UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

LOCALIZAÇÃO DAS INTERAÇÕES EM ESPALHAMENTO NUCLEAR A ENERGIAS MÉDIAS*

Maria Helena Steffani

Dissertação realizada sob a orientação dos Doutores Victoria E. Herscovitz e Th.A.J.Maris, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), e German Agency for Technical Cooperation (GTZ).

Porto Alegre

1979

À minha mãe

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Dra. Victoria E. Herscovitz e Dr. Theodor A.J. Maris, meu profundo agradecimento pelo incentivo constante e pelos valiosos ensinamentos recebidos.

À Dra. Victoria E. Herscovitz, com quem muito tenho aprendido, minha especial gratidão e reconhecimento pelo inestimável apoio e constante esforço em favor de minha formação científica.

Ao Dr. Claudio Schneider, pelas discussões e sugestões formuladas especialmente na parte computacional deste trabalho, o meu obrigado.

A Maria Cecilia do Amaral, pelo cuidadoso trabalho de datilografia e a Cleto Tartarelli, pelos desenhos do presente trabalho, meu agradecimento.

A todos aqueles que me estimularam e apoiaram quando da elaboração deste trabalho, o meu muito obrigado.

RESUMO

Estuda-se a densidade de probabilidade, no espaço de configuração, de núcleons de energia no intervalo de 80 a 320 MeV, espalhados por potenciais óticos complexos centrais de formas arbitrárias que simulam a interação núcleon-núcleo. O conhecimento das distribuições de probabilidade de partículas, na região do núcleo, é essencial para o estudo de interações nucleares inelásticas a baixas e médias energias.

As funções de onda obtidas, usando o formalismo de ondas parciais, são soluções analíticas de potenciais óticos aproximados. Os efeitos das partes real e imaginária do potencial ótico na função de onda são discutidos. Diagramas de contorno da densidade de probabilidade mostram um efeito de focagem na função de onda na região do núcleo, para as energias mais baixas do núcleon incidente, desaparecendo às energias mais altas. A focagem resulta pouco sensível às variações na forma do potencial.

Um estudo comparativo das funções de onda determinadas neste trabalho, na região do núcleo, com funções de onda distorcidas obtidas utilizando a aproximação W.K.B. é apresentado. Para energias incidentes menores do que aproximadamente 120 MeV a aproximação semiclássica não é boa; para energias incidentes entre 120 e 200 MeV ocorrem diferenças significativas apenas em pequenas regiões do núcleo, enquanto para energias maiores do que 200 MeV a aproximação semiclássica fornece bons resultados.

ABSTRACT

The probability density in configuration space of nucleons with energies between 80 and 320 MeV, which are scattered by complex central, arbitrarily shaped, optical potentials, simulating the nucleon-nucleus interaction is studied. The knowledge of the probability density of particles inside the nucleus is essential for the study of inelastic nuclear interactions at low and medium energies.

The wave functions obtained by applying the partial wave formalism are analytic solutions of approximated optical potentials. The effects of the real and imaginary parts of the optical potential on the wave function are discussed. Contour diagrams of the probability density show a focusing effect for the wave function in the nucleus for the lower energies of the incoming nucleon which disappears for the highest energies. The focus is little sensitive to variations of the shape of the potential.

A comparison is made of the wave functions determined in this work, in the nuclear region, with the distorted waves obtained by the W.K.B. approximation. For incoming energies lower than about 120 MeV the semiclassical approximation is poor; for energies between 120 and 200 MeV significant differences occur only in small regions of the nucleus, whereas for energies over 200 MeV the semiclassical approximation gives good results.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO

O estudo de reações nucleares induzidas por bombardeamento de partículas de médias energias tem fornecido informações sobre a estrutura nuclear e sobre o mecanismo de reação.

Reações nucleares diretas em que a partícula incidente arranca um núcleon do núcleo sem que ocorra qualquer outra interação violenta adicional entre as partículas do sistema, chamadas reações quase-livres[1], são o instrumento mais eficiente para obter informação sobre o comportamento individual de núcleons nucleares, como suas energias de ligação e distribuições de momentum. Para os núcleons mais fortemente ligados ao núcleo esta é atualmente a fonte de informação experimental. Estas reações têm permitido, em particular, investigar a validade das predições do modelo de camadas nucleares[2] como, por exemplo, diferenças de energia de várias camadas e acoplamento spin-órbita. Outras reações nucleares diretas tais como a de "stripping"[3], na qual, por exemplo, um núcleon de um dêuteron incidente transfere-se para o núcleo alvo, e a de "pick-up"[4], na qual uma partícula incidente arranca um núcleon do núcleo alvo, que ocorrem predominantemente na superfície nuclear, têm fornecido informações referentes às propriedades dos núcleons nucleares menos ligados.

Reações quase-livres (p, pN)[1, 5, 6] com prótons incidentes de energias da ordem de e maiores que 100 MeV têm sido realizadas em inúmeros laboratórios[7]; também reações (e, e'p)[8] com elétrons de energia no intervalo de 300 MeV a 1000 MeV têm sido investigadas experimentalmente[9]. Reações quase-livres

$(\pi, \pi N)$[10, 11] com píons na região de energia da ressonância Δ (em torno de 200 MeV) parecem promissoras fontes de informação sobre a interação meson-núcleo. No espalhamento píon-núcleo para píons de energias baixas e médias (abaixo de 300 MeV) ocorrem fenômenos como a absorção de píons pelo núcleo e a produção da ressonância $\Delta(3,3)$ no núcleo, que se constituem atualmente em importantes objetivos de estudo. Ademais propostas de reações quase-livres (K^+, KN)[12] têm sido apresentadas. Outrossim, processos quase-livres com prótons[13, 14] ou elétrons[15] incidentes polarizados têm sido analisados para determinar a polarização efetiva do núcleon nuclear arrancado e a validade das aproximações usualmente adotadas na descrição de reações a energias médias.

Existem também processos denominados quase-livres em que a partícula incidente arranca um "cluster" do núcleo[5], tais como (p, pd), (p, pα) e (α, 2α). Tais reações, embora frequentemente tratadas com um formalismo semelhante ao das reações quase-livres propriamente ditas em que um núcleon é arrancado, implicam no estudo de propriedades de aglomerados de núcleons e não no de núcleons individuais.

Para reações nucleares diretas com projéteis de energias médias, em que o comprimento de onda do projétil é pequeno comparado com a distância média entre dois núcleons no núcleo (cerca de 1.7 fm)[†] e em que a transferência de momentum é grande, a interação entre o projétil e um núcleon-alvo resulta localizada e, conseqüentemente, as interações da partícula incidente com as partículas do núcleo podem ser tratadas aproximadamente como colisões individuais entre partículas livres[16].

Um tratamento mais quantitativo do espalhamento de par

---

† Adotaremos o ponto em vez da vírgula na notação de números decimais.

tículas de médias e altas energias por núcleos é feito através da aproximação de impulso[17] cuja idéia fundamental é representar a amplitude de espalhamento partícula-núcleo como uma superposição de amplitudes de espalhamento por núcleons individuais "livres", que tenham a mesma distribuição de momentum dos núcleons ligados.

Um modelo simples que descreve a interação projétil-núcleo consiste em representar o núcleo por um potencial ótico[18]. A vantagem desse modelo é substituir a interação nuclear de muitos corpos por um potencial de dois corpos. Este potencial deve levar em conta a possibilidade de ocorrência de colisões múltiplas, absorção e outros processos quando existirem, além da interação específica entre a partícula incidente e o núcleon-alvo. As colisões múltiplas provocam distorções na função de onda das partículas dos estados inicial e final, efeito esse que pode ser descrito por um potencial ótico complexo. Uma das primeiras aplicações da idéia de considerar o núcleo como um "meio ótico contínuo"[18] caracterizado por um índice de refração e um coeficiente de absorção foi feita por Byfield, Kessler e Lederman[19] ao discutir suas experiências de espalhamento de mesons-π em carbono.

Estudando o domínio de aplicabilidade do modelo ótico para núcleons incidentes Hodgson[20] concluiu que, para núcleons interagindo com núcleos médios o potencial ótico dá uma boa descrição da situação experimental na região de energia de 10 a várias centenas de MeV e que o modelo ótico descreve melhor a interação de núcleons com núcleos médios e pesados do que a com núcleos leves, uma vez que nos primeiros a distribuição de matéria está mais próxima do limite da matéria nuclear uniforme.

A possibilidade de as partículas incidente e emergentes sofrerem colisões múltiplas antes e após uma interação direta implica em variações em suas energias e nas direções de seus momenta, o que é levado em conta no tratamento teórico baseado na aproximação de impulso(17) com ondas distorcidas (DWIA).

Grande parte dos trabalhos teóricos em reações quase-livres (p, pN) utiliza ondas planas modificadas por fatores de distorção calculados através da aproximação W.K.B.(21), para as funções de onda distorcidas dos núcleons incidente e emergentes, (ver, por exemplo, Tabela II da referência 6a).

Embora para potenciais centrais seja possível determinar a solução da equação de espalhamento de forma exata, este tratamento é demorado para energias maiores que 150 MeV por implicar na determinação numérica de um grande número de ondas parciais. Isto, além de processos envolvendo potenciais não esféricos, têm levado muitos autores a utilizar métodos de aproximação para calcular as funções de onda do modelo ótico. A aproximação semi-clássica, por sua simplicidade e apelo à concepção clássica do fenômeno, tem um papel destacado entre os métodos de aproximação usados. Resulta, pois, aconselhável investigar em que condições a aproximação semi-clássica se aplica satisfatoriamente à determinação das funções de onda das partículas envolvidas na reação.

Funções de onda distorcidas têm sido calculadas por expansão em ondas parciais para espalhamento de partículas α, prótons e nêutrons de baixas energias (até 30 MeV)(22,23) e para espalhamento (p, 2p) para energias mais altas do próton in cidente. Estudos sistemáticos, contudo, da validade da aproximação semi-clássica para a função de onda do projétil na região do núcleo não são encontrados na literatura.

O presente trabalho se propõe a estudar a função de onda distorcida de núcleons de energia variável espalhados elasticamente por potenciais óticos complexos centrais através de uma expansão em ondas parciais. Serão obtidas funções de onda distorcidas de núcleons num intervalo de energia tal que nos permita estimar o limite inferior (em energia) a partir do qual o uso da aproximação W.K.B. na determinação das funções de onda distorcidas é satisfatório.

O estudo do fluxo de partículas em um modelo ótico que descreve o espalhamento de partículas α[22] e de nêutrons[23] a baixas energias (até 30 MeV) indica a existência de uma região de fluxo muito concentrado na superfície nuclear para pequenos ângulos de espalhamento. Esse efeito de localização da região de interação é discutido por McCarthy[24] em uma investigação da relação entre interações diretas e o modelo ótico a baixas energias, na qual torna-se evidente um efeito de focagem das funções de onda na superfície nuclear para a mencionada região angular. Em um trabalho posterior[25], Lim e McCarthy, analisando o efeito de distorção em reações quase-livres (p, 2p) com prótons incidentes de 50 MeV, descrevem a existência de focos nas funções de onda do estado final de reações (p, 2p). Os mesmos autores, num cálculo de ondas distorcidas de correlação angular em reações (p, 2p) com prótons incidentes de 155 MeV[26], indicam que o foco é desprezível.

Um estudo comparativo do tratamento via soma de auto funções de momentum angular e do uso da aproximação W.K.B. para a determinação das funções de onda distorcidas para os prótons incidente e emergentes na reação $^{6}Li(p, 2p)^{5}He$ com prótons incidentes de 185 MeV, feito por Jackson e Berggren(27), indica que a aproximação semi-clássica é provavelmente satisfatória para a análise de dados experimentais a esta energia e que o formalismo de ondas parciais é um método que permite a investigação detalhada dos efeitos de localização da reação em certas regiões espaciais do núcleo ou no espaço de momentum.

Para reações que são dominadas por forte absorção nos canais de entrada e saída, sendo os momenta relativos de entrada e saída aproximadamente iguais ($\vec{k}_{\alpha} \approx \vec{k}_{\beta}$) usualmente é necessário apenas o conhecimento da função de onda fora do núcleo(28) a qual é determinada em função dos coeficientes de reflexão. Através do uso da aproximação W.K.B. tais coeficientes podem ser determinados com boa precisão (quando pequenos). Funções de onda obtidas com esta aproximação por Austern(29), para espalhamento de partículas α de energias 18 MeV e 40 MeV mostram o mesmo comportamento descrito por McCarthy.

No presente trabalho as funções de onda distorcidas são obtidas por uma expansão em ondas parciais, aproximando o potencial ótico contínuo por uma soma de potenciais seccionalmente constantes que admite soluções exatas(30). Diversos valores da energia incidente e formas distintas de potenciais foram considerados.

Para situar o problema, no Capítulo II é apresentado o formalismo usualmente adotado para descrever o espalhamento elástico e indicada a forma de obtenção do potencial ótico que simula a interação.

No Capítulo III é apresentado um estudo dos efeitos em separado da parte real e da parte imaginária do potencial ótico na função de onda da partícula espalhada, para diversos valores de energia.

No Capítulo IV são apresentados os resultados obtidos para a densidade de probabilidade de posição de núcleons de várias energias espalhados elasticamente por potenciais óticos complexos de várias formas, na região do núcleo. São feitos estudos comparativos dos efeitos de potenciais óticos dos tipos poço quadrado, poço trapezoidal, poço proporcional à densidade e outros, na função de onda distorcida.

No Capítulo V apresenta-se uma comparação entre funções de onda distorcidas por potenciais óticos do tipo poço quadrado obtidas pelo formalismo de ondas parciais e pela aproximação W.K.B.; em particular, este estudo comparativo indica que as funções de onda obtidas usando a aproximação semi-clássica tornam-se consistentes com as funções de onda obtidas por expansão em ondas parciais para as energias mais altas e que o uso da aproximação W.K.B. torna-se menos satisfatório para as energias mais baixas, onde o método de expansão em ondas parciais revela um forte efeito de focagem em uma certa região angular em torno do ângulo de espalhamento $\theta = 0^{o}$, próximo à superfície nuclear.

Comentários a respeito dos resultados obtidos e suas possíveis conseqüências no tratamento de reações são feitos no Capítulo VI.

Os apêndices contêm informações mais detalhadas sobre o tratamento de ondas parciais utilizado e sobre a determinação numérica de funções de Bessel(31), que ocorrem nas soluções adotadas.

II - O POTENCIAL ÓTICO

II.1 - O Potencial Ótico Fenomenológico e o Espalhamento Projétil-Núcleo

O modelo de interação direta para as reações nucleares supõe que a interação de uma partícula com um núcleo ocorre predominantemente através de uma seqüência de colisões independentes da partícula incidente com os núcleons do núcleo. Resumindo o formalismo de espalhamento múltiplo apresentado por Watson[32], que tem sido utilizado em muitas variantes[33, 34], para descrever o espalhamento elástico de um projétil por um núcleo alvo, define-se o Hamiltoniano completo do sistema que satisfaz a equação de Schrödinger

$$H \psi = E \psi \qquad \text{(II.1a)}$$

por

$$H = (H_A + h) + \sum_{i=1}^{A} v_i = H_o + V \qquad \text{(II.1b)}$$

sendo $H_o = H_A + h$ e $V = \sum_{i=1}^{A} v_i$.

Em (II.1b) H_A é o Hamiltoniano nuclear, h é o operador energia cinética do projétil e v_i é a energia de interação da partícula incidente com o i-ésimo núcleon nuclear, A sendo o número de núcleons no núcleo alvo.

No formalismo de espalhamento múltiplo a equação de Schrödinger é substituída por um sistema de equações onde ao invés do potencial V ocorre o operador transição T.

A amplitude de transição T é uma solução da equação de Lippmann-Schwinger

$$T = V + V \frac{a}{E - H_o + i\varepsilon} T \qquad (II.2)$$

sendo a o operador projeção para estados nucleares completamente antissimétricos.

Uma solução formal da equação (II.2) é[34]

$$T = \sum_i{}' \tau_i + \sum_{i,j}{}' \tau_i \frac{a}{E-H_o+i\varepsilon} \tau_j + \sum_{i,j,k}{}' \tau_i \frac{a}{E-H_o+i\varepsilon} \tau_j \frac{a}{E-H_o+i\varepsilon} \tau_k + \ldots \qquad (II.3)$$

onde τ_i é a amplitude de espalhamento partícula incidente-núcleon ligado e Σ' significa que dois espalhamentos sucessivos por um mesmo núcleon são excluídos.

Os elementos de matriz de τ_i podem ser decompostos em elementos correspondentes a espalhamento elástico e inelástico. Desprezando excitações nucleares virtuais nos estados intermediários, o que corresponde aproximadamente a desprezar funções correlação de dois ou mais corpos (aproximação razoável para médias energias[34]), estaremos desprezando os elementos de matriz de τ_i que correspondem a espalhamento inelástico.

A amplitude de espalhamento elástico T_c pode ser obtida mantendo somente aqueles elementos de matriz de T que conectam estados nucleares de mesma energia. Considerando que antes e depois do espalhamento o núcleo se encontra no estado fundamental, podemos escrever

$$T_c = U + U \frac{a}{E - h + i\varepsilon} T_c \quad , \qquad (II.4)$$

que define o potencial ótico U para o espalhamento elástico.

Assim, ao menos formalmente, o problema de espalhamento elástico partícula incidente-núcleo reduz-se ao problema de uma partícula sujeita a uma interação caracterizada pelo Hamiltoniano h + U.

Se A é grande ou se as forças de interação entre dois corpos são fracas, obtém-se para o potencial ótico U definido em (II.4) a expressão simplificada

$$U = \sum_i \tau_{i_c} \qquad \text{(II.5)}$$

Para partículas incidentes de energia muito superior à energia de ligação do núcleon no núcleo, pode-se fazer uso da aproximação de impulso(17), isto é, substituir as amplitudes ligadas τ_i pelas amplitudes partícula incidente-núcleon livre t_i

$$t_i = v_i + v_i \frac{1}{E - h - K + i\varepsilon} t_i \qquad \text{(II.6)}$$

onde K é o operador energia cinética do núcleon-alvo.

Desprezando também a energia de recuo do núcleo a equação (II.5) pode ser escrita, no espaço de momentum, como

$$\langle \vec{p}\,' | U | \vec{p} \rangle = \sum_i \langle \vec{p}\,' \; | t_i | \vec{p} \rangle \, \rho(\vec{p}\,' - \vec{p}) \qquad \text{(II.7)}$$

onde $\vec{p}\,'$ e $\vec{p}$ são os momenta final e inicial do projétil e $\rho(\vec{p}\,' - \vec{p})$ é o fator de forma nuclear, isto é, a transformada de Fourier da função densidade espacial nuclear $\rho(\vec{r})$.

$$\rho(\vec{p}' - \vec{p}) = \int e^{i(\vec{p}' - \vec{p}).\vec{r}} \rho(\vec{r})\, d\vec{r} \quad , \qquad (II.8)$$

com $\rho(\vec{r})$ normalizada a A - 1

$$\int \rho(\vec{r})\, d\vec{r} = A - 1 \qquad (II.9)$$

uma vez que a interação da partícula incidente com uma partícula nuclear ocorre na presença de A-1 núcleons no núcleo.

No espaço de configuração tem-se

$$U(\vec{r}) = \sum_i \int \rho(\vec{r}')\, t_i(\vec{r} - \vec{r}')\, d\vec{r}' \qquad (II.10)$$

que, em primeira ordem, reduz-se a

$$U(\vec{r}) = \sum_i \int \rho(\vec{r}')\, v_i(\vec{r} - \vec{r}')\, d\vec{r}' \qquad (II.11)$$

Adotar a aproximação de impulso significa substituir a função de onda que representa o espalhamento de uma partícula por um núcleo por uma função de onda que representa o espalhamento de uma partícula por um núcleon livre, sendo este último representado por um pacote de ondas que tem a mesma distribuição de momentum do núcleon ligado no núcleo. Sob as condições de validade da aproximação de impulso, além da interação localizada da partícula incidente com o núcleon-alvo não ocorre praticamente qualquer outra interação violenta entre as partículas. Isso implicaria, em particular, em desprezar a possibilidade de ocorrência de espalhamento múltiplo, o que é uma idealização uma vez que colisões múltiplas ocorrem em número significativo e pro vocam distorções na onda incidente, caracterizadas por atenuação da amplitude e variação de fase da onda. Estes efeitos das colisões múltiplas nas reações nucleares podem ser descritos por um potencial ótico complexo, como no tratamento dado por Fernbach, Serber e Taylor(18) ao problema de espalhamento e absorção de nêutrons por núcleos.

A parte imaginária do potencial ótico é, neste caso, responsável, principalmente, pelo efeito de absorção, ou seja, pela diminuição da amplitude da onda, e a parte real pelas variações de fase da onda. O potencial ótico $U(\vec{r})$ é usualmente escrito na forma $U(\vec{r}) = V(\vec{r}) + iW(\vec{r})$ onde $V(\vec{r})$ e $W(\vec{r})$, são, respectivamente, as partes real e imaginária do mesmo.

Nas primeiras investigações de espalhamento de núcleons por vários núcleos foram usados potenciais óticos do tipo poço quadrado(35). Um modelo simples usado para explicar a variação das seções de choque com o peso atômico de reações nêutron-núcleo a baixas energias(36) foi o de, em uma primeira aproximação, considerar a parte real do potencial como um poço quadrado de alcance igual ao raio nuclear e a parte imaginária como uma fração constante da parte real. Desde então, várias formas têm sido adotadas para a dependência radial do potencial ótico, desde as mais simples escolhidas por conveniência analítica até as mais realísticas, que são funções que variam suavemente com a distância. Na Tabela 5.3 da referência (20a) encontram-se parâmetros de potenciais óticos de várias formas como, por exemplo, Woods-Saxon, gaussiano e exponencial, para prótons de energias até 340 MeV espalhados elasticamente por vários núcleos; a grande maioria destes potenciais possue termos centrais real e imaginário de mesma dependência radial e termos spin-órbita proporcionais ao gradiente das partes reais do potencial ótico. O uso de fatores de forma diferentes para as partes real e imaginária do potencial ótico traz dificuldades adicionais, devido ao aumento do número de parâmetros a serem ajustados, usualmente exigindo um maior número de resultados experimentais. Contudo, alguns trabalhos[37-39], têm recorrido a potenciais deste tipo para descrever o espalhamento elástico de prótons, no intervalo de energia de 30 MeV a aproximadamente 180 MeV, por vários núcleos.

Tendo em vista um estudo comparativo dos efeitos de potenciais óticos centrais de diferentes formas na função de onda de núcleons de várias energias espalhados por núcleos, no presente trabalho serão considerados, principalmente, potenciais óticos dos tipos poço quadrado, poço trapezoidal e potencial proporcional à densidade nuclear. Algumas considerações serão feitas também para o potencial de Woods-Saxon e para um potencial tipo poço quadrado com alcances diferentes para as partes real e imaginária. Por simplicidade foram desprezadas contribuições não centrais ao potencial. Os núcleos alvo analisados foram os de ^{16}O e ^{40}Ca.

Consideremos um potencial central $U(r)$ complexo, independente de spin, e núcleons incidentes de energia E, momentum $\hbar\vec{k}_o$ e massa m $(E = T + mc^2,\ (\hbar c k_o)^2 = T^2 + 2Tmc^2)$.

Para espalhamento de núcleons de energia média parece razoável resolver a equação de Schrödinger não relativística corrigida para uma cinemática relativística apropriada. A densidade de probabilidade de posição $|\psi(\vec{r})|^2$ para prótons de 80 MeV espalhados (para o alvo ^{40}Ca) por um potencial ótico tipo poço quadrado, calculada com a inclusão do termo quadrático em U(r) difere da calculada desprezando este termo em aproximadamente 5%; nos resultados que apresentaremos a inclusão do termo quadrático em U(r) não foi considerada.

Outrossim, não ocorreram diferenças significativas em uma estimativa dos efeitos no cálculo da seção de choque diferencial de espalhamento de núcleons[38] por ^{40}Ca desprezando termos Coulombiano e spin-órbita no potencial ótico, a) usando a equação de Schrödinger totalmente não relativística com uma energia incidente de 160 MeV; b) recorrendo à equação de Schrödinger com uma energia incidente de 172.25 MeV e com o momentum centro de massa relativístico correto; c) utilizando a equação de Klein--Gordon com o potencial introduzido como a quarta componente do quadri-vetor energia.

Quanto à escolha de potenciais, freqüentemente são usados potenciais óticos aproximados, como por exemplo, o poço quadrado, que permitem obter soluções analíticas. No presente trabalho, potenciais óticos de formas contínuas serão aproximados por uma soma de potenciais seccionalmente constantes[30], aproximação esta que permite obter expressões explícitas para as funções de onda.

Na seção seguinte são apresentadas as principais formas de potenciais usadas neste trabalho e nos apêndices são fornecidos maiores detalhes sobre o método utilizado.

II.2 - Tipos de Potenciais Óticos

Uma investigação da densidade de probabilidade, no es paço de configuração, de núcleons de energias variáveis espalhados elasticamente por núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca, representados por potenciais óticos complexos, esfericamente simétricos e independentes de spin, será apresentada nos dois capítulos seguintes. O termo coulombiano do potencial ótico não é levado em conta.

Com o objetivo de comparar os efeitos de potenciais óticos de diferentes formas na função de onda de núcleons de várias energias, definimos diferentes funções para a densidade nuclear, mantendo a condição de normalização imposta em (II.9).

Serão considerados neste trabalho, principalmente, potenciais óticos complexos do tipo poço quadrado, poço trapezoidal e potencial proporcional à densidade nuclear, com dependência radial igual para as partes real e imaginária (alcances iguais), para projéteis de energias no intervalo de 80 MeV a 320 MeV. Consideramos variações de 40 MeV para energias inferiores a 200 MeV e, adicionalmente, os valores 215 MeV e 320 MeV. Essa escolha se deve ao fato de, para as energias mais baixas, o potencial ótico provocar forte distorção na função de onda do projétil, o que leva a uma investigação mais minuciosa da adequação da aproximação W.K.B. para a obtenção dessas funções. Para as energias mais altas, onde o uso da aproximação W.K.B. se revela satisfatório, não há maior interesse em considerar pequenas variações na energia. Em particular os valores 215 e 320 MeV permitirão uma comparação com resultados de outros autores[13].

Em especial, um potencial ótico da forma Woods-Saxon (também de mesma dependência radial para as partes real e imaginária) para núcleons de 72 MeV[22] e um potencial ótico tipo poço quadrado com alcances diferentes para as partes real e imaginária à energia incidente de 80 MeV, serão discutidos.

Para o potencial tipo poço quadrado define-se a função densidade nuclear como

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{A-1}{\frac{4\pi}{3} R^3} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \qquad \text{(II.14)}$$

sendo R o raio nuclear obtido dos dados experimentais de espalhamento de elétrons de altas energias(40). Para o ^{16}O, R é igual a 3.41 fm e para o ^{40}Ca é igual a 4.54 fm.

Para o potencial tipo poço trapezoidal define-se

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_o & r < R_{min} \\ \rho_o \dfrac{(R_{máx} - r)}{(R_{máx} - R_{min})} & R_{min} < r < R_{máx} \\ 0 & r > R_{máx} \end{cases} \qquad \text{(II.15)}$$

sendo R_{min} e $R_{máx}$ respectivamente o raio mínimo em que o potencial é considerado constante e o raio máximo a partir do qual o potencial é nulo, e ρ_o uma densidade ajustada de tal modo que a integral de volume de $\rho(r)$ definida em (II.15) obedeça a condição de normalização a A-1. Este potencial trapezoidal representa uma situação intermediária entre o potencial mais simples (poço quadrado) e o potencial proporcional à densidade nuclear.

Para o ^{16}O, consideramos a densidade constante até $r = 1.6$ fm, aproximando dessa forma o platô que se observa na figu ra II.1, e uma variação linear entre 1.6 fm e 3.9 fm, tentando reproduzir a variação radial da densidade do ^{16}O para $r > 1.6$ fm.

Aproximou-se o platô central da densidade do ^{40}Ca (figura II.2) por um potencial constante até 2.0 fm. A variação radial da densidade do ^{40}Ca para $r > 2.0$ fm foi aproximada para uma variação linear no intervalo $2.0\ \mathrm{fm} < r < 5.3$ fm.

Para a terceira forma de potencial mencionada, definimos uma função densidade nuclear proporcional à distribuição de probabilidade de posição de A-1 núcleons nucleares, no modelo de partícula única.

Esta escolha teve em mente simular o potencial ótico para um projétil em uma experiência quase-livre[41]. Distribuições de matéria nuclear mais adequadas a outros processos, podem, evidentemente ser adotadas.

Supondo, numa experiência quase-livre, a interação do projétil com um núcleon da camada de energia mais externa, 1p, para o ^{16}O, pode-se escrever

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \left\{4|R_{1s}(r)|^2 + 11|R_{1p}(r)|^2\right\} . \qquad (II.16)$$

Para o ^{40}Ca, adotaremos

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \left\{4|R_{1s}(r)|^2 + 12|R_{1p}(r)|^2 + 20|R_{1d}(r)|^2 + 3|R_{2s}(r)|^2\right\} \qquad (II.17)$$

correspondente ao arrancamento de um núcleon 2s.

Para calcular essas densidades nucleares usamos funções de onda geradas por um potencial do tipo oscilador harmônico, ajustado de tal modo a reproduzir o raio quadrático médio ex

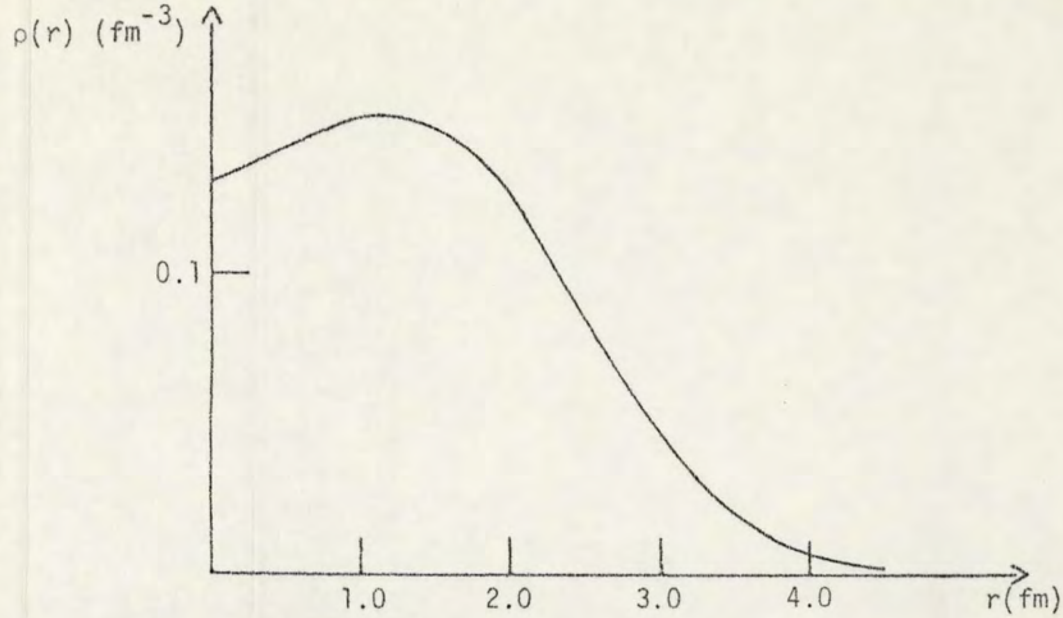

Figura II.1 - Densidade nuclear $\rho(r)$ proporcional à distribuição de A - 1 núcleons, com funções de onda do modelo de partícula única geradas por um potencial oscilador harmônico, para o ^{16}O.

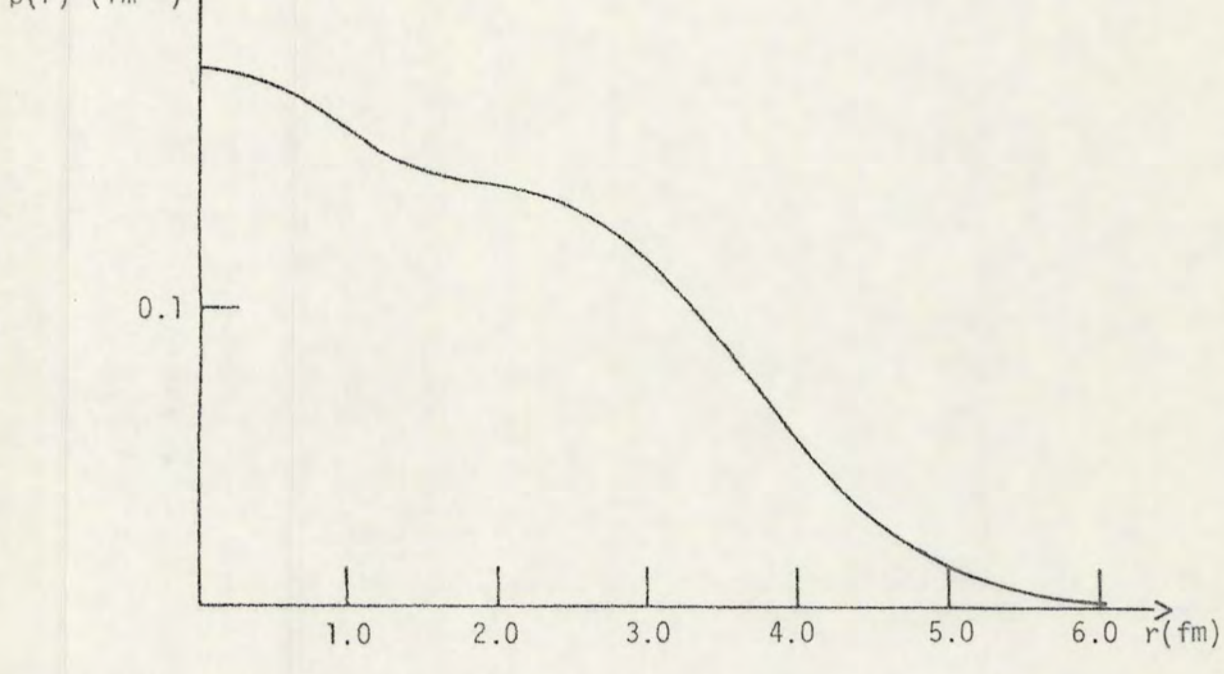

Figura II.2 - Densidade nuclear $\rho(r)$ proporcional à distribuição de A - 1 núcleons, com funções de onda do modelo de partícula única geradas por um potencial oscilador harmônico, para o ^{40}Ca.

perimental obtido com espalhamento de elétrons[40], para cada um dos núcleos. As densidades nucleares assim determinadas são

$$\rho(r) = 0.132(1 + 0.592\ r^2).\exp(-0.323\ r^2) \qquad \text{(II.18)}$$

para o ^{16}O e

$$\rho(r) = 0.182\ (1 + 0.057\ r^2 + 0.051\ r^4).\exp(-0.242\ r^2) \qquad \text{(II.19)}$$

para o ^{40}Ca (r em fm e $\rho(r)$ em fm^{-3}).

Salientamos que a integral de volume das funções densidade nuclear acima definidas obedecem a condição de normalização a A-1 imposta em (II.9).

As figuras II.1 e II.2 mostram a forma das densidades nucleares apresentadas em (II.18) e (II.19), para os núcleos ^{16}O e ^{40}Ca respectivamente.

II.3 - Determinação dos Parâmetros Associados ao Potencial Ótico

Para potenciais óticos complexos $U(r) = V(r)+iW(r)$, que descrevem o espalhamento de uma partícula de energia média por núcleos, o momentum da partícula na região em que atua o potencial é também complexo. A parte imaginária do momentum $\vec{k}(r) = \vec{k}_r(r) + i\vec{k}_i(r)$ está associada a um coeficiente de absorção ou atenuação.

O coeficiente de absorção representa a probabilidade por unidade de comprimento de que a partícula colida com um nú cleon[18], e portanto pode ser escrito como um produto da seção de choque total σ_T pela densidade nuclear $\rho(r)$. Usualmente, define-se o livre caminho $\lambda(r)$ de uma partícula dentro do núcleo como o inverso do coeficiente de absorção.

Escrevamos a densidade nuclear como $\rho(r) = \rho(o).f(r)$, com $f(o) = 1$, e a energia do núcleon incidente na região do núcleo como $T_{ef} = T - v$ onde v é o potencial real que atua sobre a partícula.

A figura II.3 mostra o potencial real v_{mn} e o potencial imaginário w_{mn} para a matéria nuclear ($r_o = 1.1$ fm), obtidos por Dabrowski e Sobiczewski[42], para prótons com energia no intervalo de 0 a 300 MeV.

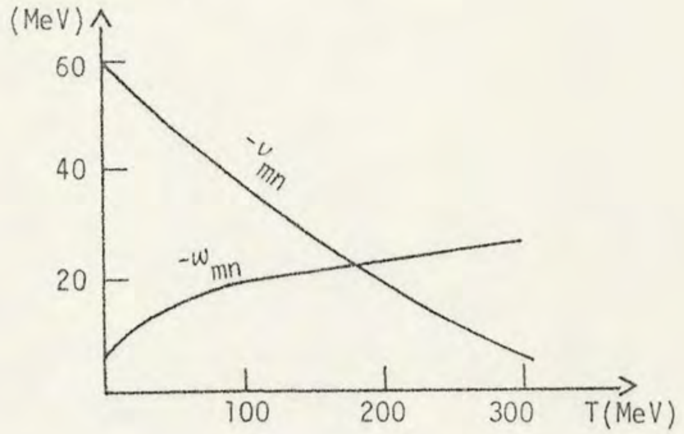

Figura II.3 - Valores da parte real v_{mn} e da parte imaginária w_{mn} do potencial que atua sobre um próton de energia cinética T, na matéria nuclear, em função da energia cinética do próton (extraído de Dabrowski e Sobiczewski[42]).

Para uma dada energia do próton incidente, impondo a condição de que a integral sobre o volume nuclear do potencial real que atua sobre o próton incidente tenha um valor fixo, pode-se determinar, para cada núcleo desejado, o potencial real que atua sobre o próton dentro do núcleo

$$v = v_{mn} \frac{(r_o = 1.10 \text{ fm})^3}{(r_o \text{ núcleo fm})^3} \tag{II.20}$$

Para os núcleos ^{16}O e ^{40}Ca, considerados neste trabalho, r_o assume os valores 1.35 fm e 1.32 fm, respectivamente[40].

É conveniente escrever a seção de choque total σ_T como a média dos resultados obtidos experimentalmente para as seções de choque próton-próton e próton-nêutron[43]. Assim, para núcleos de igual número de prótons e nêutrons, e prótons incidentes,

$$\sigma_T(T_{ef}) = \frac{1}{2}\cdot\left\{\sigma_{pp}(T_{ef}) + \sigma_{pn}(T_{ef})\right\} \tag{II.21}$$

Considerando o núcleo como uma mistura de dois gases de Fermi não interagentes de nêutrons e prótons ligados em um potencial uniforme, o princípio de exclusão exige que o projétil, bem como a partícula alvo, estejam fora da esfera ocupada, no espaço de momentum, depois da colisão. Assim, levando em conta o princípio de exclusão, um considerável número de colisões é proibido e, conseqüentemente, a seção de choque diminui. A seção de choque corrigida $\bar{\sigma}$, calculada no sistema centro de massa, em função da energia cinética do próton incidente T, pode ser expressa na forma[44, 45]

$$\bar{\sigma}(T) = \sigma_T(T_{ef})\cdot P\left(\frac{\varepsilon_F}{T_{ef}}\right) \tag{II.22}$$

onde ε_F é a energia de Fermi ($\varepsilon_F = 26.30$ MeV para o ^{16}O e $\varepsilon_F = 27.51$ MeV para o ^{40}Ca) e $P\left(\frac{\varepsilon_F}{T_{ef}}\right)$ é o fator de redução da seção de choque devido ao princípio de Pauli.

Supondo que a seção de choque núcleon-núcleon independe da energia e possui uma distribuição angular isotrópica, o fator de redução pode ser calculado exatamente

$$P\left(\frac{\varepsilon_F}{T_{ef}}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{7}{5}\frac{\varepsilon_F}{T_{ef}} & T_{ef} \geqslant 2\varepsilon_F \\ 1 - \frac{7}{5}\frac{\varepsilon_F}{T_{ef}} + \frac{2}{5}\frac{\varepsilon_F}{T_{ef}}\left(2 - \frac{T_{ef}}{\varepsilon_F}\right)^{5/2} & T_{ef} < 2\varepsilon_F \end{cases} \qquad (II.23)$$

O livre caminho de um próton no núcleo para uma dada energia do próton pode ser expresso na forma

$$\lambda(r) = \frac{1}{\rho(r)\,\bar{\sigma}} = \frac{1}{\rho(o)\, f(r)\,\bar{\sigma}} = \frac{\lambda(o)}{f(r)} \qquad (II.24)$$

Para potenciais complexos de mesma dependência radial para as partes real e imaginária, para cada energia do próton incidente pode-se escrever o potencial ótico na forma

$$U(r) = (\alpha + i)\, W(r) \qquad (II.25)$$

onde $\alpha = \alpha(T)$.

Uma relação entre a parte imaginária do potencial ótico e o livre caminho $\lambda(r)$ de uma partícula no núcleo pode ser obtida da equação da continuidade[46]; tal relação, corrigida relativisticamente, pode ser escrita na forma

$$W(r) = \frac{(\hbar c)^2 \, k_o}{2E} \frac{1}{\lambda(r)} = W(o).f(r) \qquad (II.26)$$

onde $W(o) = \frac{(\hbar c)^2 \, k_o}{2E} \frac{1}{\lambda(o)}$ é o valor da parte imaginária do potencial no centro do núcleo.

Para uma dada energia cinética do próton incidente a razão α entre as partes real e imaginária do potencial ótico foi obtida da razão entre o potencial real ν_{mn} e o potencial imaginário ω_{mn} (este último afetado pelo fator devido ao princípio de Pauli(44)) apresentados por Dabrowski e Sobiczewski. As razões assim obtidas, para o intervalo de energia considerado neste trabalho, diminuem com o aumento da energia cinética do próton incidente.

Assim, para cada energia do próton incidente, a parte real dos potenciais com mesma dependência radial para as partes real e imaginária adotados neste trabalho, é dada por

$$V(r) = \alpha(T)W(r) \qquad (II.27)$$

Nas tabelas II.1, II.2 e II.3 são apresentados os parâmetros do potencial ótico, para os potenciais poço quadrado, poço trapezoidal e proporcional à densidade nuclear, respectivamente, para prótons de 80, 120, 160, 215 e 320 MeV espalhados por um núcleo de ^{16}O. Para 320 MeV o valor da razão α entre as partes real e imaginária do potencial ótico foi obtido extrapolando os valores de ν_{mn} e ω_{mn} da referência (42).

Nas tabelas II.4, II.5 e II.6 são apresentados os parâmetros do potencial ótico para os tipos de potenciais e energias de interesse acima mencionados sendo o núcleo alvo o ^{40}Ca.

O potencial ótico complexo para prótons incidentes de 72 MeV extraído da referência (22)

$$U(r) = (-30 - i\,10).\left\{1 + \exp[(r - 4.5)/0.8]\right\}^{-1} \quad (r \text{ em fm, } U \text{ em MeV}) \qquad (II.28)$$

apresenta a mesma razão α entre as partes real e imaginária que a obtida neste trabalho para tal energia do próton incidente. Entretanto o potencial (II.28) é menos profundo do que o que se obteria neste trabalho para prótons de 72 MeV, e, conseqüentemente, a integral de volume de tal potencial não obedece a condição de normalização imposta em (II.9).

O potencial tipo poço quadrado de alcances diferentes para as partes real e imaginária para prótons de 80 MeV a ser analisado foi determinado fixando as profundidades das partes real e imaginária nos valores correspondentes ao potencial poço quadrado de alcances iguais, à mesma energia. Quanto ao alcance, vários trabalhos(37, 38) têm mostrado que para prótons de energia em torno de 180 MeV o alcance da parte imaginária excede o alcance da parte real do potencial ótico em aproximadamente 1 fm. Considerando uma variação aproximadamente linear(39) para o aumento do alcance da parte imaginária em relação ao da parte real no intervalo de energia de 20 a 180 MeV, utilizou-se, para prótons de 80 MeV espalhados por ^{40}Ca, um potencial ótico tipo poço quadrado $U(r) = V(r) + iW(r)$, onde

$$V(r) = \begin{cases} -30.46 \text{ MeV} & r < 4.54 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.54 \text{ fm} \end{cases} \qquad (II.29)$$

e

$$W(r) = \begin{cases} -11.41 \text{ MeV} & r < 4.94 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.94 \text{ fm} \end{cases} \tag{II.30}$$

Como se vê, o raio do poço quadrado real é fixado para reproduzir o raio médio quadrático obtido de experiências de espalhamento de elétrons(40).

Tabela II.1 - Parâmetros associados ao potencial poço quadrado para núcleons de energia cinética T espalhados por um núcleo de ^{16}O. O alcance do potencial $U(o) = V(o) + iW(o)$ é considerado igual ao raio nuclear (3.41 fm).

T(MeV)	λ(o)(fm)	α	-W(o)(MeV)	-V(o)(MeV)
80	3.58	2.67	10.71	28.60
120	3.86	1.62	11.82	19.15
160	4.11	1.06	12.48	13.23
215	4.35	0.70	13.19	9.23
320	4.43	0.33	14.84	4.90

Tabela II.2 - Parâmetros associados ao potencial poço trapezoidal para núcleons de energia cinética T espalhados por um núcleo de ^{16}O. O potencial considerado é constante e igual a $U(o) = V(o) + iW(o)$ até 1.6 fm; varia linearmente no intervalo de 1.6 fm a 3.9 fm e é nulo a partir de 3.9 fm.

T(MeV)	λ(o)(fm)	α	-W(o)(MeV)	-V(o)(MeV)
80	2.21	2.67	17.35	46.33
120	2.38	1.62	19.17	31.06
160	2.53	1.06	20.27	21.49
215	2.68	0.70	21.37	14.95
320	2.73	0.33	24.04	7.94

Tabela II.3 - Parâmetros associados ao potencial proporcional à densidade nuclear $\rho(r) = 0.132(1+0.592\ r^2).\exp(-0.323\ r^2)$, para núcleons de energia cinética T espalhados por um núcleo de ^{16}O (r em fm).

T(MeV)	λ(o)(fm)	α	-W(o)(MeV)	-V(o)(MeV)
80	2.45	2.67	15.65	41.79
120	2.65	1.62	17.22	27.90
160	2.82	1.06	18.18	19.27
215	2.98	0.70	19.25	13.47
320	3.03	0.33	21.70	7.16

Tabela II.4 - Parâmetros associados ao potencial tipo poço quadrado para núcleons de energia cinética T espalhados pelo ^{40}Ca. O alcance do potencial $U(o) = V(o) + iW(o)$ é considerado igual ao raio nuclear (4.54 fm).

T(MeV)	λ(o)(fm)	α	-W(o)(MeV)	-V(o)(MeV)
80	3.36	2.67	11.41	30.46
120	3.61	1.62	12.64	20.48
160	3.79	1.06	13.53	14.34
215	4.01	0.70	14.31	10.02
320	4.05	0.33	16.23	5.36

Tabela II.5 - Parâmetros associados ao potencial tipo trapezoidal para núcleons de energia cinética T espalhados pelo ^{40}Ca. O potencial considerado é constante e igual a $U(o) = V(o) + iW(o)$ até 2.0 fm; varia linearmente no intervalo de 2.0 fm a 5.3 fm e é nulo a partir de 5.3 fm.

T(MeV)	λ(o)(fm)	α	-W(o)(MeV)	-V(o)(MeV)
80	2.09	2.67	18.26	48.74
120	2.23	1.62	20.46	33.15
160	2.37	1.06	21.64	22.94
215	2.50	0.70	22.90	16.03
320	2.53	0.33	25.97	8.58

Tabela II.6 - Parâmetros associados ao potencial proporcional à densidade nuclear $\rho(r) = 0.182\ (1 + 0.057\ r^2 + 0.051\ r^4)\ .\ \exp(-0.242\ r^2)$, para núcleons de energia cinética T espalhados por um núcleo de ^{40}Ca (r em fm).

T(MeV)	λ(o)(fm)	α	-W(o)(MeV)	-V(o)(MeV)
80	1.83	2.67	20.95	55.94
120	1.97	1.62	23.16	37.52
160	2.07	1.06	24.77	26.26
215	2.19	0.70	26.19	18.33
320	2.21	0.33	29.75	9.82

III - ESTUDO DOS EFEITOS DO POTENCIAL ÓTICO NA FUNÇÃO DE ONDA

III.1 - Introdução

Nosso objetivo é investigar a distribuição de probabilidade de núcleons, no espaço de configuração, para diversas energias e para diferentes formas de potenciais que simulam aproximadamente a interação projétil-núcleo. Para tanto, faremos variar:

a) as profundidades das partes real e imaginária do potencial ótico tipo poço quadrado, em separado;

b) a forma do potencial ótico;

c) a energia do núcleon incidente para as diversas formas do potencial.

Consideremos núcleons de energia no intervalo de 80 a 320 MeV. Para energias inferiores a 200 MeV, onde os efeitos de distorção do potencial ótico na função de onda obtida por expansão em ondas parciais não são bem reproduzidos pela aproximação W.K.B. adotada por alguns autores, variamos a energia do núcleon de 40 em 40 MeV, a partir de 80 MeV. Para as energias mais altas, onde a aproximação semi-clássica é satisfatória, consideramos apenas as energias de 215 e 320 MeV.

A aproximação W.K.B. tem sido também usada para determinar os coeficientes de reflexão das ondas parciais componentes da função de onda (ver Apêndice A); no modelo de forte absorção ("black-nucleus")[29, 47] este método tem tido sucesso para descrever o espalhamento elástico de partículas compostas (d, ^{3}He, α, etc.) por núcleos.

No presente trabalho a função de onda para núcleons de diferentes energias espalhados por potenciais óticos de várias formas será obtida por expansão em ondas parciais, aproximando os potenciais óticos de formas contínuas por uma soma de potenciais seccionalmente constantes para os núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca.

Consideremos a equação de Schrödinger com potenciais complexos centrais para núcleons de massa m, energia E e momentum $\hbar\vec{k}_0$ incidente na direção do eixo polar $\theta = 0^o$, com uma cinemática relativística apropriada.

A solução pode ser expressa em ondas parciais como

$$\psi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}(2\ell + 1)\, R_\ell(r)\, P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{(III.1)}$$

onde $P_\ell(\cos\theta)$ são os polinômios de Legendre de ordem ℓ e $R_\ell(r)$ são as soluções da equação radial

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + k^2(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] R_\ell(r) = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

com

$$k^2(r) = \left(T^2 + 2Tmc^2 - 2(T + mc^2)U(r)\right)/\hbar^2c^2 \quad , \qquad \text{(III.3)}$$

e podem ser escritas em termos das funções de Bessel esféricas.

No Apêndice A mostra-se como foram obtidas as funções de onda por expansão em ondas parciais para potenciais de várias formas. O Apêndice B contém algumas informações sobre a determinação numérica das funções de Bessel esféricas de argumen tos reais e complexos.

No presente capítulo analisaremos o ítem a) acima mencionado, qual seja os efeitos na função de onda decorrentes da variação das profundidades do potencial; os ítens b) e c) serão discutidos no capítulo seguinte.

Para estudar, separadamente, os efeitos da parte real e da parte imaginária do potencial ótico sobre a função de onda, consideraremos potenciais poço quadrado puramente reais e puramente imaginários e faremos variar suas profundidades, tomando como referência o potencial ótico poço quadrado que simula a interação p - ^{40}Ca.

Análise similar poderia ser feita para outras formas de potencial.

Para núcleons de 80 MeV, conforme obtido no Capítulo II,

$$U(r) = \begin{cases} (-30.46 - i\ 11.41)\ \text{MeV} & r < 4.54\ \text{fm} \\ 0 & r > 4.54\ \text{fm} \end{cases} \qquad \text{(III.4)}$$

e para núcleons de 215 MeV

$$U(r) = \begin{cases} (-10.02 - i\ 14.31)\ \text{MeV} & r < 4.54\ \text{fm} \\ 0 & r > 4.54\ \text{fm} \end{cases} \qquad \text{(III.5)}$$

Nas seções seguintes serão apresentadas as distribuições de probabilidade, no espaço de configuração, de núcleons espalhados por potenciais reais de -10, -20 e -30 MeV e potenciais imaginários de -5, -10 e -15 MeV de alcances iguais ao raio do núcleo de ^{40}Ca ($R = 4.54$ fm).

III.2 - Efeito da Parte Real do Potencial Ótico na Função de Onda

Para estudar o efeito da parte real do potencial ótico, serão considerados inicialmente núcleons incidentes de 80 MeV e potenciais reais do tipo poço quadrado de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca, de -10, -20 e -30 MeV.

$$\text{a)}\quad V(r) = \begin{cases} -10 \text{ MeV} & r < 4.54 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.54 \text{ fm} \end{cases} \quad , \quad W(r) = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

No que segue subentende-se que a unidade da densidade de probabilidade de posição é fm^{-3}.

Seja θ o ângulo formado pela direção do momentum do núcleon espalhado com a direção do momentum incidente.

A figura III.1 mostra os valores da densidade de probabilidade $|\psi(\vec{r})|^2$ para diferentes valores de r e do ângulo de espalhamento θ de núcleons de 80 MeV espalhados pelo potencial definido em (III.6). A densidade de probabilidade foi calculada até aproximadamente três vezes o raio nuclear embora algumas das figuras deste capítulo tenham valores de r até 8.4 fm e o nosso maior interesse esteja em analisar a função de onda na região do núcleo.

Na região mais interna do núcleo, para $r \cong 0.4$ fm tem-se $|\psi(\vec{r})|^2 \cong 1.0$.

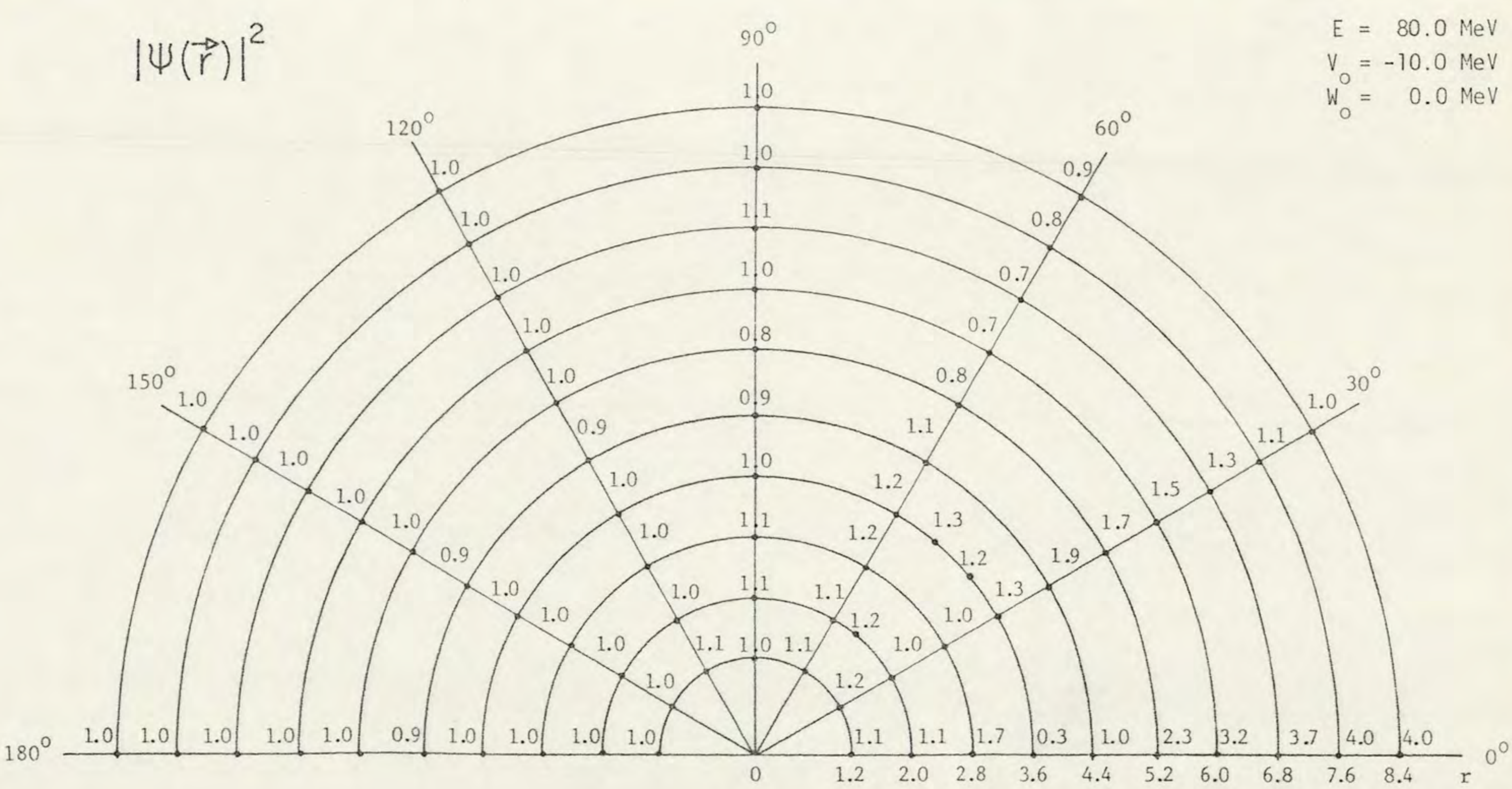

Figura III.1 - Densidade de probabilidade de posição $|\psi(\vec{r})|^2(\mathrm{fm}^{-3})$ para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial real poço quadrado de profundidade -10 MeV e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca (R = 4.54 fm).

Para $\theta = 0^{o}$, na região 0.4 fm $\leq r \leq$ 2.0 fm $|\psi(\vec{r})|^2$ oscila em torno do valor 1.1 e a partir de $r = 2.0$ fm sofre um rápido aumento caracterizado por $|\psi(r = 2.4,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 1.62$ com um primeiro máximo de focagem em $r = 2.8$ fm ($|\psi(r = 2.8,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 1.74$). A partir de ($r = 2.8$, $\theta = 0^{o}$) $|\psi(\vec{r})|^2$ diminui rapidamente com o aumento do raio até ocorrer o valor mínimo em $r = 3.6$ fm $|\psi(r=3.6,\ \theta=0^{o})|^2 \cong 0.34$. Na região 3.6 fm $< r \leq$ 8.4 fm a densidade de probabilidade aumenta consideravelmente com o raio, apresentando um efeito de focagem cujo valor máximo é $|\psi(r = 8.4,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 4.02$. Esta intensidade diminui lentamente com o aumento do raio para $r > 8.4$ fm, como se observa, por exemplo, em $r = 12.0$ fm, já muito longe do núcleo, onde $|\psi(r = 12.0,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 3.63$. No raio nuclear $|\psi(r = 4.54,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 1.27$.

Para $\theta = 180^{o}$ os valores da densidade de probabilidade de posição para os diversos valores de r oscilam levemente em torno da unidade.

Quanto à variação angular é importante notar que próximo do mínimo para $\theta = 0^{o}$, ($r = 3.6$ fm), $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta com o ângulo até $\theta = 30^{o}$, $|\psi(r = 3.6,\ \theta = 30^{o})|^2 \cong 1.28$ em contraposição à $|\psi(r = 3.6,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 0.34$, e, $|\psi(r = 4.4,\ \theta = 30^{o})|^2 \cong 1.90$ em contraposição à $|\psi(r = 4.4,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 1.01$.

A figura III.2 evidencia a variação de $|\psi(\vec{r})|^2$ com o ângulo, para $r = 3.6$ fm.

Para ângulos de espalhamento maiores do que 30^{o} os valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ oscilam um pouco, tendendo para a unidade quando o ângulo tende a 90^{o}, e se mantém em torno da unidade na região angular $90^{o} \leq \theta \leq 180^{o}$. Na região 4.4 fm $< r <$ 6.0 fm onde a focagem a $\theta = 0^{o}$ já é intensa, os valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ diminuem até aproximadamente 0.8 com o aumento do ângulo até $\theta = 60^{o}$ e para $6.0\ fm < r < 11.2\ fm$, até cerca de 0.7 para $\theta \leqslant 40^{o}$. Na região angular compreendida entre 60^{o} e 90^{o}, para valores de r menores do que o raio nuclear, $|\psi(\vec{r})|^2$ tende a diminuir com o aumento do ângulo até aproximar-se da unidade para $\theta \cong 90^{o}$; outrossim, $|\psi(\vec{r})|^2$ tende a aumentar com o ângulo, tendendo à unidade quando o ângulo tende a 90^{o}, para valores de r maiores do que o raio nuclear.

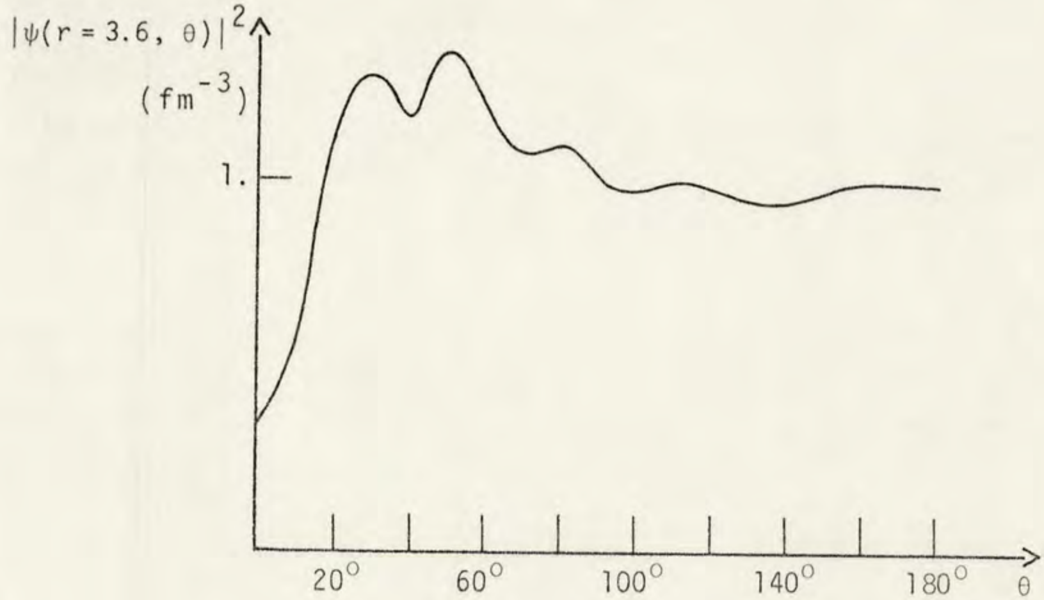

Figura III.2 - Densidade de probabilidade $|\psi(\vec{r})|^2$, para $r = 3.6$ fm, em função do ângulo de espalhamento θ para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial ótico real de profundidade -10 MeV e de alcance igual a 4.54 fm.

$$\text{b)}\quad V(r) = \begin{cases} -20\ \text{MeV} & r < 4.54\ \text{fm} \\ 0 & r > 4.54\ \text{fm} \end{cases} \quad , \qquad W(r) = 0 \qquad \text{(III.7)}$$

Valores da densidade de probabilidade de posição de núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial real do tipo poço quadrado de profundidade -20 MeV e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca são mostrados na figura III.3.

$|\psi(\vec{r})|^2 \cong 1.0$ próximo ao centro do núcleo ($r \cong 0.4$ fm). Pode-se observar que para $\theta = 0^\circ$ temos um comportamento de $|\psi(\vec{r})|^2$ semelhante ao do caso anterior quanto às posições do primeiro máximo, $|\psi(r = 2.8,\ \theta = 0^\circ)|^2 \cong 2.95$ e do valor mínimo $|\psi(r = 3.6,\ \theta = 0^\circ)|^2 \cong$ $\cong 0.15$. A partir de 3.6 fm, $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta rapidamente com o raio, apresentando um forte efeito de focagem cujo valor máximo é $|\psi(r = 7.2,\ \theta = 0^\circ)|^2 \cong 9.18$ e, depois de $r = 7.2$ fm, $|\psi(\vec{r})|^2$ passa a diminuir lentamente com o aumento do raio, adotando em $r = 12.0$ fm, já bastante afastado do núcleo, o valor $|\psi(r = 12.0,\ \theta = 0^\circ)|^2 \cong 6.69$. Observa-se assim que com o aumento da parte real do potencial ótico, o foco se desloca para a esquerda (isto é, se aproxima da região do núcleo) e é mais intenso. No raio nuclear o valor de $|\psi(\vec{r})|^2$ é, para este valor de U(r), bastante grande, $|\psi(r = 4.54,\ \theta = 0^\circ)|^2 \cong 4.03$.

Quanto à variação de $|\psi(\vec{r})|^2$ com o ângulo de espalhamento, para $r \leqslant 6.0$ fm os valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ oscilam muito no intervalo $0^\circ < \theta < 80^\circ$ (a figura III.3 mostra alguns pontos deste intervalo) e para $r > 6.0$ fm $|\psi(\vec{r})|^2$ diminui com o ângulo para $\theta \leqslant 40^\circ$, tendendo para a unidade com o aumento do ângulo e do raio. Os valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ na região $90^\circ < \theta \leqslant 180^\circ$ oscilam em torno da unidade.

$$\text{c)}\quad V(r) = \begin{cases} -30 \text{ MeV} & r < 4.54 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.54 \text{ fm} \end{cases} \quad , \quad W(r) = 0 \qquad \text{(III.8)}$$

Na figura III.4 encontram-se os valores da densidade

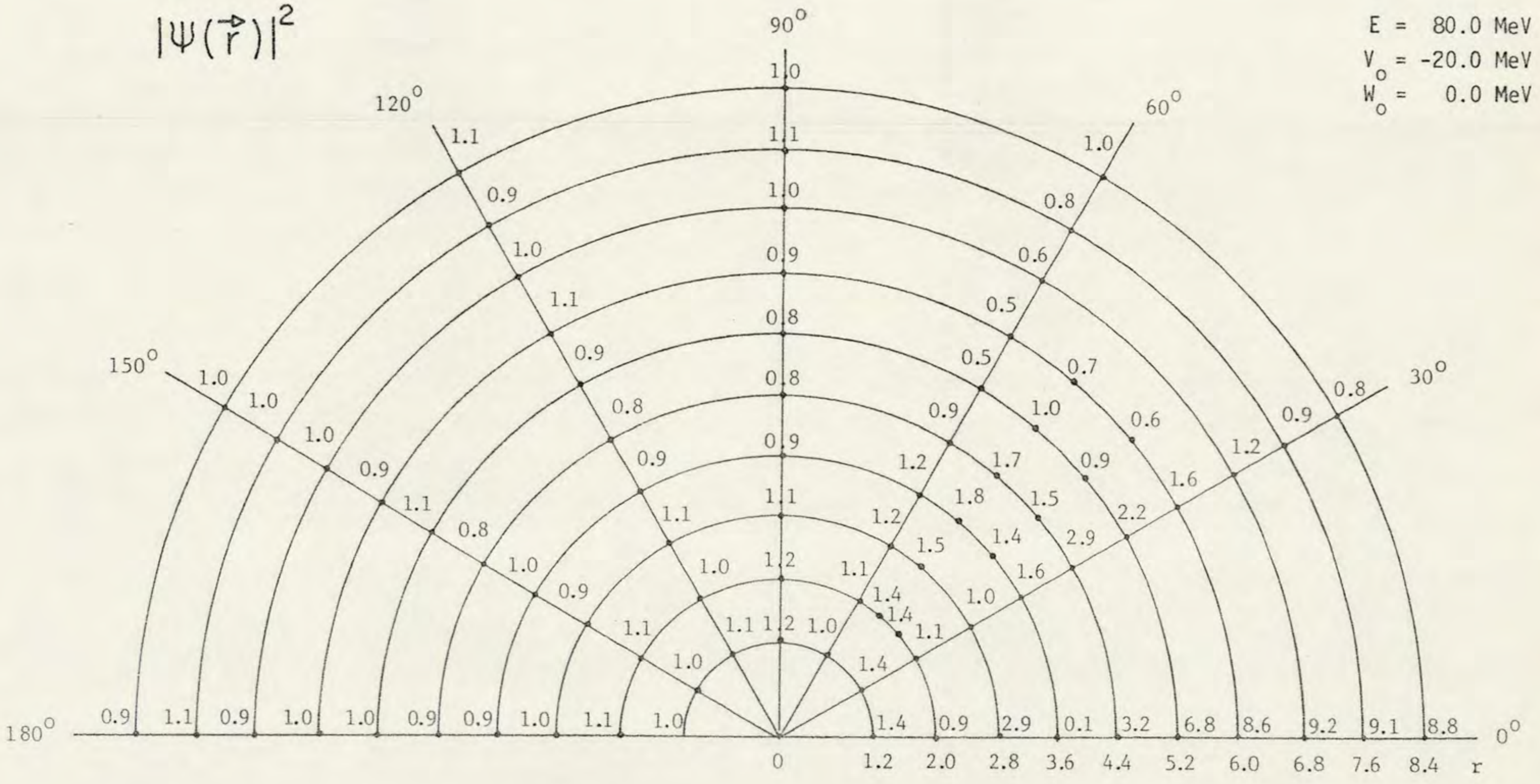

Figura III.3 - Densidade de probabilidade de posição $|\psi(\vec{r})|^2 (fm^{-3})$ para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial real poço quadrado de profundidade -20 MeV e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca (R = 4.54 fm).

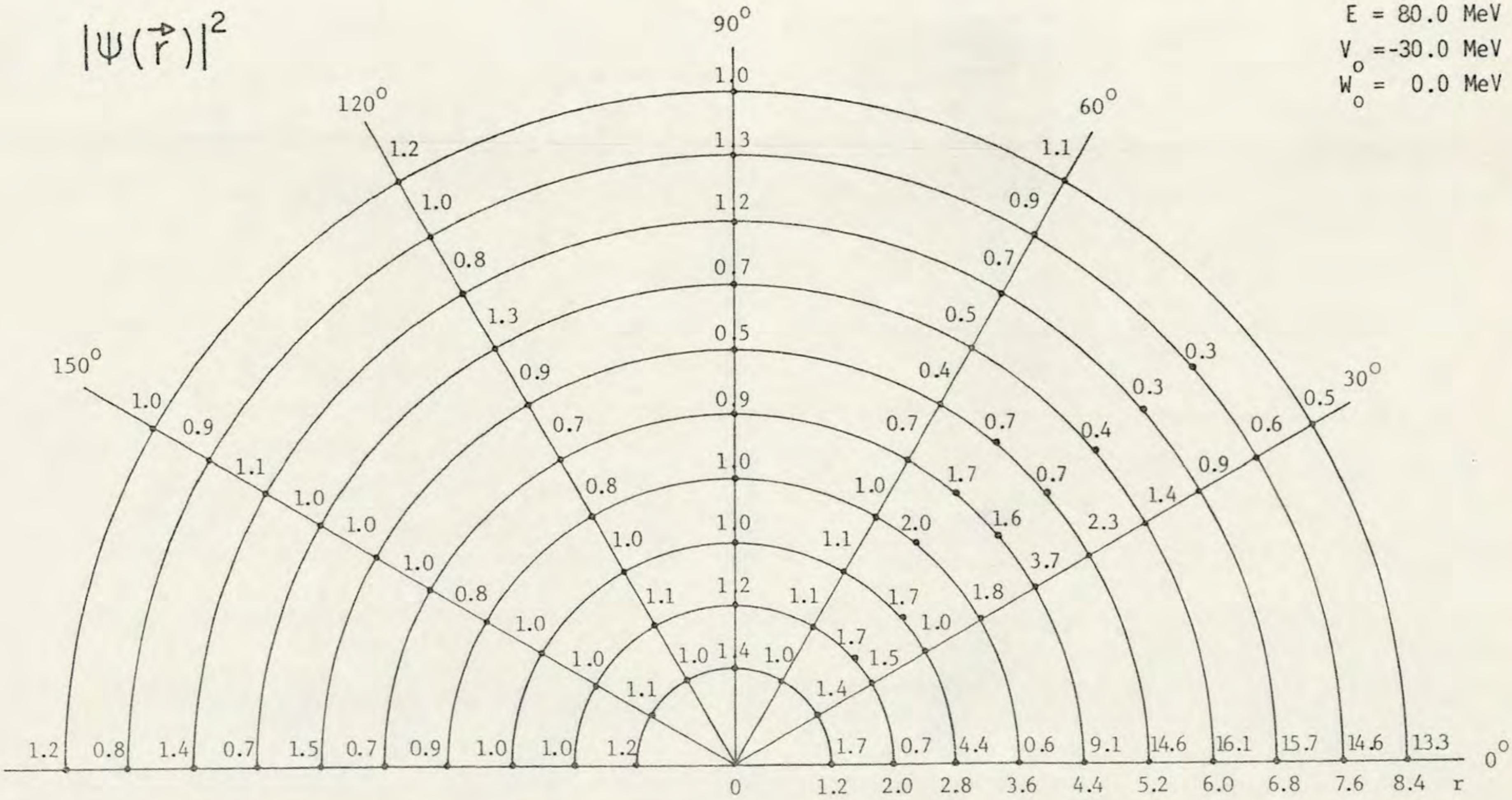

Figura III.4 - Densidade de probabilidade de posição $|\psi(\vec{r})|^2$ (fm^{-3}) para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial real poço quadrado de profundidade -30 MeV e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca (R = 4.54 fm).

de probabilidade $|\psi(\vec{r})|^2$ para núcleons de 80 MeV espalhados pelo potencial ótico definido em (III.8) em vários pontos do espaço.

Próximo ao centro do núcleo, em $r \cong 0.4$ fm, $|\psi(\vec{r})|^2 \cong 1.1$.

O comportamento de $|\psi(\vec{r})|^2$ para o potencial definido em (III.8) assemelha-se bastante ao dos dois casos anteriores.

Para $\theta = 0^o$, $r = 2.8$ fm $\left(|\psi(r=2.8,\ \theta=0^o)|^2 \cong 4.4\right)$ e $r = 3.6$ fm $\left(|\psi(r=3.6,\ \theta=0^o)|^2 \cong 0.6\right)$ correspondem, respectivamente, às posições de máximo e mínimo descritas em a) e b) e, em $r = 6.0$ fm $|\psi(\vec{r})|^2$ atinge o seu valor máximo $|\psi(r=6.0,\ \theta=0^o)|^2 \cong$ $\cong 16.1$ que se situa mais à esquerda e é mais intenso do que os análogos nos casos acima descritos. No raio nuclear $|\psi(r=4.54,\ \theta=0^o)|^2 \cong$ $\cong 9.1$.

Assim, para núcleons de 80 MeV, potenciais reais provocam fortes distorções na função de onda, distorções estas caracterizadas pela presença de um efeito de focagem que abrange uma região angular em torno do ângulo de espalhamento $\theta = 0^o$. Com o aumento da profundidade do potencial real a focagem torna-se mais significativa na região do núcleo. (Ver figura III.5.)

Análise similar pode ser feita para energias incidentes maiores.

Com o aumento da energia incidente, a parte real do potencial ótico (ver tabelas II.1 e II.4) torna-se menor e a razão V/E diminui significativamente. Consequentemente, a intensidade da focagem diminui e o foco se move para a direita (isto é, tende a afastar-se da região do núcleo).

Para núcleons de 215 MeV e potenciais de -10, -20 e -30 MeV (figura III.6) observa-se, na região angular em tor

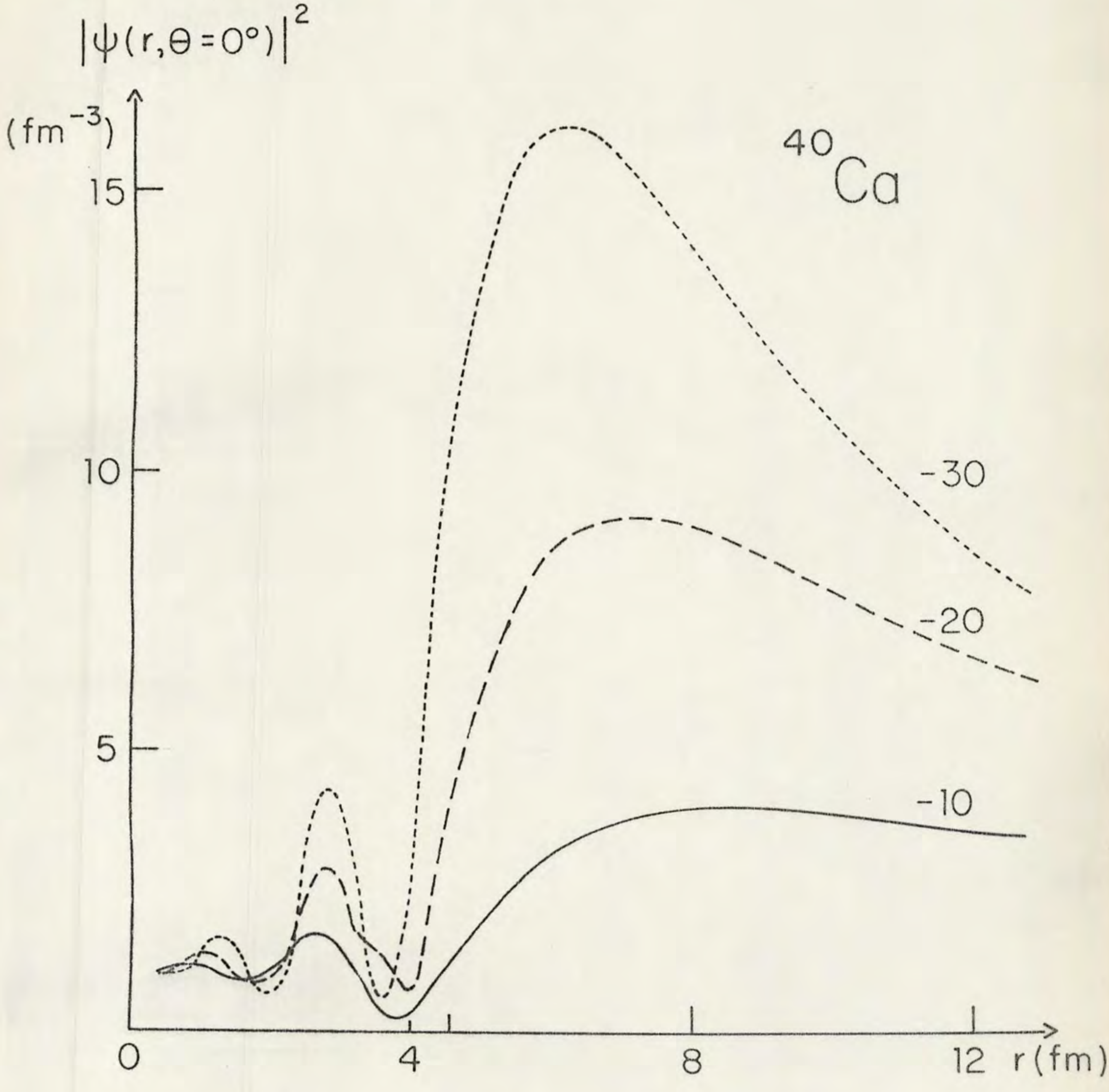

Figura III.5 - Densidade de probabilidade $|\psi(r,\theta=0^{o})|^2$ (em fm^{-3}) para núcleons de 80 MeV espalhados por potencial ótico real poço quadrado de profundidade -10 MeV (linha sólida), -20 MeV (linha tracejada) e -30 MeV (linha pontilhada) e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca, assinalado na figura (R = 4.54 fm).

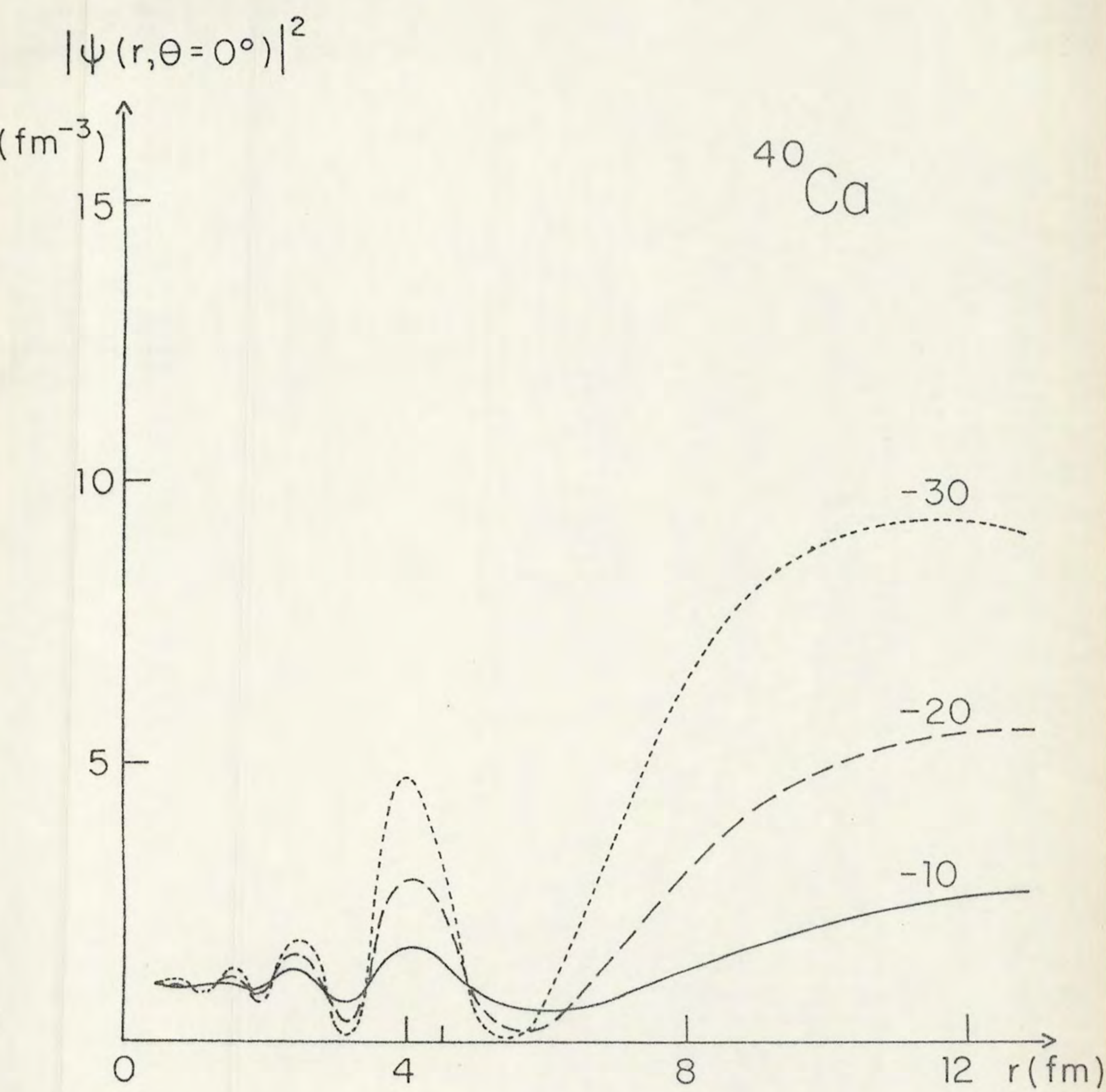

Figura III.6 - Densidade de probabilidade $|\psi(r,\theta=0^{\circ})|^2$ (em fm^{-3}) para núcleons de 215 MeV espalhados por potencial ótico real poço quadrado de profundidade -10 MeV (linha sólida), -20 MeV (linha tracejada) e -30 MeV (linha pontilhada) e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca, assinalado na figura (R = 4.54 fm).

no do ângulo de espalhamento $\theta = 0^{\circ}$, uma focagem próximo da superfície nuclear (em torno de $r \cong 4.0$ fm) e uma focagem mais intensa na região externa cujo máximo ocorre bem longe do núcleo (próximo de $r = 12.0$ fm). De maneira geral, o comportamento da densidade de probabilidade de posição $|\psi(\vec{r})|^2$ é análogo ao dos casos anteriores.

III.3 - Efeito da Parte Imaginária do Potencial Ótico na Função de Onda

Considerando que a parte imaginária do potencial ótico tipo poço quadrado que simula a interação p - ^{40}Ca para núcleons de 80 MeV (ver expressão III.4) assume o valor -11.41 MeV e para núcleons de 215 MeV (ver expressão III.5) o valor -14.31 MeV, para analisar o efeito da parte imaginária do potencial ótico na função de onda de núcleons com estas energias foram adotados potenciais poço quadrado puramente imaginários de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca, de -5, -10 e -15 MeV.

Consideremos inicialmente núcleons de 80 MeV.

$$\text{a)} \quad V(r) = 0 \ , \qquad W(r) = \begin{cases} -5 \text{ MeV} & r < 4.54 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.54 \text{ fm} \end{cases} \qquad \text{(III.9)}$$

Na figura III.7 são apresentados os valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ em vários pontos do espaço para núcleons de 80 MeV espalhados pelo potencial mencionado.

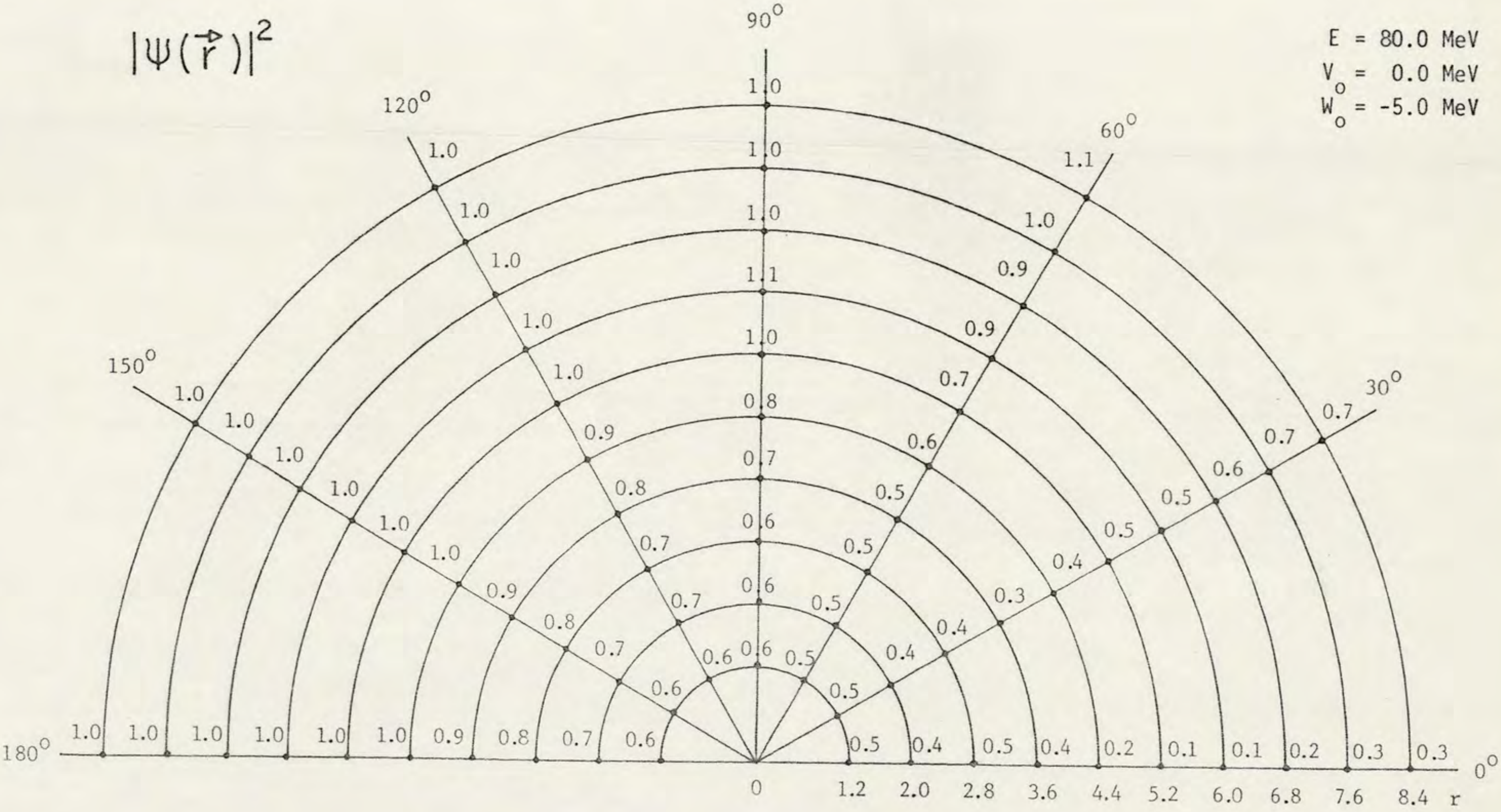

Figura III.7 - Densidade de probabilidade de posição $|\psi(\vec{r})|^2(fm^{-3})$ para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial puramente imaginário poço quadrado de profundidade -5 MeV e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca (R = 4.54 fm).

Próximo ao centro do núcleo ($r \cong 0.4$ fm) para o potencial definido em (III.9), já se observa um forte efeito de absorção, uma vez que $|\psi(\vec{r})|^2 = 0.5$ nesta região do espaço, valor este que se mantém até aproximadamente $r = 1.2$ fm para $\theta < 90^o$.

Para $\theta = 0^o$, à medida que r aumenta, $|\psi(\vec{r})|^2$ diminui até aproximadamente $r = 2.0$ fm onde $|\psi(r = 2.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.38$; depois $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta com o raio até $|\psi(r = 2.8,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.48$ e, novamente diminui até atingir o valor mínimo $\cong 0.13$ na região $5.2\ \text{fm} < r \leqslant 5.6$ fm, a partir do qual aumenta vagarosamente com o aumento de r, na região estudada; em $r = 12.0$ fm, por exemplo, $|\psi(r = 12.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.59$.

Para $\theta = 180^o$, para valores de r menores que o raio nuclear $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta com o raio até aproximar-se da unidade, quando o raio se aproxima do raio nuclear. $|\psi(\vec{r})|^2$ se mantém em torno do valor 1.0 para valores de r maiores do que o raio nuclear.

Quanto à variação angular, observa-se que se $r < 2.0$ fm $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta com o ângulo. Para $2.0\ \text{fm} < r < 4.4$ fm, $|\psi(\vec{r})|^2$ diminui com o aumento do ângulo até $\theta \cong 30^o$ e, passa a aumentar com o ângulo tendendo para a unidade quando o ângulo tende para $\theta = 180^o$.

Quando o raio se aproxima do raio nuclear e θ se aproxima de 90^o, $|\psi(\vec{r})|^2$ tende para a unidade.

Para valores de r maiores do que o raio nuclear, $|\psi(\vec{r})|^2$ tende para a unidade com o aumento do raio e do ângulo, como se pode observar na figura III.7, por exemplo, para $r \geqslant 6.0$ fm, em que os valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ para $\theta = 60^o$ oscilam em torno da unidade.

$$\text{b)}\quad V(r) = 0 \;, \qquad W(r) = \begin{cases} -10 \text{ MeV} & r < 4.54 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.54 \text{ fm} \end{cases} \qquad (\text{III.10})$$

A figura III.8 apresenta os valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ para núcleons de 80 MeV espalhados pelo potencial ótico definido em (III.10).

O valor de $|\psi(\vec{r})|^2$ próximo ao centro do núcleo ($r \cong 0.4$ fm) é aproximadamente 40% menor do que no caso anterior (0.3).

O comportamento geral de $|\psi(\vec{r})|^2$ é aproximadamente o mesmo que na situação a) porém para ângulos pequenos, e em particular para $\theta = 0^o$, os valores da densidade de probabilidade de posição são bastante menores. Para $\theta = 0^o$ o menor valor de $|\psi(\vec{r})|^2$, que neste caso é aproximadamente 2×10^{-3} ocorre no intervalo $5.2 \text{ fm} < r < 5.6$ fm, após o qual o efeito de absorção se torna menor e, assintoticamente, os valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ se aproximam dos valores correspondentes ao caso anterior. Por exemplo em $r = 12.0$ fm $|\psi(r = 12.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.51$ em contraposição ao caso a) no qual $|\psi(r = 12.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.59$.

$$\text{c)}\quad V(r) = 0 \;, \qquad W(r) = \begin{cases} -15 \text{ MeV} & r < 4.54 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.54 \text{ fm} \end{cases} \qquad (\text{III.11})$$

Valores da densidade de probabilidade de posição de núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial puramente imaginário de profundidade -15 MeV e de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca são apresentados na figura III.9.

Os resultados deste terceiro caso são muito semelhan

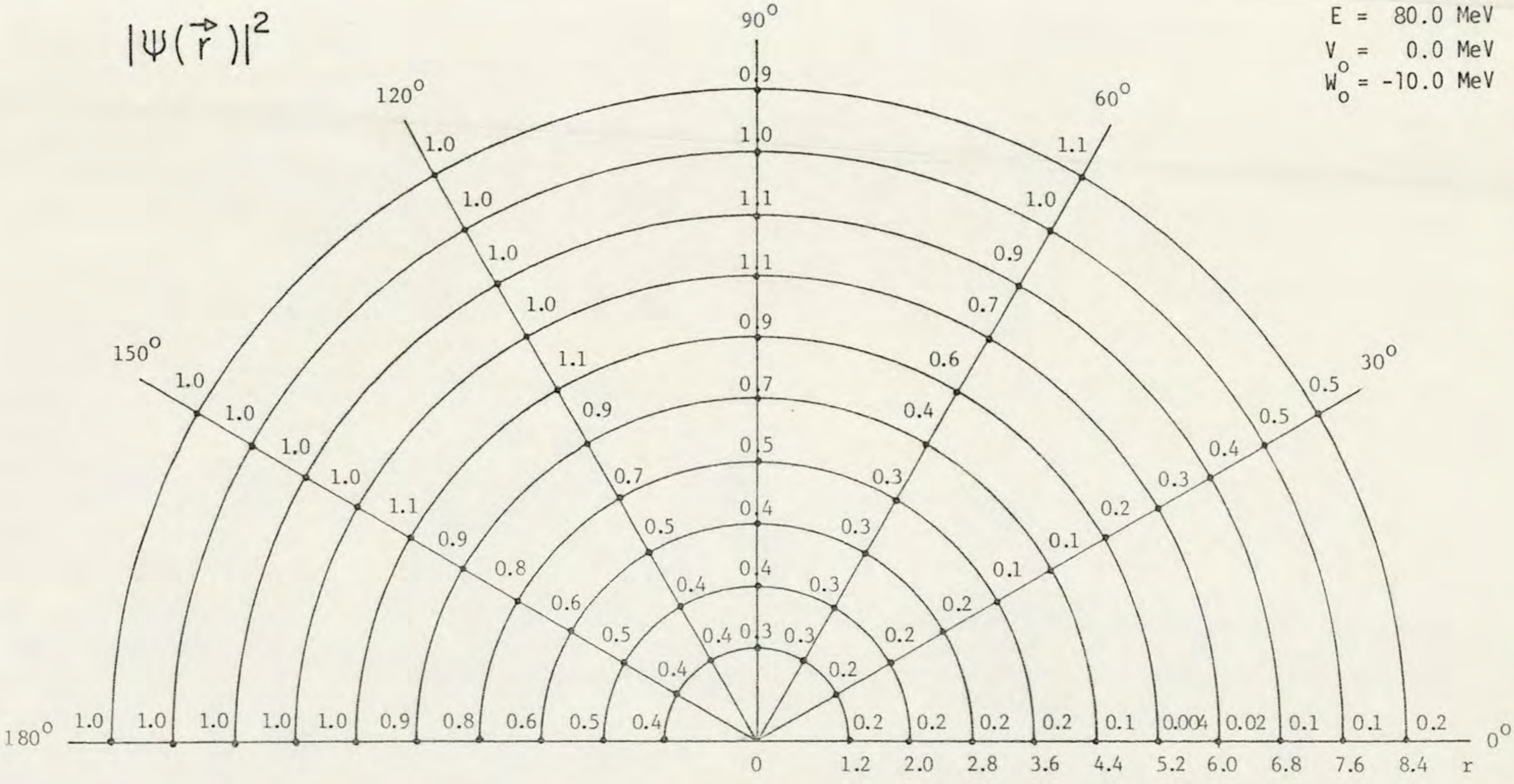

Figura III.8 - Densidade de probabilidade de posição $|\psi(\vec{r})|^2(fm^{-3})$ para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial puramente imaginário poço quadrado de profundidade -10 MeV e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca (R = 4.54 fm).

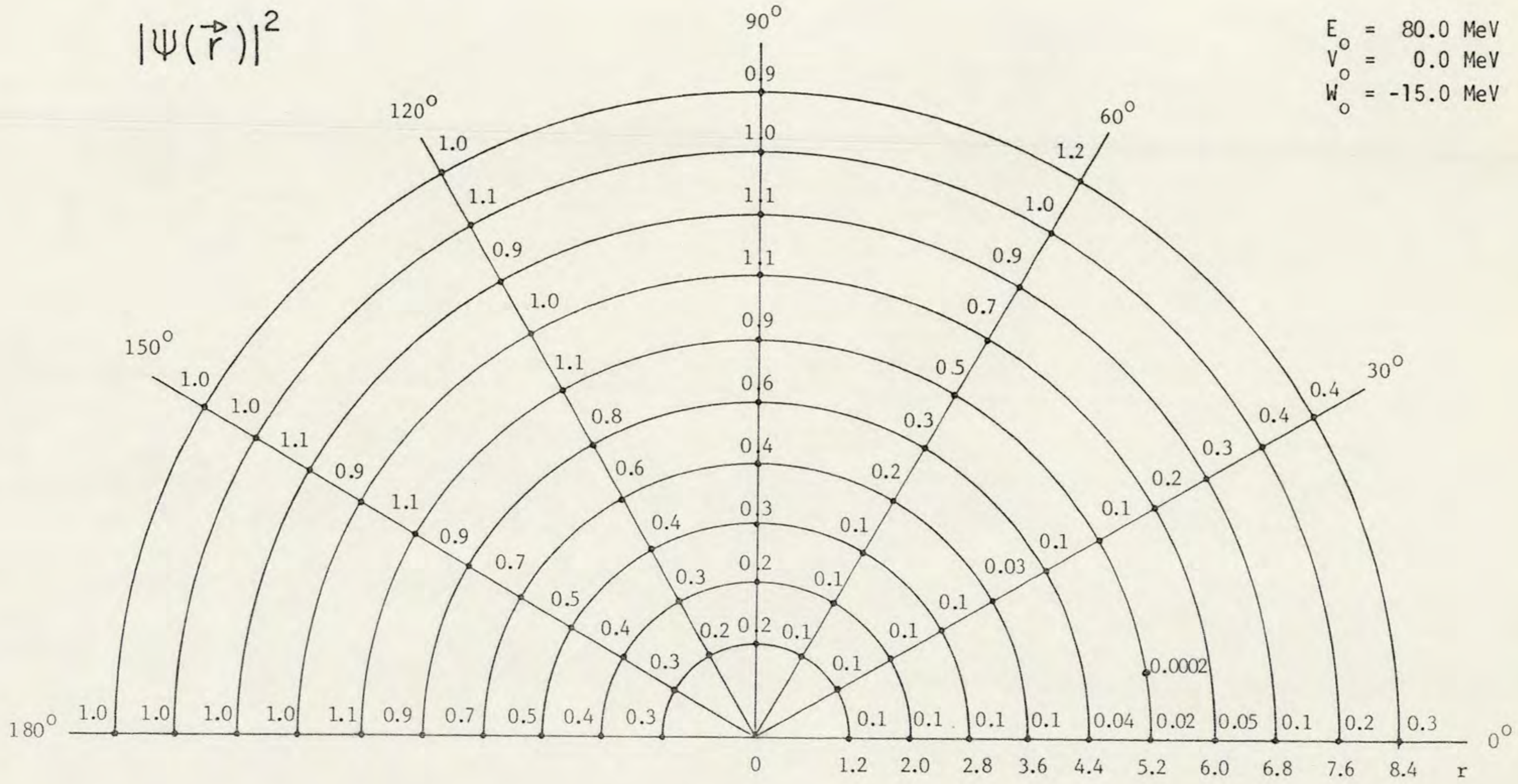

Figura III.9 - Densidade de probabilidade de posição $|\psi(\vec{r})|^2 (fm^{-3})$ para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial puramente imaginário poço quadrado de profundidade -15 MeV e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca (R = 4.54 fm).

tes aos anteriores, o efeito de absorção tornando-se mais intenso na região interna do núcleo. Outrossim, já bem longe do núcleo, por exemplo em $r = 12.0$ fm $|\psi(r = 12.0,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 0.52$.

O efeito da parte imaginária do potencial ótico sobre a função de onda pode ser observado na figura III.10, onde se nota um sensível aumento de absorção com o aumento do potencial.

Para núcleons de 215 MeV espalhados por potenciais puramente imaginários de -5, -10 e -15 MeV observa-se, relativamente aos resultados de 80 MeV, que a absorção é menos intensa na região do núcleo e que a região do mínimo de $|\psi(\vec{r})|^2$ desloca-se para a direita, isto é, afasta-se do núcleo. Esta região de mínimo situa-se (figura III.11) entre 8.8 fm e 9.6 fm.

É interessante notar que a atenuação da função de onda devido à parte imaginária do potencial ótico é mais intensa próximo à região focal, isto é, na região em que a parte real do potencial ótico provoca um efeito de focagem na função de onda do núcleon. A presença da parte imaginária do potencial ótico tende, pois, a diminuir o efeito de focagem causado pela parte real mas, como veremos, na justaposição das partes real e imaginária os dois efeitos não chegam a cancelar-se a baixas energias, predominando o efeito de focagem.

Discutimos com mais detalhes os efeitos das partes real e imaginária do potencial em separado sobre a função de onda de núcleons de 80 MeV porque para energias mais altas a parte real dos potenciais que simulam a interação núcleon-núcleo é menos intensa e a parte imaginária dos mesmos é mais profunda. Dessa forma, o efeito de focagem diminui com o aumento da energia e a análise do caso de 80 MeV resulta mais favorável para evi

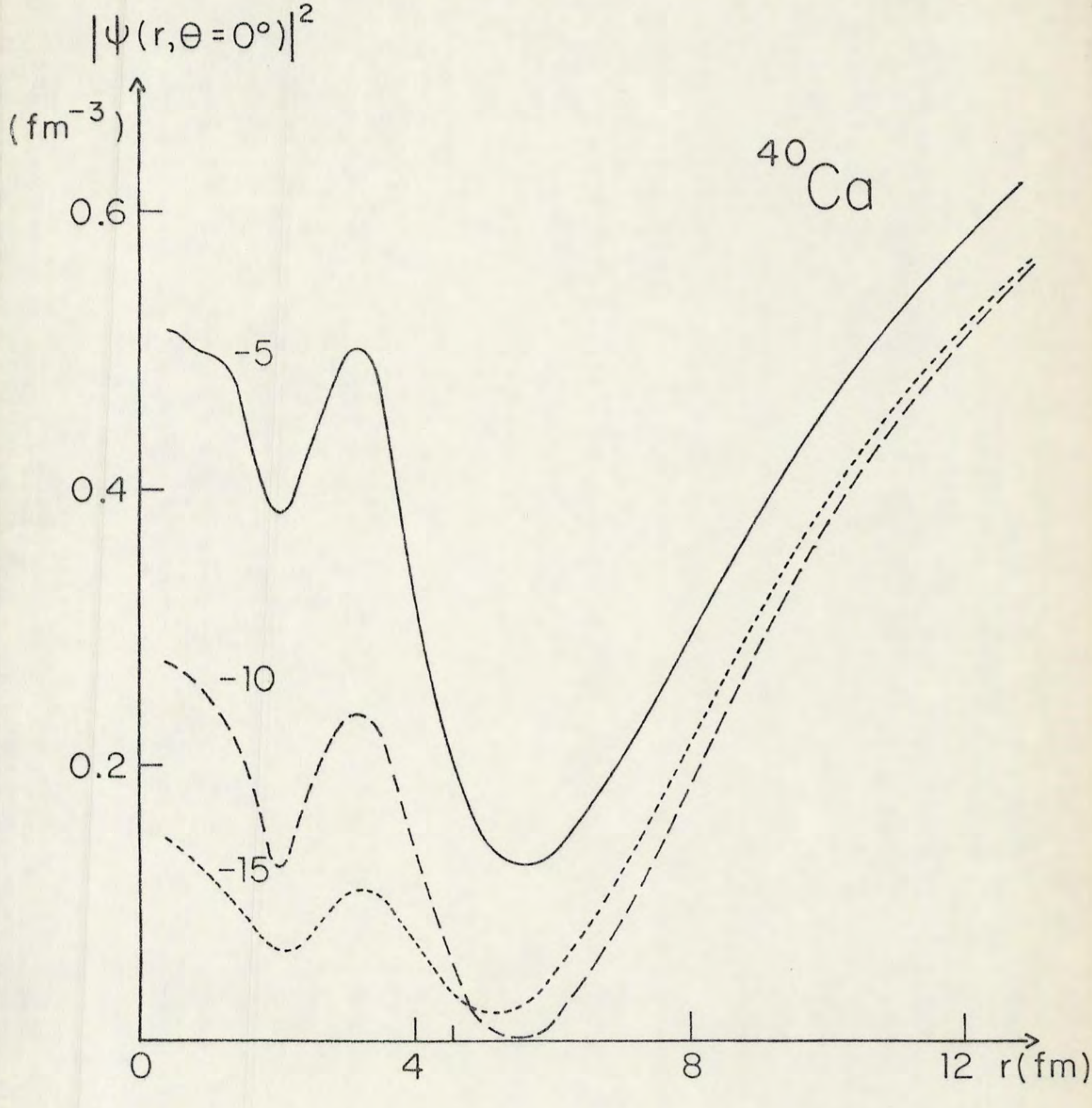

Figura III.10 - Densidade de probabilidade $|\psi(r,\theta=0^o)|^2$ (em fm^{-3}) para núcleons de 80 MeV espalhados por potencial ótico imaginário poço quadrado de profundidade -5 MeV (linha sólida), -10 MeV (linha tracejada) e -15 MeV (linha pontilhada) e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca, assinalado na figura ($R=4.54$ fm).

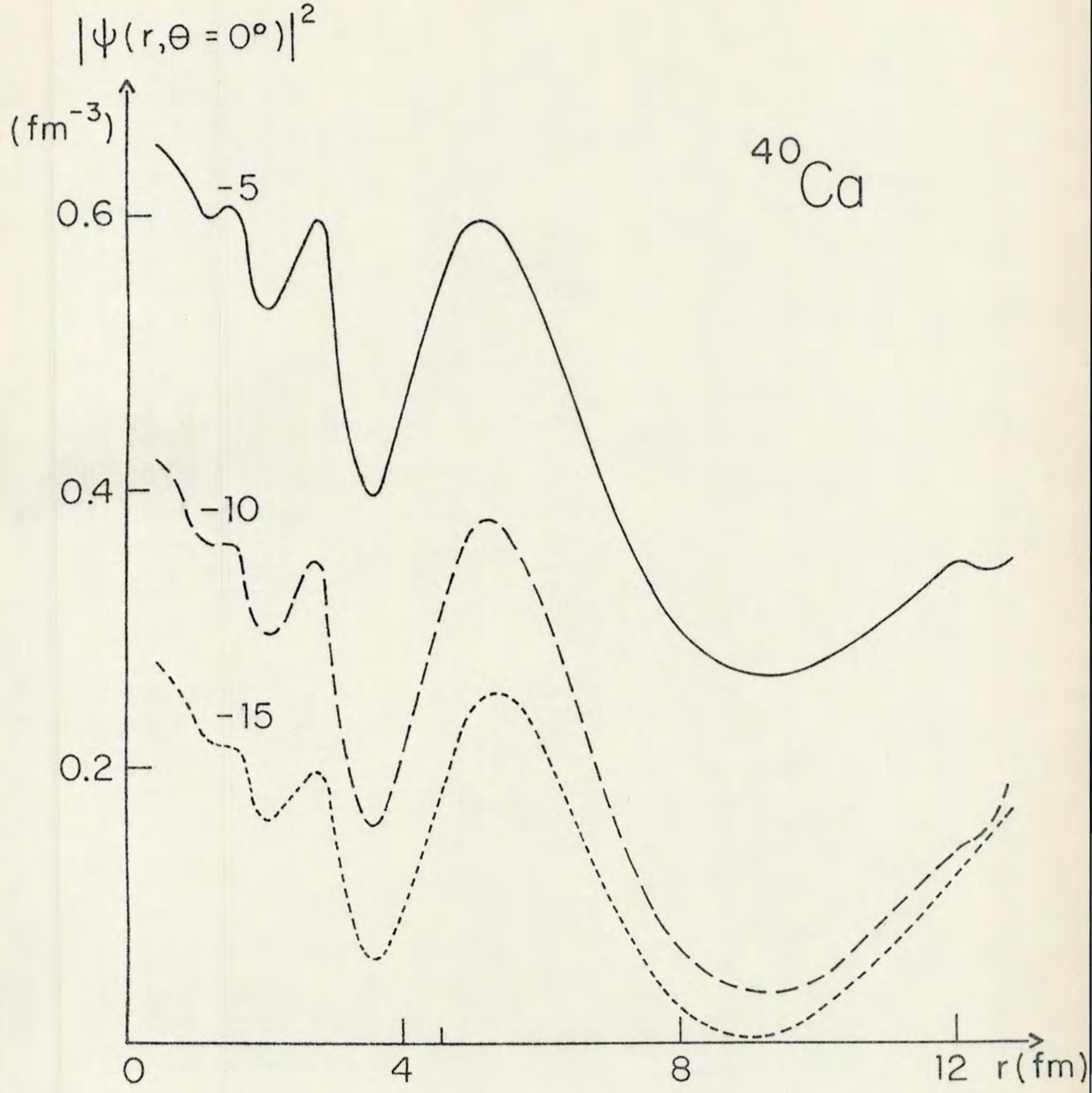

Figura III.11 Densidade de probabilidade $|\psi(r,\theta=0^{o})|^2$ (em fm^{-3}) para núcleons de 215 MeV espalhados por potencial imaginário poço quadrado de profundidade -5 MeV (linha sólida), -10 MeV (linha tracejada) e -15 MeV (linha pontilhada) e de alcance igual ao raio do ^{40}Ca, assinalado na figura (R = 4.54 fm).

denciar o efeito de cada parte do potencial ōtico. Quanto ā forma do potencial, consideramos aqui somente potenciais poço quadrado por simplicidade, uma vez que o objetivo da anālise era investigar o efeito das partes real e imagināria, separadamente; para visualizar tais efeitos não ē de extrema importãncia levar em conta outras formas de potenciais.

Potenciais de formas distintas e com diferentes dependências radiais para as partes real e imagināria modificam em parte as regiões de focagem e, apenas parcialmente, as intensidades de focagem, como se pode verificar no capītulo seguinte onde são apresentados e discutidos os efeitos globais do potencial ōtico complexo na função de onda.

IV - FUNÇÕES DE ONDA DO PROJÉTIL EM ESPALHAMENTO NÚCLEON-NÚCLEO

IV.1 - Considerações Sobre a Aproximação Utilizada

Neste capítulo é apresentado um estudo do efeito do potencial ótico nuclear sobre a função de onda de núcleons de energia média espalhados elasticamente por núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca. A região de interêsse é a região nuclear, onde se torna importante conhecer, para diversos processos físicos, a função de onda distorcida do projétil.

São consideradas energias incidentes de 80 MeV, 120 MeV, 160 MeV, 215 MeV e 320 MeV e o potencial nuclear é simulado por diversas formas, conforme exposto no Capítulo II. Utilizamos, para resolver a equação de Schrödinger, um método descrito no Apêndice A que aproxima potenciais de formas arbitrárias por potenciais seccionalmente constantes em uma seqüência de regiões convenientemente pequenas[30]. Assim, ao invés de obter numericamente a solução da equação de Schrödinger para o "potencial exato", ou de buscar uma solução aproximada do referido problema, optamos por determinar a solução analítica de um potencial aproximado. A primeira região do potencial aproximado se estende do centro do núcleo até um raio denominado $R_{mínimo}$, e as demais regiões apresentam larguras $\Delta = (R_{máximo} - R_{mínimo})/N$, sendo N o número de regiões e $R_{máximo}$ o raio a partir do qual o potencial é considerado nulo. É possível, ademais, considerar regiões intermediárias com larguras variáveis, recorrendo a leves modificações no programa de computação.

Este método foi aplicado, por exemplo[30], para calcular a seção de choque da reação $^{60}Ni(^{3}He, ^{3}He)^{60}Ni$ a 71 MeV com um potencial da forma

$$V(r) = V_R\, f(x_R) + i\, 4W_D \frac{d}{dx_I} f(x_I) + V_c \quad ,$$

onde

$$f(x) = \left[1 + \exp(x)\right]^{-1} \quad , \quad x_R = \frac{r - r_R A^{1/3}}{a_R} \quad , \quad x_I = \frac{r - r_I A^{1/3}}{a_I} \quad ,$$

V_c sendo o potencial coulombiano correspondente a um projétil de carga puntual incidindo em uma esfera uniformemente carregada de raio $R_c = r_c A^{1/3}$. Os parâmetros utilizados pelos autores são $V_R = -126.5$ MeV, $r_R = 1.12$ fm, $a_R = 0.837$ fm, $W_D = 20.4$ MeV, $r_I = 1.26$ fm, $a_I = 0.841$ fm e $r_c = 1.3$ fm. Considerando $R_{máximo} = 25$ fm o potencial foi dividido em 100, 200, 400, 800 e 2000 regiões de potenciais seccionalmente constantes e a comparação de resultados obtidos em cada um dos casos revelou que aquele com 100 regiões difere daquele obtido com 2000 regiões em aproximadamente 10%. Esta diferença torna-se significativamente menor para os casos de 200, 400 e 800 regiões.

Para potenciais analisados neste trabalho consideramos regiões de 0.05 fm, 0.1 fm, 0.2 fm e 0.4 fm. Os resultados obtidos para as três primeiras regiões praticamente não diferem. Particularmente, as diferenças entre os resultados obtidos para a densidade de probabilidade de núcleons de 80 MeV espalhados pelo potencial proporcional à densidade do ^{16}O

$$U(r) = \left[(-41.79 - i\ 15.65).(1 + 0.592\ r^2).\exp(-0.323\ r^2)\right] \text{ MeV}$$

(ver seções II.2 e II.3) considerando, separadamente, intervalos de 0.1 fm e 0.2 fm entre $R_{mínimo} = 0.2$ fm e $R_{máximo} = 4.8$ fm, são da ordem de 1% ou menores na região central do núcleo (até aproximadamente 1.5 fm) e na região externa do núcleo. Na região intermediária essa diferença fica em torno de 2%.

IV.2 - Distribuições de Probabilidade para Potenciais Óticos de Formas Diversas

a) Poço Quadrado

O potencial ótico poço quadrado é um caso particular do mencionado na seção anterior, em que $R_{mínimo} = R_{máximo} = R$. Adotamos, conforme o exposto nas seções II.2 e II.3, o valor de R igual ao raio nuclear do núcleo alvo.

O potencial poço quadrado pode ser escrito na forma

$$U(r) = \begin{cases} U_o = V_o + i\, W_o & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \qquad \text{(IV.1)}$$

e seus parâmetros para núcleons de energias 80, 120, 160, 215 e 320 MeV espalhados por núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca, adotados neste trabalho, são encontrados nas tabelas II.1 e II.4. As densidades de probabilidade correspondentes foram obtidas usando o procedimento descrito no Apêndice A para resolver a equação de Schrödinger com correção cinemática relativística (ver equações (A.10), (A.11) e (A.18) a (A.21)). As funções de Bessel esféricas de argumentos reais e complexos que concorrem para a solução, foram geradas conforme Apêndice B, contribuindo um número máximo de ondas igual a 30.

Curvas que unem pontos do espaço com os mesmos valores da densidade de probabilidade (diagramas de contorno) permitem visualizar os efeitos de focagem. A figura IV.1 apresenta os diagramas de contorno, no espaço de configuração, para núcleons de 80 e 120 MeV espalhados por potenciais poço quadrado ajustados aos núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca.

Consideremos núcleons de 80 MeV espalhados por um núcleo de ^{16}O, representado pelo potencial ótico tipo poço quadrado .

$$U(r) = \begin{cases} (-28.60 - i\,10.71)\ \text{MeV} & r < 3.41\ \text{fm} \\ 0 & r > 3.41\ \text{fm} \end{cases} \qquad \text{(IV.2)}$$

O valor de $|\psi(\vec{r})|^2$ próximo ao centro do núcleo (em $r = 0.4$ fm) é aproximadamente 0.5.

Para $\theta = 0^o$, $|\psi(\vec{r})|^2$ diminui com o aumento do raio até $r = 0.8$ fm ($|\psi(r = 0.8,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.40$), passando a aumentar com o raio até $r = 1.6$ fm ($|\psi(r = 1.6,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.62$). Depois de $r = 1.6$ fm a densidade de probabilidade novamente diminui com o aumento do raio até ocorrer o valor mínimo em $r = 2.4$ fm, $|\psi(r = 2.4,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 3.8 \times 10^{-3}$; a partir desse ponto, $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta rapidamente até atingir o valor máximo em $r = 4.8$ fm $|\psi(r = 4.8,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 3.70$, a partir do qual diminui lentamente. Assintoticamente, por exemplo em $r = 12.0$ fm, $|\psi(r = 12.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong$ $\cong 2.29$. No raio nuclear, para $\theta = 0^o$, tem-se $|\psi(r=3.41,\ \theta=0^o)|^2 \cong 2.79$.

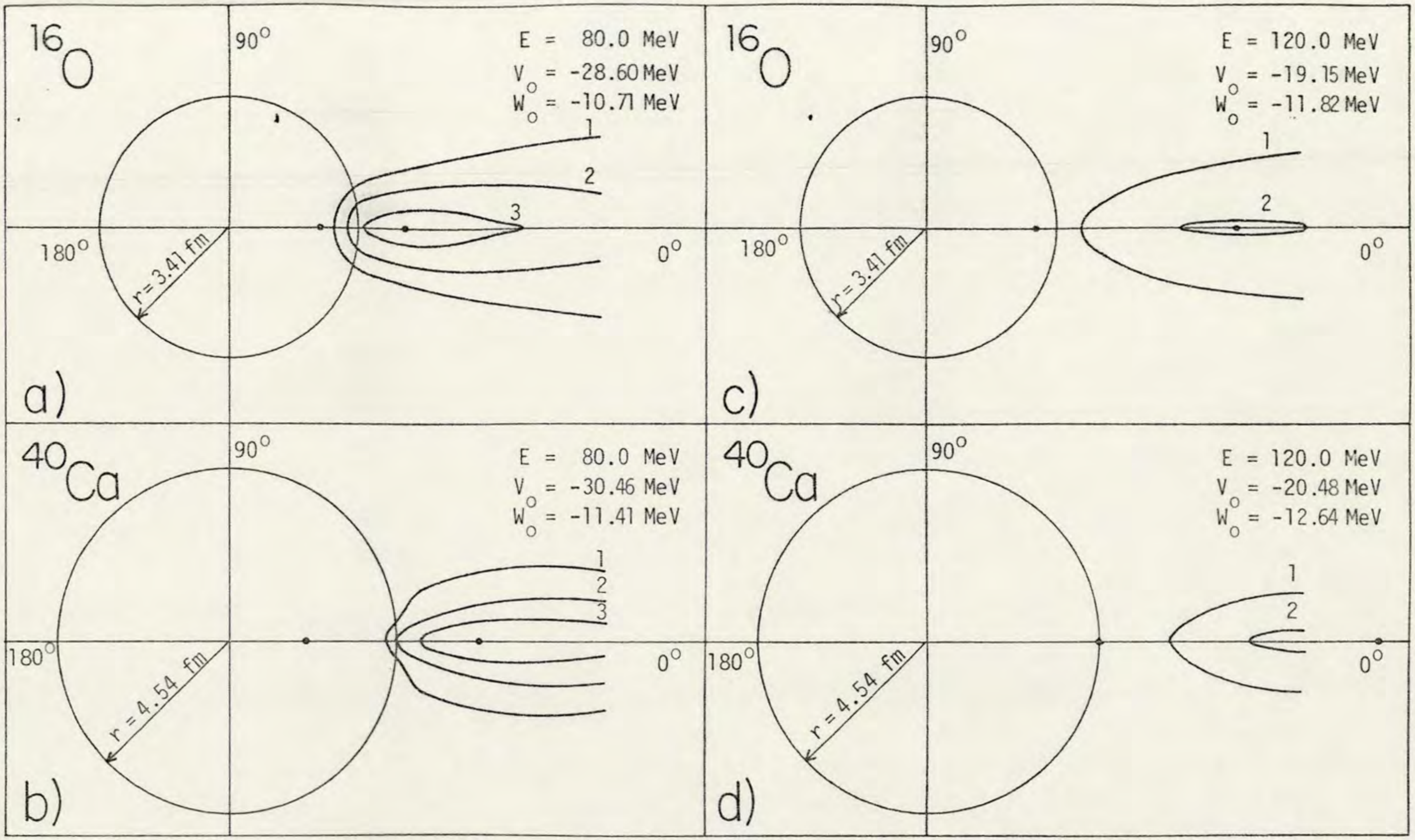

Figura IV.1 - Diagramas de contorno de $|\psi(\vec{r})|^2$ (em fm^{-3}), no espaço de configuração, para núcleons de energia E (80 MeV e 120 MeV) espalhados por núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca representados por potenciais óticos poço quadrado $U_o = V_o + i\,W_o$ de alcance igual ao raio nuclear.

Os pontos em que $|\psi(\vec{r})|^2$ assume seus valores mínimo e máximo para $\theta = 0^\circ$ estão assinalados na figura IV.1a, na qual estão traçadas curvas de intensidade de $|\psi(\vec{r})|^2$ igual a 1, 2 e 3.

Para $\theta = 180^\circ$, $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta com o raio até aproximadamente o raio nuclear, quando seu valor se aproxima da unidade, e oscila em torno desse valor para valores maiores de r.

De maneira geral $|\psi(\vec{r})|^2$ na região do núcleo aumenta, tendendo para a unidade, com o aumento do raio e do ângulo, excetuando a região de focagem onde $|\psi(\vec{r})|^2$ diminui com o ângulo até aproximadamente 40° e a região angular $40^\circ < \theta < 100^\circ$ onde se observam pequenas oscilações.

Para núcleons de 80 MeV espalhados pelo ^{40}Ca, o potencial ótico poço quadrado que simula o potencial nuclear é,

$$U(r) = \begin{cases} (-30.46 - i\ 11.41)\ \text{MeV} & r < 4.54\ \text{fm} \\ 0 & r > 4.54\ \text{fm} \end{cases} \qquad (IV.3)$$

O comportamento geral de $|\psi(\vec{r})|^2$ assemelha-se ao do caso anterior, embora mudem um pouco os valores da densidade de probabilidade, uma vez que o aumento da parte imaginária do potencial ótico provoca uma maior atenuação da função de onda principalmente na região nuclear, enquanto que a região superficial e a externa são mais sensíveis às variações da parte real do potencial.

Assim, $|\psi(\vec{r})|^2 \cong 0.3$ próximo ao centro do núcleo, ou seja em torno de $r = 0.4$ fm.

Para $\theta = 0^\circ$ a densidade de probabilidade diminui com o aumento de r até atingir um mínimo em r = 2.0 fm, $|\psi(r = 2.0,\ \theta = 0^\circ)|^2 \cong 0.18$, pas sando a aumentar com o raio até $r = 2.8$ fm ($|\psi(r=2.8, \theta=0^o)|^2 \cong 0.63$). A partir deste ponto, $|\psi(\vec{r})|^2$ diminui novamente com o aumento da distância até 3.6 fm, $|\psi(r = 3.6, \theta = 0^o)|^2 \cong 0.27$. Depois de $r = 3.6$ fm a densidade de probabilidade aumenta rapidamente com o raio até $r = 6.8$ fm, $|\psi(r = 6.8, \theta = 0^o)|^2 \cong 4.18$ e diminui lentamente com o raio para $r > 6.8$ fm. Em $r = 12.0$ fm tem-se $|\psi(r = 12.0, \theta = 0^o)|^2 \cong 3.05$. No raio nuclear, para $\theta = 0^o$, o valor da densidade de probabilidade é aproximadamente 2.05.

É interessante notar que, para este caso, o potencial $U_o = V_o + i\, W_o$ é aproximadamente a combinação dos casos 2c e 3b do Capítulo III. Comparando o diagrama de contorno para núcleons de 80 MeV incidindo no ^{40}Ca (figura IV.1b) com a figura III.4 (seção III.2) observa-se que a intensidade do foco diminui bastante com a inclusão da parte imaginária (ver figura III.8), em consonância com a análise do efeito da parte imaginária do potencial ótico sobre a função de onda feita na seção III.3.

Quanto à variação angular, o comportamento de $|\psi(\vec{r})|^2$ é análogo ao caso anterior. A figura IV.1b apresenta esquematicamente a região de focagem para esta situação, na qual, no eixo $\theta = 0^o$, estão marcados os pontos de mínima e de máxima intensidade de $|\psi(\vec{r})|^2$.

Para núcleons de 120 MeV espalhados pelo ^{16}O, representado pelo potencial ótico

$$U(r) = \begin{cases} (-19.15 - i\, 11.82)\ \text{MeV} & r < 3.41\ \text{fm} \\ 0 & r > 3.41\ \text{fm} \end{cases} , \qquad (IV.4)$$

$|\psi(\vec{r})|^2$ assume o valor $\cong 0.5$ próximo do centro do núcleo ($r = 0.4$ fm).

Observa-se que em relação ao caso de 80 MeV as posições de máximo e mínimo dentro do núcleo, e o foco, deslocam-se para a direita. O primeiro máximo ocorre agora em $r = 2.0$ fm, $|\psi(r = 2.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.55$ em contraposição ao caso N - ^{16}O anterior ($|\psi(r = 1.6,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.62$, e o valor máximo da densidade de probabilidade ocorre em $r = 8.0$ fm, $|\psi(r = 8.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 2.06$, portanto, muito mais à direita do que no caso anterior; o valor mínimo de $|\psi(\vec{r})|^2$ na região do núcleo ocorre em $r = 2.8$ fm, $|\psi(r\ \ 2.8,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 2.07 \times 10^{-2}$ e no raio nuclear, para $\theta = 0^o$, tem-se $|\psi(r = 3.41,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.32$.

No espalhamento de núcleons de 120 MeV por núcleos de ^{40}Ca, o potencial nuclear pode ser representado pelo potencial ótico

$$U(r) = \begin{cases} (-20.48 - i\ 12.64)\ \text{MeV} & r < 4.54\ \text{fm} \\ 0 & r > 4.54\ \text{fm} \end{cases} \qquad (IV.5)$$

Obtem-se $|\psi(\vec{r})|^2 \cong 0.3$ na região central do núcleo (para $r = 0.4$ fm) e observa-se um deslocamento para a direita em relação aos casos anteriores, do máximo de $|\psi(\vec{r})|^2$. Outrossim, ocorre diminuição da intensidade do máximo de $|\psi(\vec{r})|^2$ dentro do núcleo para $\theta = 0^o$ $|\psi(r = 3.6,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.56$ e do valor máximo na região focal $|\psi(r = 12.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 2.32$, em contraposição ao caso de 80 MeV onde se tinha, respectivamente, $|\psi(r = 2.8,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 0.63$ e $|\psi(r = 6.8,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 4.18$.

O valor mínimo da densidade de probabilidade para $\theta = 0^o$ ocorre a uma distância igual ao raio nuclear e é aproximadamente 7.3×10^{-2}.

Verifica-se assim que com o aumento da energia do pro jétil a região de focagem tende a se afastar do núcleo e a intensidade da focagem torna-se menor.

Para núcleons de 215 MeV e 320 MeV já não se observa focagem na região de interêsse. Para núcleons com essas energias espalhados por ^{16}O e simulando o potencial nuclear por um potencial poço quadrado com os parâmetros adequados (ver tabela II.1), a densidade de probabilidade assume os valores aproximados 0.5 e 0.4 na região central do núcleo. No raio nuclear para $\theta = 0^o$, para 215 MeV e 320 MeV, respectivamente, $|\psi(\vec{r})|^2$ vale aproximadamente 0.21 e 0.40.

Para espalhamento de núcleons pelo ^{40}Ca às energias de 215 MeV e 320 MeV, (parâmetros do potencial ótico constantes da Tabela II.4), tem-se, próximo ao centro do núcleo, $|\psi(\vec{r})|^2 \cong 0.3$ nos dois casos e no raio nuclear, para $\theta = 0^o$, aproximadamente 0.35 e 5.45×10^{-2} respectivamente.

b) Poço Trapezoidal

Os potenciais óticos poço trapezoidal definidos no Capítulo II (ver tabelas II.2 e II.5) têm a forma

$$U(r) = \begin{cases} U_o = V_o + i\, W_o & r < R_{min} \\ (V_o + i\, W_o) . \dfrac{(R_{máx} - r)}{(R_{máx} - R_{min})} & R_{min} < r < R_{máx} \\ 0 & r > R_{máx} \end{cases}$$

sendo R_{min} igual a 1.6 fm e 2.0 fm e $R_{máx}$ igual a 3.9 fm e 5.3 fm, para os núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca, respectivamente, e U_o o valor do potencial em $r = 0$, $U_o = U(o)$. Estes valores foram escolhidos de forma a simular aproximadamente o potencial proporcional à densidade nuclear, conforme descrito no Capítulo II, representando assim uma situação intermediária entre a forma mais simples (poço quadrado) e a forma mais geral (proporcional à densidade nuclear). A região de potencial constante ($r < R_{min}$) tenta reproduzir o platô que se observa na região central do núcleo para os núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca (ver figuras II.1 e II.2) e a região de variação linear do potencial trapezoidal ($R_{min} < r < R_{máx}$) é uma aproximação da região em que a densidade nuclear diminui com o raio. Em $r = R_{máx}$ o potencial proporcional à densidade nuclear é da ordem de 5% do seu valor no centro do núcleo.

O potencial trapezoidal foi aproximado por uma soma de potenciais seccionalmente constantes, sendo o primeiro termo de largura igual ao raio mínimo R_{min} e os seguintes de largura igual a 0.1 fm cada um (ver apêndices A e B).

Para núcleons de energias no intervalo considerado espalhados por ^{16}O e ^{40}Ca, o comportamento de $|\psi(\vec{r})|^2$ não sofre grandes modificações em relação ao devido a potenciais tipo poço quadrado. Observa-se contudo que as variações de $|\psi(\vec{r})|^2$ são menos abruptas e que o foco desloca-se para a esquerda (em direção ao centro do núcleo) e é um pouco mais intenso. Por exemplo, para a energia incidente de 80 MeV $|\psi(\vec{r})|^2$ atinge o valor 1.0, para $\theta = 0^o$, em $r = 2.35$ fm ($|\psi(r = 2.35,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 1.0$) e o valor máximo em $r = 4.0$ fm, $|\psi(r = 4.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 4.09$, para o ^{16}O em contraposição aos correspondentes valores para o potencial tipo poço quadrado ($|\psi(r = 2.9,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 1.0$ e $|\psi(r = 4.8,\ \theta = 0^o)|^2 \cong$ $\cong 3.70$). Para núcleons de mesma energia espalhados pelo ^{40}Ca tem-se $|\psi(r = 3.8,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 1.0$ e $|\psi(r = 6.0,\ \theta = 0^o)|^2 \cong 4.68$ em con traposição a $|\psi(r=4.1,\ \theta=0^{\circ})|^2 \cong 1.0$ e $|\psi(r=6.8,\ \theta=0^{\circ})|^2 \cong 4.18$ correspondentes ao potencial poço quadrado. Para essa energia, na região $r < R_{min}$ os valores da densidade de probabilidade para o potencial trapezoidal são um pouco menores do que os correspondentes valores para o potencial poço quadrado.

c) Potencial Proporcional à Densidade Nuclear

Consideremos potenciais óticos proporcionais à densidade nuclear (r em fm e $\rho(r)$ em fm^{-3})

$$\rho(r) = 0.132\ (1+0.592\ r^2).\exp(-0.323\ r^2)\quad ,$$

$$\rho(r) = 0.182\ (1+0.057\ r^2+0.051\ r^4).\exp(-0.242\ r^2)$$

para o ^{16}O e o ^{40}Ca, respectivamente, calculada usando as funções de onda dos núcleons do núcleo geradas por um potencial oscilador harmônico (ver figuras II.1 e II.2 e tabelas II.3 e II.6).

Como os potenciais variam aproximadamente 1% no intervalo $0 \leqslant r \leqslant 0.2$ fm, foram aproximados por uma soma de potenciais seccionalmente constantes, em que o primeiro termo tem profundidade $U_o = U(o)$ e largura igual a 0.2 fm e os termos seguintes apresentam largura de 0.1 fm. O valor dos potenciais em $r = 4.8$ fm e 6.2 fm para os núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca, respectivamente, é da ordem de 1% do valor em $r = 0$; a partir desses pontos os potenciais foram considerados nulos (ver apêndices A e B).

Para este potencial a região de focagem alonga-se um pouco mais para a esquerda (em direção ao interior do núcleo) em relação aos dois casos anteriores, mas o valor e a posição da sua intensidade máxima se aproximam do valor e posição correspondentes ao poço quadrado. Relativamente ao potencial trapezoidal o valor máximo de $|\psi(\vec{r})|^2$ é menor e desloca-se para a direita. Como exemplo, para núcleons de 80 MeV espalhados por ^{16}O, o "início" da região de focagem ocorre em r = 2.14 $|\psi(r=2.14, \theta=0^o)|^2 \cong$ $\cong 1.0$ e o valor máximo da densidade de probabilidade ocorre em r = 4.65 fm $|\psi(r = 4.65, \theta = 0^o)|^2 \cong 3.63$, em contraposição a $|\psi(r = 2.35, \theta = 0^o)|^2 \cong 1.0$ e $|\psi(r = 4.0, \theta = 0^o)|^2 \cong 4.09$ para o potencial trapezoidal e a $|\psi(r = 2.9, \theta = 0^o)|^2 \cong 1.0$ e $|\psi(r = 4.8, \theta = 0^o)|^2 \cong$ $\cong 3.70$ para o potencial tipo poço quadrado. Para núcleons de 80 MeV espalhados por núcleos de ^{40}Ca tem-se $|\psi(r = 3.65, \theta = 0^o)|^2 \cong 1.0$ e o valor máximo $|\psi(r = 6.8, \theta = 0^o)|^2 \cong 4.29$ para o potencial proporcional à densidade.

As densidades de probabilidade, para $\theta = 0^o$, em função da distância para núcleons de 80 MeV espalhados por potenciais óticos poço quadrado, poço trapezoidal e potencial proporcional à densidade nuclear para os núcleos de ^{16}O e ^{40}Ca são apresentadas nas figuras IV.2 e IV.3, respectivamente.

Esta comparação entre os efeitos dos três tipos de potenciais na função de onda permite dizer que, para o estudo das regiões de focagem, usar potenciais óticos simplificados como o potencial poço quadrado pode ser uma aproximação razoavelmente boa.

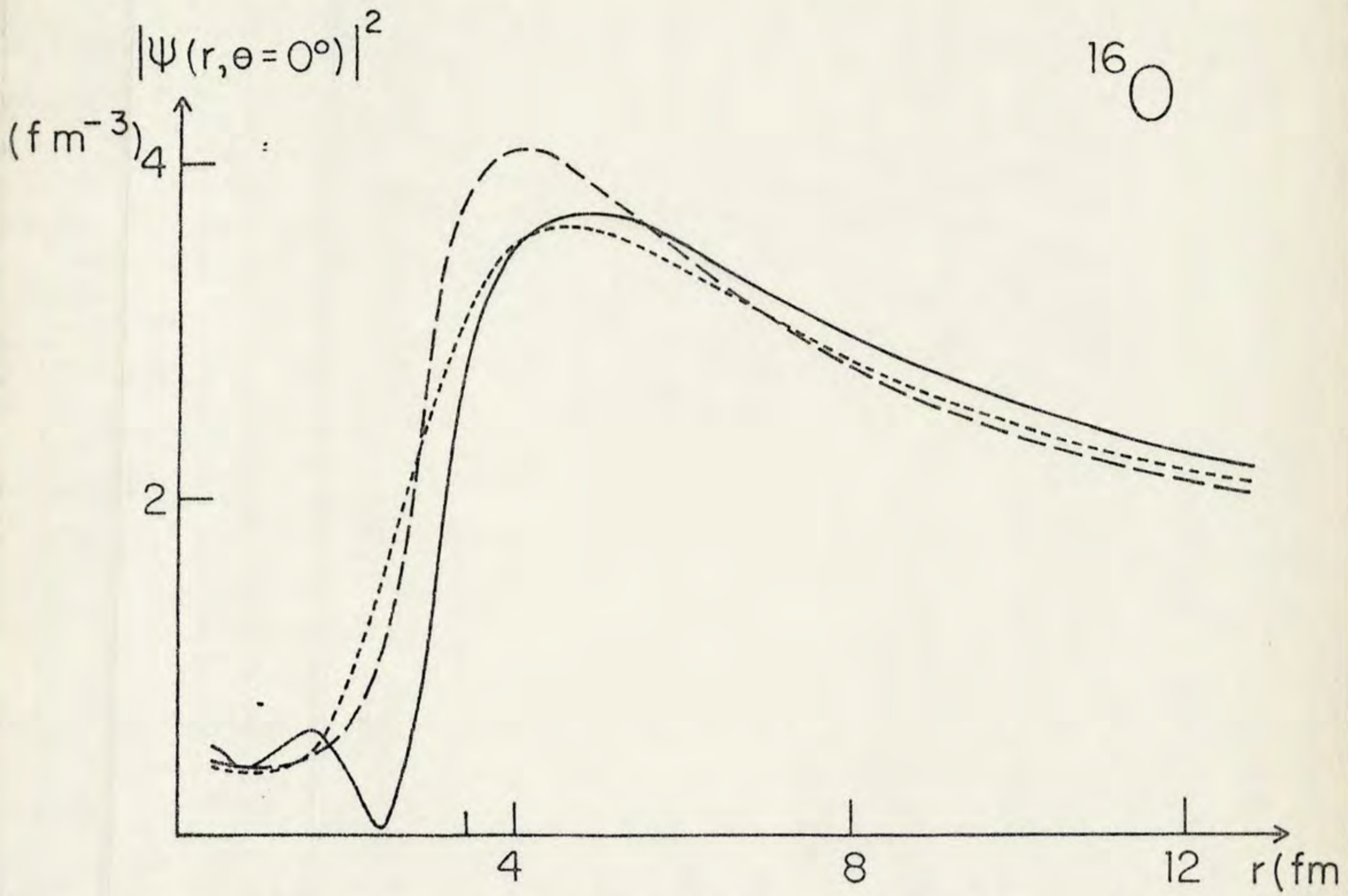

Figura IV.2 - Densidade de probabilidade $|\psi(r,0^{o})|^{2}$ (fm^{-3}) para núcleons de 80 MeV espalhados por potenciais poço quadrado (linha sólida), poço trapezoidal (linha tracejada) e poço proporcional à densidade nuclear (linha pontilhada) ajustados ao núcleo de ^{16}O.

Contudo, para estudo destes efeitos, extrapolar resultados obtidos a uma certa energia incidente, para outras energias não muito diferentes resulta inadequado, uma vez que tais efeitos dependem não apenas da energia incidente mas das magnitudes dos potenciais óticos. Assim, para os efeitos predominantes de focagem a parte real do potencial se modifica rapidamente. Outrossim, embora as intensidades da parte imaginária do potencial ótico variem com a energia incidente, a sua influência

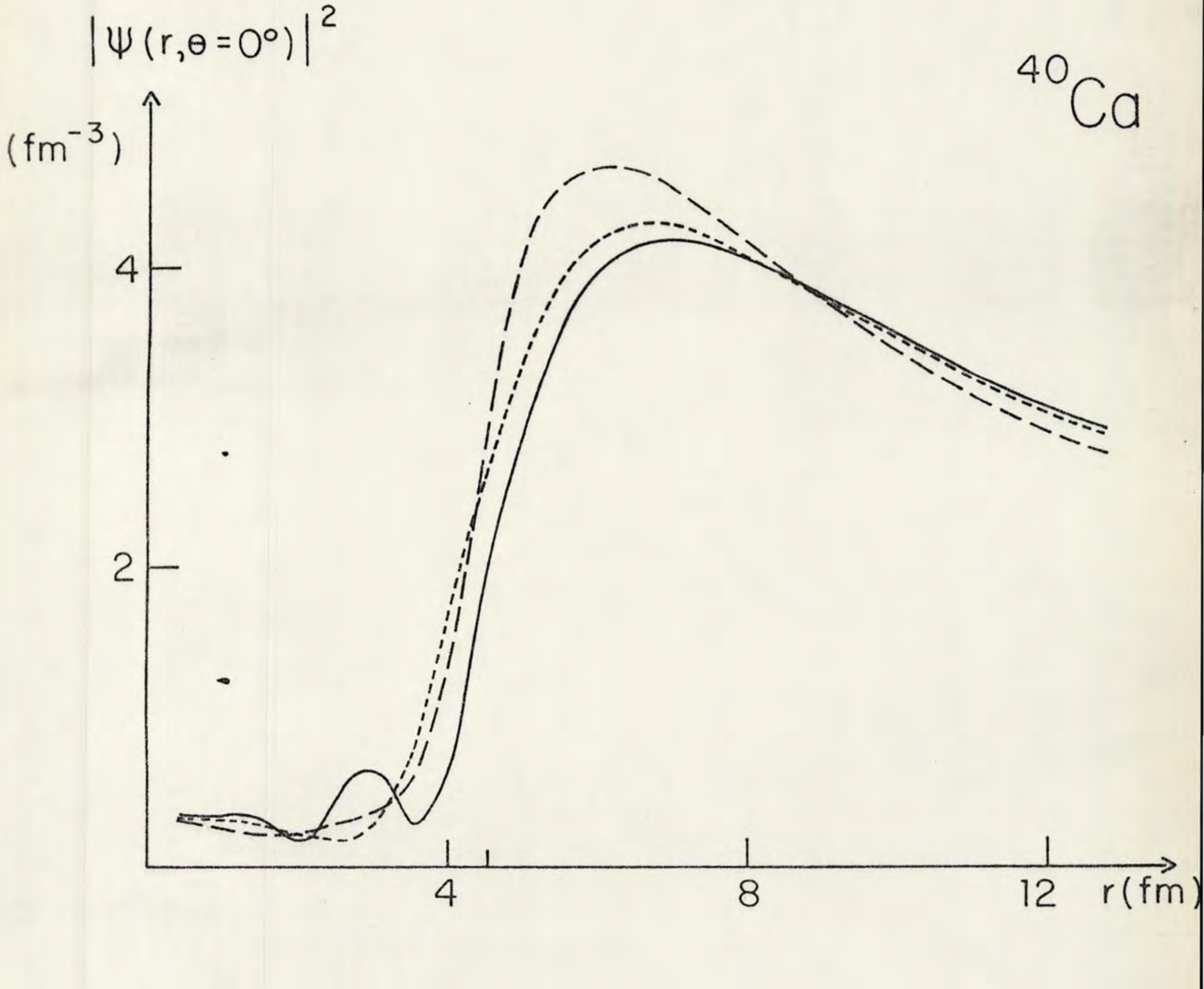

Figura IV.3 - Densidade de probabilidade $|\psi(r,\theta=0^{o})|^2$ (em fm^{-3}) para núcleons de 80 MeV espalhados por potenciais poço quadrado (linha sólida), poço trapezoidal (linha tracejada) e poço proporcional à densidade nuclear (linha pontilhada) ajustados ao núcleo de ^{40}Ca.

supressora na focagem não é muito efetiva, podendo até, em algumas geometrias, praticamente não contribuir.

d) Potencial Woods-Saxon

Potenciais óticos complexos do tipo Woods-Saxon(48) têm sido usados em inúmeros trabalhos. Particularmente, estudando o fluxo do espalhamento elástico de prótons de 72 MeV McCarthy(22) adotou um potencial que simula a interação próton - ^{40}Ca na forma (r em fm, $U(r)$ em MeV):

$$U(r) = (-30 - i\,10).\ \{1 + \exp[(r - 4.5)/0.8]\}^{-1} \qquad (IV.6)$$

Comparativamente aos potenciais usados neste trabalho observa-se que a razão entre as profundidades real e imaginária do potencial definido em (IV.6) coincide com a razão por nós obtida utilizando o procedimento descrito no Capítulo II, mas a integral de volume desse potencial é aproximadamente 3/4 do valor definido pela condição (II.9).

A figura IV.4 mostra o diagrama de contorno da densidade de probabilidade de prótons de 72 MeV espalhados pelo potencial ótico definido em (IV.6). O potencial foi aproximado por uma soma de potenciais seccionalmente constantes permitindo assim uma comparação com nossos outros resultados.

Nesse caso obtém-se para a densidade de probabilidade próximo ao centro do núcleo ($r \cong 0.5$ fm) aproximadamente 0.4.

Para $\theta = 0^\circ$, a densidade de probabilidade diminui com o aumento do raio até atingir o valor mínimo em $r = 3.55$ fm $|\psi(r = 3.55,\ \theta = 0^\circ)|^2 \cong 0.26$; a partir desse ponto $|\psi(\vec{r})|$ aumenta com o raio até $r = 10.80$ fm onde atinge o seu valor máximo $|\psi(r = 10.80, \theta = 0^o)|^2 \cong 4.43$ passando então a diminuir lentamente com o raio. Por exemplo, em $r = 12.80$ fm $|\psi(\vec{r})|^2$ assume aproximadamente o valor 4.25.

Quanto à variação angular da densidade de probabilidade, não existem diferenças significativas em relação aos casos anteriormente analisados.

Em especial, para $\theta = 180^o$, $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta com o raio até $r \cong 8.0$ fm quando a densidade de probabilidade atinge o valor 1.0.

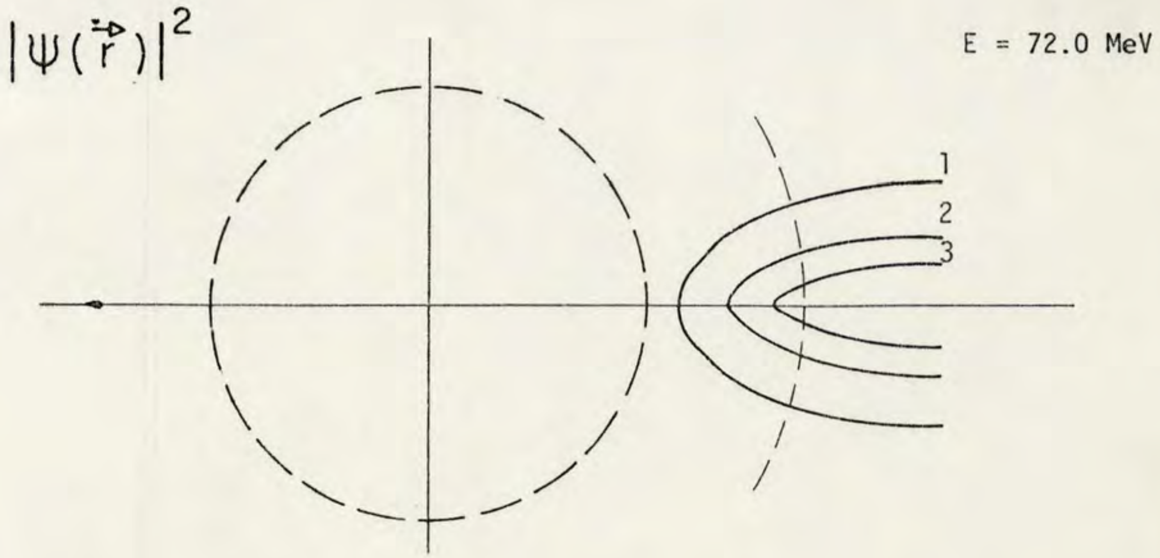

Figura IV.4 - Diagrama de contorno de $|\psi(\vec{r})|^2$ (em fm^{-3}) para prótons de 72 MeV espalhados pelo potencial ótico extraído da referência (22) $U(r) = -(30 + i\ 10).\{1 + \exp[(r - 4.5)/0.8]\}^{-1}$

Esse potencial embora menos intenso é mais alongado que os três anteriores, isto é, estende-se para valores maiores de r, e foi considerado constante $U_o = (-30\ -i\ 10)$ MeV para $r \leq 0.5$ fm e tomado nulo para $r \geqslant 7.5$ fm. A região intermediária foi aproximada por uma série de potenciais seccionalmente constantes de largura 0.1 fm (ver Apêndice A). Verifica-se assim que a intensidade de $|\psi(\vec{r})|^2$ é bastante significativa na região nuclear.

e) Potencial Ótico de Alcances Diferentes para as Partes Real e Imaginária

A figura IV.5 mostra o diagrama de contorno da densidade de probabilidade para núcleons de 80 MeV espalhados pelo ^{40}Ca, simulando o potencial nuclear por um potencial ótico poço quadrado com alcances diferentes para as partes real e imaginária.

Considerando uma variação linear de aproximadamente 1 fm no intervalo de energia de 20 MeV a 180 MeV para o alcance da parte imaginária(39) do potencial ótico definimos o potencial $U(r) = V(r) + i\, W(r)$ como

$$V(r) = \begin{cases} -30.46 \text{ MeV} & r < 4.54 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.54 \text{ fm} \end{cases}$$

e

$$W(r) = \begin{cases} -11.41 \text{ MeV} & r < 4.94 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.94 \text{ fm} \end{cases}$$

Para $\theta = 0^{\circ}$, a densidade de probabilidade diminui com o aumento do raio até $r = 2.0$ fm, $|\psi(r = 2.0,\ \theta = 0^{\circ})|^2 \cong 0.19$, pas sando a aumentar com o raio até $r = 2.8$ fm $|\psi(r = 2.8,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong$ $\cong 0.42$. A partir deste ponto $|\psi(\vec{r})|^2$ diminui com o aumento do raio até $r = 3.6$ fm ($|\psi(r = 3.6,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 0.11$) e depois passa a aumentar rapidamente com o raio até atingir seu valor máximo $|\psi(r = 7.6,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 3.21$, a partir do qual diminui lentamente. Em $r = 4.54$ fm, para $\theta = 0^{o}$, tem-se $|\psi(r = 4.54,\ \theta = 0^{o})|^2 \cong 0.97$.

Quanto à variação angular de $|\psi(\vec{r})|^2$ existe muita semelhança com o caso análogo de potencial tipo poço quadrado de igual alcance para as partes real e imaginária. Para $\theta = 180^{o}$ o valor de $|\psi(\vec{r})|^2$ aumenta com o aumento do raio, tendendo para a unidade quando o raio se aproxima do raio da parte imaginária do potencial (raio maior).

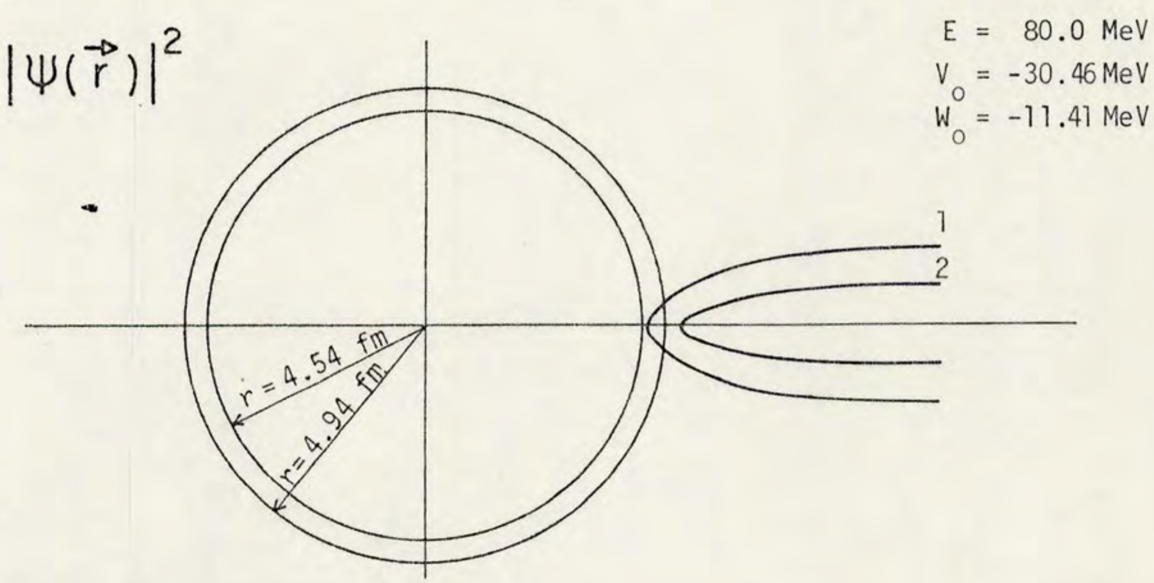

Figura IV.5 - Diagrama de contorno de $|\psi(\vec{r})|^2$ para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial ótico tipo poço quadrado $U(r) = V(r) + i\ W(r)$ com

$$V(r) = \begin{cases} -30.46 \text{ MeV} & r < 4.54 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.54 \text{ fm} \end{cases} \quad \text{e} \quad W(r) = \begin{cases} -11.41 \text{ MeV} & r < 4.94 \text{ fm} \\ 0 & r > 4.94 \text{ fm} \end{cases}$$

Comparando estes resultados com os obtidos para o potencial tipo poço quadrado de igual alcance para as partes real e imaginária, observa-se que o foco desloca-se para a direita (afastando-se do núcleo) e torna-se menos intenso.

Estas considerações sobre a intensidade e a localização do efeito de focagem para as energias consideradas neste trabalho ficarão mais claras no Capítulo V onde é feita uma comparação com resultados obtidos por aproximação W.K.B. na região nuclear.

Para as energias mais baixas, razões entre densidades de probabilidade obtidas por expansão em ondas parciais e por aproximação W.K.B. diferem significativamente da unidade na região da superfície nuclear para ângulos menores do que 90° e principalmente para $\theta = 0^{\circ}$.

V - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS COM OS OBTIDOS POR APROXIMAÇÃO W.K.B.

O estudo do espalhamento de partículas de energia média por núcleos tem sido frequentemente realizado recorrendo-se à aproximação semi-clássica, conforme mencionamos nos capítulos anteriores. A aproximação W.K.B. fornece bons resultados quando o potencial que simula a interação projétil-núcleo varia lentamente em uma distância da ordem de um comprimento de onda, assegurando que o momentum do projétil seja aproximadamente constante num intervalo que compreende muitos comprimentos de onda. Para problemas de espalhamento quando as energias incidentes são muito maiores do que a profundidade do poço de potencial a aproximação W.K.B. tem sido usada com sucesso.

Para projéteis de energias altas o uso da aproximação semi-clássica é sumamente conveniente para a obtenção da função de onda, enquanto que a expansão em ondas parciais torna-se menos atraente, pois um grande número de ondas contribuem à função de onda total.

Na aproximação W.K.B. funções de onda de projéteis espalhados elasticamente por potenciais óticos usualmente são escritas sob a forma de ondas planas distorcidas[6]

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}.\vec{r}}\, D(\vec{r}) \tag{V.1}$$

onde $D(\vec{r})$ é uma função que varia suavemente em comparação à onda plana e tende para a unidade assintoticamente.

Escrevendo $D(\vec{r})$ como

$$D(\vec{r}) = e^{iS(\vec{r})} \quad , \qquad (V.2)$$

usando a aproximação semi-clássica relativística e impondo a condição de contorno de que o potencial se anule no infinito obtém-se

$$S(\vec{r}) = - \frac{E}{\hbar^2 c^2 k} \int_{-\infty}^{\vec{r}} U(\vec{r}\,')\, ds \quad . \qquad (V.3)$$

onde $U(\vec{r}\,')$ é o potencial ótico que simula a interação projétil--núcleo e a integração é tomada sobre a trajetória clássica da partícula incidente.

Comparações entre ondas distorcidas determinadas por aproximação W.K.B. e por expansão em ondas parciais para núcleons de diversas energias incidentes(49,50) têm indicado que às energias mais baixas (energias até aproximadamente 100 MeV) a validade do uso da aproximação semi-clássica na obtenção de ondas distorcidas é questionável. Para energias acima de 150 MeV, a literatura em geral tem mostrado que as amplitudes de transição são bem reproduzidas com a aproximação W.K.B.

A aproximação semi-clássica tem sido também usada na teoria de difração de reações nucleares(29) na determinação dos deslocamentos de fase da função de onda. Escrevendo a função de onda distorcida como

$$\chi_\alpha^{(+)}(\vec{k}_\alpha, \vec{r}) = e^{i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r}} + \chi_{esp}(\vec{k}_\alpha, \vec{r}) \qquad (V.4)$$

e, considerando trajetórias retilíneas na direção $\vec{k}_\alpha$ e uma su perfície cilíndrica cujo eixo é paralelo a $\vec{k}_\alpha$, tem-se

$$\chi_{esp}(\vec{k}_\alpha, \vec{r}) = e^{i(\vec{k}_\alpha . \vec{r})} \left\{ e^{i2\delta_\alpha(\vec{b})} - 1 \right\} \qquad (V.5)$$

onde $\vec{b}$ é o vetor cujas componentes em coordenadas plano-polares são (b, ϕ), b sendo o parâmetro de impacto da trajetória clássica.

Obtém-se para os deslocamentos de fase $\delta_\alpha(\vec{b})$ a expressão

$$\delta_\alpha(\vec{b}) = - \frac{E_\alpha}{2\hbar^2 c^2 k_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} U_\alpha(\vec{b} + \hat{k}_\alpha z)\, dz \qquad (V.6)$$

Para potenciais centrais é possível associar $\delta_\alpha(\vec{b})$ com δ_ℓ, através da relação clássica $\ell = kb$.

Os resultados obtidos para a função de onda (V.1) com aproximação (V.3) não evidenciam o efeito de focagem observado na função de onda exata obtida por expansão em ondas parciais; no modelo de núcleo absorvente ("black-nucleus") o método W.K.B. parece satisfatório para determinar os coeficientes de reflexão[29,47] (ver Apêndice A) de funções de onda expandidas em ondas parciais.

A fim de realizar um estudo comparativo das diferenças entre funções de onda determinadas por expansão em ondas parciais e por aproximação W.K.B., determinamos densidades de probabilidades de núcleons de energia no intervalo de 80 MeV a 320 MeV, também por aproximação semiclássica.

As densidades de probabilidade de posição determinadas por aproximação semi-clássica, para as energias incidentes da ordem de 100 MeV dão resultados da ordem de 10^{-1} na região da superfície nuclear para ângulos de espalhamento aproximadamente no intervalo de 0° a 30°; $|\psi(\vec{r})|^2$ tende a 1 quando r se aproxima do raio nuclear para $90^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$.

O gráfico das razões entre as densidades de probabilidade de posição obtidas expandindo as funções de onda em ondas parciais e usando ondas planas distorcidas (V.1) cujo fator de distorção é determinado através da aproximação W.K.B. (equação (V.3)) permite uma fácil visualização das regiões nucleares em que há discrepâncias significativas e onde a mencionada aproximação semi-clássica não é satisfatória.

As figuras V.1 a V.5 apresentam as razões entre a densidade de probabilidade obtida pelo método de ondas parciais e a obtida por aproximação W.K.B., para núcleons de 80, 120, 160, 215 e 320 MeV espalhados por potenciais óticos complexos poço quadrado de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca (ver tabela II.4). Nos gráficos, os números entre parênteses correspondem ao valor da densidade de probabilidade obtido expandindo a função de onda em ondas parciais e têm por finalidade chamar a atenção para o fato de as grandes razões $|\psi(\vec{r})|^2/|\psi(\vec{r})|^2_{W.K.B.}$ obtidas naqueles pontos serem causadas principalmente pelos pequenos valores de $|\psi(\vec{r})|^2_{W.K.B.}$ e não por possíveis valores excessivos de $|\psi(\vec{r})|^2$.

Às energias mais baixas (até aproximadamente 120 MeV) as discrepâncias na determinação das funções de onda na região do núcleo são bastante importantes para ângulos até 90°, tornando a aproximação W.K.B. pouco recomendável.

A energias entre 120 e 200 MeV o resultado obtido por aproximação W.K.B. difere em algumas regiões angulares em torno da superfície nuclear ainda significativamente do resultado obtido por ondas parciais, mas a aproximação semi-clássica fornece bons resultados para as restantes regiões de interesse.

Para energias acima de 200 MeV os resultados da aproximação W.K.B. se aproximam bastante dos valores corretos, exceto por pequenas e inexpressivas zonas na região de interesse.

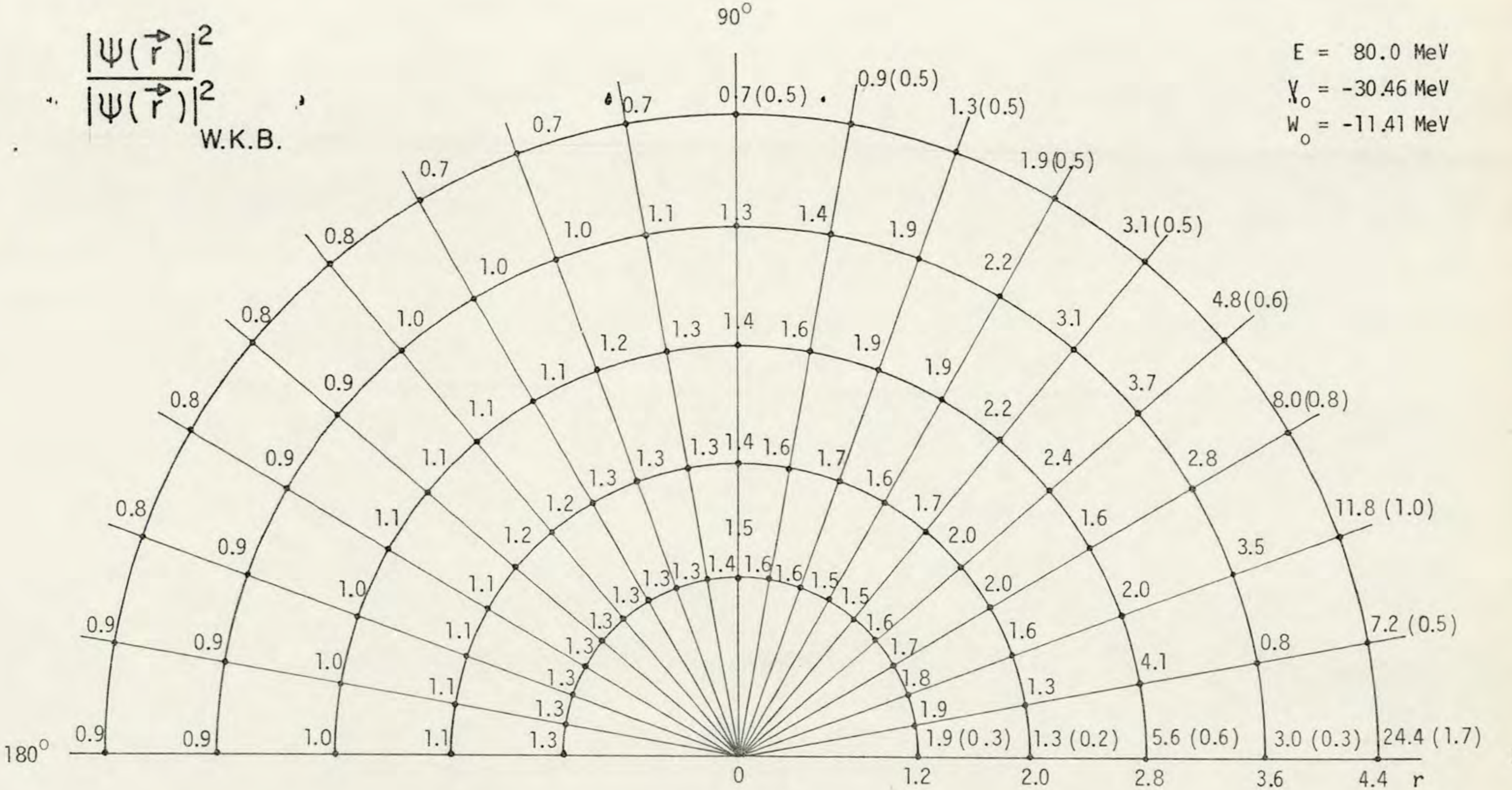

Figura V.1 - Razão entre $|\psi(\vec{r})|^2$ obtida pelo método de ondas parciais e $|\psi(\vec{r})|^2_{W.K.B.}$ obtida usando a aproximação W.K.B. para núcleons de 80 MeV espalhados por um potencial ótico poço quadrado de profundidade (-30.46 -i 11.41) MeV e de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca (R = 4.54 fm). Entre parênteses são apresentados valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ (em fm^{-3}) para alguns pontos da região.

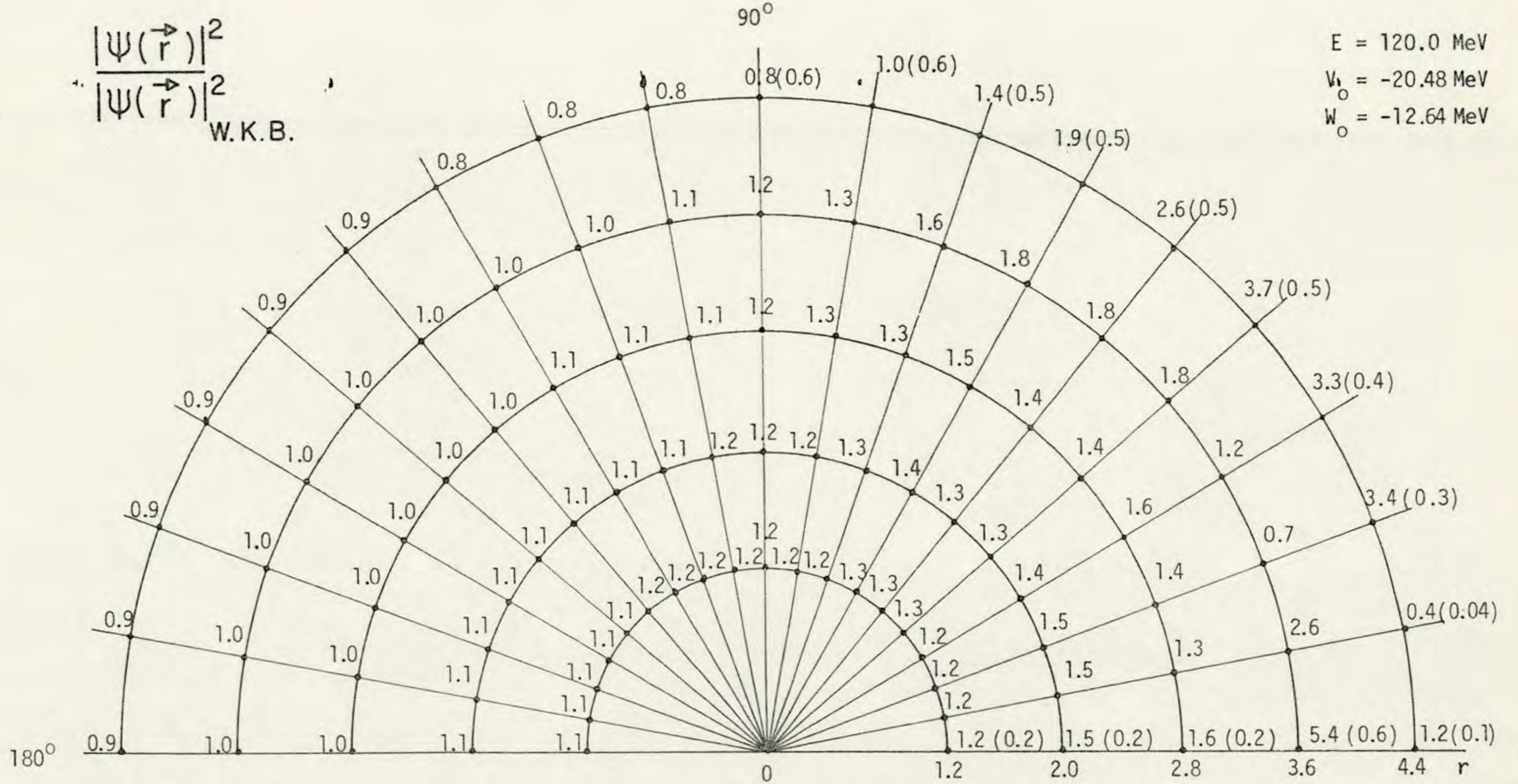

Figura V.2 - Razão entre $|\psi(\vec{r})|^2$ obtida pelo método de ondas parciais e $|\psi(\vec{r})|^2_{W.K.B.}$ obtida usando a aproximação W.K.B. para núcleons de 120 MeV espalhados por um potencial ótico poço quadrado de profundidade (-20.48 -i 12.64) MeV e de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca (R = 4.54 fm). Entre parênteses são apresentados valores de $|\psi(r)|^2$ (em fm^{-3}) para alguns pontos da região.

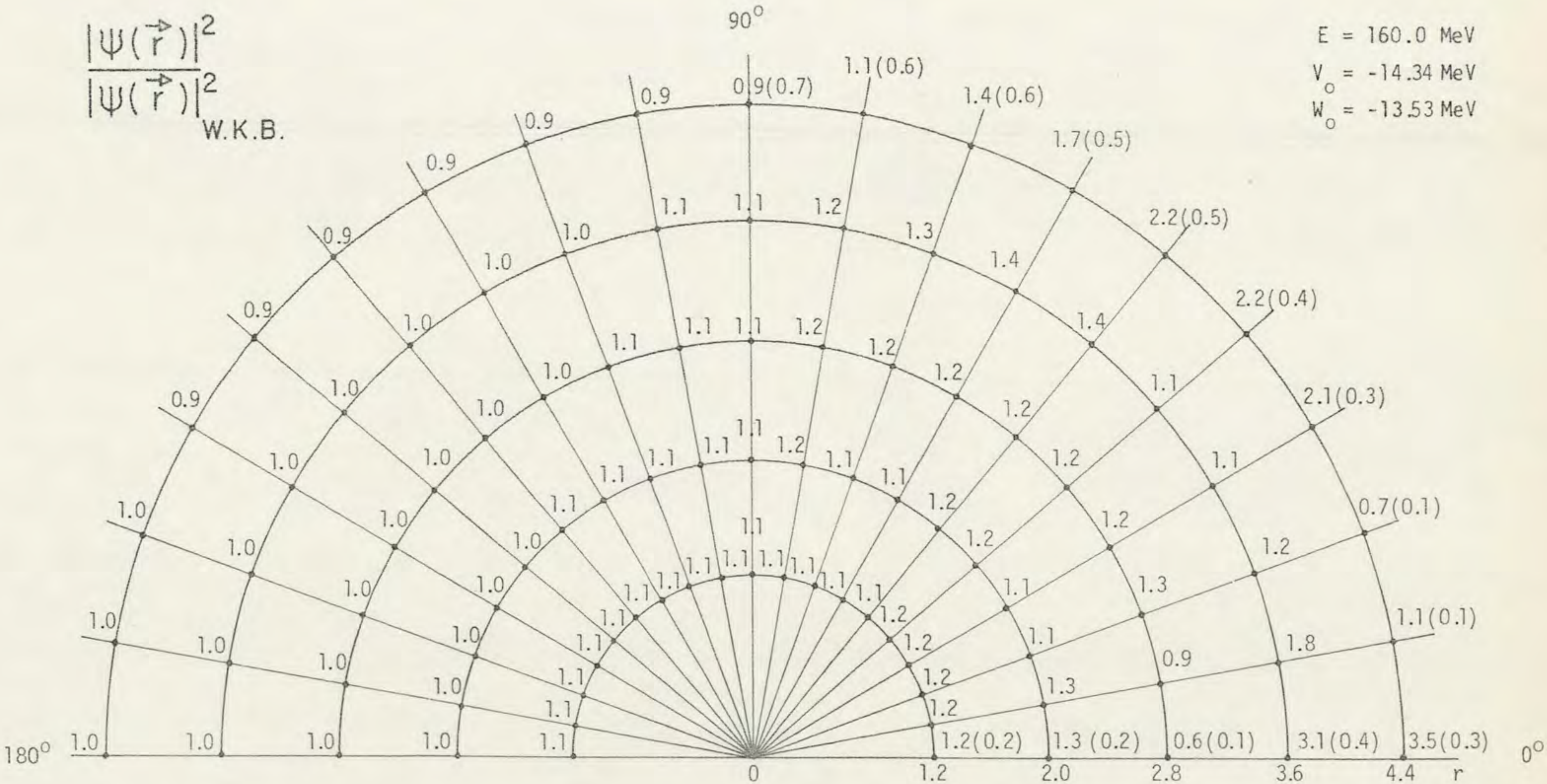

Figura V.3 - Razão entre $|\psi(\vec{r})|^2$ obtida pelo método de ondas parciais e $|\psi(\vec{r})|^2_{W.K.B.}$ obtida usando a aproximação W.K.B. para núcleons de 160 MeV espalhados por um potencial ótico poço quadrado de profundidade (-14.34 -i 13.53) MeV e de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca (R = 4.54 fm). Entre parênteses são apresentados valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ (em fm^{-3}) para alguns pontos da região.

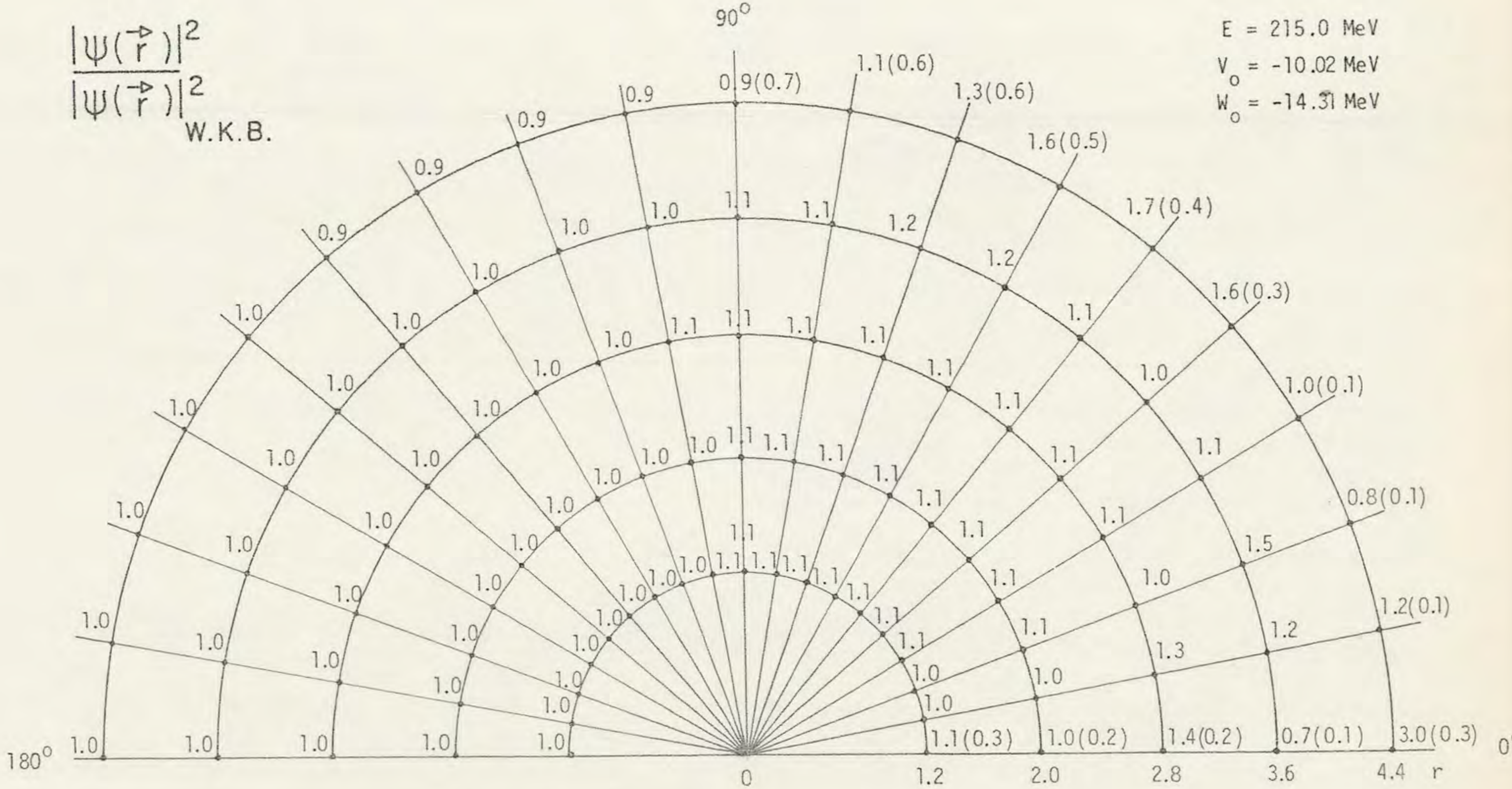

Figura V.4 - Razão entre $|\psi(\vec{r})|^2$ obtida pelo método de ondas parciais e $|\psi(\vec{r})|^2_{W.K.B.}$ obtida usando a aproximação W.K.B. para núcleons de 215 MeV espalhados por um potencial ótico poço quadrado de profundidade (-10.02 -i 14.31) MeV e de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca (R = 4.54 fm). Entre parênteses são apresentados valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ (em fm^{-3}) para alguns pontos da região.

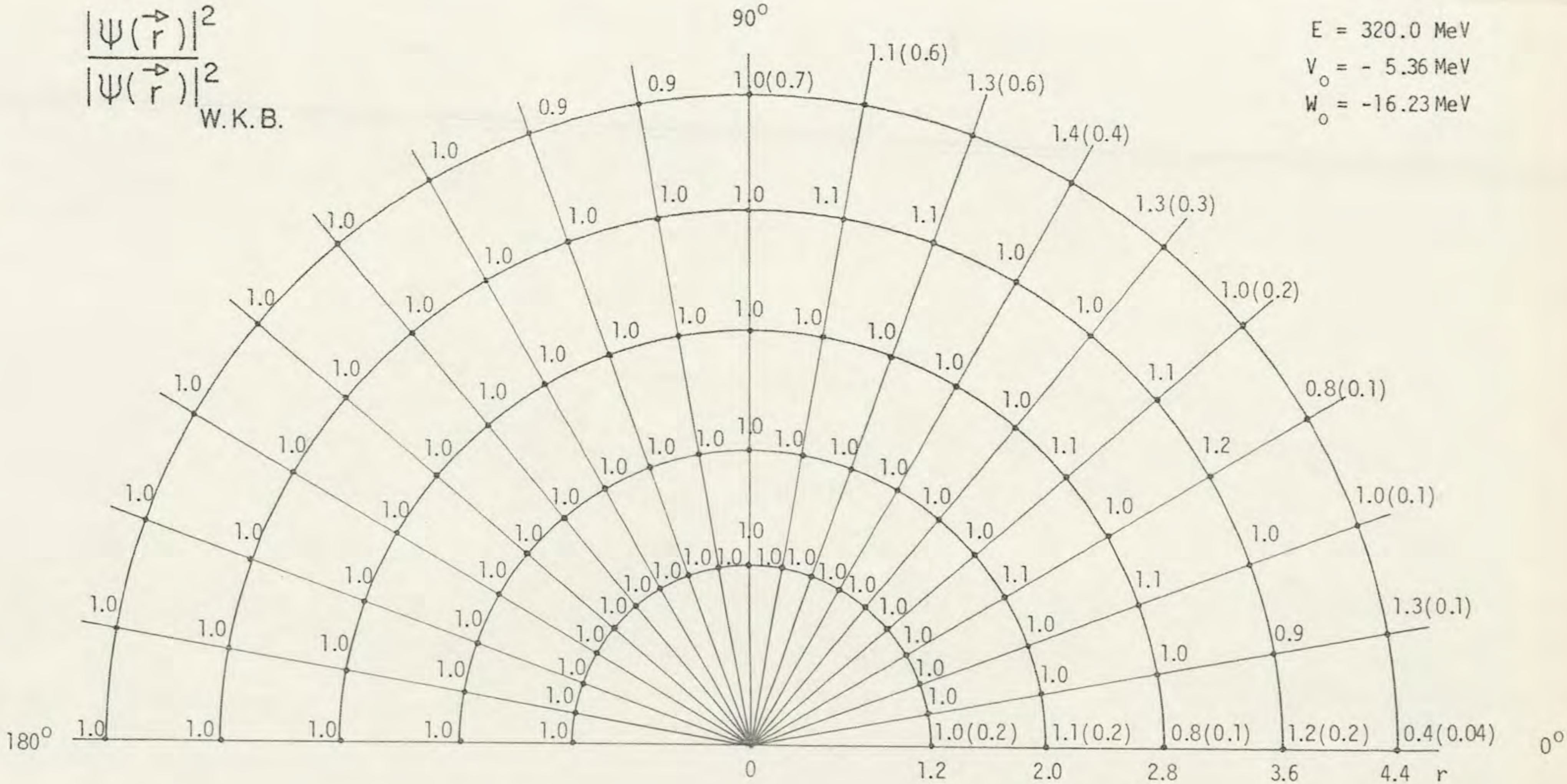

Figura V.5 - Razão entre $|\psi(\vec{r})|^2$ obtida pelo método de ondas parciais e $|\psi(\vec{r})|^2_{W.K.B.}$ obtida usando a aproximação W.K.B. para núcleons de 320 MeV espalhados por um potencial ótico poço quadrado de profundidade (-5.36 -i 16.23) MeV e de alcance igual ao raio do núcleo de ^{40}Ca (R = 4.54 fm). Entre parênteses são apresentados valores de $|\psi(\vec{r})|^2$ (em fm^{-3}) para alguns pontos da região.

VI - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Para o estudo de reações nucleares é, em geral, fundamental a determinação das regiões do núcleo em que predominantemente ocorrem as interações. Esta informação está vinculada ao conhecimento da função de onda, no núcleo, das partículas envolvidas e se constitui na motivação deste trabalho onde se apresenta um estudo do comportamento da função de onda de projéteis de energia média espalhados por núcleos, na região nuclear. Para tanto, usando núcleons como projéteis protótipos, adotou-se o modelo de potencial ótico, simulando-se a interação responsável pelo espalhamento elástico do projétil por um potencial ótico complexo.

Foram usados potenciais óticos centrais de formas e profundidades diversas, e adotou-se um método de resolução da equação de Lippmann-Schwinger que aproxima o potencial por uma soma de potenciais seccionalmente constantes. Uma das vantagens deste método é a de permitir expressar de forma analítica as soluções em questão. Computacionalmente o método parece também ser mais favorável do que a integração numérica usual[30]. Teve-se o cuidado de evitar efeitos espúrios eventualmente decorrentes das descontinuidades dos potenciais aproximados adotados, escolhendo intervalos adequados para os trechos de potencial constante.

Foram estudados, separadamente, os efeitos das partes real e imaginária do potencial ótico sobre a função de onda dos projéteis. A parte real do potencial ótico provoca um forte efeito de focagem na função de onda; na região angular, esta foca gem ocorre em torno do ângulo de espalhamento $\theta = 0^{o}$, enquanto a posição em relação ao centro do núcleo da região de focagem varia, para uma mesma forma de potencial, com a profundidade do mesmo. Com o aumento da profundidade do potencial real, mantendo a energia incidente constante, (e, com a diminuição da energia incidente, mantendo a profundidade do potencial real constante,) a região de focagem se aproxima do centro do núcleo e a intensidade do efeito aumenta.

A parte imaginária do potencial ótico ocasiona uma atenuação da distribuição de probabilidade de posição. Esta atenuação, para energia fixa do projétil, aumenta com a profundidade do potencial imaginário e é, em muitas situações realísticas, mais pronunciada na região em que ocorre focagem para o potencial real. Para uma forma fixa de potencial a distância ao centro do núcleo da região de atenuação máxima é, contudo, aproximadamente independente da profundidade do potencial, na região de variação de interesse. Com o aumento da energia incidente, para uma profundidade constante do potencial imaginário, a atenuação da função de onda diminui e a região de atenuação máxima se desloca para a direita.

Para potenciais óticos complexos que simulam a interação do projétil com o meio nuclear, o efeito de focagem na função de onda provocado pela parte real do potencial ótico é bastante diminuído pela presença da parte imaginária.

Na região de energias médias considerada, (núcleons de energia até 320 MeV) potenciais cujos parâmetros reproduzem os dados experimentais de espalhamento elástico originam, para as energias mais baixas (até cerca de 120 MeV), funções de onda que, na região em que o potencial atua, mais especificamente na região do núcleo, revelam fortemente a presença do efeito de focagem. Para as energias mais altas (acima de 200 MeV) o efeito de focagem desaparece na região do núcleo.

Com a diminuição da energia incidente, a profundidade da parte real do potencial ótico aumenta, resultando uma grande redução da razão $T/|V|$ (cujo numerador decresce e cujo denominador cresce), responsável pela magnitude do efeito de focagem. Outrossim, a parte imaginária do potencial diminui em módulo com o decréscimo da energia incidente e a razão $T/|W|$ também, embora de forma menos significativa, o que se reflete em atenuações da função de onda da mesma ordem de grandeza, na região do núcleo.

Na análise dos efeitos do potencial ótico sobre a função de onda, foram considerados também potenciais óticos de formas diversas. No que tange à localização e à ordem de grandeza da intensidade da focagem os resultados obtidos, contudo, se revelaram pouco sensíveis às variações de forma do potencial consideradas. Como tais potenciais óticos apresentam contribuição volumétrica da mesma ordem de grandeza, este resultado parece indicar que o efeito de focagem não depende significativamente da forma do potencial nuclear.

A análise feita revela que a existência de regiões de focagem em espalhamento nuclear é predominantemente dependente da energia e da natureza da interação do projétil.

Encontram-se na literatura estudos sobre o efeito de focagem[22 a 24] em espalhamento de partículas por núcleos a energias não muito altas. Muitos dos resultados obtidos foram determinados recorrendo-se a integração numérica e expansão em ondas parciais para o estabelecimento das funções de onda do projétil. É usual, inclusive, nos trabalhos mais atuais que envolvem núcleons de energia da ordem de 50 MeV como projéteis, adotar funções de onda que incluam, através de fatores explícitos, o efeito de focagem. Para energias incidentes maiores, entretanto, despreza-se freqüentemente na literatura a existência de regiões de focagem.

Em reações quase-livres (p, pN), por exemplo, a aproximação semiclássica W.K.B. tem sido usada[1,52,53,13] para determinar as funções de onda distorcidas das partículas incidente e emergentes. Para energias do projétil de até aproximadamente 250 MeV, um dos núcleons do estado final emerge com energia inferior a 100 MeV e, nesse domínio de energia, o efeito de focagem na função de onda indica que o potencial ótico causa consideráveis variações no momentum de uma das partículas espalhadas. Se o uso da aproximação W.K.B. para algumas energias das partículas envolvidas numa reação quase-livre estiver comprometido, a aproximação de fatoração da seção de choque de correlação em um produto da seção de choque livre pela distribuição de momentum distorcida, muitas vezes utilizada, torna-se também questionável[54], uma vez que as condições exigidas para a sua aplicabilidade são praticamente as mesmas exigidas para a da aproximação semiclássica (momenta efetivos praticamente constantes na região em que o potencial atua). É possível que o efeito da imprecisão da função de onda de uma das partículas emergentes não seja muito importante[55] na integral de superposição de um processo quase-livre. Efetivamente, se as regiões de discrepâncias nos valores das distribuições de posição da partícula considera da (correta e W.K.B.) forem pequenas ou, se as intensidades dos demais componentes da reação forem baixas na região crítica, ou ainda, se as intensidades associadas à própria partícula forem inexpressivas, o método semiclássico ainda resultará adequado para a determinação da seção de choque do processo.

A determinação exata da solução da equação de espalhamento através de integração numérica, pode se tornar uma tarefa de proporções consideráveis. Por isto, torna-se conveniente recorrer a métodos de aproximação adequados, para obtenção destas funções de onda, quer pela simplicidade do suporte físico para a aproximação, quer pela rapidez de obtenção dos resultados.

Nossa análise corrobora resultados encontrados na literatura, quanto à adequação da aproximação W.K.B. para a obtenção da função de onda de espalhamento para núcleons de energia superior a 200 MeV, uma vez que tal aproximação reproduz corretamente os valores da distribuição de probabilidade.

Para energias até cerca de 200 MeV, uma comparação dos resultados por nós obtidos pelo método citado e de resultados obtidos por aproximação W.K.B. mostra que há discrepâncias significativas na função de onda em certas regiões do núcleo.

Assim, no estudo de reações quase-livres núcleon-núcleo, por exemplo, seria recomendável recorrer-se a processos de energias incidentes mais altas ($\sim$ 400 MeV), para os quais a análise dos resultados (para as três partículas envolvidas) através da aproximação W.K.B. é, sem sombra de dúvida, satisfatória.

Para aqueles valores de energia, em que a aproximação W.K.B. é parcialmente satisfatória, a expansão da função de onda em ondas parciais em que os deslocamentos de fase são deter minados através da aproximação semiclássica, poderá representar um melhoramento na determinação da função de onda distorcida. Aproximações desta natureza têm sido usadas[29] em um modelo de núcleo absorvente. Para energias entre 100 e 200 MeV seria conveniente investigar quais os efeitos das imprecisões na determinação da função de onda das partículas envolvidas, sobre o processo geral. De qualquer modo, para processos nucleares inelásticos em geral, o conhecimento mais detalhado[27] da função de onda das partículas envolvidas, na região do núcleo, torna-se importante.

A análise ora apresentada pode ser estendida a outros projéteis. No caso de píons, por exemplo, para energias incidentes menores do que 150 MeV espera-se que os picos de focagem, quando existam, estejam localizados mais próximos ao centro do núcleo, visto que a parte real do potencial ótico é maior do que para núcleons. Por outro lado, a parte imaginária do potencial ótico também é mais intensa do que para núcleons, o que sugere que a atenuação no efeito de focagem pode ocorrer a energias mais baixas.

Uma observação final sobre o método apresentado neste trabalho para a obtenção das soluções da equação de espalhamento é que, o fato de obter-se expressões analíticas para as funções de onda das partículas permite a aplicação deste procedimento a problemas mais complexos que envolvam, por exemplo, em uma interação direta projétil-núcleon, termos dependentes de velocidade.

APÊNDICE A

MÉTODO DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A solução $\psi(\vec{r})$ da equação de Schrödinger não relativística independente do tempo para uma partícula de massa m e momentum corrigido para uma cinemática relativística apropriada $\hbar\vec{k}_o$ incidindo na direção positiva de z, ou seja, ao longo do eixo polar $\theta = 0^o$ e espalhada por um potencial esfericamente simétrico

$$\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + U(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r}) \tag{A.1}$$

independe do ângulo ϕ e pode ser escrita como uma soma de produtos de funções radiais e polinômios de Legendre na forma

$$\psi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}(2\ell+1)\,R_{\ell}(r)\,P_{\ell}(\cos\theta) \ . \tag{A.2}$$

$P_{\ell}(\cos\theta)$ é o polinômio de Legendre de ordem ℓ

$$P_{\ell}(\cos\theta) = \frac{1}{2^{\ell}.\ell!}\,\frac{d^{\ell}}{d(\cos\theta)^{\ell}}\,(\cos^2\theta - 1)^{\ell} \tag{A.3}$$

sujeito à relação de ortonormalidade

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell}(x)\,P_{\ell'}(x)\,dx = \frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell,\ell'} \tag{A.4}$$

e $R_{\ell}(r)$ obedece a equação radial

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-k^2(r)\right]R_\ell(r)=0 \tag{A.5}$$

com $k^2(r)$ corrigido relativisticamente,

$$k^2(r) = (T^2 + 2Tmc^2 - 2(T + mc^2)U(r))/\hbar^2c^2 \quad . \tag{A.6}$$

(O termo quadrático em U(r) é desprezado.)

Para potenciais complexos, $U(r) = V(r) + i\ W(r)$, as funções $R_\ell(r)$ são complexas e, escrevendo

$$R_\ell(r) = \text{Re}\ R_\ell(r) + i\ \text{Im}\ R_\ell(r) \tag{A.7}$$

e

$$k^2(r) = \text{Re}\ k^2(r) + i\ \text{Im}\ k^2(r) \tag{A.8}$$

obtém-se de (A.5) um sistema de equações acopladas

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\text{Re}\ k^2(r)\right]\text{Re}\ R_\ell(r)+\text{Im}\ k^2(r).\text{Im}\ R_\ell(r)=0$$

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\text{Re}\ k^2(r)\right]\text{Im}\ R_\ell(r)-\text{Im}\ k^2(r).\text{Re}\ R_\ell(r)=0$$

Sendo a interação nuclear simulada por um potencial de alcance finito $\mathcal{R}$ e escolhendo a solução emergente de (A.1), a parte radial da solução para $r \geqslant \mathcal{R}$ pode ser escrita como (coeficientes iguais das componentes assintóticas entrantes de R_ℓ e j_ℓ)

$$R_\ell(r) = \frac{1}{1 - i\,tg\delta_\ell}\left[j_\ell(k_o r) - tg\delta_\ell\ y_\ell(k_o r)\right] \tag{A.10}$$

sendo

$$k_o^2 = (T^2 + 2Tmc^2)/\hbar^2c^2 \quad , \qquad (A.11)$$

δ_ℓ os deslocamentos de fase complexos, e $j_\ell(k_or)$ e $y_\ell(k_or)$ funções de Bessel esféricas de argumento real

$$j_\ell(z) = \frac{z^\ell}{(2\ell+1)!!} \cdot \left\{1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(2\ell+3)} + \frac{(\frac{1}{2}z^2)^2}{2!(2\ell+3)(2\ell+5)} - \dots\right\} \qquad (A.12)$$

e

$$y_\ell(z) = \frac{(2\ell-1)!!}{z^{\ell+1}} \left\{1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(1-2\ell)} + \frac{(\frac{1}{2}z^2)^2}{2!(1-2\ell)(3-2\ell)} - \dots\right\} \qquad (A.13)$$

com $\ell = 0, 1, 2, \dots$

Os deslocamentos de fase complexos δ_ℓ (e os coeficientes de reflexão $\eta_\ell = e^{2i\delta_\ell}$) são determinados pela condição de continuidade em $r = \mathcal{R}$ das soluções para a região interna ($o \leq r \leq \mathcal{R}$) e para a região externa ($r \geq \mathcal{R}$).

Para um potencial central arbitrário a solução pode ser obtida numericamente. Algumas formas específicas de potencial permitem escrever expressões analíticas para a solução. Aproximando os potenciais de formas arbitrárias por potenciais seccionalmente constantes[30], de larguras convenientes, determinamos as soluções da equação radial (A.5).

A largura do primeiro trecho de cada potencial foi escolhida de modo a reproduzir o platô interno usualmente existente nos potenciais realísticos. Aos trechos restantes dos potenciais foram atribuídas larguras iguais. Em princípio, larguras diferentes poderiam ser usadas na tentativa de minimizar tanto quanto possível os efeitos causados pelas descontinuidades dos potenciais de cada região. Entretanto, como os resultados obtidos usando potenciais de larguras 0.05, 0.1 e 0.2 fm não diferem significativamente, adotamos potenciais seccionalmente constantes de 0.1 fm de largura. A figura A.1 mostra um potencial de forma arbitrária substituído por uma soma de potenciais seccionalmente constantes tais que

$$U(r) \cong \sum_{n=1}^{N} U_n \tag{A.14}$$

onde

$$U_n = \frac{1}{2}\left[U(r_n) + U(r_{n-1})\right] \tag{A.15}$$

com $r_o = 0$ e $r_n = n\mathcal{R}/N$, sendo N o número total de regiões em que se subdivide o espaço em que atua o potencial arbitrário.

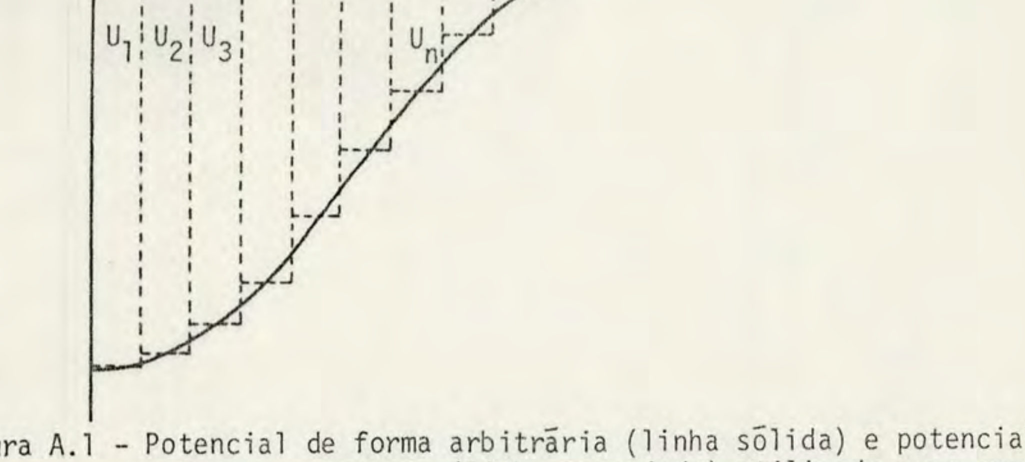

Figura A.1 - Potencial de forma arbitrária (linha sólida) e potencial seccionalmente constante (linha tracejada) utilizado como aproximação para obter soluções analíticas para a equação de espalhamento.

A solução para o primeiro trecho do potencial usado é da forma

$$R_{o\ell}(r) = B_{o\ell} \cdot j_\ell(kr) \qquad \text{(k complexo)} \tag{A.16}$$

os demais trechos apresentando soluções do tipo

$$R_{n\ell}(r) = \frac{B_{n\ell}}{1 - i\,tg\delta_{n,\ell}} \left[j_\ell(k_n r) - tg\delta_{n,\ell}\; y_\ell(k_n r) \right] \qquad \begin{array}{c}(k_n \text{ complexo}) \\ 1 \leq n \leq N-1\end{array} \tag{A.17}$$

sendo

$$k_n^2 = (T^2 + 2Tmc^2 - 2(T + mc^2)U_{n+1})/\hbar^2 c^2 \tag{A.18}$$

e $B_{n\ell}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, constantes complexas a serem determinadas pela condição de continuidade.

Para o caso particular de poço quadrado com alcances das partes real e imaginária iguais temos

$$R_\ell(r) = B_\ell\; j_\ell(kr) \qquad \text{(k complexo)} \qquad r \leq \mathcal{R} \tag{A.19}$$

$$R_\ell(r) = \frac{1}{1 - i\,tg\delta_\ell} \left[j_\ell(k_o r) - tg\delta_\ell\; y_\ell(k_o r) \right] \qquad r \geq \mathcal{R} \tag{A.10}$$

onde, sendo $j'_\ell(z) = \frac{d}{dz}\, j_\ell(z)$,

$$tg\delta_\ell = \frac{k_o\mathcal{R}\, j_\ell(k\mathcal{R})\, j'_\ell(k_o\mathcal{R}) - k\mathcal{R}\, j'_\ell(k\mathcal{R})\, j_\ell(k_o\mathcal{R})}{k_o\mathcal{R}\, j_\ell(k\mathcal{R})\, y'_\ell(k_o\mathcal{R}) - k\mathcal{R}\, j'_\ell(k\mathcal{R})\, y_\ell(k_o\mathcal{R})} \tag{A.20}$$

$$B_\ell = \frac{1}{1 - i\,tg\delta_\ell}\; \frac{j_\ell(k_o\mathcal{R}) - tg\delta_\ell\; y_\ell(k_o\mathcal{R})}{j_\ell(k\mathcal{R})} \tag{A.21}$$

Para potenciais de formas contínuas arbitrárias com partes real e imaginária proporcionais tem-se as expressões (A.16) e (A.17) para a região $0 \leqslant r \leqslant \mathcal{R}$ e (A.10) para $r \geqslant \mathcal{R}$ onde

$$tg\delta_{n,\ell} = \frac{H_{n-1,\ell}\, j_\ell(k_n r_n) - k_n r_n j'_\ell(k_n r_n)}{H_{n-1,\ell}\, y_\ell(k_n r_n) - k_n r_n y'_\ell(k_n r_n)} \qquad 1 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{A.22}$$

$$tg\delta_\ell = \frac{H_{N-1,\ell}\, j_\ell(k_o \mathcal{R}) - k_o \mathcal{R} j'_\ell(k_o \mathcal{R})}{H_{N-1,\ell}\, y_\ell(k_o \mathcal{R}) - k_o \mathcal{R} y'_\ell(k_o \mathcal{R})} \tag{A.23}$$

sendo

$$H_{o,\ell} = \frac{k r_1 \; j'_\ell(k r_1)}{j_\ell(k r_1)} \tag{A.24}$$

e

$$H_{n,\ell} = \frac{k_n r_{n+1} \left[j'_\ell(k_n r_{n+1}) - tg\delta_{n,\ell}\; y'_\ell(k_n r_{n+1}) \right]}{j_\ell(k_n r_{n+1}) - tg\delta_{n,\ell}\; y_\ell(k_n r_{n+1})} \qquad 1 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{A.25}$$

Para as constantes $B_{n\ell}$ obtém-se

$$B_{n\ell} = \frac{1}{1 - i\, tg\delta_\ell}\; \frac{\left[j_\ell(k_o \mathcal{R}) - tg\delta_\ell\, y_\ell(k_o \mathcal{R}) \right]}{\left[j_\ell(k_{N-1} \mathcal{R}) - tg\delta_{N-1,\ell}\, y_\ell(k_{N-1} \mathcal{R}) \right]} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left[j_\ell(k_{N-1} r_{N-1}) - tg\delta_{N-1,\ell}\, y_\ell(k_{N-1} r_{N-1}) \right]}{\left[j_\ell(k_{N-2} r_{N-1}) - tg\delta_{N-2,\ell}\, y_\ell(k_{N-2} r_{N-1}) \right]} \cdots$$

$$\cdots \frac{\left[j_\ell(k_{n+1} r_{n+1}) - tg\delta_{n+1,\ell}\, y_\ell(k_{n+1} r_{n+1}) \right]}{\left[j_\ell(k_n r_{n+1}) - tg\delta_{n,\ell}\, y_\ell(k_n r_{n+1}) \right]} \qquad 1 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{A.26}$$

e

$$B_{o\ell} = B_{1\ell} \frac{\left[j_\ell(k_1 r_1) - tg\delta_{1,\ell} y_\ell(k_1 r_1)\right]}{j_\ell(k r_1)} \qquad (A.27)$$

A expressão (A.26) pode ser escrita na forma

$$B_{n,\ell} = B_{n+1,\ell} \frac{\left[j_\ell(k_{n+1} r_{n+1}) - tg\delta_{n+1,\ell} y_\ell(k_{n+1} r_{n+1})\right]}{\left[j_\ell(k_n r_{n+1}) - tg\delta_{n,\ell} y_\ell(k_n r_{n+1})\right]} \quad 1 \leq n \leq N-2 \qquad (A.28)$$

com

$$B_{N-1,\ell} = \frac{1}{1 - i tg\delta_\ell} \frac{\left[j_\ell(k_o \mathcal{R}) - tg\delta_\ell y_\ell(k_o \mathcal{R})\right]}{\left[j_\ell(k_{N-1} \mathcal{R}) - tg\delta_{N-1,\ell} y_\ell(k_{N-1} \mathcal{R})\right]} \qquad (A.29)$$

Para potenciais em que os alcances das partes real e imaginária são diferentes, $\mathcal{R}$ assumirá o valor do maior alcance, e o procedimento é análogo ao acima descrito.

Para calcular as soluções geradas analiticamente pelas expressões anteriores foi elaborado um programa para computador, em linguagem ALGOL, o qual foi processado no computador B6700 do Centro de Processamento de Dados da UFRGS.

O número máximo de ondas utilizado para determinar as funções de onda de núcleons de energia no intervalo de 80 MeV a 320 MeV espalhados por potenciais óticos de formas diversas, foi determinado calculando a densidade de probabilidade de núcleons de 320 MeV variando o número de ondas de 5 em 5. Como na região considerada ($0 \leq r \leq 12.8$ fm) os resultados obtidos usando 30 ou 35 ondas não diferiam, fixou-se o número máximo de ondas igual a 30. A onda plana foi descontada e reincluída para acelerar a convergência.

O tempo de processamento necessário para a determinação da densidade de probabilidade no intervalo $0 \leq r \leq 12.8$ fm e $0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$ depende muito do tipo de potencial utilizado. Enquanto o poço quadrado (alcances iguais) para o ^{16}O consome cerca de 20 segundos, o potencial proporcional à densidade dispende cerca de 8 vezes mais em tempo, para o ^{40}Ca.

A obtenção numérica das funções de Bessel de primeira e segunda espécie de argumentos real e complexo, que ocorrem nas expressões anteriores, é discutida no Apêndice B.

APÊNDICE B

FUNÇÕES DE BESSEL ESFÉRICAS DE ARGUMENTOS REAL E COMPLEXO

O método usado para resolver a equação de espalhamento de núcleons por potenciais centrais arbitrários aproximados por potenciais seccionalmente constantes (ver Apêndice A) utiliza as funções de Bessel esféricas de argumentos real e complexo, cuja obtenção numérica pode apresentar problemas de convergência.

Para determinação numérica das funções de Bessel esféricas de primeira espécie $j_\ell(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\, J_{\ell+1/2}(z)$, para z real e ℓ inteiro positivo, o uso de relações de recorrência tais como[31]:

a) $$j_{\ell+1}(z) = \frac{(2\ell+1)}{z} j_\ell(z) - j_{\ell-1}(z) \quad , \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (B.1)$$

$$j_o(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} \quad , \qquad j_1(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}$$

ou

b) $$j_\ell(z) = f_\ell(z).\operatorname{sen} z + (-1)^{\ell+1} f_{-\ell-1}(z) \cos z \quad , \qquad (B.2)$$

$$f_o(z) = z^{-1} \quad , \qquad f_1(z) = z^{-2}$$

$$f_{\ell+1}(z) = \frac{(2\ell+1)}{z} f_\ell(z) - f_{\ell-1}(z) \quad , \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (B.3)$$

gera um acúmulo de erros, tanto maior quanto menor for o valor do argumento e maior o valor de ℓ, nas funções.

Utilizando um método numérico apresentado por J.C.P. Miller[56,31] elaboramos um programa para computador que calcula os valores das funções de Bessel esféricas de primeira espécie $j_\ell(z)$, para argumentos z reais e para o conjunto de valores inteiros positivos ℓ, desde zero até um certo valor n, e armazena esses valores em um arranjo.

Os programas de computação que calculam as funções de Bessel discutidas neste apêndice foram escritos em linguagem ALGOL e processados no computador B-6700 do Centro de Processamento de Dados da UFRGS.

A computação é feita utilizando uma função auxiliar $F_i(z)$ tal que, para algum valor M bastante maior do que o número n escolhido, impõe-se tentativamente $F_{M+1}(z) = 0.0$ e $F_M(z) = 1.0$. Usando a relação de recorrência das funções de Bessel esféricas $F_{i-1}(z) = \frac{2i+1}{z} F_i(z) - F_{i+1}(z)$ determina-se $F_{M-1}(z)$ e todas as demais $F_i(z)$ e obtém-se a seqüência $F_{M-1}(z)$, $F_{M-2}(z)$, ..., $F_1(z)$, $F_o(z)$. Se M for escolhido suficientemente grande ($\cong$ 3n) cada termo dessa seqüência depois de $F_n(z)$ é proporcional, para um certo número de algarismos significativos, ao correspondente termo da seqüência $j_n(z)$, $j_{n-1}(z)$, ..., $j_1(z)$, $j_o(z)$. O fator de proporcionalidade pode ser obtido comparando, por exemplo, $F_o(z)$ com $j_o(z)$. É conveniente testar se a relação de proporcionalidade se manteve para alguns valores de $F_i(z)$ e $j_i(z)$ com i pequeno, para assegurar que o valor de M escolhido é suficientemente grande, mas o menor possível para obter a precisão desejada. Multiplicando cada um dos termos da seqüência $F_n(z)$, $F_{n-1}(z)$, ..., $F_1(z)$, $F_o(z)$ pelo fator de proporcionalidade obtém-se uma nova seqüência $pF_n(z)$, $pF_{n-1}(z)$, ..., $pF_1(z)$, $pF_o(z)$ que corresponde, para o número de algarismos significativos escolhido, à seqüência $j_n(z)$, $j_{n-1}(z)$, ..., $j_1(z)$, $j_o(z)$.

Se a precisão obtida não for suficiente o processo é refeito escolhendo um valor maior para M.

Para obter os valores das funções de Bessel esféricas $j_\ell(z)$, por exemplo, para os argumentos reais $z = 0.1$, 0.2, ..., 20.0 e para $\ell = 0, 1, 2, \ldots, 30$, com 10 algarismos significativos, utilizamos uma função auxiliar tal que $F_{80}(z) = 0.0$ e $F_{79}(z) = 1.0$. O tempo de processamento para obter $j_\ell(z)$ para um dado valor de z e para $\ell = 0, 1, \ldots, 30$ é da ordem de 10^{-1} segundos.

Para argumento z complexo as funções $j_\ell(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\, J_{\ell+1/2}(z)$ foram obtidas das $J_{\ell+1/2}(z)$ geradas no programa apresentado por W. Gautschi[57]. Este programa calcula, para um dado número de algarismos significativos, as partes real e imaginária das $J_{\ell+1/2}(z)$ com $\ell = 0, 1, 2, \ldots, \ell_{máx}$, para qualquer valor de $z = x + iy$, excetuando-se os valores reais negativos. O método de computação é uma extensão complexa do método utilizado pelo mesmo autor num programa que calcula $J_{\ell+1/2}(z)$, com z real[57]. O método de computação das $J_{\ell+1/2}(z)$, com z real, é uma variante do método de J.C.P. Miller[58].

As funções de Bessel esféricas de segunda espécie $y_\ell(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\, Y_{\ell+1/2}(z)$ também chamadas funções de Neumann esféricas, para z real e complexo e ℓ inteiro positivo podem ser obtidas numericamente, sem problemas de convergência, usando a relação de recorrência (B.1), a qual é válida para as $j_\ell(z)$ e as $y_\ell(z)$ assim como para funções de Bessel esféricas de terceira espécie $h_\ell^{(1)}(z) = j_\ell(z) + iy_\ell(z)$ e $h_\ell^{(2)}(z) = j_\ell(z) - iy_\ell(z)$.

Assim, para z real, tem-se

$$y_{\ell+1}(z) = \frac{(2\ell+1)}{z} y_\ell(z) - y_{\ell-1}(z) \qquad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{B.4}$$

com

$$y_o(z) = -\frac{\cos z}{z} , \qquad y_1(z) = -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z} .$$

Para z complexo, as funções de Bessel $y_\ell(z)$ para ℓ inteiro e positivo, podem ser escritas na forma

$$y_\ell(z) = \operatorname{Re} y_\ell(z) + i \operatorname{Im} y_\ell(z) \tag{B.5}$$

Usando a relação de recorrência (B.4) e escrevendo $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ obtém-se

$$\operatorname{Re} y_{\ell+1}(z) = \frac{(2\ell+1)}{|z|^2} (\operatorname{Re} z . \operatorname{Re} y_\ell(z) + \operatorname{Im} z . \operatorname{Im} y_\ell(z)) - \operatorname{Re} y_{\ell-1}(z) \tag{B.6}$$

e

$$\operatorname{Im} y_{\ell+1}(z) = \frac{(2\ell+1)}{|z|^2} (\operatorname{Re} z . \operatorname{Im} y_\ell(z) - \operatorname{Im} z . \operatorname{Re} y_\ell(z)) - \operatorname{Im} y_{\ell-1}(z) . \tag{B.7}$$

Nestas expressões

$$\operatorname{Re} y_o(z) = -\frac{\operatorname{Re} z . \cos(\operatorname{Re} z) . \cosh(\operatorname{Im} z)}{|z|^2} + \frac{\operatorname{Im} z . \operatorname{sen}(\operatorname{Re} z) . \operatorname{senh}(\operatorname{Im} z)}{|z|^2} ,$$

$$\text{Im } y_o(z) = \frac{\text{Re } z.\text{sen}(\text{Re } z).\text{senh}(\text{Im } z)}{|z|^2} + \frac{\text{Im } z.\cos(\text{Re } z).\cosh(\text{Im } z)}{|z|^2} \quad ,$$

$$\text{Re } y_1(z) = - \frac{((\text{Re } z)^2 - (\text{Im } z)^2).\cos(\text{Re } z)\cosh(\text{Im } z)}{|z|^4} +$$

$$+ \frac{2 \text{ Re } z \text{ Im } z \text{ sen}(\text{Re } z)\text{senh}(\text{Im } z)}{|z|^4} -$$

$$- \frac{\text{Re } z.\text{sen}(\text{Re } z).\cosh(\text{Im } z)}{|z|^2} -$$

$$- \frac{\text{Im } z.\cos(\text{Re } z)\text{senh}(\text{Im } z)}{|z|^2} \quad ,$$

$$\text{Im } y_1(z) = \frac{((\text{Re } z)^2 - (\text{Im } z)^2).\text{sen}(\text{Re } z)\text{senh}(\text{Im } z)}{|z|^4} +$$

$$+ \frac{2 \text{ Re } z \text{ Im } z \cos(\text{Re } z)\cosh(\text{Im } z)}{|z|^4} -$$

$$- \frac{\text{Re } z \cos(\text{Re } z).\text{senh}(\text{Im } z)}{|z|^2} +$$

$$+ \frac{\text{Im } z \text{ sen}(\text{Re } z).\cosh(\text{Im } z)}{|z|^2} \quad .$$

Tendo obtido as funções $j_\ell(z)$ e $y_\ell(z)$ para z real e complexo torna-se possível determinar numericamente as soluções descritas no apêndice anterior.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. H.Tyrén, Th.A.J.Maris and P.Hillman, Nuovo Cimento 6 (1957) 1507.

Th.A.J.Maris, P.Hillman and H.Tyrén, Nucl. Phys. 7 (1958) 1.

Th.A.J.Maris, Nucl. Phys. 9 (1958/59) 577.

2. M.G.Mayer and J.H.D.Jensen, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, Wiley (1955).

3. J.R.Oppenheimer and M.Phillips, Phys. Rev. 48 (1935) 500.

S.T.Butler, Proc. Roy. Soc. A208 (1951) 559.

M.H.Macfarlane and J.B.French, Rev. Mod. Phys. 32 (1960) 567.

4. G.F.Chew and M.L.Goldberger, Phys. Rev. 77 (1950) 470.

J.Hadley and H.York, Phys. Rev. 80 (1950) 345.

W.Selove, Phys. Rev. 101 (1956) 231.

D.C.Palmer, D.R.Maxson and J.R.Bading, J. Phys. (London) G3 (1977) 1363.

5. M.Riou, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 375.

6. G.Jacob and Th.A.J.Maris, Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 121.

G.Jacob and Th.A.J.Maris, Rev. Mod. Phys. 45 (1973) 6.

7. Experiências (p, pN) têm sido realizadas pelos grupos de Berkeley, Uppsala, Harvard, Harwell, Chicago, Orsay, Liverpool, Virginia, Brookhaven e CERN.

8. G.Jacob and Th.A.J.Maris, Nucl. Phys. 31 (1962) 139 e 152.

9. Experiências (e, e'p) têm sido realizadas pelos grupos de Roma, Stanford, Orsay, Saclay, Kharkov e Tokyo.

10. L.C.Liu and P.Huguenin, Helv. Phys. Acta 46 (1973) 201.

J.Hüfner, H.J.Pirner and M.Thies, Phys. Lett. 59B (1975) 215.

V.E.Herscovitz, Th.A.J.Maris, P.M.Mors and C.Schneider, AIP Conference Proceedings 36 (1976) 179.

11. A.O.Aganyants, Yu.D.Bayukov, V.N.Deza, S.V.Donskov, V.B.Fedorov, N.A.Ivanova, V.D.Kohvansky, V.M.Kolybasov, G.A.Leksin, V.L.Stolin and L.S.Vorobyev, Phys. Lett. 27 B (1968) 590.

E.Bellotti, S.Bonetti, D.Cavalli and C.Matteuzzi, Nuovo Cimento 14 A (1973) 567.

J.C.Comiso, H.J.Ziock, K.O.H.Ziock and K.P.Ziock, Zeitschr. Physik A 285 (1978) 101.

12. C.B.Dover and P.J.Moffa, Phys. Rev. C 16 (1977) 1087.

R.D.Koshel, P.J.Moffa and E.F.Redish, Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 1319.

Y.Alexander and P.J.Moffa, Phys. Rev. C 17 (1978) 676.

13. G.Jacob, Th.A.J.Maris, C.Schneider and M.R.Teodoro, Phys. Lett. 45 B (1973) 181; Nucl. Phys. A 257 (1976) 517.

C.Schneider, Nucl. Phys. A 300 (1978) 313.

Th.A.J.Maris, M.R.Teodoro and E.A.Veit, private communication.

14. P.Kitching, C.A.Miller, D.A.Hutcheon, A.N.James, W.J.McDonald, J.M.Cameron, W.C.Olsen and G.Roy, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 1600.

V.S.Nadezhdin, N.I.Petrov, V.I.Satarov, JINR, E1-7559, Dubna, 1973; Sov. J. Nucl. Phys. 26 (2) (1977) 119.

15. V.E.Herscovitz, Th.A.J.Maris and M.R.Teodoro, Phys. Lett. 69 B (1977) 33.

16. R.Serber, Phys. Rev. 72 (1947) 1114.

17. G.F.Chew, Phys. Rev. 80 (1950) 196.

G.F.Chew and G.C.Wick, Phys. Rev. 85 (1952) 636.

G.F.Chew and M.L.Goldberger, Phys. Rev. 87 (1952) 778.

18. S.Fernbach, R.Serber and T.B.Taylor, Phys. Rev. 75 (1949) 1352.

19. H.Byfield, J.Kessler and L.M.Lederman, Phys. Rev. 86 (1952) 17.

20. P.E.Hodgson, The Optical Model of Elastic Scattering, (1963); Nuclear Reactions and Nuclear Structure (1971), Oxford Un. Press.

21. L.I.Schiff, Phys. Rev. 103 (1956) 443.

22. I.E.McCarthy, Nucl. Phys. 10 (1959) 583.

23. I.E.McCarthy, Nucl. Phys. 11 (1959) 574.

24. I.E.McCarthy, Proc. Conf. Direct Interactions Nucl. Reaction Mech., Padua (1962) 94.

25. K.L.Lim and I.E.McCarthy, Nucl. Phys. 88 (1966) 433.

26. K.L.Lim and I.E.McCarthy, Proc. Conf. Direct Interactions Nucl. Reaction Mech., Padua (1962) 180.

27. D.F.Jackson and T.Berggren, Nucl. Phys. 62 (1965) 353.

28. J.M.Blatt and V.F.Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, Wiley (1952).

29. N.Austern, Ann. Phys. 15 (1961) 299.
N.Austern, Direct Nuclear Reaction Theories, Wiley (1970).

30. R.Dymarz and A.Malecki, Lettere Nuovo Cimento 16 (1976) 417.

31. M.Abramowitz and I.A.Stegun, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, U.S.A. (1966).

32. K.M.Watson, Phys. Rev. 89 (1953) 575.

33. N.C.Francis and K.M.Watson, Phys. Rev. 92 (1953) 291.
W.B.Riesenfeld and K.M.Watson, Phys. Rev. 102 (1956) 1157.

34. A.K.Kerman, H.McManus and R.M.Thaler, Ann. Phys. 8 (1959) 551.

35. S.Pasternack and H.S.Snyder, Phys. Rev. 80 (1950) 921.
R.E.LeLevier and D.S.Saxon, Phys. Rev. 87 (1952) 40.
R.Britten, Phys. Rev. 88 (1952) 283.

36. H.Feshback, C.E.Porter and V.F.Weisskopf, Phys. Rev. 96 (1954) 448.

37. P.E.Hodgson, Phys. Rev. Lett. 6 (1961) 358.

A.Johansson, U.Svanberg and P.E.Hodgson, Ark. Fys. 19 (1961) 541.

R.M.Haybron, H.McManus, A.Werner, R.M.Drisko and G.R.Satchler, Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 249.

38. P.G.Roos and N.S.Wall, Phys. Rev. 140 (1965) B1237.

39. K.Seth, Nucl. Phys. A 138 (1969) 61.

40. R.Herman and R.Hofstader, High Energy Electron Scattering Tables, Stanford University Press (1960) 62.

41. V.E.Herscovitz, G.Jacob, Th.A.J.Maris and C.Schneider, Rev. Bras. Fis. 1 (1971) 43.

42. J.Dabrowski and A.Sobiczewski, Phys. Lett. 5 (1963) 87.

43. V.S.Barashenkov and V.H.Maltsev, Fortschr. Physik 9 (1961) 549.

44. M.L.Goldberger, Phys. Rev. 74 (1948) 1269.

45. K.Kikuchi and M.Kawai, Nuclear Matter and Nuclear Reactions, North-Holland (1968).

46. A.Bohr and B.R.Mottelson, Nuclear Structure, Benjamin (1969) I.

47. J.S.Blair, Phys. Rev. 108 (1957) 827.

V.M.Strutinsky, Nucl. Phys. 68 (1965) 221.

48. R.D.Woods and D.S.Saxon, Phys. Rev. 95 (1954) 577.

49. D.F.Jackson and L.R.B.Elton, Nucl. Phys. 43 (1963) 136.

D.F.Jackson, Nucl. Phys. 54 (1964) 561.

50. H.K.Lee and H.McManus, Phys. Rev. 161 (1967) 1087.

51. P.C.Wright, R.G.Storer and I.E.McCarthy, Phys. Rev. C 17 (1978) 473.

52. K.F.Riley, H.G.Pugh and T.J.Gooding, Nucl. Phys. 18 (1960) 65.

53. A.Johansson and Y.Sakamoto, Nucl. Phys. 42 (1963) 625.

54. N.Austern, Corrections to Factorization in High-Energy Knockout Reactions, preprint.

55. Ver, por exemplo,

P.G.Roos, N.S.Chant, D.W.Devins, D.L.Friesel, W.P.Jones, A.C.Attard, R.S.Henderson, I.D.Svalbe, B.M.Spicer, V.C.Officer and G.G.Shute, Phys. Rev. Lett. 40 (1978) 1439.

56. British Association for the Advancement of Science, Bessel functions, Part I, Functions of orders zero and unity, Mathematical Tables, vol. VI, Cambridge Univ. Press (1950).

57. W.Gautschi, Collected Algorithms from CACM, (1964), algorithm 236.

58. W.Gautschi, Recursive computation of special functions, Univ. Mich. Engineering Summer Conferences, Numerical Analysis (1963).