

Luiz Fernando Ziebell
05/março/1980.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

TEORIA DA EMISSÃO DE CÍCLOTRON EM
PLASMAS MAGNETIZADOS*

Luiz Fernando Ziebell

FT52 (129)

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. Darcy Dillenburg e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física

* Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

Porto Alegre
1979

Dedico este trabalho a meus pais

Leopoldo Carlos Ziebell

Maria Francisca Schuch Ziebell

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Darcy Dillenburg, pelo apoio e pela orientação constante ao longo deste trabalho;

aos Doutores Henry P. Freund, Ching-Sheng Wu, Ignazio Fidone, Giovanni Granata e René-Luc Meyer, pelas sugestões oferecidas e pelas discussões esclarecedoras;

aos demais integrantes do grupo de Física de Plasmas deste Instituto, pela colaboração e amizade;

a Alexandre Lago, pela revisão do manuscrito deste trabalho;

a Jason A.C. Gallas, por numerosas discussões e sugestões oportunas;

a Zuleika Berto, pela colaboração e ordenação das referências bibliográficas;

a Maria Cecilia do Amaral, pela cuidadosa datilografia;

a Cleto Tartarelli, pela execução dos desenhos;

a Valdomiro da S. Olivo, pelo trabalho de impressão;

a Carlos E. Lewandowski e João A.H. da Jornada, com os quais trabalhei como monitor e bolsista durante a graduação e cujo apoio merece ser lembrado;

aos colegas e professores, que me ajudaram e honraram com sua amizade;

a todos os que me ajudaram de alguma forma.

Porto Alegre, 28 de junho de 1979.

Luiz Fernando Ziebell

SUMÁRIO

Realizamos um estudo teórico dos processos de emissão e absorção de radiação de cíclotron em plasmas magnetizados. Apresentamos uma revisão geral da teoria, iniciando por seus aspectos mais básicos: estudamos a radiação emitida por um elétron exposto a um campo magnético no vácuo e as noções fundamentais da teoria de transporte de energia em dielétricos. Usando a aproximação de partículas independentes, estudamos a emissão e absorção em plasmas de baixa densidade, considerando energias não relativísticas, levemente relativísticas e extremamente relativísticas. Em seguida, apresentamos uma revisão dos métodos mais atualizados de cálculo, que incluem os efeitos de polarização dielétrica do plasma e admitem inomogeneidades espaciais. Ao longo do trabalho discutimos aplicações da teoria a situações cósmicas e a plasmas de laboratório. Finalmente, usando resultados obtidos para plasmas densos, derivamos uma expressão para o coeficiente de absorção de ondas de frequência próxima à girofrequência eletrônica, válida para direções arbitrárias de propagação em plasmas tênues.

ABSTRACT

The emission and absorption processes of cyclotron radiation in magnetized plasmas are theoretically studied. A general review of theory is presented, beginning at fundamental aspects: the radiation emitted by an electron in a vacuum magnetic field is discussed, and the fundamental notions of theory of energy transport in dielectrics are exposed. Using the independent particle approximation, the emission and absorption in low density plasmas are studied, for non-relativistic, weakly relativistic and extremely relativistic energies. After that, a review is presented of up-to-date methods of calculation, which include dielectric polarization effects and spatial inhomogeneities. Applications of the theory to cosmical situations and laboratory plasmas are discussed. Finally, using the results obtained for dense plasmas, an expression for the absorption coefficient of waves with frequencies close to the cyclotron gyrofrequency is derived, which holds for arbitrary directions of propagation in tenuous plasmas.

Í N D I C E

I - INTRODUÇÃO	1
II - RADIAÇÃO EMITIDA POR UM ELÉTRON EM UM CAMPO MAGNÉTICO NO VÁCUO	6
II.1 - Distribuição Angular e Espectral	14
II.1a - Caso Não Relativístico	14
II.1b - Caso Levemente Relativístico	15
II.1c - Caso Extremamente Relativístico	17
II.2 - Polarização	20
II.3 - Conclusão	21
III - TRANSPORTE DE ENERGIA ELETROMAGNÉTICA EM DIELÉTRICOS	23
III.1 - Intensidade	23
III.2 - Coeficientes de Absorção e Emissão	24
III.3 - A Função de Fonte	28
III.4 - A Equação de Transferência	29
IV - RADIAÇÃO DE CÍCLOTRON EM PLASMA TÊNUE	36
IV.1 - Aplicação a um Plasma Não Relativístico	36
IV.2 - Aplicação a um Plasma Levemente Relativístico	38
IV.2a - Resultados Experimentais	45
IV.3 - Aplicação a um Plasma Astrofísico	48
IV.4 - Amplificação da Radiação	57
V - INFLUÊNCIA DIELÉTRICA DO PLASMA SOBRE A RADIAÇÃO DE CÍCLOTRON	60
V.1 - Radiação de Cíclotron de um Plasma Infinito e Homogêneo	60
V.1a - O Coeficiente de Emissão	75
V.1b - A Situação de Equilíbrio Termodinâmico	75
V.1c - Conclusões e Comentários	81

V.2 - Radiação de Cíclotron de um Plasma Quente, Finito e Não Homogêneo	87
V.2a - Obtenção do Campo Eletromagnético da Radiação	89
V.2b - A Distribuição Espectral da Potência Irradiada	97
V.3 - Efeitos Dielétricos do Plasma na Geração e Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Cômicos	107
VI - COEFICIENTE DE ABSORÇÃO DE UM PLASMA TÊNUE NA FREQUÊNCIA $\omega \approx \Omega_c$	111
VI.1 - Obtenção da Função de Fonte	118
VI.2 - Conclusão	120
VII - CONCLUSÕES	122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125

I - INTRODUÇÃO

Uma partícula carregada movendo-se numa região onde existe um campo magnético, emite uma radiação característica, que recebe o nome de radiação de cíclotron, *bremsstrahlung* magnético, ou radiação de síncrotron, no caso da partícula ser dotada de uma velocidade extremamente relativística. Um plasma é basicamente um conjunto de partículas carregadas e portanto emite radiação de cíclotron quando sujeito a um campo magnético. A radiação de cíclotron em plasmas é assunto que tem sido intensivamente estudado nos últimos vinte anos, embora seus aspectos básicos, relativos à radiação emitida por uma partícula carregada em um campo magnético, já tivessem sido delineados por Schott em 1912 [Sc12]. Entretanto, o tema só passou a receber atenção da comunidade científica mundial na década de 50, com o surgimento de trabalhos pioneiros que sugeriam a radiação de cíclotron como elemento importante em processos que ocorrem em plasmas cósmicos e de laboratório.

Em 1950 Alfvén e Herlofson [AH50] e Kiepenhauer [Ki50] sugeriram pela primeira vez a radiação de cíclotron como mecanismo de produção de ondas de rádio cósmicas. Desde então a física de plasmas e a radioastronomia têm estado mais estreitamente ligadas, coisa que tem sido de extremo proveito para ambos os campos. Isto se compreende facilmente quando consideramos que o Universo como um todo é um campo de provas ideal para as teorias da física de plasmas; no que diz respeito ao estudo e interpretação de espectros de radiação cósmica não discreta, o mecanismo de cíclotron tem desempenhado um papel fundamental.

O interesse pela radiação de cíclotron também foi despertado pela aplicação à pesquisa visando a obtenção da fusão nuclear controlada. Em 1958 Trubnikov e Kudriavtsev apresentaram um trabalho [TK58] em que abordavam a possibilidade de que a radiação de cíclotron se constituísse num canal importante de perda de energia em reatores termonucleares. Esta perspectiva serviu para gerar um maior desenvolvimento nas pesquisas destinadas a avaliar o papel desempenhado pelos mecanismos de absorção e reflexão de energia dentro do plasma, estudar a possibilidade de amplificação da radiação e aperfeiçoar procedimentos de cálculo que levassem em conta a influência da polarização dielétrica induzida no plasma, sobre a radiação emitida e sobre o coeficiente de absorção. Este trabalho tem dado seus frutos e hoje já é possível encontrar extensa bibliografia a respeito do tema.

De qualquer forma, o estudo e a interpretação da radiação de cíclotron constitui-se em método importante de diagnóstico de plasmas, servindo para determinar parâmetros como temperatura, frequência de colisões e intensidade do campo magnético, indicando a forma pela qual a energia se encontra distribuída entre as partículas do plasma, ou informando sobre a distribuição espacial do plasma [EC73]. Também a absorção de radiação na frequência de cíclotron tem despertado interesse, como um método atraente de aquecimento do plasma em tokamaks [FGRM78]. Por outro lado, a existência de condições nas quais o plasma pode produzir radiação estimulada gerou intensa pesquisa na área tecnológica nos últimos 20 anos, visando produzir eficientes geradores de ondas eletromagnéticas na faixa dos comprimentos de onda milimétricos e submilimétricos (masers) [HG77]. Estes instru

mentos já competem favoravelmente com geradores convencionais e parecem ter um futuro promissor, tanto no que diz respeito à compreensão teórica do seu comportamento, quanto no que diz respeito a aplicações; entre estas podemos citar aquecimento de plasmas e radares de ondas milimétricas [HG77].

Neste trabalho nos propomos a apresentar uma revisão sobre a teoria da radiação de cíclotron em plasmas. Suporemos sempre que a distribuição de velocidades das partículas do plasma é estável na escala de tempo do intervalo entre colisões binárias, deixando portanto de considerar fenômenos de radiação induzida, a não ser na forma de referências ocasionais. Não trataremos de outros importantes mecanismos de radiação em plasmas, como radiação de freiamento (bremsstrahlung). O plano geral do trabalho é o seguinte:

No Capítulo II apresentamos a teoria da radiação de uma partícula carregada exposta a um campo magnético, no vácuo; analisamos a radiação em seus aspectos básicos, como intensidade, distribuição angular e espectral e polarização.

No Capítulo III apresentamos os aspectos fundamentais da teoria de transporte de energia eletromagnética em dielétricos; este estudo é feito de forma sumária e sem intenção de esgotar o assunto. Os capítulos II e III devem ser vistos como uma preparação, um lançamento da estrutura sobre a qual se vai trabalhar nos capítulos seguintes.

No Capítulo IV iniciamos propriamente o estudo da radiação de cíclotron em plasmas, na sua formulação mais simples, através do uso da aproximação de emissão por partículas independentes. Neste capítulo estudamos os efeitos resultantes da ab

sorção pelas partículas do plasma e comentamos sobre as aplicações que a teoria pode ter em situações cósmicas e de laboratório.

No Capítulo V apresentamos uma visão dos métodos mais recentes e completos para o cálculo da emissão e absorção de radiação ciclotrônica em plasmas. Os trabalhos analisados incorporam as propriedades dielétricas do plasma e um deles admite inhomogeneidades espaciais dos parâmetros do plasma. Os modelos utilizados são, respectivamente, o de um plasma infinito e homogêneo e o de uma lâmina de plasma finita em uma direção. Ao apreciar os resultados previstos para a emissão pela lâmina de plasma, incluimos uma discussão sobre a validade de lei de Kirchhoff em plasmas anisotrópicos. Neste capítulo incluimos também alguns comentários a respeito dos efeitos introduzidos pelas propriedades dielétricas de plasmas cósmicos sobre a emissão e propagação de ondas eletromagnéticas.

Ao longo do trabalho de revisão, observamos na literatura a ausência de expressões para os coeficientes de absorção e emissão dos modos ordinário e extraordinário, para propagação não perpendicular ao campo magnético, obtidas na aproximação de partículas independentes. Utilizando-nos de resultados derivados para plasmas densos, apresentamos no Capítulo VI a derivação de uma expressão para o coeficiente de absorção de cada modo de propagação. A expressão foi obtida com o uso do princípio do balanço detalhado e é válida para qualquer direção de propagação em um plasma de baixa densidade, não homogêneo e com uma distribuição anisotrópica de velocidades; ela mostra o coeficiente de absorção como função da parte anti-hermitiana do tensor

dielétrico. Mostramos que o coeficiente de emissão pode ser es
crito em termos da função correlação das correntes de fonte e
obtivemos uma expressão para a função de fonte, definindo uma
temperatura generalizada de radiação. Finalmente, mostramos que
para um plasma caracterizado por uma função distribuição maxwell
iana, isotrópica e relativística, a temperatura efetiva corresp
ponde à temperatura real da distribuição.

II - RADIAÇÃO EMITIDA POR UM ELÉTRON EM UM CAMPO MAGNÉTICO NO VÁCUO

O objetivo deste trabalho é estudar a radiação de cíclotron produzida em plasmas magnetizados. Um plasma apresenta íons e elétrons livres, mas nos processos que envolvem radiação de cíclotron são os elétrons que desempenham um papel preponderante, uma vez que a radiação é proporcional ao quadrado da aceleração. Assim, para começar com os aspectos mais básicos da radiação de um plasma, estudaremos neste capítulo a radiação produzida por um elétron que se move no vácuo com velocidade \vec{v} , em uma região onde existe um campo magnético uniforme \vec{B}_0 . A teoria para este tipo de radiação é assunto que pode ser encontrado em livros texto, como [Ja75], [Be66]; vamos fazer um resumo dessa teoria, lançando as bases sobre as quais trabalharemos nos capítulos IV e V, onde consideraremos respectivamente a emissão de um conjunto de elétrons e a inclusão de efeitos dielétricos do plasma sobre a emissão. Neste resumo procuraremos salientar os aspectos que consideramos mais importantes para nosso trabalho, como distribuição espectral da radiação, dependência do espectro da radiação quanto à energia do elétron emissor, modos de propagação da radiação e grau de polarização.

Seja \hat{n} um vetor unitário que aponta na direção do observador e $\frac{dW}{d\Omega}$ a energia por unidade de ângulo sólido que flui na direção do observador. Esta energia é dada por:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int dt R^2 (\vec{E} \times \vec{B}) \frac{c}{4\pi} \cdot \hat{n} \quad (\text{II.1})$$

Os campos \vec{E} e \vec{B} que aparecem em (II.1) são os campos

produzidos por uma carga acelerada, calculados através dos potenciais de Liénard-Wiechert [Ja75]:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -e \left[\frac{(\hat{n} - \vec{\beta})}{\gamma^2 g^3 R^2} + \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{g^3 c R} \right]_{t'}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \hat{n} \times \vec{E} \quad (\text{II.2})$$

onde

\vec{x} e t : representam as coordenadas do observador

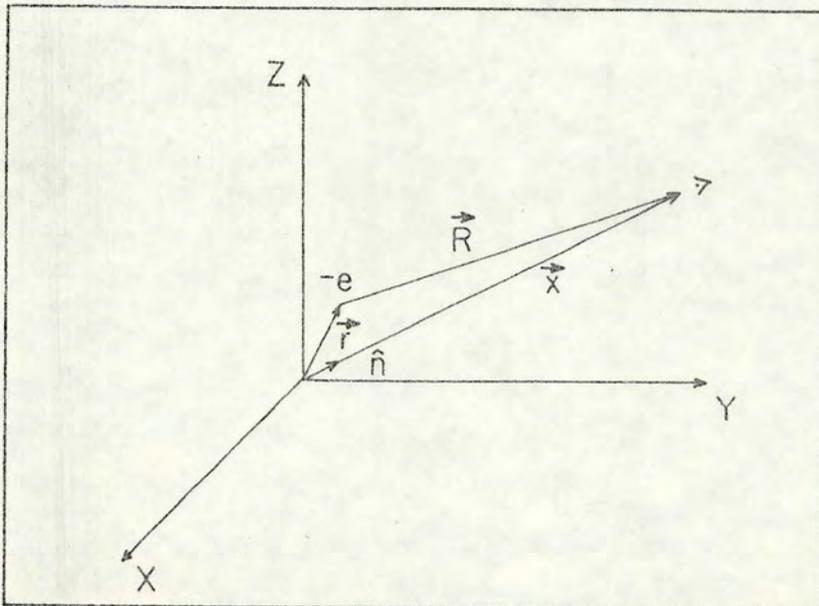
$R(t') \equiv |\vec{x} - \vec{r}(t')|$: é a distância entre o elétron e o observador

$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$; $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

$g \equiv 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}$

o símbolo $[]_{t'}$, significa que a quantidade deve ser avaliada no "tempo retardado" t' , o tempo de emissão do sinal que é observado na posição \vec{x} no tempo t .

$$t' = t - \frac{R(t')}{c} \quad (\text{II.3})$$



Vamos considerar que o observador está muito distante da região de emissão, de modo que para calcular a energia irradiada sô será relevante a contribuição do segundo termo da expressão (II.2). Sendo $\vec{r}(t)$ a posição do elêtron em relação à origem, vamos supor que $x \gg r$, de modo que podemos escrever:

$$R(t') \cong x(t) - \hat{n}(t) \cdot \vec{r}(t') \quad (\text{II.4})$$

Usando em (II.1) os campos (II.2), com as aproximações acima, obtemos:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int dt \frac{e^2}{4\pi c} \left| \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{g^3} \right|_{t'}^2 = \int dt |\vec{F}(t)|^2 \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Notar que } |\vec{F}(t)|^2 = \frac{cR^2}{4\pi} |\vec{E}|^2 \quad (\text{II.6})$$

Para obter o espectro de freqüência da radiação emitida, faremos agora a análise de Fourier da expressão (II.5). A transformada de Fourier do vetor $F(t)$ é definida como:

$$\vec{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \vec{F}(\omega) d\omega \quad (\text{II.7})$$

Como $\vec{E}(t)$ é real $\vec{F}(t)$ também é real, de modo que $\vec{F}^*(\omega) = \vec{F}(-\omega)$, onde o * significa o complexo conjugado do vetor. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \int dt \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\omega - \omega')t} \vec{F}(\omega) \cdot \vec{F}^*(\omega') \right] = \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta(\omega - \omega') \vec{F}(\omega) \cdot \vec{F}^*(\omega') \right] = 2 \int_0^{\infty} d\omega |\vec{F}(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Usando agora a transformada de Fourier inversa

$$\vec{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{F}(t) dt \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{F}(t) dt \right|^2$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\Omega d\omega} &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{F}(t) dt \right|^2 \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left\{ \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{g^3} \right\}_{t'} \right|^2 \end{aligned}$$

*do zero para o pa
d^2W
dΩ dω*

Mudando a variável de integração para t' :

$$t = t' + \frac{R(t')}{c} \cong t' + \frac{x - \vec{n} \cdot \vec{r}(t')}{c}$$

$$dt = \frac{dt}{dt'} dt' = [1 - \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}(t')] dt' = g(t') dt'$$

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega \left[t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t')}{c} \right]} \left\{ \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}(t')) \times \dot{\vec{\beta}}(t')]}{g^2(t')} \right\} \right|^2 \quad (\text{II.10})$$

Podemos colocar a expressão (II.10) numa forma mais adequada para o uso, com a eliminação da dependência explícita em $\dot{\vec{\beta}}(t')$, através do uso da seguinte identidade:

$$\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}} \right] \quad (\text{II.11})$$

A integração por partes da expressão (II.10), com o uso de (II.11), nos leva a uma indeterminação no termo integrado. Vencemos esta dificuldade introduzindo no integrando um fator de convergência $e^{-\epsilon|t'|}$ e tomando o limite para ϵ tendendo a zero, após a avaliação da integral [Ja75]. Ficamos com:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) e^{i\omega \left[t' - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}(t')}{c} \right]} \right|^2 \quad (\text{II.12})$$

Façamos a hipótese de que a propagação da onda se processa no plano xz . Esta hipótese simplifica os cálculos mas não restringe a validade das conclusões. Lembrando que estamos estudando a radiação de cíclotron, obtemos as expressões para $\vec{\beta}(t)$ e $\vec{r}(t)$ a partir da equação de movimento para um elétron sujeito a um campo magnético:

$$\vec{\beta}(t) = \frac{1}{c} [v_{\perp} \cos \Omega_0 t, v_{\perp} \sin \Omega_0 t, v_{\parallel}] \quad (\text{II.13})$$

$$\vec{r}(t) = \left[\frac{v_{\perp}}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t, -\frac{v_{\perp}}{\Omega_0} \cos \Omega_0 t, v_{\parallel} t \right]$$

onde

$$\Omega_0 \equiv \frac{\Omega_c}{\gamma}; \quad \Omega_c = |\Omega_e|; \quad \Omega_e = -\frac{eB_0}{m_0 c}$$

Para obter as expressões (II.13) fizemos uso da hipótese de que a perda de energia por revolução é desprezível frente à energia da partícula, $E = \gamma m_0 c^2$. Com isto, a energia da partícula foi considerada constante durante o movimento. A vali

dade desta hipótese será verificada mais adiante e veremos que ela é plenamente justificada nas condições usuais.

Introduzimos agora a seguinte propriedade:

$$e^{iz \operatorname{sen} \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} J_m(z) \quad (\text{II.14})$$

Com o uso de (II.14), integramos a expressão (II.12) e obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| 2\pi \left[-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} (\cos\theta - \beta_{||}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \vec{i} - i\beta_{\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J'_m(z) \vec{j} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\cos\theta - \beta_{||}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \vec{k} \right] \delta(y) \right|^2 \quad (\text{II.15}) \end{aligned}$$

onde

$$\theta \equiv \hat{\text{ângulo}} \text{ entre } \vec{n} \text{ e } \vec{B}_0 .$$

$$z \equiv \frac{\omega}{\Omega_0} \beta_{\perp} \operatorname{sen}\theta \quad y \equiv m\Omega_0 - \omega(1 - \beta_{||} \cos\theta) .$$

Como $\omega > 0$ (ver expressão (II.8)), os somatórios na expressão (II.15) devem restringir-se aos termos com $m > 0$. No cálculo do módulo quadrado resultam expressões do tipo

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} J_m \delta(y_m) \right|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} J_m \delta(y_m) \left[\sum_{n=1}^{\infty} J_n \delta(y_n) \right]^* = \sum_{m=1}^{\infty} |J_m|^2 \delta^2(y_m)$$

pois para $m \neq n$ as deltas não podem ser simultaneamente diferentes de zero.

Ficamos com:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\cos\theta - \beta_{||}}{\sin\theta} \right)^2 J_m^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(z) \right] \delta^2(y) \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-iyt} \left[\left(\frac{\cos\theta - \beta_{||}}{\sin\theta} \right)^2 J_m^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(z) \right] \delta(y)$$

$$\frac{d^3W}{d\Omega d\omega dt} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\cos\theta - \beta_{||}}{\sin\theta} \right)^2 J_m^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(z) \right] \delta(y) \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{d^3W}{d\Omega d\omega dt} = \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} \equiv \eta(\omega, \beta, \theta) \quad (\text{II.18})$$

Obtivemos uma grandeza que descreve a potência emitida por unidade de freqüência e por unidade de ângulo sólido, numa dada freqüência ω . Esta grandeza recebe o nome de emissividade espectral; freqüentemente, esta grandeza é chamada de coeficiente de emissão espontânea, mas não usaremos esta terminologia para que não se faça confusão com outra quantidade a ser definida no Capítulo III [expressão (III.4)].

Cada termo do somatório da definição de $\eta(\omega, \beta, \theta)$ recebe o nome de emissividade espectral por harmônico. Integrando um destes termos em $d\omega d\Omega$, obtemos a potência emitida num dado harmônico:

$$\eta_m = \frac{2e^2 \omega^2}{c} \frac{1 - \beta_0^2}{\beta_0} \left[m\beta_0^2 J'_{2m}(2m\beta_0) - m^2(1 - \beta_0^2) \int_0^{\beta_0} J_{2m}(2mt) dt \right] \quad (\text{II.19})$$

onde

$$\beta_0 \equiv \frac{\beta_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta_{||}^2}}$$

Somando sobre m , obtemos a potência total emitida em todos os harmônicos:

$$\eta(\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m = \frac{2}{3} \frac{e^2 \Omega_c^2}{c} \frac{\beta_{\perp}^2}{1 - \beta^2} \quad (\text{II.20})$$

Neste momento, já podemos verificar a validade da aproximação feita anteriormente sobre a energia da partícula. Usando $\beta_{\perp}^2 = \beta^2 - \beta_{\parallel}^2$ e $\beta^2(1 - \beta^2)^{-1} = \gamma^2 - 1$, escrevemos a potência irradiada, dada pela expressão (II.20), explicitamente em termos da energia inicial da partícula:

$$\eta(\beta) = \frac{2}{3} \frac{e^2 \Omega_c^2}{c} \left[(1 - \beta_{\parallel}^2) \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{II.21})$$

A energia irradiada por revolução pode ser obtida aproximadamente por:

$$\Delta W = \eta \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

($\frac{2\pi}{\Omega_0}$ é o período de uma revolução).

Para $\beta_{\parallel} = 0$,

$$\frac{\Delta W}{E} = \frac{4\pi e^2}{3c} \frac{\Omega_c}{m_0 c^2} \left[\left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{II.22})$$

$\frac{\Delta W}{E}$ fornece a perda fracional de energia por revolução. Supondo, por exemplo, $E = 1$ GeV e $B_0 = 10^4$ gauss, um cálculo rápido nos mostra que $\frac{\Delta W}{E} \cong 2,6 \times 10^{-5}$, o que justifica plenamente a hipótese feita. Um campo de 10^4 gauss já é apreciável. Para não ser

satisfeita a hipótese, dada a energia de 1 GeV como acima, seria necessário um campo extremamente intenso, da ordem de 10^8 gauss.

II.1 - Distribuição Angular e Espectral

A radiação de síncrotron emitida por um elétron apresenta um caráter marcadamente ligado à energia do elétron; por este motivo vamos analisar o comportamento das distribuições angular e espectral em três regiões de energia: não relativística, levemente relativística e extremamente relativística.

II.1a - Caso não relativístico:

Para energias do elétron tais que $m\beta \ll 1$, a expressão (II.19) fica (para $\beta_{||} = 0$):

$$\eta_m = \frac{2e^2 \Omega^2}{c} \frac{(m+1)(m^{2m+1})}{(2m+1)!} \beta^{2m} \quad (II.23)$$

Esta expressão nos mostra que o espectro consiste de uma série de linhas discretas; a intensidade das linhas decresce com β^2 , de forma que para energias suficientemente baixas ($\beta^2 \approx 10^{-3}$, por exemplo) a emissão é relevante apenas na frequência fundamental.

Este fato permite que tomemos a expressão da emissividade espectral e dela consideremos somente o termo com $m = 1$ para analisar o comportamento angular da emissão, nesta região de energias. Obtemos:

$$\eta(\omega, \beta, \theta) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi c} \beta_{\perp}^2 (1 + \cos^2 \theta) \delta \left[\Omega_c - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \right] \quad (\text{II.24})$$

O aspecto mais notável na expressão (II.24) é que a emissão ao longo do campo magnético é o dobro da emissão perpendicular ao mesmo. Discutiremos mais a respeito disto quando considerarmos a distribuição angular do caso levemente relativístico.

II.1b - Caso levemente relativístico:

Aqui consideraremos as energias situadas entre 1 e 10^2 KeV. Esta faixa de energias tem muito interesse tecnológico porque é nela que se localizam, quanto à energia, os experimentos ligados à busca de fusão nuclear controlada, por meio de confinamento magnético. Observaremos que mesmo para energias não muito altas (β da ordem de $1/2$) uma parte considerável da emissão se dá em harmônicos mais altos. Isto se verifica tomando os primeiros termos da expansão em série das expressões para η e η_1 e calculando a fração da potência emitida em harmônicos mais altos:

$$\frac{\eta - \eta_1}{\eta} \approx \frac{12}{5} \frac{\beta_{\perp}^2}{1 + \beta^2} \quad (\text{II.25})$$

Tomando como exemplo $\beta_{\parallel} = 0$ e $\beta_{\perp} = \frac{1}{2}$, a expressão (II.25) assume o valor 0,48, indicando claramente que não podemos negligenciar a emissão em harmônicos mais altos, como fizemos para elétrons não relativísticos.

A análise da distribuição angular da radiação assume

um caráter mais complexo do que o apresentado no caso não relativístico. No caso não relativístico a projeção da distribuição angular da radiação sobre o plano que contém a velocidade e a aceleração apresenta lóbulos perpendiculares à direção da aceleração. Olhando para a Figura II.2a poderemos entender o resultado descrito pela expressão (II.24).

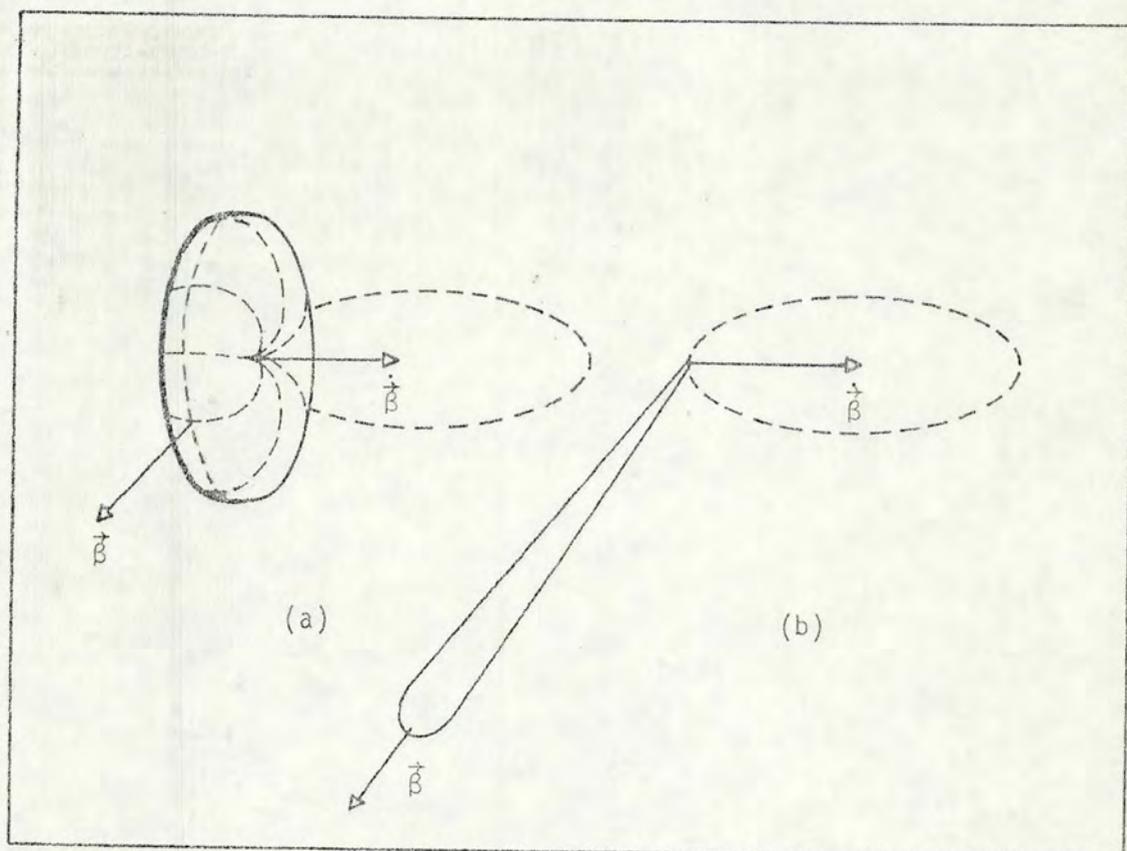


Figura II.2 - Radiação instantânea emitida por uma partícula em órbita circular (a) caso não relativístico (b) caso relativístico. As duas figuras não estão em escala.

À medida que a partícula descreve sua órbita, existe um máximo da intensidade de radiação apontando permanentemente na direção do campo magnético, enquanto na direção perpendicu

lar a este a intensidade passa por valores que variam do máximo ao mínimo. Para energias levemente relativísticas, os lóbulos começam a aumentar na direção do movimento da partícula (Figura II.2b), de modo que o máximo de radiação forma um cone cujo ângulo de abertura torna-se menor à medida que aumenta a energia da partícula; para partículas relativísticas, este ângulo é da ordem de $1/\gamma$ [Ja75]. Dessa forma, começa a se tornar menor a importância relativa da radiação na direção paralela ao campo magnético, face à emissão em outras direções.

II.1c - Caso extremamente relativístico:

Já vimos que a radiação ciclotrônica produzida por elétrons levemente relativísticos apresenta uma fração considerável da emissão em harmônicos mais altos ($m > 1$). A tendência continua a se verificar para energias mais altas; no limite extremamente relativístico a radiação é predominantemente nos harmônicos com $m \gg 1$. Na situação em que $\gamma \gg 1$ e $m \gg 1$, obtêm-se, a partir da expressão (II.19) [Be66], [Tr58], (para $\beta_{||} = 0$):

$$\eta_m = \frac{e^2 \Omega_c^2 \sqrt{3}}{2\pi c \gamma} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \quad (\text{II.26})$$

onde

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2} \gamma^2 \Omega_c$$

K_ν é a função de Hankel modificada de ordem ν .

Dividimos por Ω_c , para ter a emissão por unidade de frequência e definimos:

$$\eta_{\omega} \equiv \frac{\eta_m}{\Omega_0} = \frac{\eta(\omega/\Omega_0)}{\Omega_0}$$

Resultado:

$$\eta_{\omega} = \frac{\sqrt{3} e^2 \Omega_c}{2\pi c} \left[\frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \right] \quad (\text{II.27})$$

A função $\frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt$ está tabelada, por exemplo, em [We59]. Uma expressão analítica aproximada que pode substituí-la satisfatoriamente é [KTs73]:

$$\left[\frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \right] \approx \sqrt{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/3} e^{-\omega/\omega_c} \quad (\text{II.28})$$

A diferença entre a expressão aproximada e a expressão exata é de menos de 5%, quando $\frac{\omega}{\omega_c}$ varia entre 0 e 10.

Note-se que os harmônicos sucessivos estão separados por um intervalo de frequências muito pequeno, razão porque a emissão pode ser considerada contínua.

$$\omega_m = m \frac{\Omega_c}{\gamma}; \quad \omega_{m+1} = (m+1) \frac{\Omega_c}{\gamma}; \quad \frac{\Delta\omega}{\Omega_c} = \frac{1}{\gamma} \ll 1, \quad \text{pois } \gamma \gg 1.$$

Na Figura II.3 colocamos em um gráfico a expressão (II.28), contra ω/ω_c ; vemos que o máximo da emissão ocorre para $\omega \approx 0,3 \omega_c$, ou seja, $\omega \approx 0,45 \gamma^3 \Omega_0$; como $\gamma \gg 1$ e $\omega = m\Omega_0$, fica

justificada a hipótese de que a emissão é predominante em altos harmônicos.

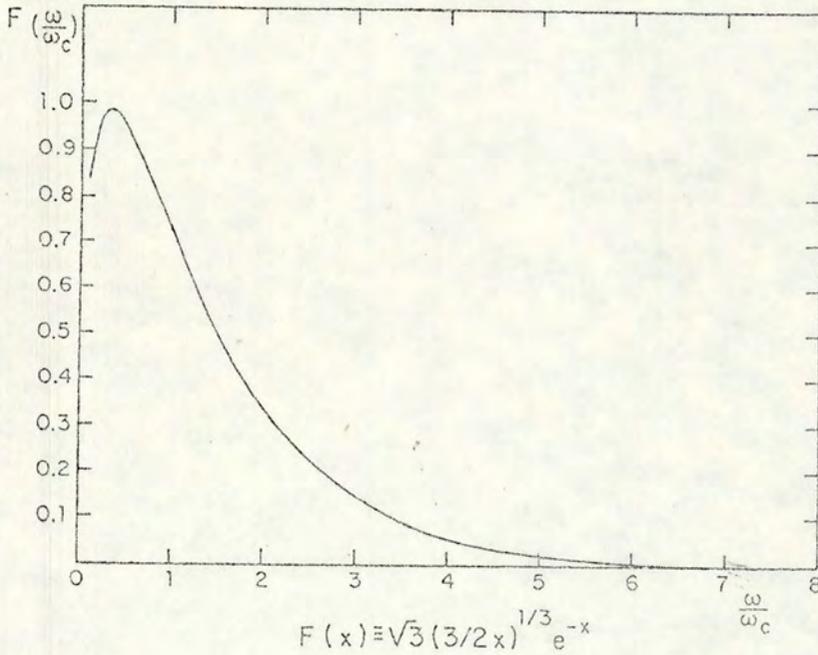


Figura II.3.

Especialmente, a radiação emitida por uma partícula extremamente relativística se apresenta confinada a um cone muito estreito cujo eixo aponta na direção do movimento, conforme já foi discutido na seção anterior. Assim, para partículas extremamente relativísticas movendo-se perpendicularmente ao campo magnético, a radiação será predominantemente perpendicular ao campo magnético.

II.2 - Polarização

Voltando à expressão (II.15), vamos considerar o caso de propagação perpendicular ao campo magnético ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Esta é uma situação muito comum em trabalho de laboratório, tanto em aparelhos lineares como toroidais [LST64], [LSTC64], [CHPC74] e [Co77]. Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, o vetor que comparece com o módulo quadrado na expressão (II.15) tem componentes nas direções y e z. Este vetor, como se pode ver na expressão (II.6), é proporcional ao campo elétrico da radiação. Assim, vamos definir uma emissividade associada a uma onda cujo campo elétrico é paralelo à direção do campo magnético (onda ordinária) e indicá-la por meio do símbolo "+":

$$\eta_+(\beta, \theta = \frac{\pi}{2}, \omega) = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \beta_{\parallel}^2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(m\beta_{\perp}) \delta(m\Omega_0 - \omega) \quad (\text{II.29})$$

Vamos também definir uma emissividade associada à onda cujo campo elétrico está orientado perpendicularmente ao campo magnético (onda extraordinária) e indicá-la com o símbolo "-":

$$\eta_-(\beta, \theta = \frac{\pi}{2}, \omega) = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \beta_{\perp}^2 \sum_{m=1}^{\infty} J'_m{}^2(m\beta_{\perp}) \delta(m\Omega_0 - \omega) \quad (\text{II.30})$$

Usamos a situação particular de emissão perpendicular ao campo magnético para identificar os modos de propagação da radiação. No Capítulo V obteremos expressões para a emissividade espectral de cada modo, válidas também para propagação não perpendicular. Entretanto, com a identificação dos modos de pro

pagação já podemos definir o "grau de polarização" da radiação, conceito que permanece válido para qualquer direção de propagação:

$$p = \left| \frac{\eta_- - \eta_+}{\eta_- + \eta_+} \right| \quad (\text{II.31})$$

II.3 - Conclusão

Para encerrar este capítulo, faremos algumas considerações a respeito das magnitudes envolvidas ao considerarmos a radiação de cíclotron de um elétron. Vamos supor um elétron sujeito a um campo magnético de 10^4 gauss e vamos supor por simplicidade que seu movimento é perpendicular ao campo magnético. Nesse caso, a expressão (II.21) nos fornece:

$$\eta(\beta) = 1,58 \cdot 10^{-7} \left[\left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right] \frac{\text{ergs}}{\text{s}} \quad (\text{II.32})$$

Supondo uma energia cinética de 1 KeV para o elétron, temos uma potência irradiada de $6,20 \cdot 10^{-10} \frac{\text{ergs}}{\text{s}}$. Se a energia for de 1 MeV, a potência irradiada será de $1,23 \cdot 10^{-6} \frac{\text{ergs}}{\text{s}}$. Para energias de 1 GeV, o elétron irradia $6,07 \cdot 10^{-1} \frac{\text{ergs}}{\text{s}}$. Já vimos que mesmo neste último caso a perda de energia em cada revolução é desprezível frente à energia inicial do elétron.

Finalmente, vamos acrescentar que obtemos facilmente o resultado usual devido a Larmor, para elétrons não relativísticos:

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2 \quad \text{onde } a \text{ é o módulo da aceleração da partícula.} \quad (\text{II.33})$$

Visualizando o elétron não relativístico como uma partícula percorrendo uma trajetória circular com frequência Ω_c , sua aceleração será dada por $\frac{v^2}{r}$, onde v é o módulo da velocidade tangencial à trajetória e r o raio de curvatura ($v = \Omega_c r$). A expressão (II.20) resulta em:

$$\eta(\beta) = \frac{2}{3} \frac{e^2 \Omega_c^2 v^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 (\Omega_c r)^2}{c^3} \frac{v^2}{r^2} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4}{r^2} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2 \quad (\text{II.34})$$

No próximo capítulo, estabeleceremos alguns conceitos da teoria de transporte de radiação, que nos serão úteis no presente trabalho. Retomaremos as idéias desenvolvidas neste capítulo quando considerarmos a emissão de radiação por um plasma ténue, no Capítulo IV.

III - TRANSPORTE DE ENERGIA ELETROMAGNÉTICA EM DIELÉTRICOS

Continuando em nossos esforços de apresentar de forma compacta os principais elementos da teoria de radiação que serão aplicados nos Capítulos IV e V, vamos estabelecer os conceitos e as equações básicas que regulam o transporte de energia eletromagnética em dielétricos. O ponto central na descrição matemática desse fenômeno de transporte é a chamada "equação de transferência", cuja solução terá um papel chave na comparação entre os resultados previstos pela teoria de emissão independente, apresentada no capítulo precedente, e as situações reais com que nos defrontamos na natureza ou no laboratório. Primeiramente apresentamos as definições básicas que serão de interesse para nós e em seguida estabelecemos a equação de transferência e sua solução [Ch50], [Be66].

III.1 - Intensidade

Seja um elemento de área $d\sigma$, através do qual passa uma certa quantidade de energia radiante, por unidade de intervalo de frequência angular, $d\omega$, por unidade de ângulo sólido, $d\Omega$, por unidade de tempo, dt . Chamamos dE_ω a esta grandeza e definimos:

$$dE_\omega = I_\omega(\vec{x}, t, \theta, \phi, \omega) \cos \alpha \, d\omega \, d\sigma \, d\Omega \, dt \quad (\text{III.1})$$

onde α é o ângulo que a direção considerada de propagação faz com a normal externa à área $d\sigma$ (Figura III.1).

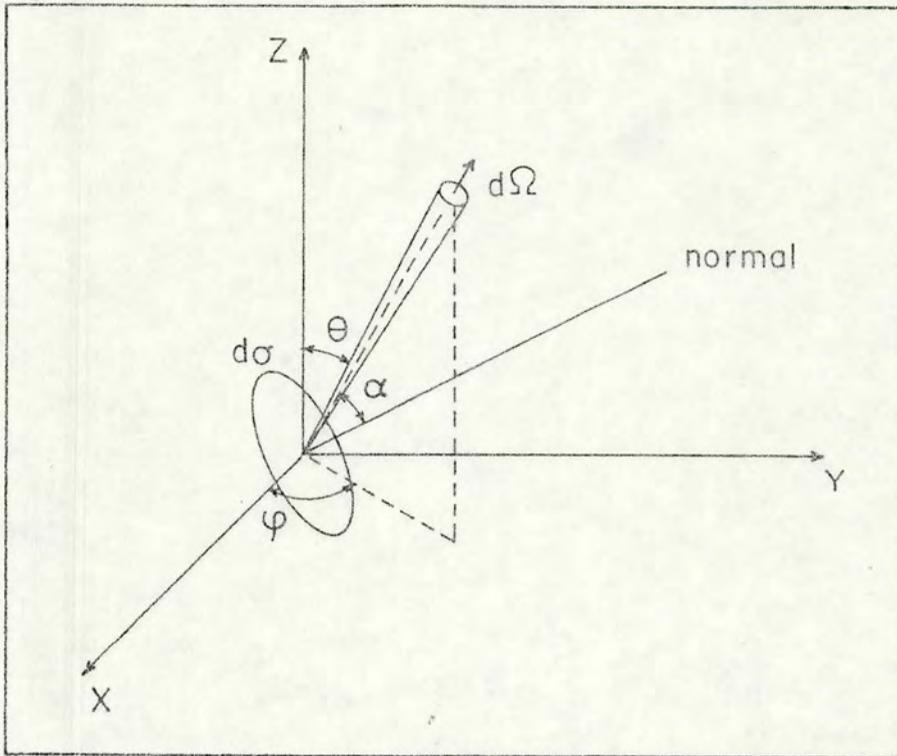


Figura III.1.

A quantidade I_{ω} é chamada de intensidade de radiação e tem unidades de ergs por centímetro quadrado, por esferoradiao, por segundo, por unidade de frequência angular. Em geral, I_{ω} é uma função da posição, no espaço e no tempo, e da direção considerada de propagação. A integração de I_{ω} sobre todas as frequências fornece uma grandeza conhecida como intensidade integrada, que será identificada pelo símbolo I .

$$I(\vec{x}, t, \theta, \phi) = \int_0^{\infty} I_{\omega}(\vec{x}, t, \theta, \phi, \omega) d\omega \quad (\text{III.2})$$

III.2 - Coefficientes de Absorção e Emissão

Os processos que envolvem a emissão e absorção de \bar{f}_0

tons por elétrons livres caracterizam três tipos de situações distintas, para cada uma das quais definiremos um coeficiente que a descreve. Vamos supor que estes processos envolvam uma distribuição de elétrons, caracterizada por $f(\vec{p}, \vec{r})$. O número de elétrons por unidade de volume que ocupa a posição \vec{r} , com momentum \vec{p} , em um elemento do espaço de momentum d^3p , é

$$dN(\vec{p}, \vec{r}) = n_e f(\vec{p}, \vec{r}) d^3p \quad (n_e \text{ é a densidade média de elétrons no sistema}).$$

Os elétrons podem, como primeiro processo, emitir fótons espontaneamente numa certa frequência ω e assim decair para um outro estado de momentum. A taxa desta emissão numa dada direção (dada por θ e ϕ), por unidade de frequência angular, produzida por dN elétrons por unidade de volume, é dada por

$$dN(\vec{p}', \vec{r}) \eta(\vec{p}', \vec{r}, \theta, \phi, \omega) = n_e f(\vec{p}', \vec{r}) d^3p' \eta(\vec{p}', \vec{r}, \theta, \phi, \omega) \quad (\text{III.3})$$

onde $\eta(\vec{p}', \vec{r}, \theta, \phi, \omega)$ é a taxa de emissão espontânea na frequência ω , por unidade de ângulo sólido, por intervalo de frequência, de um elétron com momentum entre \vec{p}' e $\vec{p}' + d\vec{p}'$; trata-se da emissividade espectral, obtida através da expressão (II.18). A emissão de todos os elétrons serve para definir o coeficiente de emissão:

$$j(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) = \int \eta(\vec{p}', \vec{r}, \theta, \phi, \omega) n_e f(\vec{p}', \vec{r}) d^3p' \quad (\text{III.4})$$

Em um segundo processo, a presença de um fóton pode causar a emissão de outro, por emissão estimulada, sendo que esta emissão será tanto maior quanto maior for o número de fótons

"estimulantes" presentes; portanto, será proporcional a I_ω , quantidade definida na Seção III.1. De forma análoga ao que fizemos acima, vamos definir uma emissividade espectral estimulada, considerando que a taxa de emissão de dN elétrons por unidade de volume, com momentum em d^3p' , numa dada direção (θ, ϕ) , por unidade de frequência angular, é dada por:

$$\eta_E(\vec{p}', \vec{r}, \theta, \phi, \omega) I_\omega(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) dN(\vec{p}', \vec{r}) = \eta_E(\vec{p}', \vec{r}, \theta, \phi, \omega) I_\omega(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) \times \\ \times n_e f(\vec{p}', \vec{r}) d^3p' \quad (\text{III.5})$$

Assim, podemos definir o coeficiente de emissão estimulada como:

$$\alpha_E(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) = \int \eta_E(\vec{p}', \vec{r}, \theta, \phi, \omega) n_e f(\vec{p}', \vec{r}) d^3p' \quad (\text{III.6})$$

Como terceiro e último processo, podemos ter a absorção de um fóton por um elétron no estado de momentum \vec{p} ($|\vec{p}| < |\vec{p}'|$), absorção essa que também é proporcional ao número de fótons presentes. Definindo o coeficiente de absorção por uma partícula, η_A , escrevemos a taxa total de absorção por dN elétrons por unidade de volume, numa dada direção (θ, ϕ) , por intervalo de frequência angular, como

$$\eta_A(\vec{p}, \vec{r}, \theta, \phi, \omega) I_\omega(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) dN(\vec{p}, \vec{r}) = \eta_A(\vec{p}, \vec{r}, \theta, \phi, \omega) I_\omega(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) \times \\ \times n_e f(\vec{p}, \vec{r}) d^3p \quad (\text{III.7})$$

Assim, procedendo analogamente à obtenção de (III.4)

e (III.6), definimos o coeficiente de absorção:

$$\alpha_A(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) = \int \eta_A(\vec{p}, \vec{r}, \theta, \phi, \omega) \eta_e f(\vec{p}, \vec{r}) d^3p \quad (\text{III.8})$$

A absorção que efetivamente pode ser observada é dada pela diferença entre a "verdadeira" absorção e a emissão estimulada; dessa forma, o coeficiente de absorção efetivo que deve ser usado ao compararmos com resultados experimentais é:

$$\alpha(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) = \alpha_A(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) - \alpha_E(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) \quad (\text{III.9})$$

Usando o princípio do balanço detalhado para obter relações entre as grandezas η , η_E e η_A , conforme proposto por Einstein em 1917, mostra-se [Be66] que o coeficiente de absorção (III.9) pode ser escrito como:

$$\alpha(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) = \frac{8\pi^3 c^2}{n_r^3 \hbar \omega^3} \eta_e \int \eta(\vec{p}', \vec{r}, \theta, \phi, \omega) [f(\vec{p}, \vec{r}) - f(\vec{p}', \vec{r})] d^3p' \quad (\text{III.10})$$

onde n_r é o chamado índice de refração do raio [Be66]. Para um meio isotrópico, o índice de refração do raio reduz-se ao índice de refração usual da onda, n .

No limite clássico, ($\hbar\omega \ll$ energia das partículas) expandindo a função distribuição em série de Taylor e fazendo uso das equações de conservação de energia e momentum, podemos transformar a equação (III.10) em:

$$\alpha(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) = - \frac{8\pi^3 c^2}{n_r^3 \omega^3} \eta_e \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty 2\pi dp_\perp dp_\parallel \eta(p_\parallel, p_\perp, \vec{r}, \theta, \phi, \omega) \left[\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial}{\partial p_\perp} f - n \cos\theta \left(\frac{p_\parallel}{c} \frac{\partial}{\partial p_\perp} f - \frac{p_\perp}{c} \frac{\partial}{\partial p_\parallel} f \right) \right] \quad (\text{III.10a})$$

Supusemos para a obtenção de (III.10a) que a f não tem dependência azimutal. Para uma função distribuição isotrópica, ficamos

com:

$$\alpha(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) = - \frac{8\pi^3 c^2}{n_r^2 \omega^2} n_e \int d^3p \eta(\vec{p}, \vec{r}, \theta, \phi, \omega) \frac{\partial}{\partial \epsilon} f(p) \quad (\text{III.10b})$$

Na situação em que tivermos um meio em equilíbrio termodinâmico, ou pelo menos em equilíbrio termodinâmico local, podemos relacionar os coeficientes de absorção e emissão através da lei de Kirchhoff:

$$j(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) = \alpha(\vec{r}, \theta, \phi, \omega) B_{bb}(T) n_r^2 \quad (\text{III.11})$$

onde $B_{bb}(T) = \frac{h\omega^3}{8\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{T}} - 1}$ representa a intensidade de radiação de um corpo negro.

III.3 - A Função de Fonte

A função de fonte (source function, ou ergiebigkeit) é definida como:

$$S = \frac{j}{n_r^2 \alpha} \quad (\text{III.12})$$

Como vimos ao estabelecermos a expressão (III.11), para o caso de equilíbrio termodinâmico a função de fonte se iguala à intensidade de radiação de um corpo negro no vácuo. O significado físico da função de fonte se tornará mais claro após estudarmos a equação de transferência e sua solução, na próxima seção.

III.4 - A Equação de Transferência

A equação de transferência é a equação que descreve o comportamento da intensidade de radiação enquanto se propaga por um meio dielétrico. Ela nada mais é do que uma forma particular da equação de conservação de energia. Vamos derivá-la de forma simples, considerando um meio isotrópico; a generalização para um meio anisotrópico poderá ser feita com a substituição de n por n_r .

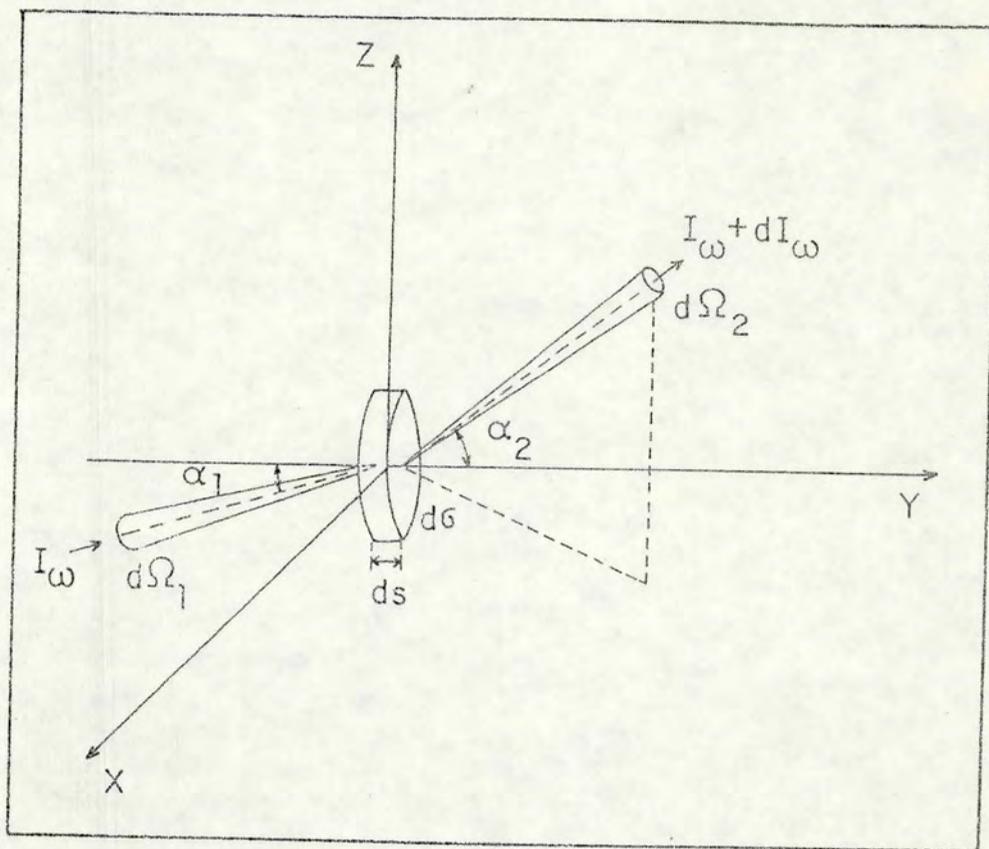


Figura III.2.

Seja um feixe de radiação de intensidade I_ω que penetra numa face de um volume cilíndrico de espessura ds e área da

seção reta $d\sigma$. Na face oposta sai um feixe de intensidade $I_\omega + dI_\omega$, onde dI_ω leva em conta qualquer alteração na intensidade ocorrida dentro do volume cilíndrico. Os feixes cobrem um ângulo sólido de $d\Omega_1$ e $d\Omega_2$, respectivamente, e têm a sua direção de propagação dado pelos ângulos θ_1, ϕ_1 e θ_2, ϕ_2 . É mais simples para nossa derivação definirmos os ângulos que os feixes de radiação fazem com a normal à superfície $d\sigma$ (no caso da Figura III.2, a normal é o próprio eixo y). Chamemos α_1 e α_2 a estes ângulos.

Considerando um meio sem perdas e supondo que não ocorram reflexões, podemos escrever a equação de conservação de energia entre as faces do cilindro:

$$I_\omega \cos\alpha_1 d\Omega_1 d\sigma d\omega = (I_\omega + dI_\omega) \cos\alpha_2 d\Omega_2 d\sigma d\omega \quad (\text{III.13})$$

Supor que não ocorrem reflexões equivale a considerar que o meio é quase homogêneo e que pode ser desprezado o gradiente do índice de refração do meio, frente ao seu valor absoluto ($\frac{1}{|n|} \frac{dn}{ds} \ll 1$, onde ds é um elemento de arco percorrido pela radiação).

Façamos agora uma pausa para encontrar uma outra equação que nos vai ser útil [Ma55]. Partimos da lei de Snell, $n \cdot \sin\alpha = \text{cte.}$ ao longo do raio, onde n é o índice de refração do meio na posição considerada.

Sejam dois meios separados pelo plano xz (ver Figura III.3). Se fizermos uma pequena variação no ângulo de incidência, teremos, pela lei de Snell:

$$n_1 \cos\alpha_1 d\alpha_1 = n_2 \cos\alpha_2 d\alpha_2 \quad (\text{III.14})$$

Se fizermos agora todo o conjunto girar de um ângulo $d\lambda$ em torno do eixo y , o ângulo sólido descrito pelo ponto B será dado por:

$$d\Omega_1 = \text{sen}\alpha_1 d\alpha_1 d\lambda$$

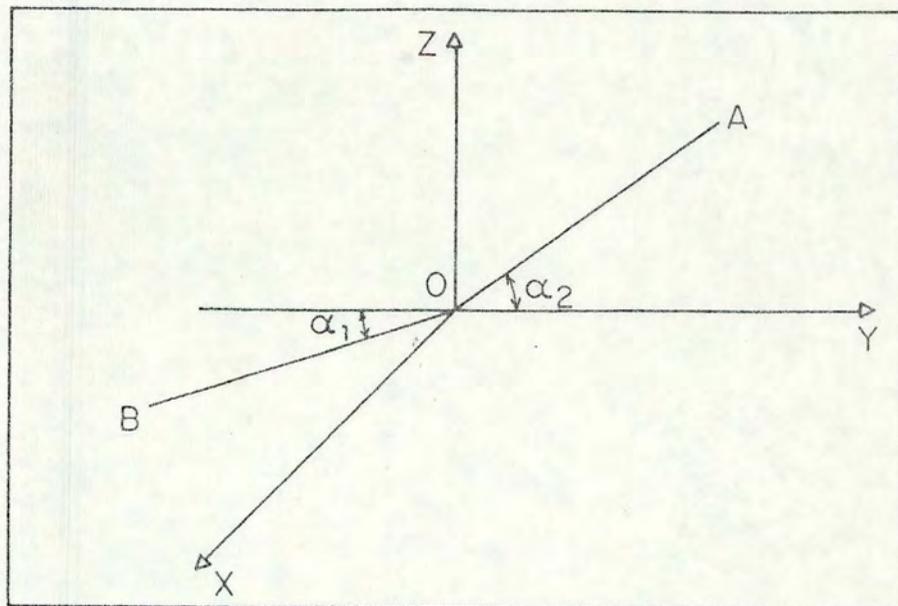


Figura III.3.

Analogamente, o ângulo sólido descrito pelo ponto A do raio refratado é dado por:

$$d\Omega_2 = \text{sen}\alpha_2 d\alpha_2 d\lambda$$

Portanto, usando (III.14):

$$\frac{d\Omega_1}{d\Omega_2} = \frac{\text{sen}\alpha_1 d\alpha_1}{\text{sen}\alpha_2 d\alpha_2} = \frac{n_2 d\alpha_1}{n_1 d\alpha_2} = \frac{n_2^2 \cos\alpha_2}{n_1^2 \cos\alpha_1} \quad (\text{III.15})$$

Podemos usar este resultado na expressão (III.13), obtendo:

$$\frac{I_{\omega}}{n_1^2} = \frac{I_{\omega} + dI_{\omega}}{n_2^2}$$

Isto equivale a dizer que $\frac{I_{\omega}}{n^2} = \text{cte.}$, ao longo do raio; escrevendo de outra forma:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{I_{\omega}}{n^2} \right) = 0 \quad (\text{III.16})$$

A equação (III.16) representa a equação de transferência para um meio isotrópico sem fontes e sem perdas. A inclusão da possibilidade de que a radiação seja absorvida ou emitida dentro da região considerada pode ser feita simplesmente, com a ajuda dos coeficientes de emissão e absorção, definidos por (III.4) e (III.9), de modo que ficamos com a seguinte expressão para a equação de transferência, válida para um meio isotrópico [Ch50]:

$$n^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{I_{\omega}}{n^2} \right) = j - \alpha I_{\omega} \quad (\text{III.17})$$

Definimos agora a espessura ótica do meio, entre os pontos s_i e s_f , como sendo:

$$\tau(s_f, s_i) = \int_{s_i}^{s_f} \alpha ds \quad (\text{III.18})$$

de modo que: $d\tau = \alpha ds$.

Dessa forma, a equação (III.17) fica:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{I_{\omega}}{n^2} \right) = S - \frac{I_{\omega}}{n^2} \quad (\text{III.19})$$

A equação (III.19) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, cuja solução é dada por

$$\left(\frac{I_{\omega}}{n^2}\right) e^{\int d\tau} = \int S e^{\int d\tau'} d\tau + c$$

Para $\tau(s_f, s_i)$:

$$\left(\frac{I_{\omega}}{n^2}\right)_{\tau(s_f, s_i)} e^{\tau(s_f, s_i)} = \int_{\tau(s_i, s_i)}^{\tau(s_f, s_i)} S e^{\tau} d\tau + c$$

Para $\tau(s_i, s_i) = 0$:

$$\left(\frac{I_{\omega}}{n^2}\right)_0 = \int^{\tau(s_i, s_i)} S e^{\tau} d\tau + c$$

Subtraindo a segunda expressão da primeira, tiramos que:

$$\left(\frac{I_{\omega}}{n^2}\right)_{\tau(s_f, s_i)} e^{\tau(s_f, s_i)} = \left(\frac{I_{\omega}}{n^2}\right)_0 + \int_{\tau(s_i, s_i)}^{\tau(s_f, s_i)} S e^{\tau} d\tau + c$$

ou

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_{\omega}}{n^2}\right)_{\tau(s_f, s_i)} &= \left(\frac{I_{\omega}}{n^2}\right)_0 e^{-\tau(s_f, s_i)} + \\ &+ \int_{\tau(s_i, s_i)}^{\tau(s_f, s_i)} S e^{-[\tau(s_f, s_i) - \tau(s, s_i)]} d\tau \quad (\text{III.20}) \end{aligned}$$

Supondo uma lâmina de meio material de espessura L , on

de incide uma radiação de intensidade $I_{\omega}(0, t, \theta, \phi)$, aplicamos a expressão (III.20) e a definição (III.18) e obtemos que a intensidade da radiação (desprezando reflexões nos contornos) que emerge é dada por:

$$I_{\omega}(s=L) = I_{\omega}(s=0) e^{-\alpha L} + \int_0^L \alpha S e^{-\alpha(L-s)} ds \quad (\text{III.21})$$

Note-se que sobre os contornos da lâmina o índice de refração é igual a 1.

Esta expressão tem um significado físico bastante claro: a emissão que observamos em uma face do meio material é resultado da soma da emissão incidente na outra face, atenuada pela passagem através do meio, com a emissão produzida dentro do próprio plasma, atenuada pela passagem através do espaço necessário para chegar ao ponto de observação.

Conforme vimos na secção III.3, no caso de equilíbrio termodinâmico a função de fonte se iguala à intensidade de radiação de um corpo negro no vácuo ($n_r^2 = 1$); no limite clássico, temos

$$B_{bb}(T) = \frac{h\omega^3}{8\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{T}} - 1} \approx \frac{h\omega^3}{8\pi^3 c^2} \frac{T}{h\omega} = \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2} \quad (\text{III.22})$$

Havendo equilíbrio termodinâmico, o meio é homogêneo em T e a expressão (III.21) pode ser integrada resultando em:

$$I_{\omega}(s=L) = I_{\omega}(s=0) e^{-\alpha L} + \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2} [1 - e^{-\alpha L}] \quad (\text{III.23})$$

A expressão (III.23) foi obtida supondo a ausência de reflexões e é útil para a visualização dos efeitos de absorção e emissão do plasma. A presença de reflexões pode ser incluída facilmente, através da definição de um coeficiente de reflexão superficial R ; considere-se que cada ponto do meio emite radiação em todas as direções, particularmente nas direções \vec{s} e $-\vec{s}$, e que esta radiação sofra reflexão cada vez que atinge a superfície da lâmina de plasma, sendo atenuada por absorção ao atravessar a lâmina outra vez. Considerando ainda que não haja radiação externa incidente e que não haja interferência entre ondas sucessivamente refletidas, teremos:

$$\begin{aligned}
 I_{\omega}(s=L) &= (1-R) \left[\int_0^L S e^{-\alpha(L-s)} ds + R e^{-\alpha L} \int_0^L S e^{-\alpha(L-s)} ds + \dots \right] = \\
 &= \frac{(1-R)}{(1-R e^{-\alpha L})} \int_0^L S e^{-\alpha(L-s)} ds \quad \text{(III.24)}
 \end{aligned}$$

Quando a situação é de equilíbrio termodinâmico, conforme discutido acima, obtemos [Be66]:

$$I_{\omega} = \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2} \frac{(1-R)(1-e^{-\alpha L})}{(1-R e^{-\alpha L})} \quad \text{(III.25)}$$

Os resultados obtidos aqui constituem os fundamentos da teoria de transporte de energia em meios dielétricos; voltaremos a estes resultados quando discutirmos os efeitos de absorção, dentro do contexto da aproximação de emissão por partículas independentes, que será desenvolvida no Capítulo IV.

IV - RADIAÇÃO DE CÍCLOTRON EM PLASMA TÊNUE

No Capítulo II, fizemos uma revisão da teoria de emissão de cíclotron por um elétron, no vácuo. Entretanto, na maior parte das situações físicas contamos com uma distribuição de elétrons, o que pode trazer aspectos novos e interessantes à emissão observada, entre os quais podemos citar o alargamento das linhas espectrais e a absorção da radiação. Para uma primeira aproximação, suporemos que o plasma seja tênue o suficiente para que as partículas que o constituem irradiem independentemente umas das outras, da forma que foi matematicamente descrita no Capítulo II. Consideraremos um plasma infinito e homogêneo; inicialmente estudaremos o caso de uma distribuição maxwelliana não relativística, mostrando que a radiação resultante apresenta picos alargados em consequência do movimento aleatório das partículas. Em seguida, abordaremos um exemplo de distribuição fracamente relativística, de interesse para plasmas termonucleares. Examinaremos também um problema de astrofísica, no qual a distribuição de elétrons radiantes é extremamente relativística. Finalmente, faremos alguns comentários sobre a possibilidade de que o plasma apresente amplificação da radiação de cíclotron.

IV.1 - Aplicação a um Plasma Não Relativístico

Como já dissemos na introdução deste capítulo, usamos a aproximação de partículas independentes, na qual desprezamos os efeitos dielétricos do plasma sobre a emissão e absorção de

radiação. Obtemos o coeficiente de emissão conforme definido pela expressão (III.4); para um plasma não relativístico, numa situação em que possamos desprezar as colisões entre partículas, a emissividade espectral é dada pela expressão (II.24). Nosso plasma infinito, homogêneo e não relativístico, em equilíbrio térmico, será caracterizado por uma função distribuição maxwelliana:

$$f(p) = \frac{n_e}{(2\pi)^{3/2} p_0^3} e^{-\frac{p^2}{2p_0^2}} \quad (\text{IV.1})$$

onde n_e é a densidade de elétrons e $p_0 = \sqrt{m_0 T}$.

Assim, usando a expressão (III.4), obtemos o coeficiente de emissão, que agora não é mais função da posição:

$$j(\theta, \omega) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dp_\perp p_\perp dp_\parallel 2\pi \frac{e^2 \omega^2}{8\pi c} \beta_\perp^2 (1 + \cos^2 \theta) \delta[\Omega_c - \omega(1 - \beta_\parallel \cos \theta)] \cdot \frac{n_e \exp\left[-\frac{p_\parallel^2 + p_\perp^2}{2p_0^2}\right]}{(2\pi)^{3/2} p_0^3} \quad (\text{IV.2})$$

$$j(\theta, \omega) = \frac{\omega_p^2 \omega^2}{16\pi^2 \sqrt{\pi} c^3} m_0 v_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \frac{1}{|\Delta|} \exp\left[-\frac{(\omega - \Omega_c)^2}{\Delta^2}\right] \quad (\text{IV.3})$$

onde $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_0}$ é a frequência de plasma.

$$\Delta = \sqrt{2} \frac{\omega}{c} v_0 \cos \theta$$

$$v_0 = \frac{p_0}{m_0}$$

A expressão (IV.3) mostra uma forma gaussiana, característica de linhas de emissão alargadas por efeito Doppler [Be66].

No primeiro parágrafo desta seção dissemos que estaríamos considerando a emissão de um plasma onde pudessem ser desprezados os efeitos das colisões. Este é usualmente o caso em situações que envolvem plasmas pouco densos e ondas eletromagnéticas de frequências radiofônicas ou superiores. Os intervalos de tempo relacionados com os processos de interesse para os fenômenos de radiação são muito menores do que os intervalos entre as colisões, de modo que estas podem ser negligenciadas. Nas situações onde as colisões entre as partículas desempenham um papel importante a emissão observada apresenta características diferentes daquelas descritas pela expressão (IV.3). Particularmente, para a observação perpendicular ao campo magnético a existência das colisões produz linhas de emissão de forma Lorentziana, cuja semi-largura à meia altura está diretamente relacionada à frequência de colisões. O problema da inclusão dos efeitos das colisões sobre a emissão de cíclotron foi tratado, por exemplo, por Oster [Os59], [Os60]. Um sumário do procedimento teórico e da conexão com resultados experimentais poderá ser encontrado em [Be66].

IV.2 - Aplicação a Um Plasma Levemente Relativístico

Consideremos agora a aplicação da teoria de radiação de cíclotron de partículas independentes a um plasma levemente relativístico. Este regime de energias pode ser encontrado, por

exemplo, em plasmas de laboratório, gerados em um θ -pinch ou um Tokamak. Como ilustração, citamos que um reator de fusão que operasse com a reação D-D teria uma temperatura de ignição de 36 keV, na ausência de emissão ciclotrônica. Nesta seção usamos como exemplo um plasma homogêneo e em equilíbrio térmico; supomos uma temperatura de cerca de 50 keV, de modo que a distribuição de momento dos elétrons é uma distribuição maxwelliana relativística,

$$f(p) = \frac{\exp\left[-\frac{m_0 c^2}{T} \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2}\right]}{4\pi T m_0^2 c^2 K_2\left(\frac{m_0 c^2}{T}\right)} \quad (\text{IV.4})$$

onde K_2 é a função de Hankel modificada de ordem 2.

Usando (III.4), temos:

$$j_{\pm}(\omega, \theta = \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\infty} 4\pi p^2 dp \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} A_m^{\pm}(\beta) \delta(m\Omega_0 - \omega) \\ n_e \frac{\exp\left[-\frac{m_0 c^2}{T} \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2}\right]}{4\pi T m_0^2 c^2 K_2\left(\frac{m_0 c^2}{T}\right)} \quad (\text{IV.5})$$

onde:

$$A_m^{-}(\beta) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \beta_{\perp}^2 J_m^2(m\beta_{\perp}) \sin\theta_p d\theta_p d\phi_p \\ A_m^{+}(\beta) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \beta_{\parallel}^2 J_m^2(m\beta_{\perp}) \sin\theta_p d\theta_p d\phi_p \quad (\text{IV.6})$$

θ_p e ϕ_p representam a parte angular do vetor momentum.

Seja $Y \equiv \frac{\Omega_c}{\omega}$ e $\mu \equiv \frac{m_0 c^2}{T}$; mudando a variável de integração de p para γ e integrando a expressão (IV.5), temos:

$$j_{\pm}(\omega, \theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{e^2 \omega}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{\pm}(\beta) \Big|_{\gamma=mY} (mY)^2 \frac{n e^{-mY\mu}}{T K_2(\mu)} m_0 c \sqrt{(mY)^2 - 1} \quad (IV.7)$$

Para $\mu \gg 1$ (razoável para $T < 50$ keV), $K_2(\mu) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} e^{-\mu}$.

Usando a definição de ω_p^2 [veja expressão (IV.3)] e a expressão acima para $K_2(\mu)$, ficamos com:

$$j_{\pm}(\omega, \theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega_p^2 \omega^2 T}{8\pi^3 c^2 \Omega_c} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{\pm}(m, Y, \mu) \quad (IV.8)$$

onde

$$\Phi_{\pm}(m, Y, \mu) \equiv \sqrt{2\pi} \mu^{5/2} Y^3 m^2 e^{-\mu(mY-1)} \sqrt{(mY)^2 - 1} A_m^{\pm}(\beta) \Big|_{\gamma=mY}$$

Na expressão (IV.8) podemos reconhecer o limite clássico da função de fonte para a situação de equilíbrio termodinâmico, conforme expressão (III.22). Substituindo a expressão (III.22) na expressão (IV.8) e usando a expressão (III.12), obtemos:

$$j_{\pm}(\omega, \theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega_p^2}{c} S \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{\pm}(m, Y, \mu) \quad (IV.9)$$

$$\alpha_{\pm}(\omega, \theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{j_{\pm}}{S} = \frac{\omega_p^2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{\pm}(m, Y, \mu)$$

Na segunda das expressões (IV.9) usamos $n^2 = 1$, pois

estamos tratando com um plasma t enuel.

Cabe aqui citar como comentário que a emissão no modo ordinário   usualmente pequena face   emissão no modo extraordinário, conforme mostram as seguintes aproxima es, obtidas por Trubnikov [Tr58], [Be66]:

$$\begin{aligned}
 m\beta \ll 1 \quad \frac{A_m^+}{A_m^-} &\equiv \frac{\beta^2}{2m+3} \\
 \frac{m}{\gamma^3} \gg 1 \quad \frac{A_m^+}{A_m^-} &\equiv \frac{\gamma(\gamma^2-1)}{2m}
 \end{aligned}
 \tag{IV.10}$$

Vamos analisar qualitativamente a forma do espectro, na situa o em que s o válidas as hipóteses feitas para a obten o da expressão (IV.9). O coeficiente de emissão apresenta dependência em freq ncia na fun o de fonte S e na fun o ϕ , definida por (IV.8). Vamos nos fixar nesta fun o. Cada harmônico m contribui apenas para a emissão em freq ncias tais que $mY \gg 1$ ($\omega \ll m\Omega_c$). Por outro lado, o termo $e^{-\mu(mY-1)}$ tende a fazer com que diminua a importância da contribui o   medida que cresce o valor de mY . Esta análise simples da expressão (IV.9) nos mostra que cada harmônico m contribui com uma linha de largura finita para o espectro de freq ncias. Podemos ilustrar esta afirmativa através da Figura IV.1, onde mostramos uma imagem do espectro para um plasma com uma temperatura de cerca de 50 keV. Vemos cada harmônico formando linhas grosseiramente gaussianas na forma, com uma largura que aumenta quando m aumenta. Devido ao alargamento progressivo das linhas para harmônicos crescentes, o espectro de freq ncia tende a tornar-se contínuo.

Nesta figura mostramos apenas a emissão no modo extraordinário, pois a segunda das condições (IV.10) nos mostra que já a partir do 5º ou 6º harmônico a emissão no modo ordinário é realmente desprezível face à emissão no modo extraordinário.

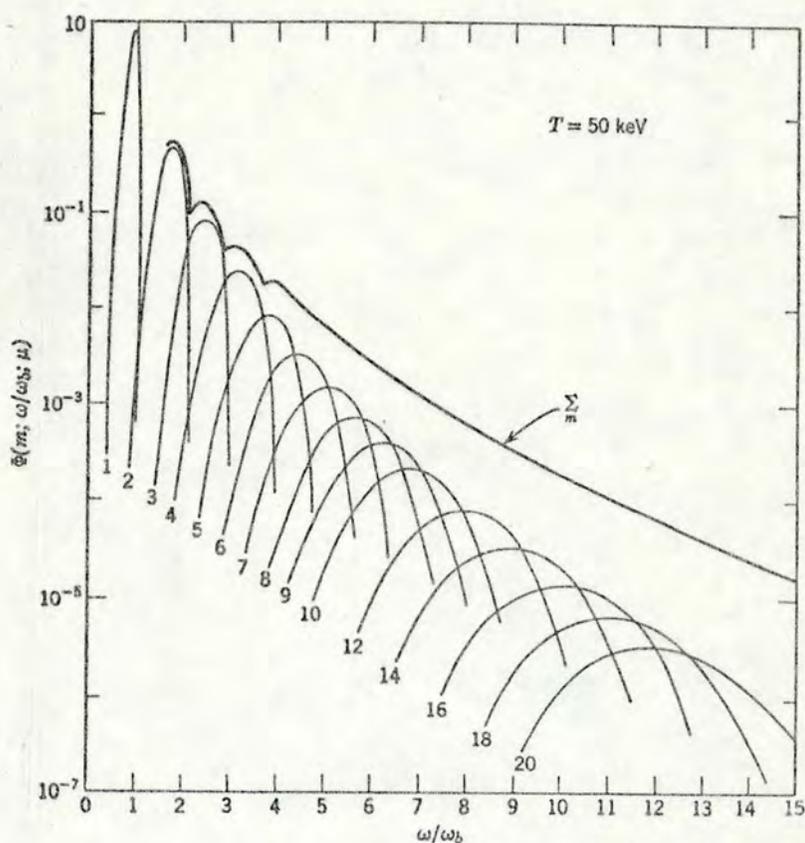


Figura IV.1 - Espectro dos 20 primeiros harmônicos, antes e após a soma sobre os harmônicos individuais. A auto-absorção da radiação é negligenciada [Be66], [HBB61].

Até agora não estamos levando em conta a possibilidade de ocorrência de absorção da radiação. Os plasmas de laboratório em geral apresentam uma densidade apreciável, podendo ocorrer uma modificação sensível no espectro, causada por absorção no plasma. Vamos considerar como exemplo uma lâmina de plasma homogêneo em equilíbrio termodinâmico, com largura L e com um

campo magnético paralelo às paredes da lâmina. Vamos supor que não haja reflexões nos contornos da lâmina. Nesse caso, usando as expressões (III.23) e (IV.9), teremos:

$$I_{-}(\omega, \theta = \frac{\pi}{2}) \Big|_L = \frac{\omega^2_T}{8\pi^3 c^2} (1 - e^{-\alpha_L}) = \frac{\omega^2_T}{8\pi^3 c^2} \left[1 - e^{-\Lambda \sum_m \Phi_{-}(m, Y, \mu)} \right] \quad (IV.11)$$

onde $\Lambda = \frac{\omega^2_L}{\Omega_c^2}$ é chamado "coeficiente de opacidade".

O sinal "-" indica que estamos considerando apenas a emissão no modo extraordinário.

A forma do espectro resultante é fortemente influenciada pela região de frequências que está sendo considerada. Existe uma região de frequências onde $\alpha_L < 1$ e outra onde $\alpha_L > 1$. A frequência onde $\alpha_L = 1$ será chamada de $\bar{\omega}$ e determina essencialmente a separação do espectro em duas partes: Quando $\alpha_L > 1$ o plasma irradia como um corpo negro, enquanto que para frequências maiores do que $\bar{\omega}$ ($\alpha_L < 1$) o plasma é transparente à radiação e observamos a soma das emissões independentes dos elétrons constituintes do plasma.

A teoria simples delineada nos últimos parágrafos serviu de base para muitas especulações relativas ao efeito da radiação de cíclotron sobre o funcionamento de reatores de fusão. Em um trabalho apresentado em 1958 por Trubnikov e Kudriavtsev [TK58] foi feita o alerta de que o tamanho de um reator deveria ser muito grande para que a produção de energia termonuclear igualasse a perda por radiação. Houve alguma controvérsia a respeito da validade de certas hipóteses, como se pode acompanhar em [DR60], [Tr61], [DR61] e [DR63], por exemplo. Em [DR63] o cál

culo foi feito e mostrou que a perda por radiação estava em concordância aproximada com o resultado obtido por Trubnikov e Kudriavtsev. Drummond e Rosenbluth calcularam também a produção de energia para um reator D - D e estudaram o caso de uma lâmina de plasma, determinando a espessura mínima da lâmina necessária para que a produção de energia seja igual à perda por radiação. Seus resultados estão apresentados na Tabela IV.1, para um dado conjunto de parâmetros.

Tabela IV.1 - L_{cr}^* (em m); parâmetros: $T = 50$ keV, $B_0 = 10^5$ gauss [DR63].

HIPÓTESES	$\beta_p = 0,1$	$\beta_p = 0,4$
I - 1/3	1,41	0,022
I - 0	10,68	0,167
II - 1/3	7,76	0,121
II - 0	205,0	3,2

onde:

$$L^* \equiv L/(1 - R).$$

L é a espessura da lâmina.

R é a refletividade das paredes.

As letras "cr" indicam que se trata da dimensão crítica (mínima) para que a produção de energia iguale a perda por radiação.

$\beta_p = \frac{n_i T_i + n_e T_e}{B_0^2 / 8\pi}$: quociente entre densidade de energia cinética das partículas e densidade de energia magnética.

I: calculado incluindo as reações com He^3 (veja abaixo).

II: calculado omitindo as reações com He^3 .

0 e $\frac{1}{3}$: fração da perda de energia que retorna para os íons.

O tamanho crítico para um cilindro de plasma é maior por um fator de cerca de 2,5 [DR63].

Em um reator D - D (D: deutério) cerca de metade das reações D - D levam à produção de T (trítio) e a outra metade leva à produção de He^3 . O T formado reage imediatamente com o D, enquanto o He^3 tem com este uma taxa de reação mais reduzida, devido à menor seção de choque da reação. Os valores indicados por I na Tabela IV.1 foram obtidos levando em conta estas reações com He^3 , enquanto que os valores indicados por II foram obtidos sem levar em conta estas reações.

Cabe salientar ainda duas coisas: conforme mostra a Tabela IV.1, o aumento no valor de β_p favorece a diminuição do tamanho dos reatores; entretanto, β_p é um parâmetro crítico para a estabilidade do sistema e frequentemente existe uma tolerância máxima para o valor admissível de β_p em um sistema que deve ser estável [DR63]. Os autores enfatizam também que o uso de espelhos para a radiação poderia contribuir grandemente para a obtenção de uma relação favorável entre perda e produção de energia em um reator termonuclear.

IV.2a - Resultados experimentais:

Em um trabalho publicado por Costley e o grupo do tokamak TFR [Co77] encontramos um exemplo recente de medida de emissão ciclotrônica de elétrons. Trabalhos experimentais anteriores, como [CHPC74], tinham mostrado que a presença de "runaway electrons", elétrons acelerados que acrescentam uma "cauda" de alta energia na distribuição das partículas, poderia influen-

ciar apreciavelmente a intensidade e a dependência em frequência da radiação. Em [Co77] são apresentadas medidas realizadas em um plasma de alta densidade com baixo nível de "runaway electrons" (ou elétrons fugitivos). As medidas foram feitas em um plasma produzido no tokamak TFR, sendo a radiação observada na direção radial e na direção de uma corda vertical. As incertezas no processo de medida fazem com que a forma relativa e a posição em frequência sejam confiáveis com uma margem de $\pm 10\%$. O valor absoluto da emissão na direção radial é confiável até $\pm 40\%$ e na direção vertical a incerteza é por um fator de 4. A dificuldade em obter resultados mais precisos é um fator que inibe a comparação entre previsões teóricas e resultados experimentais.

As medidas apresentadas em [Co77] foram realizadas sob 3 condições diferentes, sendo variados parâmetros como a temperatura, a corrente no plasma e o campo magnético. Em dois casos, como aquele apresentado na Figura IV.2, ocorreu o aparecimento de um pico na frequência de plasma ω_p , que não tem conexão com a teoria até aqui apresentada; os autores [Co77] sugerem que este pico possivelmente está associado com a presença residual de elétrons de alta energia. Tentativas teóricas de explicação deste pico podem ser encontradas em [FLW78] e [FWLD78].

Outros aspectos relevantes podem ser observados na Figura IV.2: ocorrem picos de emissão nos harmônicos da frequência de cíclotron correspondentes ao campo magnético no centro do plasma. Estes picos apresentam uma discordância importante com a teoria simples apresentada até aqui, que reside nas alturas relativas das linhas de emissão. Ocorre também o fenômeno de absorção, fazendo com que os picos correspondentes aos primeiros

harmônicos apareçam "presos" dentro da radiação de corpo negro do plasma (o que acontece quando $\alpha L > 1$, conforme exposto anteriormente neste mesmo capítulo).

Foram feitas também medidas da polarização da radiação, resultando em espectros idênticos para os modos ordinário e extraordinário, apesar de ser esperada uma dominância do modo extraordinário. Foi sugerido que as reflexões da radiação dentro do toróide poderiam estar destruindo a polarização.

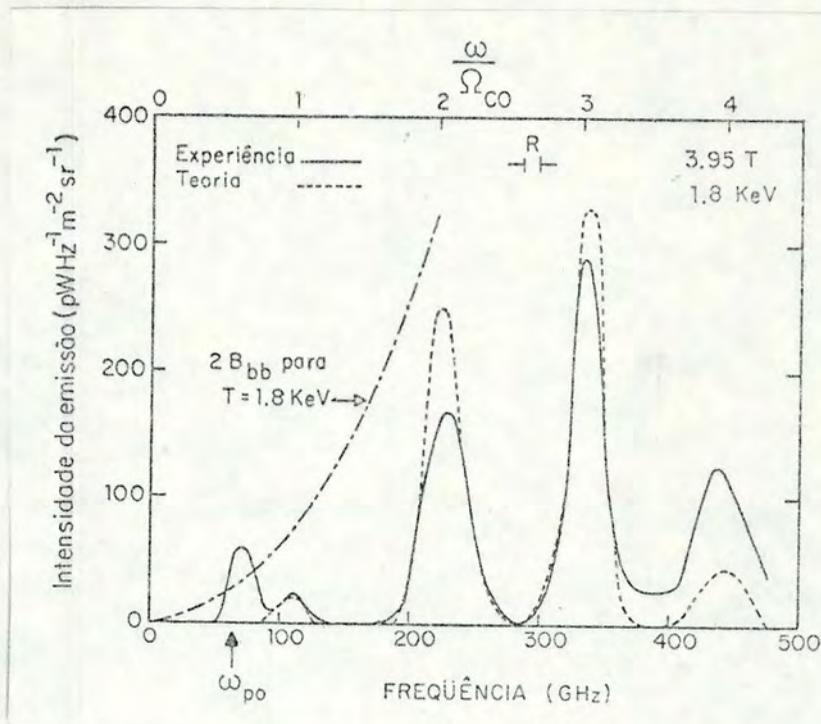


Figura IV.2 - Espectro de emissão do plasma; direção radial; resolução 13 GHz [Co77].

- Condições: $n_{e0} = 5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ (densidade central dos elétrons)
 $T_{e0} = 1,8 \text{ keV}$ (temperatura central dos elétrons)
 $B_0 = 3,9 \times 10^4 \text{ gauss}$ (indução magnética no centro do toróide)
 $I_p = 150 \text{ kA}$ (corrente de plasma)
 $V_L = 1,8 \text{ volts}$ (voltagem por espira).

IV.3 - Aplicação a Um Plasma Astrofísico

Há uma frase muito usada como introdução ao tema da física de plasmas, de forma que já se tornou um lugar comum: O Universo é fundamentalmente formado de matéria em estado de plasma, com exceções pequenas e bastante localizadas, como a superfície dos planetas. Dessa forma, os domínios da Astrofísica constituem aplicação natural para os resultados desenvolvidos em física de plasmas.

As possibilidades de acesso a dados experimentais em Astrofísica dependem em grande parte da obtenção e interpretação de espectros de fontes cósmicas de radiação. O acesso mais direto constituiu-se até agora em exploração limitada no meio interplanetário e as perspectivas são de que levaremos muito tempo para ultrapassar os limites do Sistema Solar, embora havendo grandes avanços no conhecimento deste. Quanto ao mais, continuando de extrema importância o estabelecimento de mecanismos teóricos para interpretar a emissão da radiação cósmica e o estudo da propagação dessa radiação através do meio interestelar ou intergaláctico, até atingir nossos detetores.

A forma particular de emissão de radiação que estamos estudando, a radiação de cíclotron, foi pela primeira vez sugerido para explicar a radiação cósmica em 1950, por Alfvén e Herlofson [AH50] e por Kiepenhauer [Ki50]. Desde então a hipótese atingiu uma popularidade considerável e houve um momento em que pareceu que estávamos a ponto de entender completamente a radio-emissão cósmica. Entretanto, através de estudo mais criterioso e da obtenção de novos resultados experimentais, foi veri

ficado que em certos casos surgem dificuldades insuperáveis na interpretação [KTS73]. Podemos generalizar dizendo que o mecanismo de cíclotron (mais exatamente de síncrotron, pois lidaremos com partículas extremamente relativísticas) pode explicar a emissão de fontes extensas e razoavelmente estacionárias, mas que sua aplicação a objetos compactos e altamente variáveis encontra sérias dificuldades. Estes casos não serão abordados em nossa apresentação, pois nosso interesse é considerar um exemplo simples da aplicação da teoria de emissão de síncrotron por partículas independentes, aplicada a situações astrofísicas.

Primeiramente, estabeleceremos algumas generalidades acerca dos dados experimentais em radioastronomia.

Em princípio, as fontes de rádio extragaláticas são divididas em fontes extensas e fontes compactas. Entre outras características peculiares, as fontes extensas não mostram variação do fluxo da radiação com o tempo, enquanto que as fontes compactas mostram uma variação de até um fator 3, numa escala de tempo que vai de poucos dias a poucos anos [Pa77]. Não há uma conexão clara entre as propriedades da emissão de rádio e a aparência visual da fonte, mas as fontes extensas são usualmente associadas com brilhantes galáxias elípticas ou "quasars". São essas fontes extensas que vão atrair mais de perto a nossa atenção; vamos nos dedicar ao que mais nos interessa, que é o tipo de espectro observado: caracteristicamente, para frequências entre 1 e 10^4 MHz, o espectro de uma determinada fonte segue uma lei da forma:

$$I(\omega) \propto \omega^{-\alpha} \quad (\text{IV.12})$$

onde α é chamado o índice espectral da fonte. Um estudo realizado em cerca de 300 fontes [Pa77], determinadas entre 178 e 1400 MHz, indica uma significativa predominância de fontes com $\alpha \approx 0,75$ (veja Figura IV.3).

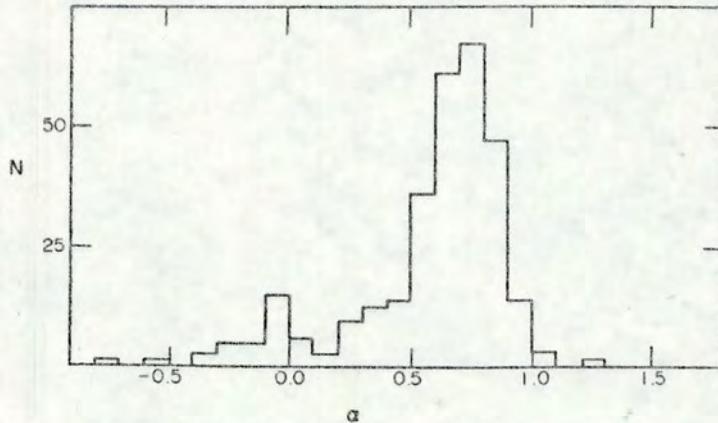


Figura IV.3 - Distribuição de Índices espectrais entre 178 e 1400 MHz [Pa77].

Esta característica nem sempre se mantém em todo o espectro. Na Figura IV.4 vemos gráficos da intensidade de radiação em função da frequência, obtidos para 6 fontes diferentes. No caso (a) vemos exemplos onde o índice espectral se mantém constante sobre um grande intervalo de frequências (chamados espectros "retos") e no caso (b) exemplos onde o espectro mostra-se mais "achatado" em certa região de frequência, até mesmo tendo seu comportamento invertido, passando a intensidade da radiação a diminuir à medida que a frequência diminui.

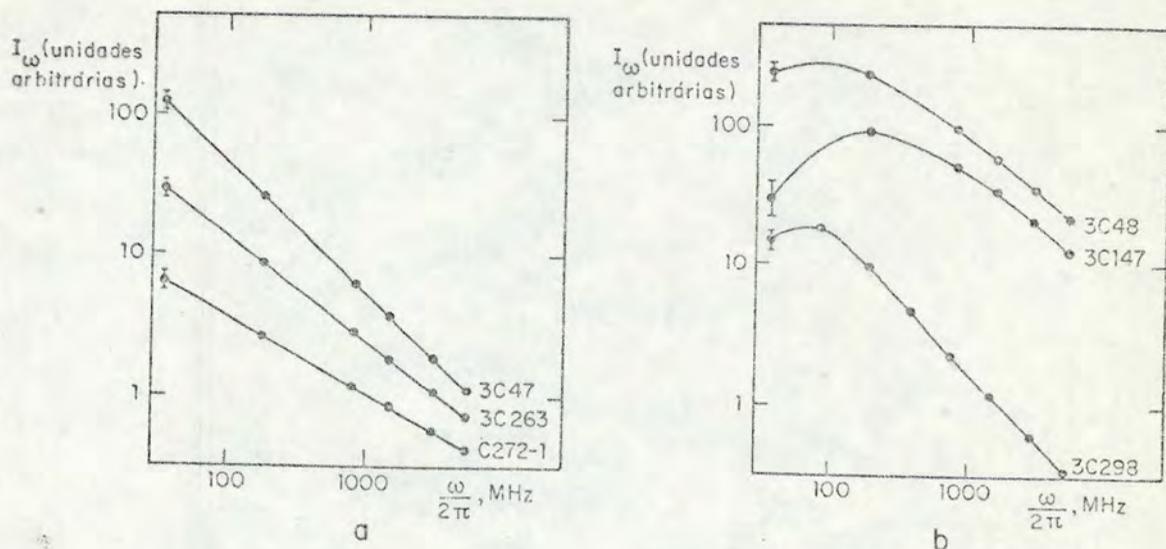


Figura IV.4 - Espectro de rádio-galáxias. (a) Índice espectral constante sobre um grande intervalo de frequências; (b) diminuição no espectro em baixas frequências [Kt73].

Na tentativa de encontrar um modelo para explicar a emissão observada, podemos supor que esta é produzida por elétrons extremamente relativísticos, sujeitos a um campo magnético uniforme. De acordo com a definição (III.4), para calcular o coeficiente de emissão na aproximação de emissão por partículas independentes precisamos ter uma função distribuição para estes elétrons extremamente relativísticos, além de usar a expressão (II.27) para a emissividade espectral dos mesmos.

Um ponto de partida possível para a função distribuição de elétrons em fontes cósmicas de radiação é a distribuição de elétrons existente nas vizinhanças da Terra. Até o momento, esta ainda não foi determinada com precisão, apesar de inúmeras medidas feitas em anos recentes [IK76]. Estas medidas revelam uma forma característica $N(E) \propto E^{-s}$, mas há discrepâncias quanto ao valor de s . Recentemente, Iodko, Karakad'ko e Romanov

[IKR76] determinaram $s = 3,0 \pm 0,2$, na região de energias entre 4 e 20 GeV. Ginzburg e Syrovatskij [GS67] apresentam $s = 2$, na região de energias entre 2 e 10 GeV, ressaltando ser essa apenas uma boa estimativa, enquanto referem-se a um resultado obtido por Y. Tanaka, na região entre 3 e 30 GeV, com $s = 2,4$.

Uma determinação precisa do valor de s em todo o espectro seria de mais interesse se estivéssemos tentando construir modelos para explicar a aceleração das partículas até atingirem a distribuição de energias observada. O caso não é este, entretanto; queremos apenas uma função tentativa para a forma da distribuição de energia das partículas em fontes cósmicas de radiação. Em [KTs73] encontramos a sugestão de usar a seguinte distribuição:

$$N(E) = \frac{s(s^2 - 1) n_* E_*^{s-1}}{2(E_* + E)^{s+2}} E^2 \quad (\text{IV.13})$$

Para $E \gg E_*$, $N(E) \propto E^{-s}$, de acordo com a distribuição de altas energias observada em raios cósmicos na nossa vizinhança. Para $E \ll E_*$, $N(E) \propto E^2$, o que está de acordo com a hipótese de que a densidade de fase em baixas energias é constante, hipótese essa usual em distribuições de quase equilíbrio estabelecidas através de interações. Note-se que E_* deve satisfazer a condição $E_* \gg m_0 c^2$, para que a distribuição seja relevante na região de elétrons extremamente relativísticos e para a correta normalização de (IV.13):

$$\int_{m_0 c^2}^{\infty} N(E) dE = \frac{s(s^2 - 1) n_*}{2} \int_{\frac{m_0 c^2}{E_*}}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^{s+2}} dx \quad (\text{IV.14})$$

onde $x \equiv E/E_*$.

Podemos escrever a (IV.14) como:

$$\frac{s(s^2-1)n_*}{2} \left[\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x)^{s+2}} - \int_0^{\frac{m_0 c^2}{E_*}} \frac{x^2}{(1+x)^{s+2}} dx \right] =$$

$$= n_* \left[1 - \frac{s(s^2-1)}{6} \left(\frac{m_0 c^2}{E_*} \right)^3 {}_2F_1 \left(s+2, 3; 4; -\frac{m_0 c^2}{E_*} \right) \right] \quad (\text{IV.15})$$

onde ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ é a função hipergeométrica de Gauss [GR65]; os primeiros termos de sua expansão em série de potências são:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2} z^2 + \dots \quad (\text{IV.16})$$

No nosso caso, $\alpha = s+2$, $\beta = 3$ e $\gamma = 4$; portanto, para os valores de s discutidos anteriormente, podemos considerar $\alpha \approx \gamma$; definindo $\gamma_* = \frac{E_*}{m_0 c^2}$ (portanto, $\gamma_* \gg 1$ deve ser uma condição satisfeita), ficamos com:

$${}_2F_1 \approx 1 - \frac{3}{\gamma_*} + \frac{6}{\gamma_*^2} - \frac{10}{\gamma_*^3} + \dots$$

A condição $\gamma_* \gg 1$ nos permite ficar com ${}_2F_1 \approx 1$; logo:

$$\int_{m_0 c^2}^\infty N(E) dE \approx n_* \left(1 - \frac{s(s^2-1)}{6} \frac{1}{\gamma_*} \right) \approx n_* .$$

Portanto,

$$\int_{m_0 c^2}^{\infty} N(E) dE \approx \int_0^{\infty} N(E) dE = n_* \quad (\text{IV.17})$$

Dessa forma, podemos usar o limite inferior de energia igual a zero, pois a diferença é desprezível em relação ao cálculo exato, com $E_{\text{mín}} = m_0 c^2$. Agindo assim, simplificamos as integrais em energia que aparecem e não prejudicamos sensivelmente o resultado, que já depende de uma série de hipóteses simplificadoras.

Tendo suposto a expressão (IV.13) para a distribuição de elétrons relativísticos, podemos obter o coeficiente de emissão com o uso da expressão (III.4); como a nossa função distribuição é isotrópica, definimos uma emissividade média através da integração sobre a parte angular do vetor momentum, dada por $d\Omega_p$:

$$\langle n(\beta) \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int n(\beta, \theta p) d\Omega_p \quad (\text{IV.18})$$

Dessa forma, o coeficiente de emissão fica dado por:

$$\begin{aligned} j(r, \theta = \frac{\pi}{2}, \omega) &= 4\pi n_e \int_0^{\infty} p^2 dp f(p) \langle n(\beta, \theta = \frac{\pi}{2}) \rangle \\ &= \int_0^{\infty} dE N(E) \langle n(\beta, \theta = \frac{\pi}{2}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Supusemos que a emissão é perpendicular ao campo magnético, por simplicidade. Para esta situação, Trubnikov obteve a expressão da emissividade média [Tr58]:

$$\langle \eta(\beta, \theta = \frac{\pi}{2}) \rangle = 2A\Omega_c \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \quad (\text{IV.20})$$

$$A \equiv \frac{\sqrt{3} e^2}{16\pi^2 c}$$

Introduzindo a expressão (IV.20) na expressão (IV.19) e usando a função distribuição (IV.13), obtemos:

$$j(r, \theta = \frac{\pi}{2}, \omega) = \int_0^{\infty} dE \frac{s(s^2 - 1) n_* E_*^{s-1} E^2 2A\Omega_c \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt}{2(E_* + E)^{s+2}} \quad (\text{IV.21})$$

Como já dissemos no Capítulo II, a função $\left[\frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \right]$ tem seus valores tabelados, o que nos permitiria realizar numericamente a integração da expressão (IV.21). Entretanto, no Capítulo II apresentamos uma expressão analítica aproximada que serve aos nossos propósitos:

$$\left[\frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \right] \approx \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/3} e^{-\omega/\omega_c} \quad (\text{II.28})$$

Inserindo esta expressão em (IV.21):

$$j(r, \frac{\pi}{2}, \omega) \cong A \cdot s(s^2 - 1) n_* E_*^{s-1} \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \Omega_c \cdot \int_0^{\infty} dE \frac{E^2}{(E_* + E)^{s+2}} u^{1/3} e^{-u} \quad (\text{IV.22})$$

onde $u \equiv \frac{\omega}{\omega_c}$.

Mudando a variável de integração de E para u e definindo:

$$\Omega \equiv \frac{\omega}{\frac{3}{2} \Omega_c}, \quad \gamma_* = \frac{E_*}{m_0 c^2}$$

temos:

$$j(r, \pi/2, \omega) = \frac{A}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{s(s^2 - 1) n_* \Omega_c \Omega^{3/2}}{\gamma_*^3} \cdot \int_0^\infty du \frac{u^{\frac{3s-7}{6}} e^{-u}}{\left[\frac{\Omega^{1/2}}{\gamma_*} + u^{1/2}\right]^{s+2}} \quad (\text{IV.23})$$

Fizemos um programa para integrar numericamente a expressão (IV.23), usando a regra de Simpson; para a execução do programa utilizamos um computador HP-2100. Usamos estimativas largamente aceitas para o valor do campo magnético na região de emissão e o valor do expoente s na distribuição (IV.13). O valor de γ_* foi fornecido tendo em conta a condição $\gamma_* \gg 1$. Um exemplo dos resultados pode ser visto na Figura IV.5, onde apresentamos $\frac{j}{n_* A}$ contra ω .

Uma comparação entre a Figura IV.5 e IV.4 mostra que o modelo de elétrons extremamente relativísticos movendo-se em campos magnéticos cósmicos é adequado para explicar o espectro de radiação contínua de fontes extensas e estacionárias, categoria que engloba grande fração das fontes cósmicas. O resultado teórico nos mostra um espectro "reto" sobre uma larga faixa de frequências e apresenta ainda o chamado "turnover" em baixas frequências, similar ao dos espectros experimentais da Figura IV.4b. Neste caso, a alteração no comportamento do espectro em baixas frequências foi devida à forma da distribuição usada para as

energias das partículas. Existem outras causas que podem resultar na presença do "turnover", discutidas em [Pa77]. Cada uma destas causas resulta em um espectro onde a intensidade da radiação cresce com a frequência segundo um expoente característico, até que se atinja o ponto onde o espectro se torna "reto" e decrescente com o aumento da frequência.

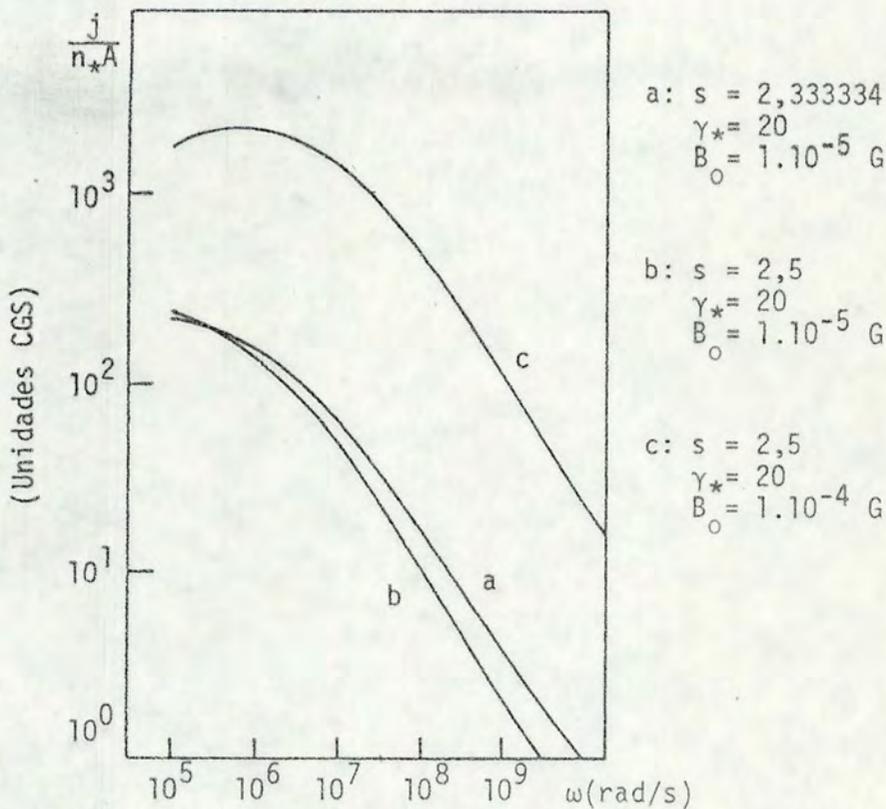


Figura IV.5 - Espectro de radiação de cíclotron produzido por elétrons extremamente relativísticos, com distribuição em energias proporcional a $E^2/(E_* + E)^{s+2}$.

IV.4 - Amplificação da Radiação

Conforme já vimos no Capítulo III, o coeficiente de absorção é determinado por dois processos; a absorção que se pode

realmente observar resulta da diferença entre o coeficiente de absorção "verdadeiro" e a emissão estimulada. Sob certas circunstâncias, o coeficiente de absorção pode ser negativo, causando uma amplificação da radiação à medida que esta se propaga através do plasma. Esta possibilidade foi discutida, por exemplo, em [BHB61] e em um artigo de revisão [BB61] que analisa processos de emissão de rádio em plasmas. As condições estabelecidas para que possa haver amplificação são:

$$\frac{\partial}{\partial E} N(E) > 0 ; \tag{IV.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial E} \left\{ n(E) E \left[E^2 - (m_0 c^2)^2 \right]^{1/2} \right\} < 0 ;$$

onde $N(E)$ é a função de distribuição em energia das partículas do plasma.

Traduzindo em palavras, a primeira das condições significa que uma distribuição de elétrons que apresente uma inversão de população em algum ponto, ou seja, quando em algum intervalo de energias houver mais elétrons do que no intervalo precedente, pode gerar um coeficiente de absorção negativo, desde que seja satisfeita a segunda condição. Em [BB61] foi mostrado que esta situação pode ocorrer para plasmas de laboratório e que a amplificação pode tornar-se fator importante na perda de energia por emissão em reatores de fusão, desde que ocorra algum processo que mantenha uma distribuição não maxwelliana. Entretanto, foi mostrado que para elétrons extremamente relativísticos as condições (IV.24) requerem a existência de feixes de elétrons quase monoenergéticos, o que não se ajusta com o tipo de distri

buição considerado na seção IV.3, de forma que não se deve esperar amplificação da radiação de síncrotron cósmica, ao menos para o tipo de fontes discutido anteriormente. Em um trabalho de vido a McCray [Mc66] foi levantada a possibilidade de que a consideração dos efeitos do plasma ambiente sobre a emissão da radiação de cíclotron poderia levar a situações onde haveria amplificação da radiação, na presença de uma inversão na população dos elétrons. Estes efeitos do plasma ambiente serão incluídos no cálculo da emissão de radiação ciclotrônica, no Capítulo V. Não faremos uma análise detalhada da possibilidade de amplificação da radiação porque, como dissemos no Capítulo I, os processos de radiação induzida estão fora dos objetivos deste trabalho.

V - INFLUÊNCIA DIELÉTRICA DO PLASMA SOBRE A RADIAÇÃO DE CÍCLOTRON

No capítulo anterior delineamos e discutimos a teoria de radiação por partículas independentes; o efeito do plasma ambiente foi levado em conta apenas no estudo da propagação da radiação através do meio. Neste capítulo lidaremos com o problema da influência da polarização dielétrica sobre a emissão da radiação de cíclotron. Faremos isso através do estudo, feito com algum detalhe, de duas abordagens que representam as tentativas mais recentes de solver o problema. Em uma delas, obtemos a potência irradiada por meio do cálculo da dissipação de energia das correntes microscópicas, por efeito Joule. Na outra abordagem, obtemos diretamente os campos de radiação a partir das equações de Maxwell e calculamos o vetor de Poynting para obter a potência irradiada.

Ao final do capítulo acrescentamos uma seção que aborda os efeitos do plasma ambiente sobre a geração e propagação de radiação em plasmas cósmicos.

V.1 - Radiação de Cíclotron de um Plasma Infinito e Homogêneo

Primeiramente, obteremos o coeficiente de emissão para a radiação de cíclotron espontânea, seguindo o método apresentado por Freund e Wu em 1977 [FW77a]. Neste método faz-se uso do formalismo da teoria cinética dos plasmas devido a Klimontovich [K167]. Apresentaremos o cálculo com algum detalhe, mas já podemos adiantar que discutiremos o caso de um plasma de elétrons,

quase-estacionário e homogêneo, sem absorção, usando uma aproximação linear. Quando se tratar de obter os modos propagantes, usaremos uma aproximação de plasma frio, a qual nos levará a conhecida relação de dispersão de Appleton-Hartree para um plasma em equilíbrio térmico. Usaremos ainda uma outra aproximação, que é a de desprezar os efeitos dos campos sobre as correntes que produzem os campos (não usaremos "auto-consistência").

Seja N_e o número total de elétrons do plasma e $\vec{v}_\ell(t)$ e $\vec{x}_\ell(t)$ a velocidade e posição do ℓ -ésimo elétron no tempo t ; podemos escrever a corrente microscópica que serve de fonte para os campos de radiação como:

$$\delta\vec{J}(\vec{x}, t) = -e \sum_{\ell=1}^{N_e} \vec{v}_\ell(t) \delta[\vec{x} - \vec{x}_\ell(t)] \quad (V.1)$$

Assim, sendo $\delta\vec{E}(\vec{x}, t)$ o campo microscópico de radiação gerado por $\delta\vec{J}(\vec{x}, t)$, a potência instantânea irradiada pelo plasma será dada por:

$$P(t) \equiv - \int d^3x \delta\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta\vec{J}(\vec{x}, t) \quad (V.2)$$

A potência dada pela equação (V.2) depende de quantidades microscópicas e é, portanto, fortemente dependente do tempo. O que nos interessa é obter um resultado macroscópico, o que conseguimos fazendo uma média da expressão (V.2) sobre o ensemble e definindo dessa forma a potência média irradiada:

$$P_m = - \int d^3x \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \lim_{t' \rightarrow t} \langle \delta\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta\vec{J}(\vec{x}', t') \rangle \quad (V.3)$$

Supondo que o plasma seja um meio quase-estacionário e homogêneo, $\langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta \vec{J}(\vec{x}', t') \rangle$ será função apenas de $\vec{r} \equiv \vec{x} - \vec{x}'$ e $\tau \equiv t - t'$. Definimos a transformada de Fourier desta quantidade de como:

$$\langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta \vec{J}(\vec{x}', t') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega\tau)}$$

$$\cdot \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta \vec{J}(\vec{x}', t') \rangle_{\vec{k}, \omega} \quad (V.4)$$

Para escrever a potência média irradiada em termos de $\delta \vec{E}(\vec{k}; \omega)$ e $\delta \vec{J}(\vec{k}, \omega)$, de forma que possamos mais tarde encontrar a distribuição espectral desta potência irradiada, faremos uso das transformadas de Fourier-Laplace de $\delta \vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\delta \vec{J}(\vec{x}, t)$ e de um resultado que pode ser encontrado em [K167]:

$$\delta \vec{E}(\vec{k}, \omega + i\Delta) \equiv \int_0^{\infty} dt \int d^3x \cdot e^{(i\omega t - \Delta t - i\vec{k} \cdot \vec{x})} \delta \vec{E}(\vec{x}, t)$$

$$(V.5)$$

$$\delta \vec{J}(\vec{k}, \omega + i\Delta) \equiv \int_0^{\infty} dt \int d^3x \cdot e^{(i\omega t - \Delta t - i\vec{k} \cdot \vec{x})} \delta \vec{J}(\vec{x}, t)$$

$$\delta(\vec{k} - \vec{k}') \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta \vec{J}(\vec{x}', t') \rangle_{\vec{k}, \omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta$$

$$\langle \delta \vec{E}(\vec{k}, \omega + i\Delta) \cdot \delta \vec{J}^*(\vec{k}', \omega + i\Delta) \rangle \quad (V.6)$$

Assim, teremos:

$$P_m = - \int d^3x \lim_{x' \rightarrow x} \lim_{t' \rightarrow t} \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \vec{J}(x', t') \rangle = - \int d^3x \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} \\ \cdot \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega\tau)} \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta \vec{J}(\vec{x}', t') \rangle_{\vec{k}, \omega} \quad (V.7)$$

Introduzindo $\int d^3k' \delta(\vec{k} - \vec{k}') = 1$, podemos transformar a expressão (V.7):

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \rightarrow e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} \rightarrow e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}}$$

Usando (V.6), ficamos com:

$$P_m = - \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k' \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \\ \cdot \langle \delta \vec{E}(\vec{k}, \omega + i\Delta) \cdot \delta \vec{J}^*(\vec{k}', \omega + i\Delta) \rangle$$

$$P_m = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k' \delta(\vec{k} - \vec{k}') \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \\ \cdot \langle \delta \vec{E}(\vec{k}, \omega + i\Delta) \cdot \delta \vec{J}^*(\vec{k}', \omega + i\Delta) \rangle$$

$$P_m = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \langle \delta \vec{E}(\vec{k}, \omega + i\Delta) \cdot \delta \vec{J}^*(\vec{k}, \omega + i\Delta) \rangle \quad (V.8)$$

Podemos relacionar o campo $\delta \vec{E}$ que aparece em (V.8) com a corrente da fonte $\delta \vec{J}$, através do uso de duas das equações de Maxwell. Aplicando o método de transformada de Fourier às mes

mas, resulta:

$$\vec{k} \times \delta \vec{E} = \frac{\omega}{c} \delta \vec{B} \quad (V.9)$$

$$\vec{k} \times \delta \vec{B} = -\frac{\omega}{c} \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \delta \vec{E} - \frac{4\pi i}{c} \delta \vec{J}$$

onde $\overleftrightarrow{\epsilon}$ é o tensor dielétrico do plasma.

Combinando as duas equações (V.9) e usando alguma álgebra vetorial, obtemos:

$$\left[\frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} - 1 \right) + \overleftrightarrow{\epsilon} \right] \cdot \delta \vec{E} = -\frac{4\pi i}{\omega} \delta \vec{J}$$

Seja $\overleftrightarrow{\Lambda} \equiv \left[\frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} - 1 \right) + \overleftrightarrow{\epsilon} \right]$; portanto,

$$\overleftrightarrow{\Lambda} \cdot \delta \vec{E} = -\frac{4\pi i}{\omega} \delta \vec{J} \quad (V.10)$$

Seja $\overleftrightarrow{\Lambda}^+$ a matriz transposta dos cofatores de $\overleftrightarrow{\Lambda}$, Λ^+ o determinante de $\overleftrightarrow{\Lambda}$ e $\overleftrightarrow{\Lambda}^{-1}$ a sua inversa, de modo que ficamos com:

$$\overleftrightarrow{\Lambda}^{-1} \cdot \overleftrightarrow{\Lambda} \cdot \delta \vec{E} = -\frac{4\pi i}{\omega} \overleftrightarrow{\Lambda}^{-1} \cdot \delta \vec{J} \implies \delta \vec{E} = -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{\overleftrightarrow{\Lambda}^+}{\Lambda^+} \cdot \delta \vec{J} \quad (V.11)$$

O sinal "+" indica que a entidade está definida no limite em que Δ tende a zero pela direita.

Introduzindo o resultado (V.11) na expressão (V.8), obtemos:

$$P_m = \frac{i}{4\pi^3} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega \Lambda^+} \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \langle \overleftrightarrow{\Lambda}^+ \cdot \delta \vec{J} \cdot \delta \vec{J}^* \rangle \quad (V.12)$$

Vamos escrever a quantidade envolta nos "brackets" em termos das suas componentes cartesianas:

$$\langle \vec{\lambda}^+ \cdot \delta \vec{J} \cdot \delta \vec{J}^* \rangle \rightarrow \lambda_{ij}^+ \langle \delta J_j \delta J_i^* \rangle . \quad (V.13)$$

Vamos agora definir a "função espectral de flutuações de corrente de fonte" [FW77a], $\Upsilon^+(\vec{k}, \omega)$:

$$\Upsilon^+(\vec{k}, \omega) \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \langle \delta \vec{J}(\vec{k}, \omega + i\Delta) \delta \vec{J}^*(\vec{k}, \omega + i\Delta) \rangle \quad (V.14)$$

Assim, a expressão para a potência média irradiada fica:

$$P_m = \frac{i}{4\pi^3} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\lambda_{ij}^+(\vec{k}, \omega)}{\omega \Lambda^+(\vec{k}, \omega)} T_{ji}(\vec{k}, \omega) \quad (V.15)$$

Agora escrevemos:

$$\Lambda^+(\vec{k}, \omega) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \Lambda(\vec{k}, \omega + i\Delta) = \Lambda_r(\vec{k}, \omega) + i\Lambda_i(\vec{k}, \omega)$$

Como estamos considerando um plasma sem absorção, a parte imaginária de Λ^+ tende a zero, de modo que a expressão (V.15) torna-se uma integral com singularidades nos pontos onde $\omega = 0$ e $\Lambda_r(\vec{k}, \omega) = 0$. Em torno dos pontos de singularidade, temos:

$$\begin{aligned} \omega \Lambda_r(\vec{k}, \omega) \approx \omega_n \Lambda_r(\vec{k}, \omega_n) + \Lambda_r(\vec{k}, \omega_n)(\omega - \omega_n) + \\ + \left[\omega \frac{\partial \Lambda_r}{\partial \omega}(\vec{k}, \omega) \right]_{\omega=\omega_n} (\omega - \omega_n) \end{aligned} \quad (V.16)$$

onde $\omega = \omega_n$ é uma das raízes de $\omega \Lambda_r(\vec{k}, \omega) = 0$.

Usando o teorema de Cauchy e a expressão (V.16), com a hipótese de que o integrando seja analítico no semi-plano inferior (fechar o contorno pelo semi-plano superior resultaria numa potência negativa), integramos a expressão (V.15), obtendo:

$$P_m = \frac{1}{4\pi^2} \int d^3k \sum_n \int d\omega \frac{\lambda_{ij}^+(\vec{k}, \omega) T_{ji}(\vec{k}, \omega)}{\left| \Lambda_r(\vec{k}, \omega) + \omega \frac{\partial \Lambda_r}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_n}} \delta(\omega - \omega_n) \quad (V.17)$$

Usando uma das propriedades da função delta, que relaciona $\delta[f(x)]$ com $\delta(x)$ e lembrando que $\Lambda_r(\vec{k}, \omega)$ é uma função par de ω , obtemos:

$$P_m = \frac{1}{4\pi^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\lambda_{ij}^+(\vec{k}, \omega) T_{ji}(\vec{k}, \omega)}{|\omega|} \delta[\Lambda_r(\vec{k}, \omega)] \quad (V.18)$$

Os modos propagantes satisfazem ainda a seguinte relação [Si67]:

$$\lambda_{ij}^+(\vec{k}, \omega) = \lambda_{ss}(\vec{k}, \omega) a_i(\vec{k}, \omega) a_j^*(\vec{k}, \omega) \quad (V.19)$$

onde

λ_{ss} : traço de λ_{ij}^+

$$\bar{a}(\vec{k}, \omega) = \frac{\delta \vec{E}(\vec{k}, \omega)}{|\delta \vec{E}(\vec{k}, \omega)|}$$

Considerando ainda que:

$$\vec{a}^* \cdot \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} = a_i^* T_{ij} a_j = a_j a_i^* T_{ij} ,$$

obtemos:

$$P_m = \frac{1}{4\pi^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\lambda_{ss}(\vec{k}, \omega) \delta[\Lambda_r(\vec{k}, \omega)]}{|\omega|} \vec{a}^* \cdot \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} \quad (V.20)$$

Para podermos calcular explicitamente a potência média emitida precisamos encontrar a dependência do tensor \overleftrightarrow{T} em termos de entidades típicas do plasma, como densidade, função distribuição, etc ... Com este objetivo em mente, estabelecemos o que se segue:

Segundo o formalismo de Klimontovich [K167], o estado microscópico de um sistema de N_e partículas fica completamente especificado pela função:

$$N(\vec{x}, \vec{u}, t) = \sum_{i=1}^{N_e} \delta[\vec{x} - \vec{x}_i(t)] \delta[\vec{u} - \vec{u}_i(t)] \quad (V.21)$$

onde

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{m_0} = \gamma \vec{v} \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

o índice i refere-se à i -ésima partícula.

Definimos as flutuações das grandezas N , \vec{E} e \vec{B} em torno do equilíbrio como:

$$\begin{aligned} \delta N &\equiv N - \langle N \rangle \quad \text{onde} \quad \langle N \rangle \equiv n_e f(\vec{x}, \vec{u}, t) \\ \delta \vec{E} &\equiv \vec{E} - \langle \vec{E} \rangle = \vec{E} \\ \delta \vec{B} &\equiv \vec{B} - \langle \vec{B} \rangle = \vec{B} - \vec{B}_0 \end{aligned} \quad (V.22)$$

Na expressão (V.22) definimos a função $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$, função distribuição de partícula única.

Introduzimos agora a equação de Klimontovich-Dupree [KT73], que deve ser satisfeita pela função $N(\vec{x}, \vec{u}, t)$. Esta equação nada mais é do que a expressão de conservação de partículas no espaço de fase, $\frac{dN}{dt} = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} N - \frac{e}{m_0} (\vec{E} + \frac{v}{c} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{u}} N = 0 \quad (V.23)$$

Usando as grandezas definidas em (V.22) e desprezando termos de segunda ordem, devido à nossa aproximação linear,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \frac{e}{m_0} (\frac{v}{c} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{u}} \right] \delta N + n_e \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \frac{e}{m_0} \cdot \left[\delta \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \delta \vec{B} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{u}} \right\} f = 0 \quad (V.24)$$

Na expressão (V.24) aparece a equação de Vlasov de ordem zero,

$$n_e \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \frac{e}{m_0} (\frac{v}{c} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{u}} \right] f = 0 \quad (V.25)$$

Ficamos com:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \frac{e}{m_0} (\frac{v}{c} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{u}} \right] \delta N(\vec{x}, \vec{u}, t) = \\ & = \frac{en_e}{m_0} \left[\delta \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \delta \vec{B} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{u}} f(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (V.26) \end{aligned}$$

Para a resolução exata da equação (V.26) deveríamos usar as equações de Maxwell para $\delta\vec{E}$ e $\delta\vec{B}$ (que dependem de δN) e resolver o sistema de equações acopladas resultante. Teríamos então o que se costuma chamar de "resultado auto-consistente". Entretanto, conforme declarado na introdução deste capítulo, vamos desprezar as contribuições dos campos auto-consistentes. Assim, a equação que teremos que resolver é a (V.26) com o termo da direita igual a zero:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \frac{e}{m_0} \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{u}} \right] \delta N(\vec{x}, \vec{u}, t) = 0 \quad (V.27)$$

Vamos tomar \vec{B}_0 na direção \vec{z} e expressar as velocidades em termos de componentes paralela e perpendicular a \vec{B}_0 e do ângulo ϕ que a componente perpendicular a \vec{B}_0 faz com o eixo x :

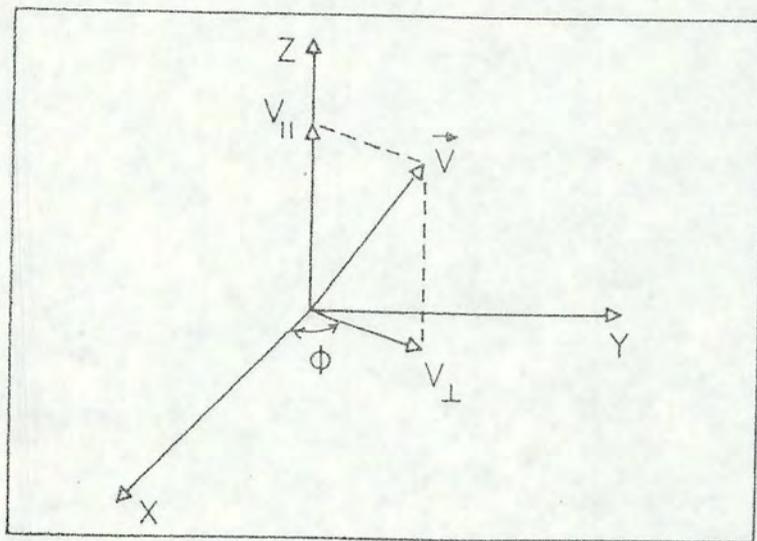


Figura V.1 - Sistema de coordenadas usado na resolução da equação (V.28).

Portanto, com $\vec{B}_0 = B_0 \vec{z}$ e $\vec{v} = (v_{||}, v_{\perp}, \phi)$, temos:

$$(\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{u}} = B_0 v_{\perp} \left[\text{sen} \phi \frac{\partial}{\partial u_x} - \text{cos} \phi \frac{\partial}{\partial u_y} \right] \quad (\text{V.28})$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial u_x} = \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \frac{\partial u_{\perp}}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial u_x} = \text{cos} \phi \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} - \frac{\text{sen} \phi}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{V.29})$$

$$\frac{\partial}{\partial u_y} = \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \frac{\partial u_{\perp}}{\partial u_y} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial u_y} = \text{sen} \phi \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + \frac{\text{cos} \phi}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Substituindo as expressões (V.29) em (V.28) e reintroduzindo o resultado na expressão (V.27) ficamos com:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \delta N(\vec{x}, \vec{u}, t) = 0 \quad (\text{V.30})$$

Ω_0 está definido junto à expressão (II.13).

Resolveremos a equação (V.30) usando transformada de Fourier-Laplace, conforme definida pela expressão (V.5), com o que ficamos com a seguinte equação:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{\Omega_0} \left[i(\vec{k} \cdot \vec{v}) - i(\omega + i\Delta) \right] \right\} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, \omega) = \frac{1}{\Omega_0} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) \quad (\text{V.31})$$

Para não complicar desnecessariamente o problema, vamos dispor o nosso sistema de coordenadas de maneira a que o vetor de propagação \vec{k} esteja no plano x-z, fazendo um ângulo θ com o eixo z. Assim,

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = k_x v_x + k_z v_z = k_{\perp} v_{\perp} \text{cos} \phi + k_{\parallel} v_{\parallel} \quad (\text{V.32})$$

A solução geral da equação (V.31), sujeita à condição expressa em (V.32), é:

$$\delta N = e^{-h(\phi)} \left[\int_{-\infty}^{\phi} \frac{1}{\Omega_0} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) e^{h(\bar{\phi})} d\bar{\phi} + C \right] \quad (V.33)$$

onde

$$h(\alpha) \equiv \frac{i}{\Omega_0} (\omega + i\Delta - k_{||} v_{||}) \alpha - \frac{i}{\Omega_0} k_{\perp} v_{\perp} \text{sen} \alpha$$

$$\vec{u} = (u_{||}, u_{\perp}, \bar{\phi})$$

A constante C é obtida considerando-se que para $\phi \rightarrow -\infty$, o termo $e^{-h(\phi)}$ diverge (contém $e^{-\frac{\Delta}{\Omega_0} \phi}$, com $\frac{\Delta}{\Omega_0} > 0$); para que a grandeza δN possa ter valor finito é necessário que o termo entre parênteses seja nulo. Portanto,

$$C = \int_{-\infty}^{\phi} \frac{1}{\Omega_0} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) e^{h(\bar{\phi})} d\bar{\phi} \quad (V.34)$$

$$\begin{aligned} \delta N &= e^{-h(\phi)} \left[\frac{1}{\Omega_0} \int_{-\infty}^{\phi} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) e^{h(\bar{\phi})} d\bar{\phi} + \frac{1}{\Omega_0} \int_{-\infty}^{\phi} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) e^{h(\bar{\phi})} d\bar{\phi} \right] \\ &= \frac{1}{\Omega_0} \int_{-\infty}^{\phi} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) e^{-[h(\phi) - h(\bar{\phi})]} d\bar{\phi} \end{aligned}$$

Seja:

$$H(\phi, \bar{\phi}) \equiv e^{-[h(\phi) - h(\bar{\phi})]} = \exp \left[\frac{i}{\Omega_0} (\omega - k_{||} v_{||} + i\Delta) (\phi - \bar{\phi}) - \frac{i k_{\perp} u_{\perp}}{\Omega_0 c} (\text{sen} \phi - \text{sen} \phi') \right] \quad (V.35)$$

de modo que

$$\delta N(\vec{k}, \vec{u}, \omega) = \int_{-\infty}^{\phi} \frac{1}{\Omega_0} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) H(\phi, \bar{\phi}) d\bar{\phi} \quad (V.36)$$

Uma vez tendo estabelecido uma expressão para as flutuações na densidade de elétrons, em termos de um valor inicial, podemos voltar ao nosso objetivo original, que era encontrar a dependência do tensor \overleftrightarrow{T} nas variáveis fundamentais do plasma. Em termos das flutuações na densidade, podemos escrever uma expressão para as flutuações de corrente de fonte:

$$\delta \vec{J}(\vec{x}, t) = -e \int d^3u \vec{v} \delta N(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (V.37)$$

Aplicando a transformada de Fourier-Laplace, obtemos:

$$\delta \vec{J}(\vec{k}, \omega) = \int dt \int d^3x e^{i\omega t - \Delta t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \delta \vec{J}(\vec{x}, t) = -e \int d^3x \vec{v} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, \omega) \quad (V.38)$$

Substituindo este resultado na expressão (V.14), ficamos com:

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{k}, \omega) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \langle (-e) \int d^3u \vec{v} \int_{-\infty}^{\phi} \frac{1}{\Omega_0} \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) H(\phi, \bar{\phi}) d\bar{\phi} (-e) \cdot$$

$$\cdot \int d^3u' \vec{v}' \int_{-\infty}^{\phi'} \frac{1}{\Omega_0} \delta N^*(\vec{k}, \vec{u}', t=0) H^*(\phi', \bar{\phi}') d\phi' \rangle$$

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{k}, \omega) = \frac{e^2}{\Omega_C} \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \int d^3u \int d^3u' \vec{u} \vec{u}' \int_{-\infty}^{\phi} d\bar{\phi} \int_{-\infty}^{\phi'} d\bar{\phi}' H(\phi, \bar{\phi}) H^*(\phi', \bar{\phi}') \cdot$$

$$\cdot \langle \delta N(\vec{k}, \vec{u}, t=0) \delta N^*(\vec{k}, \vec{u}', t=0) \rangle \quad (V.39)$$

Para o cálculo da média sobre o ensemble que aparece na expressão (V.39), vamos usar a definição de valor médio da densidade, dada pela expressão (V.22); com o uso dela, obtemos:

$$\langle \delta N_a \delta N_b^* \rangle = \langle N_a N_b^* \rangle - n_a n_b^* f_a f_b \quad (V.40)$$

onde os índices a e b indicam a espécie de partícula a qual se refere a grandeza indexada. Com o uso do formalismo de Klimontovich, mostra-se (para $a = b = e$, indicando elétrons):

$$\begin{aligned} \langle N(\vec{x}, \vec{u}) N^*(\vec{x}', \vec{u}') \rangle &= n_e^2 f_2(\vec{u}, \vec{u}') - \frac{n_e}{V} f_2(\vec{u}, \vec{u}') + \\ &+ n_e f(\vec{u}) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(\vec{u} - \vec{u}') \end{aligned} \quad (V.41)$$

Na expressão (V.41) V é o volume do sistema e f_2 é a função distribuição de duas partículas [KT73]. O segundo termo em (V.41) pode ser desprezado frente ao primeiro, pois é da ordem de $1/N_e$.

Combinando as expressões (V.40) e (V.41), ficamos com:

$$\begin{aligned} \langle \delta N(\vec{x}, \vec{u}) \delta N^*(\vec{x}', \vec{u}') \rangle &= n_e^2 \left[f_2(\vec{u}, \vec{u}') - f(\vec{u}) f(\vec{u}') \right] + n_e f(\vec{u}) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(\vec{u} - \vec{u}') \\ &= n_e^2 g(\vec{u}, \vec{u}') + n_e f(\vec{u}) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(\vec{u} - \vec{u}') \end{aligned} \quad (V.42)$$

Na expressão (V.42) definimos a função correlação entre duas partículas, $g(\vec{u}, \vec{u}')$; fazendo a transformada de Fourier da (V.42) e usando a relação entre a transformada de Fourier da correlação entre as flutuações de densidade e a correlação en-

tre as transformadas de Fourier das flutuações [K167],

$$\langle \delta N(\vec{k}, \vec{u}) \delta N(\vec{k}', \vec{u}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \langle \delta N(\vec{x}, \vec{u}) \delta N(\vec{x}', \vec{u}') \rangle_{\vec{k}} \quad (\text{V.43})$$

obtemos uma expressão para ser usada em (V.39):

$$\langle \delta N(\vec{k}, \vec{u}, 0) \delta N^*(\vec{k}, \vec{u}', 0) \rangle = V \left[n_e f(\vec{u}) \delta(\vec{u} - \vec{u}') + n_e^2 g(\vec{k}, \vec{u}, \vec{u}') \right] \quad (\text{V.44})$$

onde a $g(\vec{k}, \vec{u}, \vec{u}')$ é a transformada de Fourier da função correlação entre duas partículas.

Voltando com esta expressão para a expressão (V.39), podemos escrever o tensor \overleftrightarrow{T} como a soma de duas partes, uma dependente da função distribuição de partícula única e outra dependente das correlações entre duas partículas.

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{k}, \omega) = \overleftrightarrow{T}^{(1)}(\vec{k}, \omega) + \overleftrightarrow{T}^{(2)}(\vec{k}, \omega) \quad (\text{V.45})$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}^{(1)}(\vec{k}, \omega) &= \frac{e^2 n_e V}{\Omega_c^2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \int d^3u \int d^3u' \vec{u} \vec{u}' \int_{-\infty}^{\phi} d\bar{\phi} \int_{-\infty}^{\phi'} d\bar{\phi}' \\ &\cdot H(\phi, \bar{\phi}) H^*(\phi', \bar{\phi}') f(\vec{u}) \delta(\vec{u} - \vec{u}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}^{(2)}(\vec{k}, \omega) &= \frac{e^2 n_e^2 V}{\Omega_c^2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \int d^3u \int d^3u' \vec{u} \vec{u}' \int_{-\infty}^{\phi} d\bar{\phi} \int_{-\infty}^{\phi'} d\bar{\phi}' \\ &\cdot H(\phi, \bar{\phi}) H^*(\phi', \bar{\phi}') g(\vec{k}, \vec{u}, \vec{u}') \end{aligned}$$

Assim, com a introdução de (V.45) em (V.20), obtivemos uma expressão para a potência média irradiada.

V.1a - O Coeficiente de Emissão

O coeficiente de emissão, que representa a potência média irradiada por unidade de volume, por unidade de frequência e por unidade de ângulo sólido e que, como vimos nos capítulos anteriores, desempenha um papel chave na descrição da emissão ciclotrônica, será dado por:

$$\begin{aligned}
 j(\omega, \theta) &\equiv \frac{d^2 P_m}{V d\omega d\Omega_k} = \frac{d^2}{V d\omega d\Omega_k} (P_m^{(1)} + P_m^{(2)}) \\
 &\equiv j^{(1)}(\omega, \theta) + j^{(2)}(\omega, \theta)
 \end{aligned}
 \tag{V.46}$$

$j^{(1)}(\omega, \theta)$ e $j^{(2)}(\omega, \theta)$ são dependentes, respectivamente da função distribuição de partícula única e das correlações entre duas partículas, através de $\overleftrightarrow{T}^{(1)}$ e $\overleftrightarrow{T}^{(2)}$, definidas por (V.45). Introduzindo em (V.46) as expressões (V.20) e (V.45) e unindo as contribuições de frequências positivas e negativas, de modo que de agora em diante temos a restrição de que $\omega > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 j^{(1)} &= \frac{1}{2\pi^2 V} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\lambda_{ss}}{\omega} \delta(\Lambda_r) \bar{a}^* \cdot \overleftrightarrow{T}^{(1)} \cdot \bar{a} \\
 j^{(2)} &= \frac{1}{2\pi^2 V} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\lambda_{ss}}{\omega} \delta(\Lambda_r) \bar{a}^* \cdot \overleftrightarrow{T}^{(2)} \cdot \bar{a}
 \end{aligned}
 \tag{V.47}$$

V.1b - A Situação de Equilíbrio Termodinâmico

As expressões (V.47) representam o coroamento da primeira parte do que nos propusemos ao início do capítulo: são ex

pressões para a emissividade espectral de um plasma homogêneo e infinito na presença de um campo magnético uniforme, levando-se em conta no cálculo os efeitos da polarização dielétrica sobre a emissão, com o uso do formalismo de Klimontovich. Na sua obtenção, foram feitas algumas aproximações, como desprezar a contribuição dos íons e os efeitos da autoconsistência. Até o momento, contudo, não fizemos nenhuma restrição quanto ao fato do plasma estar ou não em equilíbrio termodinâmico. Entretanto, a tarefa de retirar alguma informação útil das expressões (V.47) é complexa e requer uma boa quantidade de cálculo. Freund e Wu [FW77a] calcularam a emissividade espectral para o caso de um plasma em equilíbrio termodinâmico, descrito por uma função Maxwelliana isotrópica. Vamos sumarizar e discutir brevemente seus resultados, principalmente aqueles que revelem algum aspecto novo, introduzido pela inclusão dos efeitos de polarização dielétrica no cálculo do coeficiente de emissão.

Primeiramente, foi mostrado que não existe contribuição da função correlação entre duas partículas. O cálculo da função correlação para o caso em que a $f(\vec{u})$ é uma função isotrópica da velocidade pode ser encontrado em [KT73], p.61. A inclusão de $g(\vec{k}, \vec{u}, \vec{u}')$ assim obtida na expressão para $\overleftrightarrow{T}^{(2)}$ e o uso de (V.47) mostram que a contribuição de $j^{(2)}(\omega, \theta)$ é nula.

O cálculo de $j^{(1)}$ resulta em:

$$j(\omega, \theta) = \frac{e^2 n_e}{2\pi} \frac{\omega^2}{c^3} \int d^3u f(u) \sum_i \int_0^\infty dn^2 \frac{n \lambda_{ss}(\vec{k}, \omega)}{\left| \frac{\partial}{\partial n} \Lambda_r(\vec{k}, \omega) \right|} \delta(n^2 - n_i^2) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \vec{a}^*(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{J}_m \right|^2 \delta \left[\omega \left(1 - \frac{nv_{ii}}{c} \cos \theta \right) - m\Omega_0 \right] \quad (V.48)$$

onde:

$$\vec{J}_m \equiv \left[\left(\frac{mv_{\perp}}{b} \right) J_m(b), i v_{\perp} J'_m(b), v_{\parallel} J_m(b) \right]$$

$$b \equiv \frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\Omega_c}$$

$$n^2 \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \quad (\bar{\epsilon} \text{ o índice de refração}) .$$

O somatório sobre i representa uma soma sobre os modos propagantes, soluções da equação de dispersão $\Lambda_r = 0$.

$J_m(b)$ e $J'_m(b)$ representam respectivamente as funções de Bessel de ordem inteira e sua primeira derivada.

A expressão (V.48) nos mostra de maneira clara o carãter harmônico da emissão, que já tínhamos o direito de esperar depois do tratamento da emissão por partículas independentes, feito nos capítulos II e IV. Para que se possa fazer uso da expressão (V.48), é necessário resolver a equação da dispersão. Isto foi feito através de uma aproximação de plasma frio, que levou à conhecida relação de dispersão de Appleton-Hartree [KT73].

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{2X(1-X)}{2(1-X) - Y^2(\sin^2\theta \mp \rho)} \quad (\text{V.49})$$

onde

$$X \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

$$\rho^2 \equiv \sin^4\theta + \frac{4}{Y^2} (1-X)^2 \cos^2\theta$$

Y está definido junto à expressão (IV.7).

O vetor unitário de polarização que apareceu em (V.48) foi encontrado pelo uso da expressão [Si67]:

$$a_j = \frac{\lambda_{jk} A_k}{\sqrt{\lambda_{ss} (\vec{A}^* \cdot \vec{A})}} \quad (V.50)$$

onde \vec{A} é um vetor arbitrário (no trabalho de Freund e Wu, o vetor escolhido foi $\vec{A} = (0, -i, 0)$).

Nessas condições, foi mostrado que o coeficiente de emissão é separado em duas partes, uma ligada à emissão no modo ordinário e outra ligada à emissão no modo extraordinário:

$$j(\omega, \theta) = j_+(\omega, \theta) + j_-(\omega, \theta)$$

$$j_{\pm}(\omega, \theta) = \frac{e^2 n_e}{2\pi} \frac{\omega^2}{c} n_{\pm} \frac{\rho \mp \text{sen}^2 \theta}{2\rho} \int d^3 u f(u) \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[\omega(1 - n_{\pm} \beta_{||} \cos \theta) - m\Omega] \left[V_{\pm} J_m(b_{\pm}) + \beta_{\pm} J'_m(b_{\pm}) \right]^2 \quad (V.51)$$

onde:

$$V_{\pm} \equiv \frac{2}{Y} \frac{[(1 - X)(1 - n_{\pm} \beta_{||} \cos \theta) - n_{\pm}^2 \text{sen}^2 \theta]}{n_{\pm} \text{sen} \theta (\text{sen}^2 \theta \mp \rho)}$$

$$b_{\pm} \equiv \frac{m n_{\pm} \beta_{\perp} \text{sen} \theta}{1 - n_{\pm} \beta_{||} \cos \theta}$$

Na obtenção de (V.51) foi usado o fato de que:

$$\left| \frac{\partial}{\partial n^2} \Lambda_r(\vec{k}, \omega) \right|_{n^2 = n_{\pm}^2}^2 = \frac{\omega_p^2 \Omega_c^2}{\omega^2 (\omega^2 - \Omega_c^2)} \rho \quad (V.52)$$

Saliente-se que, embora já tenhamos feito uso da suposição de que o plasma está em equilíbrio e caracterizado por uma distribuição Maxwelliana isotrópica, a expressão (V.51) ainda não está integrada sobre a velocidade das partículas. A hipótese de equilíbrio e isotropia foi usada para demonstrar que a contribuição das correlações entre duas partículas é nula e na obtenção da relação de dispersão. A integração de (V.51), com o uso de uma função distribuição Maxwelliana isotrópica, não é trivial; Freund e Wu [FW77a] utilizaram-se de cálculos aproximados, válidos em duas situações diferentes, cujos resultados serão discutidos em seguida, separadamente:

$$1\theta) \quad \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \ll \frac{4n_{\pm}^2 \cos^2 \theta}{m^2 \gamma^2} \quad \text{e} \quad \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \ll 1 \quad .$$

Esta é uma situação onde podem ser desprezados os efeitos relativísticos; a emissão ocorre através de uma ressonância de cíclotron, deslocada pelo efeito Doppler, o que pode ser constatado pela observação da função delta na expressão (V.51). Neste limite, foi obtido como resultado que a emissividade mostra máximos locais correspondentes aos harmônicos da frequência de cíclotron Ω_c . O resultado também mostra que a emissão no modo ordinário é desprezível em comparação com a emissão no modo extraordinário. Particularmente, para $\theta \rightarrow 0$, somente contribuem os termos com $m = \pm 1$ e a expressão obtida foi:

$$j_{\pm}(\omega, \theta=0) = \frac{e^2 n_e}{4\pi^{3/2}} \frac{\omega \sqrt{2} v_0}{c^2} \exp \left[-\frac{c^2}{2v_0^2} \frac{1}{n_{\pm}^2} (1 \pm \gamma)^2 \right] \quad (\text{V.53})$$

A expressão (V.53) mostra que a emissão é apreciável somente para o primeiro harmônico e ocorre fundamentalmente no modo extraordinário. Esta expressão deve ser comparada com a expressão (IV.3), obtida para energias não relativísticas, na aproximação de partículas independentes. Vemos que a diferença reside na presença do índice de refração n_{\pm}^2 , em (V.53), resultante da consideração dos efeitos do plasma sobre a emissão.

$$2\vartheta) \quad \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \gg \frac{4n_{\pm}^2 \cos^2 \theta}{m^2 \gamma^2} \quad \text{e} \quad \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \ll 1 .$$

Esta é uma situação onde pode ser desprezado o efeito Doppler e onde o efeito relativístico adquire importância. Como toda a análise do processo de emissão foi feita para um plasma levemente relativístico, com energia cinética da ordem de 1 KeV, este limite só ocorre para ângulos muito próximos de $\pi/2$.

O uso deste limite no cálculo da expressão (V.51) resulta em picos de emissão ocorrendo em frequências abaixo dos harmônicos de Ω_c , ou seja, o m -ésimo harmônico contribui apenas quando $\omega < m\Omega_c$.

Convém ressaltar um detalhe que diz respeito diretamente à natureza deste capítulo: para baixas densidades ($\omega_{pe}^2 \ll \omega^2$), os resultados obtidos reduzem-se àqueles da aproximação de partículas independentes. Na seção seguinte vamos apresentar uma descrição qualitativa dos resultados, com ênfase nas modificações introduzidas pela inclusão dos efeitos do plasma sobre a emissão.

V.1c - Conclusões e Comentários

Nos capítulos II e IV apresentamos a teoria da emissão ciclotrônica de um plasma tênue, considerando que a mesma se processa basicamente como resultado da contribuição independente das partículas constituintes do plasma. Neste Capítulo V, introduzimos os efeitos dielétricos do plasma sobre a emissão; até o momento, o fizemos através de uma apresentação do método utilizado por Freund e Wu [FW77a]. Vimos na seção V.1b, expressão (V.53), que para propagação paralela somente é importante a emissão no modo extraordinário e que o resultado é análogo ao obtido no Capítulo IV, exceto pela inclusão do índice de refração n_{\pm} para modos magneto-iônicos. Quando a densidade do plasma é pequena, recuperamos integralmente o nosso resultado inicial ($n_{\pm} \rightarrow 1$).

Também no limite para propagação perpendicular o resultado tende para o obtido anteriormente, quando a densidade é pequena.

Vamos agora comentar de forma qualitativa os efeitos resultantes da inclusão das propriedades dielétricas do plasma no cálculo do coeficiente de emissão. O efeito mais marcante é uma diminuição no coeficiente de emissão à medida que aumenta a densidade do plasma. Esta diminuição é muito mais perceptível para grandes valores do ângulo θ , conforme pode ser visto nas figuras (V.2) e (V.3).

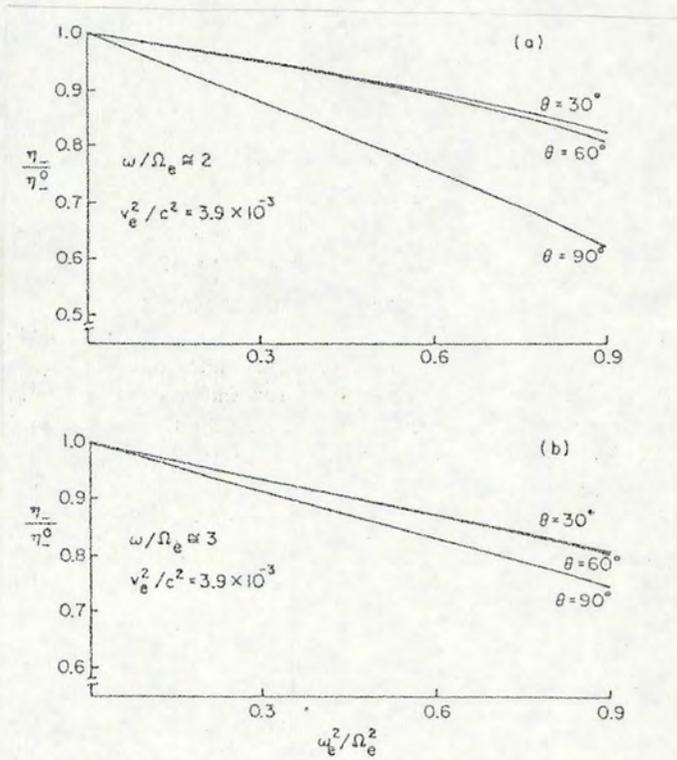


Figura V.2 - Gráficos do segundo (a) e terceiro (b) picos harmônicos na emissividade do modo extraordinário, como função de ω_{pe}^2/Ω_c^2 , para uma energia térmica de 1 KeV e $\theta = 30^\circ, 60^\circ$ e 90° . Os gráficos mostram $\eta_{-}/(\eta_{-})_0$, onde $(\eta_{-})_0$ indica a emissividade avaliada para $\omega_{pe}^2/\Omega_c^2 = 0$ [FW77a].

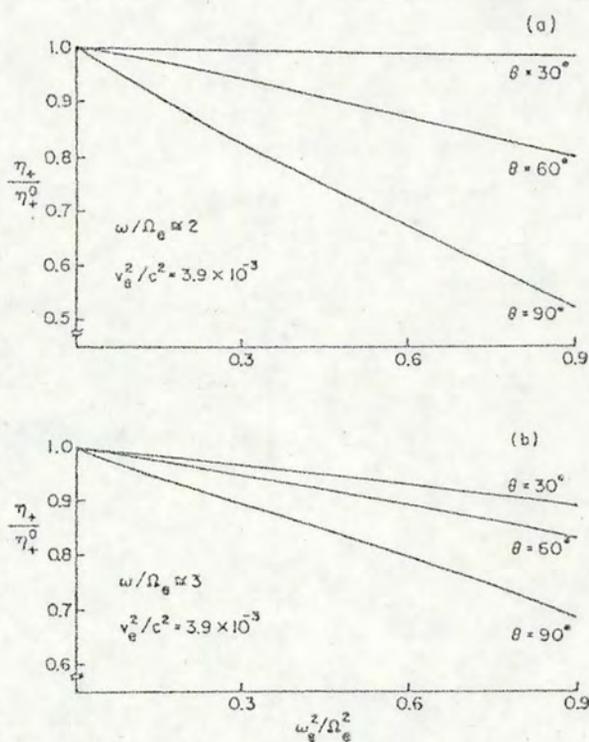


Figura V.3 - Gráficos do segundo (a) e terceiro (b) picos harmônicos na emissividade do modo ordinário, como função de ω_{pe}^2/Ω_e^2 , para uma energia térmica de 1 KeV e $\theta = 30^\circ, 60^\circ$ e 90° . Os gráficos mostram $\eta_+ / (\eta_+)_0$, onde $(\eta_+)_0$ indica a emissividade avaliada para $\omega_{pe}^2/\Omega_e^2 = 0$ [FW77a].

As figuras V.2 e V.3 nos mostram o comportamento da emissividade no segundo e terceiro harmônicos; o primeiro harmônico não foi mostrado porque o formalismo apresenta limitações, que serão discutidas em seguida.

Para frequências próximas à frequência fundamental Ω_c , pode tornar-se difícil para distinguir entre os efeitos da ressonância ciclotrônica e da ressonância híbrida superior do modo extraordinário,

$$\omega_r^2 = \frac{1}{2}(\omega_{pe}^2 + \Omega_c^2) + \frac{1}{2} \left[(\omega_{pe}^2 + \Omega_c^2)^2 - 4\omega_{pe}^2 \Omega_c^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \quad (V.54)$$

Esta dificuldade impõe restrições às densidades e aos ângulos de propagação, para que se mantenha válido o resultado. Os efeitos dessas duas ressonâncias podem ser distinguidos, com as energias consideradas, para $\omega_{pe}^2 / \Omega_c^2 \cong 0,9$ e $\theta \geq 50$; quando a frequência de plasma diminui, torna-se maior o ângulo limite para a manutenção da validade do resultado. Esta dificuldade não aparece quando se trata de calcular a emissão nos harmônicos mais altos; para eliminá-la é necessária a inclusão de efeitos térmicos no cálculo da relação de dispersão, o que foi feito posteriormente por Freund e Wu [FW77b].

Um aspecto relevante do cálculo feito é que a emissão no modo extraordinário é sempre superior à emissão no modo ordinário, tanto no harmônico fundamental quanto nos harmônicos mais altos, em qualquer dos dois limites considerados na seção V.1b. Para colocar a afirmativa em termos quantitativos, o resultado obtido foi que o modo extraordinário é responsável por mais de 90% da emissão, mesmo no pico da emissão no modo ordinário, o

qual ocorre para $\theta \approx 70^\circ$. Este aspecto é bem ilustrado na Figura V.4, onde é mostrada a fração representada pela emissão no modo extraordinário, em relação à emissão total, como função do ângulo de observação.

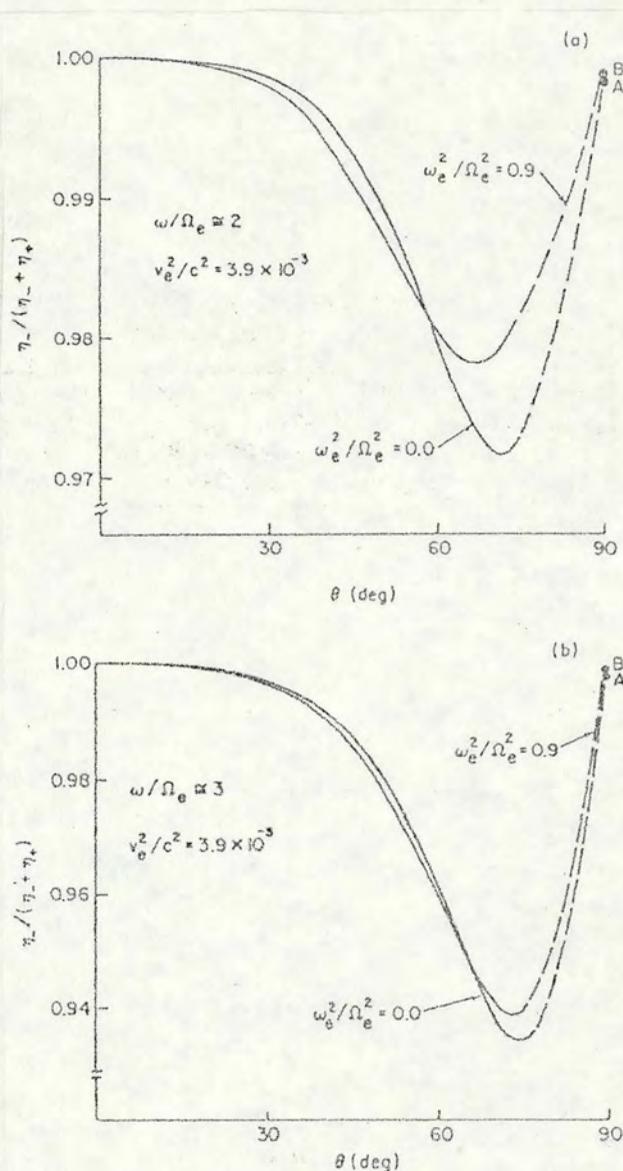


Figura V.4 - Gráfico de $\eta_- / (\eta_+ + \eta_-)$ como função de θ para o segundo (a) e terceiro (b) harmônicos, com $\omega_{pe}^2 / \Omega_e^2 = 0$ e $0,9$. A linha tracejada descreve o comportamento esperado da função no regime de transição, onde devem ser considerados ambos os efeitos, Doppler e relativístico [FW77a].

Não tentamos fazer nenhuma comparação com resultados experimentais. Estes apresentam em geral um aspecto qualitativamente de acordo com as previsões teóricas, conforme já vimos no Capítulo IV. O efeito mais marcante resultante da inclusão dos efeitos dielétricos no cálculo da emissão é uma diminuição desta, relativa ao seu valor no vácuo; esse efeito não pode ser tratado porque os resultados experimentais apresentam uma imprecisão muito grande quanto ao valor absoluto da emissão observada. Além disso, no caso das experiências citadas no Capítulo IV ([CHPC74] e [Co77]) a densidade das partículas não é suficiente para produzir efeitos apreciáveis. Por exemplo, a Figura IV.2 mostra uma experiência onde $\omega_{pe}^2/\Omega_c^2 \approx 3,4 \times 10^{-3}$, com a propagação sendo feita a 90° . Os gráficos da Figura V.2 mostram que neste caso não há praticamente influência resultante de inclusão dos efeitos dielétricos no cálculo do coeficiente de emissão. Quanto às medidas de polarização, ainda há incerteza no resultado experimental; possivelmente ocorre que as reflexões dentro da máquina confinadora do plasma produzem "mistura" dos modos propagantes.

Para encerrar a apreciação desta forma de incluir os efeitos da polarização dielétrica sobre a emissão de cíclotron de um plasma fracamente relativístico em equilíbrio termodinâmico, vamos lembrar algum dos pontos chaves que lhe servem de sustento e algumas das suas limitações.

Em resumo, temos um método que permitiu o cálculo da radiação de cíclotron de um plasma em equilíbrio termodinâmico; o cálculo mostrou que para a situação de equilíbrio é nula a contribuição das correlações entre duas partículas para a emissão de radiação. Para o cálculo da radiação emitida foi empregada

da a aproximação de plasma frio; a emissão é predominante no modo extraordinário em todos os harmônicos; o efeito do aumento na densidade do plasma é uma diminuição na emissão, relativa à emissão no vácuo. Esta diminuição decorre dos efeitos da polarização dielétrica do plasma; não foram considerados efeitos de absorção, que aparecem ao ser calculada a intensidade da radiação (conforme Capítulo III). O método de cálculo pode apresentar limitações quando usado para o cálculo da emissão no primeiro harmônico, se a densidade do plasma e/ou o ângulo de propagação forem tais que não permitam distinguir a frequência de cíclotron da frequência da ressonância híbrida superior do modo extraordinário. Ainda, para frequências muito próximas dos harmônicos da frequência de cíclotron, a aproximação de plasma frio não é plenamente justificada e pode ser necessária a inclusão de efeitos térmicos no cálculo da emissão [FW77a], [FW77b].

V.2 - Radiação de Cíclotron de um Plasma Quente, Finito e Não Homogêneo.

Continuaremos a apresentar a teoria de emissão ciclotrônica em plasmas, com a inclusão dos efeitos dielétricos, agora calculando a potência irradiada por uma lâmina de plasma, na frequência $\omega \approx \Omega_c$, através do método de Rytov [FG78], [FGMR78]. Consideraremos a emissão de um plasma finito e não homogêneo, com uma geometria mais aproximada da geometria usualmente encontrada em plasmas de laboratório. O método consiste em calcular o campo eletromagnético a partir das fontes microscópicas e expres

sar a média de ensemble da energia irradiada em termos da função correlação das correntes flutuantes. Este procedimento é adequado para calcular a emissão na frequência de cíclotron e inclui todos os efeitos de polarização relevantes [FGMR78].

Em primeiro lugar, vamos definir a geometria do problema: consideraremos uma lâmina de plasma, com espessura L na direção x e infinita nas direções y e z (Figura V.5).

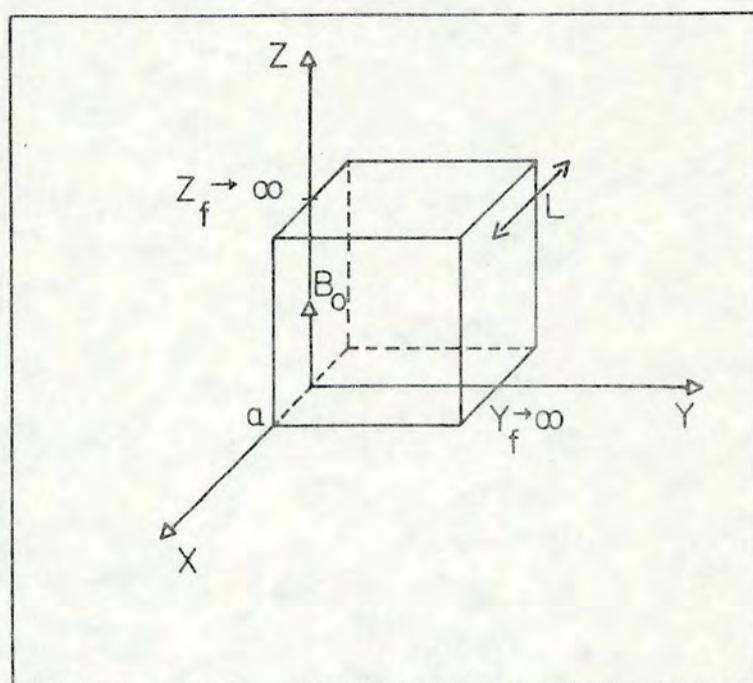


Figura V.5 - Lâmina de plasma de espessura L , com dimensão infinita nas direções y e z .

Existe um campo magnético \vec{B}_0 apontando na direção z , paralelo à face da lâmina. O modelo admite que o plasma seja não homogêneo, com os parâmetros (como temperatura, densidade, campo magnético) variando na direção x . A inhomogeneidade será suposta fraca, de modo que os comprimentos de onda considerados sejam muito menores do que as distâncias típicas de variação dos

parâmetros do plasma $[\lambda \ll (\frac{1}{N} \frac{dN}{dx})^{-1}]$, onde N é um parâmetro do plasma].

A lâmina de plasma utilizada no modelo é finita na direção x ; portanto, ao considerarmos a propagação de ondas eletromagnéticas neste sistema precisamos levar em conta as condições de contorno sobre a face da lâmina. Vamos supor que a propagação se faz no plano $x-z$ ($k_y = 0$). Seja i o ângulo de incidência de uma onda eletromagnética que se propaga de um lado de uma superfície da lâmina de plasma, numa região onde o índice de refração é n_i . Ao atravessar a superfície, a onda passa para uma região com índice de refração n_r ; seja r o ângulo de refração dessa onda. Tem-se na interface, pela lei de Snell:

$$n_i \operatorname{sen} i = n_r \operatorname{sen} r$$

Em termos do ângulo θ com o campo magnético:

$$n_i \cos \theta_i = n_r \cos \theta_r \equiv n_{||} \quad (V.55)$$

A expressão (V.55) mostra que a componente do índice de refração paralela ao campo magnético, $n_{||}$, é contínua e constante na interface entre as duas superfícies. Se considerarmos que a superfície é a face da lâmina de plasma, n_i será o índice de refração do vácuo ($n_i = 1$) e $n_{||}$ será dado em qualquer ponto pelo coseno diretor do raio incidente.

V.2a - Obtenção do Campo Eletromagnético da Radiação

Seja $\vec{J}(\vec{r}, t)$ uma quantidade flutuante que é a fonte

da radiação. O campo eletromagnético da radiação será obtido como solução das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (V.56)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Os vetores \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} e \vec{J} podem ser escritos em termos de suas componentes de Fourier:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z d\omega \vec{E}(k_z, \omega, x) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (V.57)$$

As expansões de \vec{B} , \vec{D} e \vec{J} são similares à expressão (V.57). As componentes de Fourier de \vec{D} e \vec{E} estão relacionadas através do tensor dielétrico do plasma, $\overleftrightarrow{\epsilon}$ [Be66]:

$$\vec{D}(k_z, \omega, x) = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E}(k_z, \omega, x) \quad (V.58)$$

Na aproximação fracamente relativística e tomando a mais baixa ordem relevante no raio de Larmor, o tensor dielétrico do plasma satisfaz as seguintes propriedades [FGMR78]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} & \approx \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xy} & = -\epsilon_{yx} \\ \epsilon_{xz} & = \epsilon_{zx} = n_{\perp} \chi_{xz} \\ \epsilon_{yz} & = -\epsilon_{zy} = i\epsilon_{xz} \\ \epsilon_{zz} & = \epsilon_{zz0} + n_{\perp}^2 \chi_{zz} \end{aligned} \quad (V.59)$$

onde:

$$\epsilon_{xx} = 1 + \frac{X}{4} \sum_{+,-} \int d^3p \frac{p_{\perp} L_1 f}{\gamma \pm \gamma - \frac{k_z p_{\parallel}}{m_0 \omega}}$$

$$\epsilon_{xy} = i \left(\frac{X}{4} \right) \sum_{+,-} (\pm) \int d^3p \frac{p_{\perp} L_1 f}{\gamma \pm \gamma - \frac{k_z p_{\parallel}}{m_0 \omega}}$$

$$\chi_{xz} = (X/4m_0 cY) \int d^3p \frac{p_{\perp} p_{\parallel} L_1 f}{\gamma - \gamma - \frac{k_z p_{\parallel}}{m_0 \omega}}$$

$$\chi_{zz} = X/(2m_0 cY)^2 \int d^3p \frac{p_{\perp}^2 p_{\parallel} L_2 f}{\gamma - \gamma - \frac{k_z p_{\parallel}}{m_0 \omega}} \quad (V.59a)$$

$$\epsilon_{zz0} = 1 - X$$

$$L_1 = \left(1 - \frac{k_z p_{\parallel}}{\gamma m_0 \omega} \right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_z p_{\perp}}{\gamma m_0 \omega} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}$$

$$L_2 = \frac{Y p_{\parallel}}{\gamma p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \left(1 - \frac{Y}{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}$$

Introduzindo (V.57), (V.58) e (V.59) nas expressões (V.56), obtemos:

$$- i \frac{\omega}{c} n_{\parallel} E_y = i \frac{\omega}{c} B_x$$

$$i \frac{\omega}{c} n_{\parallel} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = i \frac{\omega}{c} B_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y = i \frac{\omega}{c} B_z$$

(V.60)

$$- i \frac{\omega}{c} n_{\parallel} B_y = - i \frac{\omega}{c} (\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + n_{\perp} \chi_{xz} E_z) + \frac{4\pi}{c} J_x$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} B_z + i \frac{\omega}{c} n_{\parallel} B_x = - i \frac{\omega}{c} (-\epsilon_{xy} E_x + \epsilon_{xx} E_y + i n_{\perp} \chi_{xz} E_z) + \frac{4\pi}{c} J_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_y = - i \frac{\omega}{c} (n_{\perp} \chi_{xz} E_x - i n_{\perp} \chi_{xz} E_y + \epsilon_{zzo} E_z + n_{\perp}^2 \chi_{zz} E_z) + \frac{4\pi}{c} J_z$$

Usando a quarta equação (V.60) para eliminar E_x e introduzindo a primeira equação na quinta, obtemos um sistema de quatro equações e quatro incógnitas.

Definindo:

$$e_1 = -E_z; \quad e_2 = -E_y; \quad e_3 = -B_z; \quad e_4 = B_y,$$

ficamos com

$$\frac{\partial}{\partial x} e_1 = i \frac{\omega}{c} \left[- \frac{n_{\parallel} n_{\perp} \chi_{xz}}{\epsilon_{xx}} e_1 - \frac{n_{\parallel} \epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} e_2 + \frac{(\epsilon_{xx} - n_{\parallel}^2)}{\epsilon_{xx}} e_4 + \frac{4\pi i}{\omega} \frac{n_{\parallel}}{\epsilon_{xx}} J_x \right]$$

(V.61a)

$$\frac{\partial}{\partial x} e_2 = i \frac{\omega}{c} e_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e_3 = i\frac{\omega}{c} \left[\left(\frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} + i \right) n_{\perp} \chi_{xz} e_1 + \left(\frac{\epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}} + \epsilon_{xx} - n_{\parallel}^2 \right) e_2 + \frac{n_{\parallel} \epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} e_4 - \frac{4\pi i}{\omega} \left(\frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} J_z + J_y \right) \right] \quad (\text{V.61b})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e_4 = i\frac{\omega}{c} \left\{ \left[\epsilon_{zz0} + n_{\perp}^2 \left(\chi_{zz} - \frac{\chi_{xz}^2}{\epsilon_{xx}} \right) \right] e_1 - n_{\perp} \chi_{xz} \left(\frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} + i \right) e_2 - \frac{n_{\parallel} n_{\perp} \chi_{xz}}{\epsilon_{xx}} e_4 + \frac{4\pi i}{\omega} \left(n_{\perp} \frac{\chi_{xz}}{\epsilon_{xx}} J_x - J_z \right) \right\}$$

Suporemos que a dependência predominante de \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} e \vec{J} em x seja dada por $\exp(i \int^x k_x dx)$; assim, $n_{\perp} = -i \frac{c}{\omega} \frac{d}{dx}$. Substituindo n_{\perp} nas expressões (V.61) e desprezando as derivadas das componentes do tensor dielétrico, o que é coerente com nossa aproximação de inomogeneidade suave, obtemos:

$$\frac{d}{dx} e_j - i\frac{\omega}{c} \sum_k T_{jk} e_k = i\frac{\omega}{c} s_j \quad j, k = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{V.62})$$

onde:

$$T_{11} = T_{13} = T_{21} = T_{22} = T_{24} = T_{31} = T_{33} = T_{42} = T_{44} = 0$$

$$T_{12} = -\frac{n_{\parallel} \epsilon_{xy}}{d_1} \quad T_{14} = \frac{\epsilon_{xx} - n_{\parallel}^2}{d_1} \quad T_{23} = 1$$

$$T_{32} = \epsilon_{xx} - n_{\parallel}^2 + \frac{\epsilon_{xy}}{d_1} (\epsilon_{xy} - i n_{\parallel} \chi_{xz})$$

$$T_{34} = \frac{i \chi_{xz} (\epsilon_{xx} - n_{\parallel}^2 - i \epsilon_{xy}) + n_{\parallel} \epsilon_{xy}}{d_1}$$

$$T_{41} = \epsilon_{zz0} \frac{d_1}{d_2} \quad T_{43} = -\frac{i \chi_{xz} d_1 + \epsilon_{xy} (\chi_{xz} + n_{||} \chi_{zz})}{d_2}$$

$$s_1 = \frac{4\pi i}{\omega} n_{||} \frac{J_x}{d_1} \quad s_2 = 0 \quad s_3 = \frac{4\pi i}{\omega} \left[-J_y + (i n_{||} \chi_{xz} - \epsilon_{xy}) \frac{J_x}{d_1} \right]$$

$$s_4 = \frac{4\pi i}{\omega} \left[-J_z \frac{d_1}{d_2} - i \frac{c}{\omega} (\chi_{xz} + n_{||} \chi_{zz}) \left(\frac{d}{dx} J_x \right) \frac{1}{d_2} \right]$$

$$d_1 = \epsilon_{xx} + n_{||} \chi_{xz}$$

$$d_2 = (\epsilon_{xx} - n_{||}^2)(1 - \chi_{zz}) + (n_{||} + \chi_{xz})^2$$

As expressões (V.62) formam um sistema de equações acopladas. Vamos desacoplar este sistema escrevendo:

$$e_j = R_{j\ell} c_\ell \quad (V.63)$$

$R_{j\ell}$ é o elemento $j\ell$ da matriz que diagonaliza a matriz T (as expressões dos elementos da matriz R podem ser encontradas em [FG78]). Usando a expressão (V.63) nas equações (V.62), obtemos:

$$\frac{d}{dx} c_j - i \frac{\omega}{c} n_j c_j = i \frac{\omega}{c} (R^{-1})_{j\ell} s_\ell - (R^{-1})_{j\ell} \frac{d}{dx} (R_{\ell k}) c_k \quad (V.64)$$

n_j ($j = 1, 2, 3, 4$) representa cada um dos autovalores da matriz T . Os autovalores n_1 e n_3 estão associados com os dois modos de propagação de ondas que viajam na direção de x crescente, enquanto os autovalores n_2 e n_4 estão associados com ondas que viajam na direção de x decrescente.

As equações (V.64) ainda formam um sistema acoplado; podemos desacoplá-lo usando argumentos físicos para eliminar o termo que contém as derivadas da matriz R. Fidone e Granata [FG78] mostraram que numa situação física onde podem ser evitadas as singularidades do índice de refração este termo é da ordem do inverso da escala de comprimento das variações dos parâmetros médios do plasma e pode ser desprezado. Esta aproximação mantém coerência com nossa hipótese de plasma fracamente inomogêneo.

As singularidades do índice de refração são: a ressonância do modo extraordinário ($X_r = 1 - Y^2$), os "cortes" do modo ordinário [$X_c = 1$ e quando $n_{||}^2 > Y/(2+Y)$, $X_c = (1 - n_{||}^2)(1+Y)$], os "cortes" do modo extraordinário [$X_c = (1 - n_{||}^2)(1-Y)$ e quando $n_{||}^2 < Y/(2+Y)$, $X_c = (1 - n_{||}^2)(1+Y)$] e o acoplamento de modos ($X_i = 1 + (1 - n_{||}^2)^2 Y^2 / 4n_{||}^2$). Estas singularidades foram obtidas representando a parte real de n_{\perp} na aproximação de plasma frio. Nas regiões onde a densidade de partículas satisfaz as condições de singularidade, a aproximação de plasma localmente homogêneo não é mais válida, mesmo em um plasma levemente inomogêneo [FG78], [FGRM78].

Seja $r_j \equiv i \frac{\omega}{c} (R^{-1})_{j\ell} s_{\ell}$; desprezando o último termo em (V.64), ficamos com:

$$\frac{d}{dx} c_j - i \frac{\omega}{c} n_j c_j = r_j \quad (V.65)$$

A solução da equação (V.65) é:

$$\begin{aligned}
c_j(x) &= \left[c_j(x_0) + \int_{x_0}^x dx' \Gamma_j(x') e^{-i\frac{\omega}{c} \int_{x_0}^{x'} n_j dx''} \right] e^{i\frac{\omega}{c} \int_{x_0}^x n_j dx'} \\
&= \left[\tilde{\Gamma}_j|_{x_0}^x + c_j(x_0) + \int_{x_0}^x dx' \tilde{\Gamma}_j(x') e^{-i\frac{\omega}{c} \int_{x_0}^{x'} n_j dx''} \right] e^{i\frac{\omega}{c} \int_{x_0}^x n_j dx'} \quad (V.66)
\end{aligned}$$

onde:

$$\tilde{\Gamma}_j = \frac{4\pi}{c} (\phi_j F_j)^{-1/2} \vec{b}_j \cdot \vec{j}$$

$$\tilde{\Gamma}_j \approx \frac{4\pi i}{\omega} (\phi_j F_j)^{-1/2} \left[(\chi_{xz} + n_{||} \chi_{zz}) / d_2 \right] n_j T_{34} J_x e^{-i\frac{\omega}{c} \int_{x_0}^{x'} n_j dx''}$$

$$b_{jx} = -\frac{\epsilon_{xy}}{d_1} T_{41} + \frac{n_j^2}{d_1} \left[\epsilon_{xy} + (n_{||} + \chi_{xz}) T_{43} \right]$$

$$b_{jy} = \phi_j \quad b_{jz} = n_j T_{34} \frac{d_1}{d_2}$$

$$\phi_j = n_j^2 - T_{14} T_{41} \quad F_j = 2n_j(2n_j^2 - n_1^2 - n_3^2)$$

Tendo obtido as funções c_j , podemos usar as expressões (V.63), as definições dos e_j e as equações de Maxwell para encontrar as componentes cartesianas do campo elétrico da onda [FG78]:

$$E_x(x) = \sum_{j=1}^4 \left\{ n_j^2 \left[\epsilon_{xy} + (n_{||} + \chi_{xz}) T_{43} \right] - \epsilon_{xy} T_{41} \right\} \frac{(\phi_j F_j)^{-1/2}}{d_1} c_j(x) - \frac{4\pi i}{\omega} \frac{J_x}{d_1}(x)$$

$$E_y(x) = - \sum_{j=1}^4 \phi_j (\phi_j F_j)^{-1/2} c_j(x) \quad (V.67)$$

$$E_z(x) = - \sum_{j=1}^4 n_j (T_{12} + T_{14} T_{43}) (\phi_j F_j)^{-1/2} c_j(x)$$

V.2b - A Distribuição Espectral da Potência Irradiada

A potência irradiada por unidade de área pela lâmina de plasma pode ser obtida calculando-se o vetor de Poynting. Visando a obtenção de uma grandeza macroscópica, usamos uma média de ensemble sobre as flutuações microscópicas dos campos:

$$\vec{S}_m(x_1) = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle \quad (x_1 = \pm a) \quad (V.68)$$

Escrevendo os campos em termos de suas componentes de Fourier, conforme (V.57), e usando a primeira das equações (V.56), obtemos:

$$\vec{S}_m(x_1) = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z dk'_z dk_y dk'_y d\omega d\omega' \frac{c k'(x_1)}{\omega'} \langle \vec{E}(k_z, k_y, \omega, x_1) \cdot \vec{E}(k'_z, k'_y, \omega', x_1) \rangle e^{i[(k_z+k'_z)z + (k_y+k'_y)y - (\omega+\omega')t]} \quad (V.69)$$

Logo após as expressões (V.61) supusemos que a dependência predominante de \vec{E} em x é dada por um fator $\exp(i \int^x k_x(x') dx')$; k_x é obtido a partir da relação de dispersão e é uma função de k_y , k_z , ω e x . Introduzindo a dependência explícita de \vec{E} sobre x na equação (V.69), exigindo que a correlação dos campos seja estacionária no tempo e homogênea no plano yz e lembrando que $k_x(k_y, k_z, \omega, x) = -k_x^*(-k_y, -k_z, -\omega, x)$, obtemos:

$$\vec{S}_m(x_1) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_y dk_z d\omega \frac{c \vec{k}(x_1)}{\omega} \langle |\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle \quad (V.70)$$

Podemos introduzir uma integral em dk_x na expressão (V.70):

$$\vec{S}_m(x_1) = \frac{c}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\omega dk_x dk_y dk_z \frac{c \vec{k}(x_1)}{\omega} \langle |\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle \cdot \delta\left[k_x - \frac{\omega}{c} (1 - n_y^2 - n_z^2)^{1/2}\right] \quad (V.71)$$

Usando as propriedades das funções delta e mudando de coordenadas cartesianas para esféricas, ficamos com:

$$\begin{aligned} \vec{S}_m(x_1) &= \frac{c}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty k^2 dk \int_{4\pi} d\Omega_k \frac{c \vec{k}(x_1)}{\omega} \langle |\vec{E}(k_z, k_y, \omega, x_1)|^2 \rangle \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2} \delta(k - \frac{\omega}{c}) \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \int_{4\pi} d\Omega_k \frac{c \vec{k}(x_1)}{\omega} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2} \langle |\vec{E}(k_z, k_y, \omega, x_1)|^2 \rangle \quad (V.72) \end{aligned}$$

A potência irradiada por unidade de área da lâmina do plasma, por unidade de ângulo sólido, por unidade de frequência espectral, será dada por:

$$\frac{d^3P}{d\omega d\Omega_k dx} = S_m n_x = \frac{c}{2\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (1 - n_z^2) \langle |\vec{E}(k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle \quad (V.73)$$

A expressão (V.73) foi particularizada para a situação de propagação no plano xz, mantendo coerência com o que temos feito até aqui.

Tomando as expressões (V.67) e aplicando-as para densidade nula, que corresponde à situação na borda da lâmina, obtemos:

$$|\vec{E}(k_z, \omega, x_1)|^2 = \frac{1}{2} (1 - n_z^2)^{-1/2} \sum_j |c_j(x_1)|^2 \quad (V.74)$$

onde $j = 1, 3$ para $x_1 = a$ e $j = 2, 4$ para $x_1 = -a$.

Usando as expressões (V.66) em (V.74) e fazendo a média de ensemble, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 \langle |\vec{E}(k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle &= \frac{1}{2} (1 - n_{||}^2)^{-1/2} \sum_j \exp\left(-\frac{2\omega}{c} \int_{x_0}^{x_1} n_j'' dx\right) \cdot \\
 &\cdot \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0-x}^{x_1-x} dx dy \langle \tilde{\Gamma}(k_z, \omega, x) \tilde{\Gamma}_j(-k_z, -\omega, x+y) \rangle \exp\left(\frac{2\omega}{c} \int_{x_0}^{x_1} n_j'' dx'\right) \cdot \\
 &\cdot \exp\left(i\frac{\omega}{c} \int_x^{x+y} n_j^* dx'\right) \quad (V.75)
 \end{aligned}$$

onde $n_j'' = \text{Im } n_j$.

Dentro de nossa aproximação de plasma fracamente ino-
mogêneo, é razoável admitir que a escala de comprimento das cor-
relações de $\langle \tilde{\Gamma}_j(x) \tilde{\Gamma}_j(x+y) \rangle$ é muito menor do que a escala de
comprimento da variação dos parâmetros de plasma n_e , T_e e B_0 . A
integral sobre y na equação (V.75) pode então ser avaliada na
aproximação de plasma localmente homogêneo. Supondo que $|n_j''| \ll |n_j'|$,
obtemos:

$$\langle |\vec{E}(k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle = \pi (1 - n_{||}^2)^{-1/2} \sum_j \int_{x_0}^{x_1} dx \langle |\tilde{\Gamma}_j(\vec{k}, \omega)|^2 \rangle \exp\left(-\frac{2\omega}{c} \int_x^{x_1} n_j'' dx'\right) \quad (V.76)$$

Definimos a correlação de correntes localmente homogê-
nea:

$$\langle J_\alpha(k_x, k_z, \omega) J_\beta^*(k'_x, k'_z, \omega') \rangle = G_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega') \quad (V.77)$$

Usando a expressão (V.66) e a expressão (V.77) (com
 $G_{yy} = G_{xx}$, $G_{xy} = -G_{yz} = -iG_{xx}$, $G_{xz} = G_{zx}$ e $G_{yz} = -G_{zy} \approx iG_{xz}$ [FG78]),
obtemos:

$$\langle |\tilde{\Gamma}_j(\vec{k}, \omega)|^2 \rangle = \left(\frac{4\pi}{c}\right)^2 \frac{1}{|\phi_j F_j|} \left\{ |b_{jx} + ib_{jy}|^2 G_{xx} + 2\text{Re} [(b_{jx} + ib_{jy}) b_{jz}^*] \right. \\ \left. G_{xz} + |b_{jz}|^2 G_{zz} \right\} \equiv \left(\frac{4\pi}{c}\right)^2 \beta_j(x) \quad (\text{V.78})$$

Introduzindo a expressão (V.78) em (V.76) e voltando para a (V.73), ficamos com:

$$\frac{d^3 p}{da d\Omega_k d\omega} = (1 - n_{||}^2)^{1/2} \left(\frac{4\pi^2 \omega}{c^2}\right) \sum_j \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\frac{2\omega}{c} \beta_j\right) \exp\left(-\frac{2\omega}{c} \int_x^{x_1} n_j'' dx'\right) \quad (\text{V.79})$$

onde $j = 1, 3$ para $x_1 = a$ e $j = 2, 4$ para $x_1 = -a$; os valores correspondentes de x_0 são $x_0 = \mp a$ [FGMR78].

$$b_{jx} + ib_{jy} = \frac{i}{d_2} \left\{ (\epsilon_{xx} - i\epsilon_{xy} - n_{||}^2) [n_j^2(1 - \chi_{zz}) - \epsilon_{zz0}] + n_j^2 n_{||} (n_{||} + \chi_{xz}) \right\} \\ b_{jz} = \frac{n_j}{d_2} [\epsilon_{xy}(n_{||} + \chi_{xz}) + i\chi_{xz}(\epsilon_{xx} - n_{||}^2)] \quad (\text{V.80})$$

Para obter as expressões (V.80), usamos as componentes de \vec{b}_j dadas por (V.66) e os elementos da matriz T , dados por (V.62).

O índice de refração n_j , que aparece na expressão (V.79), é obtido como solução da relação de dispersão local:

$$n_{\perp}^4 [(\epsilon_{xx} - n_{||}^2)(1 - \chi_{zz}) + (n_{||} + \chi_{xz})^2] - n_{\perp}^2 [\epsilon_{xy}^2(1 + \chi_{zz}) - 2\epsilon_{xy}\chi_{yz}(n_{||} + \chi_{xz}) + \\ + (\epsilon_{xx} - n_{||}^2)(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz0} - \epsilon_{xx}\chi_{zz} + n_{||}^2\chi_{zz} + 2n_{||}\chi_{xz} + \chi_{xz}^2 - \chi_{yz}^2)] + \\ + \epsilon_{zz0} [(\epsilon_{xx} - n_{||}^2)^2 + \epsilon_{xy}^2] = 0 \quad (\text{V.81})$$

Desse modo, $n_2 = -n_1$ e $n_4 = -n_3$, sendo convencionado que o índice 1 representa o modo ordinário e o índice 3 o modo extraordinário.

A expressão (V.79) é válida desde que satisfeitas as condições WKB [FGMR78]:

- 1) A solução de (V.81) não tenha cortes ou ressonâncias.
- 2) $n_1^2 \neq n_3^2$ para $-a \leq x \leq a$
- 3) $|n_j''| \ll |n_j'|$.

A expressão (V.79) é o resultado que buscávamos; representa a potência irradiada pela lâmina de plasma, para frequências próximas da frequência fundamental Ω_c , obtida segundo um procedimento que leva em conta todos os efeitos dielétricos relevantes. Na sua derivação foi imposta como condição que $|k_x''| \ll |k_x'|$, mas devemos notar que isto não implica necessariamente que $|\epsilon_{\alpha\beta}''| \ll |\epsilon_{\alpha\beta}'|$. Fidone e Granata apontam que a lei de Kirchhoff em meios anisotrópicos foi provada apenas para o caso em que a parte anti-hermitiana do tensor dielétrico é desprezível frente à parte hermitiana, não havendo prova para o caso mais geral que tratamos aqui [FG78], [Bu57]. Esta consideração levanta a questão de investigar se a expressão (V.79) é coerente com a lei de Kirchhoff, ou seja, se a potência irradiada é proporcional à potência absorvida. Fidone et alii analisaram esta questão [FG78], [FGMR78]; vamos apresentar um sumário de seus resultados.

O primeiro caso considerado foi o de um plasma em equilíbrio térmico, caracterizado por uma função distribuição maxwelliana relativística. Nesse caso, a função correlação é pro

porcional à parte anti-hermitiana do tensor dielétrico:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\omega T}{(2\pi)^5} \epsilon''_{\alpha\beta} \quad (V.82)$$

A expressão (V.79) transforma-se então em

$$\frac{d^3P}{dad\Omega_k d\omega} = (1-n''_j)^{1/2} \sum_j \int_{x_0}^{x_1} dx B_{bb}(\omega, T) \left(\frac{2\omega}{c} N''_j\right) \exp\left(-\frac{2\omega}{c} \int_{x_0}^{x_1} n''_j dx'\right) \quad (V.83)$$

N''_j pode ser obtido de β_j pela substituição de $G_{\alpha\beta}$ por $\epsilon''_{\alpha\beta} \cdot B_{bb}(\omega, T)$ é o limite clássico da intensidade de radiação de corpo negro no vácuo, dado por (III.22).

A expressão (V.83) tem a forma da solução da equação de transferência (Capítulo III), com $\left(\frac{2\omega}{c} N''_j\right)$ aparecendo em lugar do coeficiente de absorção. Portanto, a formulação mais geral que estamos desenvolvendo reproduz a relação entre absorção e emissão prevista pela lei de Kirchhoff, quando N''_j coincide com n''_j . Fidone e Granata mostraram que para propagação no plano xz ($k_y = 0$) esta coincidência existe e que portanto a lei de Kirchhoff permanece válida [FG78]. É conveniente salientar que permanece válida a relação entre absorção e emissão, o que não significa dizer que as demais características dos resultados coincidem com o que se obtém na aproximação de partículas independentes. Os resultados mostram que para $X \ll \frac{v_0^2}{c^2}$ a absorção da onda extraordinária é proporcional à densidade de partículas, enquanto a absorção da onda ordinária é usualmente desprezível [FGMR78], comportamento que coincide com o que é pre-

dito pelo uso da aproximação de partículas independentes e do princípio do balanço detalhado. Entretanto, para $X \gg \frac{v_0^2}{c^2}$ a absorção da onda extraordinária apresenta uma dependência em $1/n_e$, o que é um aspecto totalmente novo. A onda ordinária é fortemente absorvida em um plasma quente ($T \geq 1$ KeV); essa absorção se torna mais forte para $n_{||} \leq \frac{v_0}{c}$. Havendo forte absorção de modo ordinário espera-se emissão de radiação com a mesma polarização, o que tem sido confirmado por experimentos recentes [FG78].

Ainda trabalhando com um plasma térmico, Fidone e Grana generalizaram o cálculo para $n_y \neq 0$ e mostraram que para direções arbitrárias de propagação a lei de Kirchhoff não é estritamente obedecida. A responsabilidade desta divergência deve recair sobre a presença da parte anti-hermitiana do tensor dielétrico, uma vez que quando esta é desprezível a lei de Kirchhoff é válida [FG78].

Analisando um plasma não-maxwelliano, onde a relação (V.82) não se mantém, Fidone et alii mostraram que aparece um desvio adicional da lei de Kirchhoff, que permanece mesmo para propagação no plano xz [FGMR78]. Neste caso ($n_y = 0$), foi suposto que existe reciprocidade na absorção, ou seja, que a absorção é a mesma para ondas viajando em sentidos opostos, o que é válido para $f(p_{\perp}, p_{||}) = f(p_{\perp}, -p_{||})$. Supondo que $G_{\alpha\beta} = \rho_j \epsilon''_{\alpha\beta}$ onde ρ_j é uma função de x , vem:

$$\frac{d^3 p}{da d\Omega_k d\omega} = (1 - n_{||}^2)^{1/2} \sum_j \int_{x_0}^{x_1} dx B_j \left(\frac{2\omega}{c} n_j'' \right) \exp\left(-\frac{2\omega}{c} \int_x^{x_1} n_j'' dx' \right) \quad (V.84)$$

A expressão (V.84) está numa forma similar à solução da equação de transferência, mas B_j não é necessariamente igual

a j/α , para o modo considerado. Para um plasma maxwelliano relativístico, evidentemente, $\rho_j = \omega T / (2\pi)^5$ e a expressão (V.84) coincide com a (V.83). Para estudar situações de não-equilíbrio, foram utilizadas uma distribuição maxwelliana anisotrópica não relativística e uma distribuição "mirror-like" fracamente relativística, dadas respectivamente por:

$$f_a = \frac{m_0}{2\pi T_\perp} \left(\frac{m_0}{2\pi T_\parallel} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_0 v_\perp^2}{2T_\perp} - \frac{m_0 v_\parallel^2}{2T_\parallel} \right) \quad (\text{V.85a})$$

$$f_m = \frac{\mu_\perp}{2\pi} \frac{1}{(m_0 c)^2} e^{\mu_\perp} \delta(p_\parallel) e^{-E/T_\perp} \quad (\text{V.85b})$$

onde

$$\mu_\perp \equiv \frac{m_0 c^2}{T_\perp} \gg 1 .$$

Para a distribuição (V.85a), $G_{\alpha\beta}$ é proporcional a $\epsilon_{\alpha\beta}''$,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\omega T_{ef}}{(2\pi)^5} \epsilon_{\alpha\beta}''$$

$$T_{ef} = \frac{T_\parallel}{1 - \gamma \left(1 - \frac{T_\parallel}{T_\perp} \right)} \quad (\text{V.86})$$

$$B_j = \frac{\omega^2 T_{ef}}{8\pi^3 c^2}$$

Portanto, para este tipo de distribuição e para $n_y = 0$, a lei de Kirchhoff permanece válida, desde que nos utilizemos de uma "temperatura efetiva" para calcular a intensidade da radiação.

Para a distribuição (V.85b), com $n_y = 0$, foi mostrado que a expressão (V.84) é válida apenas para $n_{||} = 0$, caso em que não há emissão no modo ordinário e em que para o modo extraordinário B_j tem a forma de B_{bb} , com T_{\perp} ao invés de T .

Isto significa que para $n_{||} \neq 0$, uma função distribuição do tipo "mirror-like", como a (V.85b), não permite que se estabeleça uma proporcionalidade entre absorção e emissão. Escrevendo a potência irradiada na forma da expressão (V.83), Fidone et alii obtiveram

$$N_j'' = \frac{\pi}{2} \chi_{\perp}^2 (\gamma - 1) \frac{|b_{jx} + ib_{jy}|^2}{|\phi_j F_j|} e^{-\mu_{\perp}(\gamma - 1)} \quad (V.87)$$

onde $|b_{jx} + ib_{jy}|$ é dado pela expressão (V.80), com $\chi_{zz} = 0$ e $|\phi_j F_j|$ é dado pelas expressões (V.66), com $\chi_{zz} = 0$.

Na Figura V.6 mostramos o comportamento de N_j''/n_j'' em função da densidade, para diversos valores de ω .

Este e outros gráficos, obtidos para diversas direções de propagação, com parâmetros adequados a um plasma contido em um tokamak, podem ser encontrados em [FGMR78].

Para a obtenção da Figura V.6, foram usados os seguintes perfis de densidade, temperatura e campo magnético:

$$n_e(x) = n_e(0) e^{-\left(\frac{x}{5}\right)^2}; \quad n_e(0) = 5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}.$$

$$T_{\perp}(x) = T_{\perp}(0) e^{-\left(\frac{x}{5}\right)^2}; \quad T_{\perp}(0) = 1 \text{ KeV}.$$

$$B_0 = 10 \text{ KG, constante e uniforme.}$$

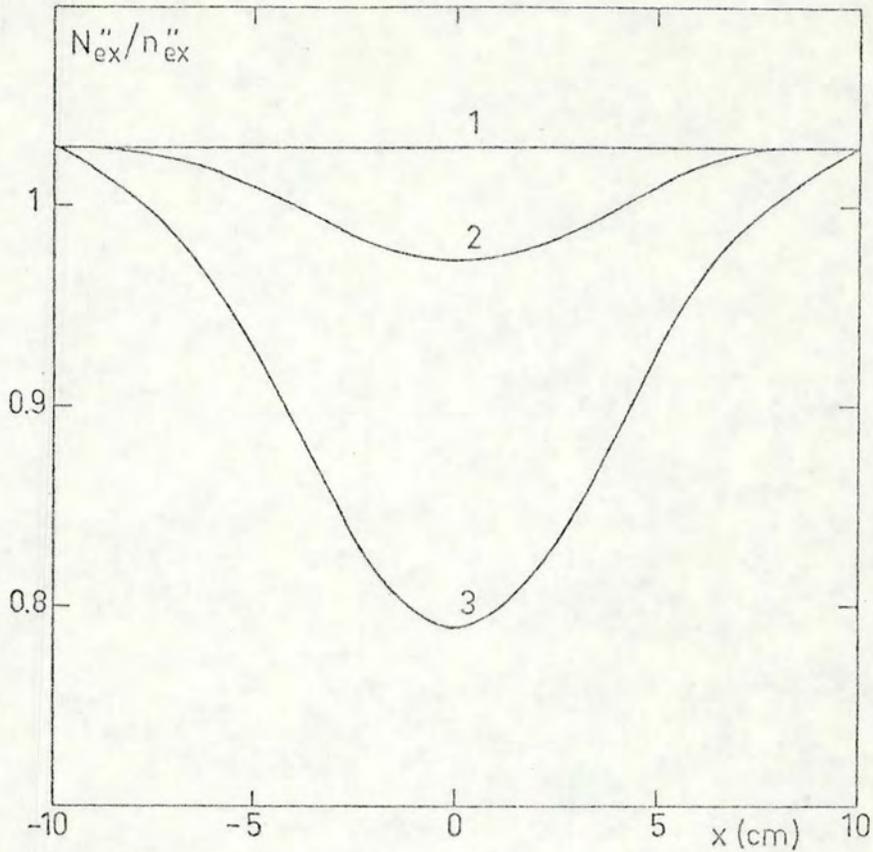


Figura V.6 - $N_{ex}''/n_{ex}'' \times x$, para $\theta = 80^\circ$. 1) $\Delta = 10^{-2}$ 2) $\Delta = 10^{-3}$ 3) $\Delta = 2 \cdot 10^{-4}$

$$\Delta \equiv \frac{\Omega_C - \omega}{\Omega_C} \quad [\text{FGMR78}].$$

Obs.: $N_{ex}'' \Leftrightarrow N_-$; $n_{ex}'' \Leftrightarrow n_-$.

Se a função distribuição não for par em $p_{||}$ [$f(p_{\perp}, p_{||}) \neq f(p_{\perp}, -p_{||})$], a absorção de uma onda não é recíproca para $n_{||} \neq 0$ e não há razão para esperar uma relação simples entre emissão e absorção [FGMR78]. Para $n_{||} = 0$, existe reciprocidade mas a expressão (V.84) não é válida em geral, a menos que $G_{\alpha\beta} = \rho_j \epsilon_{\alpha\beta}''$.

V.3 - Efeitos Dielétricos do Plasma na Geração e Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Cômicos

A propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma, na presença de um campo magnético, é de um modo geral fortemente influenciada por fatores como a intensidade do campo magnético e o ângulo de propagação da radiação, em relação ao mesmo. As chamadas "fontes extensas" de radiação, que são as que se pode descrever com o formalismo apresentado no Capítulo IV, apresentam em geral um campo magnético bastante fraco, da ordem de 10^{-5} gauss. Sendo assim, na região de frequências correspondente às ondas de rádio, em geral será satisfeita a condição $\omega \gg \Omega_c$. Nesse caso, o índice de refração para um plasma na presença de um campo magnético, dado pela expressão (V.49) (na aproximação de plasma frio), reduz-se à expressão para o índice de refração de um plasma isotrópico

$$n^2 = 1 - X \quad (V.88)$$

O efeito do campo magnético ainda se manifesta, por exemplo, através da rotação do plano de polarização das ondas que se propagam através do plasma (rotação de Faraday). O ângulo de rotação deste plano, para uma onda de alta frequência, é proporcional à intensidade do campo magnético [KT73]; este efeito não desaparece mesmo que o campo tenha pequena intensidade. Entretanto, para nossos propósitos será suficiente considerar que o plasma apresenta um índice de refração dado por (V.88). Vamos então considerar o efeito que pode ter a presença do plasma sobre a radiação produzida por um dipolo nele embebido que

vibra com uma frequência ω_i [GS66]. A radiação somente pode se propagar no plasma se $\omega_i > \omega_{pe}$, pois caso contrário o índice de refração seria imaginário. Portanto, para o caso que estamos considerando, o índice de refração é sempre menor do que 1. O índice de refração tem um papel importante porque modifica a velocidade de fase das ondas eletromagnéticas através do meio, a qual é dado por $v_f = \frac{c}{n}$. Particularmente, um oscilador dotado de carga elétrica, oscilando com frequência ω_i e movendo-se com velocidade \vec{v} através do plasma, produzirá uma radiação que poderá ser observada em uma frequência ω diferente de ω_i devido ao efeito Doppler:

$$\omega = \frac{\omega_i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left| 1 - \frac{v}{c} n(\omega) \cos \psi \right|} \quad (V.89)$$

onde ψ é o ângulo entre a direção de deslocamento do oscilador e a direção de propagação da radiação. A expressão (V.89) nos mostra essencialmente de que forma o índice de refração pode modificar a natureza da radiação emitida. Enquanto que para o vácuo ($n=1$) a emissão de uma partícula extremamente relativística se dá numa frequência elevada ($\omega \gg \omega_i$) para $\psi \rightarrow 0$, no caso de um plasma isotrópico com $n < 1$ o denominador da expressão (V.89) nunca pode tender a zero; dessa forma, a diminuição de $n(\omega)$ devido ao aumento na densidade do plasma faz com que diminuam os efeitos típicos da radiação de partícula ultra-relativística; por exemplo, a distribuição angular da radiação se fará dentro de um cone com ângulo de abertura maior do que para $n(\omega) \rightarrow 1$.

A aplicação destas idéias ao movimento de um elétron

em um campo magnético uniforme foi feita por Tsytovich, que obteve a seguinte expressão para a emissividade espectral [Ts51], [KTs73], [GS66], sob a condição $1 - n \ll 1$

$$\eta_{\omega} = \frac{\sqrt{3} e^2 \Omega_c}{2\pi c} \left| \frac{\omega}{\omega_c} \right| \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \left[1 + X \gamma^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{V.90})$$

onde agora $\omega_c \equiv \frac{3}{2} \Omega_c \gamma^2 \left[1 + X \gamma^2 \right]^{-3/2}$.

A condição para que o efeito da presença do plasma seja desprezível é:

$$X \gamma^2 \ll 1 \quad \text{ou} \quad (1 - n^2) \ll \frac{1}{\gamma^2} \quad (\text{V.91})$$

neste caso, a expressão (V.89) se reduz à expressão (II.27), obtida na aproximação de emissão por partículas independentes.

Isto significa que, dada uma partícula com energia E irradiando em um plasma com densidade n_e , os efeitos do plasma sobre a radiação só irão adquirir importância para as frequências mais baixas do espectro. A consequência nessa faixa é uma redução na intensidade da radiação, conhecida como efeito Razin-Tsytoich.

Já vimos anteriormente que o máximo do espectro de emissão de partícula isolada ocorre para uma frequência $\omega_M \sim 0,3 \omega_c$. Para que a emissão nesta frequência não seja diminuída pelos efeitos dielétricos do plasma, deve ser satisfeita a condição (V.91), com $\omega = \omega_M \approx 0,3 \omega_c$.

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_M^2} \gamma^2 \ll 1 \rightarrow \omega_M \gg \frac{\omega_{pe}^2}{0,3 \omega_c} \gamma^2 \approx \frac{2}{3} \frac{\omega_{pe}^2}{0,3 \Omega_c}$$

Portanto, a condição em ω_M é:

$$\omega_M \gg \frac{4 \cdot 10^2 n}{B_0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{em unidades do sistema,} \\ \text{c.g.s. gaussiano} \end{array} \right) \quad (\text{V.92})$$

Nossa intenção ao incluir esta discussão do efeito Razin-Tsytoovich não foi a de esgotar o assunto em todos os seus detalhes, mas somente dar a conhecer a existência deste efeito e permitir que se tenha uma idéia da sua natureza. Conforme já foi mencionado no capítulo anterior, foi mostrado por McCray [Mc66] que a influência dielétrica do plasma ambiente, que dá origem ao efeito Razin-Tsytoovich, sob certas circunstâncias poderia levar à amplificação da radiação.

VI - COEFICIENTE DE ABSORÇÃO DE UM PLASMA TÊNUE NA FREQUÊNCIA

$$\omega \approx \Omega_c$$

Ao longo deste trabalho temos feito uma revisão da teoria de radiação de cíclotron em plasmas magnetizados, abordando desde os fundamentos da teoria até os trabalhos mais recentes, que incluem os efeitos da polarização dielétrica do plasma. Vimos que em um plasma magnetizado a radiação apresenta dois modos de propagação, chamados ordinário e extraordinário. Ao tratarmos da radiação de cíclotron de um elétron no vácuo, vimos que a expressão para a emissividade espectral se divide em duas partes quando consideramos propagação perpendicular ao campo magnético, uma relacionada com o modo ordinário e outra com o modo extraordinário [expressões (II.29) e (II.30)]. No Capítulo III definimos o coeficiente de absorção e estabelecemos uma expressão para sua obtenção [expressão (III.10a)], válida para uma direção arbitrária de propagação. Para que esta expressão possa ser usada para calcular o coeficiente de absorção de um dado modo, para propagação não perpendicular, é necessário dispor de expressões explícitas para a emissividade espectral de cada modo, válidas para direção arbitrária de propagação. Estas expressões não são encontradas na literatura, dentro do contexto da aproximação de emissão por partículas independentes, e podem ser obtidas se tomarmos o limite apropriado dos resultados derivados para plasmas densos. Podemos tomar como ponto de partida a expressão (V.51) e fazer o limite para $X \rightarrow 0$ (plasma tênue), obtendo:

$$j_{\pm}(\omega, \theta) = \frac{e^2 n_e}{2\pi} \frac{\omega^2}{c} \frac{\rho_0 \mp \text{sen}^2 \theta}{2\rho_0} \int d^3u f(u) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[\omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) - m\Omega_0] [V_{\pm}^0 J_m(b_0) + \beta_{\perp} J'_m(b_0)]^2 \quad (\text{VI.1})$$

onde:

$$\rho_0 \equiv \lim_{X \rightarrow 0} \rho = \left[\text{sen}^4 \theta + \frac{4}{Y^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2}$$

$$V_{\pm}^0 \equiv \lim_{X \rightarrow 0} V_{\pm} = \frac{2}{Y} \left[\frac{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta - \text{sen}^2 \theta}{\text{sen} \theta (\text{sen}^2 \theta \mp \rho_0)} \right]$$

$$b_0 \equiv \lim_{X \rightarrow 0} b_{\pm} = \frac{m\beta_{\perp} \text{sen} \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}$$

As expressões (VI.1) representam o coeficiente de emissão dos modos ordinário e extraordinário, obtidos para uma situação de plasma tênue, onde vale a aproximação de emissão por partículas independentes. Neste contexto, podemos obter o coeficiente de absorção usando a expressão (III.10a). O uso das expressões (VI.1) e (III.10a) requer apenas que a função distribuição f tenha simetria azimutal. De acordo com o que foi definido pela equação (III.4), obtemos da expressão (VI.1) a emissividade de spectral para os modos ordinário e extraordinário:

$$\eta_{\pm}(p, \theta, \omega) = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \frac{\rho_0 \mp \text{sen}^2 \theta}{2\rho_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[\omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) - m\Omega_0] \cdot [V_{\pm}^0 J_m(b_0) + \beta_{\perp} J'_m(b_0)]^2 \quad (\text{VI.2})$$

Usando a expressão (III.10a):

$$\alpha_{\pm}(\theta, \omega) = -8\pi^3 e^2 n_e c \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\perp} dp_{\parallel} \frac{\rho_0 \mp \text{sen}^2 \theta}{2\rho_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[\omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) - m\Omega_0] \cdot$$

$$\cdot \left[V_{\pm}^0 J_m(b_0) + \beta_{\perp} J'_m(b_0) \right]^2 \left[\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f - \cos \theta \left(\frac{p_{\parallel}}{c} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f - \frac{p_{\perp}}{c} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f \right) \right]$$

(VI.3)

Vamos transformar a expressão (VI.3) para colocá-la numa forma mais adequada para a integração.

$$\delta\left[\omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) - \frac{m\Omega_0}{\gamma}\right] = \frac{1}{|\omega|} \delta\left[1 - \beta_{\parallel} \cos \theta - \frac{m\gamma}{\gamma}\right] =$$

$$= \frac{|\gamma|}{|\omega|} \delta\left[\gamma - \frac{p_{\parallel} \cos \theta}{m_0 c} - m\gamma\right] = \frac{\gamma^2 m_0^2 c^2}{|\omega| p_{\perp m}} \delta[p_{\perp} - p_{\perp m}]$$

(VI.4)

onde

$$p_{\perp m}^2 \equiv m_0^2 c^2 \left[(m\gamma + r \cos \theta)^2 - 1 - r^2 \right]$$

$$r \equiv \frac{p_{\parallel}}{m_0 c}$$

A componente perpendicular do momentum deve ser positiva e real, o que impõe restrições sobre o valor de r:

$$p_{\perp m} > 0 \rightarrow r_{m-} < r < r_{m+}$$

(VI.5)

onde r_{m-} e r_{m+} são as duas raízes obtidas igualando-se $p_{\perp m}$ a zero:

$$r_{m\pm} = \frac{m\gamma \cos \theta \pm \sqrt{m^2 \gamma^2 - 1 + \cos^2 \theta}}{1 - \cos^2 \theta}$$

A função delta que aparece em (VI.3) pode ser usada para alterar a forma de outros componentes da expressão:

$$b_o \rightarrow \frac{\gamma \beta_{\perp} \text{sen} \theta}{\gamma}$$

$$V_{\pm}^o \rightarrow \frac{2}{\gamma} \frac{\frac{m\gamma}{\gamma} - \text{sen}^2 \theta}{\text{sen} \theta (\text{sen}^2 \theta \mp \rho_o)}$$
(VI.6)

Usando (VI.4) e (VI.5) em (VI.3) e realizando a integração sobre dp_{\perp} , obtemos:

$$\alpha_{\pm}(\theta, \omega) = -8\pi^3 e^2 n_e c \frac{\rho_o \mp \text{sen}^2 \theta}{2\rho_o} \frac{m_o^2 c^2}{|\omega|} \int_{p_{\parallel-}}^{p_{\parallel+}} dp_{\parallel} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_m^2}{p_{\perp m}} \left[(V_{\pm}^o)_m J_m(b_m) + \beta_{\perp m} J'_m(b_m) \right]^2 \left[\gamma_m m_o \frac{\partial}{\partial p_{\perp m}} f_m - \cos \theta \left(\frac{p_{\parallel}}{c} \frac{\partial}{\partial p_{\perp m}} f_m - \frac{p_{\perp m}}{c} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f_m \right) \right] \quad (\text{VI.7})$$

onde:

$$\gamma_m \equiv \left(1 + r^2 + \frac{p_{\perp m}^2}{m_o^2 c^2} \right)^{1/2}$$

$$(V_{\pm}^o)_m \equiv \frac{2}{\gamma} \frac{\frac{m\gamma}{\gamma} - \text{sen}^2 \theta}{\text{sen} \theta (\text{sen}^2 \theta \mp \rho_o)}$$

$$f_m \equiv f(p_{\parallel}, p_{\perp m})$$

$$b_m \equiv \frac{\gamma_m \beta_{\perp m} \text{sen} \theta}{\gamma} = \frac{p_{\perp m} \text{sen} \theta}{\gamma_m c}$$

$$\beta_{\perp m} \equiv \frac{p_{\perp m}}{\gamma_m m_0 c}$$

No Capítulo V vimos que o coeficiente de absorção para o modo extraordinário obtido através do método de Rytov pode apresentar um comportamento diferente daquele previsto usando a aproximação de partículas independentes e o princípio do balanço detalhado [FG78], [FGMR78]. A diferença se fez sentir para frequências próximas ao primeiro harmônico da frequência de cíclotron. Para tornar possível a comparação para propagação não perpendicular, vamos tomar o termo com $m=1$ na expressão (VI.7); faremos o cálculo considerando uma situação fracamente relativística, de modo que $b_m \ll 1$. Nesse caso, as funções de Bessel em (VI.7) podem ser expandidas para pequeno argumento:

$$J_1(b_1) \approx \frac{b_1}{2} \quad J'_1(b_1) \approx \frac{1}{2} \quad (\text{VI.8})$$

Por uma questão de simplicidade na notação, vamos usar o símbolo V_{\pm} para indicar $(V_{\pm}^0)_1$. Na expressão (VI.7) temos:

$$\begin{aligned} \left[V_{\pm} J_1(b_1) + \beta_{\perp 1} J'_1(b_1) \right]^2 &\approx \frac{p_{\perp 1}^2}{4(m_0 c)^2} \left[V_{\pm}^2 \frac{\text{sen}^2 \theta}{\gamma^2} + \frac{2V_{\pm} \text{sen} \theta}{\gamma_1 \gamma} + \frac{1}{\gamma_1^2} \right] = \\ &= \frac{1}{4\gamma^2} \frac{p_{\perp 1}^2}{\gamma_1^2 (m_0 c)^2} \left[\gamma_1 V_{\pm} \text{sen} \theta + \gamma \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

Substituindo este resultado na expressão (VI.7), rearranjando alguns coeficientes e mudando a variável de integração de p_{\parallel} para r , obtemos:

$$\alpha_{\pm}^1(\theta, \omega) = -2\pi^2(m_0c)^2\omega \frac{\chi}{4Y^2} \frac{\rho_0 \mp \text{sen}^2\theta}{2\rho_0} \int_{r_{1-}}^{r_{1+}} dr p_{\perp 1} \left[(Y + r\cos\theta) V_{\pm} \text{sen}\theta + Y \right]^2 \cdot$$

$$\cdot m_0 \left[Y \frac{\partial}{\partial p_{\perp 1}} f_1 + \frac{\cos\theta p_{\perp 1}}{m_0c} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f_1 \right] \quad (\text{VI.10})$$

Na obtenção da expressão (VI.10) usamos:

$$\gamma_1 = \left(1 + \frac{p_{\perp 1}^2}{m_0^2c^2} + r^2 \right)^{1/2} = \left[1 + (Y + r\cos\theta)^2 - 1 - r^2 + r^2 \right]^{1/2} = Y + r\cos\theta$$

Usando a expressão (VI.6) para V_{\pm} , a expressão (VI.10) pode ser transformada em:

$$\alpha_{\pm}^1(\theta, \omega) = -\frac{\pi^2 m_0^3 c^2}{2} \frac{\omega \chi}{Y^2} \frac{1}{2\rho_0(\rho_0 \mp \text{sen}^2\theta)} \int_{r_{1-}}^{r_{1+}} dr p_{\perp 1} \left[A_{\pm} + B_{\pm}r + C_{\pm}r^2 \right] \cdot$$

$$\cdot \left[Y \frac{\partial}{\partial p_{\perp 1}} f_1 + \frac{\cos\theta p_{\perp 1}}{m_0c} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f_1 \right] \quad (\text{VI.11})$$

onde

$$A_{\pm} = \left[2\cos^2\theta + Y(\text{sen}^2\theta \mp \rho_0) \right]^2$$

$$B_{\pm} = -\frac{4}{Y} \left[2\cos^2\theta + Y(\text{sen}^2\theta \mp \rho_0) \right] \cos\theta \text{sen}^2\theta$$

$$C_{\pm} = \frac{4\cos^2\theta \text{sen}^4\theta}{Y^2} \cdot$$

A expressão (VI.11) foi obtida para um plasma infinito e homogêneo. Ela pode servir para calcular o coeficiente de absorção de uma lâmina de plasma, como aquela utilizada na se

ção (V.2), se substituirmos $\cos\theta$ por $n_{||}$, o que representa a condição de contorno adequada.

Em [FGM+79] encontramos expressões para a parte anti-hermitiana do tensor dielétrico:

$$\epsilon_{ijl}'' = -\frac{\pi^2 X}{2} m_0^3 c^3 \int_{r_{l-}}^{r_{l+}} dr \left(\frac{n_{\perp} r}{Y} \right)^{\delta_{i,z} + \delta_{j,z}} p_{\perp l} \left(Y \frac{\partial}{\partial p_{\perp l}} + \frac{n_{||} p_{\perp l}}{m_0 c} \frac{\partial}{\partial p_{||}} \right) f_l \quad (\text{VI.12})$$

Usando a expressão (VI.12), escrevemos o coeficiente de absorção como função da parte anti-hermitiana do tensor dielétrico:

$$\alpha_{\pm}^1(n_{||}, \omega) = \frac{\omega}{cY^2} \frac{1}{2\rho_0 [\rho_0 \mp (1 - n_{||}^2)]} \left[A_{\pm} \epsilon_{xxl}'' + B_{\pm} \frac{Y}{n_{\perp}} \epsilon_{xzl}'' + C_{\pm} \frac{Y^2}{n_{\perp}^2} \epsilon_{zzl}'' \right]$$

$$\alpha_{\pm}^1(n_{||}, \omega) = \frac{\omega}{cY^2} \frac{1}{2\rho_0 [\rho_0 \mp (1 - n_{||}^2)]} \left[A_{\pm} \epsilon_{xxl}'' + B_{\pm} Y \chi_{xzl}'' + C_{\pm} Y^2 \chi_{zzl}'' \right] \quad (\text{VI.13})$$

O coeficiente de absorção previsto pela expressão (VI.13) é diretamente proporcional à densidade de partículas, através da parte anti-hermitiana do tensor dielétrico; este resultado é o esperado dentro do contexto da aproximação de partículas independentes [ver expressão (III.10a)].

No caso particular de propagação perpendicular ($n_{||} = 0$) a expressão (VI.13) se reduz a:

$$\alpha_{+}^1(n_{||} = 0, \omega) = \frac{\omega}{c} \chi_{zzl}''(n_{||} = 0)$$

$$\alpha_{-}^1(n_{||} = 0, \omega) = \frac{\omega}{c} \epsilon_{xxl}''(n_{||} = 0) \quad (\text{VI.14})$$

A propagação perpendicular foi estudada por Fidone et alii, que mostraram que o coeficiente de absorção do modo ordinário ($\alpha_+ = 2 \frac{\omega}{c} n_+''$), obtido com a consideração de todos os efeitos dielétricos relevantes (ver Capítulo V), coincide com aquele dado pela expressão (VI.14) quando $X \ll 1$.

Para o modo extraordinário ($\alpha_- = 2 \frac{\omega}{c} n_-''$), a coincidência ocorre quando

$$\left| \frac{X}{4} \int d^3 p \frac{p_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f}{\gamma - \gamma} \right| \ll 1 .$$

Se o plasma for térmico, esta condição equivale a $X \ll \frac{v_0^2}{c^2}$ [FGMR78].

VI.1 - Obtenção da Função de Fonte

Empregando o mesmo procedimento usado para obter a expressão (VI.13), tomamos a expressão (VI.1) e ficamos com:

$$j_{\pm}^1(n_{\parallel}, \omega) = \frac{X \omega^3 m_0^2}{16 \pi \gamma^2} \frac{1}{2 \rho_0 [\rho_0 \mp \sin^2 \theta]} \int_{r_{1-}}^{r_{1+}} dr p_{\perp}^2 [A_{\pm} + B_{\pm} r + C_{\pm} r^2] f_1 \quad (\text{VI.15})$$

Novamente, para adequar a expressão à geometria de uma lâmina de plasma, devemos substituir $\cos \theta$ por n_{\parallel} .

Em [FGM+79] encontramos expressões para a função correlação das correntes de fonte; o termo correspondente ao primeiro harmônico é:

$$G_{ijl} = \frac{\pi^2 X}{2} \frac{m_0^2 c^3 \omega}{(2\pi)^5} \int_{r_{1-}}^{r_{1+}} dr p_{\perp l}^2 \left(\frac{n_{\perp} r}{Y} \right)^{\delta_{i,z} + \delta_{j,z}} f_l \quad (\text{VI.16})$$

Com o uso de (VI.16), escrevemos o coeficiente de emissão em termos da função correlação das correntes de fonte:

$$j_{\pm}^1(n_{\parallel}, \omega) = \frac{4\pi^2 \omega^2}{Y^2 c^3} \frac{1}{2\rho_0 [\rho_0 \mp (1 - n_{\parallel}^2)]} \left[A_{\pm} G_{xxl} + B_{\pm} \frac{Y}{n_{\perp}} G_{xzl} + C_{\pm} \frac{Y^2}{n_{\perp}^2} G_{zzl} \right]$$

$$j_{\pm}^1(n_{\parallel}, \omega) = \frac{4\pi^2 \omega^2}{Y^2 c^3} \frac{1}{2\rho_0 [\rho_0 \mp (1 - n_{\parallel}^2)]} \left[A_{\pm} G_{xxl} + B_{\pm} Y \zeta_{xzl} + C_{\pm} Y^2 \zeta_{zzl} \right] \quad (\text{VI.17})$$

Estamos agora capacitados a obter a função de fonte, para cada modo de propagação em um plasma tênue, bastando dividir a expressão (VI.17) pela (VI.13):

$$S_{\pm}^1(n_{\parallel}, \omega) = \frac{j_{\pm}^1(n_{\parallel}, \omega)}{\alpha_{\pm}^1(n_{\parallel}, \omega)} = \frac{4\pi^2 \omega}{c^2} \frac{[A_{\pm} G_{xxl} + B_{\pm} Y \zeta_{xzl} + C_{\pm} Y^2 \zeta_{zzl}]}{[A_{\pm} \epsilon''_{xxl} + B_{\pm} Y \chi''_{xzl} + C_{\pm} Y^2 \chi''_{zzl}]} \quad (\text{VI.18})$$

Para um plasma caracterizado por uma função distribuição Maxwelliana isotrópica relativística, dada pela expressão (IV.4), a função de correlação das correntes de fonte é proporcional à parte anti-hermitiana do tensor dielétrico:

$$G_{ij} = \frac{\omega T}{(2\pi)^5} \epsilon''_{ij} \quad (\text{VI.19})$$

Esta relação pode ser verificada facilmente aplicando a expressão (VI.12) à função distribuição dada por (IV.4).

$$\epsilon_{ijl}'' = \frac{\pi^2 \chi}{2} \frac{m_0^2 c^3}{T} \int_{r_{l-}}^{r_{l+}} dr \left(\frac{n_{\pm} r}{Y} \right)^{\delta_{i,z} + \delta_{j,z}} \frac{p_{\pm l}^2}{Y_l} (Y + n_{ll} r) f_l \quad (\text{VI.20})$$

Já vimos anteriormente que $Y_l = Y + n_{ll} r$; portanto, usando a expressão (VI.16),

$$\epsilon_{ijl}'' = \frac{(2\pi)^5}{\omega T} G_{ijl}$$

Introduzindo esta relação em (VI.18), obtemos o limite clássico da intensidade de radiação de um corpo negro:

$$S_{\pm}^1(n_{ll}, \omega) = \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2}$$

Assim, para o caso de uma distribuição de momentum arbitrária, com simetria azimutal, a expressão (VI.18) permite que definamos uma temperatura efetiva de radiação

$$S_{\pm}^1(n_{ll}, \omega) = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \frac{(2\pi)^5}{\omega} \frac{[A_{\pm} G_{XXl} + B_{\pm} Y \zeta_{XZl} + C_{\pm} Y^2 \zeta_{ZZl}]}{[A_{\pm} \epsilon''_{XXl} + B_{\pm} Y \chi''_{XZl} + C_{\pm} Y^2 \chi''_{ZZl}]} \equiv \frac{\omega^2 T_{ef}^{\pm}}{8\pi^3 c^2} \quad (\text{VI.21})$$

VI.2 - Conclusão

Foram assim atingidos os objetivos propostos ao início do capítulo. Utilizamo-nos de resultados estabelecidos na literatura para obter uma expressão para o coeficiente de absorção dos modos ordinário e extraordinário em um plasma tênue, on

de é válida a aproximação de emissão e absorção por partículas independentes. A expressão foi obtida para a absorção no primeiro harmônico da frequência de cíclotron, supondo energias fracamente relativísticas, e mostra o coeficiente de absorção como função da parte anti-hermitiana do tensor dielétrico. Transformamos a expressão para o coeficiente de emissão e mostramos que este pode ser dado em termos da função correlação das correntes de fonte. Em seguida, obtivemos a função de fonte e definimos uma temperatura efetiva de radiação. Estes resultados são válidos para distribuições de momentum com simetria azimutal e admitem inomogeneidades suaves nos parâmetros do plasma.

Com os resultados obtidos neste capítulo, tentamos completar uma lacuna deixada após o Capítulo IV. Nossos resultados gerais para plasmas tênues são dados pelas expressões (VI.13), (VI.17) e (VI.21), com coeficientes A_{\pm} , B_{\pm} e C_{\pm} dados por (VI.11). Uma vez definida a forma da função distribuição de momentum, a questão é integrar as expressões (VI.12) e (VI.15) e, fazendo uso dos parâmetros necessários, obter um resultado numérico para os elementos do tensor dielétrico e da função correlação.

VII - CONCLUSÕES

Apresentamos, em diferentes graus de complexidade, a teoria da radiação de cíclotron espontânea em plasmas magnetizados. Iniciamos com os aspectos básicos da teoria de radiação de um único elétron exposto a um campo magnético no vácuo e com uma introdução à teoria de transporte de energia em dielétricos. Gradativamente, tratamos da emissão e absorção da radiação de cíclotron em plasmas tênues, tanto relativísticos quanto não relativísticos, introduzimos os efeitos da polarização dielétrica no cálculo da emissão e apresentamos um método de cálculo adequado para uma geometria que admite inomogeneidades espaciais e condições de contorno. Neste ponto, incluímos uma discussão sobre a validade da lei de Kirchhoff em plasmas anisotrópicos. Finalmente, derivamos uma expressão para o coeficiente de absorção dos modos ordinário e extraordinário, para direções arbitrárias de propagação em plasmas de baixa densidade, e escrevemos a função de fonte em termos de uma temperatura efetiva de radiação para cada modo.

Ao longo do trabalho vimos que a radiação de cíclotron tem relevantes aplicações experimentais e tecnológicas, seja devido à sua importância como instrumento de análise e diagnóstico de plasmas, seja como promissor método de aquecimento de plasmas, ou ainda em aplicações mais recentes, como mecanismo de excitação em espectroscopia atômica e molecular.

Ao discutirmos as aplicações da teoria, vimos que existe ainda uma certa dificuldade na comparação de resultados experimentais com previsões teóricas. Uma parcela da responsabilidade

de por esta situação pode evidentemente residir no fato dos trabalhos teóricos não estarem levando em consideração todos os efeitos relevantes, mas acredita-se que em sua maior parte a dificuldade está em que as técnicas experimentais ainda não conseguiram contornar certos problemas; por exemplo, imprecisão na medida das intensidades das linhas de emissão.

Mostramos que a teoria de emissão espontânea é capaz de levar em conta os efeitos dielétricos do plasma, podendo também levar em conta inomogeneidades suaves nos parâmetros do plasma e condições de contorno para geometrias simples. Ainda não está claro para nós se a consideração de geometrias mais detalhadas poderia levar a resultados significativamente diferentes dos já existentes, tanto nos aspectos qualitativos quanto nos aspectos quantitativos.

Existe ainda uma situação onde os efeitos dielétricos não foram incluídos convenientemente, que é a emissão por partículas extremamente relativísticas. O problema foi tratado até agora de uma forma heurística, conforme apresentamos no Capítulo V.

Outro campo onde não nos detivemos e que parece promissor para um futuro imediato é o da emissão de cíclotron estimulada. Além da importância tecnológica do tema (perda de energia em reatores, aquecimento), temos situações na natureza em que a emissão de cíclotron estimulada parece ser uma explicação satisfatória. Como ilustração, podemos citar a radiação decamétrica de Júpiter [WF77] e a radiação kilométrica terrestre [WL79]. Parece-nos um problema interessante estudar o coeficiente de absorção de um plasma caracterizado por uma função distribuição

sujeita a instabilidades, diretamente através da solução da relação de dispersão. Em geral, este tema tem sido estudado com a hipótese de uma relação de proporcionalidade entre emissão e absorção [BHB61] e [KNY+75]. Vimos no Capítulo V que esta hipótese nem sempre pode ser mantida em plasmas anisotrópicos, de modo que nos propomos a estudar o assunto em futuro próximo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AH50 ALFVÉN, H. & HERLOFSON, N. Cosmic radiation and radio stars. Physical Review, New York, 78(5):616, June 1950.
- BB61 BEKEFI, G. & BROWN, S.C. Emission of radio-frequency waves from plasmas. American Journal of Physics, New York, 29(7):404-28, July, 1961.
- Be66 BEKEFI, G. Radiation processes in plasmas. New York, John Wiley, 1966.
- BHB61 BEKEFI, G.; HIRSHFIELD, J.L.; BROWN, S.C. Cyclotron emission from plasmas with non-maxwellian distributions. Physical Review, New York, 122(4):1037-42, May, 1961.
- Bu57 BUNKIN, F.V. Thermal radiation from an anisotropic medium. Soviet Physics JETP, New York, 5(4):665-73, Nov. 1957.
- Ch50 CHANDRASEKHAR, S. Radiative Transfer. Oxford, Clarendon, 1950.
- CHPC74 COSTLEY, A.E.; HASTIE, R.J.; PAUL J.W.M.; CHAMBERLAIN, J. Electron cyclotron emission from a tokamak plasma; experiment and theory. Physical Review Letters, New York, 33(13):758-61, Sept. 1974.
- Co77 COSTLEY, A.E. & TFR GROUP. Measurements of electron cyclotron emission from high-density tokamak plasmas in TFR. Physical Review Letters, New York, 38(25): :1477-80, June, 1977.
- DR60 DRUMMOND, W.E. & ROSENBLUTH, M.N. Cyclotron radiation from a hot plasma. The Physics of Fluids, New York, 3(1):45-51, Jan./Feb. 1960.

- DR61 DRUMMOND, W.E. & ROSENBLUTH, M.N. Comments on synchrotron radiation. The Physics of Fluids, New York, 4(2):277-8, Feb. 1961.
- DR63 _____. Cyclotron radiation from a hot plasma. The Physics of Fluids, New York, 6(2):276-83, Feb. 1963.
- EC73 ENGELMANN, F. & CURATOLO, M. Cyclotron radiation from a rarefield inhomogeneous magnetoplasma. Nuclear Fusion, Vienna, 13(4):497-507, Aug. 1973.
- FG78 FIDONE, I. & GRANATA, G. Electron cyclotron emission from thermal plasmas. Fontenay-aux-Roses, Association Euratom - CEA sur la Fusion, 1978 (EUR-CEA-FC-944)
- FGMR78 FIDONE, I.; GRANATA, G.; MEYER, R.L.; RAMPONI, G. Electron cyclotron emission from non-maxwellian plasmas. Fontenay-aux-Roses, Association Euratom - CEA sur la Fusion, 1978. (EUR-CEA-FC-956)
- FGM+79 FIDONE, I.; GRANATA, G.; MEYER, R.L.; DILLENBURG, D.; GAFFEY, J.D.; JORNADA, E.H.; SCHNEIDER, R.S.; ZIEBELL, L.F. Emission and absorption of radiation near the electron gyrofrequencies for non-maxwellian plasmas. Porto Alegre, Instituto de Física, UFRGS, 1979. Em preparação.
- FGRM78 FIDONE, I.; GRANATA, G.; RAMPONI, G.; MEYER, R.L. Wave absorption near the electron cyclotron frequency. The Physics of Fluids, New York, 21(4):645-52, Apr. 1978.
- FLW78 FREUND, H.P.; LEE, L.C.; WU, C.S. The spontaneous emission of plasma frequency radiation in tokamaks. College Park, Institute for Physical Science and Technology, 1978. (Technical note BN-886)

- FW77a FREUND, H.P. & WU, C.S. Plasma effects on the spontaneous emission of synchrotron radiation from weakly relativistic electrons. The Physics of Fluids, New York, 20(6):963-73, June, 1977.
- FW77b _____. Synchrotron emissivity near the electron cyclotron and upper hybrid frequencies. The Physics of Fluids, New York, 20(10):1697-703, Oct. 1977.
- FWLD78 FREUND, H.P.; WU, C.S.; LEE, L.C.; DILLENBURG, D. Spontaneous synchrotron emission from a plasma with an energetic runaway electron tail. The Physics of Fluids, New York, 21(9):1502-12, Sept. 1978.
- GR65 GRADSHTEIN, I.S. & RYZHIK, I.M. Table of integrals, series, and products. New York, Academic, 1965.
- GS66 GINZBURG, V.L. & SYROVATSKIJ, S.I. Cosmic magnetic bremsstrahlung (synchrotron radiation). Soviet Physics Uspekhi, New York, 8(5):674-701, Mar./Apr. 1966.
- GS67 GINZBURG, V.L. & SYROVATSKIJ, S.I. Cosmic rays in the galaxy. In: WOERDEN, H. van ed. Radio astronomy and the galactic system. London, Academic, 1967. p.411-28.
- HBB61 HIRSCHFIELD, J.L.; BALDWIN, D.E.; BROWN, S.C. Cyclotron radiation from a hot plasma. The Physics of Fluids, New York, 4(2):198-203, Feb. 1961.
- HG77 HIRSCHFIELD, J.L. & GRANATSTEIN, V.L. The electron cyclotron maser - an historical survey. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, New York, MTT-25(6):522-27, June, 1977,
- IKR76 IODKO, M.K.; KARAKAD'KO, V.K.; ROMANOV, V.A. The primary-electron spectrum above 3 GeV. Isvestiya Akad-Nauk URSS - Physics series, 40(3):529, 1976.

- Ja75 JACKSON, J.D. Classical electrodynamics. New York, John Wiley, 1975.
- Ki50 KIEPENHAUER, K.O. Cosmic rays as the source of general galactic radio emission. Physical Review, New York, 79(4):738-9, Aug. 1950.
- K167 KLIMONTOVICH, Yu.L. The statistical theory of non-equilibrium processes in a plasma. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 1967.
- KNY+75 KUBO, H.; NAKAMURA, S.; YUYAMA, T.; MITANI, K.; AIHARA, S.; HOSOKAWA, M.; IKEGAMI, H. Amplification of extraordinary waves through relativistic magnetized plasma. Physical Review Letters, New York, 35(15):998-1000, Oct. 1975.
- KT73 KRALL, N.A. & TRIVELPIECE, A.W. Principles of plasma physics. New York, McGraw-Hill, 1973.
- KTs73 KAPLAN, S.A. & TSYTOVICH, V.N. Plasma astrophysics. Oxford, Pergamon, 1973.
- LST64 LICHTENBERG, A.J.; SESNIC, S.; TRIVELPIECE, A.W. Measurement of the synchrotron radiation spectrum from a hot plasma. Physical Review Letters, New York, 13(13):387-88, Sept. 1964.
- LSTC64 LICHTENBERG, A.J.; SESNIC, S.; TRIVELPIECE, A.W.; COLGATE, S.A. Synchrotron radiation measurements from a plasma in a magnetic mirror machine. The Physics of Fluids, New York, 7(9):1549-51, Sept. 1964.
- Ma55 MARTIN, L.C. Geometrical optics. London, Sir Isaac Pitman, 1955.
- Mc66 McCRAY, R. Possibility of maser action in cosmic radio sources. Science, Washington, 154:1320-3, Dec. 1966.

- Os59 OSTER, L. Spectral and angular distribution of cyclotron radiation emitted by colliding particles. Physical Review, New York, 116(3):474-80, Nov. 1959.
- Os60 _____. Effects of collisions on the cyclotron radiation from relativistic particles. Physical Review, New York, 119(5):1444-56, Sept. 1960.
- Pa77 PACHOLKZIK, A.G. Radio galaxies. Oxford, Pergamon, 1977.
- Sc12 SCHOTT, G.A. Electromagnetic radiation. Cambridge, University Press, 1912.
- Si67 SITENKO, A.G. Electromagnetic fluctuations in plasma. New York, Academic, 1967.
- TK58 TRUBNIKOV, B.A. & KUDRYAVTSEV, V.S. Plasma radiation in a magnetic field. In: PROCEEDINGS of the second United Nations international conference on the peaceful uses of atomic energy. Geneva, United Nations, 1958. v. 31, p. 93-8.
- Tr58 TRUBNIKOV, B.A. Plasma radiation in a magnetic field. Soviet Physics Doklady, New York, 3(1):136-40, Jan./Feb. 1958.
- Tr61 _____. On the angular distribution of cyclotron radiation from a hot plasma. The Physics of Fluids, New York, 4(2):195-8, Feb., 1961.
- Ts51 TSYTOVICH, V.N. Vestnik Moscow State Univ.: Physics Series, 4, 27, 1951.
- We59 WESTFOLD, K.C. The polarization of synchrotron radiation. The Astrophysical Journal, Chicago, 130(1):241-58, July, 1959.

- WF77 WU, C.S. & FREUND, H.P. Induced emission of Jupiter's decametric radiation by Io-accelerated electrons. The Astrophysical Journal, Chicago, 213(2):575-87, Apr. 1977.
- WL79 WU, C.S. & LEE, L.C. A theory of the terrestrial kilometric radiation. The Astrophysical Journal, Chicago. A ser publicado.