo maior e algumas atividades extras.

4. Analisar a produção dos alunos e avaliar se a sequência didática proposta contribui para a compreensão da possibilidade de resolução de atividades, utilizando uma variedade de registros.

Este objetivo está intimamente ligado à nossa questão norteadora. Nós conseguimos analisar os dados sob a ótica da Teoria de Registros de Duval e avaliamos que esta análise pode ser feita porque a seleção das atividades mostrou – pelas resoluções dos alunos – ter, na maioria dos casos, uma sequência de resolução semelhante.

Consideramos, porém, que a Atividade 8 pode ser reformulada de modo a facilitar o trabalho dos alunos e a análise posterior. Já relatamos as dificuldades que residem no fato de uma das medidas não ter sido indicada – mesmo que isso não interviesse no resultado final.

Pode-se ter uma análise diferente quando tratamos o problema atribuindo um valor à variável desconhecida neste problema. Mas acreditamos que a única alteração significativa, na análise, seria esta, de valoração desta variável, já que as outras soluções apresentaram esquemas muito semelhantes.

Nosso objetivo de analisar e avaliar a sequência foi, portanto, atingido em sua totalidade, o que nos leva a ter mais argumentos para responder nossa questão norteadora.

Quando nos questionamos sobre **“Como a conversão de registros entre Geometria Plana e Geometria Analítica ocorre quando atividades de Geometria são propostas?”** a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval nos dava indício de que, para responder a esta questão, deveríamos nos preocupar mais intensamente sobre quais foram os processos utilizados para sua resolução do que com a solução propriamente dita. Afirmamos isso baseados no que Duval (2011) relata ao escrever que:

> Do ponto de vista matemático, o que analisamos é sempre a resolução de um problema dado e, para isso, partimos de sua solução para explicitar os diferentes conhecimentos que permitem resolvê-lo [...] Do ponto de vista cognitivo, o que analisamos são os processos que permitem reconhecer por si só os conhecimentos matemáticos a serem empregados no quadro de problemas, qualquer ele seja. Pois não serve de nada se lhe explicamos a solução se você não vê como poderia pensar sobre ele. (DUVAL, 2011, p.41).

Preocupamo-nos, portanto, em analisar quais foram os procedimentos utilizados pelos alunos, durante as soluções, que permitiram não apenas que os problemas fossem resolvidos, mas também que fossem resolvidos, utilizando pelo menos de duas maneiras.

Para analisar estes procedimentos, utilizando problemas, Duval (2011) também nos guiou. Ao falar sobre a resolução de problemas em ambientes que se utilizam mais de um registro, afirma que, para realizar esta análise

> [...] uma visão do conjunto dos pares possíveis de registros que a atividade matemática pode mobilizar se revela indispensável. As representações a mobilizar e as transformações a efetuar de uma resolução de problemas podem recorrer a vários registros. (DUVAL, 2011, p.105).

O leitor deve ter visto que nesta proposta tivemos, portanto, dois tipos de conversão. O primeiro tipo ocorria no momento em que os alunos apresentavam as atividades, utilizando Geometria Plana, isto é, semelhança de triângulo, teorema de Pitágoras e fórmulas de áreas, por exemplo. Eles convertiam o registro escrito para o registro figural, operavam na forma figural, com decomposições da figura e efetuavam o registro algébrico.

Olhando os esquemas que apresentamos durante as análises, verificamos que este procedimento foi padrão em todas as atividades. Note que aqui o par de mobilização Plana/Analítica não ocorria, mas as conversões Escrito/Figural/Algébrico ocorreram sempre, indicando que a mobilização entre registros é uma constante quando resolvemos problemas.

Já o segundo tipo de conversão é o que nos motivou à pesquisa. A conversão Plana/Analítica envolveu também uma ordem padrão de procedimentos, com uma exceção. Os alunos recebiam o registro escrito, convertiam-no para o registro Analítico – gráfico – que utilizava o plano cartesiano, equações de retas e a Regra de Gauss e finalizavam o problema.

Aqui reside nossa principal resposta à questão norteadora. Os alunos convertem o registro de Geometria Plana para Geometria Analítica nestes problemas de Geometria primeiramente convertendo o registro figural dado para o plano cartesiano, atribuindo vértices aos polígonos, obtendo equações para curvas, quando necessário, ou calculando áreas a menos que os procedimentos entrem em pane.

Seguem, portanto, o esquema de registros Escrito/Figural/Gráfico/Algébrico (nesta ordem) quando não falha. Quando falha, ou seja, não estabelece relações que permita continuar com aquele registro, ele acaba abrindo uma conversão extra Escrito/Figural/Gráfico/Figural/Algébrico.

É importante notar que Duval, como já relatamos ao tratar da Atividade 07, já previa que o sistema pudesse entrar em pane. Isso não significa, de forma alguma, que a resolução esteja errada. Indica que o grupo prefere, por questões como economia de tratamento, por exemplo, se utilizar de outro registro para resolver uma atividade.

A vantagem de se trabalhar em ambientes de mais de um registro é que ele pode possibilitar ao aluno que ele transfira o que sabe em um registro para o outro. Tínhamos isso em mente ao propor estas atividades e, ao mapear os registros utilizados, verificamos que esta identificação, do tipo de registro utilizado, conforme Duval (2011) relata,

> [...] permite identificar as variáveis cognitivas que jogam sobre a compreensão ou incompreensão da matemática e sobre as capacidades de transferir os conhecimentos matemáticos para outras situações diferentes daquelas nas quais foram introduzidas. (DUVAL, 2011, p. 105).

Assim, ao mapearmos a mobilização, que ocorreu entre os registros de Geometria Plana/Analítica, não apenas resolvemos exercícios, mas também mostramos a possibilidade de compreendermos – no nosso trabalho – um objeto geométrico em ambientes distintos.

Esta é a nossa reposta à questão adicional, portanto. Quando nos questionamos sobre **"Como a realização de atividades em Geometria, por meio do emprego de vários registos de representação, pode contribuir para a Educação Básica?"** afirmamos, com base no que analisamos, que a realização deste tipo de atividades promove uma consciência maior do que Duval (2011, p. 116) relata ao dizer que "em matemática, não pensamos jamais em um único registro, mas em vários ao mesmo tempo, mesmo se as produções vão privilegiar um único registro".

Para resolvermos problemas, portanto, esta variabilidade se mostrou benéfica – por exemplo, na Atividade 07 – pois proporciona ao aluno um escape quando o sistema entrar em pane, por exemplo.

Para nós, portanto, não basta mobilizar registros através de conversões de maneira inconsciente. Acreditamos que tornar público à Educação Básica esta variabilidade de registros amplia ao educando as possibilidades de que ele obtenha sucesso ao realizar atividades matemáticas.

É importante salientar também que os alunos estiveram expostos a um ambiente de Investigação Matemática que proporciona ao aluno um espaço de discussão e descobertas matemáticas. Estas descobertas possibilitaram que os alunos pudessem entender também a importância da justificação dentro das Atividades em Matemática, como um meio de dar um embasamento maior aos resultados encontrados, mesmo que alguns resultados estivessem explícitos.

Finalizo como iniciei, em primeira pessoa. Como professor, a oportunidade de fazer esta pesquisa me proporcionou um novo mundo de possiblidades. Ao mesmo tempo em que proponho coisas novas e novas vivências em Matemática, para meus alunos, minha compreensão de como a aprendizagem em Matemática vem ocorrendo, me empolga e me incentiva a sempre continuar melhorando. Reside aqui talvez a grandiosidade desta pesquisa para mim: não desistir de ensinar Matemática, porque as possibilidades são incontáveis.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C. (Org.). **A Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 99-112. Disponível em <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf>. Acesso em: 20 out. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília. MEC, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 20 Out. 2016.

CHOPPIN, Alain. **O historiador e o livro escolar**. Tradução de Maria Helena Camara Bastos. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/asphe/article/view/30596/pdf>. Acesso em: 20 out. 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Contexto e Aplicações.** São Paulo: Ática, 2014, v. 3.

DE LEONARDO, Fabio Martins. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2013, v. 3.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 20 out. 2016.

___________. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

___________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

___________. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011a. DOI: 10.5007/1981-1322. 2011v6n2p96. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2011v6n2p96/21794>. Acesso em: 20 out. 2016.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Iniciação à investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, São Paulo: Autores associados, 2006.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (Orgs.). **Métodos de Pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 20 out. 2016.

IEZZI, Gelson et al. **Ciência e Aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2013, v. 3.

MEC – FNDE. **Resolução n°42, de 28 de agosto de 2012.** Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para a educação básica. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 29 ago. 2012. Seção 1. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/fndelegis/action/UrlPublicasAction.php?acao=abrirAtoPublico&sgl_tipo=RES&num_ato=00000042&seq_ato=000&vlr_ano=2012&sgl_orgao=CD/FNDE/MEC>. Acesso em: 20 out. 2016.

NERY, Chico A. Geometria Analítica no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, n.67, p.19-20. Quadrim, 2008.

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <www.obm.org.br>. Acesso em: 30 out. 2016.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. São Paulo: Moderna, 2013, v. 3.

PAULA, Adnilson Ferreira de. **Mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de álgebra em estudos da Geometria Analítica**. 2011. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMGS), Campo Grande, 2011. Disponível em: <https://sistemas.ufms.br/sigpos/portal/trabalhos/download/1830/cursoId:91>. Acesso em: 20 out. 2016.

PONTE, João Pedro da. **Estudos de caso em educação matemática.** Bolema, 25, 2006, p.105-132. Disponível em <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo%20de%20caso).pdf.> Acesso em: 20 out. 2016.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** 1. ed. Belo Horizonte/MG: Autêntica, 2005, p. 25-53.

SILVA, Sérgio Ferreira. **Geometria Analítica**: caminhos para aprendizagem. 2015. 81 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica (PUC), Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25720/25720.PDF>. Acesso em: 20 out. 2016.

SOUZA, Joamir R. **Novo Olhar**. São Paulo: FTD, 2013, v. 3.

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ______________________________________, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Possibilidades em Conversão de Registros entre Geometria Plana e Geometria Analítica**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Platão Gonçalves Terra Neto. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela Profª Drª Luisa Rodriguez Doering, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone 51-33086218 ou e-mail ldoering@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

1. Verificar se a conversão entre registros de Geometria Plana e Geometria Analítica faz parte dos livros didáticos de Terceiro Ano de Ensino Médio.
2. Elaborar, sob o ponto de vista da Teoria de Registros de Representação Semiótica, uma sequência didática, que se utilize da conversão de registros entre Geometria Plana e Geometria Analítica e que exponha ao aluno esta possibilidade.
3. Aplicar esta sequência didática em turmas de terceiro ano de uma escola pública de Ensino Médio Técnico Integrado.
4. Analisar a produção dos alunos e avaliar se a sequência didática proposta contribuiu para a compreensão de objetos geométricos através da variedade de registros.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no endereço Rua Inconfidentes, n°395 /telefone 51-35842000 / e-mail platao.neto@liberato.com.br.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 18 de maio de 2016.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: Luisa Rodriguez Doering

ANEXO B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA

<u>AULA 01</u>

<u>Atividade 01</u>

<u>Orientações</u>

* Esta atividade inicial está dividida em duas partes (**Parte 1** e **Parte 2**) e tem como objetivo introduzir uma proposta de trabalho com Geometria;
* Os passos para a execução da **Parte 1** da atividade estão bem detalhados;
* O professor executará os **passos** da **Parte 1** em conjunto com a turma;
* Ao final da execução dos **passos** da **Parte 1**, você deve responder aos **Questionamentos;**
* Todas as respostas dos **Questionamentos** devem ser justificadas;
* Após o registro das respostas dos **Questionamentos**, o professor ajudará na execução da **Parte 2**, juntamente com a turma.
* Você deve, neste documento, registrar com caneta tudo o que for feito durante a execução da Atividade 01;
* Você pode trabalhar com o colega de classe. O registro, porém, deve ser individual e cada aluno entregará ao final uma cópia deste documento ao professor.

Parte 1 – Construa um plano cartesiano e siga os **passos** abaixo:
a) marque os pontos com as seguintes coordenadas: A(0,0), B(0,5) e C(20,0);

b) trace e determine a equação da reta r que passa pelos pontos B e C;

c) trace e determine a equação da reta s bissetriz dos quadrantes ímpares;

d) determine algebricamente e marque no gráfico o ponto P de intersecção entre as retas r e s.

e) trace e determine as projeções M e N de P sobre os eixos x e y, respectivamente.

Questionamentos:
a) Que figura é formada pelos vértices M, P, N e A?

Resposta:

b) Qual á a área do triângulo ABC?

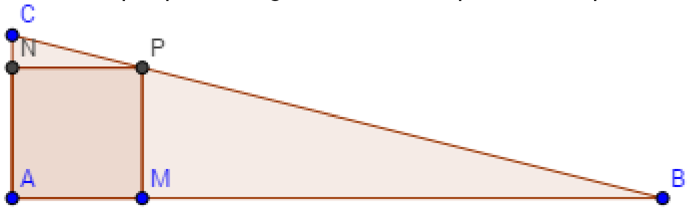
Resposta:

c) Qual é a área do quadrilátero MPNA?

Resposta:

Parte 2 - Resolva o problema abaixo utilizando Geometria Plana:

(OBM – 1999 – Adaptada) Questão nº15 – NÍVEL J – No triângulo retângulo ABC da figura abaixo está inscrito um quadrado. Se AB = 20 e AC = 5, que porcentagem a área do quadrado representa da área do triângulo ABC?



AULA 02

Atividade 02

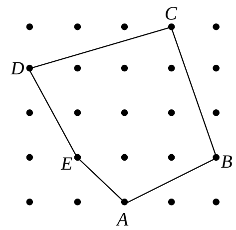
Orientações

* Esta atividade também está dividida em duas partes (**Parte 1** e **Parte 2**);
* Neste caso, não existem passos para a execução e o professor não realizará as partes em conjunto com a turma;
* Você deve, neste documento, registrar com caneta tudo o que for feito durante a execução da Atividade 02;
* Você pode trabalhar com o colega de classe. O registro, porém, deve ser individual e cada aluno entregará ao final uma cópia deste documento ao professor;
* Não hesite em tirar dúvidas com o professor caso não tenha compreendido o que deve ser feito. É importante salientar que os conteúdos necessários para a realização da Atividade já foram trabalhados em sala de aula.

Parte 1 – Construa um plano cartesiano e determine a área do polígono formado pelos vértices A(2,0) , E(1,1), D(0,3), C(3,4) e B(4,1).

Parte 2 - Resolva o problema abaixo utilizando Geometria Plana:

(OBM – 2004 – Adaptada) Questão n° 12 – NÍVEL 1 – Na organização retangular de pontos da figura abaixo, a distância entre pontos vizinhos em uma mesma linha ou coluna é igual a 1 cm. Determine a área do pentágono *ABCDE* em cm^2



AULA 03

Orientações

* Nestas três aulas, daremos prosseguimento ao nosso trabalho utilizando duas geometrias;
* Vocês devem organizar na turma 5 grupos com 4 integrantes cada e 1 grupo com 5 integrantes cada;
* Após a escolha do grupo, escolham um nome para o grupo;
* Escreva nos espaços indicados o nome dos **integrantes do grupo** e o **nome do grupo**;
Nome do Grupo

Integrante 01	
Integrante 02	
Integrante 03	
Integrante 04	
Integrante 05	

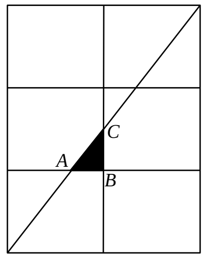
* Neste documento, você terá seis atividades. O professor sorteará três atividades para que cada grupo resolva utilizando Geometria Plana ou Geometria Analítica. Anote no espaço abaixo quais são as atividades que devem ser realizadas pelo seu grupo e qual deve ser a Geometria utilizada:

( ) Atividade 03 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica
( ) Atividade 04 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica
( ) Atividade 05 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica
( ) Atividade 06 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica
( ) Atividade 07 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica
( ) Atividade 08 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

* Você deve, neste documento, registrar com caneta tudo o que for feito durante a execução das Atividades de seu grupo;

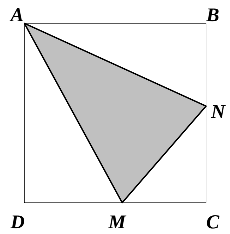
<u>Atividade 03</u>

(OBM – 2003 – Adaptada) Questão n° 1 – NÍVEL 2 – Na malha quadrada abaixo, há 6 quadrados de lado 30 cm. Determine a área do triângulo *ABC*.



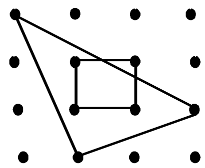
<u>Atividade 04</u>

O quadrilátero *ABCD* é um quadrado de área 4m². Os pontos *M* e *N* estão no meio dos lados a que pertencem. Determine a área do triângulo em destaque, em m²,



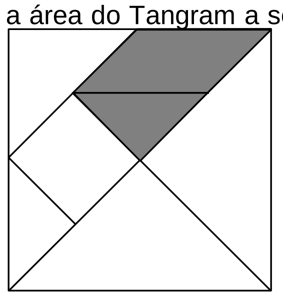
<u>Atividade 05</u>

Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. Determine a área da região comum ao triângulo e ao quadrado.



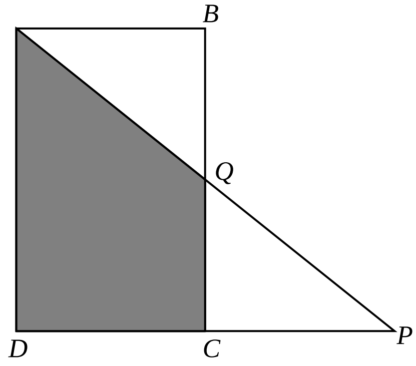
<u>Atividade 06</u>

Questão n° 18. – NÍVEL 1 – A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é 64 cm², qual é a área, em cm², da região sombreada?



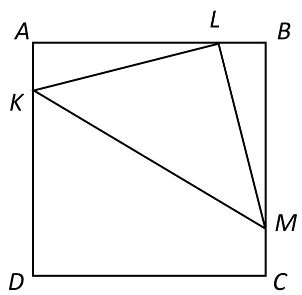
Atividade 07

(OBM – 2009 – Adaptada) Questão n°13 – NÍVEL 1 – Na figura, *P* é um ponto da reta *CD*. A região cinza é comum ao retângulo *ABCD* e ao triângulo *ADP*. Se *AB* = 5 cm, *AD* = 8 cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância *PC*?



Atividade 08

(OBM – 2009 – Adaptada) Questão n°8 – NÍVEL 3 – Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado de lado 4, *K* pertence ao lado *AD*, *L* pertence ao lado *AB*, *M* pertence ao lado *BC* e *KLM* é um triângulo retângulo isósceles, sendo *L* o ângulo reto. Determine a área do quadrilátero *CDKM* é



AULAS 04 E 05

Orientações

* Tendo resolvido as três Atividades propostas pelo seu grupo, você deve resolver nos espaços abaixo as mesmas Atividades utilizando a outra Geometria.
* Já tendo resolvidas as Atividades de duas maneiras diferentes, você deve, em grupo, organizar uma **Apresentação** para a turma sobre a primeira e a segunda Atividades sorteadas na AULA 03.

Orientações para a **Apresentação**:

* A apresentação deve conter cartazes ou Power Point;
* Cada apresentação deve conter todos os passos de resolução e a justificativa de cada passo.
* Cada apresentação tem, no máximo dez minutos, com direito a mais cinco minutos de pergunta no final, totalizando quinze minutos;
* As apresentações ocorrerão nos dias 27 e 28/06;
* As apresentações ocorrerão em ordem crescente de Atividade, começando com a Atividade 3;
* Primeiro veremos a resolução em Geometria Plana e depois veremos em Geometria Analítica;
* Quando uma atividade for concluída, os dois grupos debaterão sobre as vantagens e desvantagens de determinada resolução. Este debate deverá versar sobre o tratamento das informações e suas eventuais facilidades ou dificuldades. Após o debate, faremos uma votação para eleger a Geometria mais indicada para a resolução da Atividade.
* Ao **final** da última apresentação, este documento deve ser entregue ao professor, com a resolução completa das três atividades sorteadas com as duas Geometrias.

AULAS 06, 07 E 08

Aulas dedicadas as apresentações

ANEXO C – PRODUTO DA DISSERTAÇÃO – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Durante nossa pesquisa, elaboramos uma sequência didática. Em nossa sequência didática, possibilitamos um momento em que alunos de terceiro ano de ensino médio pudessem resolver problemas de Geometria, extraídos do arquivo de provas da OBM, utilizando registros de Geometria Plana e de Geometria Analítica.

Esta sequência didática foi aplicada e analisada a luz da Teoria de Registros de Duval. Aqui, disponibilizamos a sequência didática com alguns ajustes ao profissional que queira utilizá-la. Sugerimos, baseados em nossa aplicação, um tempo de pelo menos oito aulas (consideramos cada aula como um período).

Ao final, sugerimos mais quatro exercícios que podem ser resolvidos utilizando as duas Geometria, extraídos também do arquivo de provas da OBM, para o leitor que tiver interesse ou necessidade ao utilizá-la

AULA 01

A Aula 01 é dividida em duas partes: na primeira parte o professor sugere um problema de Geometria Analítica e sugere que os alunos sigam 5 passos a fim de responder 3 questionamentos. Na segunda parte, o professor sugere o mesmo problema, solicitando que os alunos o resolvam utilizando Geometria Plana. Abaixo sugerimos uma estrutura de apresentação para os alunos desta atividade.

Orientações para os alunos:

1) Esta atividade inicial está dividida em duas partes (**Parte 1** e **Parte 2**) e tem como objetivo introduzir uma proposta de trabalho com Geometria;

2) Os passos para a execução da **Parte 1** da atividade estão bem detalhados;

3) O professor executará os **passos** da **Parte 1** em conjunto com a turma;

4) Ao final da execução dos **passos** da **Parte 1**, você deve responder aos **Questionamentos;**

5) Todas as respostas dos **Questionamentos** devem ser justificadas;

6) Após o registro das respostas dos **Questionamentos**, o professor ajudará na execução da **Parte 2**, juntamente com a turma.

7) Você deve, neste documento, registrar com caneta tudo o que for feito durante a execução da Atividade 01;

8) Você pode trabalhar com o colega de classe. O registro porém deve ser individual e cada aluno entregará ao final uma cópia deste documento ao professor – opcional.

Parte 1 – Construa um plano cartesiano e siga os **passos** abaixo:

a) marque os pontos com as seguintes coordenadas: A(0,0), B(0,5) e C(20,0);

b) trace e determine a equação da reta r que passa pelos pontos B e C;

c) trace e determine a equação da reta s bissetriz dos quadrantes ímpares;

d) determine algebricamente e marque no gráfico o ponto P de intersecção entre as retas r e s.

e) trace e determine as projeções M e N de P sobre os eixos x e y, respectivamente.

Questionamentos da Parte 1:

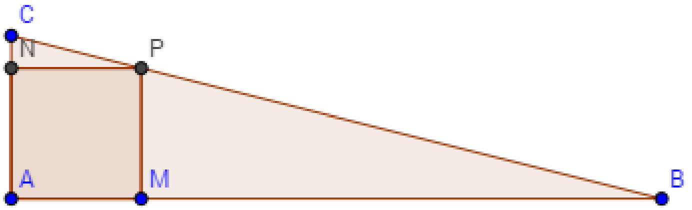
I) Que figura é formada pelos vértices M, P, N e A?

II) Qual á a área do triângulo ABC?

III) Qual é a área do quadrilátero MPNA?

Parte 2 - Resolva o problema abaixo utilizando Geometria Plana:

No triângulo retângulo ABC da figura abaixo está inscrito um quadrado. Se AB = 20 e AC = 5, que porcentagem a área do quadrado representa da área do triângulo ABC?



É interessante que ao final desta aula o professor discuta com a turma sobre as dificuldades e facilidades de resolver a atividade de uma maneira ou outra. Além disso é importante que o professor verifique se todos os alunos conseguem reconhecer que os dois problemas tratam da mesma situação, porém, escritos de maneiras distintas.

AULA 02

Após a primeira vivência com atividades resolvidas de duas maneiras, é hora de deixar os alunos tentarem, sem ajuda do professor, resolver uma atividade de duas maneiras. Para a Aula 02, sugerimos um mesmo problema escrito de duas maneiras distintas: uma com Geometria Plana e a outra com Geometria Analítica.

Além de resolver a atividade sozinhos, esta aula não prevê uma sequência de passos que levam a resposta, como fizemos na Aula 01. Colocamos, logo abaixo uma sugestão de estrutura e Orientações para a realização desta atividade. Convém relembrar que para a realização destas atividades, o aluno já deve ter conhecimento prévio de cálculo de áreas utilizando Geometria Analítica.

Orientações para os alunos

1) Esta atividade também está dividida em duas partes (**Parte 1** e **Parte 2**);

2) Neste caso, não existem passos para a execução e o professor não realizará as partes em conjunto com a turma;

3) Você deve, neste documento, registrar com caneta tudo o que for feito durante a execução da Atividade 02;

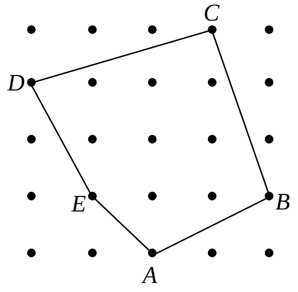
4) Você pode trabalhar com o colega de classe. O registro, porém, deve ser individual e cada aluno entregará ao final uma cópia deste documento ao professor – opcional;

5) Não hesite em tirar dúvidas com o professor caso não tenha compreendido o que deve ser feito. É importante salientar que os conteúdos necessários para a realização da Atividade já foram trabalhados em sala de aula.

Parte 1 – Construa um plano cartesiano e determine a área do polígono formado pelos vértices A(2,0) , E(1,1), D(0,3), C(3,4) e B(4,1).

Parte 2 - Resolva o problema abaixo utilizando Geometria Plana:

Na organização retangular de pontos da figura abaixo, a distância entre pontos vizinhos em uma mesma linha ou coluna é igual a 1 cm. Determine a área do pentágono *ABCDE* em cm^2



AULA 03

Tendo as duas primeiras aulas ocorrido, é hora de deixar os alunos resolverem uma atividade de duas maneiras distintas, sem que o texto seja alterado. Eles devem conseguir, sozinhos, converter o problema em outro sem a necessidade de um roteiro. Para tanto, elaboramos seis atividades que podem ser resolvidas utilizando, pelo menos, duas geometrias.

Sugerimos que o professor divida a turma em grupos e que proponha aos alunos uma apresentação posterior dos resultados obtidos conjuntamente com uma discussão sobre as facilidades e dificuldades encontradas na resolução das atividades com uma ou outra Geometria.

Não é necessário que todos os alunos resolvam as seis atividades. Nós sugerimos que cada grupo resolva três deles de duas maneiras – o que equivale a seis resoluções distintas. Para a apresentação o professor pode, por exemplo pedir que cada grupo apresente duas dessas resoluções apenas: uma com Geometria Plana e outra com Geometria Analítica. Esta distribuição pode ser feita com um sorteio.

Mostramos logo abaixo, as orientações para a turma sobre como dividir as tarefas e sobre como organizar as apresentações, além de mostrarmos as seis atividades. Sugerimos que primeiramente o professor divida as tarefas, apresenta as Atividades e após todos entenderem o que devem fazer, apresente as instruções para a apresentação.

Orientações para os alunos sobre a divisão de tarefas

1) Nesta e nas próximas duas aulas, daremos prosseguimento ao nosso trabalho utilizando duas geometrias;

2) Vocês devem organizar na 6 grupos de alunos – sugestão nossa;

3) Após a escolha do grupo, escolham um nome para o grupo;

4) Escreva nos espaços indicados o nome dos integrantes do grupo e o nome do grupo;

Nome do Grupo

Integrante 01	
Integrante 02	
Integrante 03	
Integrante 04	
Integrante 05	

5) Neste documento, você terá seis atividades. O professor sorteará três atividades para que cada grupo resolva utilizando Geometria Plana e Geometria Analítica. Anote no espaço abaixo quais são as atividades que devem ser realizadas pelo seu grupo e qual deve ser a Geometria utilizada:

( ) Atividade 03 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 04 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 05 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 06 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 07 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 08 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

6) Você deve, neste documento, registrar tudo o que for feito durante a execução das Atividades de seu grupo – opcional;

Orientações para os alunos sobre as apresentações

1) Já tendo resolvidas as Atividades de duas maneiras diferentes, você deve, em grupo, organizar uma **Apresentação** para a turma sobre a primeira e a segunda Atividades sorteadas na AULA 03.

2) A apresentação deve conter cartazes ou Power Point;

3) Cada apresentação deve conter todos os passos de resolução e a justificativa de cada passo.

4) Cada apresentação tem, no máximo dez minutos, com direito a mais cinco minutos de pergunta no final, totalizando quinze minutos;

5) As apresentações ocorrerão nos dias _______;

6) As apresentações ocorrerão em ordem crescente de Atividade, começando com a Atividade 3;

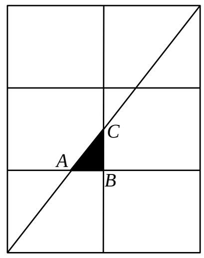
7) Primeiro veremos a resolução em Geometria Plana e depois veremos em Geometria Analítica;

8) Quando uma atividade for concluída, os dois grupos debaterão sobre as vantagens e desvantagens de determinada resolução. Este debate deverá versar sobre o tratamento das informações e suas eventuais facilidades ou dificuldades. Após o debate, faremos uma votação para eleger a Geometria mais indicada para a resolução da Atividade.

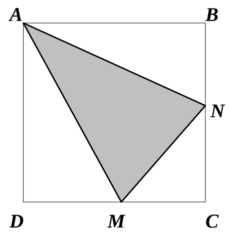
9) Ao **final** da última apresentação, este documento deve ser entregue ao professor, com a resolução completa das três atividades sorteadas com as duas Geometrias – opcional.

As seis atividades – adaptadas do site da OBM

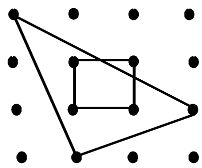
Atividade 03 – Na malha quadrada abaixo, há 6 quadrados de lado 30 cm. Determine a área do triângulo *ABC*.



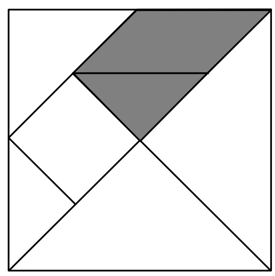
Atividade 04 – O quadrilátero *ABCD* é um quadrado de área 4m^2. Os pontos *M* e *N* estão no meio dos lados a que pertencem. Determine a área do triângulo em destaque, em m^2,



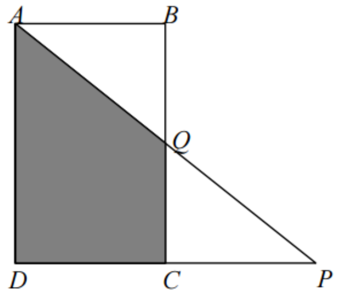
Atividade 05 – Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. Determine a área da região comum ao triângulo e ao quadrado.



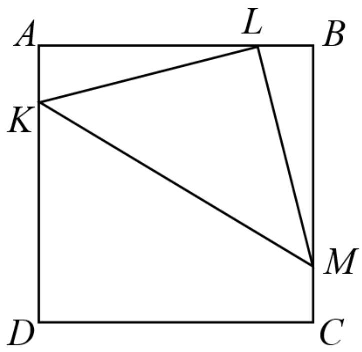
Atividade 06 – A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é 64 cm^2, qual é a área, em cm^2, da região sombreada?



Atividade 07 – Na figura, *P* é um ponto da reta *CD*. A região cinza é comum ao retângulo *ABCD* e ao triângulo *ADP*. Se *AB* = 5 cm, *AD* = 8 cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância *PC*?



Atividade 08 – Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado de lado 4, *K* pertence ao lado *AD*, *L* pertence ao lado *AB*, *M* pertence ao lado *BC* e *KLM* é um triângulo retângulo isósceles, sendo *L* o ângulo reto. Determine a área do quadrilátero *CDKM* é



AULAS 04 E 05

As aulas 04 e 05 devem ser destinadas aos alunos resolverem as atividades propostas e organizarem suas apresentações. É possível que este tempo não seja suficiente. O professor pode tomar a aula 03 como parâmetro: se os alunos conseguirem se organizar logo em grupos e entenderem o que devem fazer é muito provável que consigam terminar nestas duas aulas.

Caso levem muito tempo em sua organização, um período a mais pode ser necessário. Caso o professor note que algum dos grupos não consegue progredir, é importante que o professor tente ajuda-los, sem, contudo, entrega-los todos os procedimentos.

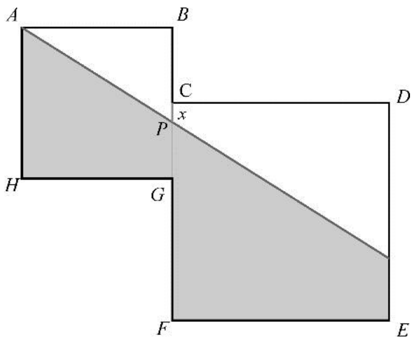
AULAS 06, 07 E 08

Estas três últimas aulas são destinadas as apresentações. Sugerimos que cada período tenha duas Atividades apresentadas, cada uma com duas maneiras. E que, ao final de cada atividade apresentada duas vezes, o professor discuta com os alunos sobre as vantagens e desvantagens encontradas por cada grupo e quais foram as percepções dos espectadores sobre o que foi apresentado.

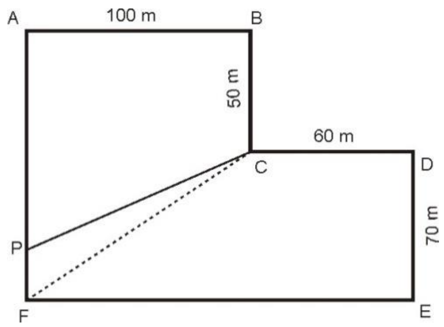
ATIVIDADES EXTRAS

Trazemos ao professor interessado mais quatro atividades que podem ser resolvidas utilizando duas maneiras distintas.

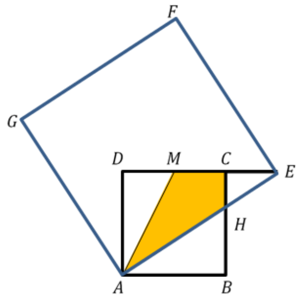
Atividade 09 – Na figura, os quadrados *ABGH* e *CDEF* têm lados de medidas 4 cm e 6 cm, respectivamente. O ponto *P* pertence à reta contendo os pontos *B, C, G,* e *F*, sendo *C* o ponto médio do lado *BG*. A semirreta *AP* divide a figura formada pelos dois quadrados em duas regiões, uma branca e uma cinza. Para que essas duas regiões tenham áreas iguais, qual deve ser o valor de $x = CP$?



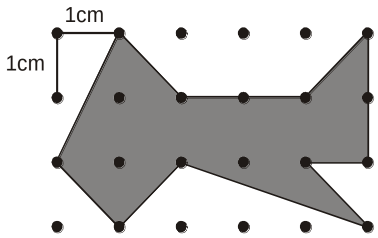
Atividade 10 – João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono ABCDEF. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?



Atividade 11 – Na figura ao lado, $AEFG$ e $ABCD$ são quadrados e o ponto E está na reta CD. Além disso, M é o ponto médio do segmento CD e C é o ponto médio do segmento ME. Sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lado 6, determine a razão entre as áreas do quadrilátero $CHAM$ e do quadrado $AEFG$.



Atividade 12 – No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância. Qual é a área da região sombreada?



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

POSSIBILIDADES NA CONVERSÃO ENTRE REGISTROS DE GEOMETRIA PLANA
Produto da dissertação
Sequência Didática

PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

Porto Alegre
2016

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Durante nossa pesquisa, elaboramos uma sequência didática. Em nossa sequência didática, possibilitamos um momento em que alunos de terceiro ano de ensino médio pudessem resolver problemas de Geometria, extraídos do arquivo de provas da OBM, utilizando registros de Geometria Plana e de Geometria Analítica.

Esta sequência didática foi aplicada e analisada a luz da Teoria de Registros de Duval. Aqui, disponibilizamos a sequência didática com alguns ajustes ao profissional que queira utilizá-la. Sugerimos, baseados em nossa aplicação, um tempo de pelo menos oito aulas (consideramos cada aula como um período).

Ao final, sugerimos mais quatro exercícios que podem ser resolvidos utilizando as duas Geometria, extraídos também do arquivo de provas da OBM, para o leitor que tiver interesse ou necessidade ao utilizá-la

AULA 01

A Aula 01 é dividida em duas partes: na primeira parte o professor sugere um problema de Geometria Analítica e sugere que os alunos sigam 5 passos a fim de responder 3 questionamentos. Na segunda parte, o professor sugere o mesmo problema, solicitando que os alunos o resolvam utilizando Geometria Plana. Abaixo sugerimos uma estrutura de apresentação para os alunos desta atividade.

Orientações para os alunos:

1) Esta atividade inicial está dividida em duas partes (**Parte 1** e **Parte 2**) e tem como objetivo introduzir uma proposta de trabalho com Geometria;

2) Os passos para a execução da **Parte 1** da atividade estão bem detalhados;

3) O professor executará os **passos** da **Parte 1** em conjunto com a turma;

4) Ao final da execução dos **passos** da **Parte 1**, você deve responder aos **Questionamentos;**

5) Todas as respostas dos **Questionamentos** devem ser justificadas;

6) Após o registro das respostas dos **Questionamentos**, o professor ajudará na execução da **Parte 2**, juntamente com a turma.

7) Você deve, neste documento, registrar com caneta tudo o que for feito durante a execução da Atividade 01;

8) Você pode trabalhar com o colega de classe. O registro porém deve ser individual e cada aluno entregará ao final uma cópia deste documento ao professor – opcional.

Parte 1 – Construa um plano cartesiano e siga os **passos** abaixo:

a) marque os pontos com as seguintes coordenadas: A(0,0), B(0,5) e C(20,0);

b) trace e determine a equação da reta r que passa pelos pontos B e C;

c) trace e determine a equação da reta s bissetriz dos quadrantes ímpares;

d) determine algebricamente e marque no gráfico o ponto P de intersecção entre as retas r e s.

e) trace e determine as projeções M e N de P sobre os eixos x e y, respectivamente.

Questionamentos da Parte 1:

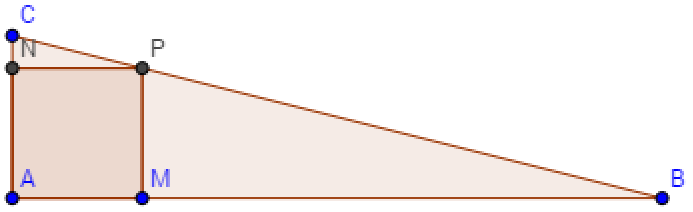
I) Que figura é formada pelos vértices M, P, N e A?

II) Qual á a área do triângulo ABC?

III) Qual é a área do quadrilátero MPNA?

Parte 2 - Resolva o problema abaixo utilizando Geometria Plana:

No triângulo retângulo ABC da figura abaixo está inscrito um quadrado. Se AB = 20 e AC = 5, que porcentagem a área do quadrado representa da área do triângulo ABC?



É interessante que ao final desta aula o professor discuta com a turma sobre as dificuldades e facilidades de resolver a atividade de uma maneira ou outra. Além disso é importante que o professor verifique se todos os alunos conseguem reconhecer que os dois problemas tratam da mesma situação, porém, escritos de maneiras distintas.

AULA 02

Após a primeira vivência com atividades resolvidas de duas maneiras, é hora de deixar os alunos tentarem, sem ajuda do professor, resolver uma atividade de duas maneiras. Para a Aula 02, sugerimos um mesmo problema escrito de duas maneiras distintas: uma com Geometria Plana e a outra com Geometria Analítica.

Além de resolver a atividade sozinhos, esta aula não prevê uma sequência de passos que levam a resposta, como fizemos na Aula 01. Colocamos, logo abaixo uma sugestão de estrutura e Orientações para a realização desta atividade. Convém relembrar que para a realização destas atividades, o aluno já deve ter conhecimento prévio de cálculo de áreas utilizando Geometria Analítica.

Orientações para os alunos

1) Esta atividade também está dividida em duas partes (**Parte 1** e **Parte 2**);

2) Neste caso, não existem passos para a execução e o professor não realizará as partes em conjunto com a turma;

3) Você deve, neste documento, registrar com caneta tudo o que for feito durante a execução da Atividade 02;

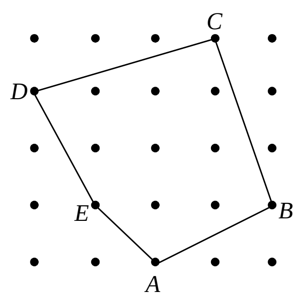
4) Você pode trabalhar com o colega de classe. O registro, porém, deve ser individual e cada aluno entregará ao final uma cópia deste documento ao professor – opcional;

5) Não hesite em tirar dúvidas com o professor caso não tenha compreendido o que deve ser feito. É importante salientar que os conteúdos necessários para a realização da Atividade já foram trabalhados em sala de aula.

Parte 1 – Construa um plano cartesiano e determine a área do polígono formado pelos vértices A(2,0) , E(1,1), D(0,3), C(3,4) e B(4,1).

Parte 2 - Resolva o problema abaixo utilizando Geometria Plana:

Na organização retangular de pontos da figura abaixo, a distância entre pontos vizinhos em uma mesma linha ou coluna é igual a 1 cm. Determine a área do pentágono *ABCDE* em cm^2



AULA 03

Tendo as duas primeiras aulas ocorrido, é hora de deixar os alunos resolverem uma atividade de duas maneiras distintas, sem que o texto seja alterado. Eles devem conseguir, sozinhos, converter o problema em outro sem a necessidade de um roteiro. Para tanto, elaboramos seis atividades que podem ser resolvidas utilizando, pelo menos, duas geometrias.

Sugerimos que o professor divida a turma em grupos e que proponha aos alunos uma apresentação posterior dos resultados obtidos conjuntamente com uma discussão sobre as facilidades e dificuldades encontradas na resolução das atividades com uma ou outra Geometria.

Não é necessário que todos os alunos resolvam as seis atividades. Nós sugerimos que cada grupo resolva três deles de duas maneiras – o que equivale a seis resoluções distintas. Para a apresentação o professor pode, por exemplo pedir que cada grupo apresente duas dessas resoluções apenas: uma com Geometria Plana e outra com Geometria Analítica. Esta distribuição pode ser feita com um sorteio.

Mostramos logo abaixo, as orientações para a turma sobre como dividir as tarefas e sobre como organizar as apresentações, além de mostrarmos as seis atividades. Sugerimos que primeiramente o professor divida as tarefas, apresenta as Atividades e após todos entenderem o que devem fazer, apresente as instruções para a apresentação.

Orientações para os alunos sobre a divisão de tarefas

1) Nesta e nas próximas duas aulas, daremos prosseguimento ao nosso trabalho utilizando duas geometrias;

2) Vocês devem organizar na 6 grupos de alunos – sugestão nossa;

3) Após a escolha do grupo, escolham um nome para o grupo;

4) Escreva nos espaços indicados o nome dos integrantes do grupo e o nome do grupo;

Nome do Grupo

Integrante 01	
Integrante 02	
Integrante 03	
Integrante 04	
Integrante 05	

5) Neste documento, você terá seis atividades. O professor sorteará três atividades para que cada grupo resolva utilizando Geometria Plana e Geometria Analítica. Anote no espaço abaixo quais são as atividades que devem ser realizadas pelo seu grupo e qual deve ser a Geometria utilizada:

( ) Atividade 03 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 04 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 05 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 06 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 07 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

( ) Atividade 08 ( ) Geometria Plana ( ) Geometria Analítica

6) Você deve, neste documento, registrar tudo o que for feito durante a execução das Atividades de seu grupo – opcional;

Orientações para os alunos sobre as apresentações

1) Já tendo resolvidas as Atividades de duas maneiras diferentes, você deve, em grupo, organizar uma **Apresentação** para a turma sobre a primeira e a segunda Atividades sorteadas na AULA 03.

2) A apresentação deve conter cartazes ou Power Point;

3) Cada apresentação deve conter todos os passos de resolução e a justificativa de cada passo.

4) Cada apresentação tem, no máximo dez minutos, com direito a mais cinco minutos de pergunta no final, totalizando quinze minutos;

5) As apresentações ocorrerão nos dias _______;

6) As apresentações ocorrerão em ordem crescente de Atividade, começando com a Atividade 3;

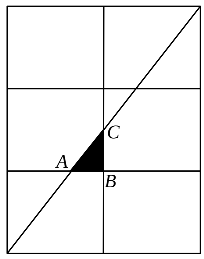
7) Primeiro veremos a resolução em Geometria Plana e depois veremos em Geometria Analítica;

8) Quando uma atividade for concluída, os dois grupos debaterão sobre as vantagens e desvantagens de determinada resolução. Este debate deverá versar sobre o tratamento das informações e suas eventuais facilidades ou dificuldades. Após o debate, faremos uma votação para eleger a Geometria mais indicada para a resolução da Atividade.

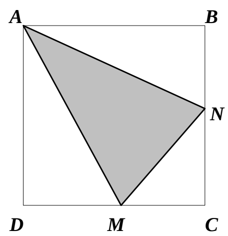
9) Ao **final** da última apresentação, este documento deve ser entregue ao professor, com a resolução completa das três atividades sorteadas com as duas Geometrias – opcional.

As seis atividades – adaptadas do site da OBM

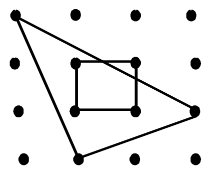
Atividade 03 – Na malha quadrada abaixo, há 6 quadrados de lado 30 cm. Determine a área do triângulo *ABC*.



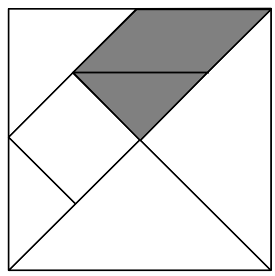
Atividade 04 – O quadrilátero *ABCD* é um quadrado de área 4m^2. Os pontos *M* e *N* estão no meio dos lados a que pertencem. Determine a área do triângulo em destaque, em m^2,



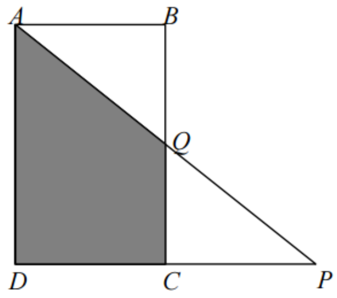
Atividade 05 – Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. Determine a área da região comum ao triângulo e ao quadrado.



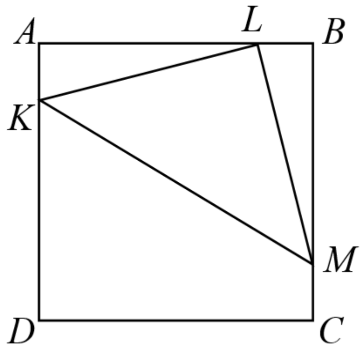
Atividade 06 – A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é 64 cm^2, qual é a área, em cm^2, da região sombreada?



Atividade 07 – Na figura, *P* é um ponto da reta *CD*. A região cinza é comum ao retângulo *ABCD* e ao triângulo *ADP*. Se *AB* = 5 cm, *AD* = 8 cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância *PC*?



Atividade 08 – Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado de lado 4, *K* pertence ao lado *AD*, *L* pertence ao lado *AB*, *M* pertence ao lado *BC* e *KLM* é um triângulo retângulo isósceles, sendo *L* o ângulo reto. Determine a área do quadrilátero *CDKM* é



AULAS 04 E 05

As aulas 04 e 05 devem ser destinadas aos alunos resolverem as atividades propostas e organizarem suas apresentações. É possível que este tempo não seja suficiente. O professor pode tomar a aula 03 como parâmetro: se os alunos conseguirem se organizar logo em grupos e entenderem o que devem fazer é muito provável que consigam terminar nestas duas aulas.

Caso levem muito tempo em sua organização, um período a mais pode ser necessário. Caso o professor note que algum dos grupos não consegue progredir, é importante que o professor tente ajuda-los, sem, contudo, entrega-los todos os procedimentos.

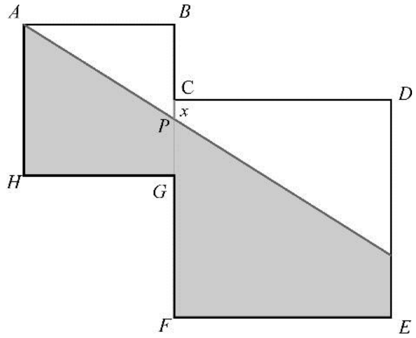
AULAS 06, 07 E 08

Estas três últimas aulas são destinadas as apresentações. Sugerimos que cada período tenha duas Atividades apresentadas, cada uma com duas maneiras. E que, ao final de cada atividade apresentada duas vezes, o professor discuta com os alunos sobre as vantagens e desvantagens encontradas por cada grupo e quais foram as percepções dos espectadores sobre o que foi apresentado.

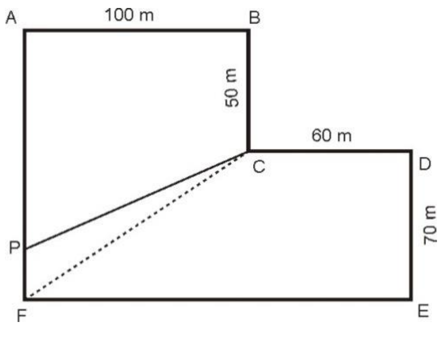
ATIVIDADES EXTRAS

Trazemos ao professor interessado mais quatro atividades que podem ser resolvidas utilizando duas maneiras distintas.

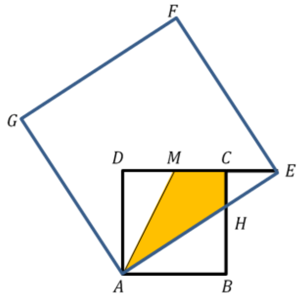
Atividade 09 – Na figura, os quadrados *ABGH* e *CDEF* têm lados de medidas 4 cm e 6 cm, respectivamente. O ponto *P* pertence à reta contendo os pontos *B, C, G*, e *F*, sendo *C* o ponto médio do lado *BG*. A semirreta *AP* divide a figura formada pelos dois quadrados em duas regiões, uma branca e uma cinza. Para que essas duas regiões tenham áreas iguais, qual deve ser o valor de $x = CP$?



Atividade 10 – João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono ABCDEF. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?



Atividade 11 – Na figura ao lado, $AEFG$ e $ABCD$ são quadrados e o ponto E está na reta CD. Além disso, M é o ponto médio do segmento CD e C é o ponto médio do segmento ME. Sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lado 6, determine a razão entre as áreas do quadrilátero $CHAM$ e do quadrado $AEFG$.



Atividade 12 – No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância. Qual é a área da região sombreada?