

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL
DAS FIBRAS DE REFORÇO SOBRE AS PROPRIEDADES EFETIVAS DE MATERIAIS
TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS

por

Matheus Madrid Moreira

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2016

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DA SEÇÃO TRANSVERSAL
DAS FIBRAS DE REFORÇO SOBRE AS PROPRIEDADES EFETIVAS DE MATERIAIS
TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS**

por

Matheus Madrid Moreira

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Ignacio Iturrioz

Prof. Juan Pablo Raggio Quintas

Prof. Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre, 28 de novembro de 2016.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, minha tia e minha avó. Meus exemplos para toda a vida.
Aos meus amigos do peito, colegas e professores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos vários colegas que, ao longo do curso, se tornaram grandes amigos e possibilitaram esta conquista. Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRGS, com os quais aprendi muito, em especial ao professor Rogério Marczak, por quem tenho grande respeito e admiração, pela orientação dedicada e qualificada neste trabalho. Aos membros do GMAP, pelo auxílio com a implementação dos métodos computacionais. Aos colegas de trabalho, pela compreensão enquanto estive ausente.

Agradeço também à minha mãe, por todo o apoio e incentivo.

MOREIRA, M. M. **Análise da influência da geometria da seção transversal das fibras de reforço sobre as propriedades efetivas de materiais transversalmente isotrópicos**. 2016. 20 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo computacional a respeito de materiais compósitos reforçados por fibras alinhadas, aleatoriamente distribuídas na matriz. O foco da análise é o plano transversal à direção das fibras, caracterizado por um comportamento isotrópico, onde é avaliada a influência das geometrias destas fibras de reforço sobre as propriedades efetivas do plano. O problema é abordado no contexto da elasticidade linear, com a hipótese de Estado Plano de Tensões (EPT) e procedimentos de homogeneização. São investigadas fibras com seção transversal de formato circular, quadrado e triangular, para duas frações de volume de reforço: 0,1 e 0,2. Um algoritmo computacional é implementado para gerar e analisar múltiplos modelos, com fibras paralelas entre si, na direção perpendicular ao plano em estudo. Uma análise estatística é realizada para definir um Elemento de Volume Representativo (EVR) do material. As propriedades efetivas do plano, para cada geometria proposta, são também determinadas através de uma análise estatística sobre uma série de ensaios numéricos dos EVRs. Pela comparação dos resultados demonstra-se que, para as frações de volume de reforço estudadas, as propriedades da matriz são dominantes nas propriedades efetivas do plano transversal às fibras. Os limites superior e inferior das propriedades efetivas previstos pela Regra de Misturas são úteis como valores máximos e mínimos para o módulo de elasticidade, no entanto, não fornecem estimativas úteis no caso do coeficiente de Poisson. O coeficiente de Poisson efetivo pode resultar inferior ao coeficiente de Poisson do material da própria matriz, quando o material das fibras for suficientemente rígido. E, por fim, conclui-se que a influência da geometria da seção transversal das fibras de reforço sobre o módulo de elasticidade efetivo do plano transversal a elas é pouco significativa, podendo ser desprezada na maioria das aplicações práticas de engenharia. Entretanto, os efeitos das pequenas variações do coeficiente de Poisson, podem ser significativos em certas aplicações.

PALAVRAS-CHAVE: compósitos reforçados por fibras; Elemento de Volume Representativo; propriedades efetivas.

MOREIRA, M. M. **Analysis of the influence of the cross-sectional geometry of reinforcing fibers on the effective properties of transversely isotropic materials.** 2016. 20 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

ABSTRACT:

This work presents a computational study on composite materials reinforced by aligned fibers, randomly distributed in the matrix. The focus of the analysis is the transverse plane to the direction of the fibers, characterized by an isotropic behavior, where the influence of the geometries of these reinforcing fibers on the effective properties of the plane is evaluated. The problem is addressed in the context of linear elasticity, with the Plane Stress State (PSS) hypothesis and homogenization procedures. Fibers with circular, square and triangular cross section are investigated for two fractions of reinforcement volume: 0,1 and 0,2. A computational algorithm is implemented to generate and analyze multiple models. A statistical analysis is performed to define a Representative Volume Element (RVE) of the material. The effective properties of the plane for each proposed geometry are also determined by statistical analysis on a series of numerical tests of the RVEs. By comparing the results, it is shown that, for the reinforcement volume fractions studied, the properties of the matrix are dominant in the effective properties of the transverse plane to the fibers. The upper and lower limits of the effective properties provided by the Rule of Mixtures are useful as maximum and minimum values for the modulus of elasticity, however, don't provide useful estimates in the case of Poisson's coefficient. The effective Poisson coefficient may be lower than the Poisson's coefficient of the matrix material itself when the fiber material is sufficiently rigid. Finally, it is concluded that the influence of the cross-sectional geometry of the reinforcing fibers on the effective modulus of elasticity of the transverse plane to them is not very significant and can be neglected in most practical engineering applications. However, the effects of small Poisson coefficient variations may be significant in certain applications.

KEYWORDS: composite materials reinforced by fibers; Representative Volume Element; effective properties.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Revisão da literatura.....	1
1.2. Objetivos	2
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	2
2.1. Homogeneização	2
2.2. Elemento de Volume Representativo	2
2.3. Teorema da tensão média.....	3
2.4. Aplicação à elasticidade plana e determinação das propriedades efetivas.....	3
2.5. Regra de Misturas	4
3. MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	5
4. RESULTADOS.....	8
4.1. Definição do tamanho do EVR	8
4.2. Análise da influência da geometria da seção transversal das fibras de reforço.....	10
5. CONCLUSÕES	14
5.1. Sugestões de trabalhos futuros	15
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15
APÊNDICE A – CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	16
APÊNDICE B – CAMPO DE TENSÕES	17

1. INTRODUÇÃO

Na indústria aeroespacial, a invenção de avançados materiais compósitos reforçados por fibras tem sido considerada a maior revolução técnica desde o motor a jato. Esta é uma sentença impressionante, devido ao notável impacto que os motores a jato causaram no desempenho de aeronaves militares e na aviação comercial. [Jones, 1999].

Alguns dos principais benefícios destes materiais reforçados por fibras são a elevada resistência e rigidez que podem ser obtidas em relação ao peso específico, quando comparados com outros materiais convencionais de engenharia. Este fato, justifica sua aplicação em atividades que exigem alta performance [Jones, 1999].

Entretanto, o desenvolvimento de novas técnicas e processos de fabricação têm ampliado a utilização destes materiais em diferentes setores da indústria moderna, com um crescimento de cerca de 5% ao ano. Atualmente, o emprego destas estruturas de alto desempenho, com baixo peso, tem sido feito nas indústrias automotiva, esportiva, de próteses e dispositivos biomédicos, de construção civil, entre outras [Lee, 1991].

As vantagens alcançadas por materiais compósitos vêm acompanhadas de maior complexidade do ponto de vista da análise do comportamento mecânico. Tais materiais são heterogêneos e comumente possuem muitos detalhes incorporados à sua microestrutura, o que exige um elevado custo computacional em simulações numéricas. Por este motivo, modelos de homogeneização são empregados visando substituir o meio heterogêneo por um meio homogêneo equivalente, onde as propriedades efetivas da escala macroscópica são provenientes do comportamento em escala microscópica [Pinho-da-Cruz *et al.*, 2009].

De acordo com o estudo de Oliveira *et al.*, 2009, a homogeneização de compósitos com esta configuração, matriz reforçada por fibras, conduz a um comportamento macroscópico isotrópico transversal, isto é, no plano transversal às fibras o material homogeneizado pode ser tratado como sendo isotrópico. Além disso, para materiais constituintes elásticos, o comportamento do material homogeneizado no plano pode ser completamente representado por duas constantes elásticas independentes: o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

Técnicas de homogeneização analíticas, como a Teoria de Misturas, são amplamente utilizadas para calcular propriedades efetivas aproximadas de materiais compósitos que possuem dois ou mais constituintes. Este modelo é atraente por sua simplicidade, porém, não leva em conta no equacionamento matemático os detalhes da microestrutura do material, como a forma das fibras de reforço ou a posição delas na matriz.

O trabalho proposto visa incluir estes efeitos através de uma análise de homogeneização em duas dimensões, assumindo Estado Plano de Tensões e utilizando uma abordagem computacional com o Método de Elementos Finitos (MEF), para posteriormente, avaliar a influência que diferentes geometrias de reforço causam sobre as propriedades efetivas do material no plano transversal à direção das fibras.

1.1. Revisão da literatura

Segundo Buroni, 2006, existem diversas técnicas para obter propriedades efetivas de materiais heterogêneos, como por exemplo, a Teoria Matemática de Homogeneização, os métodos analíticos e semi-analíticos como bandas de Hashin-Shtrikman, o modelo auto-consistente, o Método de Mori-Tanaka e muitas outras.

Ghafaar *et al.*, 2006, realizaram uma análise matemática dos resultados experimentais obtidos em ensaios de compósitos com matriz de resina epóxi reforçada por três tipos de fibras: de vidro, de carbono e de uma mistura das duas anteriores. Em relação ao módulo de elasticidade longitudinal, utilizando a Regra de Misturas, os autores verificaram que as equações do método forneceram valores de limite superior para todos os compósitos investigados em todas as frações de volume consideradas. Com as equações de Hapin-Tsai, para avaliar o mesmo parâmetro, verificaram boa concordância com os valores experimentais em frações de baixo volume de reforço. No entanto, à medida que a fração de volume aumentou, os valores experimentais e calculados divergiram consideravelmente.

Zohdi, 2007, comenta que o aumento da capacidade de processamento dos computadores permite que métodos numéricos tenham um importante papel na análise e modelagem de estruturas heterogêneas, incluindo no regime não linear. Em seu trabalho, investigou a homogeneização de materiais elásticos heterogêneos que se deformam de modo linear e não linear, utilizando compósitos de matriz com partículas.

Em ambos os regimes, o objetivo foi estimar ou gerar limites para as propriedades efetivas macroscópicas do material, através de um Elemento de Volume Representativo.

Utilizando a Teoria de Campos Médios e o Método de Elementos de Contorno (MEC), Buroni, 2006, propôs um modelo para obter as propriedades mecânicas elásticas efetivas de materiais microporosos com distribuição aleatória, considerando as hipóteses de Estado Plano de Tensão e Estado Plano de Deformação.

De acordo com Pinho-da-Cruz *et al.*, 2009, e Oliveira *et al.*, 2009, o método de homogeneização por expansão assintótica é uma técnica útil para o estudo do comportamento de materiais compósitos com microestruturas periódicas. Em um trabalho dividido em duas partes, inicialmente os autores apresentaram a formulação matemática detalhada do método aplicado a problemas de elasticidade linear, assim como as equações explícitas que caracterizam os campos de tensão e deformação microestruturais associados a um determinado estado de equilíbrio macroestrutural. Na segunda parte, demonstraram um estudo numérico da influência da fração de volume de reforço sobre as propriedades globais de um compósito com matriz de metal reforçada por partículas cerâmicas esféricas e uma aplicação geral do método.

Parsaei *et al.*, 2016, apresentaram um novo método para homogeneização de compósitos multi-fase contendo fração de volume elevada de inclusões, desenvolvido com base na combinação do modelo de Mori-Tanaka com o modelo esquema diferencial modificado. Foram realizados três experimentos para validar o novo método e investigar os efeitos de forma e frações de volume das inclusões nas propriedades mecânicas de materiais compósitos: (a) compressão sobre resina reforçada com inclusões de vidro esféricas; (b) compressão sobre resina reforçada com inclusões de vidro elipsoidais; (c) compressão sobre resina reforçada com uma mistura de inclusões de vidro esféricas e elipsoidais. De acordo com os autores, os valores obtidos pelo modelo proposto mostraram boa consistência com os resultados experimentais.

1.2. Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é avaliar a influência da forma da seção transversal das fibras de reforço, alinhadas e distribuídas aleatoriamente na matriz, de materiais elásticos lineares, que apresentam comportamento transversalmente isotrópico, sobre as propriedades efetivas do plano transversal às fibras. Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Estabelecer um modelo bidimensional para análise de homogeneização;
- Desenvolver uma rotina computacional para gerar amostras com distribuições aleatórias das fibras de reforço, resolver o problema da elasticidade linear pelo Método de Elementos Finitos (MEF) e calcular as propriedades efetivas das amostras;
- Definir estatisticamente o Elemento de Volume Representativo (EVR);
- Determinar as propriedades efetivas produzidas por cada geometria proposta como seção transversal das fibras, através de uma análise estatística sobre uma série de ensaios numéricas dos EVRs.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Homogeneização

O primeiro trabalho publicado sobre teoria matemática de homogeneização data do fim dos anos 1960, desde então, vários métodos têm sido propostos. Técnicas de homogeneização permitem a substituição de um meio heterogêneo por um meio homogêneo equivalente, possibilitando a utilização de leis de comportamento macroestruturais obtidas a partir de informações microestruturais [Pinho-da-Cruz *et al.*, 2009].

O teorema de energia média, conhecido na literatura como condição de Hill, ou condição de macro-homogeneidade, permite interpretar o problema de homogeneização em como achar um material homogêneo que seja energeticamente equivalente a uma dada microestrutura [Buroni, 2006].

2.2. Elemento de Volume Representativo

Existem muitas formas de definir o Elemento de Volume Representativo (EVR), uma delas caracteriza o EVR como o menor volume da microestrutura que permite obter, com certa precisão, uma propriedade macroscópica de interesse [Buroni, 2006].

O EVR também deve conter as proporções corretas de fibras e matriz, capazes de representar o material composto e seus constituintes em volume. Deve ser cuidadosamente definido e pode ser interpretado, em micromecânica, como análogo ao diagrama de corpo livre em estática e dinâmica [Jones, 1999].

2.3. Teorema da tensão média

Em uma análise multiescala a influência das heterogeneidades da microestrutura sobre o campo de tensões do material pode ser interpretada no nível macroscópico como flutuações em torno de um valor médio. O tensor de tensões macroscópico é a média espacial do tensor de tensões num EVR [Nemat-Nasser, 1999]. Sendo o operador média espacial definido como:

$$\langle \cdot \rangle_{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \cdot \, d\Omega \quad (2.1)$$

onde Ω denota o domínio do material.

Na ausência de forças de corpo, o campo de tensões médias de um sólido, em notação indicial, pode ser expresso por [Nemat-Nasser, 1999]:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} x_j)_{,k} \, d\Omega \quad (2.2)$$

sendo σ_{ij} o tensor de tensões, x a coordenada no sistema cartesiano e os índices i, j e $k \in \{1,2,3\}$ (correspondentes aos eixos cartesianos).

Aplicando o Teorema de Green, o campo de tensões médias do material é levado ao contorno da matriz, dessa maneira, são necessários somente os dados sobre o contorno do material [Nemat-Nasser, 1999]:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} \sigma_{ik} x_j n_k \, d\Gamma \quad (2.3)$$

em que Γ indica o contorno do material e n o vetor normal à superfície.

2.4. Aplicação à elasticidade plana e determinação das propriedades efetivas

A teoria da elasticidade em duas dimensões é utilizada para simplificar vários problemas em engenharia, permitindo testar formulações antes de estendê-las a três dimensões. Neste trabalho, foi adotada a hipótese de Estado Plano de Tensões (EPT), que implica em um modelo físico onde $\sigma_{3i} = 0$ e descreve o comportamento do material através da seguinte relação constitutiva, em notação matricial de Voigt [Buroni, 2006]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

onde $[S]$ é a matriz de complacência ou flexibilidades, ε o tensor de deformações infinitesimais e σ o tensor de tensões.

A matriz de constantes elásticas para o EPT em um material com isotropia transversal, em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν , é [Buroni, 2006]:

$$S = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Para determinar as propriedades efetivas macroscópicas de um material heterogêneo deve-se computar a relação entre médias $\{\langle \varepsilon \rangle\} = [S^*] \{\langle \sigma \rangle\}$, onde estão implícitos os acoplamentos entre a micro e macroescala. Além disso, a amostra de material analisada deve ser um EVR. O problema elástico pode ser

resolvido computacionalmente para determinar os microcampos de tensão e deformação. As condições de contorno empregadas devem ser as mesmas que produziriam um campo de tensões ou deformações uniforme em um sólido homogêneo [Buroni, 2006].

Neste trabalho, foi utilizada a condição de contorno de deslocamento linear em x_1 , expressa pelo tensor de deformações infinitesimais como $\varepsilon = [\beta \ 0 \ 0]^T$. As expressões para o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson efetivos para materiais elásticos transversalmente isotrópicos em EPT, podem então ser desenvolvidas a partir do seguinte sistema de equações [Buroni, 2006]:

$$\begin{Bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E^*} \begin{bmatrix} 1 & -\nu^* & 0 \\ -\nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu^*) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega \\ \langle \sigma_{22} \rangle_\Omega \\ \langle \sigma_{12} \rangle_\Omega \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$E^* = \frac{1 - \left(\frac{\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega}{\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega} \right)^2}{\beta} \langle \sigma_{11} \rangle_\Omega \quad (2.7)$$

$$\nu^* = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_\Omega}{\langle \sigma_{11} \rangle_\Omega} \quad (2.8)$$

sendo β a deformação imposta, E^* o módulo de elasticidade efetivo e ν^* o coeficiente de Poisson efetivo.

2.5. Regra de Misturas

As propriedades mecânicas efetivas de um material compósito podem ser estimadas matematicamente em termos das propriedades dos materiais constituintes e seus respectivos volumes relativos. A característica chave dessa abordagem é a suposição de certas hipóteses simplificadoras que devem ser feitas com relação ao comportamento mecânico do material composto [Jones, 1999].

Para um material reforçado com fibras unidirecionais, assumindo a hipótese de que as deformações na direção das fibras são as mesmas tanto nas fibras de reforço quanto na matriz e assumindo que ambos os constituintes se comportam elasticamente ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), pode-se deduzir uma equação que representa a variação linear simples do módulo de elasticidade efetivo na direção das fibras, dependente da fração de volume de reforço [Jones, 1999].

$$E^*_1 = E_m \cdot V_m + E_r \cdot V_r \quad (2.9)$$

sendo E^*_1 o módulo de elasticidade efetivo na direção das fibras, E_r o módulo de elasticidade das fibras de reforço, E_m o módulo de elasticidade da matriz, V_r a fração de volume das fibras de reforço e V_m a fração de volume da matriz.

A divisão de carga entre fibra e matriz pode ser vista como um modelo de molas em paralelo. Se todas as molas deformarem a mesma quantidade (*iso-deformação*) e a rigidez das fibras for muito maior do que a da matriz, então as molas que representam as fibras suportaram a maior parte do carregamento aplicado. Assim, mesmo grandes mudanças em E_m causam um pequeno efeito sobre E^*_1 , desde que a fração de volume de fibras não seja próxima de zero. Por este motivo, pode-se considerar E^*_1 como uma propriedade dominada pelas fibras. A equação 2.9 foi comparada com resultados experimentais e apresentou excelente concordância [Jones, 1999].

Para estimar o módulo de elasticidade efetivo do material compósito, na direção transversal às fibras, pressupõe-se que uma mesma tensão transversal seja aplicada tanto às fibras quanto à matriz (*iso-tensão*). Novamente, com base nas relações tensão-deformação da elasticidade, determina-se a seguinte equação [Jones, 1999]:

$$E^*_2 = \frac{E_m \cdot E_r}{E_m \cdot V_r + E_r \cdot V_m} \quad (2.10)$$

onde E^*_2 é o módulo de elasticidade efetivo na direção transversal às fibras.

Um modelo de molas em série representa o carregamento na direção transversal às fibras. A matriz é a ligação mais flexível na série, dessa forma, espera-se que a deformação da matriz seja dominante. Ou seja, E^*_2 é dominado pelas propriedades da matriz. As hipóteses envolvidas na dedução anterior não são inteiramente consistentes e as estimativas para E^*_2 a partir da equação 2.10 apresentam valores subestimados quando comparados com dados experimentais [Jones, 1999].

Várias relações funcionais entre uma propriedade e a fração de volume de fibras são possíveis. Assim, para o coeficiente de Poisson efetivo ν^* no plano transversal às fibras, foram consideradas equações análogas as equações 2.9 e 2.10 para estimativas dos limites superior e inferior de ν^* , respectivamente, apenas substituindo E por ν :

$$\nu^*_1 = \nu_m \cdot V_m + \nu_r \cdot V_r \quad (2.11)$$

$$\nu^*_2 = \frac{\nu_m \cdot \nu_r}{\nu_m \cdot V_r + \nu_r \cdot V_m} \quad (2.12)$$

onde ν^*_1 representa o limite superior para o coeficiente de Poisson efetivo no plano transversal às fibras, ν^*_2 representa o limite inferior para o coeficiente de Poisson efetivo no plano transversal às fibras, ν_r o coeficiente de Poisson das fibras de reforço e ν_m o coeficiente de Poisson da matriz.

Os resultados da Regra de Misturas são representados esquematicamente na Figura 2.1, onde P representa a propriedade analisada.

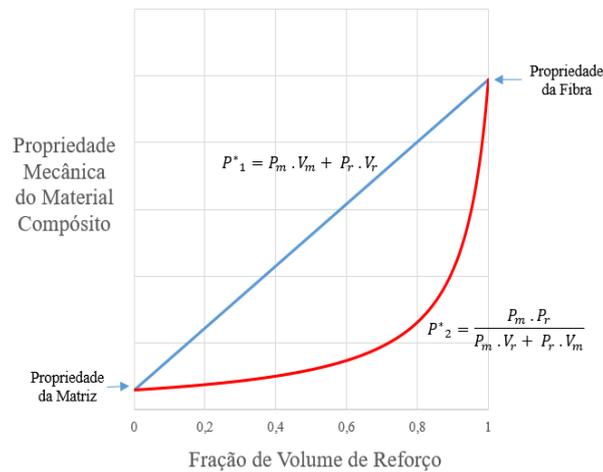


Figura 2.1 – Formas típicas de resultados da Regra de Misturas.

3. MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

O estudo proposto foi direcionado para materiais compósitos, com fibras de reforço alinhadas (paralelas entre si) e aleatoriamente distribuídas na matriz, que apresentam comportamento mecânico segundo um caso especial de ortotropia, também conhecidos como materiais transversalmente isotrópicos.

A Figura 3.1 demonstra esquematicamente a configuração destes materiais. O foco da análise foi investigar as propriedades efetivas produzidas no plano x_1, x_2 , considerado isotrópico.

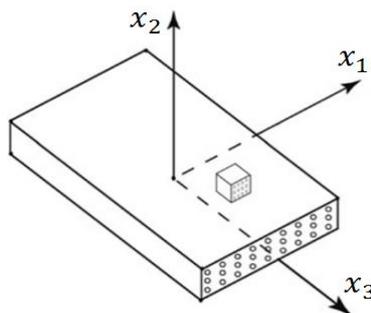


Figura 3.1 – Representação esquemática do material compósito reforçado por fibras.

Foram consideradas fibras com seção transversal de formato circular, quadrado e triangular, para duas frações de volume de reforço: 0,1 e 0,2. Foi adotado um modelo bidimensional considerando Estado Plano de Tensões (EPT), com as seguintes hipóteses:

- Fibras: homogêneas, lineares elásticas, isotrópicas e perfeitamente ligadas à matriz.
- Matriz: homogênea, linear elástica, isotrópica e sem vazios.

Os materiais constituintes foram definidos de forma genérica, isto é, não foram selecionados materiais reais. Entretanto, foram arbitrados valores para as propriedades das fibras com o intuito de representar um comportamento próximo ao rígido. As propriedades dos materiais constituintes utilizados estão descritas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Propriedades dos materiais constituintes.

Propriedades	Fibras	Matriz
Módulo de Elasticidade E :	1.000 GPa	70 GPa
Coefficiente de Poisson ν :	0,45	0,33

Para determinar as propriedades efetivas de um material heterogêneo por métodos computacionais é essencial identificar um elemento de volume que seja estatisticamente representativo do material. Uma maneira de determinar o EVR é através do próprio procedimento de homogeneização. O tamanho da amostra representativa será aquele que proporcione uma resposta invariante (com certa margem), para distintas distribuições das heterogeneidades [Buroni, 2006; Zohdi, 2007].

A análise de homogeneização foi realizada por meio das equações 2.6, 2.7 e 2.8. Para computar as tensões foi utilizado o Método de Elementos Finitos (MEF). O cálculo da tensão média (equação 2.3) foi feito através de aproximação numérica baseada na Regra dos Trapézios Composta.

A determinação do Elemento de Volume Representativo (dimensões e quantidade de heterogeneidades) foi, então, realizada através de análise estatística das respostas do procedimento de homogeneização aplicado a diversas amostras de material com sucessivos incrementos de tamanho.

O extenso trabalho para gerar e analisar múltiplas amostras de material, com todas as variações necessárias, como por exemplo, tamanhos diferentes, quantidades de reforços diferentes, distribuição aleatória das geometrias de reforço, motivou o desenvolvimento de um algoritmo computacional para automação do processo. A implementação deste algoritmo foi feita por meio de programação em um *software* voltado ao cálculo numérico. A rotina computacional realiza os seguintes procedimentos:

- Gera os parâmetros para construção do modelo a ser analisado:
 - Fração de volume de reforço;
 - Valores das propriedades dos materiais constituintes;
 - Coordenadas no plano x_1, x_2 (equivalente ao plano x, y) para o desenho da matriz;
 - Formas geométricas que representam as fibras de reforço;
 - Número de reforços, calculado com base na fração de volume de reforço e nas áreas da matriz e dos reforços;
 - Coordenadas aleatórias no plano x, y para o desenho dos reforços, respeitando um critério de distância mínima para evitar sobreposição;
 - Valor do deslocamento prescrito a ser imposto (condição de contorno);
- Executa um arquivo *batch* (sequência de comandos) em um software de elementos finitos:
 - Pré-processamento: o modelo é desenhado, são definidos os materiais (comportamento e propriedades) e o tipo de elemento para criar a malha. A malha é gerada e são definidas as condições de contorno.
 - Solução: análise estrutural estática para determinar o campo de tensões.
 - Pós-processamento: são obtidas as tensões dos nós do contorno do material e suas respectivas posições no plano. Um arquivo contendo estes dados é gerado.
- Lê o arquivo de dados gerado no pós-processamento da análise por elementos finitos e calcula as tensões médias utilizando a equação 2.3.
- Calcula as propriedades efetivas ou homogeneizadas, conforme as equações 2.7 e 2.8.

A Figura 3.2 ilustra exemplos de modelos gerados com fração de volume de reforço de 0,1 para as geometrias circulares, quadradas e triangulares, distribuídas aleatoriamente sobre a matriz quadrada (as diferentes cores somente distinguem as áreas).

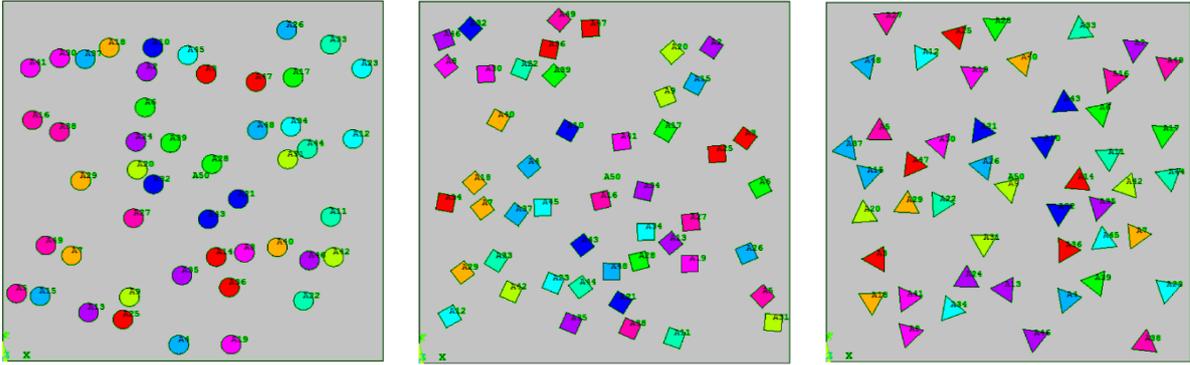


Figura 3.2 – Exemplos de modelos gerados para as três geometrias de reforço estudadas.

A Figura 3.3 ilustra exemplos de modelos discretizados com elementos finitos. As malhas foram criadas utilizando elementos na forma de triângulos e quadriláteros, incluindo quadrados, para representar tanto as fibras quanto a matriz do entorno.

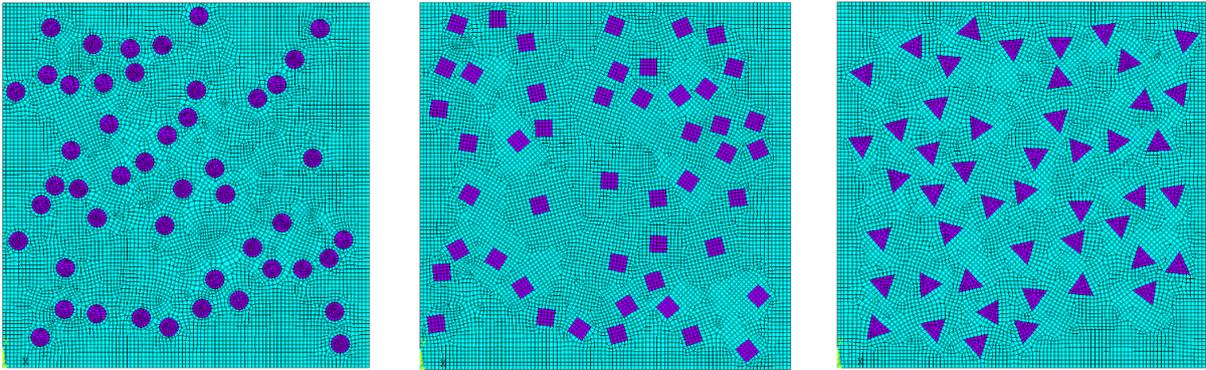
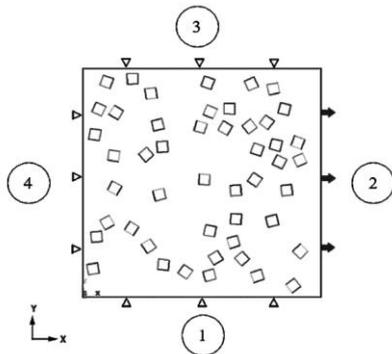


Figura 3.3 – Exemplos de malhas geradas para os modelos contendo os três tipos diferentes de geometrias de reforço avaliadas.

A Figura 3.4 apresenta as condições de contorno adotadas. Cabe salientar que o deslocamento imposto ao lado 2 dos modelos sempre foi ajustado para corresponder a uma deformação de 0,01 na direção x , em todos os tamanhos de amostras analisadas.



- Lado 1: deslocamento restrito em y ;
- Lado 2: deslocamento aplicado em x :
 $\beta = (\text{medida do lado da amostra}) \cdot 0,01$
- Lado 3: deslocamento restrito em y ;
- Lado 4: deslocamento restrito em x ;

Figura 3.4 – Condições de contorno adotadas, identificando os lados atribuídos ao modelo.

A validação das condições de contorno empregadas, de acordo com o exposto no tópico 2.4, é demonstrada no Apêndice A. Ilustrações das soluções do campo de tensões obtidas pelo MEF, para o caso contendo fração de volume de reforço de 0,1 são apresentadas no Apêndice B.

A expansão da equação 2.3, originalmente em notação indicial, resulta no seguinte conjunto de expressões, para o cálculo da tensão média em cada lado do modelo:

$$\bullet \text{Lado 1: } \langle \sigma_{11} \rangle = \frac{1}{A} \int_{x_1} -\sigma_{12} \cdot x_1 dx_1 \quad (3.1) \quad \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (3.2)$$

$$\bullet \text{ Lado 2: } \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \frac{x_1}{A} \int_{x_2} \sigma_{11} dx_2 \quad (3.3) \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \frac{1}{A} \int_{x_2} \sigma_{21} \cdot x_2 dx_2 \quad (3.4)$$

$$\bullet \text{ Lado 3: } \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \frac{1}{A} \int_{x_1} \sigma_{12} \cdot x_1 dx_1 \quad (3.5) \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \frac{x_2}{A} \int_{x_1} \sigma_{22} dx_1 \quad (3.6)$$

$$\bullet \text{ Lado 4: } \quad \langle \sigma_{11} \rangle = 0 \quad (3.7) \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \frac{1}{A} \int_{x_2} -\sigma_{21} \cdot x_2 dx_2 \quad (3.8)$$

Os valores de $\langle \sigma_{11} \rangle$ e $\langle \sigma_{22} \rangle$, obtidos no contorno da matriz, são somados para aplicação nas equações 2.7 e 2.8. Nestas mesmas equações, o valor de β corresponde à deformação, sendo sempre igual a 0,01 e não variando como o deslocamento, que depende da medida do lado da amostra.

Inicialmente, o algoritmo computacional foi utilizado para determinar o tamanho do EVR para os casos com fração de volume de reforço de 0,1 e 0,2. Para todos os incrementos de tamanho, a matriz dos modelos foi mantida quadrada. Após definido o Elemento de Volume Representativo, foram realizados ensaios computacionais dos EVRs para os três tipos diferentes de geometrias de reforço: círculos, quadrados e triângulos. Independentemente da geometria, o valor da área dos reforços foi mantido igual, para viabilizar o estudo da influência causada apenas pelas diferentes formas das fibras sobre as propriedades efetivas do material.

4. RESULTADOS

Uma série de simulações numéricas foram executadas, através da repetição da rotina computacional descrita anteriormente, para diversas amostras de material, com o objetivo de gerar uma quantidade suficiente de dados para realizar uma análise estatística e, assim, determinar os EVRs e as propriedades efetivas produzidas pelas geometrias propostas, no plano transversal às fibras.

4.1. Definição do tamanho do EVR

Para o compósito com fração de volume de reforço de 0,1 e de fibras de seção transversal circular, foram testadas consecutivas amostras de materiais, com matriz de geometria quadrada, de lado medindo 10 mm, 20 mm, 40 mm e 50 mm, respectivamente. Cada amostra foi computacionalmente ensaiada 30 vezes e para cada simulação foi considerada uma distribuição aleatória das fibras no interior da matriz.

Os resultados para o módulo de elasticidade efetivo e o coeficiente de Poisson efetivo são apresentados de forma gráfica na Figura 4.1. A Tabela 4.1 apresenta o resumo dos resultados numéricos tratados estatisticamente.

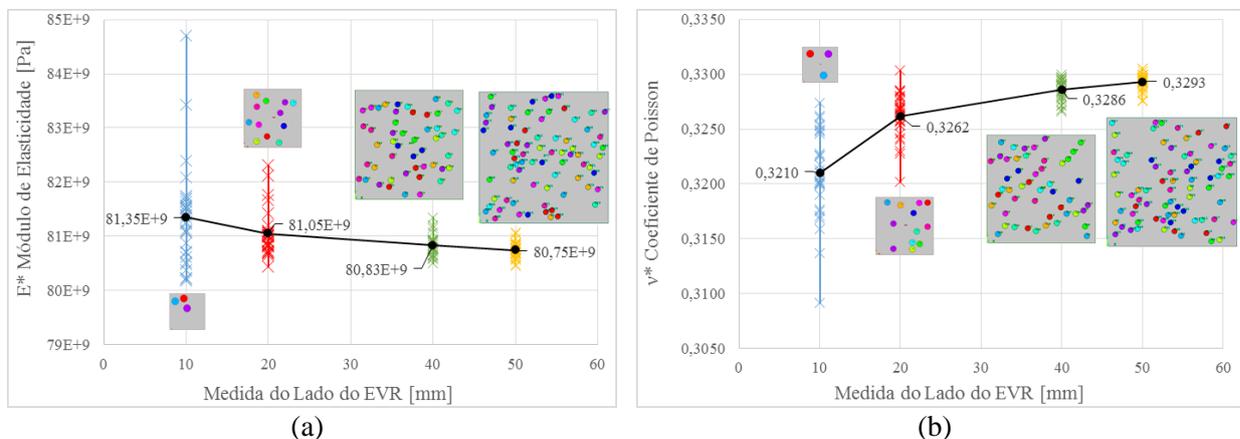


Figura 4.1 – Curva de convergência do EVR para fração de volume de reforço de 0,1. Amostras com diferentes distribuições aleatórias dos reforços e com incrementos consecutivos de tamanho da matriz e número de reforços. (a) módulo de elasticidade efetivo. (b) coeficiente de Poisson efetivo.

Tabela 4.1 – Resultados da avaliação computacional das amostras com fração de volume de reforço de 0,1.

E* Módulo de elasticidade efetivo				
Medida do lado da amostra [mm]	Número de fibras contidas na amostra	Média do módulo de elasticidade efetivo [Pa]	Desvio padrão do módulo de elasticidade efetivo	Varição percentual do desvio padrão em relação a média
10	3	81,3490E+9	928,8733E+6	1,14%
20	12	81,0477E+9	416,9377E+6	0,51%
40	48	80,8306E+9	180,5890E+6	0,22%
50	75	80,7476E+9	139,4318E+6	0,17%
v* Coeficiente de Poisson efetivo				
Medida do lado da amostra [mm]	Número de fibras contidas na amostra	Média do coeficiente de Poisson efetivo	Desvio padrão do coeficiente de Poisson efetivo	Varição percentual do desvio padrão em relação a média
10	3	0,3210	0,0040	1,25%
20	12	0,3262	0,0020	0,61%
40	48	0,3286	0,0009	0,28%
50	75	0,3293	0,0007	0,21%

Com base nos resultados obtidos para o material com fração de volume de reforço de 0,1, foi estabelecido como EVR a amostra com matriz de 40 mm de comprimento de lado e 48 fibras incorporadas. O percentual de desvio padrão em relação à média dos resultados desta amostra é de 0,22% para o módulo de elasticidade efetivo e de 0,28% para o coeficiente de Poisson efetivo. Sendo assim, consideram-se atingidos os requisitos de representatividade.

O mesmo processo de análise foi adotado para o material com fração de volume de reforço de 0,2. Os resultados produzidos são exibidos graficamente na Figura 4.2 e os valores numéricos apresentados na Tabela 4.2.

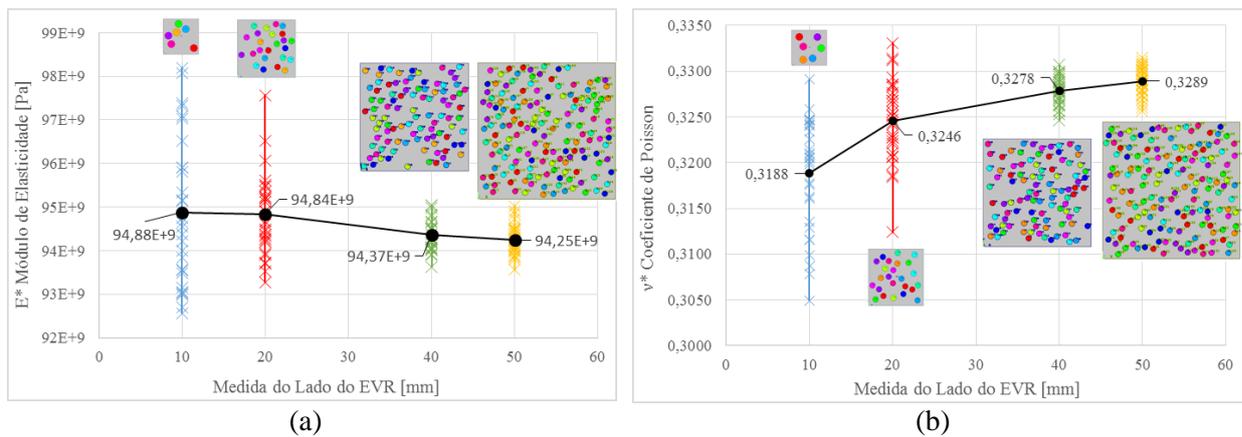


Figura 4.2 – Curva de convergência do EVR para fração de volume de reforço de 0,2. Amostras com diferentes distribuições aleatórias dos reforços e com incrementos consecutivos do tamanho da amostra e quantidade dos reforços. (a) módulo de elasticidade efetivo. (b) coeficiente de Poisson efetivo.

Tabela 4.2 – Resultados da avaliação computacional das amostras com fração de volume de reforço de 0,2.

E* Módulo de elasticidade efetivo				
Medida do lado da amostra [mm]	Número de fibras contidas na amostra	Média do módulo de elasticidade efetivo [Pa]	Desvio padrão do módulo de elasticidade efetivo	Varição percentual do desvio padrão em relação a média
10	6	94,8762E+9	1,6757E+9	1,77%
20	24	94,8360E+9	911,9469E+6	0,96%
40	96	94,3672E+9	345,1413E+6	0,37%
50	150	94,2532E+9	347,9650E+6	0,37%
v* Coeficiente de Poisson efetivo				
Medida do lado da amostra [mm]	Número de fibras contidas na amostra	Média do coeficiente de Poisson efetivo	Desvio padrão do coeficiente de Poisson efetivo	Varição percentual do desvio padrão em relação a média
10	6	0,3188	0,0061	1,91%
20	24	0,3246	0,0044	1,34%
40	96	0,3278	0,0015	0,46%
50	150	0,3289	0,0015	0,47%

Então, para o material com fração de volume de reforço de 0,2 também ficou estabelecido como EVR a amostra com medida de lado de 40 mm, porém, com 96 fibras de reforço. Neste caso, o percentual de desvio padrão em relação à média dos resultados para o módulo de elasticidade efetivo foi de 0,37% e se manteve o mesmo para o modelo com 50 mm de lado. Para o coeficiente de Poisson efetivo, de forma semelhante, o desvio padrão em relação à média dos resultados foi de 0,46% para a amostra de 40 mm de lado e de 0,47% para a de 50 mm, demonstrando que não haveriam ganhos empregando o EVR maior.

4.2. Análise da influência da geometria da seção transversal das fibras de reforço

Como valores de referência iniciais para comparação, foram calculadas as estimativas das propriedades efetivas do material composto através da Regra de Misturas (equações 2.9 a 2.12). Essas expressões desconsideram completamente os detalhes da microestrutura do material, entretanto, os resultados assim obtidos podem ser interpretados como limites superiores e inferiores para as propriedades efetivas. A Tabela 4.3 apresentada os valores calculados pela Regra de Misturas.

Tabela 4.3 – Resultados da Regra de Misturas, para as duas frações de volume de reforço estudadas.

Regra de Misturas	Fração de volume de reforço de 0,1		Fração de volume de reforço de 0,2	
	Limite Inferior	Limite Superior	Limite Inferior	Limite Superior
E* Módulo de elasticidade [Pa]	77,1775E+9	163,0000E+9	85,9951E+9	256,0000E+9
v* Coeficiente de Poisson	0,3390	0,3420	0,3486	0,3540

Conforme exposto na fundamentação teórica, para determinar as propriedades efetivas macroscópicas de um material heterogêneo, a análise deve ser feita sobre um Elemento de Volume Representativo. Atendendo esta condição, foram utilizados os EVRs definidos anteriormente, para novas simulações, variando a geometria da seção transversal das fibras de reforço.

Para avaliar como as geometrias dos reforços afetam as propriedades efetivas do material no plano transversal às fibras, foram estudados reforços de formato circular, quadrado e triangular. No caso dos reforços quadrados e triangulares, foi tomado o cuidado de orientá-los de forma aleatória em relação ao plano, mantendo a hipótese de isotropia. Além disso, como mencionado na implementação numérica do modelo, foi mantido o mesmo valor para a área de cada reforço, independente da geometria, a fim de levar em conta somente a influência causada pelas diferentes formas das fibras sobre as propriedades efetivas do material.

Para o EVR do material com fração de volume de reforço de 0,1, foram realizados 50 ensaios computacionais para cada geometria proposta e os valores das propriedades efetivas obtidas em cada simulação foram avaliados estatisticamente. Os resultados para as três formas de reforço analisadas foram:

- Para fibras com seção transversal circular: a Figura 4.3 ilustra o histórico dos valores obtidos em cada ensaio e a Tabela 4.4 apresenta o resultado estatístico das propriedades efetivas.

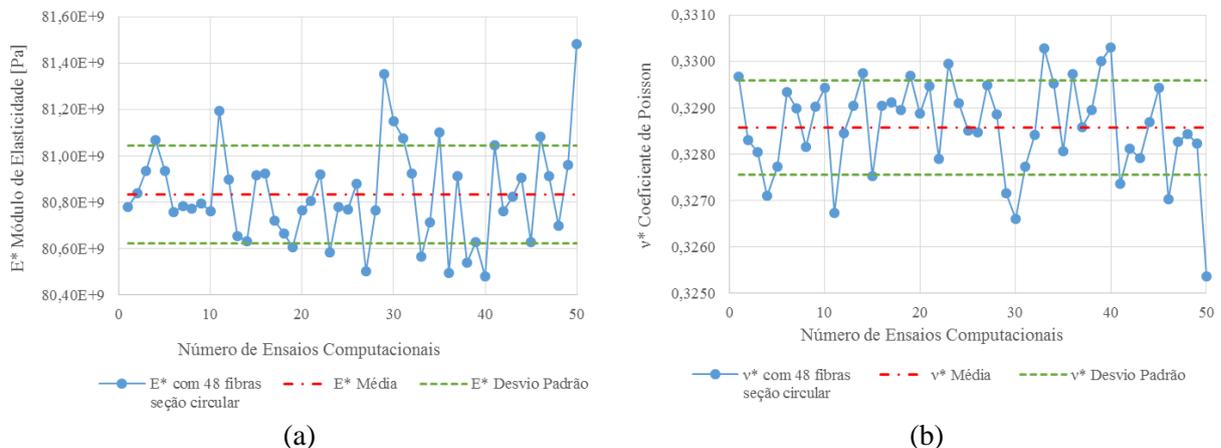


Figura 4.3 – Propriedades efetivas para o EVR com fração de volume de reforço de 0,1 e fibras de seção transversal circular. Em cada ensaio os reforços foram distribuídos de forma aleatória. (a) módulo de elasticidade efetivo. (b) coeficiente de Poisson efetivo.

Tabela 4.4 – Análise do EVR com fração de volume de reforço de 0,1 e fibras de seção transversal circular.

●	E* Módulo de elasticidade efetivo [Pa]	v* coeficiente de Poisson efetivo
Média	80,8332E+9	0,3286
Desvio padrão	209,5591E+6	0,0010

• Para fibras com seção transversal quadrada: a Figura 4.4 ilustra o histórico dos valores obtidos em cada ensaio e a Tabela 4.5 apresenta o resultado estatístico das propriedades efetivas.

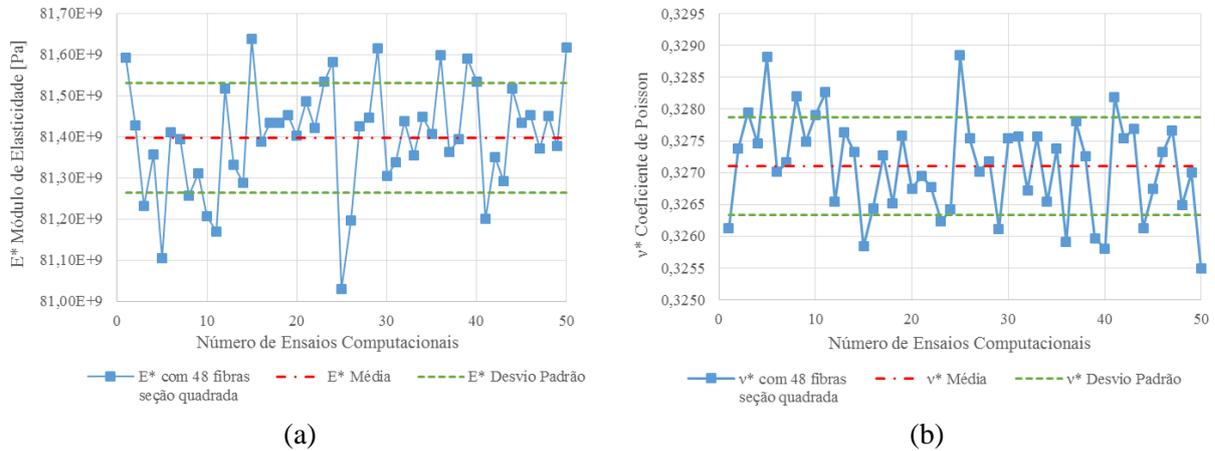


Figura 4.4 – Propriedades efetivas para o EVR com fração de volume de reforço de 0,1 e fibras de seção transversal quadrada. Em cada ensaio os reforços foram distribuídos de forma aleatória. (a) módulo de elasticidade efetivo. (b) coeficiente de Poisson efetivo.

Tabela 4.5 – Análise do EVR com fração de volume de reforço de 0,1 e fibras de seção transversal quadrada.

■	E* Módulo de elasticidade efetivo [Pa]	v* coeficiente de Poisson efetivo
Média	81,3982E+9	0,3271
Desvio padrão	133,2239E+6	0,0008

• Para fibras com seção transversal triangular: a Figura 4.5 ilustra o histórico dos valores obtidos em cada ensaio e a Tabela 4.6 apresenta o resultado estatístico das propriedades efetivas.

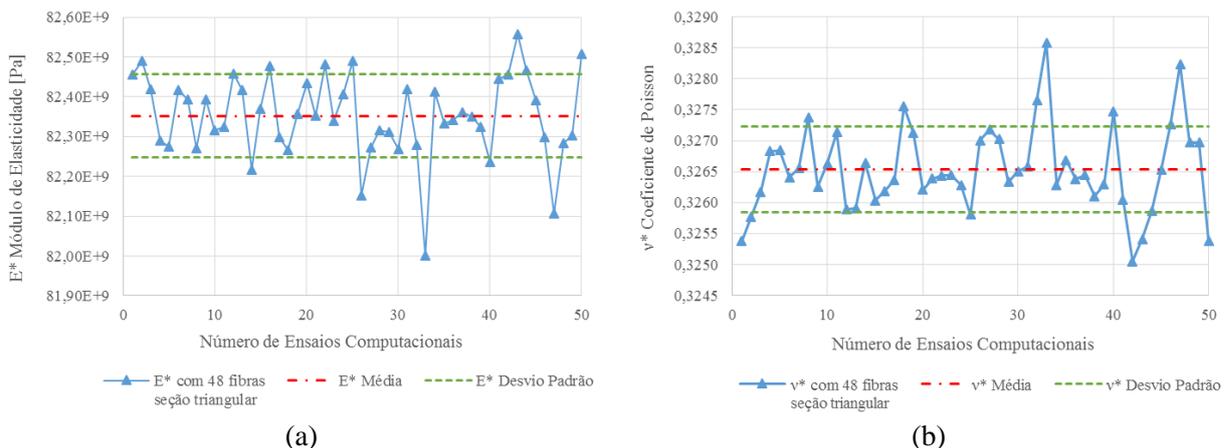


Figura 4.5 – Propriedades efetivas para o EVR com fração de volume de reforço de 0,1 e fibras de seção transversal triangular. Em cada ensaio os reforços foram distribuídos de forma aleatória. (a) módulo de elasticidade efetivo. (b) coeficiente de Poisson efetivo.

Tabela 4.6 – Análise do EVR com fração de volume de reforço de 0,1 e fibras de seção transversal triangular

▲	E* Módulo de elasticidade efetivo [Pa]	v* coeficiente de Poisson efetivo
Média	82,3519E+9	0,3265
Desvio padrão	104,2177E+6	0,0007

Para o EVR do material com fração de volume de reforço de 0,2, foram, igualmente, realizados 50 ensaios computacionais para cada geometria proposta e os valores das propriedades efetivas obtidas em cada simulação foram avaliados estatisticamente. Os resultados para as três formas de reforço analisadas foram:

- Para fibras com seção transversal circular: a Figura 4.6 ilustra o histórico dos valores obtidos em cada ensaio e a Tabela 4.7 apresenta o resultado estatístico das propriedades efetivas.

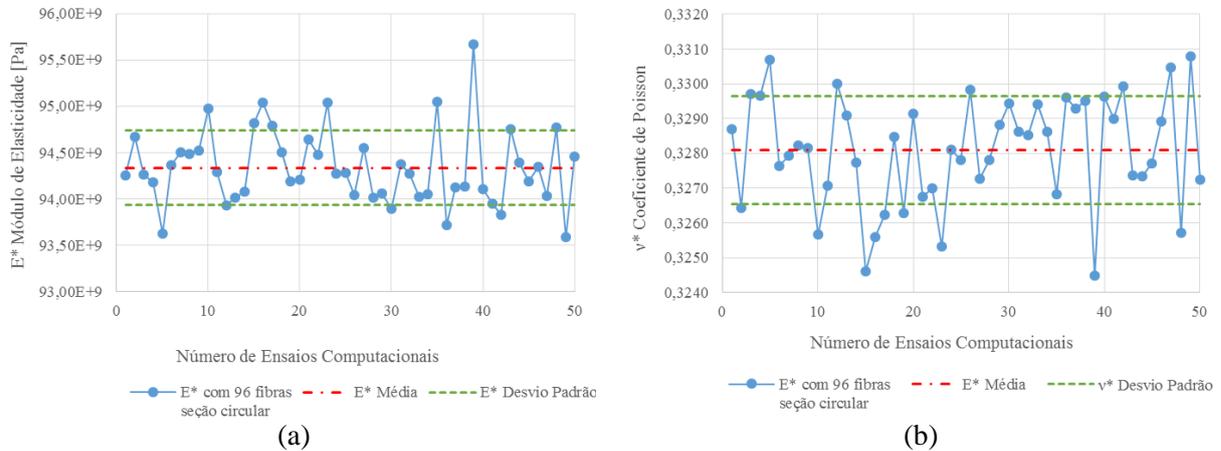


Figura 4.6 – Propriedades efetivas para o EVR com fração de volume de reforço de 0,2 e fibras de seção transversal circular. Em cada ensaio os reforços foram distribuídos de forma aleatória. (a) módulo de elasticidade efetivo. (b) coeficiente de Poisson efetivo.

Tabela 4.7 – Análise do EVR com fração de volume de reforço de 0,2 e fibras de seção transversal circular.

●	E* Módulo de elasticidade efetivo [Pa]	v* coeficiente de Poisson efetivo
Média	94,3370E+9	0,3281
Desvio padrão	400,8128E+6	0,0016

- Para fibras com seção transversal quadrada: a Figura 4.7 ilustra o histórico dos valores obtidos em cada ensaio e a Tabela 4.8 apresenta o resultado estatístico das propriedades efetivas.

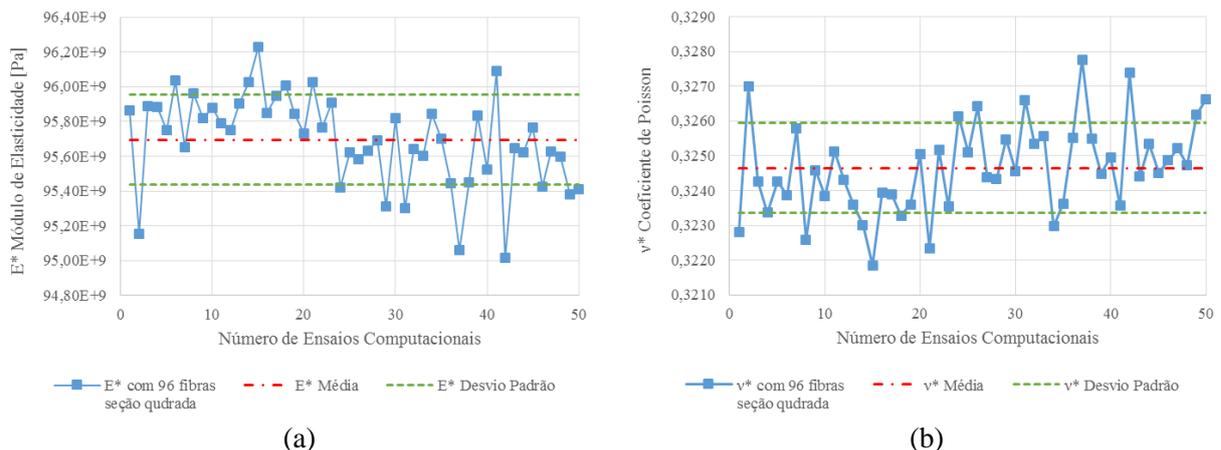


Figura 4.7 – Propriedades efetivas para o EVR com fração de volume de reforço de 0,2 e fibras de seção transversal quadrada. Em cada ensaio os reforços foram distribuídos de forma aleatória. (a) módulo de elasticidade efetivo. (b) coeficiente de Poisson efetivo.

Tabela 4.8 – Análise do EVR com fração de volume de reforço de 0,2 e fibras de seção transversal quadrada.

■	E* Módulo de elasticidade efetivo [Pa]	v* coeficiente de Poisson efetivo
Média	95,6946E+9	0,3246
Desvio padrão	259,2572E+6	0,0013

• Para fibras com seção transversal triangular: a Figura 4.8 ilustra o histórico dos valores obtidos em cada ensaio e a Tabela 4.9 apresenta o resultado estatístico das propriedades efetivas.

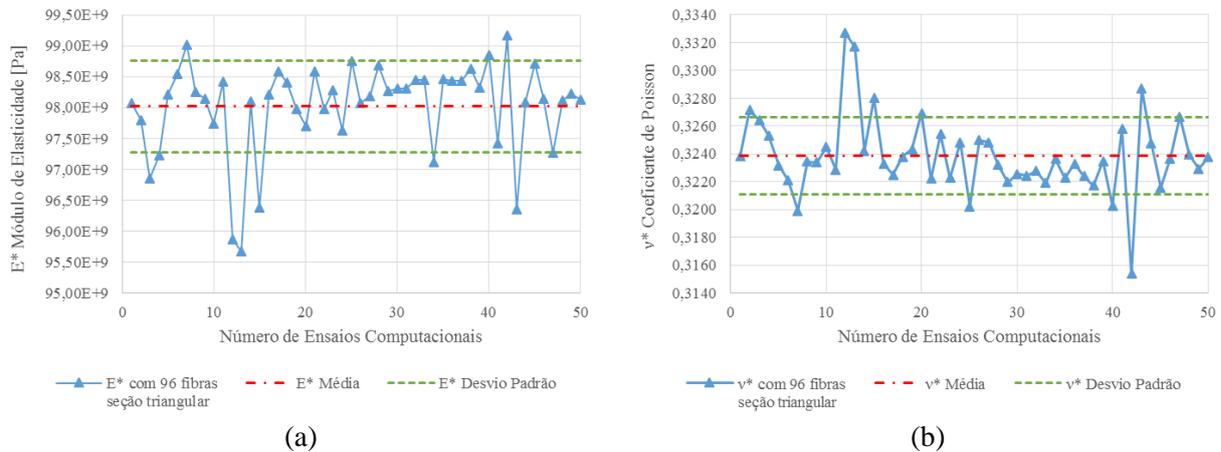


Figura 4.8 – Propriedades efetivas para o EVR com fração de volume de reforço de 0,2 e fibras de seção transversal triangular. Em cada ensaio os reforços foram distribuídos de forma aleatória. (a) módulo de elasticidade efetivo. (b) coeficiente de Poisson efetivo.

Tabela 4.9 – Análise do EVR com fração de volume de reforço de 0,2 e fibras de seção transversal triangular

▲	E* Módulo de elasticidade efetivo [Pa]	v* coeficiente de Poisson efetivo
Média	98,0199E+9	0,3239
Desvio padrão	738,5062E+6	0,0028

A Figura 4.9 apresenta uma comparação gráfica entre todos os resultados obtidos para o módulo de elasticidade efetivo no plano transversal às fibras. Verifica-se, para as duas frações de volume de reforço examinadas, que os valores calculados através da metodologia de homogeneização computacional aplicada neste trabalho ficaram entre os limites inferior e superior previstos pela Regra de Misturas, estando substancialmente mais próximos do valor do módulo de elasticidade do material da matriz, conforme pressuposto pela teoria (tópico 2.5).

Quanto à influência da geometria dos reforços, para ambas frações, a fibra de seção transversal triangular resultou no maior módulo de elasticidade efetivo para o plano em estudo, seguida pela fibra de seção quadrada e por último a fibra de seção circular. A variação entre o maior e o menor módulo de elasticidade produzido, para fração de volume de reforço de 0,1, foi de aproximadamente 1,90%. E para a fração de volume de reforço de 0,2 a diferença foi cerca de 3,90%.

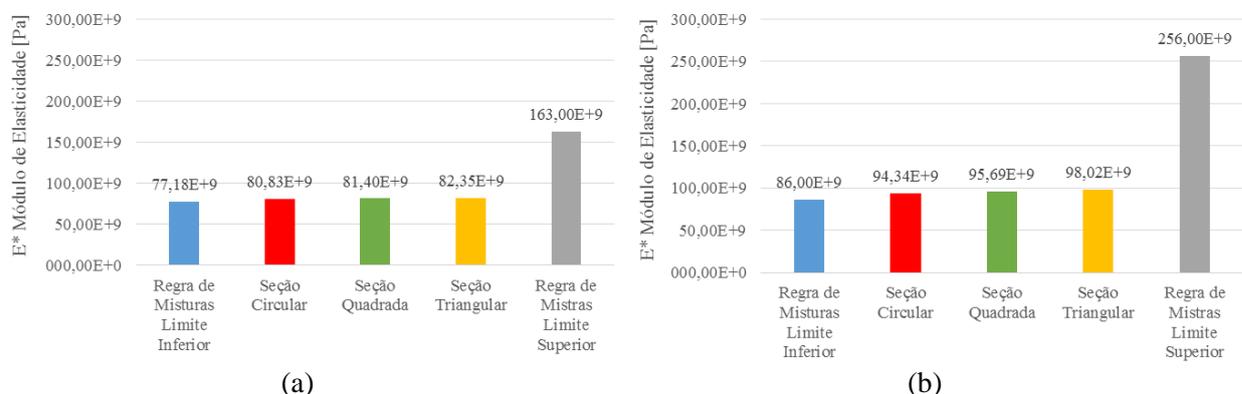


Figura 4.9 – Resultados para o módulo de elasticidade efetivo das formas de reforço analisadas. (a) fração de volume de reforço de 0,1. (b) fração de volume de reforço de 0,2.

De forma semelhante, a Figura 4.10 apresenta uma comparação entre todos os resultados obtidos para o coeficiente de Poisson efetivo. Neste caso, os valores calculados através da metodologia de homogeneização adotada foram inferiores ao próprio coeficiente de Poisson do material da matriz e exibiram um comportamento contrário ao esperado pela Regra de Misturas em relação à fração de volume

de reforço. Isto é, enquanto a Regra de Misturas prevê o aumento do valor do coeficiente de Poisson com o incremento da fração de volume de reforço, foi obtido um resultado menor para a fração de volume de reforço maior. Este fato pode ser decorrente da elevada rigidez atribuída ao material das fibras e merece um estudo mais detalhado e estendido para frações mais elevadas de volume de reforço, a fim de verificar se a tendência se confirma.

Para os casos abordados neste estudo, a maior diferença observada entre o coeficiente de Poisson da matriz e o coeficiente de Poisson efetivo calculado foi inferior a 2,00%. A respeito da influência da geometria da seção transversal das fibras, para a fração de volume de reforço de 0,1, a variação entre o maior e o menor coeficiente de Poisson efetivo, foi de aproximadamente 0,63%, produzido pelas seções triangular e circular, respectivamente. Para a fração de 0,2, a diferença foi cerca de 1,30%, gerada pelas mesmas formas de reforço.

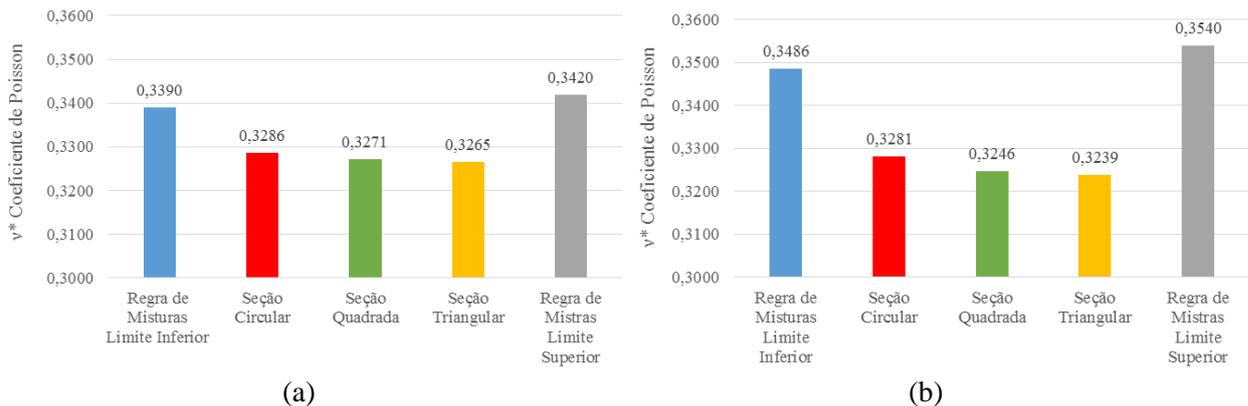


Figura 4.10 – Resultados para o coeficiente de Poisson efetivo das formas de reforço analisadas. (a) fração de volume de reforço de 0,1. (b) fração de volume de reforço de 0,2.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um estudo computacional a respeito de materiais compósitos reforçados por fibras alinhadas e aleatoriamente distribuídas na matriz. O foco da análise foi o plano transversal à direção das fibras, caracterizado por um comportamento isotrópico, onde foi avaliada a influência das geometrias destas fibras de reforço sobre as propriedades efetivas do plano.

Foram consideradas fibras com seção transversal de formato circular, quadrado e triangular, para duas frações de volume de reforço: 0,1 e 0,2. O problema foi abordado no contexto da elasticidade linear, com a hipótese de Estado Plano de Tensões (EPT) e procedimentos de homogeneização. Um algoritmo computacional foi implementado para gerar e analisar múltiplos modelos. Uma análise estatística foi realizada para definir um Elemento de Volume Representativo (EVR) do material. As propriedades efetivas do plano, para cada geometria proposta, foram também determinadas através de uma análise estatística sobre uma série de ensaios numéricas dos EVRs.

Pela comparação dos resultados obtidos demonstrou-se que:

- Para as frações de volume de reforço estudadas, as propriedades da matriz são dominantes nas propriedades efetivas do plano transversal às fibras, uma vez que os resultados ficaram mais próximos das propriedades da matriz do que das propriedades das fibras.
- Os limites superior e inferior das propriedades efetivas previstos pela Regra de Misturas são úteis como valores máximos e mínimos para o módulo de elasticidade. No entanto, não fornecem estimativas úteis no caso do coeficiente de Poisson.
- O coeficiente de Poisson efetivo pode resultar inferior ao coeficiente de Poisson do material da própria matriz, quando o material das fibras for suficientemente rígido.
- A influência da geometria da seção transversal das fibras de reforço sobre o módulo de elasticidade efetivo do plano transversal a elas é pouco significativa, podendo ser desprezada na maioria das aplicações práticas de engenharia. No entanto, os efeitos das pequenas variações do coeficiente de Poisson, podem ser significativos em certas aplicações.

- Embora não tenha sido o objetivo deste trabalho, cabe destacar que as tensões máximas observadas na interface entre as fibras e a matriz apresentaram diferenças significativas, conforme os resultados contidos no Apêndice B. Nas fibras de seção quadrada a tensão máxima foi superior a duas vezes a tensão máxima na interface entre as fibras de seção circular e a matriz. Para as fibras de geometria transversal triangular a tensão máxima na interface foi maior do que três vezes a tensão máxima entre as fibras de seção circular e a matriz.

5.1. Sugestões de trabalhos futuros

Para trabalhos futuros, sugere-se desenvolver um algoritmo computacional que permita a intersecção de fibras, para analisar casos com fração de volume de reforço mais elevadas. Analisar fibras com formas de seção transversal mais complexas e também orientadas ao longo do próprio plano avaliado. Estender o estudo realizado para o caso tridimensional. Analisar a interface entre as fibras e a matriz, através de modelos viscoelásticos, por exemplo. Estudar problemas não lineares, como matrizes de borracha, segundo modelos da hiperelasticidade. Avaliar a influência de poros nos materiais compósitos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Buroni, F. C., “**Modelagem e projeto computacional de materiais micro-porosos com distribuição aleatória utilizando uma formulação de elementos de contorno**”, Dissertação de mestrado em Engenharia Mecânica, PROMEC-UFRGS, Porto Alegre, RS. 2006.

Ghafaar M. A.; Mazen A. A.; El-Mahallawy N. A.; “**Application of the rule of mixtures and halpin-tsai equations to woven fabric reinforced epoxy composites**”, Journal of Engineering Sciences, Assiut University, Vol. 34, p. 227-236, 2006.

Jones, R. M., “**Mechanics of composite materials**”, Taylor & Francis, USA, 2nd edition, 1999.

Lee, S.M., “**International encyclopedia of composites**”, VCH, New York, v. 1-6, 1991.

Nemat-Nasser S. and Hori M., “**Micromechanics: overall properties of heterogeneous solids**”, North-Holland, Amsterdam, 2nd edition, 1999.

Parsaee A.; Shokrieh M. M.; Mondali M., “**A micro–macro homogenization scheme for elastic composites containing high volume fraction multi-shape inclusions**”, Elsevier, Computational Materials Science 121, p. 217–224, 2016.

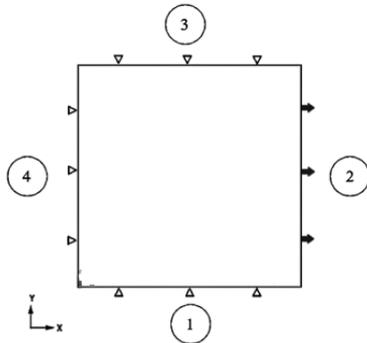
Pinho-da-Cruz J.; Oliveira J. A.; Teixeira Dias F., “**Asymptotic homogenisation in linear elasticity. Part I: Mathematical formulation and finite element modelling**”, Elsevier, Computational Materials Science 45, p. 1073–1080, 2009.

Oliveira J. A.; Pinho-da-Cruz J.; Teixeira Dias F., “**Asymptotic homogenisation in linear elasticity. Part II: Finite element procedures and multiscale applications**”, Elsevier, Computational Materials Science 45, p. 1081–1096, 2009.

Zohdi T. I.; Temizer I., “**A numerical method for homogenization in non-linear elasticity**”, Comput Mech 40, p. 281–298, 2007.

APÊNDICE A – CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno empregadas devem ser as mesmas que produziriam um campo de tensões ou deformações uniforme em um sólido homogêneo [Buroni, 2006]. Assim, neste trabalho foram adotadas condições de contorno de deslocamento linear, conforme apresentado na Figura A.1.



- Lado 1: deslocamento restrito em y;
- Lado 2: deslocamento aplicado em x:
 $\beta = (\text{medida do lado da amostra}) \cdot 0,01$
- Lado 3: deslocamento restrito em y;
- Lado 4: deslocamento restrito em x;

Figura A.1 – Condições de contorno adotadas, identificando os lados atribuídos ao modelo.

Para um corpo de prova homogêneo, os resultados dos campos de tensões são ilustrados nas Figuras A.2 até A.4.



Figura A.2 – Componente x da tensão.



Figura A.3 – Componente y da tensão.

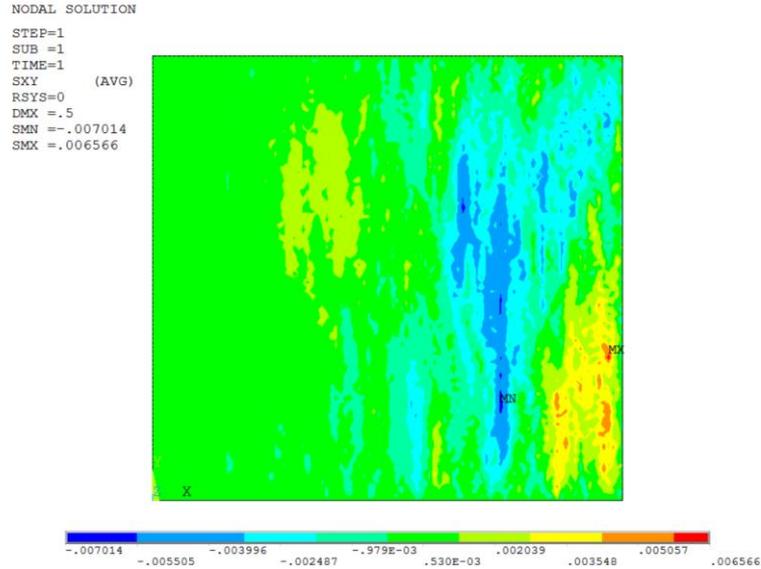


Figura A.4 – Tensão cisalhante xy .

Assim, fica demonstrado que as condições de contorno empregadas atendem os requisitos, ou seja, produzem um campo de tensões uniforme em um sólido homogêneo, representado pelo tensor de tensões definido pela equação A.1:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 786 & 0 \\ 0 & 259 \end{bmatrix} [MPa] \quad A.1$$

APÊNDICE B – CAMPO DE TENSÕES

As figuras abaixo ilustram as soluções dos campos de tensões obtidas pelo MEF, no caso contendo fração de volume de reforço de 0,1 para as três geometrias propostas como seção transversal das fibras de reforço estudadas:

- Fibras com seção transversal circular:

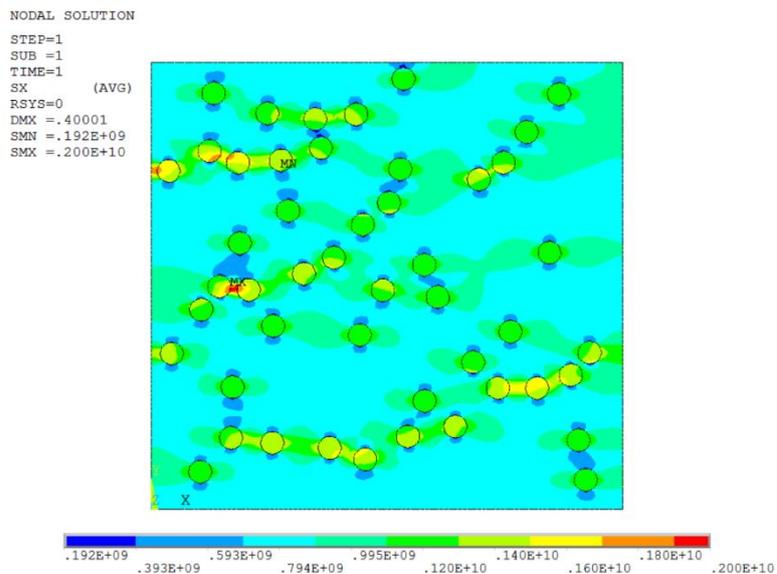
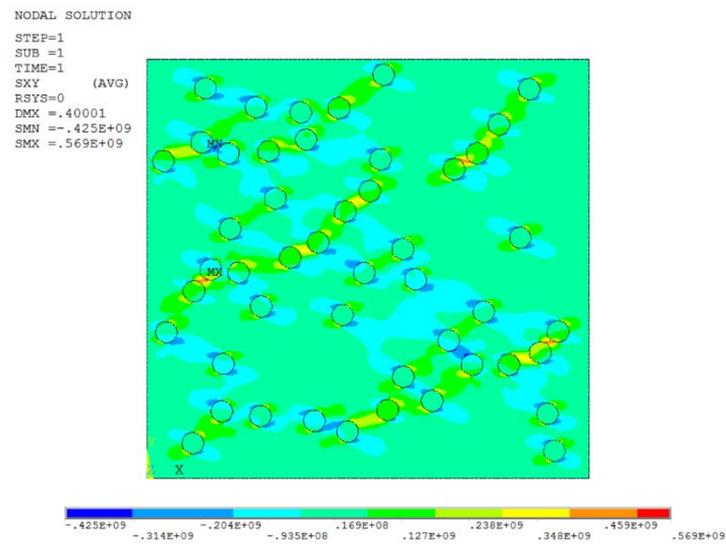
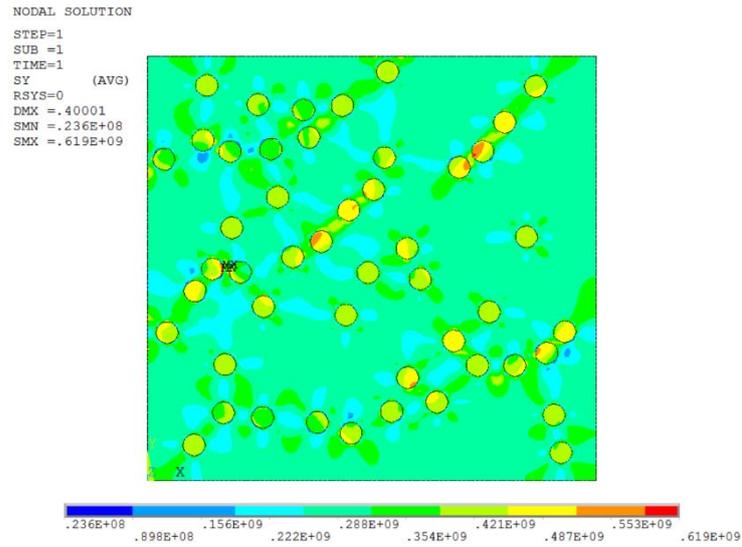
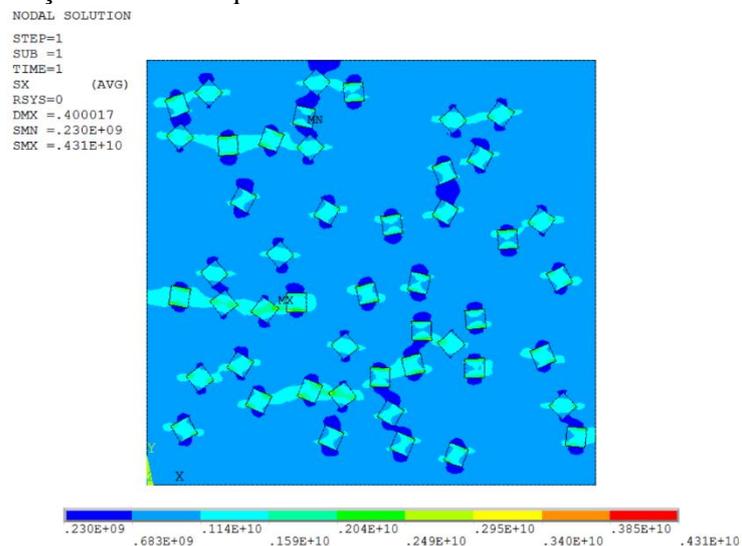


Figura B.1 – Componente x da tensão.



- Fibras com seção transversal quadrada:



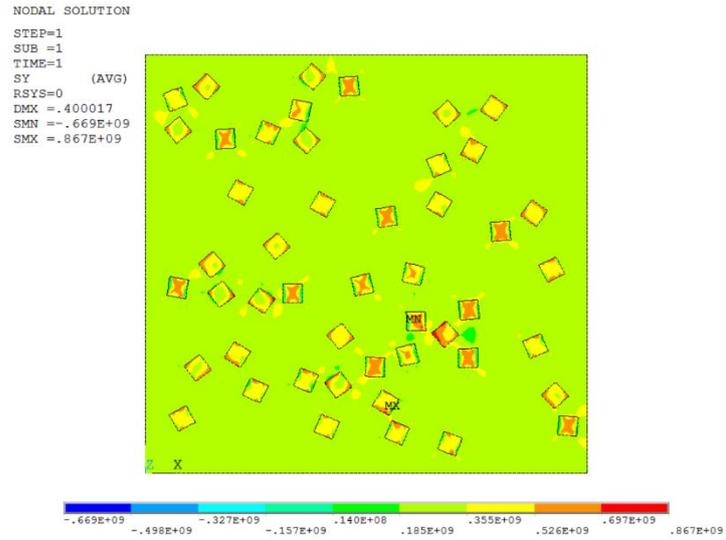


Figura B.5 – Componente y da tensão.

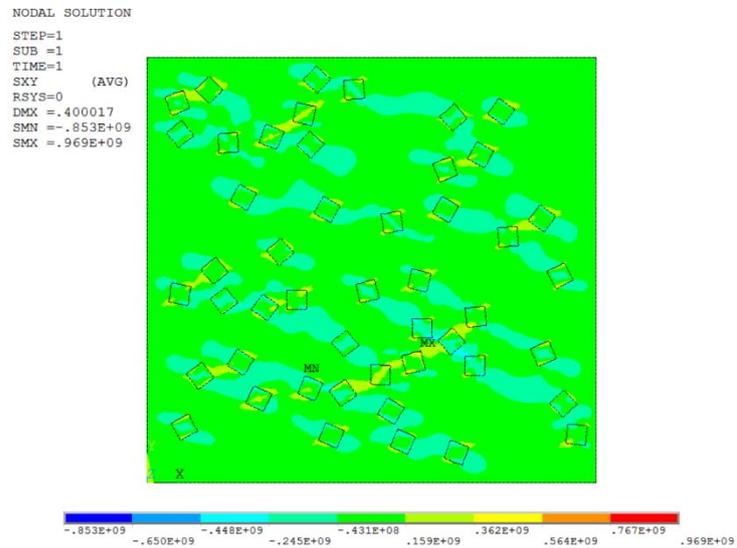


Figura B.6 – Tensão cisalhante xy.

- Fibras com seção transversal triangular:

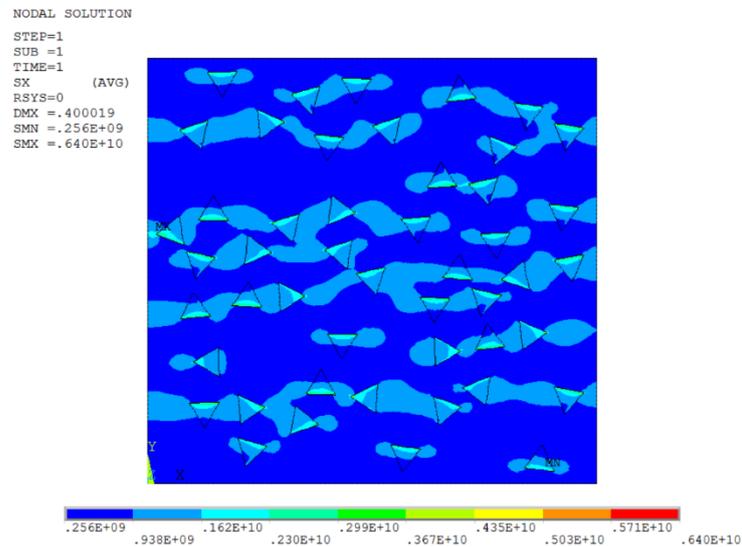


Figura B.7 – Componente x da tensão.

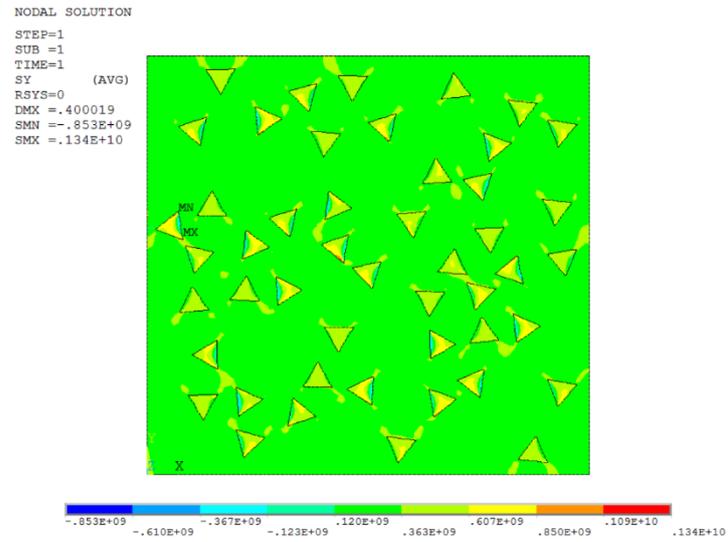


Figura B.8 – Componente y da tensão.

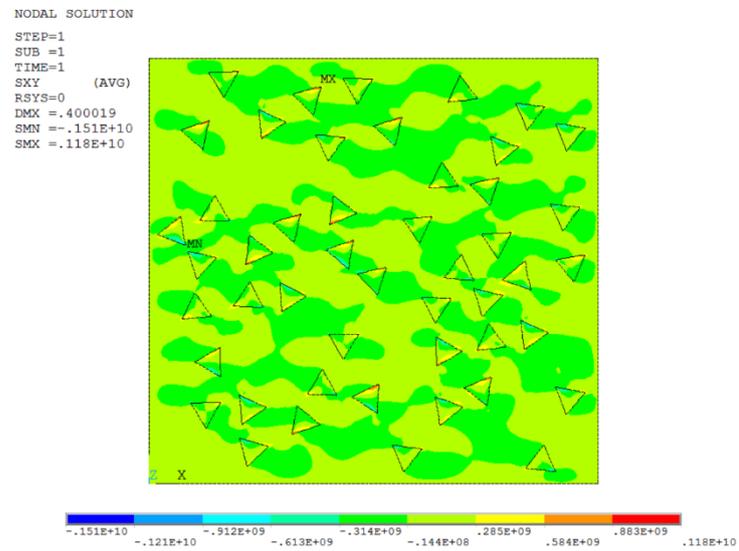


Figura B.9 – Tensão cisalhante xy.