

50,00

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Instituto de Física

EQUAÇÃO QUASE-LINEAR
PARA OSCILAÇÕES EM MAGNETOPLASMAS
NA APROXIMAÇÃO FRACAMENTE RELATIVÍSTICA*

Felipe Barbedo Rizzato

FT 52. (Pesq.)

Dissertação realizada sob a orientação dos Drs. Darcy Dillenburg e Ruth de Souza Schneider, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

Porto Alegre

1985

A Claudio, Sílvia

"... Salamander, burn for me; and
I'll burn for you." (Ian Anderson)

e à Marcia.

AGRADEÇO

Ao Dr. Darcy Dillenburg e a Dra. Ruth de Souza Schneider, pela saudável orientação.

A Dra. Victoria Elnecave Herscovitz pelas colaborações propulsivas.

Ag Grupo de Plasmas do Instituto de Física.

Aos meus insubstituíveis colegas de sala (Andrê, Marcia, Paulo, Walter e a mais assídua frequentadora (Stella Maris)).

À Maria Cecilia do Amaral pela fantástica datilografia.

Ao Dr. Cláudio Schneider pelas bem humoradas discussões sobre Física.

Ao Dr. Gerson Ludwig pelos comentários elucidativos.

RESUMO

O presente trabalho encontra-se dividido nas seguintes etapas: primeiramente são expostas algumas limitações presentes nas equações dinâmicas dos plasmas não-colisionais. A seguir obtem-se, de maneira heurística, algumas correções elementares às teorias lineares, correções estas que conduzem diretamente as as sim chamadas teorias quase-lineares em suas formas não relativística e relativística. Examina-se então o efeito da variação relavística da girofrequência sobre o coeficiente de difusão, numa aproximação tipicamente perturbativa.

ABSTRACT

The present work is divided in the following parts: firstly some limitations which are present in the dynamical equations for collisionless plasmas are discussed. Then we obtain, in a heuristic form, some elementary corrections to the linear theories, which directly lead to the so-called quasi-linear theories in its non-relativistic and relativistic forms. The effect of the relativistic variation of the gyrofrequency on the diffusion coefficient is examined in a typically perturbative approximation.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - LINEARIZAÇÃO DO MODELO ELETROSTÁTICO	6
III - TEORIA QUASE-LINEAR	14
IV - TEORIA QUASE-LINEAR DAS OSCILAÇÕES DE UM PLASMA MAGNETIZADO	36
V - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO TRANSVERSAL PARA UM PLASMA MAGNETIZADO NA APROXIMAÇÃO FRACAMENTE RELATIVÍSTICA	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81

I - INTRODUÇÃO

A linearização do conjunto de equações referentes a um determinado sistema físico é comumente adotada como primeiro passo para o estudo de tal sistema [He66]. Tão logo a amplitude dos modos lineares assim obtidos se torne muito alta, é, no entanto, absolutamente essencial a inclusão de refinamentos não lineares.

Em Física de Plasmas, a evolução das técnicas de análise seguiu esta mesma lógica.

Em 1946, Landau [La46] solucionava em essência, a versão linearizada das equações de movimento para um plasma não-colisional. Este trabalho, além de evidenciar as qualidades básicas do comportamento dos modos lineares já ressaltava as restrições às aproximações lineares.

A partir de então, o esforço direcionado no desenvolvimento de métodos de tratamento não-lineares sofreu natural intensificação. Até a presente data, no entanto, não podemos ainda afirmar a existência de teorias não-lineares suficientemente gerais em Física de Plasmas [Ts70]. A profusão de técnicas e métodos de análise é quase tão variada quanto os problemas que se quer abordar [Da72, AAP75, Ka79, GS79]. Mesmo modos relativamente globais de trabalho não são completamente aproveitados devido à sua excessiva sofisticação, [Da72] nascendo daí as aproximações que conduzem inexoravelmente aos problemas citados no presente parágrafo.

É, pois, complexa a tentativa de detalhar minuciosamente o que já foi feito no contexto de teorias não-lineares em Física

ca de Plasma. Nos contentamos, nesta introdução, com uma visão mais geral.

Podemos, aproximadamente, classificar o desenvolvimento da Física Não-Linear de Plasmas em duas linhas globais: a primeira delas, com larga aplicação em Plasmas de baixa temperatura, busca soluções particulares para o conjunto de equações do sistema. Como atestado de relevância deste tipo de abordagem, podemos mencionar a clareza, do ponto de vista físico e matemático, com que o conceito de soliton emerge [Da72]. A segunda linha, essencialmente objetiva a descrição de plasmas onde um grande número de variáveis coletivas randômicas é excitada. Neste caso, processos estatísticos são usados para filtrar a evolução temporal das variáveis de interesse físico. Quais variáveis são promediadas e quais não, esperamos elucidar dentro da aproximação quase-linear, aproximação esta considerada como típico exemplar da segunda linha mencionada.

Com os trabalhos de Vedenov e Drumond & Pines [VVS61, DP62] as teorias quase-lineares foram introduzidas na Física de Plasmas. Estes trabalhos buscavam a solução para o sistema de equações que descreviam a interação dos modos lineares derivados por Landau, com a função de distribuição de partículas em um plasma coulombiano. Esta função até então (em teorias lineares) suposta constante no tempo, passava com estes trabalhos, a qualidade de variável dinâmica. Embora desconsiderando a interação não linear entre os modos oscilatórios, a análise quase-linear já se mostrava razoavelmente poderosa na sua proposta de definir e contrastar as propriedades da interação partícula-onda.

Embora com algumas restrições a validade da teoria (a

serem expostas nos capítulos a seguir), o uso da análise quase-linear se fez freqüente a partir daí.

Além da solução de extensa variedade de problemas conectados com plasmas coulombianos livres de campos externos, generalizou-se a técnica na tentativa de solução das dificuldades oriundas da interação entre partículas e ondas eletromagnéticas genéricas (não puramente eletrostáticas) em plasmas submetidos a campos magnéticos externos. O próprio Vedenov, em seu trabalho já citado, se preocupava com este ponto.

Além dele mesmo, vários outros autores se encarregavam de explorar as propriedades emanantes de plasmas magnetizados. Todo este interesse, basicamente tinha suporte na hipótese de que tal modelo poderia retratar razoavelmente bem algumas máquinas de confinamento de plasmas [Ya63, RS66]. O modelo citado, embora poderoso em sua proposta de descrição da absorção e amplificação de radiação propagante, não incluía nem efeitos relativísticos e tampouco efeitos originados das flutuações associadas com o caráter discreto das partículas envolvidas. Usando a terminologia adequada poderíamos classificar este modelo como não-relativístico e puramente auto-consistente.

Seguindo a linha natural de evolução, a preocupação científica voltou-se tanto para a inclusão de efeitos relativísticos em plasmas autoconsistentes, (podemos citar o trabalho de Fidone et al. para sistemas magnetizados [FGM82]) quanto para a inclusão de efeitos flutuacionais em plasmas não relativísticos. (Aqui citamos o trabalho de C.S.Wu para o caso magnético [Wu68].)

Convém ressaltar que o primeiro trabalho, citado no parágrafo anterior embora essencialmente numérico, já levava em

consideração não-homogeneidades provenientes do volume finito do sistema.

Completando esta introdução, esquematizamos a seguir o corpo da dissertação.

No capítulo II é feita uma análise simplificada do trabalho desenvolvido por Landau quando de sua análise linear para plasmas homogêneos, coulombianos destituídos de campos externos. Também procuramos mostrar quais as condições que invalidam estas mesmas análises lineares.

No capítulo III, desenvolvem-se correções quase-lineares ao modelo citado acima. Com estas correções, dentro de aproximações não muito inibidoras, procuramos ultrapassar as restrições impostas pela teoria de Landau.

No capítulo IV a análise não-relativística de plasmas magnetizados é feita. Propriedades quase-lineares para oscilações eletromagnéticas são extraídas. Ao final do capítulo obtemos de forma abreviada, a versão relativística do sistema de equações expostas ao início do capítulo. Este capítulo e o anterior seguem a linha proposta por Akhiezer [AAP75].

O capítulo V contém a contribuição original da dissertação. Seguindo a curta distância, os trabalhos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa de Ignazio Fidone [FGM80], procuramos desenvolver soluções analíticas para o modelo proposto por este físico. Em essência fixamo-nos em correções fracamente relativísticas para a interação quase-linear entre campos de radiação quase-transversos e um plasma magnetizado. (Transversalidade definida em relação ao campo magnético externo aplicado). O campo de radiação caracteriza-se, além da citada quase-transversalidade, por

ser monocromático, com frequência próxima à frequência de cíclotron eletrônica. Íons são supostos fixos, o que é uma aproximação razoável, se considerarmos frequências de cíclotron eletrônica suficientemente altas. (Neste ponto recordamos que $m_{\text{íons}} \gg m_{\text{elétrons}}$).

É feita uma análise numérica dos resultados obtidos, resultados estes que formarão base para eventual publicação.

II - LINEARIZAÇÃO DO MODELO ELETROSTÁTICO

Um modelo amplamente utilizado em Teoria Cinética de Plasmas, é aquele que caracteriza o plasma como um meio homogêneo dotado de interação coulombiana, livre de campos externos e destituído de propriedades relacionadas com a estrutura puntual das partículas constituintes (assim como flutuações, colisões, radiação espontânea ...). Apesar das restrições, o modelo ainda é adequado para nossos propósitos que são os de motivar a necessidade de uma extensão da Teoria Linear.

Dentro deste tipo de abordagem, o conjunto de equações que descrevem matematicamente o sistema, é o que segue abaixo:

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) F_e - \frac{e}{m} \left(\nabla \phi \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \underline{v}} \right) = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla^2 \phi = - 4\pi e \left(\int d^3v F_e - n_0 \right) \quad (\text{II.2})$$

onde: $+e$ é a carga eletrônica ($e < 0$),
 m é a massa eletrônica,
 n_0 é a densidade iônica, e
 $\phi(\underline{r}, t)$ é o potencial elétrico.

Neste conjunto de equações, $F_e = F_e(\underline{r}, \underline{v}, t)$ fornece, em um instante t a densidade de elétrons, no espaço de fases μ , com coordenada espacial \underline{r} e com velocidade \underline{v} .

É conveniente ressaltar que para simplificações adicionais consideramos, no nosso plasma, apenas os elétrons como ent

dades dinâmicas. Os íons (que formam o plasma juntamente com os elétrons) entram no contexto somente através do parâmetro n_0 , de modo a fornecer a neutralidade de carga ao meio.

Coerentemente com a propriedade anterior, exige-se da função F_e :

$$\frac{1}{V} \int d^3r d^3v F_e(\underline{r}, \underline{v}, t) = n_0 \quad (\text{II.3})$$

onde V é o volume do sistema.

A equação (II.3) nos diz que a densidade média de elétrons deve igualar a densidade de íons.

A equação (II.1) que nos dá a evolução temporal da função F_e , é conhecida como equação de Vlasov (caso eletrostático), e a equação (II.2) é a equação de Poisson para o potencial elétrico.

Podemos notar, que o sistema de equações assim descrito é não linear, não linearidade esta presente no último termo da equação (II.1).

O que comumente se faz, na tentativa da solução deste tipo de problema, é a linearização completa do sistema de equações, conforme o exposto na introdução.

No nosso caso começamos escrevendo:

$$F_e(\underline{r}, \underline{v}, t) = f_0(\underline{v}) + f(\underline{r}, \underline{v}, t) \quad (\text{II.4})$$

onde supomos: $|f| \ll f_0$ e f_0 não dependente do tempo.

Aqui, f é encarada como uma pequena perturbação ao estado de equilíbrio homogêneo descrito pela f_0 .

A função f_0 é tal que:

$$\int f_0(\underline{v}) d^3v = n_0 \quad (\text{II.5})$$

Incorporando a condição (II.5) ao sistema de equações (II.1) e (II.2) e desprezando dentro deste sistema termos bilineares em f , obtemos o seguinte conjunto de equações lineares:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) f - \frac{e}{m} \left(\underline{v} \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right) = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\nabla^2 \phi = - 4\pi e \left(\int d^3v f \right) \quad (\text{II.7})$$

Este último sistema de equações foi resolvido por Landau em 1946 [La46]. O cientista soviético chegou a importantes conclusões que enumeramos aqui, sem dedução:

- O comportamento assintótico (no tempo) das funções $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$ e $\phi(\underline{r}, t)$ é, respectivamente:

$$f \sim \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}}(\underline{v}) e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r} t + i\underline{k} \cdot \underline{x}} + \sum_{\underline{k}} f_{\underline{k}}(\underline{v}) e^{-i\omega(\underline{k})t + i\underline{k} \cdot \underline{x}} \quad (\text{II.8})$$

$$\phi \sim \sum_{\underline{k}} \phi_{\underline{k}} e^{-i\omega(\underline{k})t + i\underline{k} \cdot \underline{x}} \quad (\text{II.9})$$

- As frequências $\omega(\underline{k})$ são obtidas a partir da seguinte relação de dispersão:

$$D(\underline{k}, \omega) \equiv 1 + \frac{4\pi n_0 e^2}{m k^2} \int d^3v \frac{\underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}}{\omega - \underline{k} \cdot \underline{v}} = 0 \quad (\text{II.10})$$

ou

$$D(\underline{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2 n_0}{m \kappa^2} \int \frac{\kappa \frac{df_0}{du}}{\omega - \kappa u} du$$

com $\omega(\underline{k}) = \omega_r(\underline{k}) + i \omega_i(\underline{k})$, $d^3v = d^2v_{\perp} du$

onde: $f_0(\mu) \equiv \int f_0(\underline{v}) d^2_{\perp} v$,

sendo a integração definida no plano perpendicular ao vetor \underline{k} .

Devemos notificar o leitor que os únicos modos oscilatórios presentes no plasma serão oriundos da relação (II.10) se a perturbação inicial for tal que se cumpra a condição de que $f(t=0, \mu) \equiv \int f(t=0, \underline{v}) d^2_{\perp} v$ seja uma função inteira na variável μ . Tal condição, para casos de interesse físico, não é excessivamente restritiva, sendo pois adotada daqui em diante [AAP75].

- Os contornos para as integrações definidas na equação (II.10) são descritos na figura II.1.
- Os coeficientes $a_{\underline{k}}$, $f_{\underline{k}}$ e $\phi_{\underline{k}}$ são obtidos a partir das condições iniciais da excitação da perturbação.
- As frequências definidas por (II.10) podem ser complexas. Dependendo, pois, do sinal da parte imaginária de uma destas frequências em particular, haverá amplificação ou atenuação das oscilações provenientes do termo correspondente.
- A possibilidade de conceituar corretamente os modos perturbativos como oscilações atenuadas ou amplificadas só tem validade se vigorar $\omega_r \gg \omega_i$. Somente nesta condição, podemos discernir adequadamente os fenômenos conectados com propriedades oscila-

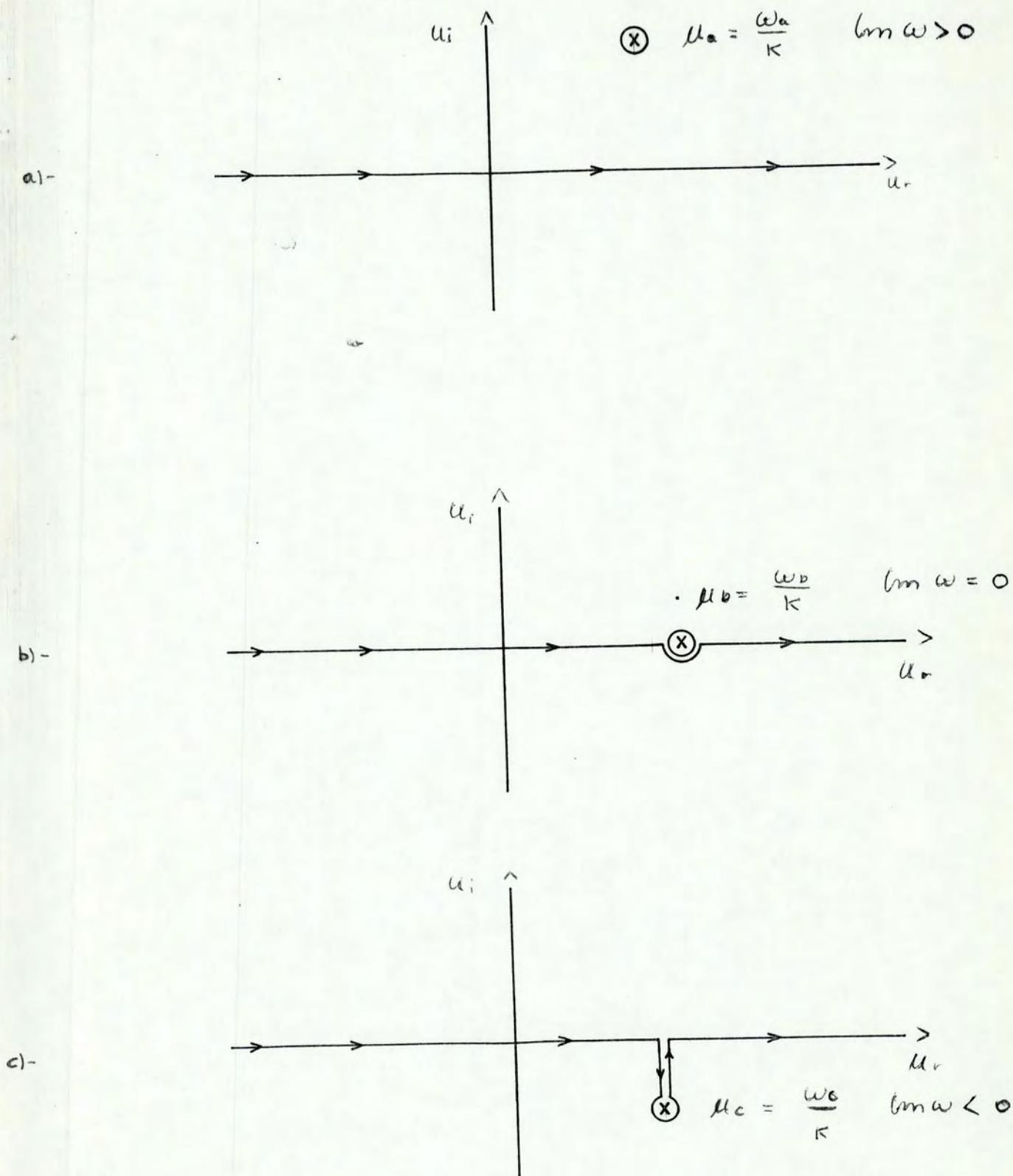


FIGURA I.1 As três figuras acima exemplificam três posicionamentos da variável ω , presente na equação (II.10), e os três contornos para a integração associados.

tórias dos fenômenos conectados com amplificação ou atenuação.

- A equação (II.8) apresenta a particularidade de conter termos com dependência temporal do tipo $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} t}$. Os termos associados a esta dependência são denominados termos balísticos, devido ao fato da informação ser propagada exatamente com a velocidade das partículas sob análise. Este termo não é um modo normal, e seus efeitos se cancelam se desejarmos medir quaisquer propriedades em instantes muito afastados do instante inicial. Especificamente, se desejarmos obter grandezas com velocidade integrada (grandezas independentes da velocidade, como densidade, temperatura ...) para tempos grandes a intensa oscilação de $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} t}$ garante um zero para a integral correspondente.
- É essencial mencionar, que o que chamamos de tempos assintóticos, são tempos suficientemente longos para que as propriedades oscilatórias da perturbação imposta ao plasma sejam dominantes. As propriedades associadas à amplificação e à atenuação também devem, dentro destes longos intervalos temporais, ser detetadas. Contudo, devemos ter presente que embora extensos, eles não devem ultrapassar, de maneira alguma, o tempo de relaxação da função de distribuição devido aos processos colisionais. A teoria descrita até aqui, não envolve tais processos.

Tratemos de evidenciar, agora, o colapso da teoria l_i near.

Conforme já havíamos mencionado, se alguma(s) das frequências da equação (II.8) contiver(em) uma parte imaginária positiva, a função f haverá de crescer de tal forma, que a partir

de um certo instante não se satisfaça mais a condição $|f| \ll f_0$. O mesmo comentário é válido para a equação (II.9).

Evidencia-se no parágrafo acima, a mais séria restrição à teoria linear, restrição esta que será melhor analisada a seguir.

Suponhamos que exista, dentro do plasma, uma única onda de frequência ω_p e de vetor de onda \underline{k} com amplitude do potencial associado igual a ϕ_0 . Devido aos já mencionados efeitos de amplificação e atenuação, este potencial ϕ_0 pode ser uma função do tempo.

Consideremos, então, partículas que se movam aproximadamente com a velocidade de fase desta onda. Somente tais partículas terão sucesso em trocar energia efetivamente com a onda em foco.

Denotando por w a velocidade das partículas no referencial em que a onda é estacionária, podemos deduzir, usando considerações energéticas do tipo

$$\frac{1}{2} m w^2 + e \phi(x, t) = \text{cte} \quad (II.11)$$

$$\left(\phi(x, t) = \phi_0(t) \cos kx \right)$$

que a máxima velocidade que propicia troca de energia é

$$w_{\text{máx}} \sim \left(\frac{2e\phi_0}{m} \right)^{1/2} \quad (II.12)$$

A velocidade definida pela equação (II.12), é aquela que corresponde a partículas aprisionadas pelos vales da onda.

A validade da teoria linear está baseada na hipótese de que o tempo que uma partícula gasta para percorrer um vale de onda de potencial, definido como

$$\Delta t_b = \frac{1}{k} \frac{1}{W_{max}} \quad (\text{II.13})$$

é tal que:

$$\omega_i \Delta t_b = \omega_i \frac{1}{k} \left(\frac{m}{e \phi_0} \right)^{1/2} \gg 1 \quad (\text{II.14})$$

De fato, a condição (II.14) nos indica que antes das partículas ressonantes ($v \sim v_{\text{fase da onda}}$) executarem vários oscilações no vale de potencial existe troca efetiva de energia, favorecendo largamente a amplificação ou atenuação da onda ϕ_0 . Resaltamos que o fato das partículas não executarem oscilações no potencial ϕ_0 , é equivalente a dizer que sua órbita não se afasta muito da órbita não perturbada por ϕ_0 , o que possibilita a aplicação de conceitos associados com linearização.

Da condição (II.14), verificamos que quanto menor for $|\phi_0|$, tanto mais precisa a teoria linear. No caso de termos ϕ_0 como uma função crescente no tempo, a validade da condição (II.14) há de ficar comprometida, o que indica a necessidade de construção de teorias mais refinadas.

III - TEORIA QUASE-LINEAR

Conforme nossas explorações ao conteúdo da teoria linear, levadas a cabo no capítulo anterior, pudemos detectar a existência de condições restritivas quanto à aplicação de tal formalismo.

Basicamente, o que se pôde depreender do que foi exposto no capítulo II, é que o uso das componentes do espectro oscilatório em um plasma homogêneo-coulombiano, como fonte das únicas variáveis dinâmicas do problema, é extremamente insatisfatório, principalmente no que tange ao estudo de sistemas instáveis, para tempos assintoticamente longos.

Nossa esperança é que o uso mais racional (ou mais completo) do sistema de equações originais, promovendo a qualidade de variáveis dinâmicas certas grandezas até então encaradas como estruturas paramétricas, nos auxilie na construção de uma teoria onde divergências e singularidades de caráter não-físico não estejam presentes.

Bem entendido fique, a teoria quase-linear é a mais simples das correções à teoria linear. Embora sendo a primeira de uso menos restrito do que a segunda, não pretende fazer o papel de definitiva.

Consideremos novamente o conjunto de equações (II.1) e (II.2).

$$\frac{\partial \bar{F}_e}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \bar{F}_e - \frac{e}{m} \left(\nabla \phi \cdot \frac{\partial \bar{F}_e}{\partial \vec{v}} \right) = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e \left(\int d^3v F_e - n_0 \right) \quad (\text{II.2})$$

Separaremos, como anteriormente, a função F_e em uma parcela oscilante f e em uma parcela homogênea f_0 . Novamente devemos encarar f como uma pequena perturbação à função f_0 .

O novo aspecto do conjunto de equações (II.1)-(II.2) é, dentro deste contexto:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \tilde{x} \cdot \nabla f_0 + \tilde{x} \cdot \nabla f - \frac{e}{m} \left(\nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}} + \nabla \phi \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{v}} \right) = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e \left(\int d^3v f + \int d^3v f_0 - n_0 \right). \quad (\text{III.2})$$

Relembrando-nos do fato de f_0 representar um sistema homogêneo e neutro, podemos de pronto, reduzir o sistema acima à seguinte forma:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} + (\tilde{x} \cdot \nabla) f - \frac{e}{m} \left[\nabla \phi \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{v}} \right) \right] = 0 \quad (\text{III.1})'$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e \int d^3v f \quad (\text{III.2})'$$

Ressaltamos, neste ponto, que conforme às idéias lançadas na introdução deste capítulo, não desprezamos "a priori", a possibilidade da função f_0 sofrer variações ao longo do tempo. Como veremos adiante este fato é essencial na formulação da teo

ria. (Evidentemente, quando esquematizamos a estrutura da teoria linear, no capítulo anterior, sempre consideramos a parcela f_0 como constante no tempo.)

Com o conjunto de equações (III.1)' e (III.2)' e com os novos horizontes abertos no parágrafo anterior estamos aptos a construir uma teoria mais sofisticada que a teoria linear. Vamos, no entanto, impor algumas restrições à nova teoria, restrições estas que apenas trazem um estreitamento insignificante ao campo de aplicação de nossa formulação.

Estas restrições, basicamente, dizem respeito ao modo de interação entre as "ondas" presentes no sistema (descritas por f) e as "partículas renormalizadas" do sistema (descritas por f_0).*

(É importante notar, aqui, que "partículas renormalizadas" não são partículas reais. A função f_0 não descreve as partículas reais que a função F_e descreve. Uma possibilidade de encarar "partículas renormalizadas" é como partículas reais destituídas do movimento oscilatório descrito pela f [Ts70].) Mas voltando ao problema da forma de interação "onda-partícula", o que efetivamente pode nos conduzir a uma descrição simplificada do problema é a realização do fato de que uma partícula ressonante não fique um tempo desmesuradamente longo aprisionada pela onda correspondente. Neste contexto, a órbita desta partícula não deverá ser radicalmente modificada pela presença de tal onda. O único modelo que pode materializar este nosso desejo, é o modelo de in

* Pretendemos justificar "a posteriori" a hipótese inicial de que existem ondas com relação de dispersão bem definida presentes no plasma. Pretendemos também comprovar que o conceito de interação ressonante também é de relevância fundamental dentro do contexto da teoria.

teração de partículas com um número suficientemente grande de ondas com velocidades vizinhas. Desta maneira, antes da partícula ressonante efetuar um ciclo de oscilação no vale de uma das ondas, ela poderá ser aprisionada por outra das ondas do grupo, seguindo assim, uma trajetória adequadamente simples, pelo menos no que toca aos nossos propósitos.

Analiseemos quantitativamente as restrições mencionadas.

Suponhamos a existência de um grupo de ondas com os respectivos vetores de onda distribuídos continuamente em uma faixa se estendendo de k a $k+\Delta k$ (Sistema Unidimensional).

Definamos o assim chamado "tempo de correlação" das ondas do grupo como:

$$\tau_c \equiv \frac{\lambda}{\Delta \left(\frac{\omega}{k} \right)} \quad (III.3)$$

onde λ é o comprimento de onda característico do grupo de ondas;

$\Delta \left(\frac{\omega}{k} \right)$ é a variação máxima da velocidade de fase das ondas do grupo;

ω_k é a frequência da onda de vetor \underline{k} .

τ_c , assim definido, mede o tempo que a onda mais rápida gasta para avançar uma distância λ sobre a mais lenta.

Relembrando-nos do conceito referente a Δt_b exposto na equação (II.13), e introduzindo:

$$\omega_b \sim \frac{1}{\Delta t_b} \quad (III.4)$$

o nosso conjunto de restrições sugere

$$\tau_c \omega_b \ll 1$$

(III.5)

De fato, sendo cumprida a condição (III.5) esperamos que antes das partículas ressonantes completarem uma oscilação no vale da onda correspondente, elas sejam carregadas pelas demais ondas.

De qualquer forma, o intuito do restante deste capítulo é demonstrar que o uso de condições como a (III.5) dentro do formalismo a ser desenvolvido, pode trazer simplificações quanto ao seu aspecto, permitindo referenciá-lo em relação à teoria linear, de forma a facilitar sua interpretação. Devemos lembrar que, no que se segue, pretendemos mostrar também que o uso de relações de dispersão ligando a frequência das ondas do grupo já mencionado com os respectivos vetores de onda é plenamente justificado, sendo estas relações, ademais, dentro de certos limites, idênticas às da teoria linear.

O uso de um conjunto infinito e contínuo de ondas, nos obriga a introduzir um conceito simplificador de cálculos. Este é o da média estatística sobre as fases das ondas envolvidas. Quantitativamente, a expressão que necessitaremos de imediato é:

$$\langle \phi(x,t) \rangle = \langle E(x,t) \rangle = \langle f(x,y,t) \rangle = 0 \quad (\text{III.6})$$

onde o símbolo " $\langle \rangle$ " denota a média estatística.

A equação (III.6) nasce da suposição de que os diversos modos componentes tanto do potencial ϕ como do campo E como da perturbação f , possuem fases randomicamente distribuídas. Por hipótese, no momento, não afirmamos que o mesmo aconteça com pro

dados destas quantidades.

Tomando a média estatística da equação (III.1) e usando as condições (III.6) obtemos, usando a hipótese adicional

$$\langle f_0 \rangle = f_0 \quad , \quad (III.7)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\bar{x} \cdot \bar{v}) f_0 + \frac{e}{m} \langle \bar{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \rangle = 0 \quad (III.8)$$

Subtraindo a equação (III.8) da equação (III.1)', obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\bar{x} \cdot \bar{v}) f + \frac{e}{m} \underbrace{\left(\bar{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right)}_{(1)} + \frac{e}{m} \underbrace{\left(\bar{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \right)}_{(2)} - \frac{e}{m} \underbrace{\langle \bar{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \rangle}_{(3)} = 0 \quad (III.9)$$

A equação (III.8) descreve a evolução temporal da função f_0 que representa nossas partículas renormalizadas. A equação ((III.9), por sua vez, descreve o comportamento da função f .

Ora, se supusermos que as perturbações criadas no sistema são pouco intensas (pelo menos nos estágios iniciais), podemos argumentar que os termos (1) e (3) da equação (III.9) são pequenos em relação ao termo (2). Vale notar, que os "pequenos" termos (1) e (3) descrevem a interação da perturbação f com ela mesma, enquanto o termo (2) descreve a interação de f com f_0 . Notando ainda, que escrevendo $F_e = f_0 + f$ (onde f_0 é homogênea), implicitamente estamos afirmando que f , no seu desenvolvimento em modos de Fourier não contém a componente referente ao vetor $k=0$. Desta forma, afirmar que (1) e (3) descrevem a auto-interação da

função f , é o mesmo que afirmar que (1) e (3) estão representando a interação entre modos perturbativos oscilatórios do problema.

Escrevamos a equação (III.9) com as aproximações acima citadas.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\dot{x} \cdot \nabla) f + \frac{e}{m} \left(\underline{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \right) = 0 \quad (\text{III.10})$$

A equação (III.10) deve ser resolvida simultaneamente com a equação (III.8) e com a equação (III.2)', para a obtenção da solução completa do problema.

De acordo com estas equações, o que basicamente notamos é que a diferença de aspecto entre a teoria linear e a quase-linear reside na presença do último termo da equação (III.8), termo relativamente pequeno.

Dentro do espírito de uma correção não muito dramática à teoria linear, por hipótese escreveremos as grandezas oscilatório-perturbativas na forma de expansão em modos normais para tempos suficientemente longos:

$$G(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k} \neq 0} \hat{G}(\underline{k}, t) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega(\underline{k})t)} \quad (\text{III.11})$$

O símbolo \hat{G} , representa uma grandeza arbitrária.

O que esperamos, e o que de fato ocorre, merece ser classificado em dois itens:

- i) A relação entre $\omega(\underline{k})$ e \underline{k} , dentro de aproximações adicionais às que já foram feitas, é a relação obtida pela teoria linear, on

de, no entanto, $f_0(\underline{v}, t)$ substitui $f_0(\underline{v}, t=0)$.

- ii) Considerando $\omega(\underline{k})$, acima, como puramente real, a função $|\hat{G}(\underline{k})|_{\underline{k} \neq 0}^2$ tem sua derivada temporal determinada por formas bilineares dela mesma. Da mesma forma, a função $\hat{F}_e(k=0, t) = f_0(\underline{v}, t)$ tem sua derivada temporal determinada por formas bilineares no campo elétrico flutuacional.

Dito isto, busquemos a demonstração "formal" de toda a teia de idéias com que estivemos trabalhando.

De início, relembremo-nos de nossas hipóteses sobre fraca dependência temporal das funções $\hat{G}(\underline{k}, t)$ e f_0 . Ademais, por uma questão de compatibilidade a ser exibida brevemente, aceitemos as frequências $\omega_r(\underline{k}, t)$ como funções de fraca dependência temporal.

Escrevendo f como:

$$f(x, \underline{x}, t) = \sum_{\underline{k} \neq 0} \hat{f}_{\underline{k}}(\underline{x}, t) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_r(\underline{k}) t)} \quad (\text{III.12})$$

Obtemos, pela equação (III.10)

$$\frac{\partial \hat{f}_{\underline{k}}}{\partial t} + i[\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_r(\underline{k}) t] \hat{f}_{\underline{k}} = i \frac{e}{m} \hat{\phi}_{\underline{k}}(t) \left(\underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \right) \quad (\text{III.13})$$

Aqui, já foi usada a hipótese de que a dependência de ω_r no tempo, provinda de alguma forma do termo bilinear da equação (III.8), gera termos de ordem excessivamente alta se incluídos na passagem da equação (III.10) à equação (III.13). Neste ponto, já é interessante analisar a questão da compatibilidade mencionada anteriormente.

Especificamente, escrevamos a "relação de dispersão qu se-linear" na forma

$$R(\omega, \underline{k}, \{f_0(t)\}) = 0$$

com R dependendo funcionalmente de f_0 . Então:

$$\delta R = 0 = \frac{\partial R}{\partial \omega} \delta \omega + \int \frac{\delta R}{\delta f_0(\underline{x})} \delta f_0(\underline{x}) d^3 \underline{v}$$

ou

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} \dot{\omega} = - \int \frac{\delta R}{\delta f_0(\underline{x})} \frac{\partial f_0}{\partial t} d^3 \underline{v} \Rightarrow \dot{\omega}(\underline{k}) = - \frac{\int \frac{\delta R}{\delta f_0(\underline{x})} \frac{\partial f_0}{\partial t} d^3 \underline{v}}{\partial R / \partial \omega}$$

Examinando a última igualdade, nos certificamos de que a existência de R, tal que $\partial R / \partial \omega_{\underline{k}} \neq 0$, implica no fato de que as ordens de grandeza de $\frac{\partial f_0}{\partial t}$ e $\dot{\omega}$ são equivalentes.

A solução integral da equação (III.13) é:

$$\hat{f}_{\underline{k}}(\underline{x}, t) = \frac{i}{m} e^{i(\omega(\underline{k}) - \underline{k} \cdot \underline{x}) t} \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\underline{k} \cdot \underline{v} - \omega_{\underline{k}}) t'} *$$

$$* \hat{\phi}_{\underline{k}}(t) \underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}(\underline{v}, t')$$
(III.14)

Neste ponto, devemos chamar a atenção para a expansão expressa pela forma (III.12) e suas conseqüências.

Na equação (III.12) não consideramos, como no capítulo II, os termos balísticos contendo exponenciais do tipo $e^{i \underline{k} \cdot \underline{v} t}$. O que justifica este nosso procedimento, é o fato de que o termo bilinear na perturbação, presente na equação (III.8) envolverá

tanto integrações em \underline{v} como em \underline{k} após a realização da análise de Fourier sobre as equações (III.1) e (III.2). Ora, supondo um espectro suficientemente largo e suficientemente regular, as integrações em \underline{k} eliminam de fato, a contribuição dos mencionados termos à função f dentro da aproximação de tempos assintoticamente longos. Da mesma forma, supondo a perturbação inicial $f(\underline{r}, \underline{v}, t=0)$ adequada, a equação de Poisson não revela estes termos balísticos em vista à integração em velocidade.

De posse destas idéias, nosso próximo passo é a substituição da equação (III.14) na equação de Poisson, expressa pela equação (III.2).

Temos, desta forma:

$$\hat{\phi}_{\underline{k}}(t) = \frac{4\pi i e^2}{m \kappa} \int dt' I(t, t') \phi_{\underline{k}}(t') \quad (III.15)$$

onde

$$I(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i[k\omega - \omega(t)](t-t')} \frac{\partial f_0}{\partial \omega}(\omega, t')$$

com

$$f_0(\omega, t) \equiv \int d^2 \underline{v}_{\perp} f_0(\underline{x}, t)$$

Nas relações acima, velocidades paralelas (ω) e velocidades perpendiculares (\underline{v}_{\perp}) são definidas relativamente ao vetor de onda \underline{k} .

Na relação (III.15), a função $I(t, t')$ será apreciavelmente diferente de zero se a diferença entre t e t' não for muito grande. De fato, sendo $(t-t')_{\text{máx}} \equiv \Delta t$ grande, o integrando os

cila violentamente, resultando disto, uma baixa contribuição numérica ao valor da integral.

Resta-nos saber quão pequena é a diferença $(t-t')$.

Seja Δt , como já definido, a máxima diferença entre t e t' , tal que a integral que ocorre na equação (III.15) não se anule.

Supondo f_0 como uma função de variações suficientemente limitadas até uma velocidade v , a partir da qual $f_0 \sim 0$, podemos escrever:

$$\Delta t \lesssim (k v^*)^{-1} \quad (\text{III.16})$$

Ademais, definindo $\omega_j(\underline{k})$ pela relação $\omega_j(\underline{k}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \phi(\underline{k}, t)$, afirmamos aqui que nossa opção será por oscilações para as quais seja satisfeita a condição:

$$\Delta t \omega_j(\underline{k}) \ll 1 \quad (\text{III.17})$$

A condição (III.17) nos diz que trabalharemos com ondas cuja energia é lentamente trocada com as partículas durante o intervalo efetivo de interação $(t-t')$. Como ficará claro adiante, é justamente supondo condições como a (III.17), que nos fica possível a introdução de propriedades referentes a ondas de características bem definidas interagindo com partículas ressonantes.

Ademais, supondo que a taxa de variação da amplitude das ondas presentes no plasma seja semelhante à taxa de variação da função f_0 nas regiões de ressonância, podemos inferir que

$$\Delta t \left[\tau(\omega) \right]^{-1} \ll 1 \quad (\text{III.18})$$

onde

$$\tau(\omega)^{-1} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right] \quad (\text{III.19})$$

(Será interessante notar, ao fim dos próximos cálculos, que a supressão da dependência temporal da função f_0 , nos conduz diretamente à teoria linear de Landau exposta no capítulo anterior.)

Dentro destas condições, podemos reescrever a equação (III.15) na seguinte forma:

$$\hat{\phi}_k(t) = \frac{4\pi e^2}{m\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{t-\Delta t}^t dt' \phi_k(t') \frac{\partial f_0}{\partial \omega}(\omega, t') e^{-i[k\omega - \omega_k(t)](t-t')} \quad (\text{III.20})$$

Relembrando das equações (III.17) e (III.18), podemos aproximar a equação (III.) para

$$\hat{\phi}_k(t) = \frac{4\pi e^2}{m\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \phi_k(t) \frac{\partial f_0}{\partial \omega}(\omega, t) \int_{t-\Delta t}^t dt' e^{i(k\omega - \omega_k - i\omega_i - i/\tau(\omega))(t-t')} \quad (\text{III.21})$$

se nos lembrarmos que:

$$e^x \sim 1+x \quad \text{se } x \ll 1.$$

Na equação (III.21), como o comportamento das funções $\phi_k(t)$ e $\frac{\partial f_0}{\partial \omega}$ já foi extraído da integral temporal, e como, de qualquer maneira a mencionada integral não é efetiva para grandes va

lores de $(t-t')$, podemos colocar $\Delta t \rightarrow \infty$.

Obtemos, desta forma:

$$\int_{t-\Delta t}^t dt' e^{i(kw - \omega_r - i\omega_i - i/\tau)(t-t')} = \frac{-i \left(1 - e^{i(kw - \omega_r - i\omega_i - i/\tau)(t-t')} \right)}{kw - \omega_r - i\omega_i - i/\tau} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{-i}{kw - \omega_r - i\omega_i - i/\tau} \quad (\text{III.22})$$

Ora, supondo ω_i próximo de zero e $1/\tau(\omega)$ também próximo de zero, podemos aproximar a relação acima para:

$$\frac{-i}{kw - \omega_r - i\omega_i - i/\tau} \sim \pi \frac{-i}{kw - \omega_r - i\omega_i - i/\tau} + \pi \delta(\omega - kw) \quad (\text{III.23})$$

A obtenção da igualdade (III.22) supõe $\omega_i + \frac{1}{\tau(\omega)}$ como positivo. Por esta mesma razão vale a escolha do contorno no espaço de velocidades paralelas que justifica o uso da relação (III.23). Se porventura $(\omega_i + \frac{1}{\tau(\omega)})$ for menor do que zero, ou igual a zero devemos usar a relação (III.23) como prolongamento analítico do caso $(\omega_i + \frac{1}{\tau}) > 0$.

Tal procedimento, já retratado na figura II.1 é o único compatível com a versão linearizada e causal proposta por Landau.

Supondo $\phi_k(t) \neq 0$, escrevemos a equação (III.21) da seguinte forma:

$$1 - \frac{4\pi e^2}{m\kappa} \left[\oint \frac{1}{kw - \omega_r - i\omega_i - i/\tau} \frac{\partial f_0}{\partial w} dw - i\pi \frac{1}{k} \frac{\partial f_0}{\partial w} \right]_{\omega=kw} = 0 \quad (\text{III.24})$$

Na integral da relação (III.24) apenas as velocidades para as quais $\omega \neq kw$ estão envolvidas. Uma suposição razoável (a ser justificada mais tarde), é que a função f_0 não se altera muito para velocidades não ressonantes com as ondas envolvidas. Nessas condições $\frac{1}{\gamma} \approx 0$ dentro da integral. Isto nos permite dizer que a "relação de dispersão quase-linear" é obtida trivialmente da relação de dispersão linear, substituindo adiabaticamente $f_0(\omega, t=0)$ por $f_0(\omega, t)$.

Neste ponto, podemos chamar a atenção para o fato de que a decomposição da perturbação $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$ em ondas com relação de dispersão bem definida fica justificada dentro das restrições usadas. Ademais, pela estrutura da relação de dispersão quase-linear, fica patente que a taxa de variação da função $\omega(\underline{k}, t)$ é bastante baixa, como já havia sido suposto anteriormente. Para verificarmos esta última assertiva basta buscarmos a solução da equação (III.24) segundo técnicas empregadas para a solução de sua versão pertinente à teoria linear [KT73].

Busquemos então a equação final para a evolução da função f_0 .

Usando a equação de Poisson juntamente com a equação (III.14), ambas inseridas ao lado direito da equação (III.8) temos:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \left\langle \sum_{\underline{k}, \underline{k}'} \phi_{\underline{k}}^*(t) \int_0^t dt' e^{i(k\underline{w} - \omega(t))(t-t')} \phi_{\underline{k}'}(t') \right\rangle \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \quad (III.25)$$

com:

$$\phi(\underline{x}, t) \text{ real} \Rightarrow \phi_{-\underline{k}}^* = \phi_{\underline{k}}$$

Valendo-nos dos comentários feitos após a equação (III.6) com relação à independência estatística dos modos oscilatórios envolvidos, podemos completar a caracterização das fases randômicas da seguinte maneira:

$$\langle G_{\underline{k}} G_{\underline{k}'}^* \rangle = |G_{\underline{k}}|^2 \delta_{\underline{k}\underline{k}'} \quad (\text{III.26})$$

onde G é uma grandeza arbitrária.

Com esta última igualdade, podemos escrever a equação (III.25) como:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} J_i \quad (\text{III.27})$$

onde

$$J_i(\underline{v}, t) = \frac{e^2}{m^2} \sum_j \int d^2 k_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} k_{\perp j} \phi_{\underline{k}}^*(t) \int dt' e^{i(k_{\parallel} v - \omega)(t-t')} \phi_{\underline{k}}(t') \frac{\partial f_0}{\partial v_j} \quad (\text{III.28})$$

Aqui, k_{\parallel} e k_{\perp} denotam as componentes paralela e perpendicular dos vetores de onda com relação à velocidade \underline{v} .

Dentro do mesmo espírito que nos possibilitou a formulação dos argumentos que se seguiram à equação (III.16), afirmamos que a diferença $(t-t')$ na equação (III.28) não deve ser alta. Precisamente, se supusermos um espectro excitado em torno de um $k_{\parallel 0}$, com largura Δk_{\parallel} , podemos colocar:

$$\left(\omega - \frac{\partial \omega}{\partial k_{\parallel}} \right) \Delta k_{\parallel} (t-t') \lesssim 1 \quad (\text{III.29})$$

Neste ponto, já nos é possível a obtenção formal da con

dição (III.5).

De fato, quando da obtenção da equação (III.22) (bem como da futura obtenção da equação (III.31)), supusemos como válidas as seguintes condições:

- No intervalo efetivo de interação Δt a amplitude do potencial elétrico pouco variava

$$\text{ou} \quad \Delta t \ll \omega_i^{-1}$$

- No intervalo efetivo de interação Δt a função distribuição f_0 não sofria alterações notáveis

$$\text{ou} \quad \Delta t \ll \tau(w)$$

Escrevendo $\Delta T \sim (\Delta(\omega - kw))^{-1}$ (segundo a equação (III.29)), temos:

$$\Delta(\omega_r - kw) \ll \tau^{-1}, \omega_i$$

Considerando a igualdade (válida para a ressonância)

$$\Delta(\omega - kw) \sim \Delta k \left[\frac{\partial \omega}{\partial k} - \frac{\omega}{k} \right] = k \Delta \left(\frac{\omega}{k} \right) \equiv \tau_c^{-1}$$

(última identidade definida na equação (III.5)), podemos então obter:

$$\tau_c \ll \tau_i, \omega_i^{-1}$$

Examinando a equação quase-linear em ordem de grandeza (caso unidimensional) podemos escrever (ver equação (III.32)):



$$\tau^{-1} \sim \frac{D}{(\Delta v)^2} \quad \text{com } \Delta v = v_i - v_r \quad (\text{intervalo ressonante})$$

Estimando D como:

$$D \sim \frac{e^2}{m^2} |E_{\sim k}|^2 \frac{1}{v}$$

e escrevendo $\Delta v = \frac{\Delta v}{\Delta k} \Delta k \sim v \frac{\Delta k}{k} = (kT_{ac})^{-1}$ (se $\omega_k \cong \omega_{pe}$, condição válida para a maioria das situações de interesse) temos, considerando $\int |E_{\sim k}|^2 dk \sim |E_{\sim k}|^2 \Delta k \sim \frac{|E|^2}{8\pi}$; onde $|E|$ é a intensidade total do campo, a seguinte seqüência de relações

$$\frac{1}{\tau} \sim \tau_c^3 \left(\frac{e k E}{m} \right)^2 \sim \tau_c^3 \tau_b^{-4}$$

ou

$$\frac{\tau_c}{\tau} \sim \left(\frac{\tau_c}{\tau_b} \right)^4$$

De acordo com os argumentos expostos anteriormente:

$$\frac{\tau_c}{\tau} \sim \left(\frac{\tau_c}{\tau_b} \right)^4 \ll 1$$

de onde podemos extrair finalmente a condição (III.5).

Encerrando a presente derivação, notamos a essencial condição de que a relação de dispersão não deve ser linear, pois então $T_{ac} \rightarrow \infty$.

Ademais, ressaltamos que os argumentos acima expostos valem no caso de interação ressonante entre ondas e partículas $\left(\frac{1}{\tau} + \omega(k) \sim 0 \right)$, caso este que predomina sobre os demais.

Rigorosamente falando, uma condição como a (III.29) não

justifica plenamente o uso de diferenças $(t-t')$ muito pequenas; a condição mencionada apenas sugere $(t-t')$ pequeno.

De qualquer maneira, quando do início do presente capítulo expusemos nossa intenção de construir uma correção não astronômica à teoria linear. Também, no capítulo anterior, ficou claro o nosso propósito de usar aproximações à teoria linear, tais que assegurem a existência de ondas se propagando no sistema, e a interação ressonante entre estas ondas e as partículas.

Quantificando, pois, as idéias expostas neste último parágrafo, devemos exigir que durante o tempo efetivo de interação onda-partícula, $(t-t')^{int}$, as amplitudes dos campos envolvidos não sofram variações substanciais:

$$\omega_i(\underline{k}) \cdot (t-t') \ll 1 \quad (III.30)$$

É interessante notar que os $\omega_i(\underline{k})$ para os quais valem a condição (III.18) e a condição (III.30) devem ser escolhidos segundo a seleção.

$$\begin{aligned} & \{ \omega_i(\underline{k}) \text{ válidos} \} = \\ & = \min \left\{ \omega_i(\underline{k}) \text{ que satisfazem (III.18); } \omega_i(\underline{k}) \text{ que satisfazem (III.30)} \right\} \end{aligned}$$

Sendo as aproximações usadas, formalmente idênticas às usadas na determinação da relação de dispersão quase-linear, podemos escrever a integral temporal na equação (III.28) como:

$$\begin{aligned} & \int_{t'}^t dt' e^{i(\underline{k}\omega - \omega_r \underline{\epsilon})(t-t')} \cdot \phi_{\underline{k}}(t') \frac{\partial f_0}{\partial v_j}(\underline{x}, t) \approx \\ & \approx \frac{1}{\Delta} \phi_{\underline{k}}(t) \frac{\partial f_0}{\partial v_j}(\underline{x}, t) \left(\mathcal{P} \frac{-i}{k_{||}\omega - \omega_r - i\omega_i^2 - i/\tau(\omega)} + \pi \delta(\omega_r - \underline{k} \cdot \underline{v}) \right) \quad (III.31) \end{aligned}$$

onde:

$$\frac{1}{\tau_j} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial f}{\partial v_j}$$

Com $\omega_i, \frac{1}{\tau_j}$ muito pequenos, e usando $\omega(\underline{k}) = -\omega(-\underline{k})$ juntamente com $|\phi_{\underline{k}}|^2 = |\phi_{-\underline{k}}|^2$ (verificar E Q - (III.24)) podemos seguir o seguinte esquema substitucional.

$$(III.31) \rightarrow (III.28) \xrightarrow{\omega_i \sim 0; \frac{1}{\tau_j} \sim 0; |\phi_{\underline{k}}|^2 = |\phi_{-\underline{k}}|^2} (III.27)$$

(este \bar{e} o limite onde apenas consideramos a intera \tilde{c} o rressonante onda-part \tilde{c} ula) para obter:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij} \frac{\partial}{\partial v_j} f_0 \quad (III.32)$$

(semendo indices repetidos)

que \bar{e} a esperada equa \tilde{c} o de evolu \tilde{c} o para a fun \tilde{c} o f_0 .

Notamos que a equa \tilde{c} o (III.32) \bar{e} tipicamente uma equa \tilde{c} o de difus \tilde{c} o no espa \tilde{c} o de velocidades, com o coeficiente D_{ij} dado por:

$$D_{ij} = \frac{e^2}{m_e} \int d^3 \underline{k} k_i k_j |\phi(\underline{k}, t)|^2 \delta(\underline{k} \cdot \underline{v} - \omega_r(\underline{k})) \quad (III.33)$$

Usando a equa \tilde{c} o (III.24), $\frac{1}{\tau} \approx 0$ para part \tilde{c} ulas fo \tilde{c} ra da rresson \tilde{c} ncia podemos obter:

$$\frac{d|\phi_{\underline{k}}|^2}{dt} = \omega(\underline{k}, t) |\phi_{\underline{k}}|^2 \quad (III.34)$$

onde expandindo o denominador da integral, obtemos:



$$\omega_i(\mathbf{k}, t) = -\frac{\pi e}{m^2} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \bigg|_{\omega = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\epsilon}} \left[\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \omega_{\mathbf{r}}} \int \frac{d\omega}{\mathbf{k}\omega - \omega_{\mathbf{r}}} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right]^{-1}$$

(III.35)

Como exemplo de aplicação das equações quase-lineares discutimos agora o fenômeno de Relaxação-Quase-Linear.

Tomemos a equação (III.32) multiplicando ambos os lados por f_0 .

Usando a forma dada pela equação (III.33) para D_{ij} , e realizando integração por partes ao lado direito da equação (III.32) ficamos com:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f_0^2 d^3v = -\frac{\pi e^2}{m^2} \int d^3k \int d^3v |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{III.36})$$

O que esta igualdade nos mostra, é que a quantidade

$$\sigma \equiv \int d^3v f_0^2$$

tende a um certo valor limite positivo, tal que

$$\frac{d\sigma}{dt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ora, sendo o integrando do lado direito da equação (III.36) essencialmente positivo, devemos ter necessariamente para $t \rightarrow +\infty$:

$$\text{ou} \quad \phi = 0 \quad (\text{III.37})$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{III.38})$$

Os casos onde a condição (III.38) vigore são os mais interessantes, pelo menos quanto à importância em aquecimento de plasmas termonucleares.

A formação da condição (III.38) vem representada graficamente na figura III.1 para um plasma onde $\omega(\underline{k}, t) \cong \text{constante}$, caso unidimensional.

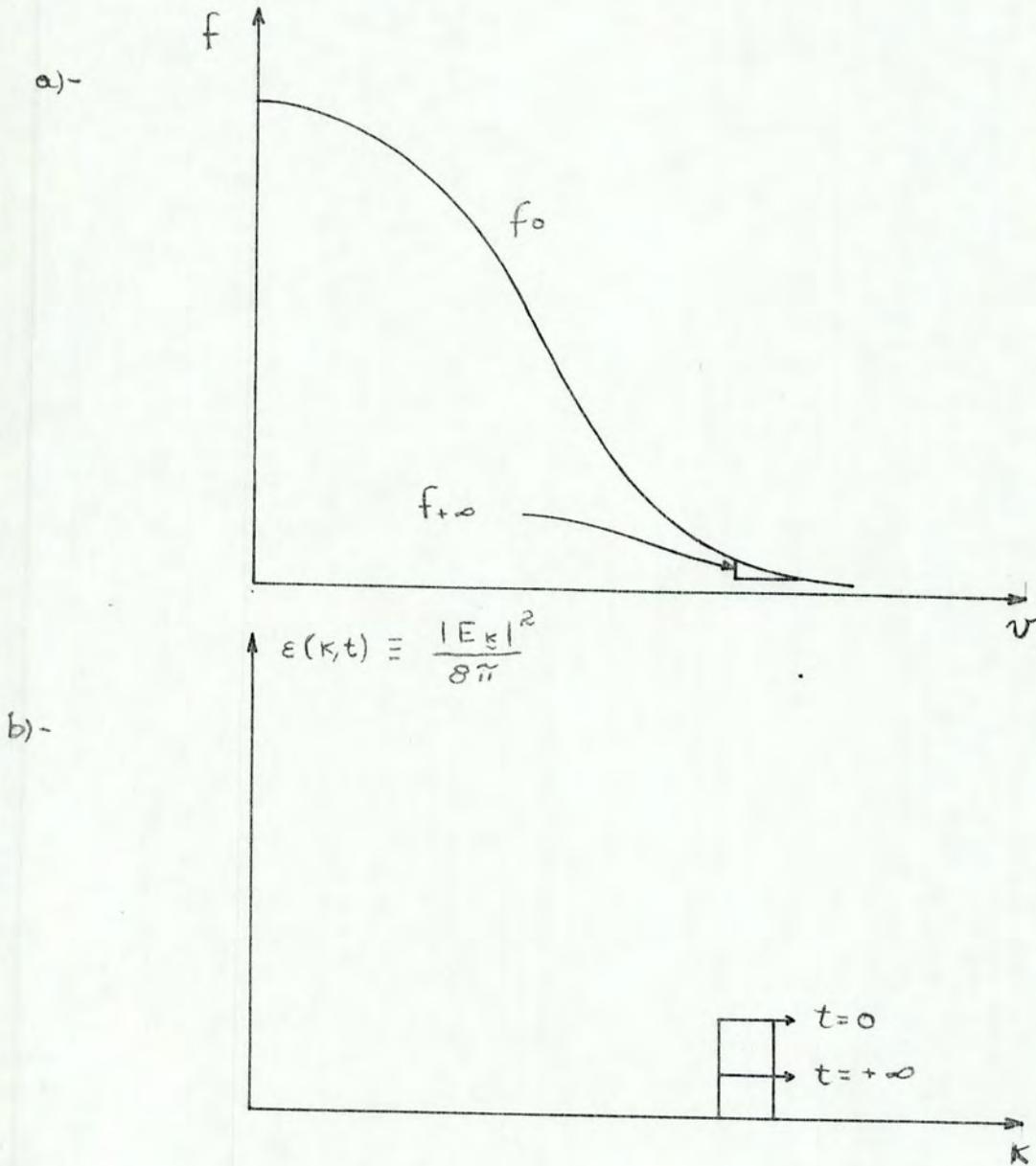


FIGURA III.1 A figura III.1a retrata a formação do "plateau" (condição (III.38)) para uma distribuição inicial maxwelliana do tipo $e^{-\lambda v^2}$; $\lambda > 0$. A figura III.1b representa, por sua vez, a evolução temporal da intensidade do campo eletrostático associado. O sistema retratado é unidimensional.

IV - TEORIA QUASE-LINEAR DAS OSCILAÇÕES DE UM PLASMA MAGNETIZADO

Nos capítulos anteriores, usamos exaustivamente o didático modelo do plasma eletrônico livre de campos externos, homogêneo e destituído de caráter colisional. Neste capítulo, embora o plasma ainda seja homogêneo e não-colisional, estará submetido à ação de um campo magnético uniforme e constante no tempo. Também é essencial ressaltar que as oscilações que serão alvo de nossos estudos não serão mais necessariamente longitudinais, o que é equivalente a dizer que estaremos considerando no sistema interações eletromagnéticas em geral.

Inspirados na sistemática desenvolvida, podemos colocar:

$$\bar{F}_e = f_0(\underline{v}, t) + f(\underline{r}, \underline{v}, t) \quad (\text{IV.1})$$

onde \bar{F}_e é a função de distribuição completa para os elétrons do plasma, $f_0 = \langle F_e \rangle$ é o valor médio da dita distribuição e $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$ é a parcela oscilante da distribuição. Novamente, estaremos conectando f_0 com a descrição das partículas do sistema e $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$ com a descrição das ondas do mesmo.

Expandimos, como anteriormente, $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$, o campo elétrico e o campo magnético segundo a forma (III.11).

$$G(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k}, j} \hat{G}_j(\underline{k}, t) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega_j(\underline{k}, t)t)} \quad (\text{IV.2})$$

com o índice j denotando vários possíveis modos associados com uma frequência.

Nas expansões acima já estamos fazendo vigorar a nossa tão usada hipótese de que existem para o sistema em interação quase-linear, relações de dispersão bem definidas entre ω e \underline{k} . Ademais, como no capítulo III, esperamos que $\omega_j(\underline{k}, t)$ seja uma função lentamente variável no tempo.

Por economia de trabalho afirmamos neste ponto que a relação de dispersão "quase-linear" para plasmas magnetizados é obtida de forma análoga à relação obtida para os plasmas dos capítulos anteriores (livres de campos).

Vamos, pois, doravante, obter as equações de evolução para a função f_0 e para as amplitudes lentamente variáveis das componentes oscilantes $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$, $\underline{E}(\underline{r}, t)$ e $\underline{B}(\underline{r}, t)$.

Começemos por escrever a equação cinética para a função F_e , equação esta que nos fornecerá o comportamento estatístico [Wu66] dos elétrons do plasma. Esta equação é obtida formalmente conforme

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) F_e - \omega_B \frac{\partial F_e}{\partial \phi} + \frac{e}{m} \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \underline{v}} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Na equação (IV.3), ϕ é o ângulo azimutal no espaço das velocidades e ω_B é a frequência de ciclotron dos elétrons no campo magnético \underline{B}_0 , campo este alinhado com o eixo \bar{z} .

$$\omega_B \equiv \frac{eB_0}{mc} \quad (\text{IV.4})$$

O campo magnético \underline{B} que aparece na equação (IV.3) já é o campo oscilante gerado internamente pelo plasma.

A equação para a função f_0 é obtida da equação (IV.3), tomando sua média sobre as fases randômicas das componentes oscilatórias de $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$.

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \omega_0 \frac{\partial f_0}{\partial \phi} = - \frac{e}{m} \left\langle \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \right\rangle \quad (\text{IV.5})$$

Naturalmente já eliminamos os termos que envolvem os gradientes da função f_0 no espaço de coordenadas. Tais termos não estão presentes pelo fato de estarmos trabalhando com um sistema homogêneo.

Subtraindo a equação (IV.5) da equação (IV.3) obtemos a equação de evolução para a função $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) f + \frac{e}{m} \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} - \dot{\omega}_0 \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Os termos não-lineares gerados pela mencionada subtração já foram omitidos para a obtenção da equação (IV.6). A justificativa para tal omissão pode ser encontrada no capítulo anterior.

Tendo em mente que os vários modos de oscilação são estatisticamente independentes podemos reescrever a equação (IV.5) usando a expansão dada pela equação (IV.2).

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \omega_0 \frac{\partial f_0}{\partial \phi} = Q(\underline{r}, t) \quad (\text{IV.7})$$

onde:

$$Q(\underline{r}, t) = - \frac{e}{m} \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \left[\sum_{\underline{k}, j} \underline{E}_{\underline{k}}^{j*} + \frac{1}{c} (\underline{v} \times \underline{B}_{\underline{k}}^{j*}) \right] f_{\underline{k}}^j \right)$$

A componente $f_{\underline{k}}^j$, por sua vez pode ser obtida da equação (IV.6) realizando sua análise espectral.

$$\frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial t} + i \left(\underline{k} \cdot \underline{v} - \omega^j(\underline{k}) \right) f_{\underline{k}}^j - \omega_B \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \phi} = \mathcal{R}(\underline{k}, \underline{x}, t) \quad (\text{IV.8})$$

onde:

$$\mathcal{R}(\underline{k}, \underline{x}, t) \equiv - \frac{e}{m} \left[\underline{E}^j + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}^j \right] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}$$

Escrevamos a função de distribuição média como uma série de Fourier na variável angular ϕ .

$$f_0(\underline{x}, t) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f_0^\ell(|\underline{v}|, v_{||}, t) e^{i\ell\phi} \quad (\text{IV.9})$$

Definindo:

$$\psi \equiv \phi - \varphi \quad (\text{IV.10})$$

com φ como o ângulo azimutal no espaço dos vetores de onda com o eixo polar paralelo a \underline{B}_0 , podemos reescrever a equação (IV.8) na forma:

$$\frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial t} + i \left[\kappa_{||} v_{||} - \omega^j + \kappa_{\perp} v_{\perp} \omega_S \psi \right] f_{\underline{k}}^j - \omega_B \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \psi} = \mathcal{R} \quad (\text{IV.11})$$

As notações empregadas na equação (IV.11) devem ficar claras se a figura IV.1 for consultada.

Encontremos a solução desta equação (IV.11). Para tanto escrevamos:



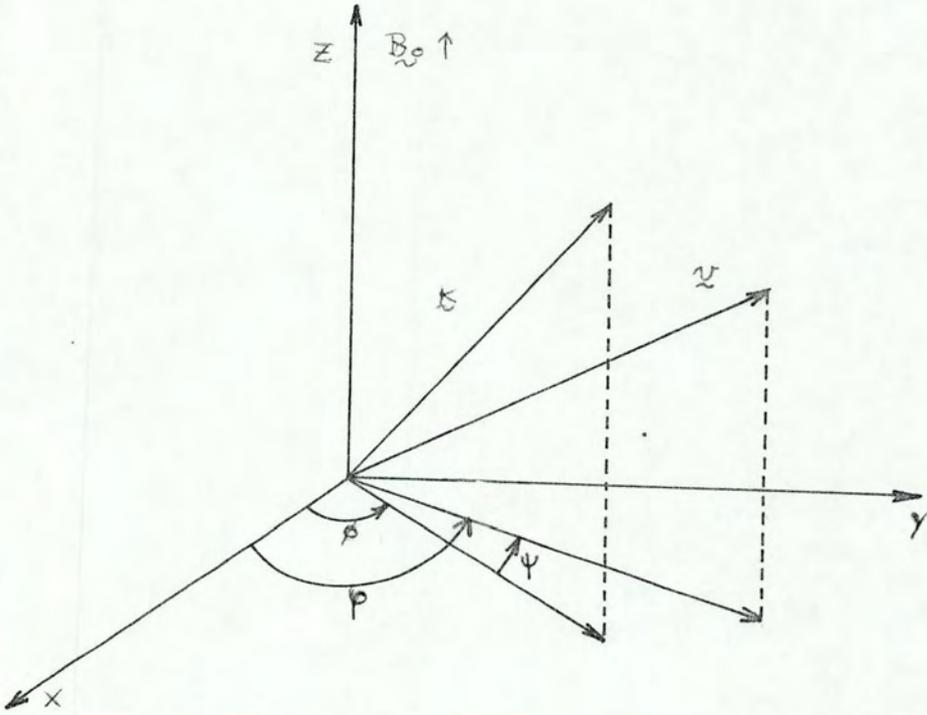


FIGURA IV.1 Definição grãfica das grandezas definidas na seqüência da equaçãõ (IV.11).

$$f_{\vec{x}}^j = u_{\vec{x}}^j(\vec{x}, t) e^{i\lambda \text{sen} \varphi}, \quad \lambda = \frac{\kappa_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \quad (\text{IV.12})$$

Com esta forma para $f_{\vec{x}}^j$, podemos derivar a equação para a função $u_{\vec{x}}^j(v_{\perp}^t)$:

$$\frac{\partial u_{\vec{x}}^j}{\partial t} + i \left[\kappa_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_{\vec{x}}^j \right] u_{\vec{x}}^j - \omega_B \frac{\partial u_{\vec{x}}^j}{\partial \varphi} = \mathcal{P} \quad (\text{IV.13})$$

onde: $\mathcal{P} \equiv \mathcal{R} e^{-i\lambda \text{sen} \varphi}$

Expandindo:

$$u_{\vec{x}}^j(v_{\perp}, t) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{\vec{x}}^{\ell j}(v_{\perp}, v_{\parallel}, t) e^{i\ell \varphi} \quad (\text{IV.14})$$

$$\frac{\partial u_{\vec{x}}^{\ell j}}{\partial t} + i \left[\kappa_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_B - \omega_{\vec{x}}^j(\kappa) \right] u_{\vec{x}}^{\ell j} = \mathcal{P}^{(\ell)} \quad (\text{IV.15})$$

onde: $\mathcal{P}^{(\ell)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\lambda \text{sen} \varphi - i\ell \varphi} \cdot \mathcal{R} \quad (\text{IV.16})$

Efetuada a integração indicada na equação (IV.16), obtemos para $\mathcal{P}^{(\ell)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(\ell)} = & - \frac{e}{m} \sum_{\ell'=-\infty}^{+\infty} e^{i\ell' \varphi} (-1)^{\ell-\ell'} \left\{ \left(E_{\kappa 3}^j \frac{\partial f_0^{\ell'}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{e' f_0^{\ell'}}{c} B_{\kappa 3}^j \right) J_{\ell-\ell'}(\lambda) - \right. \\ & - \left[\left(E_{\kappa 2}^j - \frac{v_{\parallel}}{c} B_{\kappa 2}^j \right) \frac{\partial f_0^{\ell'}}{\partial v_{\perp}} + \frac{v_{\perp}}{c} B_{\kappa 2}^j \frac{\partial f_0^{\ell'}}{\partial v_{\parallel}} + \left(E_{\kappa 1}^j + \frac{v_{\parallel}}{c} B_{\kappa 1}^j \right) \frac{i\ell'}{v_{\perp}} f_0^{\ell'} \right] * \\ & * \frac{(\ell-\ell') J_{\ell-\ell'}(\lambda)}{\lambda} + i \left[\left(E_{\kappa 2}^j + \frac{v_{\parallel}}{c} B_{\kappa 2}^j \right) \frac{\partial f_0^{\ell'}}{\partial v_{\perp}} - \frac{v_{\perp}}{c} B_{\kappa 2}^j \frac{\partial f_0^{\ell'}}{\partial v_{\parallel}} - \right. \\ & - \left. \left. \left(E_{\kappa 1}^j - \frac{v_{\parallel}}{c} B_{\kappa 1}^j \right) \frac{i\ell'}{v_{\perp}} f_0^{\ell'} \right] J_{\ell-\ell'}(\lambda) \right\} \quad (\text{IV.17}) \end{aligned}$$

Integrando a equação (IV.15) encontramos:

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{k}}^{l_j}(t) &= \mu_{\underline{k}}^{l_j}(t=0) e^{-i(k_n v_n - l\omega_B - \omega^j_{\underline{k}})t} + \\ &+ \int_0^t dt' P^l(t') e^{-i(k_n v_n - l\omega_B - \omega^j_{\underline{k}})(t-t')} \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Podemos, pois escrever a função $f_{\underline{k}}^j(\underline{v}, t)$ na forma:

$$f_{\underline{k}}^j(\underline{v}, t) = f_{\underline{k}(1)}^j(\underline{v}, t) + f_{\underline{k}(2)}^j(\underline{v}, t) \quad (\text{IV.19})$$

onde:

$$\begin{aligned} f_{\underline{k}(1)}^j &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda x_n + l\varphi) - (k_n v_n - l\omega_B - \omega^j_{\underline{k}})t} \mu_{\underline{k}}^{l_j}(t=0) \\ f_{\underline{k}(2)}^j &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda x_n + l\varphi)} \int_0^t dt' P^l(k_n, k_l, v_n, v_l, t') * \\ &* e^{-i(k_n v_n - l\omega_B - \omega^j_{\underline{k}})(t-t')} \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Usando a expansão (IV.9) podemos encontrar, usando a equação (IV.7), uma equação para a função f_0 :

$$\frac{\partial f_0^e}{\partial t} - i l \omega_B f_0^e = Q^{(e)}(v_n, v_l, t) \quad (\text{IV.21})$$

onde:

$$Q^{(e)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi Q(\underline{v}, t) e^{-i l \varphi}$$

Daí segue:

$$f_0 = f_0^e(v_{||}, v_{\perp}, 0) + \int_0^t dt' Q^{(e)}(v_{||}, v_{\perp}, t')$$

$$f_0^e = \left[f_0^e(v_{||}, v_{\perp}, 0) - i \frac{Q^{(e)}(v_{||}, v_{\perp}, 0)}{\ell \omega_B} \right] e^{i \ell \omega_B t} + i \frac{Q^{(e)}(v_{||}, t)}{\ell \omega_B} \quad (\text{IV.22})$$

Se a perturbação inicial for tal que:

$$f_0^e(v_{||}, v_{\perp}, 0) \sim i \frac{Q(v_{\perp}, v_{||}, 0)}{\ell \omega_B} \approx 0 \quad (\text{IV.23})$$

as funções $f_0^e(v_{||}, v_{\perp}, t)$ e assim também a função distribuição $f_0(v_{||}, t)$ não conterão termos proporcionais a $e^{i \ell \omega_B t}$, exponenciais estas que oscilam rapidamente. Desta forma nos é justificado negligenciar as quantidades $f_0^e \approx i \frac{Q^{(e)}}{\ell \omega_B}$ quando $\omega_B \cdot t \gg 1$, frente a $f_0^e(f_0^e(t=0) + \int dt Q \approx t Q)$. Neste caso podemos supor que a função distribuição média é independente do ângulo azimutal ϕ , ou seja:

$$f_0(v_{||}, t) = f_0(v_{||}, v_{\perp}, t) = f_0^e(v_{||}, v_{\perp}, t) \quad (\text{IV.24})$$

(Para o caso em que $k_{\perp} = 0$ [Da72] as restrições mencionadas implicam em que não haja, por exemplo, para radiação transversal, correlação entre as componentes \hat{x} e \hat{y} do campo elétrico.)

Graças a esta propriedade da função distribuição média, podemos simplificar a expressão (IV.17) para:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(e)} = & - \frac{e}{m_1} (-1)^e \left\{ E_{k3}^j \frac{\partial f_0}{\partial v_{||}} J_e(\lambda) - \left[\left(E_{k1}^j - \frac{v_{||}}{c} B_{k2}^j \right) * \right. \right. \\ & * \left. \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{v_{\perp}}{c} B_{k1}^j \frac{\partial f_0}{\partial v_{||}} \right] \frac{e}{\lambda} J_e(\lambda) + i \left[\left(E_{k2}^j + \frac{v_{||}}{c} B_{k1}^j \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \right. \\ & \left. \left. - \frac{v_{\perp}}{c} B_{k1}^j \frac{\partial f_0}{\partial v_{||}} \right] J_e(\lambda) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

As componentes do campo magnético podem ser obtidas a partir de:

$$\text{rot } \underline{\tilde{E}} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{\tilde{B}}}{\partial t} \quad (\text{IV.26})$$

Escrevendo:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{B}}(\underline{x}, t) &= \sum_{\underline{k}, j} \underline{B}_{\underline{k}, j}(t) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_j \underline{k} \cdot t)} \\ \underline{\tilde{E}}(\underline{x}, t) &= \sum_{\underline{k}, j} \underline{E}_{\underline{k}, j}(t) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_j \underline{k} \cdot t)} \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

segundo a relação (IV.2) e usando:

$$\left(\text{rot } \underline{\tilde{E}}(\underline{x}, t) \right)_m = \sum_{\underline{k}, j} \epsilon_{\underline{k} p j} k_p \underline{E}_{\underline{k} p}^j e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_j \underline{k} \cdot t)} \quad (\text{IV.28})$$

juntamente com

$$\omega_m^j \equiv \frac{d}{dt} \ln E_{\underline{k}, m}^j \quad (\text{IV.29})$$

derivamos:

$$\underline{B}_{\underline{k} q}^j = \sum_{\underline{k}, m} \frac{c E_{\underline{k} m}^j k_p \epsilon_{\underline{k} p m}^j}{\omega_m^j + i \omega_m^j} \quad (\text{IV.30})$$

Tendo derivado a conexão entre as amplitudes dos campos magnético e elétrico, nosso próximo passo é a obtenção do tensor condutividade elétrica, tensor este de importância fundamental para a solução do sistema de equações quase-lineares para o plasma magnetizado.

Para tanto, escrevamos a densidade de corrente na seguinte forma:

$$\tilde{j}_{\mathbf{k}}^j = \tilde{j}_{\mathbf{k}}^j(1) + \tilde{j}_{\mathbf{k}}^j(2) \quad (\text{IV.31})$$

onde

$$\tilde{j}_{\mathbf{k}}^j(1) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e \int d^3x e^{i(\lambda \cos \theta + \ell \varphi)} \tilde{v}_{\mathbf{k}}^{\ell} u(\tilde{v}_{\parallel}, \tilde{v}_{\perp}, 0) e^{-i(k_{\parallel} \tilde{v}_{\parallel} - \ell \omega_B - \omega_j^{\mathbf{k}})(t-t')} \quad (\text{IV.31a})$$

$$\tilde{j}_{\mathbf{k}}^j(2) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e \int d^3x e^{i(\lambda \cos \theta + \ell \varphi)} \tilde{v}_{\mathbf{k}}^{\ell} \int dt' P^{(\ell)}(t') e^{-i(k_{\parallel} \tilde{v}_{\parallel} - \ell \omega_B - \omega_j^{\mathbf{k}})(t-t')} \quad (\text{IV.31b})$$

com $P^{(\ell)}(\tilde{v}_{\parallel}, \tilde{v}_{\perp}, t')$, dado pela equação (IV.25).

Para tempos suficientemente longos a componente $\tilde{j}_{\mathbf{k}}^j(1)$, de estruturação tipicamente balística, é praticamente nula.

Voltemos, pois, nossa atenção, para a avaliação da quantidade $\tilde{j}_{\mathbf{k}}^j(2)$ da expressão (IV.31).

As integrais envolvendo \tilde{v}_{\parallel} têm a forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{v}_{\parallel} S(\tilde{v}_{\parallel}, t') e^{i(k_{\parallel} \tilde{v}_{\parallel} - \ell \omega_B - \omega_j^{\mathbf{k}})(t-t')} \quad (\text{IV.32})$$

onde

$$S(\tilde{v}_{\parallel}, t) = E_{\mathbf{k}} \frac{j_{\mathbf{k}}^j(t)}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{v}_{\perp, \parallel}}(\tilde{v}_{\parallel}, \tilde{v}_{\perp}, t)$$

Comentários sobre a avaliação deste tipo de integrais já foram realizados exhaustivamente no capítulo anterior. Neste estágio do trabalho, nos limitamos a dizer que, no que tange ao valor do intervalo Δt , deve ser satisfeita a condição:

$$k_{||} v_{th} \Delta t \sim 1$$

(IV.33)

Ademais, para que o conceito de onda possa ter significado, deve ser cumprida:

$$\Delta t \ll \frac{1}{\omega_i}, \quad \tau_{i,\perp}(x)$$

onde

$$\tau_{i,\perp}^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial f_0}{\partial v_{i,\perp}} \quad (IV.34)$$

Nestas condições obtemos, para as integrais temporais em $j_k^j(2)$;

$$\begin{aligned} & \int_{t-\Delta t}^t dt' E_{km}^j(t') \frac{\partial f_0}{\partial v_{i,\perp}} e^{-i(k_{||} v_{||} - l\omega_B - \omega_{\xi}^j(t))(t-t')} \approx \\ \approx & -i E_{\xi m}^j(t) \frac{\partial f_0}{\partial v_{i,\perp}} \left[\mathcal{P} \frac{1}{k_{||} v_{||} - l\omega_B - \omega_{\xi r}^j - \omega_{\xi i m}^j - i/\tau_{i,\perp}} + \right. \\ & \left. + i\pi \delta(\omega_{\xi r}^j + l\omega_B - k_{||} v_{||}) \right] \quad (IV.35) \end{aligned}$$

Usando a equação acima juntamente com a equação (IV.30), ambas inseridas na equação (IV.31b) obtemos finalmente:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \sum_m \sigma_{em} E_{\xi i m}^j$$

onde

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} i \omega_p^2 \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} \xi_{ij}^{\ell} \hat{r}_j^{\ell} f_0 + \frac{i \omega_p^2}{4\pi (\omega_{\perp}^{\ell} + i \omega_{\parallel}^{\ell})} \quad *$$

$$* \left[1 + \int d^3 \underline{v} \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} b_i b_j \right]$$

(IV.36)

com $b_e = \frac{B_{e0}}{|B_{e0}|}$

$$\xi_{ij}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} v_{\perp} \frac{\ell}{\lambda^2} J_{\ell}^{\ell} & i v_{\perp} \frac{\ell}{\lambda} J_{\ell} J_{\ell}' & v_{\parallel} \frac{\ell}{\lambda} J_{\ell}^2 \\ -i v_{\perp} \frac{\ell}{\lambda} J_{\ell} J_{\ell}' & v_{\perp} J_{\ell}^{\prime 2} & -i v_{\parallel} J_{\ell} J_{\ell}' \\ v_{\parallel} \frac{\ell}{\lambda} J_{\ell}^2 & i v_{\parallel} J_{\ell} J_{\ell}' & \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} J_{\ell}^{\prime 2} \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{R}_m = \frac{1}{\kappa_{\parallel} v_{\parallel} + \omega_{\perp} - \omega_{\perp}^{\ell}(\kappa) - i \omega_{\parallel}^{\ell}(\kappa) - i/\tau_{\perp}(v)} \left[1 - \frac{\kappa_{\parallel} v_{\parallel} - i \delta_{3m}/\tau_{\perp}(v)}{\omega_{\perp}^{\ell}(\kappa) + i \omega_{\parallel}^{\ell}(\kappa)} \right] *$$

$$* \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{(v_{\perp}/v_{\parallel}) (\kappa_{\parallel} v_{\parallel} - i \delta_{3m}/\tau_{\perp}(v))}{(\kappa_{\parallel} v_{\parallel} + \omega_{\perp} - \omega_{\perp}^{\ell}(\kappa) - i \omega_{\parallel}^{\ell}(\kappa) - i/\tau_{\perp}(v)) (\omega_{\perp}^{\ell}(\kappa) + i \omega_{\parallel}^{\ell}(\kappa))} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}}$$

De posse do resultado (IV.36), podemos usar as equações de Maxwell para a derivação da equação que segue

$$\sum_m \Lambda_{\ell m} \vec{E}_m^{\ell} = 0$$

onde

(IV-37)

$$\Lambda_{em} = \frac{c^2 (k_e k_m - k^2 \delta_{em})}{(\omega_r^j(\underline{k}) + i\omega_{2i}^j)(\omega_r^j(\underline{k}) + i\omega_{m,i}^j(\underline{k}))} + \epsilon_{em}$$

$$\epsilon_{em} = \delta_{em} + \frac{4\pi i}{\omega_r^j + i\omega_{m,i}^j} \delta_{em}$$

sendo δ_{em} definido pela equação (IV.36).

A equação (IV.37) determina a evolução temporal das razões entre as componentes do campo elétrico. Embora as dependências temporais das funções $\omega_r^j(\underline{k}, t)$ sejam fracas, estas mesmas dependências se manifestam criticamente nas funções $\omega_i^j(\underline{k}, t)$ e $\tau(\underline{v}, t)$. Nestas condições, podemos argumentar que ondas lançadas ao interior de um plasma magnetizado eventualmente alteram a polarização inicial.

As únicas ondas para as quais não vale o argumento acima, são as longitudinais. Estas últimas podem ser escritas como: $\underline{E}(\underline{k}) = -i \underline{k} \phi^{(j)}(\underline{k})$, onde \underline{k} é vetor constante e ϕ é o potencial escalar.

Obtenhamos agora a equação para evolução temporal da função distribuição.

Devemos, para tanto, inserir as formas (IV.20) ao lado direito da equação (IV.7) realizando as devidas integrações em $k_{||}$.

Supondo t muito grande, podemos desprezar a contribuição da função $f_{\underline{k}}^j(1)$. Retendo, pois, apenas a função $f_{\underline{k}}^j(2)$, ficamos com:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \omega_B \frac{\partial f_0}{\partial \phi} = - \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}} \cdot \left[\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \tilde{E}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}} * + \frac{1}{c} \tilde{v} \times \tilde{B}_{\mathbf{k}}^{*j} \right] \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{i\ell \omega_B t + i\ell \phi} *$$

$$* e^{i\ell \phi} \int_0^t dt' P^{(\ell)}(t') e^{-i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \ell \omega_B - \omega_{r\mathbf{k}}^j)(t-t')} \quad (IV.38)$$

No lado direito desta equação temos integrais da forma:

$$I \equiv \int d\kappa_{\parallel} f(\kappa_{\parallel}, t') e^{-i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \ell \omega_B - \omega_{r\mathbf{k}}^j)(t-t')} \quad (IV.39)$$

onde $f(k_{\parallel}, t')$ é proporcional a $E_{k\ell}^j E_{k\ell m}^i \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp, \parallel}}$. Seguindo os mesmos raciocínios dos capítulos anteriores, ou seja, supondo:

$$(v_{\parallel} - \frac{\partial \omega}{\partial k_{\parallel}})(k_{\parallel} - k_0)(t-t') \sim 1$$

e

$$(t-t') \omega_{mi}^j(k) \ll 1 \quad (IV.40)$$

podemos escrever a equação (IV.38) promediada no ângulo ϕ , na forma:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \pi \frac{e^2}{m^2} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{v_1} \hat{R} \left\{ v_{\perp} |E_{\mathbf{k}\ell}^j| \frac{1}{|\lambda|} J_{\ell}(|\lambda|) - E_{\mathbf{k}\ell}^j J_{\ell}'(|\lambda|) + \right.$$

$$\left. + E_{\mathbf{k}\ell}^j \frac{v_{\parallel}}{v_1} J_{\ell}(|\lambda|) \right|^2 \hat{R} f_0 \} \delta(\omega_{\mathbf{k}\ell}^j - \ell \omega_B - k_{\parallel} v_{\parallel}) \quad (IV.41)$$

onde

$$\hat{R} \equiv \left[1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega_{\mathbf{k}\ell}^j} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega_{\mathbf{k}\ell}^j} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right]$$

Devemos ressaltar que na equação (IV.41) tomamos os l_j

mites:

$$\omega_{\frac{k}{m_i}}^j \rightarrow 0 \quad ; \quad \frac{1}{T_{i,u}} \rightarrow 0 \quad (IV.42)$$

Com estes limites, notamos que a ressonância onda-partícula vigora para relações entre as respectivas velocidades, em que é satisfeita a condição:

$$\omega_{\frac{k}{r}}^j - (\omega_B - k_{||} v_{||}) = 0 \quad (IV.43)$$

Para ondas de Alfvén a condição (IV.40) não se cumpre. Neste caso, então, pode-se obter uma equação não local para a evolução temporal da função f_0 [AAP75].

Como complemento, discutamos a Relaxação Quase-Linear em um Plasma Magnetizado.

Demonstramos que o sistema de partículas ressonantes juntamente com as oscilações respectivas relaxa a um estado estacionário.

Multiplicando a equação (IV.41) por f_0 , integrando em d^3v e usando a integração por partes no lado direito, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f_0^2 d^3v = - \frac{2\pi e^2}{m^2} \sum_j \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int d^3v \int d^3k (\hat{R} f_0)^2 |E_{k1}^j|^2 \frac{\rho}{\lambda} *$$

$$* J_0(|\lambda|) - E_{k2}^j J_0'(|\lambda|) + E_{k3}^j \frac{v_{||}}{v_i} J_0(|\lambda|) \Big| \delta(\omega_{\frac{k}{r}}^j - \omega_B - k_{||} v_{||}) \quad (IV.44)$$

Sendo o lado direito da equação (IV.43) essencialmente negativo, podemos dizer que a quantidade $\int f_0^2 d^3v \geq 0$ tende a um valor constante ao $t \rightarrow +\infty$.

Então o lado direito obrigatoriamente tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$. Esta condição pode ser obtida via:

$$\left| E_{k1} \frac{e}{\lambda} J_e(\lambda) - E_{k2} J_e'(\lambda) + E_{k3} \frac{v_{II}}{v_I} J_e(\lambda) \right| = 0 \quad (IV.45)$$

ou

$$\left(\hat{R} f_0 \right)_{\omega_{\tilde{k}r}} = l\omega_B + k_{II} v_{II}$$

Se uma componente de $\underline{E} \rightarrow 0$, via equação (IV.37), podemos afirmar que todas tendem a zero. Pela mesma equação (IV.37), podemos expressar quaisquer duas componentes do campo em função de uma. Nestas condições podemos também afirmar que para que a primeira condição (IV.45) seja satisfeita uma componente (e, portanto todas) deve tender a zero.

Se estivermos interessados em situações onde as oscilações não são completamente atenuadas, devemos pesquisar a realização de (IV.45) - segunda linha:

$$\left(\hat{R} f_0 \right)_{\omega_{\tilde{k}r}} = l\omega_0 + k_{II} v_{II} = 0$$

Segundo [RSS66] podemos ver claramente que se $(\hat{R}f) = 0$, $\omega_{\tilde{k}, \eta_i}^{(j)} = 0$ ($\forall m$). Neste estágio a troca de energia entre ondas e partículas cessa e é atingido um estado estacionário.

Até aqui tratamos da obtenção das equações de evolução para um plasma magnetizado não-relativístico.

Com o objetivo do trabalho do próximo capítulo, trataremos de adaptar estas mesmas equações para o caso relativístico.

Primeiramente examinemos a equação para a evolução temporal da função $f_{\tilde{k}}^{(j)}(\underline{p}, t)$, equação esta que corresponde à versão não relativística para a função $f_{\tilde{k}}^j(\underline{v}, t)$. (Notamos que na transi-

ção não-relativística \rightarrow relativística, existe uma troca de variáveis $\underline{v} \rightarrow \underline{p}$ onde $\underline{p} = m\gamma\underline{v}$ e $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$.

Segundo [FGM81] devemos partir da igualdade:

$$\frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial t} + i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_{\underline{k}}^j) f_{\underline{k}}^j + \frac{e}{c} \underline{v} \times \underline{B}_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} + e \left(\underline{E}_{\underline{k}} + \frac{\underline{v} \times \underline{B}_{\underline{k}}}{c} \right) \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \underline{p}} = 0 \quad (\text{IV.46})$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial t} + i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_{\underline{k}}^j) f_{\underline{k}}^j - \frac{e}{c} v_{\perp} B_0 \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \phi} + e \left(\underline{E} + \frac{\underline{v} \times \underline{B}}{c} \right) \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \underline{p}} \quad (\text{IV.47})$$

ou

$$\frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial t} + i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_{\underline{k}}^j) f_{\underline{k}}^j - \frac{e}{c} \frac{B_0}{m r} \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \phi} + e \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \underline{p}} = 0 \quad (\text{IV.48})$$

Esta última equação pode ser finalmente escrita como:

$$\frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial t} + (\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_{\underline{k}}^j) f_{\underline{k}}^j - \frac{\omega_B}{r} \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \phi} + e \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \frac{\partial f_{\underline{k}}^j}{\partial \underline{p}} = 0 \quad (\text{IV.49})$$

A partir da equação (IV.49), seguindo os mesmos passos que nos guiaram à obtenção da equação (IV.20), podemos escrever:

$$f_{\underline{k}}^j(\underline{x}) = \sum_{e=-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda' \sin \phi + e\phi)} \int_{-\infty}^t dt' P^{(e)}(t_1, v_1, p_{\perp}, p_{\parallel}, t') e^{-i(\underline{k} \cdot \underline{x}(t) - \frac{\omega_D}{r}(t-t'))} * e^{-i\omega_{\underline{k}}^j(t-t')} \quad (\text{IV.50})$$

onde

$$\lambda' = \frac{kp_{\perp}}{\eta \omega' B} \quad (*)$$

Para a função f_0 , basta tomar a equação (IV.41), e efetuar a substituição $\omega_B \rightarrow \frac{\omega_B}{\gamma}$. Ademais, considerando que o lado direito sô serã diferente de zero para $\omega^j(\underline{k}) - \frac{\omega_B}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0$, podemos finalmente escrever:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \int d^3 \underline{k} \frac{1}{v_{\perp}} \hat{v}_{\perp} \left\{ \hat{v}_{\perp} \left[E_{k1}^j \frac{1}{\lambda} J_{\ell}(\lambda) - i E_{k2}^j J_{\ell}'(\lambda) \right] + E_{k3}^j \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_{\ell}'(\lambda) \right\} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \varepsilon \left(\omega^j(\underline{k}) - \frac{\omega_B}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel} \right) \quad (IV.51)$$

onde

$$\hat{v}_{\perp} = \frac{\omega_B}{\omega' \gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega'} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \quad (IV.52)$$

É interessante ressaltar, que os tensores condutividade elétrica e dielétrica, devem em sua versão relativística, ser calculadas dentro das linhas padronizadas acima.

* Neste caso relativístico, a transição $f_k^j \rightarrow \mu_k^j$ é feita, valendo-se da relação: $\mu_k^j = f_k^j e^{-i\lambda' \sin \psi}$ com λ' definido na equação (IV.50).

V - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO TRANSVERSAL PARA UM PLASMA MAGNETIZADO NA APROXIMAÇÃO FRACAMENTE RELATIVÍSTICA

O presente capítulo objetiva o cálculo de correções fracamente relativísticas à evolução temporal da função distribuição transversal para um plasma magnetizado, homogêneo, livre de colisões e não flutuacional.

O caráter das correções bem como as restrições quanto a sua validade, esperamos ficar claro no decorrer do texto.

Usemos, como ponto de partida a equação (IV.51), supondo o campo magnético \underline{B}_0 apontando na direção do eixo \underline{z} do nosso sistema de coordenadas.

Suponhamos que os campos de radiação submetidos à nossa análise sejam de frequência ω , e que k_{\parallel} seja determinado pelo ângulo de incidência da radiação na superfície de uma lâmina de plasma com faces paralelas a \underline{B}_0 .

A restrição do parágrafo acima impõe que a componente transversal do vetor de onda do campo de radiação seja determinado a partir de:

$$\omega = \omega(\underline{k}) \tag{V.1}$$

onde $\omega(\underline{k})$ ($= \omega(k_{\parallel}, |\underline{k}_{\perp}|)$) é a relação de dispersão do sistema.

Notemos que a componente transversal do vetor de onda aparece sob a forma de módulo na relação (V.1). Isto se deve ao fato de ser o plasma supostamente isotrópico em planos transversais ao campo \underline{B}_0 .

Com estes últimos comentários, é justificado suprimir a integração em k_{\perp} na equação (IV.51). Esta supressão é totalmente equivalente à inclusão de uma função delta, associada à amplitude quadrada do campo, segundo a regra: $E_i E_j \rightarrow E_i E_j \delta[k_{\perp} - k_{\perp}(\omega, k_{\parallel})]$. Relembremos aqui que devido à isotropia no plano xy ou, equivalentemente, devido à condição (V.1), a posição azimutal do vetor \underline{k} não há de comparecer nas fórmulas finais.

A forma definitiva para a equação (IV.51) fica sendo:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \pi e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma}{p_{\perp}} \hat{R} \frac{p_{\perp}}{r} (\underline{E} \cdot \underline{\Pi})^2 \delta(\omega - \frac{\ell \omega_0}{r} - k_{\parallel} v_{\parallel}) \hat{R} f_0 \quad (V.2)$$

a) Multiplicando-a por $\frac{p_{\perp}^2}{2m}$ e tomando o limite $\gamma \rightarrow 1$, temos, via integração por partes em p :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[n \int d^3 p \frac{p_{\perp}^2}{2m} f_0 \right] \equiv \frac{\partial \mathcal{E}_{\perp}}{\partial t} \quad (V.3)$$

$$= \frac{\omega_p^2}{8} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} \int d^3 p \left(\frac{\ell \omega_0}{\omega} \right) p_{\perp} |\underline{E} \cdot \underline{\Pi}|^2 \delta(\omega - \frac{\ell \omega_0}{r} - k_{\parallel} v_{\parallel}) \hat{R} f_0$$

b) Multiplicando a equação (V.2) por $\frac{p_{\parallel}^2}{2m}$ e integrando por partes em p_{\perp} , temos:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\parallel}}{\partial t} = - \frac{\omega_p^2}{8} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} \left(- \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) p_{\perp} |\underline{E} \cdot \underline{\Pi}|^2 \delta(\omega - \frac{\ell \omega_0}{r} - k_{\parallel} v_{\parallel}) \hat{R} f_0 \quad (V.4)$$

com $\omega_p \equiv \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m_0} \right)^{1/2}$

Considerando que o integrando só contribui quando

$$\omega = l\omega_B + k_{\parallel}v_{\parallel} \quad (V.5)$$

obtemos finalmente

$$\frac{\partial \epsilon_{\parallel}}{\partial t} = - \frac{\omega_p^2}{B} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \int d^3p \left(1 - \frac{lv_y}{\omega}\right) \rho_L |\vec{E} \cdot \vec{\Pi}|^2 \delta(\omega - l\omega_B - k_{\parallel}v_{\parallel}) \vec{R}^{\perp} f_0 \quad (V.6)$$

Se considerarmos que se compram as condições:

$$\bar{k}_{\parallel} v_{th} \ll l\omega_B, \quad \bar{k}_{\parallel} v_{th} \ll \omega; \quad f_0(v_{\parallel}) \sim 0 \quad |v_{\parallel}| \gg v_{th} \quad (V.7)$$

onde \bar{k}_{\parallel} representa um valor característico dos vetores de onda do pacote incidente, então necessariamente a frequência deverá se aproximar de uma das harmônicas $l\omega_B$ ($l \neq 0$).

Caso contrário, o valor de $k_{\parallel}v_{\parallel}$ deveria ser substancialmente distinto de zero, condição esta incompatível com as restrições (V.7).

Ademais, inspirados nos comentários anteriores, fica claro que o único termo distinto de zero dos somatórios presentes em (V.6) e (V.4) é aquele para o qual $l = \frac{\omega}{\omega_B}$.

Com isto queremos dizer que, no caso de propagação transversal em um plasma não-relativístico, se estivermos lidando com frequências diferentes de zero, a energia perpendicular das partículas sofrerá modificações bastante radicais, pelo menos se comparadas com as modificações da energia paralela destas mesmas partículas. O contraste entre estas modificações se acentua tanto mais quanto mais nos aproximarmos de uma propagação perpendicular.

O raciocínio empregado acima é válido para a avaliação de quaisquer integrais do tipo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3 p \, P_{\perp, \parallel}^{\ell} f_0 \quad (V.8)$$

Sendo os resultados obtidos com as integrais (V.8) análogos aos derivados acima, o que concluimos é que a dependência em p_{\parallel} da função distribuição inicial praticamente não se altera durante a evolução temporal do sistema sob análise, sistema para o qual, insistimos, se cumprem as condições (V.7).*

Neste ponto passamos à construção de uma teoria fracamente relativística, baseados nos resultados obtidos nos parágrafos seguintes.

Suponhamos que as condições (V.7) ainda vigorem no caso fracamente relativístico. Suponhamos, da mesma forma, que o número de partículas com velocidades não catastroficamente inferiores à velocidade de luz seja tão adequado que a inclusão de alguns efeitos relativísticos seja justificável. A condição numérica que traduz esta nossa última expectativa é $0 < \frac{p_{th}}{mc} \ll 1$. Nestas condições não desprezaremos, a priori, o valor de $1 - \gamma$.

Contudo, em uma primeira aproximação, escreveremos a função de distribuição como $f_0 = g_{\perp}(p_{\perp}, p_{\parallel}, t) \cdot f_M(p_{\parallel})$, onde supomos como fraca a dependência em p_{\parallel} da função g_{\perp} , e onde também supomos a função inicial dada como

* Isto deve ficar evidente, quando expandimos a função f_0 em termos de seus momentos principais [Pa65]. Tais momentos tem a forma $M_{p_{\perp, \parallel}} \cong \int d^3 p \, p_{\perp, \parallel}^{\ell} f_0$.

$$f_0(t=0) = f_M(p_\perp) \cdot f_M(p_\parallel) \quad (\text{V.9})$$

onde f_M denota a distribuição de Maxwell com uma dada temperatura T_M .

Desprezando, em princípio, as derivadas com relação a p_\parallel da função g_\perp , podemos de pronto deduzir sua equação de evolução temporal.

A partir da equação (V.2) temos então conforme [FGM80]:

$$\frac{\partial g_\perp}{\partial t} = \left[\mathcal{D}_0 \frac{\partial^2}{\partial p_\perp^2} + \mathcal{D}_1 \frac{\partial}{\partial p_\perp} + \mathcal{D}_2 \right] g_\perp \quad (\text{V.10})$$

onde:

$$\mathcal{D}_0 = p_\perp^{-1} \sum_e \left(\frac{e\omega_B}{\omega} \right)^2 h_0$$

$$\mathcal{D}_1 = p_\perp^{-1} \frac{\partial p_\perp \mathcal{D}_0}{\partial p_\perp} - z (p_\parallel/mc) (m T_\parallel)^{-1} \sum_e \frac{e\omega_B}{\omega} *$$

$$* h_\perp + (mc)^{-1} \sum_e \frac{e\omega_B}{\omega} \frac{\partial h_\perp}{\partial p_\parallel}$$

$$\mathcal{D}_2 = - (p_\parallel/p_\perp) (m T_\parallel)^{-1} \sum_e \frac{e\omega_B}{\omega} \frac{\partial}{\partial p_\perp} (p_\perp h_\perp/mc) +$$

$$+ p_\perp (mc)^{-2} \sum_e \partial \left[h_\perp \frac{\partial q_\parallel}{\partial p_\parallel} \right] / \partial p_\parallel$$

com

$$h_m = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_{k11} (p_\perp/r^2) \left(\frac{c k_{11}}{\omega} \right)^m |E \cdot T_{1e}|^2 \delta\left(\omega - \frac{e\omega_B}{r} - k_{11} v_\parallel\right)$$

Doravante usaremos um modelo explícito para a dependên

cia do campo elétrico \underline{E} na variável $k_{||}$. Tal modelo foi proposto por Fidone, Granata e Meyer [FGM80] quando de sua análise numérica para o processo de difusão transversal em plasmas relativísticos.

A dependência citada é da forma,

$$\underline{E}(k_{||}) = \underline{E}(k_{||}=0) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k_{||}}{\Delta k} \right)^2} \quad (V.11)$$

onde, por coerência com as condições (V.7) devemos exigir $\Delta k v_{th} \ll \omega$.

Suponhamos que as condições (V.7) sejam ratificadas pelo fato de que $\frac{ck_{||}}{\omega} \ll 1$. Então:

$$\begin{aligned} h_z &\ll h_0 \\ h_1 &\ll h_0 \end{aligned} \quad (V.12)$$

e fica justificado, em uma primeira aproximação, igualarmos a zero os valores de h_1 e h_2 .

Em seqüência, afirmamos que a sobrevivência isolada do fator h_0 nos conduz, sem maiores dificuldades, a uma nova versão da equação (V.10):

$$\frac{\partial g_{\perp}}{\partial t} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} (p_{\perp} D_0) \frac{\partial g_{\perp}}{\partial p_{\perp}} \quad (V.13)$$

com D_0 já definido na equação (V.10).

Suponhamos, de agora em diante, que desejamos nos concentrar firmemente em frequências de radiação nas imediações de frequência de cíclotron eletrônica $\omega \sim \omega_B$.

As formas explícitas para os coeficientes D_0 e h_0 são,

neste caso, as que seguem:

$$D_0 = P_{\perp}^{-1} \left(\frac{\omega_B}{\omega} \right)^2 h_0$$

$$h_0 = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} m \left| \vec{E} \cdot \vec{\Pi} \right|^2 \frac{1}{\gamma} e^{- \left[\frac{(\omega - \omega_B/\gamma) m \gamma}{p_{\parallel}} \right]^2} \quad (V.14)$$

(ver comentários que seguem a fórmula (V.20))

com γ , o fator relativístico representado em termos do vetor \underline{p} , como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{m^2 c^2}} \quad (V.15)$$

A hipótese fracamente relativística reside na condição $\frac{|p|^2}{m_0^2 c^2} \ll 1$ nas regiões onde $f_0(p_{\parallel}, p_{\perp}, t)$ for essencialmente distinta de zero.

Com isto em mente, podemos expandir a função h_0 nas vizinhanças de $\gamma = 1$, tomando o primeiro termo do desenvolvimento.

Escrevendo $\gamma = 1 + \varepsilon$ para $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{m_0^2 c^2}$ podemos rederivar a equação (V.14) para primeira ordem em ε .

$$h_0 = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} m \left| \vec{E} \cdot \vec{\Pi} \right|^2 \frac{1}{1 + \varepsilon} e^{- \left[\frac{(\omega - \frac{\omega_B}{1 + \varepsilon}) m (1 + \varepsilon)}{p_{\parallel} \Delta K_{\parallel}} \right]^2} \quad (V.16)$$

$$h_0 = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} m \left| \vec{E} \cdot \vec{\Pi} \right|^2 (1 - \varepsilon) e^{- \left[\frac{\omega - \omega_B(1 - \varepsilon)}{p_{\parallel} \Delta K} \right]^2 m (1 + \varepsilon)} \quad (V.17)$$

Desprezando os termos quadráticos na exponencial da equação (V.17), reescrevêmo-la como:

$$h_0 = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} m \left| \bar{E}_{\perp} \cdot \bar{\pi} \right|^2 (\lambda - \epsilon) e^{-\left(\frac{\omega - \omega_B}{p_{\parallel}}\right)^2 \left(\frac{m}{\Delta k}\right)^2} \left(1 - \frac{2(\omega - \omega_B)\omega\epsilon}{p_{\parallel}^2} \right) * \left(\frac{m}{\Delta k}\right)^2 \quad (V.18)$$

Novamente desprezando termos de potência superior a 1 na equação (V.18) obtemos, finalmente:

$$h_0 = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} m \left| \bar{E}_{\perp} \cdot \bar{\pi} \right|^2 e^{-\left(\frac{\omega - \omega_B}{p_{\parallel}}\right)^2 \left(\frac{m}{\Delta k}\right)^2} \left[1 - \epsilon \left(1 + 2 \frac{(\omega - \omega_B)\omega}{p_{\parallel}^2} \right) * \omega \left(\frac{m}{\Delta k}\right)^2 \right] \quad (V.19)$$

Resta-nos fluidificar o papel do termo $\left| \bar{E}_{\perp} \cdot \bar{\pi} \right|^2$ na equação (V.19).

Supondo ser a variável λ bem menor do que 1, temos:

$$\left| \bar{E}_{\perp} \cdot \bar{\pi} \right|^2 \approx \alpha \lambda^{2l-2} \Big|_{\epsilon=1} \quad (V.20)$$

onde:

$$\alpha \Big|_{\epsilon=1} = \left| \frac{E_{x0} l}{2^l \Gamma(l+1)} + \frac{\bar{E}_{y0} l}{2^l \Gamma(l+1)} + \frac{\bar{E}_{z0} p_{\parallel} k_{\perp}}{m \omega_B 2^l \Gamma(l+1)} \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{\bar{E}_{x0}}{4} + \frac{\bar{E}_{y0}}{4} + \frac{\bar{E}_{z0} p_{\parallel} k_{\perp}}{m \omega_B 4} \right|^2$$

e $\Gamma(l+1) \rightarrow$ função gama para argumento $l+1$

Notemos que $\left| \bar{E}_{\perp} \cdot \bar{\pi} \right|^2$ depende de k_{\perp} . O fator k_{\perp} , por sua vez depende de k_{\parallel} através da relação (V.1). Não é legítima, desta forma, a extração de $\left| \bar{E}_{\perp} \cdot \bar{\pi} \right|^2$ para fora das integrais em k_{\parallel}

que definem h_0 . Contudo, para simplificação dos cálculos e para que o uso de relações de dispersão explícitas não se façam necessárias nos restringimos a situações onde o último termo da fórmula (V.20) seja pequeno ou independente de $k_{||}$. Tais restrições podem ser implementadas por exemplo: pelo uso de ondas polarizadas no plano xy, pelo uso de campos magnéticos extremamente intensos ou pelo uso de ondas para as quais $\frac{dk_{\perp}}{dk_{||}} \xrightarrow{k_{||} \rightarrow 0} 0$. (Algumas ondas de alta frequência em plasmas frios cumprem esta condição). Devemos ressaltar, no entanto, que nenhuma das restrições mencionadas nos afasta radicalmente da essência dos argumentos usados para a construção de uma teoria que manifeste efeitos fracamente relativísticos.

De posse destas últimas aproximações e igualdades, podemos escrever a equação (V.13) na forma:

$$\frac{\partial q_{\perp}}{\partial t} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} p_{\perp}^{-1} \left(\frac{\omega_B}{\omega} \right)^2 p_{\perp} C_0 (1 - C_1 \epsilon) \frac{\partial q_{\perp}}{\partial p_{\perp}} \quad (\text{V.21})$$

onde:

$$C_0 = \frac{1}{p_{||}} m_0 \alpha_1 e^{-\left(\frac{\omega - \omega_B}{p_{||}} \right)^2 \left(\frac{m_1}{\Delta K} \right)^2}$$

$$C_1 = \frac{\omega^2 (\omega - \omega_B)}{p_{||}^2} \omega \left(\frac{m_1}{\Delta K} \right)^2 + 1$$

ou ainda na forma:

$$\frac{\partial q_{\perp}}{\partial t} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} C_0^1 (1 - C_1 \epsilon) \frac{\partial q_{\perp}}{\partial p_{\perp}} \quad (\text{V.22})$$

$$C_0^1 = C_0 \left(\frac{\omega_B}{\omega} \right)^2$$

Sendo o termo $\frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} C_0' C_1 \varepsilon \frac{\partial g_{\perp}}{\partial p_{\perp}}$ pequeno em relação ao termo que não contém os fatores ε e C_1 , podemos programar uma teoria de perturbação para a qual:

$$g_{\perp} = g_{\perp 0} + g_{\perp 1} \quad (\text{V.23})$$

onde $g_{\perp 1}$ será de ordem ε_{th} , com

$$\varepsilon_{th} \equiv \frac{1}{2} \frac{P_{i+u}^2 + P_{ii}}{(m_0 c)^2} \quad (\text{V.24})$$

$P_{\perp th}$, por hipótese, será o momento térmico da função distribuição transversal inicial (\sim função Maxwelliana).

Naturalmente, a teoria só será aceitável se ao cabo de nossos cálculos, conseguirmos verificar as devidas ordens de grandeza consideradas hipotéticas até então.

Definamos uma nova escala temporal:

$$\tau' = t \cdot C_0'$$

Então a equação (V.22) deve ser reescrita como:

$$\frac{\partial g_{\perp}}{\partial \tau'} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} (1 - C_1 \varepsilon) \frac{\partial g_{\perp}}{\partial p_{\perp}} \quad (\text{V.25})$$

Usando a equação (V.23) e desprezando termos superiores aos quadráticos em ε , temos:

$$\frac{\partial g_{\perp 0}}{\partial \tau'} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} \frac{\partial g_{\perp 0}}{\partial p_{\perp}} \quad (\text{V.26})$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \tau'} = -C_1 \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \varepsilon \rho_1 \frac{\partial g_{10}}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \rho_1 \frac{\partial g_{11}}{\partial \rho_1} \quad (\text{V.27})$$

Exigimos, neste ponto, que a função solução da equação (V.26) contenha, se computada para $t=0$, toda a informação inicial do problema,

ou seja:

$$g_{10}(\tau'=0) = f_M(\rho_1) \quad (\text{V.28})$$

Nestas condições, a equação (V.27) satisfaz:

$$g_{11}(\tau'=0) = 0$$

Definindo μ_j como sendo:

$$\mu \equiv \frac{\rho_1}{2^{1/2} \rho_{th}} \quad ; \quad \mu_u \equiv \frac{\rho_u}{2^{1/2} \rho_{th}}$$

podemos transformar o conjunto de equações (V.26)-(V.27) para

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \tau'} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \mu \frac{\partial g_{10}}{\partial \mu} \quad (\text{V.26}')$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \tau'} = -C_1 \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \mu \left(\frac{\mu_u^2}{\mu_0^2} + \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) \frac{\partial g_{10}}{\partial \mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mu} \frac{\partial g_{11}}{\partial \mu} \quad (\text{V.27}')$$

onde

$$\tau = \tau' z \rho_{th}^2 \quad ; \quad \mu_0 = \frac{mc}{\rho_{th}}$$

Devemos notar, a esta altura do trabalho, que há a ne

cessidade da solução de duas típicas equações de difusão em duas dimensões. (Recordemos que $\underline{p}_\perp = (p_{\perp x}, p_{\perp y})$). A primeira delas, a equação (V.26), tem condições iniciais não homogêneas, mas possui termo de fonte nulo. A segunda, em contrapartida possui condições iniciais nulas, mas termo de fonte (dependente da primeira) distinto de zero. Ambas, no entanto, satisfazem

$$g_{\perp 0,1} \xrightarrow{\mu \rightarrow +\infty} 0 \qquad g_{\perp 0,1} < \infty \xrightarrow{\mu \rightarrow 0}$$

O leitor já terá adivinhado que o uso de funções de Green deve facilitar sobremaneira nosso problema.

Podemos, pois, usando tais funções, escrever a solução da equação (V.26). A função de Green correspondente, como já sugerido, será a de condições iniciais não-homogêneas com condições de contorno homogêneas e sem fontes.

Tal função é, segundo [MF53]:

$$\frac{1}{T} e^{-\frac{|\underline{\mu} - \underline{\mu}'|^2}{4\tau}} \equiv G(\underline{\mu} | \underline{\mu}' ; \tau) \qquad (V.28)$$

e a solução final assume a forma

$$g_{\perp 0}(\underline{\mu}, t) = \int d^2\mu' \frac{e^{-\frac{|\underline{\mu} - \underline{\mu}'|^2}{4\tau}}}{T} f_M(\underline{\mu}') \qquad (V.29)$$

Escrevendo f_M na forma abreviada:

$$f_M = A e^{-\mu^2} \qquad (V.30)$$

obtemos segundo [RSS66]:

$$g_{10}(t, u, t) = A \frac{e^{-\frac{u^2}{1+4T}}}{1+4T} \quad (V.31)$$

O caráter do fator de normalização será discutido mais adiante.

A função de Green para condições iniciais homogêneas mas para termo de fonte não nulo \bar{e} , por sua vez, semelhante à que la fornecida pela equação (V.28), com a variável T substituída por $T-T'$.

$$G(\mu, \mu'; T-T') = \frac{1}{(T-T')} e^{-\frac{|\mu-\mu'|^2}{4(T-T')}} \quad (V.32)$$

A solução $g_{\perp 1}$ é escrita, desta forma, como:

$$g_{\perp 1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^T dT' \int d^2 u' \frac{1}{(T-T')} e^{-\frac{|\mu-\mu'|^2}{4(T-T')}} * \left\{ -C_{\perp} \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \mu'} \mu' * \right. \\ \left. * \left(\frac{\mu''^2}{\mu_0^2} + \frac{\mu'^2}{\mu_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mu'} g_{10} \right\} \quad (V.33)$$

com g_{10} dada pela equação (V.31).

O termo entre chaves da equação (V.33) é o termo de fonte proveniente da equação (V.27).

Calculemos a solução da integral (V.33).

$$g_{\perp 1} = g_{\perp 1}^{(a)} + g_{\perp 1}^{(b)}$$

com

$$g_{11}^{(a)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau} d\tau' \int \mu d\mu d\theta e^{-\frac{\mu^2}{4(\tau-\tau')}} e^{-\frac{\mu'^2}{4(\tau-\tau')}} e^{\frac{2\mu\mu'\cos\theta}{4(\tau-\tau')}} \left(-\frac{C_1}{\mu_0^2} \frac{1}{\mu'} \frac{\partial \mu'^3}{\partial \mu'} + \right. \\ \left. * A \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{e^{-\frac{\mu'^2}{4(\tau-\tau')}}}{1+4\tau'} \right)$$

$$g_{11}^{(b)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau} d\tau' \int \mu d\mu d\theta e^{-\frac{\mu^2}{4(\tau-\tau')}} e^{-\frac{\mu'^2}{4(\tau-\tau')}} e^{\frac{2\mu\mu'\cos\theta}{4(\tau-\tau')}} \left(-\frac{C_1}{\mu_0} A \frac{1}{\mu'} * \right. \\ \left. * \frac{\partial}{\partial \mu'} \mu' \mu''^2 \frac{\partial}{\partial \mu'} \frac{e^{-\frac{\mu''^2}{4(\tau-\tau')}}}{1+4\tau'} \right)$$

(V.34)

redefinindo:

$$g_{11} = -A \frac{C_1}{\mu_0^2} J \frac{1}{4}$$

(V.35)

$$\tau_0 = 4\tau$$

temos

$$I = J_1 + J_2$$

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{4\tau} d\tau_0' \int \mu d\mu d\theta e^{-\frac{\mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu'\cos\theta}{\tau_0 - \tau_0'}} \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \mu'} \mu'^3 \frac{\partial}{\partial \mu'} \frac{e^{-\frac{\mu''^2}{4(\tau_0 - \tau_0')}}}{1+\tau_0'} \\ J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{4\tau} d\tau_0' \int \mu d\mu d\theta e^{-\frac{\mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu'\cos\theta}{\tau_0 - \tau_0'}} \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \mu'} \mu' \mu''^2 \frac{\partial}{\partial \mu'} \frac{e^{-\frac{\mu''^2}{4(\tau_0 - \tau_0')}}}{1+\tau_0'} \quad (V.36)$$

Começamos pela avaliação de J_1 .

- Integrando primeiramente em θ :

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{4\pi} d\bar{\tau}' \int \mu' d\mu' \frac{1}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0)} e^{-\frac{\mu'^2 - \mu'^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0)}} \left[\int_0^{2\pi} d\theta e^{\frac{2\mu\mu' \cos\theta}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0}} \right] *$$

$$* \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \mu'} \mu'^2 \frac{\partial}{\partial \mu'} \frac{e^{-\frac{\mu'^2}{1+\bar{\tau}'_0}}}{1+\bar{\tau}'_0}$$

$$J_1 = 2 \int_0^{4\pi} d\bar{\tau}' \int \mu' d\mu' \frac{1}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0)} e^{-\frac{(\mu^2 + \mu'^2)}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0}} I_0\left(\frac{2\mu\mu'}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0}\right) \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \mu'} \mu'^3 *$$

$$* \frac{\partial}{\partial \mu'} \frac{e^{-\frac{\mu'^2}{1+\bar{\tau}'_0}}}{1+\bar{\tau}'_0}$$

onde $I_0(x)$ é a função de Bessel modificada, ordem zero.

$$J_1 = 2 \int_0^{4\pi} d\bar{\tau}' \int \mu' d\mu' \frac{1}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0)} e^{-\frac{(\mu^2 + \mu'^2)}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0}} I_0\left(\frac{2\mu\mu'}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0}\right) \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \mu'} \left\{ [-2\mu^4] * \right.$$

$$\left. \frac{1}{(1+\bar{\tau}_0)^2} e^{-\frac{\mu^2}{1+\bar{\tau}_0}} \right\}$$

Esta última integral pode ser reescrita como:

$$J_1 = -4 \int_0^{4\pi} d\bar{\tau}' \int \mu d\mu \frac{1}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0)} e^{-\frac{\mu^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0}} e^{-\frac{\mu'^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0}} I_0\left(\frac{2\mu\mu'}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}'_0}\right) \frac{1}{\mu'} *$$

$$* \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{d^2}{d\lambda^2} e^{-\frac{\lambda\mu'}{1+\bar{\tau}'_0}} \Big|_{\lambda=1}$$

ou

$$J_{\perp} = -4 \frac{d^2}{d\lambda^2} \int_0^{4\tau} d\bar{\tau}' \int u' du' \frac{e^{-\frac{u'^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}} e^{-\frac{u'^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}}}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \quad \text{I}_0 \left(\frac{2\lambda u'}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} \right) *$$

$$* \frac{1}{u'} \frac{\partial}{\partial u'} e^{-\frac{\lambda u'^2}{1 + \bar{\tau}_0'}} \Big|_{\lambda=1}$$

ou, realizando a última derivação indicada:

$$J_{\perp} = 16 \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda \int_0^{4\tau} d\bar{\tau}' \frac{e^{-\frac{u^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}}}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')(1 + \bar{\tau}_0')} \int_0^{+\infty} d\mu' \mu' e^{-\mu'^2} \left(\frac{1}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} + \frac{\lambda}{1 + \bar{\tau}_0'} \right) *$$

$$* \text{I}_0 \left(\frac{2\lambda u'}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} \right) \Big|_{\lambda=1}$$

A última integral da equação (V.37) é da forma:

$$\int_0^{+\infty} dx x e^{-\lambda x^2} \text{I}_0(\beta x)$$

$$\lambda > 0, \quad \beta > 0$$

Sua solução, demonstrada em [TS80] é:

$$\frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\lambda}\right)$$

então, temos:

$$J_{\perp} = 16 \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda \int_0^{4\tau} d\bar{\tau}' \frac{e^{-\frac{u^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}}}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')(1 + \bar{\tau}_0')} \frac{1}{2 \left(\frac{1}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} + \frac{\lambda}{1 + \bar{\tau}_0'} \right)} e^{\frac{u^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')^2}} \frac{1}{\frac{1}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} + \frac{\lambda}{1 + \bar{\tau}_0'}} \Big|_{\lambda=1}$$

$$J_{\perp} = 4 \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda \int_0^{4\tau} d\bar{\tau}' \frac{e^{-\frac{u^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}} \left(1 - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0 + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \Big|_{\lambda=1}$$

Neste estágio dos cálculos passa a ser interessante a comutação da derivação com a integração.

$$J_1 = 4 \int_0^{4\pi} d\bar{\tau}_0' \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} \left(L - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)}}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right) \Bigg|_{\lambda=1} \quad (IV.38)$$

$$J_1 = 4 \int_0^{4\pi} d\bar{\tau}_0' \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\lambda * -(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')}{(1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'))^2} e^{-\frac{\mu^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} \left(L - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)} \right] -$$

$$- \frac{\lambda}{(1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'))^3} e^{-\frac{\mu^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \left(L - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)} \mu^2 (1 + \bar{\tau}_0') \Bigg|_{\lambda=1}$$

$$J_1 = 4 \int_0^{4\pi} d\bar{\tau}_0' \left[-(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0') \right] \cdot 2 \cdot \frac{1}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \cdot \frac{[-(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')]}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')^2} *$$

$$* e^{-\frac{\mu^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \left(L - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)} \frac{[-(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')]}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')^2} e^{-\frac{\mu^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \left(L - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)} *$$

$$* \frac{\mu^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} (1 + \bar{\tau}_0') \frac{[-(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')]}{(1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'))^2} + \frac{3(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')}{(1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'))^4} *$$

$$* e^{-\frac{\mu^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \left(L - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)} \mu^2 (1 + \bar{\tau}_0') - \frac{1}{[1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')]^3} *$$

$$* e^{-\frac{\mu^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \left(L - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)} \mu^4 (1 + \bar{\tau}_0')^2 \left(\frac{1}{1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} \right)^2 \Bigg|_{\lambda=1}$$

Fixando $\lambda = 1$, e realizando as devidas simplificações, temos:

$$\begin{aligned}
 J_1 = & -4 e^{-\frac{\mu^2}{1+\bar{\tau}_0}} \left\{ \mu^4 \frac{1}{(1+\bar{\tau}_0)^5} \int_0^{4\bar{\tau}} (1+\bar{\tau}_0')^2 d\bar{\tau}_0' + \mu^2 * \right. \\
 * & \left[\frac{1}{(1+\bar{\tau}_0)^4} \cdot 4 \cdot \int_0^{4\bar{\tau}} (\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')(1+\bar{\tau}_0') d\bar{\tau}_0' - \frac{2}{(1+\bar{\tau}_0)^3} \int_0^{4\bar{\tau}} (1+\bar{\tau}_0') d\bar{\tau}_0' \right] + \\
 + & \frac{2}{(1+\bar{\tau}_0)^2} \left[\int_0^{4\bar{\tau}} \frac{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')^2}{1+\bar{\tau}_0} d\bar{\tau}_0' - \int_0^{4\bar{\tau}} (\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0') d\bar{\tau}_0' \right]
 \end{aligned}
 \tag{V.39}$$

Antes do cálculo das integrais em T_0 , encontremos a solução para J_2 , análoga à equação (V.39):

$$\begin{aligned}
 J_2 = & \frac{1}{\pi} \int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}_0' \int_0^{+\infty} d\mu' \frac{e^{-\frac{\mu + \mu'^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}}}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} \left(\int_0^{2\pi} e^{\frac{2\mu\mu' \cos\theta}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}} \right) \frac{2\mu\mu'^2}{\mu'} \\
 * & \mu \cdot \frac{(-2\mu')}{(1+\bar{\tau}_0')^2} e^{-\frac{\mu'^2}{1+\bar{\tau}_0'}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 = & 4\mu_0^2 \int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}_0' \int_0^{+\infty} d\mu \frac{e^{-\frac{(\mu^2 + \mu'^2)}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}}}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')} I_0 \left(\frac{2\mu\mu'}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} \right) \frac{\partial}{\partial \mu'} \frac{d}{d\lambda} \left[\right. \\
 & \left. e^{-\frac{\lambda\mu^2}{1+\bar{\tau}_0'}} \right] \Big|_{\lambda=1}
 \end{aligned}$$

$$J_2 = 4\mu_0^2 \int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}_0' \int_0^{+\infty} d\mu' \bar{\tau}_0 \frac{e^{-\frac{(\mu^2 + \mu'^2)}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}}}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')(1+\bar{\tau}_0')} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{-2\mu\lambda}{1+\bar{\tau}_0} e^{-\frac{\lambda\mu^2}{1+\bar{\tau}_0'}} \right) \Big|_{\lambda=1}$$

$$J_2 = -16\mu_0^2 \frac{d}{d\lambda} \lambda \int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}_0' \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}}}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')(1+\bar{\tau}_0')^2} \int_0^{+\infty} d\mu' \mu' e^{-\frac{\mu'^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}} e^{-\frac{\lambda\mu'^2}{1+\bar{\tau}_0'}} *$$

$$* I_0 \left(\frac{2\mu\mu'}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} \right) \Big|_{\lambda=1}$$

$$J_2 = -16\mu u^2 \frac{d}{d\lambda} \lambda \int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}' \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}}}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')(1 + \bar{\tau}_0')^2} \frac{1}{2\left(\frac{1}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} + \frac{\lambda}{1 + \bar{\tau}_0'}\right)} e^{\frac{\mu^2}{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')^2}} *$$

$$* e^{\left(\frac{1}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'} + \frac{\lambda}{1 + \bar{\tau}_0'}\right)} \Big|_{\lambda=1}$$

Conforme a fórmula seguinte a equação (V.37):

$$J_2 = -4\mu u^2 \frac{d}{d\lambda} \lambda \int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}' \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'}} \left(1 - \frac{1 + \bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0 + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0')}\right)}{(1 + \bar{\tau}_0')(1 + \bar{\tau}_0' + \lambda(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0'))} \Big|_{\lambda=1}$$

$$J_2 = -4\mu u^2 \left[\frac{e^{-\frac{\mu^2}{1 + \bar{\tau}_0'}}}{1 + \bar{\tau}_0'} \int_0^{4\bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}_0'}{1 + \bar{\tau}_0'} - e^{-\frac{\mu^2}{1 + \bar{\tau}_0'}} \frac{1}{(1 + \bar{\tau}_0)^2} * \right.$$

$$* \int_0^{4\bar{\tau}} \frac{(\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}_0' + 1 - 1)}{1 + \bar{\tau}_0'} d\bar{\tau}_0' - e^{-\frac{\mu^2}{1 + \bar{\tau}_0}} \frac{\mu^2}{(1 + \bar{\tau}_0)^3} \int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}_0' (1 + \bar{\tau}_0)$$

$$J_2 = -4\mu u^2 \left[\frac{e^{-\frac{\mu^2}{1 + \bar{\tau}_0}}}{(1 + \bar{\tau}_0)^2} \left(\int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}_0' - \frac{\mu^2}{1 + \bar{\tau}_0} \int_0^{4\bar{\tau}} d\bar{\tau}_0' \right) \right]$$

(V.40)

Realizando finalmente as integrações indicadas nas equa

ções (V.39) e (V.40) e agrupando os diversos coeficientes das respectivas potências de μ , temos, finalmente:

$$g_{\perp\perp} = g_{\perp\perp}^{(a)} + g_{\perp\perp}^{(b)} \quad (V.34)$$

$$g_{\perp\perp} = -\frac{A}{4} \frac{C_1}{\mu_0^2} \left\{ 4 \frac{e^{-\frac{\mu^2}{1+\tau_0}} \tau_0}{1+\tau_0} \left[\mu^4 \left(\frac{1+\tau_0 + \tau_0^2/3}{(1+\tau_0)^4} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu^2 \left(\frac{-2 \left[1 + \tau_0/2 + \tau_0^2/6 \right] + \mu_{II}^2 (1+\tau_0)}{(1+\tau_0)^3} \right) + \left(\frac{-\tau_0(1+\tau_0/3)}{(1+\tau_0)^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\mu_{II}^2 (1+\tau_0)}{(1+\tau_0)^2} \right) \right] \right\} \quad (V.41)$$

com $T_0 = 4T$.

A expansão do fator γ , presente na integral (V.33), só tem fundamento se o integrando desta integral se anula para momentos para os quais se cumpre $\frac{p_{\perp}}{mc} \geq 1$.

Este fato impõe um limite de tempo, $T_{\text{máx}}$, para o qual a função $g(p_{\perp}, T_{\text{máx}})$ ($p_{\perp} \ll mc$) pode ser calculada dentro de aproximações fracamente relativísticas.

Estimando o integrando (V.33) para valores pequenos de μ , obtemos:

$$\text{Integrando (V-33)}_{T_{\text{m\bar{a}x}}} \sim e^{-\frac{(mc)^2}{8p_0^2 T_{\text{m\bar{a}x}}}} e^{-\frac{(mc)^2}{8p_0^2 T_{\text{m\bar{a}x}}}} \ll 1$$

Supondo $T_{\text{m\bar{a}x}} \gg 1$, então:

$$e^{-\frac{(mc)^2}{4p_0^2 T_{\text{m\bar{a}x}}}} \ll 1$$

(V.42)

$$T_{\text{m\bar{a}x}} \ll \frac{4p_0^2}{(mc)^2}$$

Quanto ao fator de normalização "A", mostramos a seguir que seu valor pode ser obtido através da função distribuição não-relativística.

De fato, considerando a equação de evolução para a função $g_{\perp 1}$:

$$\frac{\partial g_{\perp 1}}{\partial t} = -c_1 c_0' \frac{1}{P_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \left(p_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} g_{\perp 10} \right) + \frac{C_0}{P_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \left(p_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} g_{\perp 11} \right) \quad (\text{V.27})$$

notamos, usando integração por partes, que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int g_{\perp 11} d^2 p_{\perp} = 0 \quad (\text{V.43})$$

onde por hipótese

$$\frac{\partial g_{\perp 10}}{\partial p_{\perp}}, \quad \frac{\partial g_{\perp 11}}{\partial p_{\perp}} \xrightarrow{p_{\perp} \rightarrow \infty} 0$$

Como $\int g_{\perp 1}(p_{\perp}, t=0) d^2 p_{\perp} = 0$ ($g_{\perp 1}(t=0) = 0$), os comentários anteriores ficam justificados.

Dentro da aproximação fracamente relativística, podemos notar que as correções à difusão não-relativística cessam

quando vale a igualdade:

$$P_{||} = \pm \left(2 (\omega - \omega_B) \dot{\omega} \right)^{1/2} \frac{m_0}{\Delta k}$$

O que ocorre nestas condições é que o aumento de massa embora por um lado dificulte a difusão perpendicular, por outro desloca $k_{||}$ ressonante para regiões do espectro onde o campo elétrico é mais intenso.

O fator $\frac{1}{2\mu_0}$, presente como coeficiente para a fórmula (V.41) nos garante que, para μ 's, $\mu_{||}$'s e T_0 's adequados (compatíveis com as restrições já expostas), a correção relativística é tanto menor quanto menor for a temperatura inicial do sistema.

Com relação à justificativa da separação expressa na equação (V.9), afirmamos que a proximidade entre os valores ω e ω_B atenua a dependência da função g_{\perp} em $p_{||}$. Para tanto, basta examinar a forma (V.21) para o coeficiente C_1 .

Podemos facilmente adaptar a fórmula (V.41) para o caso em que a distribuição espectral para o campo elétrico é da forma:

$$\tilde{E}(k_{||}) = \tilde{E}_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k_{||} - k_0}{\Delta k} \right)^2} \quad (V.44)$$

Tal adaptação conduz a transformação

$$C_1 \rightarrow C_1' = \frac{2\omega}{P_{||}^2} \left(\omega - \omega_B - \frac{k_0 p_{||}}{m_0} \right) \frac{m_0}{\Delta k} + j \quad (V.45)$$

Estipulando valores adequados para os parâmetros físi-

cos de interesse, podemos obter gráficos para a função:

$$g_{\perp} = g_{\perp 0} + g_{\perp 1}$$

onde consideramos C_1 como aquele dado pela fórmula (V.45).

Os referidos gráficos bem como as devidas especificações numéricas estão expostos nas figuras (V.1) e (V.2).

Informamos ao leitor que os gráficos foram construídos sob a hipótese de que $\omega \sim -\omega_B$. Esta ressonância ($\ell = -1$) decorre do fato de que preparamos os campos externos com frequência $\omega > 0$. O leitor pode se tranquilizar quanto à possibilidade de uso do formulário até aqui desenvolvido.

O fato é que a troca $\ell = 1 \rightarrow \ell = -1$ altera as funções J_{ℓ} por meio de sua multiplicação por um fator (-1). Este fator, no entanto, estando situado no interior de um termo a ser elevado ao quadrado, não tem influências explícitas nos resultados finais.

Na figura V.1, especificamente, comparamos a função distribuição não-relativística e a função distribuição fracamente relativística em um mesmo instante de tempo.

Na figura V.2, por outro lado, desenhamos o gráfico da função fracamente relativística para $T_0 = 0$ e para um determinado $T_0 \neq 0$.

Alguns comentários são relevantes com relação aos gráficos.

Primeiramente chamamos atenção de que a seção dos gráficos onde $p_{\perp}/mc \geq 1$ ou $p_{\perp} \gg mc$ não foi desenhada. Naturalmente tais limites quebram a validade de nossa aproximação. Contudo, podemos afirmar qualitativamente, que se $E(k_{\parallel}) \xrightarrow[k_{\parallel} \rightarrow \pm\infty]{} 0$ então o

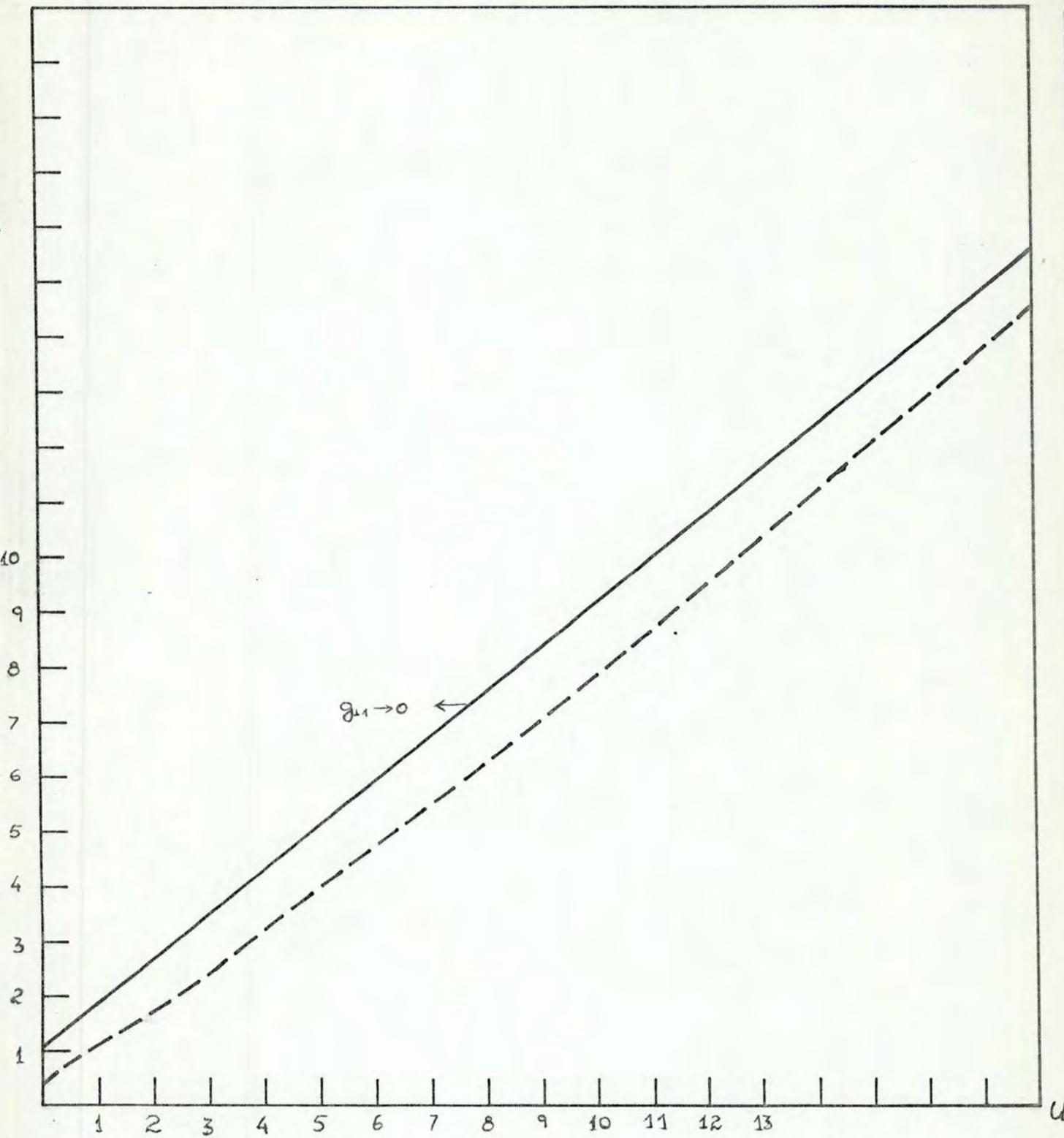


FIGURA V.1 Estã indicado, no gráfico acima, a correção relativística para a função de distribuição de momento perpendiculares. Os parâmetros relevantes são: $T = 0,01$; $W = -2.28$; $T_e = 1\text{keV}$
 $\frac{\omega_b}{\omega} = 1.06$; $N_o = 0.44$; $\Delta N_{||} = 0.1$.

$$U^2 = 2\mu^2$$

$$N_{||} = \frac{K_{||} C}{\omega}$$

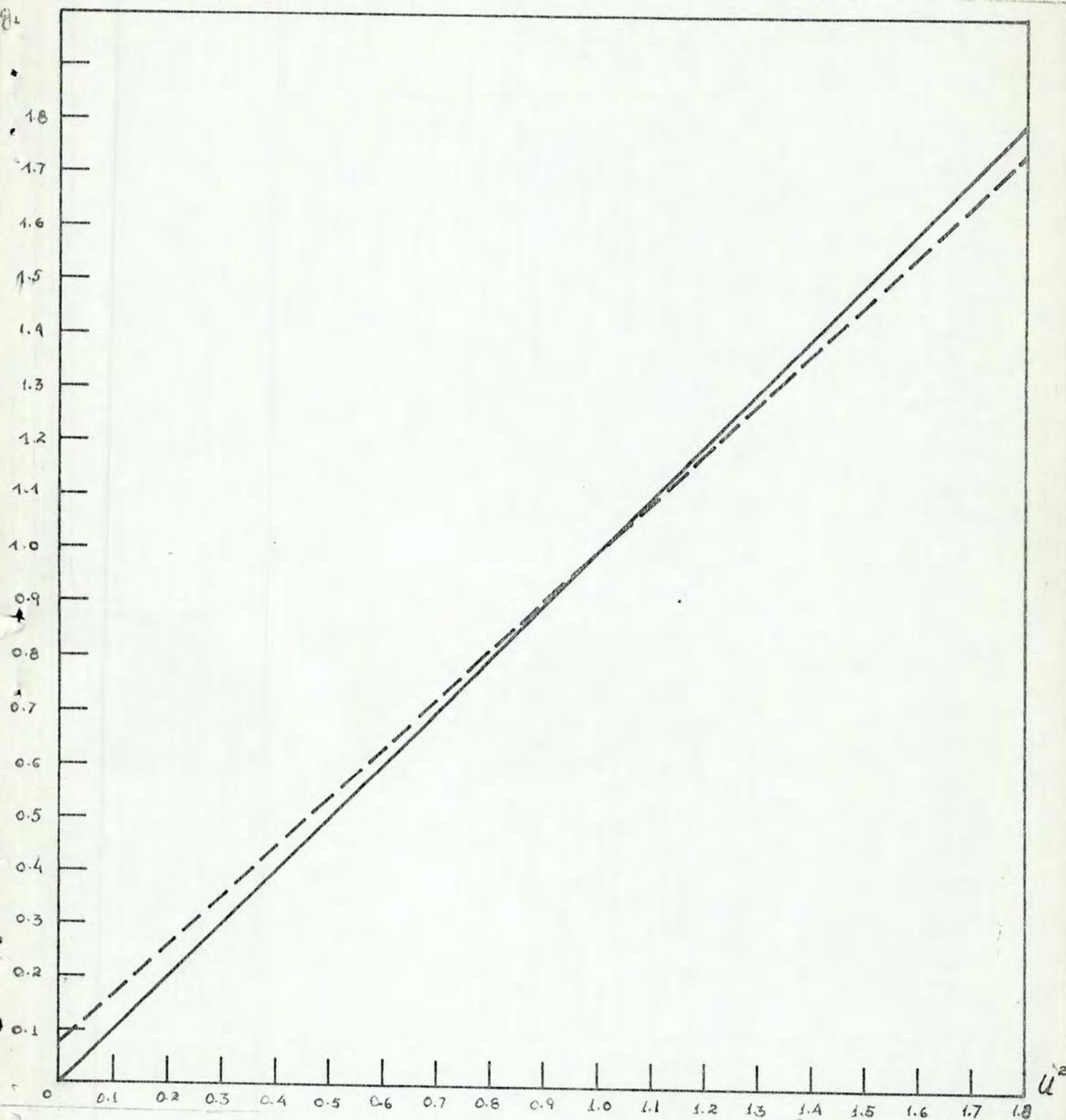


FIGURA V.2 No gráfico acima encontra-se representada a função distribuição com correções relativísticas, dois instantes distintos. Os demais parâmetros são os mesmos usados na figura V.1, à exceção de W . Neste gráfico, $W = -2.18$.

$$u^2 = 2\mu^2$$

$$N_{11} = \frac{k_{11} C}{\omega}$$

coeficiente de difusão tende a zero para grandes momentos, o que implica

$$g_{\text{EXATA}}^{\text{rel}}(t) \xrightarrow[\frac{p_{\perp}}{mc} \rightarrow +\infty]{} g_{\perp 0}(t=0) \quad (\text{V.46})$$

Evidentemente a possibilidade da realização da igualdade (V.46) advém do fato de que a condição de ressonância presente na teoria (relembramos que nossa aproximação desconsidera interação não-ressonante) envolve p_{\perp} , o que não acontecia na teoria estritamente não-relativística.

Também devemos notar que a medida que a largura do pacote e de ondas incidentes se estreita, a região de ressonância no espaço p_{\perp} , para p_{\parallel} fixo, também se reduz. No caso limite em que o pacote é representado por uma função delta ($|E|^2 = |E_0|^2 \delta(k_{\parallel} - k_0)$) a função distribuição $g_{\perp}(p_{\perp}, t)$ só sofre alterações significativas para $p_{\perp} = p_{\perp 0} \left[\left(\frac{\omega c}{\omega} + \frac{k_0 c}{\omega} \frac{p_{\parallel}}{mc} \right)^2 - 1 - \left(\frac{p_{\parallel}}{mc} \right)^2 \right]^{1/2}$.

Com relação a pacotes estreitos podemos mencionar que Fidone, Granata e Meyer [FGM81] concluíram que os efeitos de distorção relativística são particularmente evidentes se a igualdade de seguinte se cumpre:

$$W_{\perp 0} = \frac{P_{\perp 0}}{m \left(T/m \right)^{1/2}} \approx \sqrt{2} \quad (\text{V.47})$$

Finalmente, podemos mencionar que os gráficos obtidos através de nossa técnica perturbativa, são bastante aproximados dos obtidos por Fidone, pelo menos nas regiões onde é satisfeita

a desigualdade $\frac{p_{\perp}}{mc} \ll 1$. Estes nossos resultados guardam certo interesse, pois, se desejarmos investigar correções relativísticas à região térmica da distribuição de momenta: $p_{\perp} \sim p_0$ ($\frac{p_0}{mc} \ll 1$). Evidentemente a análise do sistema na região $p_{\perp} \gtrsim mc$ requer técnicas mais refinadas, muito embora possamos informar qualitativamente (ver parágrafos anteriores) que para $p_{\perp} \gg mc$, a distribuição inicial não sofre alterações notáveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AAP75] AKHIEZER, A.I.; AKHIEZER, I.A.; POLOVIN, R.V.; SITENKO, A.G.; STEPANOV, K.N. Plasma Electrodynamics. Pergamon Press, 1975.
- [Da72] DAVIDSON, R.C. Methods in Non-Linear Plasma Theory. New York, Academic Press, 1972.
- [DP62] DRUMMOND, W.E.; PINES, D. Nuclear Fusion Suppl., 2, 465, 1962.
- [FGM80] FIDONE, I.; GRANATA, G.; MEYER, R.L. Electron Cyclotron Damping for Large Wave Amplitude in Tokamak Plasmas. Fontenay-aux-Roses, Association Euratom-CEA sur la Fusion, 1980.
- [FGM81] FIDONE, I.; GRANATA, G.; MEYER, R.L. Role of the Relativistic Mass Variation in the Electron Cyclotron Resonance Wave Absorption. Fontenay-aux-Roses, Association Euratom-CEA sur la Fusion, 1981. (EUR-CEA-FC-1136)- Phys. Fluids 25 2249 (1982).
- [GS79] GALLEEV, A.A.; SAGDEEV, R.Z. Non-Linear Plasma Theory. In: LEONTOVICH, M.A. Reviews of Plasma Physics. New York, Consultant Bureau, 1979, V. 7.
- [Ka79] KADOMTSEV, B.B. Phénomènes Collectifs dans le Plasmas. Moscou, Editions Mir, 1979.
- [KT73] KRALL, N.A.; TRIVELPIECE, A.W. Principles of Plasma Physics. McGraw-Hill Book Company, 1973.
- [MF53] MORSE, P.M.; FESHBACH, H. Methods of Theoretical Physics Part I, Kogakushe Company, International Student Edition.

- [Pa65] PAPOULIS, A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha LTD, International Student Edition.
- [RSS66] ROWLANDS, J.; SIZONENKO, V.L.; STEPANOV, K.N. Contribution to the theory of Decay of Electromagnetic Waves in a Magnetoactive Plasma. Soviet Physics JETP, 23(4):661-667, New York, Oct. 1966.
- [Sc79] SCHMIDT, G. Physics of High Temperature Plasmas. New York, Academic Press, 1979.
- [TS80] TIJONOV, A.N.; SAMARSKY, A.A. Equaciones de la Física-Matemática. Editorial Mir, Moscou, 1980.
- [Ts70] TSYTOVICH, V.N. Non-Linear Effects in Plasmas. New York, Plenum Press, 1970.
- [Ts77] TSYTOVICH, V.N. Theory of Turbulent Plasma. New York, Consultants Bureau, 1977.
- [VVS61] VEDENOV, A.A.; VELIKHOV, E.P.; SAGDEEV, R.Z. Nuclear Fusion, 1, 82, 1961.
- [Wu66] WU, T.-Y. Kinetic Equations of Gases and Plasmas. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- [Wu68] WU, C.S. Physics of Fluids, 11, 1773, 1968.
- [Ya63] YAKIMENKO, V.L. Absorption of Waves in a Plasma (Quasi-Linear Absorption). Soviet Physics JETP, 17(5):1032-1037, New York, Nov. 1963.
- [He 66] HEISENBERG, W. INTRODUCTION IN ZABUSKY, N.J. Topics in Non-Linear Physics, BERLIN, SPRINGER-VERLAG 1966