

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

Marcelo Salvador Côser Filho

**Aprendizagem de Matemática Financeira no Ensino Médio:
uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas**

Porto Alegre - RS

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Marcelo Salvador Côser Filho

**Aprendizagem de Matemática Financeira no Ensino Médio:
uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso**.

Porto Alegre - RS

2008

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

Marcelo Salvador Cóser Filho

**Aprendizagem de Matemática Financeira no Ensino Médio:
uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas**

Banca Examinadora

RESUMO

Nessa dissertação é apresentada uma proposta de trabalho de Matemática Financeira no Ensino Médio, utilizando planilhas eletrônicas, para resolver alguns dos principais problemas inerentes a certas movimentações financeiras via recursão, tais como o planejamento de uma previdência privada e o pagamento parcelado de dívidas, dentre outros.

O principal objetivo é suprir uma lacuna no que diz respeito à existência de material didático voltado para o nível de ensino abordado, como foi possível constatar a partir da análise de diversos livros didáticos. Além da proposta citada e da análise de livros didáticos, essa dissertação contém uma análise das sessões de trabalho com estudantes de Ensino Médio, utilizando o material apresentado, bem como uma explicação mais detalhada do método recursivo proposto.

Espera-se que tal material possa ser utilizado por professores interessados em estudar o tema com seus alunos, sem necessariamente possuir conhecimento prévio do assunto e/ou receber orientações adicionais sobre o método de trabalho.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Planilhas Eletrônicas. Ensino Médio.

ABSTRACT

In this dissertation we present a proposal to study Financial Math in High School, using spreadsheets to solve some of the main problems inherent to certain financial process via recursion, such as the planning of a private welfare and payment by instalments, among others.

The main target is to fill a gap concerning the existence of textbooks in the teaching level approached, which was possible to verify from the analysis of various textbooks. In addition to the proposal and the textbooks analysis, this dissertation contains an analysis of the work sessions in class with High School students, using the presented textbook, as well as a detailed explanation of the recursive method proposed.

We hope that this textbook can be used for teachers interested in study the theme with their students, without previous knowledge from the subject and/or without extra orientations about the method.

Keywords: Financial Mathematics. Spreadsheets. High School.

LISTA DE FIGURAS

Fig. 01	Ângulos opostos pelo vértice.....	11
Fig. 02	Extrato da Página 54 de GUELLI (2003).....	19
Fig. 03	Extrato da Página 85 de GUELLI (2003).....	20
Fig. 04	Extrato da Página 86 de GUELLI (2003).....	21
Fig. 05	Extrato da Página 86 de GUELLI (2003).....	22
Fig. 06	Extrato da Página 71 do Manual do Professor de GUELLI (2003)...	22
Fig. 07	Extrato da Página 116 de ZAMPIROLLO (2004).....	24
Fig. 08	Extrato da Página 179 de YOUSSEF (2004).....	25
Fig. 09	Extrato da Página 181 de YOUSSEF (2004).....	26
Fig. 10	Extrato da Página 164 de BIANCHINI (2003).....	27
Fig. 11	Extrato da Página 165 de BIANCHINI (2003).....	28
Fig. 12	Extrato da Página 167 de BIANCHINI (2003).....	29
Fig. 13	Extrato das Páginas 310 e 311 de DANTE (2007).....	30
Fig. 14	Extrato da Página 302 de DANTE (2007).....	31
Fig. 15	Extrato da Página 312 de DANTE (2007).....	32
Fig. 16	Extrato da Página 315 de DANTE (2007).....	33
Fig. 17	Extrato da Página 316 de DANTE (2007).....	34
Fig. 18	Extrato da Página 316 de DANTE (2007).....	36
Fig. 19	Extrato da Página 209 de SILVA (2005).....	38
Fig. 20	Extrato da Página 253 de SILVA (2005).....	39
Fig. 21	Extrato da Página 577 de SILVA (2005).....	40
Fig. 22	Extrato da Página 578 de SILVA (2005).....	41

Fig. 22	Extrato da Página 579 de SILVA (2005).....	42
Fig. 24	Extrato da Página 580 de SILVA (2005).....	43
Fig. 25	Extrato da Página 581 de SILVA (2005).....	44
Fig. 26	Extrato da Página 581 de SILVA (2005).....	45
Fig. 27	Extrato da Página 305 de GIOVANNI (2000).....	47
Fig. 28	Extrato da Página 324 de GIOVANNI (2000).....	48
Fig. 29	Extrato da Página 325 de GIOVANNI (2000).....	49
Fig. 30	Extrato da Página 326 de GIOVANNI (2000).....	50
Fig. 31	Extrato da Página 329 de GIOVANNI (2000).....	51
Fig. 32	Extrato da Página 331 de GIOVANNI (2000).....	52
Fig. 33	Extrato da Página 332 de GIOVANNI (2000).....	52
Fig. 34	Extrato da Página 333 de GIOVANNI (2000).....	53
Fig. 35	Extrato da Página 334 de GIOVANNI (2000).....	55
Fig. 36	Desenvolvimento cognitivo em Matemática (TALL, 1999).....	78
Fig. 37	Diferentes níveis de sofisticação (TALL 1999).....	79

LISTA DE PLANILHAS

Planilha 01	Resolução de Exercício.....	32
Planilha 02	Resolução de Exercício.....	33
Planilha 03	Resolução de Exercício.....	35
Planilha 04	Resolução de Exercício.....	35
Planilha 05	Explicação do Método.....	59
Planilha 06	Explicação do Método.....	60
Planilha 07	Explicação do Método.....	60
Planilha 08	Explicação do Método.....	60
Planilha 09	Explicação do Método.....	61
Planilha 10	Explicação do Método.....	62
Planilha 11	Explicação do Método.....	62
Planilha 12	Explicação do Método.....	63
Planilha 13	Explicação do Método.....	63
Planilha 14	Explicação do Método.....	64
Planilha 15	Explicação do Método.....	64
Planilha 16	Explicação do Método.....	65
Planilha 17	Explicação do Método.....	67
Planilha 18	Explicação do Método.....	67
Planilha 19	Explicação do Método.....	68
Planilha 20	Explicação do Método.....	68
Planilha 21	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	86
Planilha 22	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	86
Planilha 23	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	87

Planilha 24	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	87
Planilha 25	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	87
Planilha 26	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	88
Planilha 27	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	89
Planilha 28	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	89
Planilha 29	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	89
Planilha 30	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	90
Planilha 31	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	90
Planilha 32	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	92
Planilha 33	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	92
Planilha 34	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	92
Planilha 35	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	94
Planilha 36	Análise das sessões de trabalho - Juros Compostos.....	95
Planilha 37	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	98
Planilha 38	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	99
Planilha 39	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	100
Planilha 40	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	101
Planilha 41	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	102
Planilha 42	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	104
Planilha 43	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	105
Planilha 44	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	106
Planilha 45	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	107
Planilha 46	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	107
Planilha 47	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	108

Planilha 48	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	109
Planilha 49	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	109
Planilha 50	Análise das sessões de trabalho - Seqüências de Depósitos....	110
Planilha 51	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	111
Planilha 52	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	112
Planilha 53	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	113
Planilha 54	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	114
Planilha 55	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	114
Planilha 56	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	115
Planilha 57	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	116
Planilha 58	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	116
Planilha 59	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	117
Planilha 60	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	118
Planilha 61	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	118
Planilha 62	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	119
Planilha 63	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	119
Planilha 64	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	120
Planilha 65	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	121
Planilha 66	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	121
Planilha 67	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	122
Planilha 68	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	123
Planilha 69	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	124
Planilha 70	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	124
Planilha 71	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	125

Planilha 72	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	126
Planilha 73	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	126
Planilha 74	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	127
Planilha 75	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	127
Planilha 76	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	128
Planilha 77	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	128
Planilha 78	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	129
Planilha 79	Análise das sessões de trabalho - Pagamento de Dívidas.....	130

SUMÁRIO

01	INTRODUÇÃO.....	10
02	ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS.....	18
2.1	Matemática (GUELLI, 2003).....	18
2.2	Matemática - Volume 1 (ZAMPIROLLO, 2004).....	23
2.3	Matemática: de olho no mundo do trabalho (YOUSSEF, 2004).....	25
2.4	Curso de Matemática (BIANCHINI, 2003).....	27
2.5	Matemática: Contexto & Aplicações - Volume 1 (DANTE, 2007).....	30
2.6	Matemática para o Ensino Médio (SILVA, 2005).....	37
2.7	Matemática: uma nova abordagem - Volume 1 (GIOVANNI, 2000).....	47
2.8	Síntese das Análises.....	57
03	PROCESSOS RECURSIVOS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA	59
04	FUNDAMENTAÇÃO DIDÁTICA.....	71
4.1	Uso de Computadores para aprendizagem em Matemática.....	71
4.2	Aprendizagem a partir de procedimentos, processos e <i>proceitos</i>	75
05	TÉCNICAS E MATERIAIS.....	80
06	ANÁLISE DOS DADOS.....	85
6.1	Sessões de Trabalho - Juros Compostos.....	85
6.2	Sessões de Trabalho - Seqüências de Depósitos.....	97
6.3	Sessões de Trabalho - Pagamento de Dívidas.....	111
07	CONCLUSÕES.....	131
	REFERÊNCIAS.....	134
	APÊNDICE: Material elaborado para aplicação em sala de aula.....	136

INTRODUÇÃO

A maioria dos professores de Matemática já deve ter se encontrado na seguinte situação: turma agitada, não muito disposta a seguir as orientações recebidas, por mais diversas que sejam as intervenções tentadas. O professor não desiste, e insiste em obter de seus estudantes um mínimo de dedicação e atenção para o assunto que pretende desenvolver. Nisso, um dos alunos contra-argumenta, cheio de convicção: “Por que perder meu tempo com isso se NUNCA utilizarei tais conhecimentos na minha vida?”.

É uma afirmação forte. Pior: difícil de ser confrontada, visto que ela provavelmente não está de todo errada. Afinal, muito da Matemática habitualmente estudada nos colégios, especialmente no Ensino Médio, tem suas aplicações direcionadas para profissões específicas e situações essencialmente técnicas. Por exemplo, não é difícil convencer a maioria dos estudantes de que problemas elementares de Programação Linear podem ser resolvidos analisando a representação gráfica de retas. No entanto, a quantidade de estudantes que de fato irão aplicar tal conceito no futuro, se analisada comparativamente ao universo dos alunos, é irrisória.

Claro, é possível esboçar um argumento na seguinte linha: a Matemática é construída a partir de um tipo de raciocínio muito especial, se comparada às demais ciências, e tal raciocínio só é desenvolvido e estimulado com o estudo de, é claro, Matemática. Para exemplificar, consideremos a teoria do Flogisto, desenvolvida e aceita como correta entre os séculos XVII e XVIII. Segundo ela, quando alguma coisa queima, é liberado flogisto; quando animais respiram, produzem flogisto, que é absorvido pelo ar; uma vela queimando também liberaria flogisto. Ainda, se animais respirarem e/ou velas queimarem em um ambiente fechado, o ar ficará saturado de flogisto, ocorrendo a morte por intoxicação dos animais e o fim da combustão. Tal teoria descreve *exatamente o contrário* do que acontece, e mesmo assim teve seus momentos de verdade científica. O elemento químico que iria explicar com correção tais fenômenos só seria descoberto em 1774, quando Joseph Priestley se deparou com o oxigênio. Ainda, até então, ninguém considerava o ar como uma mistura de gases.

O fato de uma teoria tão falaciosa ter sido aceita durante tanto tempo por tantos cientistas ilustra a diferença na forma de se fazer ciência em Matemática e, no caso, em Química. Comparemos com uma descoberta matemática elementar, que garante que ângulos opostos pelo vértice, na Geometria Plana, serão sempre congruentes. Repare que, na figura abaixo (figura 1), os ângulos A e C são suplementares, assim como os ângulos B e C. Dessa maneira, $A + C = B + C = 180^\circ$, o que garante que $A = B$.

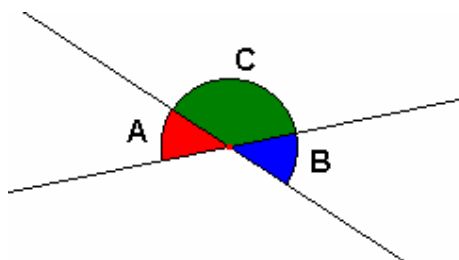


Figura 1 - Ângulos opostos pelo vértice

Tal teorema não depende da descoberta de nenhum novo elemento químico. Não depende da construção de um potente microscópio, e também não do exame de uma quantidade enorme de casos para se verificar que o comportamento que se deseja validar é de fato correto. Depende, somente, da definição de ângulo. Não surpreende, portanto, que tal resultado continue correto há mais de 2.000 anos e que nunca será contestado. Ou seja, o estudo de Matemática estimula de modo único a capacidade de argumentação, de generalização e de abstração.

É preciso deixar claro que não está sendo feito aqui um julgamento envolvendo a produção científica nas diferentes áreas. Em nenhum momento desejou-se afirmar que o modo de pensar em Matemática é melhor ou pior do que em Química, Física, Biologia e nas demais ciências. O modo de pensar em Matemática é apenas *diferente*.

No entanto, esse argumento não costuma surtir um efeito motivacional muito significativo em alunos de Ensino Médio. Uma característica de adolescentes em geral é o imediatismo com que diversas situações são encaradas, não sendo comuns planejamentos sequer a médio prazo.

O que fazer, então, com aquela turma agitada descrita anteriormente? Aplicações da Matemática do Ensino Médio são, em sua maioria, muito distantes da realidade de estudantes entre 14 e 17 anos. Ainda, dentre suas preocupações

provavelmente não conste o desejo de estimular um tipo especial de raciocínio. Essa dúvida serviu de motivação para o desenvolvimento da presente dissertação.

A Matemática Financeira possui diversas aplicações práticas. Tais aplicações são pertinentes às mais variadas pessoas e profissões, desde àquelas interessadas em benefício próprio como àquelas com finalidades profissionais específicas. Não obstante, tal campo estimula a capacidade de tomar decisões e a conseqüente necessidade de fundamentação teórica para que se decida com correção. Por fim, exige dos alunos compreensão de conceitos matemáticos, de um determinado método de resolução e, importante, de adaptação desse método.

Tal campo, no entanto, é deixado de lado com freqüência. Poucos livros didáticos o abordam, e, quando abordam, o fazem em sua maioria de modo equivocado e/ou limitado, como será mostrado aqui. São poucos, praticamente inexistentes, os referenciais teóricos nesse campo voltados especificamente para o Ensino Médio. Como conseqüência, pode-se esperar um desconforto dos professores em abordar esse campo, visto que eles também não possuem uma formação adequada para discuti-lo. Ou seja, a **Matemática Financeira** acaba não sendo estudada no Ensino Médio e, dependendo da formação profissional escolhida pelo aluno, não será estudada em momento algum.

Esse fato é surpreendente, visto que movimentações financeiras fazem parte da rotina de uma parcela considerável da população mundial, em diferentes níveis: desde pessoas atraídas por uma venda com 10% de desconto à vista ou em 2 vezes *sem juros* até aquelas que desejam liquidar o saldo devedor de um financiamento após certo número de parcelas pagas, passando por aquelas que desejam organizar seu próprio plano de previdência. Não faltam exemplos onde um conhecimento sólido de Matemática Financeira é requisitado.

Pensando em suprir essa lacuna, foi realizado em 2005 um estudo de Matemática Financeira com os estudantes do 2º ano do Ensino Médio de um colégio particular de Porto Alegre - RS - Brasil. A referência bibliográfica utilizada foi o décimo primeiro volume da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, de autoria de Gelson Iezzi, Samuel Hazzan e David Degenszajn, uma das poucas publicações na área direcionada a estudantes de Ensino Médio. Foram estudadas movimentações financeiras derivadas do conceito de juros compostos, tais como seqüências uniformes de depósitos e pagamentos.

A metodologia adotada foi a seguinte: em um primeiro momento, foi proposta aos alunos uma situação problema. Após respondê-la, procurou-se generalizar o raciocínio, e, assim, deduzir as fórmulas correspondentes a cada situação. O trabalho com calculadoras científicas se tornou imprescindível, já que cálculos de valores tais como $1,015^{20}$ eram rotineiros. No entanto, apesar de a resolução dos problemas propostos ser muitas vezes aborrecida, dada a grande quantidade de operações envolvendo números decimais, percebia-se nos alunos um interesse em responder com correção às perguntas feitas e, mais que isso, se apropriar dos conceitos estudados, dadas às razões explicitadas anteriormente.

No entanto, inconvenientes foram detectados. Alguns alunos se confundiam a respeito de qual fórmula, dentre as estudadas, corresponderia a qual movimentação financeira. A falta de habilidade para efetuar muitas operações com quatro ou mais casas decimais também se tornou um empecilho. Com isso, a motivação inicial acabou se diluindo junto das dificuldades de manipulação dos dados, fazendo com que o alcance esperado para o trabalho fosse limitado. Ainda, a resolução via fórmulas fornecia apenas o resultado final, sem fornecer um panorama da evolução da movimentação financeira. Por exemplo, não possibilita que o estudante visualize a variação dos juros obtidos ao longo dos meses em uma seqüência de depósitos. Dessa maneira, fazia-se necessária uma reformulação na metodologia para o ano seguinte, visto que a convicção da importância do estudo de Matemática Financeira permanecia viva.

Para o ano seguinte, o foco do trabalho foi alterado sensivelmente. Em vez de dar ênfase às fórmulas específicas para cada situação, passou-se a destacar a essência de cada movimentação financeira. Para ilustrar, considere uma seqüência de depósitos mensais de valor D , capitalizados mensalmente sob uma taxa de juros i . Ao final do primeiro mês, o saldo é somente D . Para o mês seguinte, devem ser adicionados um novo depósito D e os juros ganhos no mês, que são iguais a $i.D$. Decorrido mais um mês, adiciona-se ao saldo *anterior* o mesmo valor D depositado, mas os juros agora são maiores, visto que o saldo é maior do que no mês anterior. Ou seja, o saldo varia de modo recursivo: capitaliza-se o saldo anterior e adiciona-se um novo depósito. Ao trabalhar exclusivamente com a fórmula específica, esse raciocínio é destacado somente no momento de sua dedução, e nunca mais é necessário. Uma preocupação para o trabalho, para o ano de 2006, foi enfatizar a recursão e usá-la como principal meio para resolução de problemas.

A solução encontrada foi a utilização de um software específico para construção de planilhas eletrônicas. O trabalho seria realizado exclusivamente em um laboratório de informática, com os alunos trabalhando em duplas ou trios, discutindo e construindo planilhas que abordassem as principais movimentações financeiras de modo recursivo. Seriam propostos também problemas que exigissem dos estudantes uma adaptação da recursão discutida coletivamente como o professor. O uso de recurso computacional seria imprescindível, visto que as planilhas construídas, às vezes, possuíam mais de 100 linhas e precisavam ter *todas* as suas células constantemente alteradas, o que seria inviável de fazer manualmente.

Para o ensino de Matemática Financeira em nível superior, existem diversos livros que, em seus títulos, divulgam o estudo do assunto via planilhas eletrônicas. No entanto, uma breve pesquisa possibilitou observar que os recursos utilizados das planilhas eram as funções que aplicavam as fórmulas específicas de cada situação pelo estudante. Bastaria ao aluno digitar em algumas células os valores correspondentes a prazo, taxa e outros, e, então, selecionar as funções desejadas.

Por exemplo, para calcular o preço à vista de um determinado produto que seria pago em 24 prestações mensais de R\$ 500, sob uma taxa de 1% ao mês, sem entrada, basta entrar com o comando $VP(1\%; 24; 500; ; 0)$ em uma célula qualquer do *Excel*, e o valor R\$ 10.621,69 é fornecido.

É claro que, com tal recurso, a dificuldade operacional encontrada anteriormente seria totalmente eliminada. Afinal, o software faria todas as contas, e bastaria ao aluno inserir corretamente os valores. No entanto, o papel do aluno aqui se limitaria a preencher células, somente. Não seria exigida uma compreensão do que está sendo feito. Não seria exigido, também, que o aluno possa ele mesmo intervir na resolução e adaptá-la a uma situação diferente. Por exemplo: e se fosse dada uma carência de três meses para o consumidor? E se desejarmos liquidar a dívida após pagar 10 prestações de R\$ 500, qual seria o valor necessário? A resposta, como não é difícil intuir, dada a existência de juros, não corresponde a $10621,69 - 10 \cdot 500$. No entanto, essa resolução não dá nenhuma indicação de como adaptá-la ou possibilidade de analisar a movimentação financeira ao longo dos 24 pagamentos. Possivelmente existam funções específicas nesse tipo de software que dê conta das situações citadas acima. No entanto, exigiria que o aluno se

especializasse no seu uso. E, mesmo nesse caso, caberia ao aluno o papel de preencher células e conhecer fórmulas.

Seria preciso então desenvolver um material que atendesse as expectativas existentes e as necessidades de um estudo de Matemática Financeira em nível de Ensino Médio. Portanto, um material que possibilitasse o estudo de situações cotidianas, como o pagamento de dívidas e depósitos continuados, dentre outras; que possibilitasse ao aluno a compreensão do que está sendo feito - mais do que obter respostas, entendê-las, interpretá-las e adaptá-las, se for o caso; que estimulasse a capacidade de tomar decisões, via capacitação para a *qualificação* dessas decisões. Um método de trabalho onde as dificuldades operacionais seriam suavizadas, para que a preocupação seja voltada somente ao problema estudado, e não para o cálculo de, por exemplo, $500 \cdot \frac{1,01^{24} - 1}{0,01 \cdot (1,01^{24})}$, que forneceria o valor de

R\$ 10.621,69, encontrado como solução para a situação anterior.

Um material com esses objetivos será apresentado na dissertação a seguir. Durante os anos de 2005, 2006 e 2007, esse material foi concebido, escrito, aplicado, analisado, alterado, aplicado mais uma vez e posteriormente alterado de novo. Ainda, foi divulgado em diferentes congressos, onde foi apresentado a vários professores de diversos lugares do Brasil, sempre sob a forma de mini-cursos. Essa dissertação irá relatar todo esse processo, e também servir como mais uma via de divulgação do método proposto.

O principal objetivo dessa dissertação, assim, é a *elaboração de um material* que possibilite um estudo qualificado de Matemática Financeira com estudantes de Ensino Médio. Por qualificado, entenda-se: amplo, no sentido de abordar diversos problemas e movimentações financeiras, com variações; consistente, no sentido de estar matematicamente correto; adequado, no sentido de permitir que os alunos se apropriem de conceitos fundamentais, e saibam utilizá-los e adaptá-los quando necessário. Ressalta-se que não existe, no universo de livros analisados para essa dissertação, uma proposta que contemple *simultaneamente* esses três conceitos.

Esse material encontra-se destacado como apêndice, em versão que *facilita reprodução e posterior aplicação com alunos*, sendo a única exigência que se dê crédito para o autor. Ao longo do trabalho, em especial nos capítulos dedicados à

explicação do método e à análise dos dados, encontram-se instruções para que a aplicação dessa proposta prescindir de orientações adicionais.

A elaboração desse material também tem como objetivo suprir uma antiga reivindicação dos alunos em geral, que é o estudo de temas mais próximos ao cotidiano, e não necessariamente voltados para fins técnicos em profissões específicas. A inserção de Matemática Financeira como tópico relevante a ser estudado dispensa maiores explicações, especialmente em um país capitalista ocidental.

Por fim, pretende-se também apresentar aos estudantes e professores aplicações para uma ferramenta com uma gama enorme de recursos, que é a planilha eletrônica. O método de trabalho proposto incentiva uma prática mais avançada com tal ferramenta, indo além da simples configuração de tabelas.

No segundo capítulo, será apresentada uma revisão de bibliografia, onde foram analisados diversos livros didáticos específicos para Ensino Médio que discutem alguns tópicos de Matemática Financeira, constatando a existência de uma lacuna atualmente no que diz respeito a trabalhos de qualidade voltados para o assunto em questão, seja quando os autores limitam-se a destacar a Matemática Financeira como uma aplicação para Funções Exponenciais, Logaritmos e Progressões Geométricas, praticamente em forma de apêndice, ou quando um capítulo inteiro é dedicado ao tema.

O terceiro capítulo consiste de uma explicação do método proposto. Serão discutidos os conceitos centrais que possibilitam aliar a recursão possibilitada pelas planilhas eletrônicas com a recursão que *define* as principais movimentações financeiras. Serão discutidas características do método que fazem com que ele se diferencie da maneira usual com que a Matemática Financeira é estudada. Para fazer isso de maneira clara, serão discutidos alguns problemas, onde serão apresentadas resoluções propostas por outros autores, da maneira habitual, e resoluções que incorporem o método aqui apresentado. Dessa forma, serão salientadas as principais diferenças entre as duas maneiras de se trabalhar.

No quarto capítulo, será apresentada uma justificativa matemática que garante que os resultados obtidos de maneira recursiva são exatamente os resultados esperados, e que seriam encontrados de modo tradicional, de modo que

ambas as maneiras de se trabalhar são equivalentes, diferenciando-se somente no percurso percorrido pelo estudante até obter a resposta ao problema estudado.

No quinto capítulo será exposta a fundamentação didática que sustenta a proposta. Será dada ênfase especial ao uso de computadores para auxiliar na aprendizagem de conceitos de matemática, e também à aprendizagem de conceitos a partir de procedimentos, processos e *proceitos* (tradução do autor da dissertação para o neologismo *procept*, criado por David Tall).

No sexto capítulo serão apresentadas as técnicas e materiais que foram utilizadas para analisar o material, após as aplicações do mesmo com estudantes do segundo ano do Ensino Médio. Serão descritos os dados disponíveis para análise, bem como o modo como se deu a coleta dos mesmos. Será descrita também a análise em si, destacando os aspectos que serão observados com maior interesse e como eles possibilitam que se chegue a conclusões a respeito da eficácia e da compreensão do método proposto, quando utilizado pelos alunos. Ainda, serão descritas as diferentes intervenções do professor ao longo da aplicação, tanto coletivamente com a turma quanto em contato somente com pequenos grupos de alunos. Por fim, será discutida a maneira como se deu a integração do trabalho durante o ano letivo e mostrado como a inserção de mais um assunto no já saturado Ensino Médio pode ser feita de modo satisfatório, sem prejuízos no tempo de trabalho com outros assuntos habitualmente estudados.

O sétimo capítulo consiste da análise da aplicação do material.

No oitavo capítulo, serão expostas as conclusões obtidas.

Por fim, como apêndice, o material produzido pronto para aplicação em sala de aula, em sua versão mais recente até a finalização dessa dissertação.

02) ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Embora uma análise escola a escola seja inviável, é possível afirmar que o ensino de Matemática Financeira não tem feito parte do currículo do Ensino Médio atualmente, a partir de conversas com professores da rede privada de Porto Alegre, bem como com professores de diferentes cidades, ao longo dos diversos congressos onde a proposta de trabalho foi apresentada. No entanto, pode-se constatar que o tema tem sido abordado nas últimas edições de livros didáticos simplesmente folheando alguns exemplares, e essa abordagem se dá em diferentes níveis de aprofundamento.

Aqui, pretende-se analisar alguns dos muitos livros escritos no Brasil ao longo dos últimos anos, dando especial destaque à maneira escolhida pelo(s) autor(es) para abordar, principalmente, o regime de capitalização composta e algum eventual tópico escolhido por eles para aprofundar o estudo. Ficará claro que a abordagem da Matemática Financeira ainda carece de boas publicações, especialmente aquelas onde o uso de planilhas eletrônicas é estimulado.

2.1 - Matemática: Série Brasil - Volume Único - Oscar Guelli - 2003

O livro é estruturado com os conceitos centrais divididos em aulas. Assim, tópicos de Matemática Financeira são abordados em dois momentos: na aula 24 da Unidade 1, como uma aplicação de funções exponenciais e logarítmicas, a partir da fórmula do montante em uma capitalização composta; e na aula 10 da Unidade 2, onde um problema de seqüência de depósitos é apresentado como aplicação da soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG) finita.

Na aula 24 da Unidade 1, após uma breve definição dos termos a serem utilizados, é apresentado aos estudantes o regime de capitalização composta. Para um capital C e uma taxa de juros i , são calculados os montantes ao final de um, dois e três meses. A seguir, a fórmula é generalizada para um período de n meses. O livro não menciona que o expoente n se refere ao número de capitalizações que o capital inicial sofreu ao longo do período em questão, se limitando a uma simples constatação de que se para 2 meses aparece o expoente 2, se para 3 meses o

expoente é 3, então seria “óbvio” que para n meses o expoente será igual a n . Os exercícios propostos se resumem a uma simples aplicação da fórmula mencionada.

AULA 24 Matemática financeira

Suponha que uma pessoa aplique um capital de R\$ 1 000,00 à taxa de juro de 1% ao mês em uma caderneta de poupança.

Capital é qualquer valor expresso em dinheiro.

Após 1 mês, ela terá ganho de juro:

$$j = 1000 \cdot 1\% = 1000 \cdot 0,01 = 10; \text{ R\$ } 10,00$$

Juro pode ser interpretado, de forma simplificada, como o “aluguel pago ao investidor pelo uso do dinheiro”.

Taxa de juro é a razão entre o juro e o capital aplicado, geralmente expressa em forma de percentagem:

$$\text{taxa de juro} \rightarrow i = \frac{j}{C} \leftarrow \begin{array}{l} \text{juro} \\ \text{capital} \end{array}$$

Montante (ou valor futuro) é a soma do capital mais o juro referente ao período em que o capital (ou valor presente) ficou aplicado.

$$\text{montante} \rightarrow M = C + j$$

As principais aplicações financeiras no Brasil usam o regime de capitalização composta: o juro gerado em cada período se acrescenta ao montante do início do período e essa soma passa a render juro no período seguinte. Considere um capital C aplicado à taxa de juro i , por exemplo, mensal, durante n meses. Observe o cálculo do montante:

- Após 1 mês:
 $M = C + Ci = C(1 + i)^1$
- Após 2 meses:
 $M = C(1 + i)^1 + C(1 + i)^1 \cdot i = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
- Após 3 meses:
 $M = C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2 \cdot i = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$
- Após n meses:
 $M = C(1 + i)^n$

Quanto uma pessoa recebe se aplicar seu 13º salário de R\$ 760,80 à taxa de juro de 1,25% ao mês e deixá-lo aplicado durante 1 ano?

Veja:

$$M = 760,80(1 + 1,25\%)^{12}$$

$$M = 760,8 \cdot 1,0125^{12}$$

No trabalho com Matemática financeira é imprescindível utilizar uma calculadora científica.

Figura 2 - Extrato da Página 54

Na aula 10 da Unidade 2, a fórmula do montante para juros compostos é novamente trabalhada: é proposto um exemplo, e, segundo o autor, “observando a tabela, podemos concluir que ... o montante será dado por $M = C \cdot (1 + i)^n$ ”. Não é feita menção ao fato de a fórmula ter sido trabalhada anteriormente, e novamente não é citada tal fórmula como sendo o termo geral de uma PG com primeiro termo C

e razão $1 + i$, mesmo sendo tal aula imediatamente após àquelas onde os conceitos relativos às progressões geométricas são desenvolvidos.

Imagine uma pessoa que aplica R\$ 600,00 numa caderneta de poupança à taxa de juro de 2% ao mês, durante 3 meses.

Veja:

n	0	1º mês	2º mês	3º mês
f(n)	600	$600 + 600 \cdot 2\% = 600(1 + 2\%)^1$	$600(1 + 2\%) + 600(1 + 2\%)2\% = 600(1 + 2\%)(1 + 2\%) = 600(1 + 2\%)^2$	$600(1 + 2\%)^2 + 600(1 + 2\%)^22\% = 600(1 + 2\%)^2(1 + 2\%) = 600(1 + 2\%)^3$

Após três meses, ela terá na caderneta de poupança um capital de:

$$600(1 + 2\%)^3 = 600(1,02)^3$$

É conveniente usar uma calculadora científica para efetuar esse cálculo:

6 0 0 × 1 . 0 2 SHIFT x^y 3 = 636,72; R\$ 636,72 (aproximadamente)

O juro obtido foi de:

$$636,72 - 600 = 36,72; \text{R\$ } 36,72$$

Observando a tabela, podemos concluir que, se uma pessoa aplicar um capital C , à taxa de juro i ao mês, após n meses o novo capital ou montante M será dado por:

$$M = C(1 + i)^n$$

Observe que na taxa de juro deve vir indicada a periodicidade: ao mês, ao trimestre, ao semestre, ao ano, etc. Os números i e n devem ser compatíveis, isto é, devem estar na mesma unidade de tempo: se i representa uma taxa de juro ao ano, n deve ser expresso em anos; se i é uma taxa de juro ao dia, n deve ser expresso em dias, e assim por diante.

Na tabela, observe que, para calcular o montante por exemplo após 2 meses, acrescentamos ao capital do mês anterior o juro obtido sobre esse capital.

Quando isto acontece, dizemos que se trata de um regime de capitalização composta. Neste livro, todos os problemas propostos se referem a esse tipo de capitalização.

Figura 3 - Extrato da página 85

No entanto, o exemplo seguinte já é mais interessante: é proposto o cálculo do montante gerado por 3 depósitos mensais de R\$ 300. A resolução proposta torna o problema ainda mais relevante, já que aqui o autor opta por não desenvolver ou mencionar a fórmula habitualmente usada, mas sim em compreender a movimentação financeira em questão, analisando a variação do saldo ao longo dos meses. Para calcular o montante obtido, é feita uma analogia com a soma dos termos de uma PG. Ressalta-se aqui que uma abordagem semelhante poderia ter sido feita para a fórmula dos juros compostos, sem maiores dificuldades.

Imagine que uma pessoa faz três depósitos mensais de R\$ 300,00 numa caderneta de poupança, à taxa de juro de 1% ao mês, sempre no dia 5, de janeiro a março. Quanto ela terá no total, no dia 5 de abril, se ela não fizer nenhuma retirada ou novo depósito?

Veja quanto ela tem de montante no dia 5 de cada mês:

5 de janeiro	300
5 de fevereiro	$300 + 300(1 + 1\%)$
5 de março	$300 + [300 + 300(1 + 1\%)](1 + 1\%) = 300 + 300(1 + 1\%) + 300(1 + 1\%)^2$
5 de abril	$[300 + 300(1 + 1\%) + 300(1 + 1\%)^2](1 + 1\%)$

Podemos calcular o montante no dia 5 de abril:

$$300(1 + 1\%) + 300(1 + 1\%)^2 + 300(1 + 1\%)^3$$

mediante a soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_3 = \frac{300(1,01)[1 - 1,01^3]}{1 - 1,01}$$

É imprescindível o uso de uma calculadora científica:

3 0 0 0 × 1 . 0 1 × (1 - (1 . 0 1)) ÷ (1 - 1 . 0 1) = 918,12

No dia 5 de abril ela terá R\$ 918,12.

Figura 4 - Extrato da página 86

O autor não propõe o estudo de seqüências de pagamentos, que poderia ser feito nos mesmos moldes. Dentre os exercícios propostos, destaca-se o de número 52, que aborda uma das questões mais relevantes da Matemática Financeira para quem não é um profissional da área.

EXERCÍCIOS

Todos os problemas se referem a um regime de capitalização composta. Para resolvê-los convém usar uma calculadora científica.

50. Um capital de R\$ 3 480,00 é aplicado durante um ano à taxa de juro de 1,75% ao mês. Qual é o valor do juro obtido nesse período?

51. João faz quatro depósitos mensais e iguais de R\$ 960,00 cada um, à taxa de juro de 1,2% ao mês. Três meses após o quarto depósito, se ele não efetuar mais nenhuma retirada ou depósito, qual será o valor do montante?

52. Cláudia tinha dinheiro suficiente para comprar à vista um carro 0 km, no valor de R\$ 20 975,00, aplicado numa caderneta de poupança à taxa de juro de 1% ao mês. No entanto, numa loja de automóveis, em vez de pagar esse valor à vista, ela podia levar o carro

imediatamente, pagando uma entrada de 20% do valor total e mais quatro prestações mensais de R\$ 4 450,00 cada uma.

Qual é a melhor alternativa para Cláudia:

- retirar o dinheiro da poupança para pagar o carro à vista ou
- retirar o dinheiro da poupança necessário para pagar a entrada e deixar o restante aplicado para ir pagando as prestações?

53. No dia 10 de janeiro de 2005 Antônio deverá efetuar um pagamento de R\$ 1 250,00 para um curso de espanhol que pretende freqüentar durante as férias. Quanto deverá depositar mensalmente numa caderneta de poupança de 10 de julho a 10 de dezembro de 2004 (depósitos iguais) para pagar o curso no dia 10 de janeiro? Suponha que a taxa de juro das cadernetas de poupança nesse período seja de aproximadamente 1% ao mês.

Figura 5 - Extrato da Página 86

No entanto, a resolução proposta pelo autor parte do cálculo do valor de R\$ 4.450 em diferentes datas, o que não é um raciocínio evidente, ao menos não se seguirmos a linha desenvolvida ao longo da aula, a partir da análise da movimentação financeira ao longo dos meses.

52. Vamos calcular que quantia ela deveria deixar aplicada para pagar as quatro prestações:

$$x_1(1 + 1\%)^1 = 4450 \quad x_3(1 + 1\%)^3 = 4450$$

$$x_2(1 + 1\%)^2 = 4450 \quad x_4(1 + 1\%)^4 = 4450$$

Cláudia deveria deixar aplicada a quantia

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \text{ ou seja:}$$

$$S_4 = \frac{4450}{1 + 1\%} + \frac{4450}{(1 + 1\%)^2} + \frac{4450}{(1 + 1\%)^3} +$$

$$\frac{4450}{(1 + 1\%)^4} \rightarrow S_4 = \frac{4450}{1,01} \left[1 - \left(\frac{1}{1,01} \right)^4 \right] \rightarrow$$

$$S_4 \doteq \text{R\$ } 17\,363,75$$

Além disso, deveria pagar a entrada:

$$17\,363,75 + 20\% \cdot 20\,975 \doteq 21\,558,75; \text{ R\$ } 21\,558,75$$

Como R\$ 21 558,75 > R\$ 20 975,00, é melhor comprar o carro à vista.

Figura 6 - Extrato da página 71 do Manual do Professor

2.2 - Matemática: Projeto Escola e Cidadania para todos - Volume 1 - Maria Zampirolo, Maria Scordamaglio e Suzana Cândido - 2004

As autoras apresentam diversos exemplos de aplicações de funções exponenciais, mas não mencionam o cálculo do montante gerado a partir de juros compostos. Tal cálculo só é feito como aplicação de logaritmos. Em um primeiro momento, a fórmula habitual é “desenvolvida” de modo semelhante ao já analisado anteriormente. A seguir, os logaritmos são utilizados para o cálculo de $1,038^{12}$, o que é desnecessário: em dado momento, o estudante é incentivado a calcular, utilizando uma calculadora científica, o valor de $\log 1,038$; no entanto, a mesma calculadora obteria o valor de $1,038^{12}$ sem maiores dificuldades. Após são propostos dois exercícios equivalentes. As autoras não mencionam mais nenhum problema relevante de Matemática Financeira.

2ª Solução

Inicialmente, vamos calcular o fator de acréscimo mensal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 100\% & + & 3,8\% & = & 103,8\% & = & 1,038 = (1 + 0,038) \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \text{corresponde} & & \text{corresponde à taxa} & & & & \\
 \text{ao capital} & & \text{de juros mensal} & & & &
 \end{array}$$

Isso significa que todo mês o capital anterior será multiplicado pelo fator de acréscimo (1,038).

• Após 1 mês:

$$M_1 = 1\,000 \cdot 1,038$$

$$M_1 = 1\,038$$

• Após 2 meses:

$$M_2 = M_1 \cdot 1,038 \rightarrow M_2 = 1\,000 \cdot 1,038 \cdot 1,038$$

$$M_2 = 1\,000 \cdot (1,038)^2$$

$$M_2 = 1\,077,44$$

• Após 3 meses:

$$M_3 = M_2 \cdot 1,038$$

$$M_3 = 1\,000 \cdot (1,038)^2 \cdot 1,038$$

$$M_3 = 1\,000 \cdot (1,038)^3$$

$$M_3 = 1\,118,38$$

Comparando os montantes da 1ª solução com os da 2ª solução, você nota que os resultados são iguais. Agora, podemos generalizar o cálculo de juros compostos para n meses.

$$M = \text{capital} \cdot (1 + 0,038)^n$$

Vamos calcular o montante ao final de 1 ano:

$$n = 12 \text{ meses}$$

$$M = 1\,000 \cdot (1,038)^{12}$$

Já pensou ter de calcular $1,038^{12}$? Para simplificar nossa tarefa, usaremos os logaritmos:

$$\log M = \log (1\,000 \cdot (1,038)^{12})$$

Aplicando as propriedades de logaritmo, temos:

$$\log M = \log 1\,000 + 12 \cdot \log 1,038$$

$$\log M = 3 + 12 \cdot 0,01619$$

$$\log M = 3,19436$$

$$M = 10^{3,19436}$$

Operação inversa de logaritmo:

Digitamos 3,19436, e, em seguida, pressionamos INV e log.

$$M = 1\,564,47$$

Ao final de um ano, o montante será R\$ 1.564,47.

Figura 7 - Extrato da página 116

2.3 - Matemática: de olho no mundo do trabalho - Volume Único - Antonio Youssef, Elizabeth Soares e Vicente Fernandez - 2004

Suponhamos, por exemplo, que uma pessoa tome emprestada, a juro composto, a importância de R\$ 1 000,00, pelo prazo de 4 meses, à taxa de 6% a.m. (ao mês). Observe na tabela a seguir que, a cada mês, são acrescidos 6% de juros ao montante produzido até o final do mês anterior.

n	Saldo no início do período	Juro por período	Montante
1	1 000,00	$1 000,00 \times 0,06 = 60,00$	$1 000,00 + 60,00 = 1 060,00$
2	1 060,00	$1 060,00 \times 0,06 = 63,60$	$1 060,00 + 63,60 = 1 123,60$
3	1 123,60	$1 123,60 \times 0,06 = 67,41$	$1 123,60 + 67,41 = 1 194,01$
4	1 194,01	$1 194,01 \times 0,06 = 71,64$	$1 194,01 + 71,64 = 1 265,65$

Decorrido o prazo, o valor a ser pago como juro será:

$$J = 1 265,65 - 1 000,00 \Rightarrow J = \text{R\$ } 265,65$$

Compare o juro a ser pago no regime de juros compostos com o valor em regime de juros simples:

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 1 000,00 \times 0,06 \times 4 \Rightarrow J = \text{R\$ } 240,00$$

Veja que, com juros sobre juros, o valor é R\$ 25,65 maior que o do regime de juros simples.

Cálculo do montante no sistema de juros compostos

No regime de juros compostos, a cada período acrescentamos os juros ao montante já produzido, formando um novo capital para o período seguinte. A esse processo damos o nome de **capitalização**. Vamos calcular o montante M , para um capital C , aplicado a uma taxa i por período, ocorrendo capitalização no final de cada período, em um prazo de n períodos.

final do 1º período:

$$M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$$

final do 2º período:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i \Rightarrow M_2 = M_1(1 + i)$$

$$M_2 = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

final do 3º período:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i \Rightarrow M_3 = M_2(1 + i)$$

$$M_3 = C(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^3$$

final do 4º período:

$$M_4 = M_3 + M_3 \cdot i \Rightarrow M_4 = M_3(1 + i)$$

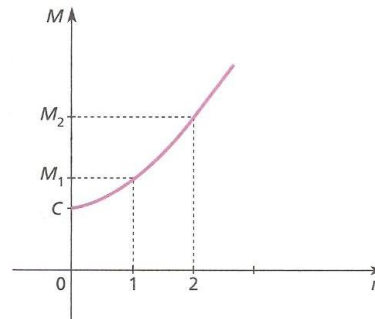
$$M_4 = C(1 + i)(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^4$$

e assim sucessivamente. Note que os montantes formam uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$.

Generalizando, o montante, ao final de n períodos, à taxa i de juros, é dado por:

$$M = C(1 + i)^n$$

Fixados o capital C e a taxa i , o montante M varia exponencialmente em função do período n .



exercícios e problemas resolvidos

R12. Uma pessoa toma R\$ 2 000,00 emprestados, a juros de 2% a.m., pelo prazo de 10 meses com capitalização composta. Qual é o montante a ser devolvido?

Resolução

— Utilizando a tecla x^y em uma calculadora científica:

Calcule inicialmente $(1 + 0,02)^{10}$.

Digite $1 + 0,02 \ x^y \ 10 =$.

A seqüência de teclas pode variar dependendo da calculadora.

Figura 8 - Extrato da página 179

O capítulo dedicado à Matemática Financeira aparece logo a seguir daquele dedicado às Progressões. Para o desenvolvimento da fórmula do montante para juros compostos, é destacada a associação com as progressões geométricas, bem como com as funções exponenciais. Os exercícios propostos são aplicações da fórmula desenvolvida, com destaque para o exercício P36, envolvendo a tomada de decisões a partir de alternativas de pagamento.

exercícios e problemas propostos	
<p>P28. Calcule o montante de uma aplicação de R\$ 1 000,00, a 4% a.m., capitalizado mensalmente, durante 5 meses.</p> <p>P29. Um capital de R\$ 10 000,00 foi investido numa caderneta de poupança, em regime de capitalização, que paga um juro mensal de 0,85%. Qual o valor que o investidor encontrará no extrato da caderneta ao final de 2 anos?</p> <p>P30. Calcule o montante de um capital de R\$ 2 500,00, aplicado a uma taxa de juro composto de 2% a.m., durante 9 meses.</p> <p>P31. Determine o capital que, investido a juro composto de 3% a.m., durante 4 meses, produziu um montante de R\$ 600,00.</p> <p>P32. Um cliente abriu uma caderneta de poupança na qual depositou R\$ 2 000,00. Nos quatro primeiros meses, essa poupança pagou 1,1%, 0,9%, 1,2% e 1,0% de</p>	<p>juros sucessivamente. Qual o montante produzido ao final do quarto mês?</p> <p>P33. Qual é a taxa de juros mensal recebida por um investidor que aplica, durante 3 meses, R\$ 1 000,00 e resgata R\$ 1 061,20?</p> <p>P34. O acordo de reajuste salarial de uma categoria de trabalhadores escalonou o reajuste em três aumentos de salários consecutivos e acumulados. No primeiro os salários seriam corrigidos em 5%, no segundo, depois de 3 meses, em 3% e, após 6 meses, outros 3%. Qual o salário resultante no sétimo mês após o acordo?</p> <p>P35. Para comprar um carro no valor de R\$ 7 500,00, um rapaz aplica R\$ 6 000,00 à taxa de juros compostos de 3% a.m. Quanto tempo leva para obter o valor do carro?</p> <p>P36. Um lote é posto à venda por R\$ 50 000,00 de entrada e R\$ 100 000,00 em 1 ano. Como opção, o vendedor pede R\$ 124 000,00 à vista. Se a taxa de juros (compostos) de mercado é de 2% a.m., qual a melhor alternativa?</p>

Figura 9 - Extrato da página 181

Os autores encerram o capítulo sem desenvolver outros tópicos de Matemática Financeira, limitando-se a estudar a capitalização de uma quantia ao longo de um período de tempo.

2.4 - Curso de Matemática - Volume Único - Bianchini e Paccola - 2003

O capítulo dedicado à Matemática Financeira é proposto entre os dedicados às funções logarítmicas e exponenciais e o dedicado às progressões, o que de partida exclui os conceitos relativos às progressões geométricas do estudo a ser desenvolvido.

A generalização da fórmula habitual para o trabalho com juros compostos é feito de maneira já comentada anteriormente, sem mencionar o termo geral de uma PG e nem relacionar o expoente com o número de capitalizações.

4. Juro composto

Quando o juro vai sendo incorporado ao capital após cada período de tempo, ele é chamado de **juro composto**. A taxa é aplicada sempre em relação ao montante de cada período.

Para obtermos o juro composto produzido por um capital de R\$ 200,00 à taxa de juro de 5% ao mês em 3 meses, devemos encontrar primeiro o valor acumulado (montante) do final desse prazo e depois calcular a diferença entre esse montante e o capital inicial.

Cálculo do montante (valor acumulado) no 1º mês:

$$5\% \text{ de } 200 = 0,05 \cdot 200 = 10$$

$$M_1 = 200 + 200 \cdot 0,05 = 200 \cdot (1 + 0,05) = 210$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & C \cdot i & C & C & C & C & C \cdot (1+i) \end{array}$$

Cálculo do montante no 2º mês:

$$5\% \text{ de } 210 = 0,05 \cdot 210 = 10,50$$

$$M_2 = 210 + 210 \cdot 0,05 = 210 \cdot (1 + 0,05) = 220,50$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C(1+i) & C(1+i) \cdot i & C(1+i) & C(1+i) & C(1+i) & C(1+i) & C(1+i) \cdot (1+i) = C(1+i)^2 \end{array}$$

Cálculo do montante no 3º mês:

$$5\% \text{ de } 220,50 = 0,05 \cdot 220,50 = 11,03$$

$$M_3 = 220,50 + 220,50 \cdot 0,05 = 220,50 \cdot (1 + 0,05) = 231,53$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C(1+i)^2 & C(1+i)^2 \cdot i & C(1+i)^2 & C(1+i)^2 & C(1+i)^2 & C(1+i)^2 & C(1+i)^2 \cdot (1+i) = C(1+i)^3 \end{array}$$

$$\text{Portanto: } J = M - C = 231,53 - 200 = 31,53$$

Logo, o juro composto será de R\$ 31,53.


De modo geral, o montante gerado por um capital C aplicado a juro composto a uma taxa de juro i por um prazo t é dado por:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Figura 10 - Extrato da página 164

No entanto, ao propor a resolução do primeiro exemplo, os autores constroem uma planilha, dando destaque à movimentação financeira estudada. No entanto, tal estratégia é abandonada na resolução do segundo exemplo e não é retomada em nenhum momento, o que permite concluir a respeito da predileção dos autores pela rotina usual da fórmula.

Lourenço aplicou R\$ 4.000,00 a juro composto a uma taxa de juro de 10% ao ano, durante 3 anos.
Vamos calcular o montante dessa aplicação.



1º modo

Prazo (em anos)	Saldo do início de cada ano (em reais)	Juro de cada ano (em reais)	Montante de cada ano (em reais)
1º ano	4.000	10% de 4.000 = 400	4.000 + 400 = 4.400
2º ano	4.400	10% de 4.400 = 440	4.400 + 440 = 4.840
3º ano	4.840	10% de 4.840 = 484	4.840 + 484 = 5.324

2º modo

$$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 4.000 \cdot (1 + 0,10)^3 \Rightarrow M = 4.000 \cdot (1,10)^3 \Rightarrow M = 5.324$$

Logo, o montante dessa aplicação é de R\$ 5.324,00.

Figura 11 - Extrato da página 165

Os exercícios propostos se limitam a reproduzir as mesmas situações que apareceram nas resoluções propostas pelos autores.

A seguir, os autores propõem o estudo de compras com pagamento parcelado, evidenciando uma preocupação em ampliar o estudo da Matemática Financeira além dos problemas tradicionalmente abordados no Ensino Médio.

5. Compras com pagamento parcelado

É cada vez mais comum as ofertas de bens de consumo com pagamento em prestações mensais iguais, sem entrada, etc.

Nesse caso, o valor de cada prestação é dado por:

$$P = \frac{A \cdot i \cdot (1 + i)^N}{(1 + i)^N - 1}$$

sendo $\begin{cases} A \text{ o valor da compra à vista} \\ N \text{ o número de prestações mensais} \\ i \text{ a taxa porcentual ao mês} \end{cases}$

Veja alguns exemplos.

1. Vamos calcular o valor de cada prestação a ser paga em 8 vezes, de acordo com o anúncio ao lado.

$$A = \text{R\$ } 800,00; N = 8 \text{ e } i = 4\% \text{ ao mês}$$

Televisor
R\$ 800,00
 à vista ou
 em até **0+8**
 Taxa de juros: só 4% ao mês

$$P = \frac{800 \cdot 0,04 \cdot (1 + 0,04)^8}{(1 + 0,04)^8 - 1} = \frac{32 \cdot (1,04)^8}{(1,04)^8 - 1} = \frac{32 \cdot (1,368569)}{(1,368569) - 1} = \frac{43,794208}{0,368569} \approx 118,82$$

Logo, as prestações são de R\$ 118,82.

Figura 12 - Extrato da Página 167

No entanto, o alcance teórico é muito limitado, já que nenhum conceito relativo às progressões geométricas foi estudado, o que impossibilita o desenvolvimento da fórmula habitual para a situação desejada. Dessa maneira, os autores optam por simplesmente mencionar a fórmula, e aplicá-la de modo mecânico em exemplos e exercícios. É importante observar que os autores, ao escolherem a “saída fácil” de somente citar a fórmula, abrem mão também de que os estudantes compreendam a movimentação financeira em questão, visto que o uso da fórmula fornece respostas acerca dos valores envolvidos, mas impossibilita que o estudante acompanhe, por exemplo, a variação do saldo ao longo do pagamento das parcelas.

2.5 - Matemática: contexto & aplicações - Volume 1 - Luiz Roberto Dante - 2007

O capítulo dedicado à Matemática Financeira aparece após aqueles dedicados às funções logarítmicas e exponenciais e às progressões. Inicialmente, como alguns livros anteriormente analisados também fazem, é proposto um exemplo para ilustrar o regime de capitalização composta e compará-lo com o de capitalização simples.

Juros compostos

Vejamos o seguinte problema:

Um capital de R\$ 40 000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês, durante 3 meses. Qual foi o montante no fim dos 3 meses?

- Vimos que, no sistema de juros simples, calculamos:
 2% de 40 000 = $0,02 \cdot 40\,000 = 800$ (juros produzidos em 1 mês)
 $800 \cdot 3 = 2\,400$ (juros produzidos em 3 meses)
 $40\,000 + 2\,400 = 42\,400$ (montante ao final de 3 meses)
- No sistema de juros compostos, temos:
 No primeiro mês: 2% de 40 000 = 800 (juros produzidos no 1º mês)
 $40\,000 + 800 = 40\,800$ (montante no fim do 1º mês)
 No segundo mês: 2% de 40 800 = 816 (juros produzidos no 2º mês)
 $40\,800 + 816 = 41\,616$ (montante no fim do 2º mês)
 No terceiro mês: 2% de 41 616 = 832,32 (juros produzidos no 3º mês)
 $41\,616 + 832,32 = 42\,448,32$
 Logo, no fim dos três meses o montante é de R\$ 42 448,32.

No sistema de juros simples os juros foram de R\$ 2 400,00 e no de juros compostos foram de R\$ 2 448,32. O que gerou essa diferença?

Note que, no sistema de juros compostos, deve-se calcular os juros no fim de cada período, formando um montante sobre o qual se calculam os juros do período seguinte, até esgotar o tempo da aplicação (é o que se chama de “juros sobre juros”).

Além disso, é possível perceber que esse processo usado na resolução (cálculo mês a mês) não é conveniente para um prazo longo. Vamos então determinar um processo mais prático de resolução.

Fórmulas

Vamos calcular, no sistema de juros compostos, qual será o montante (**M**), produzido por um capital (**C**), aplicado à taxa **i** ao período, no fim de **t** períodos:

	Início	Juros	Montante no fim do período
1º período	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1 + i)$
2º período	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i)$ $M_2 = C(1 + i)^2$
3º período	M_2	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i)$ $M_3 = C(1 + i)^3$
...			

Para refletir

A seqüência $\{C, M_1, M_2, \dots\}$ é uma PG de razão $1 + i$.

Figura 13 - Extrato das páginas 310 e 311

O cálculo é feito analisando o montante resultante ao final de cada período, e é dado destaque ao fato de isso diferenciar os regimes de capitalização composta e simples. O autor observa, no entanto, que esse processo “não é conveniente para um prazo longo”, o que de fato é verdade se não for utilizado um software específico para a construção de planilhas eletrônicas. Para compensar tal “inconveniente”, o autor sugere que seja usada a fórmula habitual para a situação. A fórmula é obtida da mesma maneira que outros autores já a obtiveram, construindo uma planilha com a evolução de um capital C e taxa i ao longo de 3 meses. A seguir, a fórmula é generalizada para um expoente t . É mencionado brevemente que os montantes ao final de cada período formam uma PG de razão $1 + i$, mas não é feita uma associação do expoente com o número de capitalizações. A seguir, são resolvidos diversos exemplos de simples aplicação da fórmula.

1 Introdução

Entre as inúmeras aplicações da Matemática está a de auxiliar na resolução de problemas de ordem financeira, como cálculo do valor de prestações, pagamento de impostos, rendimento de poupança e outros.

Veja um destes problemas:

Uma pessoa vai fazer uma compra no valor de R\$ 4 000,00, usando o que tem depositado na caderneta de poupança, que está rendendo 1% ao mês. Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual plano de pagamento é mais vantajoso:

- pagar à vista;
- ou
- pagar em duas prestações iguais de R\$ 2 005,00 cada uma, com entrada.

Esse problema e outros, que envolvem assuntos de Matemática financeira, serão estudados e resolvidos neste capítulo.

Figura 14 - Extrato da página 302

O capítulo foi introduzido a partir de um problema muito relevante: decidir entre um pagamento à vista e um parcelado, considerando a aplicação de um capital em um fundo de investimento. Onze páginas depois, é proposta a resolução desse problema.

Destaca-se que, entre os sete problemas resolvidos pelo autor, aquele que possui mais relevância prática é o único que não foi resolvido a partir de uma simples aplicação da fórmula desenvolvida. Optou-se por resolvê-lo a partir da análise da variação do saldo ao longo dos meses, partindo da quantia necessária para a compra à vista e, mês a mês, subtraindo as prestações e capitalizando o

saldo restante, em processo semelhante àquele utilizado para introduzir o regime de capitalização composta.

17. Situação-problema da introdução do capítulo
 Uma pessoa vai fazer uma compra no valor de R\$ 4 000,00 usando o que tem depositado na caderneta de poupança, que está rendendo 1% ao mês. Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual plano de pagamento é mais vantajoso:

- pagar à vista;
- ou
- pagar em duas prestações iguais de R\$ 2 005,00 cada uma, com entrada.

Resolução:
 Pagando à vista: toda quantia de R\$ 4 000,00 será gasta (sobrará 0).
 Pagando em duas prestações de R\$ 2 005,00: como a caderneta de poupança utiliza o sistema de juros compostos, após o pagamento da primeira prestação sobrará a quantia de R\$ 1 995,00, que renderá juros de 1% até o pagamento da segunda prestação. Veja:
 $1\% \text{ de } 1\,995 = 19,95$
 $M = 1\,995 + 19,95 = 2\,014,95$
 $2\,014,95 - 2\,005 = 9,95$
 Logo, o segundo plano de pagamento é o melhor, pois ainda sobrará a quantia de R\$ 9,95.

Figura 15 - Extrato da página 312

No entanto, aqui não é mencionada a inconveniência do método proposto para um prazo para pagamento mais extenso. Tal inconveniência seria facilmente superada a partir da construção de uma planilha eletrônica que dê conta do problema em questão, e a resposta seria obtida com a mesma “conveniência” para qualquer prazo, seja de 2, 3 ou 20 meses.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo Inicial	Juros	Parcela	Saldo Final
2	0	4.000	-	2.005	B2 - D2
3	A2 + 1	E2	$0,01 * B3$	D2	B3 + C3 - D3

Planilha 1 - Resolução de Exercício via recursão

O processo destacado na 3ª linha pode ser expandido para qualquer número de parcelas, sem perda de tempo e eficiência, sendo, portanto, “conveniente”.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo Inicial	Juros	Parcela	Saldo Final
2	0	4.000	-	2.005	1.995
3	1	1.995	19,95	2.005	9,95

Planilha 2 - Resolução de Exercício via recursão - Continuação

A seguir, é feita uma discussão a respeito da equivalência de capitais, a fim de ampliar os problemas a serem resolvidos. Essa equivalência é feita a partir da multiplicação ou da divisão de um determinado capital por $(1+i)^n$.

7 Equivalência de capitais

O valor de uma quantia depende da época à qual ela está referida.

Por exemplo, se meu dinheiro rende 1% ao mês é indiferente pagar agora R\$ 100,00 ou pagar R\$ 101,00 daqui a um mês.

Por outro lado, é mais vantajoso pagar R\$ 100,50 daqui a um mês do que pagar R\$ 100,00 agora. E, também, é mais vantajoso pagar R\$ 100,00 agora do que pagar R\$ 102,00 daqui a um mês.

Assim, a principal questão em Matemática financeira é deslocar quantias no tempo.

Uma outra leitura para $C_n = C_0(1+i)^n$

Podemos ler a fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$ da seguinte maneira: uma quantia, hoje igual a C_0 , será transformada, depois de n períodos de tempo, em uma quantia igual a $C_0(1+i)^n$, à taxa de $i\%$ ao período.

Por exemplo, uma quantia cujo valor atual é R\$ 1 000,00 equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $1 000(1+i)^n$.

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:

Para obter o *valor futuro*, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$.

Para obter o *valor presente*, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$.

Figura 17 - Extrato da página 315

Tal procedimento é justificado parcialmente, e essa justificativa seria muito simples a partir da idéia de que a seqüência de capitalizações de um determinado capital é uma PG de razão $1+i$, e, como é conhecido para as progressões geométricas, a transição entre os termos da seqüência é feita a partir da multiplicação ou divisão dos termos dessa seqüência por sua razão.

Tal discussão é feita visando a resolução de problemas como o 21, em que um consumidor precisa escolher entre um plano de pagamento. O problema é semelhante ao discutido pelo autor como introdução do capítulo, mas a resolução proposta é completamente diferente daquela utilizada pelo próprio autor três páginas

antes. No livro, a solução proposta consiste em comparar o valor de todas as parcelas na mesma data, a partir do conceito de equivalência de capitais discutido anteriormente. O autor não faz menção a uma eventual resolução semelhante à proposta por ele mesmo para um problema muito parecido, contribuindo para que o ensino de Matemática Financeira se limite a um grande conjunto de fórmulas e métodos aparentemente diferentes entre si. Na verdade, todos os principais problemas podem ser estudados unicamente a partir da compreensão do regime de capitalização composta, mesmo sem uso de recursos computacionais.

22. Hélen tem duas opções de pagamento na compra de um televisor:

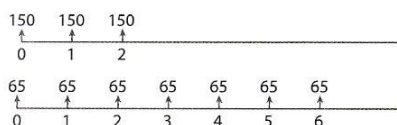
- 3 prestações mensais de R\$ 150,00 cada;
- 7 prestações mensais de R\$ 65,00 cada.

A primeira prestação é paga no ato da compra em ambos os casos. O dinheiro vale 2% ao mês para Hélen. Qual é a melhor opção de compra?

Resolução:

Para fazer a comparação, vamos determinar o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo, na época 2.

Os esquemas de pagamento são:



A título de comparação, vamos determinar o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo, na época 2. Então temos:

$$V_1 = 150(1 + 0,02)^2 + 150(1 + 0,02) + 150$$

e

$$V_2 = 65(1 + 0,02)^2 + 65(1 + 0,02) + 65 + \frac{65}{1 + 0,02} + \frac{65}{(1 + 0,02)^2} + \frac{65}{(1 + 0,02)^3} + \frac{65}{(1 + 0,02)^4}$$

Calculando esses valores obtemos $V_1 = \text{R\$ } 459,06$ e $V_2 \approx \text{R\$ } 446,43$.

Portanto, a melhor opção para Hélen é fazer o pagamento em 7 prestações.

Para refletir

Muitas pessoas acham que o primeiro esquema é o melhor, pois o total pago é de R\$ 450,00, ao passo que no segundo esquema o total pago é de R\$ 455,00.

Figura 17 - Extrato da página 316

Utilizando um software específico para a construção de planilhas eletrônicas, o problema poderia ter sido resolvido da seguinte maneira, a partir da suposição de um saldo inicial de R\$ 700, suficiente para que a consumidora pague as parcelas a cada mês:

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo Inicial	Juros	Parcela	Saldo Final
2	0	700	$0,02*B2$	P	$B2 + C2 - D2$
3	$A2 + 1$	E2	$0,02*B3$	D2	$B3 + C3 - D3$

Planilha 3 - Resolução de Exercício via recursão

Mês	Plano A				Plano B			
	Saldo Inicial	Juros	Parcela	Saldo Final	Saldo Inicial	Juros	Parcela	Saldo Final
0	700	14	150	564	700	14	65	649
1	564	11,28	150	425,28	649	12,98	65	596,98
2	425,28	8,5056	150	283,79	596,98	11,94	65	543,92
3	283,79	5,6757	0	289,46	543,92	10,878	65	489,8
4	289,46	5,7892	0	295,25	489,8	9,796	65	434,59
5	295,25	5,905	0	301,16	434,59	8,6919	65	378,29
6	301,16	6,0231	0	307,18	378,29	7,5657	65	320,85

Planilha 4 - Resolução de Exercício via recursão - Continuação

Assim, é possível concluir que a consumidora encerrará todo o processo de pagamento com um saldo maior quando optar pelo plano B, sendo este mais vantajoso, portanto. Ainda, é importante observar que os saldos estão sendo comparados após o pagamento da sétima parcela. Dessa forma, como o plano A é composto somente de 3 parcelas, o saldo após os três pagamentos continua rendendo juros, até que o pagamento seja encerrado também pelo plano B.

A seguir, o autor propõe, como consequência do estudo de equivalência de capitais, o cálculo do valor à vista de um produto, a partir dos valores das parcelas, o que é louvável. Não é mencionada nenhuma fórmula específica para a situação, e o problema é resolvido unicamente a partir das características da movimentação

financeira em questão, o que contribui para que o aluno compreenda o que está fazendo.

No entanto, o autor não estende esse raciocínio para o cálculo do montante gerado por uma seqüência de depósitos, que poderia ser feito de maneira análoga, tendo o cuidado de calcular os valores de todos os depósitos na data do último depósito realizado.

24. O valor à vista de um produto é na prática a soma de todos os valores presentes em suas parcelas, descontado pela taxa de juro do financiamento. Obtenha o valor à vista de um produto vendido em 4 parcelas de R\$ 50,00, com juros de 7% a.m.:

a) sendo a primeira à vista (1 + 3);
 b) sendo a primeira daqui um mês (0 + 4).

Resolução:

a) $1 + i = 1 + 0,07 = 1,07$
 A soma do VP das 4 parcelas é:

$$50 + \frac{50}{(1,07)^1} + \frac{50}{(1,07)^2} + \frac{50}{(1,07)^3} = 181,21$$
 (note que a primeira parcela já é o valor presente, pois é paga à vista)
 R\$ 181,21

b) $1 + i = 1 + 0,07 = 1,07$
 A soma do VP das 4 parcelas é:

$$\frac{50}{(1,07)^1} + \frac{50}{(1,07)^2} + \frac{50}{(1,07)^3} + \frac{50}{(1,07)^4} = 169,36$$

 R\$ 169,36

Figura 18 - Extrato da página 316

Ao fazer a opção de não enfatizar problemas como esse, que não dependeriam de nenhum raciocínio ainda não desenvolvido (e que poderia ser perfeitamente calculado a partir das planilhas eletrônicas), o autor deixa de ampliar consideravelmente o alcance e a diversidade dos problemas estudados no capítulo.

2.6 - Matemática para o Ensino Médio - Volume Único - Valter Fernandes, Jorge Daniel Silva e Orlando Mabelini - 2005

O capítulo denominado “Matemática Financeira” aparece seis capítulos antes daquele dedicado às funções exponenciais e oito antes daquele dedicado às progressões geométricas. Assim, de partida é possível constatar que o alcance teórico e prático dos conceitos estudados é muito limitado. De fato, só são trabalhados os conceitos de porcentagem, lucro e prejuízo e juros simples, o que torna um equívoco denominar de Matemática Financeira um capítulo que não aprofunda em nada o tema. Na verdade, os tópicos de Matemática Financeira são propostos pelo autor como encerramento do estudo das funções exponenciais e das progressões geométricas, bem como em um capítulo, no final do livro, intitulado Economia e Estatística.

No caso das funções exponenciais, os autores repetem a abordagem de outros autores ao deduzir a fórmula habitual para o cálculo do montante capitalizado de modo composto.

5. Aplicações da função exponencial

Juro composto

Ao nascer Beatriz, sua madrinha Ecila depositou R\$ 500,00 a 12% de juro ao ano. Se não retirar o dinheiro e nem os juros, quanto terá depois de 1 ano, 2 anos, ..., etc.? Quanto terá quando completar 18 anos?

$$\begin{aligned} \text{Depois de 1 ano, terá: } & 500 + 500 \cdot \frac{12}{100} = \\ & = 500 + 500 \cdot 0,12 = 500 \cdot (1 + 0,12) = 500 \cdot 1,12 = 560,00 \end{aligned}$$

Para os anos sucessivos, formamos a seguinte tabela:

Anos transcorridos	Capital formado
0	500
1	$500 \cdot 1,12 = 560$
2	$560 \cdot 1,12 = 500 \cdot (1,12)^2 = 627,20$
3	$627,20 \cdot 1,12 = 500 \cdot (1,12)^3 = 702,46$
4	$702,46 \cdot 1,12 = 500 \cdot (1,12)^4 = 786,76$
...	...
18	$500 \cdot (1,12)^{18} = 3\,844,98$
...	...
x	$500 \cdot (1,12)^x$

Se colocarmos um capital de C reais à taxa de r% ao ano, quanto será formado (chamado montante M) ao final de t anos?

Sendo $i = \frac{r}{100}$, onde i é a taxa unitária, temos:

$$\text{Ao final do 1º ano} \Rightarrow M_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1 + i)$$

$$\text{Ao final do 2º ano} \Rightarrow M_2 = M_1 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$$

$$\text{Ao final do 3º ano} \Rightarrow M_3 = M_2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3$$

...

$$\text{Ao final do t-ésimo ano} \Rightarrow M_t = C \cdot (1 + i)^t$$

Juro composto é o juro que ao final de cada período junta-se ao capital para produzir novo juro no período seguinte.

Um capital de C reais a i% ao ano converte-se ao final de t anos em:

$$M_t = C \cdot (1 + i)^t$$

Observe que a função que dá o montante final é uma função exponencial de base $(1 + i)$.

Figura 19 - Extrato da página 209

Não é feita uma associação com as progressões geométricas – assunto ainda não abordado pelos autores – nem uma associação do expoente t com o número de

capitalizações, encobrendo a essência da movimentação financeira. Os exercícios se limitam a uma aplicação da fórmula mencionada.

No encerramento do capítulo dedicado às progressões geométricas, o tema escolhido é o mesmo, ignorando o que foi desenvolvido 43 páginas antes.

4. Juro composto

No regime de capitalização composta, o juro do 1º período é calculado em função do capital inicial e, incorporado a ele, forma o novo capital para o cálculo do juro do 2º período e assim por diante.

Cálculo do montante

Suponha que você tenha depositado uma quantia em uma caderneta de poupança e queira saber o montante acumulado (**M**), que é igual à quantia principal (**C**) mais os juros (**J**) após determinado período (**n**), ou seja, $M = C + J$ ou $J = M - C$.

Para obter tal valor, vamos montar o esquema:

Período (n)	Principal (C)	Taxa (i)	Juro (J = C · i)	Montante (M = C + J)
1	C	i	C · i	$M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i) \Rightarrow$ $\Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)^1$
2	$C \cdot (1 + i)^1$	i	$C \cdot (1 + i) \cdot i$	$M_2 = C \cdot (1 + i) + C \cdot (1 + i) \cdot i =$ $= C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \Rightarrow$ $\Rightarrow M_2 = C \cdot (1 + i)^2$
3	$C \cdot (1 + i)^2$	i	$C \cdot (1 + i)^2 \cdot i$	$M_3 = C \cdot (1 + i)^2 + C \cdot (1 + i)^2 \cdot i =$ $= C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) \Rightarrow$ $\Rightarrow M_3 = C \cdot (1 + i)^3$
...
n	$C \cdot (1 + i)^{n-1}$	i	$C \cdot (1 + i)^{n-1} \cdot i$	$M_n = C \cdot (1 + i)^{n-1} + C \cdot (1 + i)^{n-1} \cdot i =$ $= C \cdot (1 + i)^{n-1} \cdot (1 + i) \Rightarrow$ $\Rightarrow M_n = C \cdot (1 + i)^n$

Portanto, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$\left\{ \begin{array}{l} M_n: \text{valor acumulado após } n \text{ períodos} \\ C: \text{valor principal ou capital inicial} \\ i: \text{taxa unitária por período} \\ n: \text{número de períodos} \end{array} \right.$

Figura 20 - Extrato da página 253

O desenvolvimento da fórmula aqui é mais detalhado, mas não se dá o devido destaque à razão da seqüência obtida. Os exercícios propostos, mais uma vez, se resumem a uma simples substituição de incógnitas na fórmula, e os autores poderiam ter trabalhado todos junto com a abordagem via funções exponenciais.

O livro, volume único, destina-se a ser utilizado pelo estudante ao longo de todo o Ensino Médio. Ocorre que, no penúltimo capítulo, intitulado Economia e Estatística, é feita uma discussão mais aprofundada da Matemática Financeira. Constata-se que tal discussão não foi trabalhada como uma consequência daquela iniciada duas vezes pelos autores, mas nunca continuada. Essa imensa espera – 324 páginas – faz com que os conceitos abordados aqui estejam bastante deslocados das teorias matemáticas que os justificam.

Aqui, o cálculo de um valor capitalizado de modo composto é desenvolvido pela terceira vez pelos autores. A abordagem feita aqui é mais detalhada, e pela primeira vez os autores contemplam a essência da movimentação financeira estudada, dando destaque ao fato de os juros serem calculados sempre com referência ao valor inicial *em cada período*.

4. Como administrar seu dinheiro

Nesta seção você vai entender, por meio de alguns problemas básicos, os mecanismos que as instituições financeiras utilizam para calcular valores de rendimentos em aplicações e como é calculado o valor das parcelas fixas de um empréstimo sobre o qual se paga um juro periódico mensal.

Problema I

Suponha que você tenha depositado uma quantia em um banco e queira saber o **montante acumulado (M)** que é igual à **quantia principal (C)** mais os **juros (J)** após determinado **período (t)**.

Para obter tal valor, vamos montar um esquema baseado em valores hipotéticos. Suponha que você deposite um valor principal (C) de R\$ 1 000,00 em uma poupança que rende juro (J) cuja **taxa (i)** é 2% ao mês e que esse juro é incorporado ao seu capital inicial, mensalmente. Após 6 meses, por exemplo, qual seria o montante?

Figura 21 - Extrato da página 577

A cada período o juro será $C \cdot i$, em que C é o principal naquele momento e i , a taxa de juro na forma unitária, ou seja, $i = 2\% = \frac{2}{100} = 0,02$. A taxa de juro aplica-se ao principal C sempre na forma unitária.

$$\left. \begin{array}{l} C = 1\,000,00 \\ i = 0,02 \end{array} \right\} J = C \cdot i = 1\,000 \times 0,02 = \text{R\$ } 20,00$$

Logo, depois de 1 mês o valor principal será R\$ 1 020,00.

Assim, montando uma tabela, temos:

Períodos (t)	Principal (C)	Taxa (i)	Juro (J = C · i)	Montante (M = C + J)
1	1 000,00	0,02	20,00	1 020,00
2	1 020,00	0,02	20,40	1 040,40
3	1 040,40	0,02	20,81	1 061,21
4	1 061,21	0,02	21,22	1 082,43
5	1 082,43	0,02	21,65	1 104,08
6	1 104,08	0,02	22,08	1 126,16

O montante, depois de 6 meses, será R\$ 1 126,16.

Observe que aqui temos um cálculo de juros compostos. Generalizando, temos:

Períodos (t)	Principal (C)	Taxa (i)	Juro (J = C · i)	Montante (M = C + J)
1	C	i	C · i	$M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i) \Rightarrow M_1 = C(1 + i)^1$
2	$C(1 + i)^1$	i	$C(1 + i) \cdot i$	$M_2 = C(1 + i) + C(1 + i) \cdot i = C(1 + i) \cdot (1 + i) \Rightarrow M_2 = C(1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$	i	$C(1 + i)^2 \cdot i$	$M_3 = C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2 \cdot i = C(1 + i)^2 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_3 = C(1 + i)^3$
...
t	$C(1 + i)^{t-1}$	i	$C(1 + i)^{t-1} \cdot i$	$M_t = C(1 + i)^{t-1} + C(1 + i)^{t-1} \cdot i = C(1 + i)^{t-1} \cdot (1 + i) \Rightarrow M_t = C(1 + i)^t$

Portanto, vem:

$$M_t = C \cdot (1 + i)^t$$

M_t : valor acumulado em t períodos
 C : valor principal ou capital inicial
 i : taxa unitária por período
 t : número de períodos

Figura 22 - Extrato da página 578

Não surpreende que a clareza atingida aqui seja devida à construção de uma planilha que ilustre o problema. Ainda, as flechas ilustram o raciocínio recursivo. No entanto, o uso de um software específico para planilhas eletrônicas não é estimulado (e nem sequer citado), e o uso da planilha se limita a facilitar a compreensão do desenvolvimento da fórmula.

A seguir, os autores propõem o cálculo do montante gerado por uma seqüência de depósitos efetuados periodicamente. Para isso, desenvolvem a fórmula específica para a situação a partir da capitalização de cada depósito por um diferente período de tempo. Tal justificativa é correta e adequada, visto que dá ênfase à essência da movimentação financeira em questão.

Problema II

Suponha agora que você tenha depositado uma quantia mensal (R) que se incorpora ao montante acumulado, mês a mês. Vamos obter a expressão geral para esse tipo de acúmulo de capital que se chama **pagamento antecipado**. Isto quer dizer que no momento em que você faz um contrato para pagar com prestações ou **resgates mensais**, você já paga a primeira prestação (é a conhecida expressão: “1 + n vezes” que as lojas usam).

Sejam:

- $R \rightarrow$ resgate mensal
- $i \rightarrow$ taxa unitária de juros
- $t \rightarrow$ número de períodos ou resgates
- $M_t \rightarrow$ valor aumentado em t períodos

Assim, temos:

- O primeiro resgate R fica aplicado t períodos.
- O segundo resgate R fica aplicado $(t - 1)$ períodos.
- O terceiro resgate R fica aplicado $(t - 2)$ períodos.
- ⋮
- O penúltimo resgate R fica aplicado 1 só período.
- O último resgate R não rende juro.

Esquematizando a situação, vem:

$$\begin{array}{llll}
 1^{\circ} \text{ resgate } R & \longrightarrow & S_1 = R \cdot (1+i)^t & \longrightarrow \text{rende } t \text{ períodos} \\
 2^{\circ} \text{ resgate } R & \longrightarrow & S_2 = R \cdot (1+i)^{t-1} & \longrightarrow \text{rende } (t-1) \text{ períodos} \\
 3^{\circ} \text{ resgate } R & \longrightarrow & S_3 = R \cdot (1+i)^{t-2} & \longrightarrow \text{rende } (t-2) \text{ períodos} \\
 & & \vdots & \\
 \underbrace{(t-1) \text{ resgate}}_{\text{(penúltimo)}} R & \longrightarrow & S_{t-1} = R \cdot (1+i)^1 & \longrightarrow \text{rende 1 período} \\
 \underbrace{t \text{ resgate}}_{\text{(último)}} R & \longrightarrow & S_t = R & \longrightarrow \text{não rende juro}
 \end{array}$$

Adicionando membro a membro as t parcelas:

$$S_1 + S_2 + S_3 \dots + S_t = R \cdot (1+i)^t + R \cdot (1+i)^{t-1} + R \cdot (1+i)^{t-2} + \dots + R \cdot (1+i) + R$$

$$M_t = R \cdot (1+i)^t + R \cdot (1+i)^{t-1} + R \cdot (1+i)^{t-2} + \dots + R \cdot (1+i) + R \quad \textcircled{\text{I}}$$

Multiplicando membro a membro por $(1+i)$ a equação $\textcircled{\text{I}}$, vem:

$$M_t \cdot (1+i) = R \cdot (1+i)^{t+1} + R \cdot (1+i)^t + R \cdot (1+i)^{t-1} + \dots + R \cdot (1+i)^2 + R \cdot (1+i) \quad \textcircled{\text{II}}$$

Figura 23 - Extrato da página 579

Fazendo (II) - (I) membro a membro, vem:

$$\begin{aligned} M_t(1+i) - M_t &= R \cdot (1+i)^{t+1} - R \Rightarrow \\ \Rightarrow M_t + M_t \cdot i - M_t &= R \cdot [(1+i)^{t+1} - 1] \Rightarrow \\ \Rightarrow M_t \cdot i &= R \cdot [(1+i)^{t+1} - 1] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_t = \frac{R \cdot [(1+i)^{t+1} - 1]}{i} \Rightarrow M_t = R \cdot \frac{(1+i)^{t+1} - 1}{i}$$

Assim, admitindo que seja depositada uma quantia fixa mensal de R\$ 200,00 em uma caderneta de poupança que rende 1,8% ao mês, o montante acumulado depois de 6 meses será:

$$M_6 = 200 \cdot \frac{(1+0,018)^{6+1} - 1}{0,018} \quad (\text{lembre-se: } 1,8\% = \frac{1,8}{100} = 0,018)$$

$$M_6 = 200 \cdot \frac{(1,018)^7 - 1}{0,018} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Com uma calculadora científica:} \\ 1,018 \quad x^y \quad 7 \quad = \end{array} \right.$$

$$M_6 = 200 \cdot \frac{1,13301 - 1}{0,018} \quad \text{que vai resultar em } 1,13301.$$

$$M_6 = 200 \cdot \frac{0,13301}{0,018} = 200 \cdot 7,38944 \Rightarrow M_6 = \text{R\$ } 1\,477,88$$

É claro que aqui consideramos que no 6º mês também foi depositada a quantia de R\$ 200,00, ou seja, foram feitos 6 depósitos ou resgates. Sem ela, o montante acumulado seria R\$ 1 277,88, exatamente R\$ 200,00 a menos (que corresponde ao resgate do 6º mês). Portanto, além de se saber quantos meses de aplicação, devemos saber quantos resgates houve no período.

Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado na amortização de uma dívida com prestações mensais iguais e fixas. A diferença é que, descontada a entrada, se houver, as prestações da dívida são postergadas (a 1ª depois de 1 mês) e não antecipadas (a 1ª no ato). Assim, o 1º resgate fica aplicado (t - 1) períodos; o 2º, (t - 2)

períodos; ... ; o último resgate não rende juros. Portanto, por analogia ao processo anterior, temos:

$$\underbrace{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}_{M_t} = R \cdot (1+i)^{t-1} + R \cdot (1+i)^{t-2} + \dots + R \cdot (1+i) + R \quad \text{(I)}$$

Multiplicando membro a membro por (1 + i), vem:

$$M_t \cdot (1+i) = R \cdot (1+i)^t + R \cdot (1+i)^{t-1} + \dots + R \cdot (1+i)^2 + R \cdot (1+i) \quad \text{(II)}$$

Fazendo (II) - (I) membro a membro, temos:

$$M_t(1+i) - M_t = R \cdot (1+i)^t - R \Rightarrow M_t \cdot i + M_t - M_t = R \cdot [(1+i)^t - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_t = \frac{R \cdot [(1+i)^t - 1]}{i} \Rightarrow M_t = R \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Admitindo que a dívida contraída por uma pessoa seja paga com prestações fixas mensais de R\$ 400,00, em 10 meses, com rendimento de 3% ao mês sobre as prestações, oferecido por uma aplicação financeira, o montante acumulado será:

$$M_{10} = 400 \cdot \frac{(1+0,03)^{10} - 1}{0,03} = 400 \cdot \frac{(1,03)^{10} - 1}{0,03} = 400 \cdot 11,46387 \Rightarrow M_{10} = \text{R\$ } 4\,585,55$$

Figura 24 - Extrato da página 580

A dedução da fórmula foi feita a partir de manipulações algébricas da soma desejada, e não pela associação com a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, abordagem provavelmente preterida dada ao grande espaçamento entre o capítulo em questão e o das progressões.

Uma vantagem da construção de planilhas eletrônicas para contemplar tais problemas está no fato de o estudante visualizar a variação do juro ao longo dos meses, que ocorre de modo mais acelerado do que quando um único valor é capitalizado ao longo de um período, sem acréscimos de depósitos. Ainda, a visualização dos juros é uma ferramenta importante para, por exemplo, o planejamento de uma fonte de renda: se uma dada aplicação está rendendo mensalmente R\$ 1.500 a título de juros, é possível sacar dela esse valor sem que haja perda de patrimônio, considerando eventuais perdas inflacionárias.

Dentre os dois exercícios propostos, destaca-se o segundo, onde é necessária a escolha entre diferentes planos de pagamento.

20. Uma loja vende um produto por R\$ 1 500,00 à vista ou em 3 parcelas fixas e mensais de R\$ 550,00, sendo “1 + 2 vezes”. Se a taxa de juro mensal é de 1,2%, fornecida por uma caderneta de poupança, qual é o valor acumulado pela loja nesses 3 meses loja com uma venda a prazo? Compare esse valor ao montante de uma aplicação de R\$ 1 500,00, à taxa de 1,2% ao mês, em 2 meses. É mais vantagem a loja vender à vista ou a prazo?

Figura 25 - Extrato da página 581

No entanto, o problema não é abordado em toda sua potencialidade, visto que o próprio enunciado induz uma resolução, e, ainda, parte do ponto de vista da loja, e não do consumidor, muito mais comum.

Para encerrar o capítulo, os autores propõem o estudo do pagamento parcelado de um determinado bem. Para isso, desenvolvem a fórmula específica para a situação a partir da associação entre o valor à vista capitalizado t vezes e o montante gerado após t depósitos, o que é matematicamente correto, mas encobre a movimentação financeira em questão. Não seria trabalhoso se um raciocínio análogo ao utilizado para os depósitos fosse realizado aqui, com o cuidado de “descapitalizar” cada parcela até a data presente, em vez de capitalizar todos até a data do último. Os exercícios propostos dão conta de problemas envolvendo ou não o pagamento de entrada, mas não enfatiza problemas de tomada de decisões entre

diferentes planos de pagamentos, que poderia ser realizada a partir dos valores à vista de cada plano.

Problema III (amortização de uma dívida)

Suponha agora que você vá financiar a compra de um bem cujo **valor presente** ou **atual** é C . Sejam t o período para esse pagamento e i a taxa de juro que incidirá sobre o resíduo da dívida. O resgate (R) é o valor da prestação para **amortizar a dívida** do financiamento em t períodos.

Relacionando as variáveis, temos, como já foi visto:

$$M_t = C \cdot (1 + i)^t \quad \text{(I) montante acumulado em } t \text{ períodos}$$

$$M_t = R \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i} \quad \text{(II) montante acumulado por } t \text{ períodos de pagamento de resgates (R) sucessivos, sendo o } 1^{\text{º}} \text{ pagamento depois de 1 mês.}$$

Comparando (I) e (II) temos:

$$R \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i} = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow R = \frac{C \cdot (1 + i)^t \cdot i}{(1 + i)^t - 1}$$

Assim, para comprar um apartamento de R\$ 45 000,00 de valor presente ou atual, em 50 prestações mensais, consecutivas e fixas com taxa de juro de 1% ao mês, deve-se pagar mensalmente a seguinte quantia:

$$R = \frac{45\,000 \cdot (1 + 0,01)^{50} \cdot 0,01}{(1 + 0,01)^{50} - 1} \quad (\text{lembre-se: } 1\% = \frac{1}{100} = 0,01)$$

$$R = \frac{45\,000 \cdot (1,01)^{50} \cdot 0,01}{(1,01)^{50} - 1}$$

Aqui é fundamental uma calculadora científica:
1,01 y^x 50 =
que vai resultar em 1,64463.

$$R = \frac{45\,000 \cdot 1,64463 \cdot 0,01}{1,64463 - 1}$$

$$R = \frac{45\,000 \cdot 0,0164463}{0,64463} = \frac{740,0835}{0,64463} \Rightarrow R = \text{R\$ } 1\,148,07$$

Figura 26 - Extrato da página 581

É louvável que os autores tenham se proposto a estudar tópicos de Matemática Financeira mais complexos e abrangentes do que a simples capitalização de um valor ao longo dos meses. Com certeza, seqüências de depósitos e pagamentos são movimentações financeiras que aparecem em uma freqüência muito mais significativa em situações cotidianas, e, por isso, são muito mais relevantes para a formação matemática de um estudante de Ensino Médio. No entanto, os autores pecam em descontextualizar matematicamente o estudo

proposto ao reservar as últimas páginas do livro para tais conceitos. Ainda, seria interessante que fosse dada maior ênfase aos problemas que envolvem a escolha de um determinado plano de pagamento dentre outras opções, o que foi feito uma única vez e sem o destaque merecido. Por fim, considerando a profundidade dos conceitos que os autores escolheram abordar (o que merece destaque, dada a superficialidade normalmente encontrada em publicações de mesma finalidade), seria interessante, por exemplo, o planejamento de uma aposentadoria privada, ou de problemas equivalentes, de modo que os conceitos estudados (seqüências de depósitos e pagamentos) sejam aproveitados em sua mais alta potencialidade.

2.7 - Matemática: uma nova abordagem - Volume 1 - José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno - 2000

Uma loja de móveis anunciou a seguinte oferta:

**SOFÁ 2 LUGARES → R\$ 780,00 À VISTA
OU 3 PAGAMENTOS MENSAIS DE R\$ 390,00**
(o primeiro pagamento um mês após a compra)

Supondo que você tenha os R\$ 780,00, o que é mais vantajoso: efetuar a compra à vista ou aplicar o dinheiro e comprar a prazo?

Tudo vai depender da taxa mensal de juro cobrada no pagamento parcelado e da taxa mensal de juro oferecida na aplicação.

Problemas desse tipo serão estudados neste tema de Matemática Financeira.

Figura 27 - Extrato da página 305

O capítulo dedicado à Matemática Financeira, que vem logo depois daqueles dedicados às funções exponenciais e logarítmicas e logo antes daquele dedicado às progressões, inicia tendo como motivação um dos principais problemas a serem abordados no Ensino Médio, dentro da Matemática Financeira.

Para o estudo da capitalização composta, os autores propõem o cálculo de um montante após certo período de tempo, e o fazem, inicialmente, a partir da construção de uma planilha.

6 Juro composto

Exemplos

1 Um investidor aplicou R\$ 500 000,00 a juro composto de 2% ao mês. Quantos reais terá após 5 meses de aplicação? Qual o juro obtido?

Para obter o montante, vamos construir uma tabela.

Período	Início	Juros do período	Montante
1	500 000,00	$0,02 \cdot 500\,000,00 = 10\,000,00$	$500\,000,00 + 10\,000,00 = 510\,000,00$
2	510 000,00	$0,02 \cdot 510\,000,00 = 10\,200,00$	$510\,000,00 + 10\,200,00 = 520\,200,00$
3	520 200,00	$0,02 \cdot 520\,200,00 = 10\,404,00$	$520\,200,00 + 10\,404,00 = 530\,604,00$
4	530 604,00	$0,02 \cdot 530\,604,00 = 10\,612,08$	$530\,604,00 + 10\,612,08 = 541\,216,08$
5	541 216,08	$0,02 \cdot 541\,216,08 = 10\,824,32$	$541\,216,08 + 10\,824,32 = 552\,040,40$

Para saber o juro obtido, fazemos: $M = C + J \Rightarrow J = M - C$

$$J = 552\,040,40 - 500\,000,00$$

$$J = 52\,040,40$$

O montante obtido será de R\$ 552 040,40 e o juro de R\$ 52 040,40.

Observe que a maneira de resolver o problema acima é muito trabalhosa e necessita de muitos passos para obter a resposta. Imagine se você fosse resolver dessa forma um problema envolvendo um período de aplicação de 20 anos. Vamos ver um modo mais simples nos exemplos seguintes.

Figura 28 - Extrato da página 324

No entanto, tal resolução é logo deixada de lado, sob a justificativa de que “é muito trabalhosa e necessita de muitos passos para obter a resposta”. Aqui, os autores ignoram que um software específico para a construção de planilhas eletrônicas resolveria o problema de modo rápido e correto.

Como resolução alternativa à construção da planilha, os autores utilizam a mesma abordagem utilizada em muitos dos livros aqui analisados, e repetem os equívocos de muitos deles também.

2 Um investidor aplicou R\$ 14 000,00 a juro composto de 2% ao mês. Quantos reais terá após 8 meses de aplicação?

Sabendo que o dinheiro aplicado (capital) é $C = 14\ 000$ e que a cada mês são creditados 2% de juro, temos:

o montante após o 1º mês

$$\begin{aligned} M &= C + J \Rightarrow M = C + 2\% \text{ de } C \\ M &= C + 0,02C \Rightarrow M = 1,02C \\ M &= C \cdot 1,02 \end{aligned}$$

o montante após o 2º mês

$$\begin{aligned} M &= 1,02C + 2\% \text{ de } 1,02C \Rightarrow M = 1,02C + 0,02 \cdot 1,02C \\ M &= 1,02C(1 + 0,02) \Rightarrow M = (1,02)^2C \\ M &= C(1,02)^2 \end{aligned}$$

o montante após o 3º mês

$$\begin{aligned} M &= (1,02)^2C + 2\% \text{ de } (1,02)^2C \Rightarrow M = (1,02)^2C + 0,02(1,02)^2C \\ M &= (1,02)^2C(1 + 0,02) \Rightarrow M = (1,02)^3C \\ M &= C(1,02)^3 \end{aligned}$$

e assim por diante.

Após t meses, o montante será de: $M = C(1,02)^t$

Assim, após 8 meses ($t = 8$) o montante será de:

$$\begin{aligned} M &= C(1,02)^8 \Rightarrow M = 14\ 000 \cdot (1,02)^8 \\ M &= 14\ 000 \cdot 1,171659381 \Rightarrow M = 14\ 000 \cdot \underbrace{1,17166}_{\text{valor aproximado}} \\ M &= 16\ 403,24 \end{aligned}$$

Observação:

O cálculo de $(1,02)^8$ pode ser feito com uma calculadora. Para isso, digite:

$1,02$ y^x 8 $=$ (em que y é a base e x é o expoente)

No visor aparecerá o resultado 1,171659381.

O gráfico mostra a evolução da aplicação desse investidor.



Após 8 meses, ele terá R\$ 16 403,24.

Figura 29 - Extrato da página 325

A seguir, de modo um pouco mais de formal, os autores repetem a abordagem anterior para um capital C , uma taxa i e um prazo t . Os exercícios propostos limitam-se a uma substituição de variáveis na fórmula.

7 A fórmula do montante

No regime de juro composto, para que os cálculos não sejam muito trabalhosos, podemos calcular o montante de uma aplicação usando a fórmula que demonstraremos a seguir.

Suponha que uma pessoa aplique em um banco uma quantia (capital) C , a uma taxa i de juro composto, durante o tempo (período ou prazo) t . Que montante M terá no final desse tempo?

Supondo que i e t estejam, por exemplo, em anos, temos:

TEMPO	CAPITAL NO INÍCIO DO PERÍODO	MONTANTE AO FINAL DO PERÍODO
1	C	$C + Ci$ $C(1 + i) \rightarrow$ colocamos C em evidência
2	$C(1 + i)$	$C(1 + i) + C(1 + i)i$ $C(1 + i)(1 + i) \rightarrow$ colocamos $C(1 + i)$ em evidência $C(1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$	$C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2i$ $C(1 + i)^2(1 + i) \rightarrow$ colocamos $C(1 + i)^2$ em evidência $C(1 + i)^3$
4	$C(1 + i)^3$	$C(1 + i)^3 + C(1 + i)^3i$ $C(1 + i)^3(1 + i) \rightarrow$ colocamos $C(1 + i)^3$ em evidência $C(1 + i)^4$
\vdots	\vdots	\vdots

Continuando com esse raciocínio, podemos escrever que, após t anos, o montante será igual a:

$$M = C(1 + i)^t$$

O gráfico a seguir mostra a evolução desse montante no decorrer do tempo:



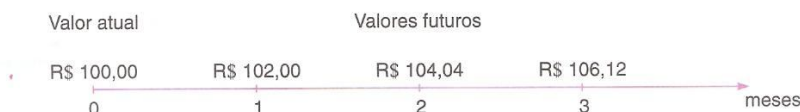
Figura 30 - Extrato da página 326

Ampliando os problemas estudados, os autores discutem o conceito de valor atual e valor futuro, a partir da multiplicação ou divisão de um determinado capital por $(1 + i)^n$. Tais conceitos são aplicados quando é proposto o problema do cálculo do valor de uma prestação para vendas a prazo.

9 Valor atual e valor futuro

Observe a seguinte situação:

- Se a caderneta de poupança rende 2% ao mês, uma aplicação de R\$ 100,00 valerá:



Por outro lado, já sabemos que, em regime de juro composto de taxa i , um capital C transforma-se, após um tempo t , em um montante M igual a:

$$M = C(1 + i)^t$$

Assim, podemos dizer que uma quantia, cujo valor atual é x , equivalerá, depois de um tempo t , a uma quantia y , dada por: $y = x(1 + i)^t$.

Essa situação reforça o conceito de *valor do dinheiro no tempo* e permite formular diversas hipóteses para financiamento, em situações em que dois ou mais capitais estarão disponíveis em datas diferentes.

Fórmula de equivalência de capitais

$$y = x(1 + i)^t$$

capital no futuro (y) capital hoje (x)

Essa fórmula mostra que:

Para obter o valor futuro, deve-se multiplicar o valor atual por $(1 + i)^t$

Para obter o valor atual, deve-se dividir o valor futuro por $(1 + i)^t$

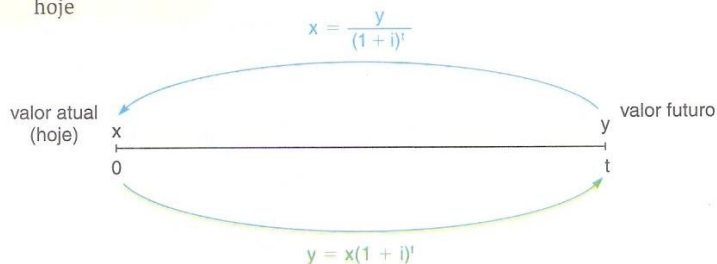
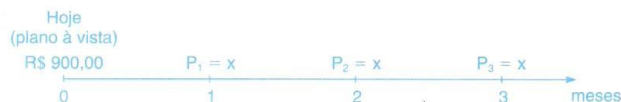


Figura 31 - Extrato da página 329

No entanto, nada é mencionado acerca do montante gerado por uma seqüência de depósitos, cálculo esse que poderia ser feito a partir do mesmo raciocínio aqui trabalhado pelos autores, com o cuidado de calcular o valor de cada depósito na data do último depósito realizado. Os exercícios propostos seguem a mesma linha dos exemplos resolvidos, sem exigir que os alunos adaptem o método de resolução proposto pelos autores.

- 4 Um comerciante vende uma geladeira, cujo preço à vista é R\$ 900,00, em 3 prestações mensais iguais e consecutivas. Sabendo que a primeira prestação é paga um mês após a compra e que o juro composto é de 3% ao mês, calcule o valor das prestações.

Do enunciado, temos:



Igualando os valores na época 0 (zero), temos:

$$900 = \frac{P_1}{1+i} + \frac{P_2}{(1+i)^2} + \frac{P_3}{(1+i)^3} \Rightarrow 900 = \frac{x}{1+0,03} + \frac{x}{(1+0,03)^2} + \frac{x}{(1+0,03)^3}$$

$$900 = \frac{x}{1,03} + \frac{x}{1,03^2} + \frac{x}{1,03^3}$$

$$900 \cdot 1,03^3 = 1,03^2x + 1,03x + x$$

$$900 \cdot 1,093 = 1,061x + 1,03x + x$$

$$983,7 = 3,091x$$

$$x = 318,25$$

O valor de cada prestação é de R\$ 318,25.

Figura 32 - Extrato da página 331

Para encerrar o capítulo, os autores abordam o tipo de problema usado como motivação para o estudo de Matemática Financeira: a decisão entre diferentes planos de pagamentos. A resolução proposta pelos autores é surpreendente.

Usando a calculadora

Numa revendedora de automóveis, há o seguinte cartaz:

Grandes Negócios

À vista: R\$ 15 000,00

A prazo: 10% de entrada mais

36 parcelas fixas de R\$ 610,00

97 99

Apesar de possuir os R\$ 15 000,00, um cliente decide comprar o carro a prazo. Ele vai pagar os 10% de entrada e aplicar o dinheiro restante a uma taxa de 1,2% ao mês. Pretende retirar, a cada mês, a quantia de R\$ 610,00 para pagar cada uma das 36 parcelas.

A opção feita pelo cliente é vantajosa? Ele conseguirá pagar todas as parcelas usando apenas o dinheiro aplicado? Caso não consiga, quantas parcelas ele ficará devendo?

Figura 33 - Extrato da página 332

Valores em reais			
PRESTAÇÃO	ANTES DO PAGAMENTO DA ENÉSIMA PRESTAÇÃO	APÓS 1 MÊS DE APLICAÇÃO	APÓS O PAGAMENTO DA ENÉSIMA PRESTAÇÃO
1	13 500,00	13 662,00	13 052,00
2	13 052,00	13 208,62	12 598,62
3	12 598,62	12 749,80	12 139,80
4	12 139,80	12 285,48	11 675,48
5	11 675,48	11 815,59	11 205,59
6	11 205,59	11 340,06	10 730,06
7	10 730,06	10 858,82	10 248,82
8	10 248,82	10 371,81	9 761,81
9	9 761,81	9 878,95	9 268,95
10	9 268,95	9 380,18	8 770,18
11	8 770,18	8 875,42	8 265,42
12	8 265,42	8 364,61	7 754,61
13	7 754,61	7 846,67	7 236,67
14	7 236,67	7 323,51	6 713,51
15	6 713,51	6 794,07	6 184,07
16	6 184,07	6 258,28	5 648,28
17	5 648,28	5 716,06	5 106,06
18	5 106,06	5 167,33	4 557,33
19	4 557,33	4 612,02	4 002,02
20	4 002,02	4 050,04	3 440,04
21	3 440,04	3 481,32	2 871,32
22	2 871,32	2 905,78	2 295,78
23	2 295,78	2 323,33	1 713,33
24	1 713,33	1 733,89	1 123,89
25	1 123,89	1 137,38	527,38
26	527,38	533,71	

A tabela mostra que o cliente fez uma péssima opção, pois não conseguirá pagar toda a dívida só com o dinheiro aplicado. Após o pagamento da 25ª parcela, restarão apenas R\$ 527,38, que, aplicados, darão um montante de R\$ 533,71, insuficiente para pagar a 26ª parcela. Além disso, ainda vão faltar 11 parcelas de R\$ 610,00.

Figura 34 - Extrato da Página 333

Para decidir entre o pagamento à vista ou a prazo, os autores analisam a evolução de um saldo de R\$ 15.000, suficiente para pagar à vista, que sofre sucessivos descontos de R\$ 610, valor das parcelas, e sucessivos acréscimos de 1,2% do saldo inicial de cada período, a título de juros. Tal método de resolução se assemelha àquele proposto a partir do uso de planilhas eletrônicas, e o único conhecimento teórico necessário é a clara compreensão do conceito de capitalização composta, *sem que sejam necessárias discussões acerca de valores atual e futuro de um conjunto de capitais*. A planilha evidencia a movimentação financeira em questão, pois é possível analisar a variação do saldo ao longo dos meses.

Tal resolução se assemelha àquela proposta para introduzir o conceito de juros compostos, quando os autores calcularam o montante gerado por um capital de R\$ 500.000, aplicado durante 5 meses a 2% ao mês. Na ocasião, os autores afirmaram que tal maneira seria “muito trabalhosa” e necessitaria de “muitos passos para obter a resposta”. Portanto, não seria adequada. Causa estranheza que aqui, sendo o prazo proposto de 36 meses, a construção manual da planilha proposta pelos autores é incomparavelmente mais trabalhosa do que aquela proposta inicialmente. No entanto, os autores não fazem nenhum comentário acerca da inconveniência do método nesse caso. É, portanto, fundamental ressaltar aqui que o uso de um software específico para planilhas eletrônicas resolveria com a *mesma eficiência* os dois problemas.

Por fim, os autores destacam um artigo retirado da Revista do Professor de Matemática, número 20, de autoria de João Calixto Garcia, onde é feita uma discussão a respeito da vantagem de comprar à vista com 5% de desconto ou em 3 vezes sem juros.

À vista ou a prazo?

O que é mais vantajoso: Comprar à vista com 5% de desconto ou em três vezes sem juros?

Supondo que tenhamos dinheiro suficiente para comprar em qualquer das duas formas, qual a melhor alternativa?

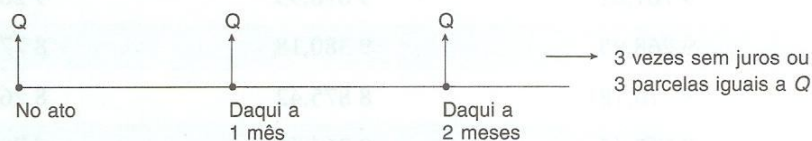
Vamos representar por i a taxa à qual conseguimos investir nosso capital, por exemplo, em caderneta de poupança (suponha que esta taxa seja de 3% ao mês).

Isso significa que conseguimos transformar uma quantia Q em:

- ▶ $Q + Qi = Q(1 + i)$ após um mês
- ▶ $Q(1 + i) + iQ(1 + i) = Q(1 + i)^2$ após 2 meses
- ▶ $Q = (1 + i)^3$ após 3 meses

E assim por diante.

Ora, comprando em 3 vezes sem juros (supondo as prestações iguais e a primeira prestação paga no ato da compra) vamos precisar desembolsar por mês as quantias representadas no esquema abaixo:



Assim, uma quantia Q tem o mesmo valor de uma quantia $Q(1 + i)$ daqui a um mês e o mesmo valor de uma quantia $Q(1 + i)^2$ daqui a 2 meses.

Então, a soma, na data da compra, dos valores atuais de todas as prestações Q é:

$$Q + \frac{Q}{1 + i} + \frac{Q}{(1 + i)^2}$$

No caso, $i = 0,03$ (ou seja, 3%).

$$Q \left[1 + \frac{1}{1 + 0,03} + \frac{1}{(1 + 0,03)^2} \right]$$

$$Q \left[1 + \frac{1}{1,003} + \frac{1}{1,03^2} \right] \approx 2,913Q$$

O preço à vista, sem desconto, seria $3Q$ e com desconto, à taxa d , seria $3Q - d3Q = 3Q(1 - d)$. Assim, a compra à vista com o desconto só é vantajosa se:

$$3Q(1 - d) < 2,913Q$$

ou seja:

$$3Q(1 - d) < 2,913Q$$

$$3 - 3d < 2,913$$

$$3d > 0,087$$

$$d > 0,029$$

$$d > 2,9\%$$

Como o desconto oferecido é de 5%, concluímos que, nesse caso, a compra à vista é mais vantajosa.

Fonte: *Revista do Professor de Matemática*, João Calixto Garcia, nº 20, pp. 23 e 24, SBM, 1992 (adaptado).

Figura 35 - Extrato da página 334

Tal método pode ser aplicado de modo análogo para um desconto d qualquer e um número n de pagamentos. No entanto, tal método também é muito trabalhoso para um prazo longo, mesmo com o auxílio de computadores. Porém, destaca-se positivamente que os autores optaram por enfatizar a compreensão da movimentação financeira ao analisar a capitalização de cada parcela do que simplesmente aplicar a fórmula específica para a situação.

2.8 - Síntese das análises

Após a análise de diversos livros destinados ao estudo de Matemática no Ensino Médio, é possível constatar a disparidade entre as abordagens utilizadas, os conceitos trabalhados e os exercícios propostos. De modo geral, pode-se afirmar que existe uma lacuna, em termos de publicações existentes, no estudo de Matemática Financeira no Ensino Médio.

Nenhuma publicação, dentre as analisadas, consegue equilibrar abordagens que sejam, ao mesmo tempo, matematicamente corretas, associadas a conceitos de Matemática básica e que evidenciem as características centrais das movimentações financeiras que os autores propõem estudar. Merece destaque também os diferentes momentos em que os autores abordam a Matemática Financeira. Não é possível identificar a existência de um padrão, já que alguns livros abordam o assunto entre os estudos de funções exponenciais e progressões geométricas, outros o fazem após o estudo das progressões e, em um caso específico, a abordagem ocorreu consideravelmente antes dos dois conceitos citados, sendo mais uma vez estudada (praticamente da mesma maneira!) como encerramento dos capítulos das funções exponenciais e das progressões, e novamente uma terceira vez, ao final do Ensino Médio. Tal disparidade nas diferentes publicações é prejudicial, já que o estudo começa com problemas, pois o cálculo do montante gerado por uma capitalização composta não é nem associado às progressões geométricas nem associado com o fato de o valor ser capitalizado tantas vezes quanto o período em questão.

Sobre os conceitos trabalhados também não se encontra unanimidade. Alguns livros abordam somente o cálculo do montante a partir da capitalização composta e outros aprofundam um pouco mais o assunto, tratando de seqüências de depósitos e/ou pagamentos. Dentre os que aprofundam, existem aqueles que simplesmente citam fórmulas, sem nenhuma justificativa, mas a maioria escolhe por justificar o procedimento a partir da equivalência de capitais em diferentes datas. Chama a atenção o fato de somente um dentre os livros analisados optar por estudar tanto as seqüências de pagamentos quanto de depósitos. Mesmo assim, a dedução das fórmulas não foi feita a partir do mesmo raciocínio, apesar de as movimentações financeiras serem análogas.

Por fim, os exercícios propostos, em sua maioria, se limitam a simples repetições das fórmulas e procedimentos desenvolvidos na resolução dos exemplos

ao longo dos capítulos. Muito pouco se exige dos estudantes em termos de adaptação dos problemas exemplificados. Algumas situações que exigiriam dos estudantes resoluções diferenciadas: carência de alguns meses, pagamentos e depósitos em períodos e valores não constantes e depósitos sucessivos para possibilitar saques sucessivos, dentre outras. Ainda, merece destaque o fato de a maioria dos autores trabalharem com o problema de escolher um plano de pagamento dentre diferentes opções de pagamento. É digno de nota, também, que praticamente cada livro propõe um método diferente de resolução, o que só reforça a existência de uma lacuna no estudo de Matemática Financeira no Ensino Médio. Há, portanto, espaço para a proposição de um novo e diferenciado método de trabalho, o que se pretende com essa dissertação.

03) PROCESSOS RECURSIVOS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

O estudo de cada movimentação financeira será feito sempre de maneira recursiva, destacando a variação observada ao longo do tempo, em detrimento do simples cálculo de valores. Para maior clareza na descrição do método, serão apresentados exemplos de sua aplicação, todos eles retirados do livro “Progressões e Matemática Financeira”, de Augusto César Morgado, Eduardo Wagner e Sheila C. Zani, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática em 1993, como parte da Coleção do Professor de Matemática. Registra-se que os problemas discutidos aqui diferem em valores e taxas daqueles discutidos com os estudantes, sendo os números apresentados, em geral, defasados, visto que o livro foi publicado em 1993. Optou-se por utilizar esses exemplos para comparar a resolução convencional com o método de trabalho aqui proposto, considerando que a Coleção da qual o livro faz parte e seus autores gozam de excelente reputação no meio.

1) Cristina toma um empréstimo de 150 u.m. a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina três meses depois?

A resolução proposta pelos autores é dada após justificarem a conhecida relação $C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$, onde C_n é o montante obtido de um capital inicial C_0 em n períodos de tempo, no regime de juros compostos de taxa i . No caso, $C_3 = 150 \cdot (1+0,12)^3 \cong 210,74$.

O problema é respondido com correção. No entanto, não se tem noção da variação da dívida ao longo desses três meses. Tal problema seria resolvido com a seguinte planilha, tendo como único ponto de partida o fato de que $i\%$ de uma dada quantia C_0 pode ser calculado por $\frac{i}{100} \cdot C_0$:

	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	DÍVIDA 2
2	0	150	0	=B2+C2
3	1	=D2		

Planilha 5 - Explicação do Método – Passos iniciais

Inicialmente, Cristina devia 150 u.m.. Em um primeiro momento, não há cobrança de juros.

É importante destacar um fato: a célula D2 está sendo definida como de mesmo valor que B2 + C2. Desse modo, o software está sendo programado a calcular a dívida ao final do mês como sendo sempre o resultado da soma da dívida anterior com os juros a serem pagos no mês. Ainda, é a célula B3 que, ao ser definida como de mesmo valor que D2, implementa o caráter recursivo do método. De modo geral, no caso, $B_N = D_{(N-1)}$.

	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	DÍVIDA 2
2	0	150	0	150
3	1	150	=0,12*B3	

Planilha 6 - Explicação do Método – Cálculo dos juros

O software é programado a calcular o valor dos juros do mês a partir da dívida no início do período.

	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	DÍVIDA 2
2	0	150	0	B2+C2
3	A2+1	D2	0,12*B3	B3+C3

Planilha 7 - Explicação do Método – Síntese da planilha

Agora, toda a planilha está construída a partir dos valores iniciais do problema: o capital a ser reajustado e a taxa usada.

	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	DÍVIDA 2
2	0	150	0	150
3	1	150	18	168
4				
5				

Planilha 8 - Explicação do Método – Recursão em prática

Dessa maneira, é possível solicitar ao software que estenda sua programação até a data desejada. No caso, até o final do terceiro mês.

	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	DÍVIDA 2
2	0	150,00	0,00	150,00
3	1	150,00	18,00	168,00
4	2	168,00	20,16	188,16
5	3	188,16	22,58	210,74

Planilha 9 - Explicação do Método – Resultados para o exercício

O problema, então, é resolvido a partir da obtenção da planilha que ilustra toda a movimentação no período.

A visualização de toda a movimentação permite ao estudante acompanhar a diferença principal entre os juros simples e os juros compostos, que reside na capitalização do valor inicial e do valor imediatamente anterior. Ainda, permite ao estudante extrapolar o problema: por exemplo, se Cristina tivesse se comprometido de pagar a dívida em três meses, mas resolvesse liquidá-la em dois meses, qual deveria ser a quantia disponível na data? Tal situação estimula a capacidade do aluno de adaptar o problema, e transpor tal adaptação para outras situações. Com isso, é desenvolvida a capacidade do aluno de tomar decisões, já que ele consegue obter dados que tornem tal decisão viável.

02) Geraldo tomou um empréstimo de 300 u.m. a juros mensais de 15%. Dois meses após, Gerado pagou 150 u.m. e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

A resolução proposta pelos autores é dada a partir da idéia de que, para obter o valor atual de um capital, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$. Dessa forma, a parcela de 150 u.m. e parcela P desejada têm seus valores calculados na mesma época que

o empréstimo de 300 u.m.. Assim, $300 = \frac{150}{(1+0,15)^2} + \frac{P}{(1+0,15)^3} \Rightarrow P \cong 284 \text{ u.m.}$

É possível construir uma planilha que explicita a variação da dívida da mesma maneira que a efetuada no exemplo anterior:

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	300,00	0,00	0,00	=B2+C2-D2

Planilha 10 - Explicação do Método – Começo da resolução

É preciso inserir uma coluna para os pagamentos, que irão ocorrer a partir do segundo mês.

A célula E5 está sendo definida como B5 + C5 - D5, de modo que do saldo devedor seja descontado o pagamento efetuado no mês em questão.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	300,00	0,00	0,00	300,00
3	1	300,00	45,00	0,00	345,00
4	2	345,00	51,75	150,00	246,75
5	3	246,75	37,01		=B5+C5

Planilha 11 - Explicação do Método - Resolução

A planilha é construída com os mesmos cuidados do exemplo anterior. No segundo mês, é feito o pagamento de 150 u.m.. A dívida, então, é somada com os juros do terceiro mês, e é precisamente esse o valor a ser pago na última parcela.

Mais uma vez, é importante destacar como a visualização da movimentação traz muito mais informações do que o simples cálculo da parcela a ser paga.

03) Um bem, cujo preço à vista é 120 u.m., é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

Para tal situação, é deduzida a relação $A = P \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$, onde A tem o mesmo valor, na data inicial, que n pagamentos iguais a P, sendo i a taxa de juros. Dessa forma, $120 = P \cdot \frac{1 - (1+0,08)^{-8}}{0,08} \Rightarrow P \cong 20,88$.

Mais uma vez, a resolução se limita a destacar o valor da parcela, mas não permite ao estudante contemplar a variação da dívida ao longo do tempo. Como dito anteriormente, a visualização do desenrolar do processo é importante para estimular a capacidade de tomar decisões e contribuir para uma melhor compreensão do significado da operação financeira efetuada. Construiremos a seguinte planilha, nos moldes do que foi feito até agora:

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	?	

Planilha 12 - Explicação do Método - Incógnita

Não é efetuado nenhum pagamento como entrada, e não há incidência de juros durante o primeiro período.

Aqui, nos deparamos com um problema. A construção da planilha depende do conhecimento de elementos cruciais para a recursão: a taxa de juros, para o cálculo dos mesmos, e a parcela a ser paga, para debitarmos da dívida inicial. No entanto, a parcela é desconhecida. Mais ainda, é exatamente seu valor que é necessário calcular. Para continuar, iremos supor um valor qualquer para a parcela.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	30,00	99,60
4	A3+1	E3	0,08*B4	D3	B4+C4-D4

Planilha 13 - Explicação do Método - Estrutura

Supondo 30 u.m. para o valor da parcela, é possível construir a planilha recursivamente, e observar a variação da dívida até o oitavo pagamento.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	30,00	99,60
4	2	99,60	7,97	30,00	77,57
5	3	77,57	6,21	30,00	53,77
6	4	53,77	4,30	30,00	28,08
7	5	28,08	2,25	30,00	0,32
8	6	0,32	0,03	30,00	-29,65
9	7	-29,65	-2,37	30,00	-62,03
10	8	-62,03	-4,96	30,00	-96,99

Planilha 14 - Explicação do Método – Resultado inicial

Pagando 30 u.m. por mês, após oito pagamentos o saldo devedor é de -96,99, o que significa que a parcela a ser paga é menor do que 30 u.m.. Mais ainda, é possível concluir que, no caso, após cinco pagamentos a dívida está praticamente zerada.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	20,88	108,72
4	2	108,72	8,70	20,88	96,54
5	3	96,54	7,72	20,88	83,38
6	4	83,38	6,67	20,88	69,17
7	5	69,17	5,53	20,88	53,82
8	6	53,82	4,31	20,88	37,25
9	7	37,25	2,98	20,88	19,35
10	8	19,35	1,55	20,88	0,02

Planilha 15 - Explicação do método – Resultado final

.Para chegar até o valor desejado de 20,88 u.m., é possível alterar o valor da célula D3 para valores menores que 30 u.m., de modo que o valor da célula E10 seja o mais próximo possível de zero. De fato, a dívida precisa ser paga em 8 parcelas. No caso, valores positivos para E10 significam a existência de saldo devedor, e o valor da parcela precisa ser maior. É importante destacar que dois

softwares específicos para planilhas eletrônicas - *Excel* e *Calc* - possuem recursos que realizam essa variação pelo usuário - especificamente a ferramenta “Atingir meta” -, como será desenvolvido no material proposto como apêndice.

Nesse ponto, é preciso destacar as vantagens de resolver um problema para o qual existe uma fórmula (já difundida e precisa) de maneira baseada na suposição de valores até atingir um determinado objetivo (no caso, saldo devedor nulo). Como dito, a motivação para o desenvolvimento e aplicação do método surgiu após um período, durante o ano de 2005, trabalhando com turmas de segundo ano do Ensino Médio usando tais fórmulas para a resolução. Em primeiro lugar, o conhecimento da fórmula torna-se imprescindível, e é preciso sempre tê-la em mente para trabalhar. Ainda, é fundamental o uso de calculadora, e de preferência uma calculadora científica. Acontece que as fórmulas para tal situação e para uma seqüência uniforme de depósitos são de difícil memorização. Além disso, encobrem o raciocínio financeiro que a visualização da variação do saldo devedor evidencia. Corre-se o risco de reduzir o trabalho com Matemática Financeira a uma decisão sobre qual fórmula utilizar. Por outro lado, a construção da planilha possibilita que o aluno compreenda o papel dos juros, das parcelas, o que significa o pagamento ou não de entrada, dentre outras coisas. Possibilita que o aluno se qualifique para tomar decisões (por exemplo: quitar a dívida antes do oitavo pagamento).

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PGTO	DÍVIDA 2
2	0	120,00	0,00	0,00	120,00
3	1	120,00	9,60	10,00	119,60
4	2	119,60	9,57	10,00	119,17
5	3	119,17	9,53	10,00	118,70
6	4	118,70	9,50	10,00	118,20
7	5	118,20	9,46	10,00	117,65
8	6	117,65	9,41	10,00	117,07
9	7	117,07	9,37	10,00	116,43
10	8	116,43	9,31	10,00	115,75

Planilha 16 - Explicação do Método - Análise

Ainda, é possível visualizar o quanto de cada parcela é usado para amortizar a dívida e o quanto é usado somente para pagar juros. No caso, uma parcela de 10

u.m. mal consegue pagar os juros do primeiro mês, o que significa uma baixa amortização da dívida. Tal discussão pode ser ampliada, por exemplo, para o pagamento da dívida externa brasileira.

04) Investindo todo mês 12 u.m. em um fundo de investimentos, o montante imediatamente após o 10º depósito é de 150 u.m.. Qual a taxa mensal de juros que rendeu o investimento?

Para tal situação, é deduzida a fórmula $F = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, onde F é o valor futuro a ser obtido após n depósitos, supondo uma taxa i de juros. No caso, $150 = 12 \cdot \frac{(1+i)^{10} - 1}{i} \Rightarrow 12,5 = \frac{(1+i)^{10} - 1}{i} \Rightarrow i = (12,5 \cdot i + 1)^{0,1} - 1$. Para resolver o problema, são propostas pelos autores quatro alternativas:

- Procurar uma tabela de valores específica para $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ em, segundo os autores, “um livro da primeira metade do século”. Nelas, temos que para $i = 4,75\%$ o valor é 12,4321 e que, para $i = 5\%$, o valor é 12,5779. Via interpolação linear, $i \cong 4,9\%$. A desvantagem, ainda segundo os autores, é de que não existem tabelas prontas capazes de resolver qualquer problema de cálculo da taxa de juros.

- Formar uma seqüência de aproximações (i_k) de modo que $i_{k+1} = (12,5 \cdot i_k + 1)^{0,1} - 1$, até obter $i_k = i_{k+1} = i$, começando arbitrariamente com $i_0 = 0,1$. Dessa forma, obtém-se a taxa aproximadamente igual a 4,9%.

- Aplicar o método de Newton para resolução de $F(x) = 0$, formando uma seqüência (x_k) , onde $x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$, até obter $x_{k+1} = x_k$. No caso, $F(i) = (1+i)^{10} - 12,5 \cdot i - 1$ e $F'(i) = 10 \cdot (1+i)^9 - 12,5$. Começando com $i_0 = 0,5$, obtém-se a taxa aproximada de 4,9%.

- Por tentativas, de modo que $G(i) = (1+i)^{10} - 12,5 \cdot i$ seja igual a 1. Supondo aleatoriamente valores para i , observa-se que $G(0,049) = 1,001$ e $G(0,0485) = 0,9995$.

Para encerrar, os autores comentam que “existem calculadoras, ditas financeiras, que contêm programas prontos para o cálculo de taxas de juros”.

Ou seja, existem muitos problemas em Matemática Financeira que não são resolvidos simplesmente aplicando a fórmula adequada. A suposição de valores é um hábito normal ao lidar com certos problemas, como exemplificado acima: nenhuma resolução chega ao resultado diretamente da substituição de valores na fórmula.

Iremos, agora, resolver o mesmo problema, construindo a planilha a partir de uma suposição inicial para a taxa de juros e observando a variação do montante acumulado:

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEPÓSITO	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	12,00	12,00

Planilha 17 - Explicação do Método - Início

Aqui, o saldo inicial é zero e, ao final do primeiro mês, só está disponível o depósito efetuado.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEPÓSITO	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	12,00	12,00
3	A2+1	E2	0,03*B3	D2	B3+C3+D3

Planilha 18 - Explicação do Método - Estrutura

A planilha será construída tendo como suposição inicial uma taxa de 3% ao mês, aplicada ao saldo do mês anterior. O saldo ao final do mês é constituído pela soma do saldo inicial, dos juros e do depósito.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEPÓSITO	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	12,00	12,00
3	2	12,00	0,36	12,00	24,36
4	3	24,36	0,73	12,00	37,09
5	4	37,09	1,11	12,00	50,20
6	5	50,20	1,51	12,00	63,71
7	6	63,71	1,91	12,00	77,62
8	7	77,62	2,33	12,00	91,95
9	8	91,95	2,76	12,00	106,71
10	9	106,71	3,20	12,00	121,91
11	10	121,91	3,66	12,00	137,57

Planilha 19 - Explicação do Método – Resultado inicial

Construída a planilha, pode se observar que uma taxa mensal de 3% é insuficiente para que, ao final de 10 depósitos de 12 u.m., o saldo seja de 150 u.m.. Fica claro, portanto, que para alcançar tal objetivo é necessário buscar uma taxa mais elevada.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEPÓSITO	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	12,00	12,00
3	2	12,00	0,59	12,00	24,59
4	3	24,59	1,20	12,00	37,79
5	4	37,79	1,85	12,00	51,64
6	5	51,64	2,53	12,00	66,18
7	6	66,18	3,24	12,00	81,42
8	7	81,42	3,99	12,00	97,41
9	8	97,41	4,77	12,00	114,18
10	9	114,18	5,59	12,00	131,78
11	10	131,78	6,46	12,00	150,23

Planilha 20 - Explicação do Método – Resultado final

Com uma taxa mensal de 4,9%, o objetivo é atingido. Mais uma vez, fica claro que a construção da planilha informa muito mais sobre a movimentação do que o simples cálculo da taxa. Por exemplo, pode-se acompanhar o quão vantajoso pode ser um planejamento: o rendimento mensal começa em 0,59 u.m., ao final do 1º

mês, e, ao final dos 10 depósitos, já é de 6,46 u.m.. Ou seja, os depósitos são constantes, mas a economia mensal é crescente.

Para a resolução dos exercícios 03 e 04, os autores optaram por utilizar duas fórmulas, com a intenção de obter a resposta *algebricamente*. Tais fórmulas podem ser deduzidas a partir de conceitos relativos às progressões geométricas; em especial, a partir da soma dos termos de uma progressão geométrica finita. No presente texto, deduziremos as fórmulas necessárias para relacionar o montante M obtido a partir de uma seqüência uniforme de n depósitos iguais a D , com uma taxa i de juros capitalizados no mesmo intervalo de tempo entre os depósitos; ainda, para relacionar uma dívida V amortizada a prazo em n parcelas iguais a P , com uma taxa i de juros (capitalizados no mesmo período de tempo entre as parcelas) e sem entrada.

Começamos pela seqüência de depósitos. Podemos observar que, em um total de n depósitos, o primeiro depósito é capitalizado $n - 1$ vezes: no primeiro período ele é adicionado ao saldo, e, nos $n - 1$ períodos seguintes, é acrescido de juros. Dessa forma, ao final dos n depósitos, o depósito inicial vale $D \cdot (1+i)^{n-1}$. De modo análogo, o segundo depósito valerá $D \cdot (1+i)^{n-2}$, o terceiro valerá $D \cdot (1+i)^{n-3}$, e, de modo geral, o k -ésimo ($k \leq n$) valerá $D \cdot (1+i)^{n-k}$. O expoente em cada termo está associado ao número de capitalizações que cada depósito sofre. Assim, o montante M obtido será o resultado da soma dos depósitos capitalizados ao final dos n depósitos: $M = D \cdot (1+i)^{n-1} + D \cdot (1+i)^{n-2} + \dots + D \cdot (1+i) + D$. Cada termo da seqüência de depósitos é parte de uma progressão geométrica de n termos, sendo o primeiro

termo igual a D e a razão igual a $1 + i$. Com isso,
$$M = \frac{D \cdot ((1+i)^n - 1)}{(1+i) - 1} = D \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

De modo semelhante, para relacionar a dívida V que será paga em n parcelas iguais, basta comparar o valor da dívida após n períodos. Pelo raciocínio anterior, o pagamento de n parcelas iguais a P e capitalizadas a cada período de tempo segundo uma taxa i de juros obtém um montante igual a $P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$. A dívida V ,

após n períodos, vale $V \cdot (1+i)^n$. Como a sucessão de parcelas deve amortizar a dívida, temos que $V \cdot (1+i)^n = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$. Logo, $V = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$.

Já foram destacadas, ao longo da descrição do método, várias vantagens da construção de uma planilha se comparada com a aplicação das fórmulas específicas. Para finalizar, o que torna imprescindível o uso de um software de planilhas *eletrônicas* é o fato de a manipulação dos dados ser incomparavelmente mais ágil do que se tal método fosse aplicado manualmente. Em especial, a suposição dos valores para a aproximação do resultado desejado seria uma tarefa das mais trabalhosas, para não dizer que seria inviabilizada. Ainda, o uso do recurso “Atingir meta”, que faz essa suposição pelo usuário, depende, é claro, do uso de tais softwares.

04) FUNDAMENTAÇÃO DIDÁTICA

4.1 - Uso de Computadores para aprendizagem em Matemática

Não é difícil constatar a importância do papel que o computador – e seus derivados – possui atualmente na sociedade, e provavelmente continuará possuindo. Poucos são os setores onde ele não se faz presente. No entanto, a velocidade com que essa inserção ocorre na Educação Matemática não é a mesma, e são várias as razões para que isso ocorra, o que é um problema, pois, segundo Borba e Penteado (2003, p. 87), “no momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica, ficam cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares”. O presente texto não pretende – nem conseguiria – esgotar o assunto, mas sim analisar alguns dos aspectos a serem considerados no momento de se decidir por utilizar recursos computacionais para ensinar e aprender Matemática.

A principal questão a ser respondida quando se pensa em usar um computador para Educação Matemática é a seguinte: ele é mesmo importante? Segundo James Kaput (1992, p. 519), pesquisador da Universidade de Massachussets, “designers adotaram sem modificação os tradicionais sistemas de notação e rotinas pedagógicas e simplesmente transferiram-nas para a nova mídia usando a capacidade de interação do computador”. Ou seja, muito do que foi produzido até hoje se limita a uma simples transferência de procedimentos usuais para essa “nova” mídia. São comuns softwares e materiais que possuem como principal recurso a possibilidade de o estudante digitar suas respostas e, após clicar em um botão, receber uma mensagem como “Parabéns!” ou “Resposta incorreta”, função que poderia ser desempenhada sem perdas – e com uma economia significativa – por um gabarito ao final do material.

O uso do computador possibilitou novas maneiras de se pensar em Matemática. Nada ilustra melhor essa afirmação do que a demonstração do Teorema das Quatro Cores, que afirma que todo e qualquer mapa pode ser colorido usando somente quatro cores, sem que nenhuma região adjacente possua a mesma cor. Até a presente data (janeiro de 2008), não se conhece uma demonstração para

tal teorema que *não* utilize recursos computacionais. É inevitável, portanto, que a mudança de modo de pensar em Matemática também acabe refletindo em mudanças para se ensinar e aprender Matemática. Ainda segundo Kaput (1992, p. 515), “as mesmas forças tecnológicas que dão forma à matemática também afetam profundamente o ensino e aprendizagem de matemática”.

O computador possibilita o estudo de novos conceitos. É comum que disciplinas como Cálculo Numérico direcionem seu foco para a utilização de recursos computacionais, já que esses executam tarefas que seriam impossíveis de se realizar manualmente com a mesma eficiência. Ocorre o mesmo com o método aqui proposto para o estudo da Matemática Financeira: seria inviável utilizar a abordagem discutida sem utilizar algum software que permita trabalhar com seqüências definidas recursivamente. É perfeitamente possível estudar Matemática Financeira sem utilizar recursos computacionais, e não será objeto de discussão nessa dissertação sobre qual método seria melhor que o outro. Mas é preciso cuidado ao inserir o computador como ferramenta de trabalho. Borba e Penteado (2003, p. 11) alertam para esse fato, ao lembrarem dos perigos que acompanhariam o uso de recursos computacionais: “Um deles era o de que o aluno iria só apertar teclas e obedecer a orientação dada pela máquina”.

De acordo com Kaput, Hegedus e Lesh (2007, p.190), a tendência é de que a tecnologia se torne parte da infra-estrutura da Educação Matemática, o que implicará em “uma mudança para um papel fundamental ainda que invisível. Além disso, essa mudança conduzirá para uma ênfase em novos níveis e tipos de idéias e habilidades, assim como novos caminhos para se pensar sobre conceitos e habilidades tradicionais”. O uso de tecnologias enquanto parte da infra-estrutura da Educação Matemática fará com que as tecnologias estejam para o processo de ensino-aprendizagem enquanto a eletricidade está para as residências: fundamental, porém em segundo plano, dada a naturalidade com que é encarada, e que possibilita novas maneiras de se realizar tarefas (por exemplo, o estoque de alimentos).

A questão aqui será mostrar, a partir do material proposto, que o uso do computador para aprendizagem em Matemática Financeira abriria novas possibilidades de estudo, e que somente com ele poderiam ser realizados de modo sintético, tanto conceitual quanto operacionalmente. Ou seja, um método de trabalho que justificaria o grande investimento que se faz necessário para que se possibilite o

uso de recursos computacionais, cuidado esse que sempre deve se fazer presente ao se optar por um trabalho em um laboratório de informática.

Uma analogia proposta por Kaput (1992) ilustra muito bem a discussão sobre não ser necessário se averiguar se uma determinada forma de trabalho seria melhor do que outra. Para realizar o deslocamento de certo ponto A para outro ponto B, o que seria mais vantajoso: percorrer esse caminho a pé ou pedalando uma bicicleta? A principal vantagem da bicicleta está no reduzido tempo a ser gasto, já que a velocidade atingida com ela é com certeza maior do que aquela atingida caminhando. No entanto, mesmo nesse aspecto a resposta não seria simples: dependeria da prática da pessoa que a usaria. Ainda, dependeria também do terreno a ser percorrido: para uma subida, provavelmente o resultado obtido caminhando seria mais vantajoso.

Ou seja, a decisão sobre utilizar ou não computador para aprendizagem em Matemática não depende somente de se avaliar se seria *melhor* utilizá-lo, ou não. É preciso definir objetivos, e, a partir daí, avaliar se o uso de recursos computacionais seria mais eficiente para atingi-los. Ainda, é preciso considerar as pessoas que utilizariam esses recursos, pois a ausência de prática e uma possível não-familiaridade com eles podem inviabilizar a proposta de trabalho, por mais significativos que tenham sido os resultados obtidos em outras oportunidades. Por fim, segundo Borba e Penteado (2003, p. 17), “o acesso à informática deve ser visto como um direito”. Eles continuam: “Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais, etc”.

O método de trabalho aqui apresentado está essencialmente vinculado ao uso de um recurso computacional específico, as planilhas eletrônicas. De acordo com Kaput, Hegedus e Lesh (2007, p. 178), “quando a tecnologia é inteiramente estrutural para um fim particular, seu uso é necessário e não opcional”. Seria inviável aplicar o método proposto sem o auxílio das planilhas eletrônicas. Dito isso, uma questão surge imediatamente: Por que estudar Matemática Financeira a partir delas seria interessante? A resposta é simples: *somente* com elas é possível abordar os conceitos relativos a Matemática Financeira a partir de sua definição recursiva. Por exemplo, seja uma taxa i de juros capitalizados a cada período, um saldo S_n em certo período n e um depósito D , de mesmo período que a capitalização. A variação

do saldo ao longo desses períodos pode ser expressa como $S_n = S_{n-1} + S_{n-1} \cdot i + D$. Ou seja, ao saldo anterior são acrescentados os juros do período e um novo depósito. É viável construir a movimentação somente com o uso de uma calculadora para um período curto, mas à medida que n aumenta o processo se torna inviável.

Ainda, a possibilidade de uma fácil manipulação dos dados torna possível ao estudante visualizar facilmente a variação, mas sem nunca perder de vista a essência da movimentação, que é sua definição recursiva, já que a programação da planilha é feita a partir dela. Segundo Kaput (1992, p. 525), “um aspecto muito importante do pensamento matemático é a abstração da invariância. Mas, é claro, para reconhecer invariância [...] é preciso haver variação”. Ele conclui: “*Mídias dinâmicas inerentemente tornam a variação mais fácil de ser atingida*”.

Ou seja, o estudo de Matemática Financeira, da maneira aqui proposta, prioriza o processo, e não o resultado final. Essa afirmação é validada pela ênfase nas características de cada movimentação financeira. A construção da planilha é tão importante quanto responder o que o enunciado solicita. Ainda, a possibilidade de fácil manipulação dos dados - portanto, de observar a variação - também é digno de nota.

Segundo Borba e Penteado (2003, p. 38), “as mídias informáticas associadas a pedagogias que estejam em ressonância com essas novas tecnologias podem transformar o tipo de matemática abordada em sala de aula”. Ao explorar as possibilidades que somente uma planilha eletrônica oferece, e estudar Matemática Financeira com elas, não está sendo seguido um roteiro pré-estabelecido pelo professor ou pela máquina, muito menos adaptando velhas rotinas. De acordo com Kaput, Hegedus e Lesh (2007, p. 188), “o uso de um software representativamente rico em Educação Matemática clama por uma re-contextualização tanto de conceitos matemáticos tradicionais quanto dos aplicados”. Mais uma vez citando Borba e Penteado (2003, p. 54), “é preciso que a chegada de uma mídia qualitativamente *diferente* (itálico do autor da dissertação), como a informática, contribua para modificar as práticas do ensino tradicional vigentes”.

4.2 - Aprendizagem a partir de procedimentos, processos e *proceitos**

O método de trabalho apresentado nessa dissertação é sustentado pela concepção da Matemática Financeira de modo recursivo, essencialmente. Para aplicá-lo, como discutido anteriormente, faz-se uso de um software específico para a construção de planilhas eletrônicas. Tais softwares apresentam uma rotina de programação muito particular, e se apropriar dela é o primeiro objetivo do estudante que se propõe a estudar Matemática Financeira dessa maneira. A seguir, o aluno precisa compreender como conciliar tal rotina de programação com as definições e particularidades de cada uma das movimentações financeiras estudadas. Por fim, o aluno precisa ele próprio modificar as recursões discutidas coletivamente com o professor, e adaptar o método para as diferentes variações que surgem nas mais diversas situações.

A presente seção dessa dissertação pretende discutir a fundamentação didática que permite concluir a ocorrência de aprendizagem em Matemática a partir do método de trabalho proposto. Ainda, pretende esclarecer os conceitos que sustentaram a análise dos dados obtidos após a aplicação do material produzido para trabalhar com o método e apresentado aqui. Para realizar tal tarefa, serão discutidos os conceitos criados e estabelecidos por David Tall, pesquisador do Centro de Pesquisa em Educação Matemática da Universidade de Warwick (Inglaterra), que relacionam Tecnologia e crescimento cognitivo em Matemática.

De acordo com Tall (1999, p. 3), “o crescimento cognitivo do pensamento matemático avançado é construído não somente sobre as habilidades cognitivas humanas, mas também sobre as interface e facilidades fornecidas por softwares”. Ele cita três tipos representações do que é oferecido pelos computadores, e são essas representações - numérica, simbólica e gráfica - que “podem ser usadas para estender as percepções individuais de idéias matemáticas”.

* tradução do autor da dissertação para o neologismo *procept*, criado por David Tall. A palavra é uma junção da primeira sílaba da palavra *processo* (*process*) com o final da palavra *conceito* (*concept*).

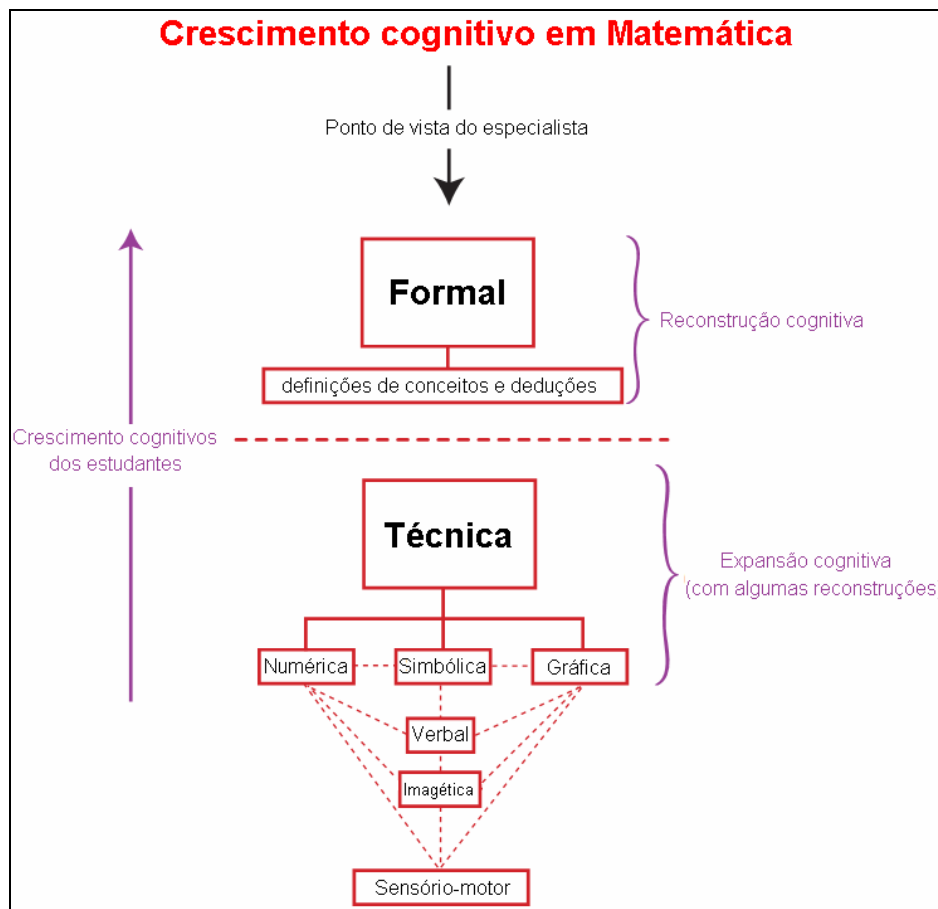


Figura 36 - Desenvolvimento cognitivo em Matemática, Tall (1999).

O esquema acima (figura 36) ilustra o modo como o desenvolvimento cognitivo pode ser estruturado, e que será ampliado a seguir. De acordo com Tall (1999), o uso de recursos computacionais possibilita que o estudante realize uma expansão cognitiva, e com isso faça a transição de um modo de pensar essencialmente técnico para um modo de pensar mais formal. No entanto, “é requerida uma enorme reconstrução cognitiva, o que pode causar tantas dificuldades que poucos estudantes fazem essa transição” (TALL, 1999, p. 3). Dessa forma, ele define três níveis de aprendizagem, dado o tamanho da dificuldade. É importante observar que seus estudos foram feitos essencialmente com o que ele chama de *Matemática avançada*, e os exemplos citados por ele em sua maioria dizem respeito ao estudo de Cálculo. No estudo de Matemática Financeira, os três níveis também podem ser percebidos, mas é maior o número de estudantes que consegue fazer a transição do pensamento técnico para o pensamento formal.

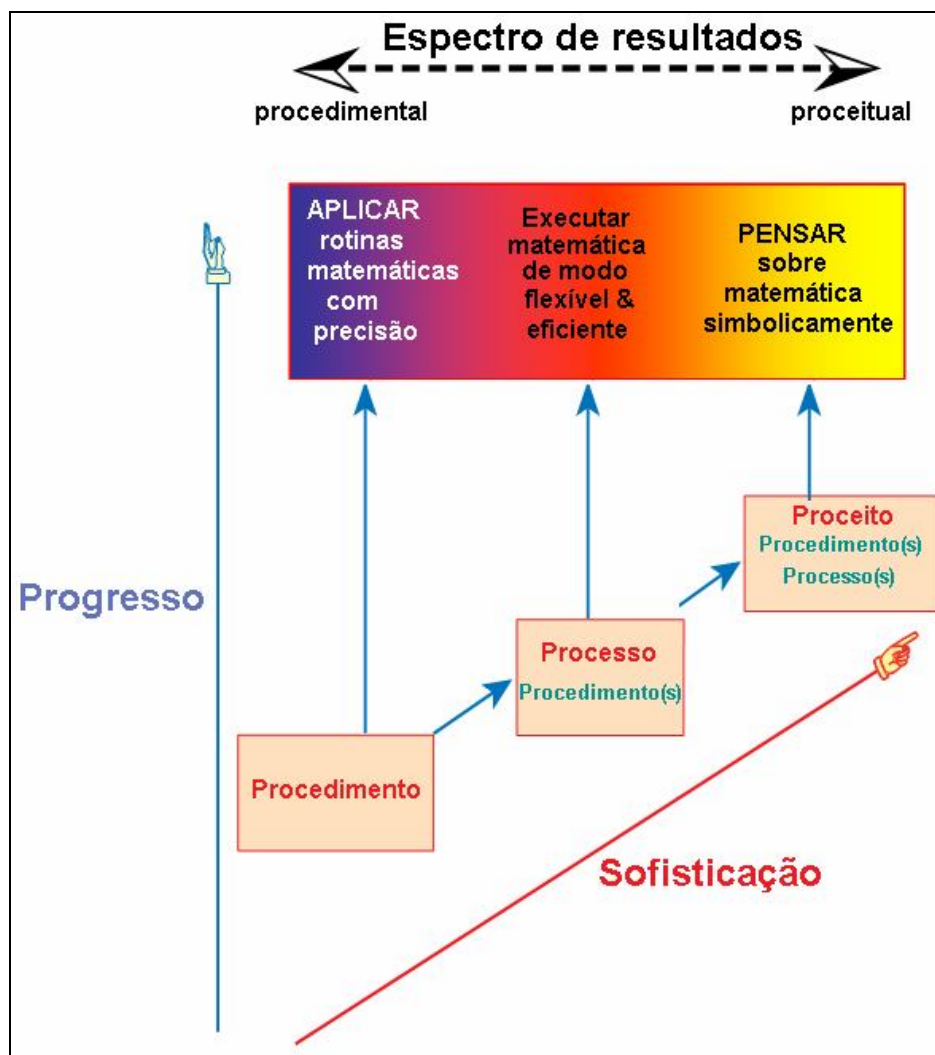


Figura 37 - Diferentes níveis de sofisticação, Tall (1999)

Segundo Tall (1999, p. 5), “um *procedimento* consiste numa sucessão finita de ações e decisões construídas em uma seqüência coerente”, sendo que cada passo da seqüência está encadeado com o próximo. No contexto de Matemática Financeira via recursão, o procedimento seria a aplicação da rotina de programação de modo recursivo, do modo como foi discutido coletivamente com o professor. Aqui, é possível fazer um paralelo com a aplicação da fórmula específica para cada situação. É interessante observar que, enquanto o trabalho com computadores possui recursos para realizar a transição sugerida por Tall (procedimento - processo - proceito), o trabalho com fórmulas poderia apresentar grandes dificuldades para ultrapassar o nível de procedimento, como será possível observar a partir das definições de *processo* e *proceito*.

Tall (1999, p. 5) destaca que organizar os níveis de sofisticação dessa maneira “não significa dizer que o pensamento procedimental não tem valor”. Porém, o foco exclusivo no procedimento contribuiria para que o aluno aprendesse de modo cada vez mais desconectado. Segundo Tall (1998, p. 12), “*procedimentos* permitem que indivíduos *façam* matemática, mas aprender muitos procedimentos separados e escolhendo o mais apropriado para certo propósito se torna cada vez mais penoso”. Como dito na apresentação dessa dissertação, a motivação para a produção de um material que estudasse Matemática Financeira de modo recursivo surgiu a partir da não satisfação com o resultado obtido ao trabalhar com os alunos dando ênfase às fórmulas específicas de cada movimentação financeira - em outras palavras, ao enfatizar somente procedimentos. O que possibilitou o diagnóstico de insucesso, na época, foi exatamente o fato de perceber a ocorrência de confusão por parte dos estudantes sobre qual fórmula utilizar, em qual situação. Ou seja, não percebeu-se conexão entre os conceitos estudados, o que é um problema de acordo com Tall (1998, p. 12), pois “eles (os estudantes) podem “resolver” um problema no contexto limitado e ver isso como um “sucesso”, mas não estão desenvolvendo conexões de longo prazo para ser capaz de pensar sobre idéias mais sofisticadas”.

O termo *processo* é usado “quando o procedimento é concebido como um todo e o foco é nos dados e nos produtos preferivelmente do que no procedimento particular usado para conduzir o processo” (TALL, 1999, p. 5). Ainda, é “onde modos cada vez mais eficientes ficam disponíveis para atingir o mesmo resultado” (TALL, 1998, p. 11). A correspondência com a proposta de estudo de Matemática Financeira pode ser feita quando o aluno deixa de se preocupar com a rotina de programação, exclusivamente, e passa a direcionar seus esforços para interpretar as planilhas construídas, analisando seus dados e chegando a conclusões a partir desses dados, não se limitando a obter a resposta ao exercício proposto. Ainda, é possível identificar esse nível de sofisticação quando os estudantes realizam adaptações das recursões discutidas coletivamente com o professor, e passam eles mesmos a produzir as recursões mais adequadas para cada problema.

Por fim, um *proceito* “requer que os símbolos sejam concebidos flexivelmente como **processos** a fazer e **conceitos** para se pensar sobre” (Tall, 1999, p. 5). É quando ocorre um pensamento muito mais formal do que técnico, e encontra correspondente na proposta de trabalho quando os estudantes abstraem valores de problemas específicos e passam a conceber cada movimentação financeira a partir

de sua definição (no caso, recursiva), e com isso consegue, por conta própria, generalizar e ampliar os conceitos estudados. É importante destacar que nesse nível de sofisticação o aluno ainda realiza procedimentos, visto que responde com correção à maioria dos exercícios propostos, e processos, já que consegue adaptar os procedimentos estudados. De acordo com Tall (1998, p. 12), “*proceitos* permitem que o indivíduo não somente conduza procedimentos, mas que considere símbolos como objetos mentais, e então não somente se *faça* matemática, mas também se *pense* sobre conceitos”. A diferença entre processo e proceito, no caso do trabalho com Matemática Financeira de modo recursivo, reside no fato de no segundo existir uma dependência menor - quase inexistente - de valores numéricos, aliada com uma capacidade de abstração maior. Um exemplo - que será discutido novamente na análise dos dados obtidos - ocorreu quando, em uma das sessões de trabalho, uma das alunas, ao discutir com sua colega de grupo o valor que seria usado para iniciar a variação na planilha, afirma ser possível “chutar qualquer coisa, pois a configuração está pronta”. A compreensão da rotina de programação estava consolidada, e, ainda mais importante, o conceito inerente à movimentação financeira também, visto que os valores tanto da variação quanto do resultado seriam mera formalidade, já que a configuração - termo utilizado pela aluna ao se referir a toda a estrutura montada - estava implementada. Outros exemplos serão discutidos ao longo da análise dos dados.

05) TÉCNICAS E MATERIAIS

O material produzido sobre Matemática Financeira foi aplicado duas vezes, em 2006 e 2007, durante o horário regular de aula, com todos os estudantes das turmas do segundo ano do Ensino Médio de um colégio da rede particular de Porto Alegre. Em 2006 participaram 62 alunos, e em 2007 foram 42, com cerca de 20 alunos por turma. As idades dos participantes eram, em sua maioria, entre 15 e 17 anos, e a carga horária semanal dedicada à Matemática era de quatro períodos. O conhecimento prévio se resumia a como calcular um determinado percentual de certo valor multiplicando pelo número decimal correspondente a essa porcentagem. O trabalho com Matemática Financeira se estendeu por cerca de um mês, com todos os encontros ocorrendo na sala de Informática do colégio, com os alunos trabalhando em grupos de 2 ou 3 alunos, cada grupo em um computador, utilizando o software *Calc*, parte integrante do pacote gratuito *BrOffice*.

Os encontros com os alunos tinham dois formatos, essencialmente. Em um primeiro momento, ao iniciar o estudo de uma nova movimentação financeira, uma situação-problema era discutida coletivamente, com participação ativa do professor, onde era desenvolvida a rotina de programação que se aplicaria a essa nova movimentação. Em um segundo momento, os alunos, divididos em grupos, trabalhavam nos diversos exercícios propostos, e questionavam o professor quando necessário. Os dados obtidos são, em sua ampla maioria, oriundos desse segundo momento.

Os dados analisados são compostos por planilhas feitas por esses grupos, e por extratos de diálogos ocorridos ao longo das sessões de trabalho. No primeiro encontro, os grupos foram instruídos a salvar todas as planilhas que produzissem. Foi dado um nome padrão para os arquivos. Por exemplo, *depósitos_grupo2_exercicio5_versao2*. Essa nomenclatura permite identificar a movimentação financeira em questão, o grupo que produziu a planilha, o exercício correspondente à planilha e, o mais importante, a versão da planilha. Na orientação sobre como salvar e nomear, foi insistido com cada grupo que salvasse e renomeasse a planilha *a cada alteração mais significativa*. Por alteração significativa, entende-se uma mudança de estratégia ou uma correção na

programação, por exemplo. Dessa forma, poderia se analisar posteriormente o desenvolvimento de cada exercício, e não simplesmente o resultado final.

No entanto, não era tão simples: cada turma tinha cerca de 10 grupos, e cada movimentação financeira nova era acompanhada por um número significativo de exercícios. Ou seja, ao final do estudo de Matemática Financeira, o número de planilhas produzidas pelos alunos era enorme. Para não se perder no meio dos dados, e não esquecer qual conjunto de planilhas possibilitava uma análise mais profunda, o professor que conduziu as atividades - o autor desta dissertação - acompanhou os trabalhos sempre munido de caneta e caderno. Dessa forma, sempre que um grupo solicitava ajuda, ou queria mostrar algo, era feito um registro identificando o grupo em questão, o exercício em que trabalhavam e uma síntese do que foi discutido ou mostrado. Assim, posteriormente, bastava procurar pelas diferentes versões das planilhas que o grupo produziu para aquele exercício em especial, tarefa essa que foi facilitada pela nomenclatura dos arquivos. Ainda, o professor circulava pelos grupos e observava o trabalho sem necessariamente ter sua presença solicitada. Nessas oportunidades, foram feitos registros de diálogos entre os alunos, que também foram objetos de análise, quando possível. O registro desses diálogos era precedido pelo grupo em questão e pelo exercício discutido, para acessar, após as sessões de trabalho, as planilhas produzidas.

O professor teve um papel importante no processo: era ele que iniciava a discussão sobre uma nova movimentação financeira a ser estudada, e, enquanto os grupos trabalhavam, circulava livremente e atendia os chamados dos alunos. Na interação com os alunos, procurou não induzir o desenvolvimento mais adequado para cada exercício, na medida do possível. A maioria das perguntas dos alunos era rebatida com outra pergunta, em geral sobre a *definição* de conceitos. Por exemplo, em um determinado exercício, uma pessoa acumulou certa quantia, e passaria a fazer saques mensais. Foi perguntado qual o valor máximo a ser sacado, de modo a possibilitar um determinado número de saques. No entanto, na hora de programar o valor dos saques, alguns grupos supunham um valor *menor* do que o valor obtido com os juros do mês. Assim, o saldo, *mesmo ocorrendo saques*, aumentava com o passar do tempo. Quando esses grupos solicitavam explicação para esse “fenômeno”, o professor, após identificar o problema, perguntava o significado da terceira coluna - no caso, a coluna dos juros. Os alunos respondiam, e retomavam o significado do conceito de juros. Também era solicitado que retomassem o papel

desse valor na programação. A partir daí, a conclusão de que o saldo só poderia aumentar - já que o ganho mensal era maior do que o valor sacado - não demorava a surgir. Por fim, o professor também era responsável pelos registros, a fim de facilitar a posterior análise, como descrito anteriormente.

O passo seguinte após a aplicação do material foi analisar os dados obtidos. Como descrito, a análise se baseou nos registros do professor, identificando o tipo de problema encontrado ou alguma situação em especial. A análise realizada foi essencialmente *qualitativa*. Segundo Bicudo (2006, p. 106), “o *qualitativo* engloba a idéia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões”. Para uma melhor avaliação da qualidade do material proposto nesta dissertação, foi fundamental uma análise com essa característica. Mais importante do que quantificar o percentual de alunos que respondeu um percentual pré-estabelecido de exercícios corretamente foi identificar se a idéia da recursividade foi incorporada naturalmente, e se a compreensão das características de cada movimentação financeira foi atingida. Só com tais metas atingidas seria possível validar o material proposto como adequado para o estudo de Matemática Financeira no Ensino Médio, já que a o fato de uma resposta estar correta (ou não) não indica necessariamente que de fato as metas foram atingidas. Mais importante do que o resultado final é o processo que leva a esse resultado, visto que a proposta de trabalho implementa uma rotina de resolução diferente daquela que os alunos estão acostumados.

Dessa forma, cada conjunto de planilhas, para um determinado exercício, foi entendido como um pequeno *estudo de caso*. Segundo Ponte (2006, p. 3), “os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, ...”. Ainda segundo Ponte (2006, p. 6), “são os estudos de cunho analíticos que proporcionam um mais significativo avanço do conhecimento”. A grande vantagem de analisar qualitativamente tais estudos de caso foi, mais uma vez segundo Ponte (2006, p. 17), “proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa”. A partir dessa análise foi possível reformular algumas partes do material, e adquirir confiança e convicção para não alterar outras.

Prioritariamente, foram analisados exercícios onde os alunos apresentaram dificuldades para aplicar a programação estudada e exercícios onde os alunos precisavam adaptar essa programação. No primeiro caso, a importância de estudá-

los está em observar se a rotina de programação foi compreendida adequadamente e identificar onde estariam as razões para uma possível confusão, reformulando o material quando necessário. Com isso, após as aplicações do material (e diversas apresentações em congressos, especialmente no Encontro Nacional de Educação Matemática de 2007, onde foi proposto um mini-curso para professores do Ensino Médio) e a posterior análise, é possível afirmar que o método se encontra proposto em um modo de fácil assimilação. No segundo caso, ao exigir que os alunos adaptem o método para uma determinada movimentação financeira, e analisar essa tentativa de adaptação, torna-se possível concluir se os alunos de fato se apropriaram do método, e se não estão simplesmente reproduzindo exemplos anteriores. Ao conseguir adaptar, o aluno evidencia aprendizagem do método, já que foi *além* daquilo que foi discutido com o professor.

Os conceitos estudados foram os seguintes: inicialmente, discutiu-se a idéia inerente aos juros compostos; a partir dela, partiu-se para o estudo das seqüências de depósitos, uniformes ou não; por fim, estudou-se o comportamento de seqüências de pagamentos de diversos tipos, sejam uniformes ou não, com e sem carência, com e sem entrada, dentre outras variações.

Por último, é importante destacar como foi possível inserir um novo tema no já saturado Ensino Médio, sem comprometer o estudo de outros assuntos habitualmente estudados. Com essas turmas de segundo ano, foram estudados ao longo do ano os seguintes assuntos: Progressões, Matemática Financeira, Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e Trigonometria. No primeiro ano de aplicação, também foi trabalhada a Geometria Espacial, e no segundo ano de aplicação foram estudadas Análise Combinatória e Teoria das Probabilidades.

Como dito, o trabalho com Matemática Financeira se estendeu por cerca de um mês. A saída para inserir esse novo tema, *que não costuma ser trabalhado*, foi reduzir os demais conceitos estudados ao longo do ano. Foram priorizados métodos mais gerais em vez de investir na memorização e aplicação de fórmulas específicas. Por exemplo, o escalonamento de sistemas lineares substituiu - com vantagem - a Regra de Cramer. O estudo de Geometria Espacial foi feito a partir do Princípio de Cavalieri e de conhecimentos prévios de Geometria Plana, deixando de lado a grande maioria das fórmulas habitualmente estudadas (por exemplo, a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de medidas a , b , c foi calculada via Teorema de

Pitágoras, e foi ignorada a relação $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$). Todo o estudo de Análise Combinatória foi baseado no Princípio Fundamental da Contagem. O estudo de equações trigonométricas foi feito simultaneamente ao estudo de funções trigonométricas. Essas e outras modificações propiciaram a inserção de um novo tema sem perda de qualidade no trabalho realizado. Cabe ao professor que decidir também trabalhar com Matemática Financeira identificar onde na sua prática é possível realizar tal enxugamento. Os exemplos acima servem como ilustração: não será tema dessa dissertação abordar como fazer isso, mas sim mostrar que a inserção desse novo tema no Ensino Médio é proveitosa.

06) ANÁLISE DOS DADOS

6.1 - Sessões de Trabalho - Juros Compostos

O material foi utilizado pelos estudantes durante parte dos meses de agosto e setembro de 2006, e durante maio de 2007, já com outro grupo de alunos. Inicialmente, foi trabalhado o conceito central de todas as movimentações financeiras que seriam estudadas: a idéia de juro e como ela pode ser aplicada na programação das planilhas.

Em um primeiro momento, em uma atividade expositivo-dialogada, o professor mostrou a estrutura básica das programações utilizadas. A coluna relativa ao período de tempo foi a primeira que os estudantes aprenderam a programar, por apresentar uma variação simples de ser observada. Imediatamente após ser definido que cada célula dessa coluna seria programada como a anterior adicionada de 1 ($A_3 = A_2 + 1$), um aluno pergunta: *“Por que não digitar 1, não é mais fácil?”*. Essa pergunta foi feita *antes* de a programação ser estendida às células seguintes. Quando isso foi feito até a 7ª linha e todas as células foram preenchidas com os números 1, 2, 3, 4 e 5, a dúvida foi esclarecida. É importante destacar que a maioria dos alunos, nesse primeiro momento, não conhecia as potencialidades das planilhas eletrônicas, e, assim, parece natural que digitar $A_3 = A_2 + 1$ seja muito mais complicado do que simplesmente 1. A programação das demais colunas ocorreu de modo mais direto, já que a aplicação dos conceitos estava sendo efetivada, e não simplesmente o preenchimento das células com seus respectivos valores. É possível ilustrar tal fato com a construção da coluna do saldo ao final de cada intervalo de tempo: a conclusão de que tal coluna deveria ser programada como a soma das células das colunas do saldo inicial e dos juros foi imediata ($D_3 = B_3 + C_3$), sendo que nenhum dos alunos sugeriu que fosse digitado direto o resultado correspondente.

A seguir, os estudantes, divididos em grupos, passaram a trabalhar com os problemas propostos, que podem ser divididos em duas classes: problemas de *aplicação* e de *adaptação* da programação. Os problemas de aplicação são aqueles onde os alunos precisam, principalmente, reproduzir a programação padrão; os de

adaptação são aqueles onde a programação apresentada não é suficiente para resolver o problema proposto, e uma ou mais modificações são necessárias.

Um dos exercícios trabalhado apresenta o seguinte enunciado: “Qual o montante de uma aplicação de R\$ 50.000, pelo prazo de 6 meses, à taxa de 2% ao mês?”. As dificuldades surgidas aqui decorreram principalmente da falta de hábito com os termos e conceitos específicos da matemática financeira e da necessidade de prática da programação. Por exemplo, um dos grupos entendeu que era solicitada a quantia que gerava R\$ 50.000 após 6 meses (Planilha 21); outro programou a coluna dos juros como sendo sempre igual a 0,02. Uma das alunas inclusive afirmou que achava que “os juros eram fixos”, explicitando uma confusão a respeito da diferença da taxa de juros com o valor dos juros (Planilha 22); o mesmo grupo, após refazer a programação da coluna dos juros, cometeu um erro na programação da coluna do Saldo Final, ao definir a célula D3 como sendo igual a $B2 + C3$ (Planilha 23), podendo ser creditado esse erro à distração, visto que ele não apareceu na primeira versão produzida. Tal erro compromete a programação de toda a planilha, visto que considera o saldo inicial do período anterior ao que está sendo analisado; por fim, um terceiro grupo programou corretamente a 3ª linha da planilha, mas selecionou a segunda e a terceira linhas na hora de estender a programação, e o software se encarregou de encontrar uma lógica na construção, erro comum quando ainda não se está familiarizado com a rotina da programação (Planilha 24).

	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo final
2	0	45286,54	0	45286,54
3	1	45286,54	905,73	46192,27
4	2	46192,27	923,85	47116,12
5	3	47116,12	942,32	48058,44
6	4	48058,44	961,17	49019,61
7	5	49019,61	980,39	50000

Planilha 21 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo Final
2	0	50000	0	50000
3	1	50000	0,02	50000,02
4	2	50000,02	0,02	50000,04
5	3	50000,04	0,02	50000,06
6	4	50000,06	0,02	
7	5			
8	6			

Planilha 22 - Análise das sessões de trabalho – Equívoco na coluna de juros

	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo Final
2	0	50000	0	50000
3	1	50000	1000	51000
4	2	51000	1020	51020
5	3	51020	1020,4	52020,4
6	4	52020,4	1040,41	52060,41
7	5	52060,41	1041,21	53061,61
8	6	53061,61	1061,23	53121,64

Planilha 23 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo final
2	0	50000	0	50000
3	1	50000	1000	51000
4	1	50001	1	50001
5	2	50001	1000,02	51001,02
6	2	50002	2	50002
7	3	50002	1000,04	51002,04

Planilha 24 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Outro exercício tem o seguinte enunciado: “Um capital de R\$ 7.000 foi aplicado durante um ano e meio, à taxa de 2,5% ao mês. Calcule os juros auferidos no período”. Ainda surgiram erros vinculados à aplicação da programação e com alguns conceitos. Por exemplo, um dos grupos definiu uma das células da coluna dos juros como $0,025 * 7000$, cometendo dois equívocos: não foi compreendida a maneira que o software realiza operações matemáticas, visto que a expressão não foi precedida pelo símbolo “=”, e não é utilizada nenhuma célula de referência para cálculo, inviabilizando a extensão da programação (Planilha 25). Outro grupo programou corretamente as colunas dos juros e do saldo final, mas definiu a coluna do saldo como sendo igual à soma do saldo final e dos juros do mês anterior, o que estaria correto se os juros já não estivessem sendo somados ao saldo final. Ou seja, os juros estavam sendo adicionados duas vezes (Planilha 26).

	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo final
2	0	7000	$0,025*7000$	

Planilha 25 - Análise das sessões de trabalho – Equívoco na programação

	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo + Juros
2	0	7000	0	7000
3	1	7000	175	7175
4	2	7350	179,38	7529,38
5	3	7708,75	188,23	7896,98
6	4	8085,22	197,42	8282,64
7	5	8480,07	207,07	8687,13
8	6	8894,2	217,18	9111,38
9	7	9328,56	227,78	9556,34
10	8	9784,13	238,91	10023,03
11	9	10261,94	250,58	10512,52
12	10	10763,09	262,81	11025,91
13	11	11288,72	275,65	11564,37
14	12	11840,02	289,11	12129,13
15	13	12418,23	303,23	12721,46
16	14	13024,69	318,04	13342,73
17	15	13660,76	333,57	13994,33
18	16	14327,9	349,86	14677,76
19	17	15027,62	366,94	15394,56
20	18	15761,5	384,86	16146,37
21			4765,62	

Planilha 26 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Outro exercício, dentre os propostos, tem o seguinte enunciado: “Uma pessoa aplica hoje R\$ 4.000 e aplicará R\$ 12.000 daqui a 3 meses num fundo que rende juros compostos à taxa de 2,6% ao mês. Qual seu montante daqui a 6 meses?”.

Os alunos tiveram bastante dificuldade em resolvê-lo, visto que foi o primeiro exercício onde a simples repetição da programação não era suficiente, sendo preciso adaptá-la. Além disso, alguns grupos cometeram erros de interpretação do enunciado. O equívoco mais comum foi o seguinte: a planilha foi construída corretamente até o 3º mês. No começo do 4º mês, foi adicionado R\$ 12.000 ao saldo obtido ($B6 = D5 + 12000$), e a programação foi novamente estendida, fazendo com que o software somasse R\$ 12.000 a cada começo de mês a partir daí (Planilha 27). Para solucionar tal problema, diversas tentativas foram propostas. A mais eficiente partiu de um grupo que construiu a planilha ignorando o acréscimo de R\$ 12.000, que só foi inserido *após* a programação já ter sido estendida até o 6º mês (Planilha 28). Outro grupo percebeu o equívoco logo após estender a programação. “*Ele continua somando 12.000*”, disse uma aluna. Outro integrante do grupo propõe que “*é só subtrair 24.000 do final*”. Imediatamente após tal colocação, ele pergunta ao professor: “*Como abater os juros em cada mês?*”, ao perceber que subtrair 24.000 ao final da movimentação não exclui os juros do período, o que indica uma compreensão da forma de capitalização estudada. Ainda, alguns grupos

interpretaram de modo incorreto o enunciado e adicionaram R\$ 12.000 no começo do 3º mês, o que está incorreto, visto que os juros precisam ser capitalizados relativos à quantia já existente, e não ao novo valor adicionado (Planilha 29). Por fim, outro erro de interpretação cometido foi considerar que os R\$ 12.000 seriam capitalizados por mais seis meses, e não até o sexto mês (Planilha 30).

B8 f(x) Σ = =D7+12000				
	A	B	C	D
1	Mês	Dívida	Juros	Dívida + Juros
2	0	4000	0	4000
3	1	4000	104	4104
4	2	4104	106,7	4210,7
5	3	4210,7	109,48	4320,18
6	4	16320,18	424,32	16744,51
7	5	28744,51	747,36	29491,86
8	6	41491,86	1078,79	42570,65

Planilha 27 - Análise das sessões de trabalho – Mais de um acréscimo de R\$ 12.000

B6 f(x) Σ = =D5+12000				
	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo + juros
2	0	4000	0	4000
3	1	4000	104	4104
4	2	4104	106,7	4210,7
5	3	4210,7	109,48	4320,18
6	4	16320,18	424,32	16744,51
7	5	16744,51	435,36	17179,86
8	6	17179,86	446,68	17626,54

Planilha 28 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

B5 f(x) Σ = =D4 + 12000				
	A	B	C	D
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	DÍVIDA + JUROS
2	0	4000	0	4000
3	1	4000	104	4104
4	2	4104	106,7	4210,7
5	3	16210,7	421,48	16632,18
6	4	16632,18	432,44	17064,62
7	5	17064,62	443,68	17508,3
8	6	17508,3	455,22	17963,51

Planilha 29 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

	A	B	C	D
1	MÊS	APLICAÇÃO	JUROS	APLICAÇÃO+JUROS
2	0	4000	0	4000
3	1	4000	104	4104
4	2	4104	106,7	4210,7
5	3	4210,7	109,48	4320,18
6	4	16210,7	421,48	16632,18
7	5	16632,18	432,44	17064,62
8	6	17064,62	443,68	17508,3
9	7	17508,3	455,22	17963,51
10	8	17963,51	467,05	18430,57
11	9	18430,57	479,19	18909,76
12	10	18909,76	491,65	19401,41

Planilha 30 - Análise das sessões de trabalho – Prazo equivocado

Mais um dos exercícios: “Afonso pode comprar um terreno por R\$ 20.000. Ele sabe que, com certeza, o terreno valerá R\$ 30.000 daqui a 5 anos. Se ele tiver a alternativa de aplicar o dinheiro a juros compostos, à taxa de 9% ao ano, qual investimento é mais vantajoso?”. Foram duas as principais dificuldades aqui: como começar a solucionar o problema, ou seja, qual seria o critério utilizado para decidir entre os dois investimentos; e o fato da taxa ser dada ao ano. Alguns grupos, em vez de construírem a planilha com o período de tempo anual, resolveram construir a planilha variando mensalmente. Para isso, utilizaram como taxa mensal $\frac{9\%}{12} = 0,075\%$, o que é incorreto (Planilha 31). O professor questionou um dos grupos se dois aumentos consecutivos de 10% corresponderiam a um aumento de 20%, o que foi negado pelo grupo ao analisar a variação de um capital de R\$ 100 de acordo com essas taxas.

	A	B	C
1	Mês	Aplicação	Juros
2	0	20000	0
3	1	20150	150
4	2	20301,13	151,13

Planilha 31 - Análise das sessões de trabalho – Conversão da periodicidade da taxa

Outro exercício: “Qual o capital que, aplicado a juros compostos, durante 9 anos à taxa de 10% ao ano produz um montante de R\$ 175.000?”. Dentre os exercícios propostos até então, esse foi o primeiro a questionar o saldo inicial que

produz um montante específico, e onde os grupos teriam de aplicar, pela primeira vez, a técnica da variação do valor livre de modo a atingir a quantia desejada. Dessa forma, a principal dificuldade dos grupos foi em construir a programação de modo que a variação resulte no valor desejado. Ainda, houve outras tentativas: alguns grupos tentaram fazer a programação ao contrário, partindo de R\$ 175.000 e calculando 10% desse valor. Essa tentativa é incorreta, visto que os juros do período devem ser calculados sobre o valor inicial do período (Aplicação, segundo o grupo), e não sobre o valor final (Aplicação + Juros). Uma aluna, de fato, questionou: “*Não dá pra fazer ao contrário?*”. No caso de problemas envolvendo somente a capitalização dos juros, seria perfeitamente possível reformular a programação e fazê-la funcionar “ao contrário”. Para isso, bastaria suprimir a coluna específica dos juros e definir as células da coluna da “Aplicação” como sendo, por exemplo, $B3 = D3/(1+i)$, onde i seria a taxa de juros, e a coluna D se referindo à “Aplicação + Juros” (Planilha 32). Ainda, ocorreram problemas com a interpretação do enunciado: alguns grupos entenderam que o valor de R\$ 175.000 corresponderia ao saldo inicial, o que está incorreto (Planilha 33). Esse tipo de erro diminuiu sensivelmente ao longo da aplicação do material, e pode ser debitado à falta de prática com os termos específicos da Matemática Financeira.

Por fim, é importante destacar o procedimento de um grupo específico na resolução desse problema. A programação foi construída com correção, de modo a permitir que somente a variação da célula B2 alterasse todos os demais valores da planilha (Planilha 34). No entanto, foi possível perceber que a variação de tal valor foi feita sem nenhuma reflexão, visto que sua 1ª tentativa, objetivando um montante de R\$ 175.000, foi $B2 = 100$; a 2ª, $B2 = 500$, e a 3ª foi $B2 = 1.000$. Somente após essas três tentativas, que produziam montantes muito distantes do valor desejado, que o grupo adotou $B2 = 50.000$, o que acelerou consideravelmente o processo.

C11				
f(x) Σ = =0,1*D10				
	A	B	C	D
1	ANO	APLICAÇÃO	JUROS	APLICAÇÃO+JUROS
2	0		0	174991
3	1		17499,1	174992
4	2		17499,2	174993
5	3		17499,3	174994
6	4		17499,4	174995
7	5		17499,5	174996
8	6		17499,6	174997
9	7		17499,7	174998
10	8		17499,8	174999
11	9		17499,9	175000

Planilha 32 - Análise das sessões de trabalho – Tentativa de reverter o processo

	A	B	C	D
1	Ano	Dívida	Juros	divida+juros
2	0	175000	0	175000
3	1	175000	17500	192500
4	2	192500	19250	211750
5	3	211750	21175	232925
6	4	232925	23292,5	256217,5
7	5	256217,5	25621,75	281839,25
8	6	281839,25	28183,93	310023,18
9	7	310023,18	31002,32	341025,49
10	8	341025,49	34102,55	375128,04
11	9	375128,04	37512,8	412640,85

Planilha 33 - Análise das sessões de trabalho – Interpretação equivocada do enunciado

B2				
f(x) Σ = 74218				
	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo final
2	0	74218	0	74218
3	1	74218	7421,8	81639,8
4	2	81639,8	8163,98	89803,78
5	3	89803,78	8980,38	98784,16
6	4	98784,16	9878,42	108662,57
7	5	108662,57	10866,26	119528,83
8	6	119528,83	11952,88	131481,71
9	7	131481,71	13148,17	144629,89
10	8	144629,89	14462,99	159092,87
11	9	159092,87	15909,29	175002,16

Planilha 34 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

A respeito do processo de variação de uma célula visando um determinado objetivo, pode-se destacar algumas situações. Um dos alunos (o mesmo que sugeriu

digitar “1” na coluna do mês, em vez de sua programação habitual), questionou o professor se teria “*algum jeito de fazer sem chutar*”. Não se pode afirmar com convicção que o aluno se referia a um processo não recursivo para resolução, mas uma evidência aponta em contrário: em um dos últimos encontros, foi apresentada aos alunos uma ferramenta chamada “Atingir Meta”, componente da planilha eletrônica *BrOffice Calc*. Essa ferramenta, devidamente programada com as células variável e de destino, bem como o objetivo a ser alcançado, interpola valores até convergir para o valor desejado. Esse mesmo aluno, de posse desse recurso, ficou satisfeito com relação ao seu uso. Dessa forma, pode-se supor que o problema do “chute” referido por ele tem muito mais relação com a eficiência de resolução do que com o desejo de conhecer um procedimento matemático não recursivo.

Ainda, na resolução de um dos exercícios que exigiam tal variação, pôde-se registrar uma aluna conversando com uma colega de grupo e afirmando que poderia “*chutar qualquer coisa, pois a configuração está pronta*”. Frases semelhantes a essa foram ouvidas mais de uma vez em mais de um grupo, e indicam que a compreensão da movimentação financeira (e a conseqüente programação correta) é muito mais importante do que o obter o valor desejado no problema. Afinal, programar com correção significa resolver *qualquer* problema, e não simplesmente um exercício específico. Para a maioria dos grupos das três turmas, a idéia da suposição ficou quase que de imediato como uma simples ferramenta para estruturar a programação. Alguns grupos, inclusive, deixavam a célula variável em branco e mesmo assim faziam referência a ela na programação, preenchendo-a somente depois de preparar a planilha para atingir o objetivo solicitado.

Situações como essa ilustram bem a variação no nível de sofisticação do desenvolvimento cognitivo, de acordo com as idéias de Tall. Em um dado momento, os alunos deixam de pensar apenas em torno de procedimentos pré-estabelecidos, e a principal preocupação não é mais efetuar o passo seguinte com correção, mas sim compreender os conceitos envolvidos e adaptá-los. Após os primeiros encontros, não foi difícil observar que a grande maioria dos alunos já realizava os procedimentos com correção e encontrava-se, com a ajuda dos recursos tecnológicos, executando matemática de modo flexível - no sentido de permitir adaptações - e eficiente, o que caracterizaria o nível de *processo*. No entanto, ainda eram poucos os alunos que se encontravam no nível de *proceitos*.

Mais um dos exercícios propostos, com o seguinte enunciado: “Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado, à taxa de 2,2% ao mês, para que duplique de valor?”. Aqui, é possível destacar o surgimento de uma compreensão dos alunos ao programar, à medida que eles aplicam e adaptam a programação estudada. Em um dos grupos, a idéia de supor um valor qualquer ocorre quase imediatamente após a leitura do enunciado. Ainda, uma das alunas sugere à aluna que está em frente ao computador: “*Supõe 200 e puxa até dar 400*” (Planilha 35). A própria terminologia utilizada já indica que os conceitos estudados, bem como a rotina de programação, já estão assimilados. É importante destacar que, devido ao conceito de *proporcionalidade*, qualquer valor utilizado seria dobrado no mesmo intervalo de tempo, mantendo constante a taxa de juros.

	A	B	C	D
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo final
2	0	200	0	200
3	1	200	4,4	204,4
4	2	204,4	4,5	208,9
5	3	208,9	4,6	213,49
6	4	213,49	4,7	218,19
7	5	218,19	4,8	222,99
8	6	222,99	4,91	227,9
9	7	227,9	5,01	232,91
10	8	232,91	5,12	238,03
11	9	238,03	5,24	243,27
12	10	243,27	5,35	248,62
13	11	248,62	5,47	254,09
14	12	254,09	5,59	259,68
15	13	259,68	5,71	265,39
16	14	265,39	5,84	271,23
17	15	271,23	5,97	277,2
18	16	277,2	6,1	283,3
19	17	283,3	6,23	289,53
20	18	289,53	6,37	295,9
21	19	295,9	6,51	302,41
22	20	302,41	6,65	309,06
23	21	309,06	6,8	315,86
24	22	315,86	6,95	322,81
25	23	322,81	7,1	329,91
26	24	329,91	7,26	337,17
27	25	337,17	7,42	344,59
28	26	344,59	7,58	352,17
29	27	352,17	7,75	359,92
30	28	359,92	7,92	367,84
31	29	367,84	8,09	375,93
32	30	375,93	8,27	384,2
33	31	384,2	8,45	392,65
34	32	392,65	8,64	401,29

Planilha 35 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Outro exercício: “Gisele aplicou R\$ 6.000, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês, e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas

aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo que os montantes resultantes foram iguais.”. A idéia de construir duas planilhas paralelas foi imediata para a grande maioria dos grupos. No entanto, ainda não estavam explorando todas as potencialidades que as planilhas eletrônicas oferecem. Por exemplo, deixavam as células variáveis de cada planilha sem nenhuma referência entre elas. Dessa forma, sempre que faziam uma suposição para uma delas, era preciso alterar o valor na outra também. No entanto, sempre agindo com correção: se estimassem R\$ 2.500 para o banco A, calculavam R\$ 3.500 para o banco B, sendo a perda de agilidade o único prejuízo. Um dos grupos, espontaneamente, definiu a célula F2 - a célula variável da segunda planilha - como sendo igual a 6000 - B2, onde B2 corresponde à célula variável da primeira planilha (Planilha 36). Essa programação adicional elimina o trabalho extra de calcular a quantia aplicada no segundo banco após a suposição da quantia do primeiro. Mais ainda, essa programação adicional ilustra o nível de *processo*, pois evidencia que os alunos lançam mãos de idéias e adaptações que resolvem o problema com a mesma precisão, porém de modo mais eficiente.

Poucos grupos tiveram a mesma idéia, apesar de sentirem falta de algo mais eficiente para realizar as variações. Àqueles que não inseriam essa programação, o professor questionava: “*Não tem como ensinar o software a fazer a conta para vocês?*”, já que os alunos se queixavam que, com as variações independentes, a programação perdia em agilidade. A seguir, era solicitado aos alunos que pensassem em um valor para o banco A e o valor correspondente para o banco B. Logo após, ao externar verbalmente a operação realizada (“*É só fazer 6.000 menos o primeiro*”), a maioria dos grupos concluía corretamente qual seria a programação necessária para a situação.

F2								
f(x) Σ = =6000-B2								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	MÊS	CAPITAL	TAXA	CAPITAL+TAXA	MÊS	CAPITAL	TAXA	CAPITAL+TAXA
2	0	2955,78	0	2955,78	0	3044,22	0	3044,22
3	1	2955,78	59,12	3014,89	1	3044,22	45,66	3089,89
4	2	3014,89	60,3	3075,19	2	3089,89	46,35	3136,23
5	3	3075,19	61,5	3136,69	3	3136,23	47,04	3183,28
6	4	3136,69	62,73	3199,43	4	3183,28	47,75	3231,03
7	5	3199,43	63,99	3263,42	5	3231,03	48,47	3279,49
8	6	3263,42	65,27	3328,69	6	3279,49	49,19	3328,69

Planilha 36 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

A respeito da suposição de valores, esse exercício proporcionou situações interessantes de se destacar. Um dos grupos realizava suposições aleatórias para os valores iniciais aplicados nos bancos A e B, sem considerar que a taxa de juros oferecida pelo banco A era maior que a oferecida pelo banco B, e, por isso, necessariamente o valor inicial investido em A deveria ser menor do que o investido em B. Reflexões como essa aceleram a convergência das suposições para o valor desejado, já que parte de valores mais próximos da resposta do problema. Ainda na mesma linha, uma das alunas de um grupo começou supondo uma aplicação inicial de R\$ 3.000 em cada banco, sendo imediatamente interrompida por sua colega: “Não dá pra dar exatamente metade, pois as taxas são diferentes”. Por fim, um dos grupos informou ao professor que o valor aplicado em um dos bancos deveria ser igual a R\$ 2.955,78. Elas atribuíram tal valor ao banco A, sendo questionados, a seguir, porque não poderia ser no banco B. Uma das alunas respondeu que sabia que *“R\$ 2.955,78 é no banco A por intuição feminina”*, provavelmente para encobrir o fato de desconhecer uma explicação coerente. No entanto, sua colega logo interrompeu a conversa, afirmando, corretamente, que *“a taxa do banco A é maior do que a do banco B, por isso ele tem que começar com menos para acabar igual ao B”*.

Uma situação inusitada aconteceu em uma das turmas de 2006, durante as primeiras sessões de trabalho, e reforçou a impressão de que o trabalho estava sendo bem encaminhado. As aulas no colégio em questão acabam, para os alunos do segundo ano do Ensino Médio, às 13h. No entanto, essa turma normalmente pede para ser dispensada já às 12h50, com o rendimento caindo muito a partir das 12h40. Tal rotina não se repetiu durante as sessões de trabalho na sala de informática: em uma das sessões, era 13h02 e ninguém tinha sequer guardado o material, produzindo em ritmo intenso.

6.2 - Sessões de Trabalho - Seqüências de Depósitos

As sessões de trabalho seguintes tiveram estrutura semelhante às primeiras. No entanto, foi dada menos ênfase na explicação da programação, sendo somente apresentada a nova estrutura de movimentação financeira, que, além dos juros do período, acresce ao saldo depósitos periódicos ou não. Em essência, bastaria somente incluir uma coluna correspondente aos depósitos e somá-los ao saldo junto com os juros do período.

A respeito da programação – que não sofreu nenhuma modificação significativa -, a única dificuldade surgiu na compreensão do papel do símbolo “\$” na programação. A necessidade de uso de tal símbolo foi descartada na versão do material apresentado nessa dissertação. No entanto, nenhum problema foi percebido na posterior produção dos grupos. Outra observação aponta para o fato de os alunos ainda não estarem cientes de todas as potencialidades da planilha eletrônica: alguns grupos ainda utilizam a calculadora do sistema operacional, ou mesmo uma calculadora de bolso, para realizar contas que não estão vinculadas à programação (por exemplo, para o cálculo do valor de depósitos que corresponderiam a 15% de um salário de R\$ 3.500), apesar de a planilha poder perfeitamente assumir esse papel.

Um dos exercícios propostos: “Uma pessoa deposita mensalmente R\$ 700 num fundo que rende juros à taxa de 1,3% ao mês. São feitos 25 depósitos. Qual será seu montante no instante após o último depósito? Qual será seu montante 3 meses após ter feito o último depósito?”. A primeira parte do exercício não apresentou dificuldades, já que ela é uma simples aplicação da programação estudada, e, como os alunos já possuíam certa prática com ela, a inserção da coluna para os depósitos se deu de forma natural. Para resolver a segunda parte, no entanto, algumas dificuldades surgiram. Dentre elas, a mais comum foi simplesmente estender a programação por mais 3 meses (Planilha 37). No entanto, tal solução é incorreta, já que nos últimos 3 meses não é realizado nenhum depósito. Fica indicada, aqui, uma dificuldade em adaptar a programação, ou até mesmo de identificar a necessidade de adaptação. No entanto, alguns grupos reconheceram que seriam precisas modificações após uma leitura mais atenta do enunciado. Uma aluna disse que “*a gente não pode baixar porque continua depositando*”, onde *baixar* equivaleria à extensão da programação para as células

seguintes. Em outro grupo, uma das componentes afirmou que para resolver a segunda parte bastaria “baixar” mais três linhas, sendo logo retrucada por sua colega: “Baixar tudo? Mas ele não depositou! Como faço pra tirar os depósitos?”. Aqui, percebe-se que a aluna compreende que a programação utilizada não é suficiente para a resolução do problema, mas desconhece uma possível solução. Em outras palavras, encontra-se na transição do nível de *procedimento* para o *processo*, já que a dificuldade está em adaptar a programação anterior já dominada por ela.

Um outro grupo resolveu corretamente o problema estendendo a programação utilizada com uma única modificação, externada em um diálogo entre os alunos: “É só tirar o depósito”, disse um deles; logo em seguida, seu colega concordou e justificou porque sua adaptação funcionaria ao dizer que “sim, tira o depósito e os juros continuam”. A solução encontrada por eles, tão simples quanto correta, foi substituir o valor dos três últimos depósitos por zero (Planilha 38).

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo 1	Juros	Depósito	Saldo 2
2	1	0	0	700	700
3	2	700	9,1	700	1409,1
4	3	1409,1	18,32	700	2127,42
5	4	2127,42	27,66	700	2855,07
6	5	2855,07	37,12	700	3592,19
7	6	3592,19	46,7	700	4338,89
8	7	4338,89	56,41	700	5095,29
9	8	5095,29	66,24	700	5861,53
10	9	5861,53	76,2	700	6637,73
11	10	6637,73	86,29	700	7424,02
12	11	7424,02	96,51	700	8220,54
13	12	8220,54	106,87	700	9027,4
14	13	9027,4	117,36	700	9844,76
15	14	9844,76	127,98	700	10672,74
16	15	10672,74	138,75	700	11511,49
17	16	11511,49	149,65	700	12361,14
18	17	12361,14	160,69	700	13221,83
19	18	13221,83	171,88	700	14093,72
20	19	14093,72	183,22	700	14976,93
21	20	14976,93	194,7	700	15871,63
22	21	15871,63	206,33	700	16777,96
23	22	16777,96	218,11	700	17696,08
24	23	17696,08	230,05	700	18626,13
25	24	18626,13	242,14	700	19568,27
26	25	19568,27	254,39	700	20522,65
27	26	20522,65	266,79	700	21489,45
28	27	21489,45	279,36	700	22468,81
29	28	22468,81	292,09	700	23460,91

Planilha 37 - Análise das sessões de trabalho – Depósitos ainda não foram retirados

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO1	JUROS	DEPÓSITO	SALDO2
2	1	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 700,00	R\$ 700,00
3	2	R\$ 700,00	R\$ 9,10	R\$ 700,00	R\$ 1.409,10
4	3	R\$ 1.409,10	R\$ 18,32	R\$ 700,00	R\$ 2.127,42
5	4	R\$ 2.127,42	R\$ 27,66	R\$ 700,00	R\$ 2.855,07
6	5	R\$ 2.855,07	R\$ 37,12	R\$ 700,00	R\$ 3.592,19
7	6	R\$ 3.592,19	R\$ 46,70	R\$ 700,00	R\$ 4.338,89
8	7	R\$ 4.338,89	R\$ 56,41	R\$ 700,00	R\$ 5.095,29
9	8	R\$ 5.095,29	R\$ 66,24	R\$ 700,00	R\$ 5.861,53
10	9	R\$ 5.861,53	R\$ 76,20	R\$ 700,00	R\$ 6.637,73
11	10	R\$ 6.637,73	R\$ 86,29	R\$ 700,00	R\$ 7.424,02
12	11	R\$ 7.424,02	R\$ 96,51	R\$ 700,00	R\$ 8.220,54
13	12	R\$ 8.220,54	R\$ 106,87	R\$ 700,00	R\$ 9.027,40
14	13	R\$ 9.027,40	R\$ 117,36	R\$ 700,00	R\$ 9.844,76
15	14	R\$ 9.844,76	R\$ 127,98	R\$ 700,00	R\$ 10.672,74
16	15	R\$ 10.672,74	R\$ 138,75	R\$ 700,00	R\$ 11.511,49
17	16	R\$ 11.511,49	R\$ 149,65	R\$ 700,00	R\$ 12.361,14
18	17	R\$ 12.361,14	R\$ 160,69	R\$ 700,00	R\$ 13.221,83
19	18	R\$ 13.221,83	R\$ 171,88	R\$ 700,00	R\$ 14.093,72
20	19	R\$ 14.093,72	R\$ 183,22	R\$ 700,00	R\$ 14.976,93
21	20	R\$ 14.976,93	R\$ 194,70	R\$ 700,00	R\$ 15.871,63
22	21	R\$ 15.871,63	R\$ 206,33	R\$ 700,00	R\$ 16.777,96
23	22	R\$ 16.777,96	R\$ 218,11	R\$ 700,00	R\$ 17.696,08
24	23	R\$ 17.696,08	R\$ 230,05	R\$ 700,00	R\$ 18.626,13
25	24	R\$ 18.626,13	R\$ 242,14	R\$ 700,00	R\$ 19.568,27
26	25	R\$ 19.568,27	R\$ 254,39	R\$ 700,00	R\$ 20.522,65
27	26	R\$ 20.522,65	R\$ 266,79	R\$ 0,00	R\$ 20.789,45
28	27	R\$ 20.789,45	R\$ 270,26	R\$ 0,00	R\$ 21.059,71
29	28	R\$ 21.059,71	R\$ 273,78	R\$ 0,00	R\$ 21.333,49

Planilha 38 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Outro exercício: “Para ampliar as instalações de sua loja de eletrodomésticos, o Sr. Martinez estima que precisará de R\$ 80.000 daqui a 18 meses. Quanto deverá depositar mensalmente, num total de 18 parcelas, à taxa de juros de 1,5% ao mês, para que no instante do último depósito consiga o montante pretendido?”. Esse foi o primeiro exercício onde a suposição do valor dos depósitos seria parte da resolução, e aqui foi possível perceber algumas situações interessantes relativas à compreensão da programação e à própria movimentação financeira em questão. Em um dos grupos, uma aluna sugeriu que o valor dos depósitos seria o resultado da divisão de R\$ 80.000 (montante desejado) por 18 (número de depósitos). Sua colega de grupo prontamente contra-argumentou, dizendo que “tem que ser menos por causa dos juros”. No entanto, na hora de programar, a mesma aluna pergunta: “O que eu coloco no começo? Sei que tem que dar 80.000 em 18 meses, mas e o depósito?”. Ou seja, a idéia da recursividade não está devidamente compreendida, visto que ela apresenta dificuldades para estruturar a programação. Ainda, no mesmo grupo, foi possível verificar uma ausência de qualquer reflexão no momento da suposição de valores, após a programação estar corretamente estruturada: suas

tentativas iniciais foram, na ordem aqui escrita, R\$ 9.250 (onde cada aluna escolheu aleatoriamente dois dígitos), R\$ 8.000, R\$ 400, R\$ 9.000 e R\$ 700. Ou seja, pela alternância de valores pode-se imaginar que o grupo digitava um valor e observava se o montante desejado foi atingido. Em seguida, não analisavam se o resultado obtido estava próximo ou distante do desejado, e sequer consideraram que talvez $\frac{80.000}{18}$ fosse um bom valor inicial para suposição, como uma das alunas de outro grupo constatou, perguntando ao professor quanto seria 80.000 dividido por 18, pois “*preciso desse valor para chutar no começo*”. Ainda, um dos alunos de um grupo afirmou que o problema seria solucionado da seguinte maneira: com a programação estabelecida, inserir 1 como o valor dos depósitos efetuados; a seguir, o valor do depósito deveria ser igual ao valor do montante desejado (R\$ 80.000) dividido pelo montante obtido com os “depósitos” de 1 (Planilha 39). Tal método pode ser justificado matematicamente, mas o grupo não insistiu com ele. Por fim, é possível observar que a busca por um resultado exato e a facilidade de supor valores dá margem para respostas absolutamente precisas, apesar de impossíveis de serem de fato efetivadas, como no resultado de R\$ 3.904,4625 obtido por um dos grupos (Planilha 40).

G15 f(x) Σ = =80000/E19							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Mês	Saldo 1	Juros	Deposito	Saldo 2		
2	1	0	0	1	1		
3	2	1	0,02	1	2,02		
4	3	2,02	0,03	1	3,05		
5	4	3,05	0,05	1	4,09		
6	5	4,09	0,06	1	5,15		
7	6	5,15	0,08	1	6,23		
8	7	6,23	0,09	1	7,32		
9	8	7,32	0,11	1	8,43		
10	9	8,43	0,13	1	9,56		
11	10	9,56	0,14	1	10,7		
12	11	10,7	0,16	1	11,86		
13	12	11,86	0,18	1	13,04		
14	13	13,04	0,2	1	14,24		
15	14	14,24	0,21	1	15,45		3904,46
16	15	15,45	0,23	1	16,68		
17	16	16,68	0,25	1	17,93		
18	17	17,93	0,27	1	19,2		
19	18	19,2	0,29	1	20,49		

Planilha 39 - Análise das sessões de trabalho – Solução alternativa

		fx) Σ = 3904,4625					
	A	B	C	D	E	F	G
1	Mês	Saldo 1	Juros	Dep	Saldo 2		
2	1	0	0	3904,46	3904,46		
3	2	3904,46	58,57	3904,46	7867,49		
4	3	7867,49	118,01	3904,46	11889,97		Deposito: 3904,4625
5	4	11889,97	178,35	3904,46	15972,78		
6	5	15972,78	239,59	3904,46	20116,83		
7	6	20116,83	301,75	3904,46	24323,05		
8	7	24323,05	364,85	3904,46	28592,36		
9	8	28592,36	428,89	3904,46	32925,7		
10	9	32925,7	493,89	3904,46	37324,05		
11	10	37324,05	559,86	3904,46	41788,38		
12	11	41788,38	626,83	3904,46	46319,66		
13	12	46319,66	694,79	3904,46	50918,92		
14	13	50918,92	763,78	3904,46	55587,17		
15	14	55587,17	833,81	3904,46	60325,44		
16	15	60325,44	904,88	3904,46	65134,78		
17	16	65134,78	977,02	3904,46	70016,27		
18	17	70016,27	1050,24	3904,46	74970,97		
19	18	74970,97	1124,56	3904,46	80000		

Planilha 40 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

A respeito da compreensão da programação, um dos grupos ilustra claramente como os alunos se apropriaram dela, ao construir um arquivo – chamado *deposito_estrutura.ods* - que serviria de modelo para a própria resolução dos problemas ou para encaminhá-la, no caso de necessidade de adaptação. Tal planilha está toda definida recursivamente, bastando inserir algum valor em D2 para que a planilha rode o algoritmo programado (Planilha 41). Esse é mais um exemplo onde é possível afirmar que os alunos do grupo encontram-se no nível de *proceitos*, já que conseguem pensar sobre a matemática envolvida simbolicamente, sem uma dependência em valores específicos do problema. A intenção de generalizar a programação, com possibilidades de adaptação, ilustra claramente todo o trajeto *procedimento - processo - proceito*, já que ele parte da rotina de programação estudada, dão margem a adaptações e conseguem pensar em cada exercício somente a partir da definição de conceitos - no caso a definição recursiva da movimentação financeira estudada.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo 1	Juros	Deposito	Saldo 2
2	1	0	0		0
3	2	0	0		0
4	3	0	0		0
5	4	0	0		0
6	5	0	0		0
7	6	0	0		0
8	7	0	0		0
9	8	0	0		0
10	9	0	0		0
11	10	0	0		0
12	11	0	0		0
13	12	0	0		0
14	13	0	0		0
15	14	0	0		0
16	15	0	0		0
17	16	0	0		0
18	17	0	0		0
19	18	0	0		0

Planilha 41 - Análise das sessões de trabalho – Estrutura básica para os problemas

Por fim, um diálogo entre duas alunas (A e B) de um grupo ilustra o modo como o processo de resolução dos exercícios ocorria. A aluna A pergunta o que colocar no valor do depósito. Sua colega, hesitante, afirma: “80.000?”, sendo imediatamente retrucada pela aluna A, que afirma que “não, isso é o que ele quer”, ao fazer menção ao valor que o proprietário da loja precisa obter depois do 18º depósito. A aluna B, ainda insegura, pergunta se “vai ficar tudo zero?”, ao se referir à lacuna na célula destinada ao valor do depósito. A seguir, a aluna A, demonstrando que estava pensando na programação em si, independente dos valores em questão, afirma que, a partir daí, “é só ir baixando”. Ou seja, percebe-se uma compreensão por parte da aluna A de que uma programação correta é mais importante que os valores em questão, já que a resposta desejada é uma consequência direta de uma programação bem realizada. Assim, percebe-se uma compreensão também da própria movimentação financeira em questão, por parte da aluna B. No entanto, a suposição de valores nesse mesmo grupo ainda encontrava-se aqui em estágio de simples tentativas, sem nenhuma reflexão. Tal fato pode ser observado pela seqüência de valores tentados: R\$ 500, R\$ 850, R\$ 1.111, R\$ 10.000, R\$ 900, R\$ 222, R\$ 999, R\$ 2.200, R\$ 4.400, R\$ 4.000, R\$ 3.999, R\$ 3.900, R\$ 3.902 e R\$ 3.904, que só parece fazer algum sentido após o valor de R\$ 2.200.

Mais um dos exercícios propostos: “Num país sem inflação, uma pessoa efetua 180 depósitos mensais de \$ 800 cada um, num fundo que rende 0,5% ao mês. Qual seu montante no instante após o último depósito? Se 1 mês após o último depósito ela resolve sacar desse fundo uma quantia x por mês, durante 200 meses, qual o valor máximo de x ?”. Para responder a primeira pergunta, praticamente nenhuma dificuldade surgiu, já que perguntas semelhantes a ela foram respondidas anteriormente. No entanto, a segunda pergunta traz uma novidade: agora, é preciso sacar, em vez de depositar. Dessa forma, a programação habitual precisa ser alterada para que seja possível construir uma planilha que ilustre a situação. A solução para o problema não demorou a aparecer. Em um dos grupos, um dos alunos disse que *“aqui tem que zerar”*, se referindo ao saldo ao final dos 200 saques, sendo seguido por seu colega, que disse que *“é só fazer menos o depósito”*, adiantando a programação por vir. Outros grupos seguiram na mesma linha: *“No final, tem que acabar com tudo que ela tem”*, *“Até zerar”* e *“Até o fim dos 200 meses ele tem que ter zerado?”* foram outras manifestações que indicavam que os grupos reconheciam o que resolveria o problema. No entanto, na hora de colocar em prática essa idéia, é possível destacar algumas situações passíveis de análise.

Um dos grupos logo concluiu ser necessário zerar o saldo. Para adaptar a programação, copiaram a última linha que informou o saldo acumulado e transferiram esses valores para a linha 1 (Planilha 42). Aí, um dos alunos sugeriu que agora bastaria baixar até a data 200, sendo logo contrariado por um de seus colegas: *“Não, vai continuar aumentando”*, fazendo referência ao fato de a programação continuar somando \$ 800 por mês. Outro colega sugeriu: *“Acho que tem que ser menos alguma coisa”*. Percebe-se que a discussão do grupo serviu para que os alunos formulassem e corrigissem a programação. Identificam que a programação não pode ser a mesma que a anterior, e identificam a razão para isso. A primeira tentativa de valor a ser sacado foi \$400, sendo que a única alteração foi escrevê-lo, na planilha, como -400: o sinal negativo automaticamente transforma um depósito em saque, sem necessidade de alterar a escrita da programação. No entanto, os juros obtidos no período giravam em torno de \$ 1.100: assim, um saque de \$ 400 fará com que o saldo *amente* ao longo dos meses, já que o ganho com juros será maior do que o valor sacado. Os alunos de imediato estranharam tal fato, mas não conseguiram explicá-lo sem uma intervenção do professor, que solicitou

que explicassem o significado de cada coluna da planilha. O grupo entendeu a razão após definirem juros como sendo “o que ele ganhou no mês”.

	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Juros	Depósito	Saldo 2						
2	0	800	800		180	230701,46	1153,51	800	232654,97
3	4	800	1604		1	232654,97	1163,27	-1842,95	231975,29
4	8,02	800	2412,02		2	231975,29	1159,88	-1842,95	231292,22
5	12,06	800	3224,08		3	231292,22	1156,46	-1842,95	230605,73
6	16,12	800	4040,2		4	230605,73	1153,03	-1842,95	229915,81
7	20,2	800	4860,4		5	229915,81	1149,58	-1842,95	229222,44
8	24,3	800	5684,7		6	229222,44	1146,11	-1842,95	228525,6
9	28,42	800	6513,13		7	228525,6	1142,63	-1842,95	227825,28
10	32,57	800	7345,69		8	227825,28	1139,13	-1842,95	227121,46

Planilha 42 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

O mesmo aconteceu com outros grupos, sendo que poucos perceberam que um saque menor que os juros do período acarretavam em um acréscimo no saldo. Esses grupos usavam o seguinte raciocínio: enquanto o saldo ao final dos 200 saques permanecer positivo, significa que o valor sacado pode aumentar, o que está correto. Em um desses grupos, o professor questionou o que seriam os juros, não sendo prontamente respondido. O grupo só chegou a um consenso após analisar a programação de cada coluna, e, ao observar que a coluna E era programada como $E = B + C + D$. Aí, afirmaram que “é um acréscimo à conta”. Aqui, observa-se o nível de *procedimento*, visto que a preocupação se limitava a executar com correção o próximo passo da rotina de programação. Como aconteceu algo inesperado - sacar dinheiro e mesmo assim o saldo aumentar -, não sabiam explicar a razão. A própria definição de juros dada pelo grupo (um “acréscimo à conta”) só foi dada após analisar a programação $E = B + C + D$. Olhando para tal fórmula, fica evidente que se está trabalhando com “acrécimos à conta”, já que todos os termos estão sendo somados.

Em outro grupo, outra tentativa foi sugerida: um dos alunos afirma que “é só dividir tudo por 200”, já que o saldo acumulado seria consumido em 200 depósitos. Esse raciocínio está equivocado, e a razão do equívoco é explicitada por seu colega em seguida: “Ah, daí tem juros”, o que faz com que se possa sacar mais do que $\frac{\text{SALDO}}{200}$, por causa da incidência dos juros, contribuindo para que o valor sacado não seja efetivamente o valor subtraído do saldo. Para arrematar, o mesmo aluno sugere que “é só colocar depósito negativo”.

Outro motivo para discussão surgiu, em alguns grupos, no momento de definir até que data a movimentação financeira deveria ser analisada, já que o enunciado pede para depositar por 180 meses e sacar por 200. Para a maioria dos grupos, ficou claro que o processo duraria 380 meses, mas alguns analisaram a programação somente até a data 200. Em um desses grupos, um dos alunos afirmou ser preciso baixar até 200. Imediatamente, seu colega o contrariou: “Não, até a linha 381”. Percebendo que seu colega não entendeu a razão, sugeriu substituir o valor “181” em A182 por 1 (Planilha 43). Assim, a planilha contaria até 200 quando chegasse à linha 381, o que encerrou a discussão.

	A	B	C	D	E
175	174	219182,83	1095,91	800	221078,75
176	175	221078,75	1105,39	800	222984,14
177	176	222984,14	1114,92	800	224899,06
178	177	224899,06	1124,5	800	226823,56
179	178	226823,56	1134,12	800	228757,67
180	179	228757,67	1143,79	800	230701,46
181	180	230701,46	1153,51	800	232654,97
182	1	232654,97	1163,27	-1843	231975,24
183	2	231975,24	1159,88	-1843	231292,12
184	3	231292,12	1156,46	-1843	230605,58
185	4	230605,58	1153,03	-1843	229915,61
186	5	229915,61	1149,58	-1843	229222,19
187	6	229222,19	1146,11	-1843	228525,3

Planilha 43 - Análise das sessões de trabalho – Contagem do prazo

Para encerrar a discussão desse exercício, mais um diálogo ocorrido merece destaque. Aqui, envolvendo alunas de um grupo, onde uma delas logo percebeu o que precisaria fazer para alterar a programação, e estava efetivando a alteração sem conversar com suas colegas, sendo retrucada por uma delas: “Por que menos?”, fazendo menção ao valor negativo na coluna dos depósitos. “Porque ele tá tirando”, respondeu, já que a partir da data 181 se tratava de sucessivos saques. Outra colega também ficou com dúvidas: “Por que 900?”, se referindo ao valor utilizado como referência inicial na construção da programação. “Porque eu inventei!”, respondeu à colega, sabendo que o chute inicial é irrelevante, servindo somente para estruturação da planilha.

A seguir, o enunciado de outro exercício: “Um casal pretende custear os estudos universitários de seu filho, estimados em R\$ 1.800,00 por mês, durante 60 meses. Para isso, eles resolvem depositar certa quantia mensalmente em um fundo

com taxa de rendimento de 1,2% ao mês, num total de 48 depósitos. Quanto o casal deve depositar por mês, se o primeiro saque de R\$ 1.800,00 será feito no mês seguinte ao último depósito?”. Aqui, o equívoco mais cometido foi acumular R\$ 108.000 em 48 depósitos, já que $48 * 1.800 = 108.000$ (Planilha 44).

	A	B	C	D	E
40	39	80142,47	961,71	1676,99	82781,16
41	40	82781,16	993,37	1676,99	85451,53
42	41	85451,53	1025,42	1676,99	88153,94
43	42	88153,94	1057,85	1676,99	90888,77
44	43	90888,77	1090,67	1676,99	93656,43
45	44	93656,43	1123,88	1676,99	96457,3
46	45	96457,3	1157,49	1676,99	99291,77
47	46	99291,77	1191,5	1676,99	102160,27
48	47	102160,27	1225,92	1676,99	105063,18
49	48	105063,18	1260,76	1676,99	108000,93

Planilha 44 - Análise das sessões de trabalho – Interpretação equivocada do enunciado

Muitos grupos pensaram assim, e poucos souberam explicar porque tal procedimento não seria o mais vantajoso. Em um dos grupos, um dos alunos sugeriu exatamente isso: *“No final dos 48 depósitos, tem que ter 108.000”*. No entanto, seu colega de grupo retrucou: *“Não, por causa dos juros”*. Essa é exatamente a razão de R\$ 108.000 ser um valor exagerado: os saques de R\$ 1.800 não são integralmente subtraídos do saldo obtido, devido à incidência dos juros. Aos grupos que não percebiam de imediato que o casal não precisava acumular R\$ 108.000, lhes foi sugerido que ampliassem a planilha, calculando o saldo restante após 60 pagamentos de R\$ 1.800 (Planilha 45). Como o saldo final nesse caso é muito maior do que zero, fica evidente que não é necessário acumular tanto dinheiro nos primeiros 48 depósitos.

	A	B	C	D	E
98	49	75543,21	906,52	-1800	74649,73
99	50	74649,73	895,8	-1800	73745,53
100	51	73745,53	884,95	-1800	72830,47
101	52	72830,47	873,97	-1800	71904,44
102	53	71904,44	862,85	-1800	70967,29
103	54	70967,29	851,61	-1800	70018,9
104	55	70018,9	840,23	-1800	69059,13
105	56	69059,13	828,71	-1800	68087,83
106	57	68087,83	817,05	-1800	67104,89
107	58	67104,89	805,26	-1800	66110,15
108	59	66110,15	793,32	-1800	65103,47
109	60	65103,47	781,24	-1800	64084,71

Planilha 45 - Análise das sessões de trabalho – Verificação de possível solução

Mais um exercício: “Um condomínio prevê despesas extras de \$ 120.000 e \$ 160.000 no final de agosto e setembro, respectivamente. Quanto deverá arrecadar e aplicar, num fundo que rende 1,85% ao mês, em maio, junho e julho (valores iguais) para fazer frente a essas despesas?”. Aqui, o principal equívoco foi semelhante ao exercício discutido anteriormente: programaram os 3 primeiros meses, para juntar \$ 280.000. A programação foi feita só até o 3º mês, ignorando as movimentações posteriores (Planilha 46). Ou seja, pensam que o objetivo de pagamento deve ser atingido antes dos pagamentos ocorrerem, e não depois. Dessa forma, ignoram os benefícios proporcionados pela incidência de juros.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo	Juros	Deposito	Saldo final
2	1	0	0	91628	91628
3	2	91628	1695,12	91628	184951,12
4	3	184951,12	3421,6	91628	280000,71

Planilha 46 - Análise das sessões de trabalho – Interpretação equivocada do enunciado

Outro exercício: “Um executivo, prevendo sua aposentadoria, resolve fazer depósitos mensais iguais durante 15 anos, visando retiradas mensais de 1500 dólares por mês durante 20 anos, a partir do mês seguinte ao último depósito. Se a taxa obtida for de 1% ao mês, quanto ele deveria depositar mensalmente?”. Esse exercício tem resolução semelhante a outros já propostos, o que fez com que ele não apresentasse muitas dificuldades aos alunos. Um grupo, em especial, surpreendeu ao elaborar, *antes* de resolver o exercício, uma planilha de estrutura para a programação, sem nenhum valor, mas fazendo referências às células

(Planilha 47). Esse fato se torna ainda mais elogiável se for considerado que o grupo em questão apresentava muitas dificuldades no início do trabalho, e uma planilha estrutural como essa reflete plena compreensão da movimentação financeira em questão e aplicação do método. Reflete, também, um progresso nos níveis de sofisticação do pensamento matemático. Portanto, reflete aprendizagem.

E182 f(x) Σ = =B182+C182+D182						
	A	B	C	D	E	
179	178	0	0	0	0	0
180	179	0	0	0	0	0
181	180	0	0	0	0	0
182	1	0	0	0	0	0
183	2	0	0	0	0	0
184	3	0	0	0	0	0

Planilha 47 - Análise das sessões de trabalho – Estrutura de resolução

Mais um dos exercícios trabalhados: “O dono de uma pequena empresa está analisando a compra de uma máquina para reduzir o custo de mão de obra e o desperdício de material. O preço da máquina é R\$ 25.000, e a economia mensal que ela proporciona é de R\$ 1.950. Se o investimento precisa ser pago em um prazo de um ano, o dono deve comprar a máquina ou não? Em quanto tempo o investimento se paga?”. O principal equívoco surgido tem origem numa interpretação diferente da esperada, muito em função da terminologia utilizada. Foi a primeira vez que a expressão “o investimento se paga” foi utilizada, e é natural que os grupos entendam que a máquina deva ser paga em 12 parcelas, e não que o retorno com o investimento deva vir em 12 meses. Assim, foi muito comum a seguinte resolução: foi construída uma planilha com 12 depósitos mensais de R\$ 1.950 (Planilha 48). Como o saldo acumulado foi R\$ 25.288,59 > R\$ 25.000, o investimento “seria pago” em 12 meses. O equívoco aqui, provavelmente ocasionado pela redação do exercício, é que o saldo gerado pelas economias mensais deve ser maior do que o saldo gerado pelo rendimento de R\$ 25.000 ao longo dos 12 meses, e não simplesmente maior do que R\$ 25.000. A razão para isso está no fato de que se a máquina não for comprada o dinheiro que seria gasto com ela continua sujeito à incidência de juros. Dessa forma, uma possível resolução para o problema seria comparar a evolução do saldo gerado pelas economias mensais e o saldo gerado

pelo dinheiro que seria gasto com a máquina (Planilha 49). A partir do momento em que o primeiro for maior do que o segundo, o investimento passaria a dar retorno.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO1	JUROS	DEPÓSITO	SALDO2
2	1	0	0	1950	1950
3	2	1950	27,3	1950	3927,3
4	3	3927,3	54,98	1950	5932,28
5	4	5932,28	83,05	1950	7965,33
6	5	7965,33	111,51	1950	10026,85
7	6	10026,85	140,38	1950	12117,22
8	7	12117,22	169,64	1950	14236,87
9	8	14236,87	199,32	1950	16386,18
10	9	16386,18	229,41	1950	18565,59
11	10	18565,59	259,92	1950	20775,51
12	11	20775,51	290,86	1950	23016,36
13	12	23016,36	322,23	1950	25288,59

Planilha 48 - Análise das sessões de trabalho – Tentativa de resolução

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	MÊS	SALDO1	JUROS	DEPÓSITO	SALDO2		MÊS	SALDO1	JUROS	DEPÓSITO	SALDO2
2	1	0	0	1950	1950		1	25000	350	0	25350
3	2	1950	27,3	1950	3927,3		2	25350	354,9	0	25704,9
4	3	3927,3	54,98	1950	5932,28		3	25704,9	359,87	0	26064,77
5	4	5932,28	83,05	1950	7965,33		4	26064,77	364,91	0	26429,68
6	5	7965,33	111,51	1950	10026,85		5	26429,68	370,02	0	26799,69
7	6	10026,85	140,38	1950	12117,22		6	26799,69	375,2	0	27174,89
8	7	12117,22	169,64	1950	14236,87		7	27174,89	380,45	0	27555,33
9	8	14236,87	199,32	1950	16386,18		8	27555,33	385,77	0	27941,11
10	9	16386,18	229,41	1950	18565,59		9	27941,11	391,18	0	28332,29
11	10	18565,59	259,92	1950	20775,51		10	28332,29	396,65	0	28728,94
12	11	20775,51	290,86	1950	23016,36		11	28728,94	402,21	0	29131,14
13	12	23016,36	322,23	1950	25288,59		12	29131,14	407,84	0	29538,98
14	13	25288,59	354,04	1950	27592,63		13	29538,98	413,55	0	29952,52
15	14	27592,63	386,3	1950	29928,93		14	29952,52	419,34	0	30371,86
16	15	29928,93	419,01	1950	32297,94		15	30371,86	425,21	0	30797,07

Planilha 49 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Outra solução para o mesmo exercício foi proposta por alguns grupos, e é diferente da apresentada acima. É importante destacar que a resolução anterior foi obtida a partir da discussão dos grupos com o professor, visto que a primeira tentativa dos grupos foi, em sua maioria, analisar só a evolução do saldo gerado pela economia mensal, como na Planilha 48. No entanto, essa segunda solução não apresenta nenhum tipo de intervenção por parte do professor. Portanto, ilustra com clareza o quanto a capacidade de utilização do método de trabalho está bem desenvolvida. Ainda, mostra como esses alunos conseguem adaptar a programação estudada de modo correto e eficiente. Com isso, a partir de *procedimentos* e *processos*, conseguem pensar matematicamente com correção e flexibilidade a

ponto de desenvolver um método diferente do discutido com o professor, mas igualmente eficiente. Ou seja, conseguem fazer matemática, e ilustram o nível de *proceito*.

Tal solução tem como ponto de partida assumir como saldo inicial o valor de R\$ 25.000. Assim, admitindo que a máquina não foi comprada, são *sacados* R\$ 1.950 mensais, visto que a economia mensal não está sendo obtida (Planilha 50). Dessa forma, enquanto o saldo for positivo, significa que a opção por não comprar a máquina obtém vantagem sobre comprá-la. De modo análogo, a partir do momento em que o saldo for negativo, percebe-se que o dono da empresa não possui mais recursos para compensar o gasto extra de R\$ 1.950, que teria sido evitado com a compra da máquina.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo Inicial	Juros	Economia	Saldo Final
2	1	-25000	0	1950	-23050
3	2	-23050	-322,7	1950	-21422,7
4	3	-21422,7	-299,92	1950	-19772,62
5	4	-19772,62	-276,82	1950	-18099,43
6	5	-18099,43	-253,39	1950	-16402,83
7	6	-16402,83	-229,64	1950	-14682,47
8	7	-14682,47	-205,55	1950	-12938,02
9	8	-12938,02	-181,13	1950	-11169,15
10	9	-11169,15	-156,37	1950	-9375,52
11	10	-9375,52	-131,26	1950	-7556,78
12	11	-7556,78	-105,79	1950	-5712,57
13	12	-5712,57	-79,98	1950	-3842,55
14	13	-3842,55	-53,8	1950	-1946,34
15	14	-1946,34	-27,25	1950	-23,59
16	15	-23,59	-0,33	1950	1926,08
17					
18	Investimento pago em 15 meses.				

Planilha 50 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Para encerrar a análise dos encontros relativos às seqüências de depósitos, fica evidente uma mudança de postura por parte dos alunos. O ritmo de trabalho é completamente diferente do usual em sala de aula, e a produção de cada um é muito mais intensa. Para ilustrar: em um dia específico, seria preciso liberá-los mais cedo do que às 13h usuais. Por volta de 12h30, quando foram comunicados que estariam dispensados, dois grupos fizeram a seguinte solicitação: “*E quem quiser continuar trabalhando, pode ficar?*”.

6.3 - Sessões de Trabalho - Pagamento de Dívidas

Após diversos encontros, a incidência de equívocos nessa última parte do trabalho foi muito menor do que nas primeiras partes, o que pode ser justificado pelo fato de os estudantes já possuírem um bom domínio da programação, o que permite que eventuais adaptações – por exemplo, o estudo do pagamento de dívidas – sejam feitas sem maiores dificuldades. Dessa forma, pode-se constatar que o nível de *processo* já tinha sido atingido por todos, com algumas exceções. No entanto, algumas observações interessantes puderam ser feitas, focando principalmente na compreensão do enunciado de alguns problemas.

Eis o enunciado do primeiro exercício proposto: “Na venda de uma geladeira, uma loja anuncia o pagamento em 6 prestações mensais de R\$ 1.250 cada uma, sem entrada. Qual o preço à vista, se a loja cobra no financiamento juros à taxa de 3,2% ao mês?”. Como esse foi o primeiro exercício discutido, é natural que alguma insegurança na sua resolução surgisse. Ela apareceu especialmente no que diz respeito a determinar em qual célula seria preciso “encontrar” a resposta, após a programação. Tal fato ocorreu com diversos grupos, mas não se repetiu ao longo dos demais exercícios. Aqui, uma tentativa de resolução apareceu pela primeira vez, e iria se repetir mais vezes: se a geladeira, no caso, está sendo vendida por 6 parcelas de R\$ 1.250, então seu preço à vista seria $6 \cdot 1250 = \text{R\$ } 7.500$. A todos os grupos que fizeram tal suposição, foi solicitado que construísse a planilha correspondente e julgasse se essa tentativa seria válida ou não. Como existe incidência de juros, o valor devido ao final dos seis pagamentos era maior que zero (Planilha 51). Para obter o resultado correto, existiriam duas alternativas: o valor de cada parcela deveria ser maior, ou o preço à vista deveria ser menor. Como as parcelas são fixas e definidas no enunciado, só é possível que o preço à vista esteja incorreto, devendo ser *menor* que 6 vezes R\$ 1.250.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Valor 1	Juros	Parcela	Valor 2
2	0	7500	0	0	7500
3	1	7500	240	1250	6490
4	2	6490	207,68	1250	5447,68
5	3	5447,68	174,33	1250	4372,01
6	4	4372,01	139,9	1250	3261,91
7	5	3261,91	104,38	1250	2116,29
8	6	2116,29	67,72	1250	934,01

Planilha 51 - Análise das sessões de trabalho – Juros ignorados

A seguir, foi proposto este exercício: “Um automóvel 0 km é vendido à vista por R\$ 32.000 ou a prazo com 20% de entrada mais 24 prestações mensais iguais. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros do financiamento for de 1,8% ao mês?”.

Analisando a resolução desse problema, pode se observar que alguns grupos já possuem um domínio do software, a ponto de prescindirem de qualquer outra ferramenta – por exemplo, de uma calculadora. Para o cálculo da entrada, em vez de efetuar a operação correspondente manualmente, com uma calculadora ou mesmo mentalmente, um grupo optou por programar a célula correspondente à entrada como $D2 = 0,2*B2$. Ou seja, definindo o valor da entrada como 20% de qualquer valor que seja digitado em B2 (Planilha 52).

D2		f(x) Σ = =0,2*B2			
	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	32000	0	6400	25600
3	1	25600	460,8	1323,03	24737,77
4	2	24737,77	445,28	1323,03	23860,02
5	3	23860,02	429,48	1323,03	22966,47
6	4	22966,47	413,4	1323,03	22056,84
7	5	22056,84	397,02	1323,03	21130,83
8	6	21130,83	380,35	1323,03	20188,16
9	7	20188,16	363,39	1323,03	19228,52
10	8	19228,52	346,11	1323,03	18251,6
11	9	18251,6	328,53	1323,03	17257,1
12	10	17257,1	310,63	1323,03	16244,7
13	11	16244,7	292,4	1323,03	15214,07
14	12	15214,07	273,85	1323,03	14164,9
15	13	14164,9	254,97	1323,03	13096,84
16	14	13096,84	235,74	1323,03	12009,55
17	15	12009,55	216,17	1323,03	10902,69
18	16	10902,69	196,25	1323,03	9775,91
19	17	9775,91	175,97	1323,03	8628,85
20	18	8628,85	155,32	1323,03	7461,14
21	19	7461,14	134,3	1323,03	6272,41
22	20	6272,41	112,9	1323,03	5062,28
23	21	5062,28	91,12	1323,03	3830,37
24	22	3830,37	68,95	1323,03	2576,29
25	23	2576,29	46,37	1323,03	1299,64
26	24	1299,64	23,39	1323,03	0

Planilha 52 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Outro grupo preferiu calcular a entrada separadamente e já descontá-la do valor inicial antes mesmo de iniciar a programação. Dessa forma, a parcela paga na

data zero valeria zero, mas o valor inicial seria R\$ 25.600, e não R\$ 32.000 (Planilha 53). Tal grupo repetiu esse procedimento ao longo dos demais exercícios.

	A	B	C	D	E
1	MES	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	25600	0	0	25600
3	1	25600	460,8	1323,03	24737,77
4	2	24737,77	445,28	1323,03	23860,02
5	3	23860,02	429,48	1323,03	22966,47
6	4	22966,47	413,4	1323,03	22056,84
7	5	22056,84	397,02	1323,03	21130,83
8	6	21130,83	380,35	1323,03	20188,16
9	7	20188,16	363,39	1323,03	19228,52
10	8	19228,52	346,11	1323,03	18251,6
11	9	18251,6	328,53	1323,03	17257,1
12	10	17257,1	310,63	1323,03	16244,7
13	11	16244,7	292,4	1323,03	15214,07
14	12	15214,07	273,85	1323,03	14164,9
15	13	14164,9	254,97	1323,03	13096,84
16	14	13096,84	235,74	1323,03	12009,55
17	15	12009,55	216,17	1323,03	10902,69
18	16	10902,69	196,25	1323,03	9775,91
19	17	9775,91	175,97	1323,03	8628,85
20	18	8628,85	155,32	1323,03	7461,14
21	19	7461,14	134,3	1323,03	6272,41
22	20	6272,41	112,9	1323,03	5062,28
23	21	5062,28	91,12	1323,03	3830,37
24	22	3830,37	68,95	1323,03	2576,29
25	23	2576,29	46,37	1323,03	1299,64
26	24	1299,64	23,39	1323,03	0

Planilha 53 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Ainda no mesmo exercício, o principal equívoco consistiu em não descontar o valor da entrada do saldo inicial, e tal equívoco foi cometido de duas maneiras. Alguns grupos simplesmente ignoraram a existência de entrada, e resolveram o problema considerando 24 pagamentos iguais e um valor à vista de R\$ 32.000 (Planilha 54). No entanto, a programação efetuada estava correta, o que faz com que tal equívoco possa ser interpretado como uma falta de naturalidade com os termos e particularidades dessa movimentação financeira específica.

Outro grupo calculou o valor da entrada e inseriu na sua célula correspondente. No entanto, ao programar o valor devido ao final da data zero, esqueceram de descontar a entrada (Planilha 55). Tal equívoco pode ser constatado ao analisar a célula E2 definida como $E2 = 32000$. Dessa forma, o valor obtido foi exatamente o mesmo da resolução anterior.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	32000	0	0	32000
3	1	32000	576	1653,79	30922,21
4	2	30922,21	556,6	1653,79	29825,03
5	3	29825,03	536,85	1653,79	28708,09
6	4	28708,09	516,75	1653,79	27571,05
7	5	27571,05	496,28	1653,79	26413,54
8	6	26413,54	475,44	1653,79	25235,2
9	7	25235,2	454,23	1653,79	24035,65
10	8	24035,65	432,64	1653,79	22814,5
11	9	22814,5	410,66	1653,79	21571,37
12	10	21571,37	388,28	1653,79	20305,87
13	11	20305,87	365,51	1653,79	19017,59
14	12	19017,59	342,32	1653,79	17706,12
15	13	17706,12	318,71	1653,79	16371,04
16	14	16371,04	294,68	1653,79	15011,94
17	15	15011,94	270,21	1653,79	13628,36
18	16	13628,36	245,31	1653,79	12219,89
19	17	12219,89	219,96	1653,79	10786,06
20	18	10786,06	194,15	1653,79	9326,42
21	19	9326,42	167,88	1653,79	7840,51
22	20	7840,51	141,13	1653,79	6327,85
23	21	6327,85	113,9	1653,79	4787,97
24	22	4787,97	86,18	1653,79	3220,37
25	23	3220,37	57,97	1653,79	1624,54
26	24	1624,54	29,24	1653,79	0

Planilha 54 - Análise das sessões de trabalho – Confusão com terminologia

E2 f(x) Σ = 32000					
	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	32000	0	6400	32000
3	1	32000	576	1653,79	30922,21
4	2	30922,21	556,6	1653,79	29825,03
5	3	29825,03	536,85	1653,79	28708,09
6	4	28708,09	516,75	1653,79	27571,05
7	5	27571,05	496,28	1653,79	26413,54
8	6	26413,54	475,44	1653,79	25235,2
9	7	25235,2	454,23	1653,79	24035,65
10	8	24035,65	432,64	1653,79	22814,5
11	9	22814,5	410,66	1653,79	21571,37
12	10	21571,37	388,28	1653,79	20305,87
13	11	20305,87	365,51	1653,79	19017,59
14	12	19017,59	342,32	1653,79	17706,12
15	13	17706,12	318,71	1653,79	16371,04
16	14	16371,04	294,68	1653,79	15011,94
17	15	15011,94	270,21	1653,79	13628,36
18	16	13628,36	245,31	1653,79	12219,89
19	17	12219,89	219,96	1653,79	10786,06
20	18	10786,06	194,15	1653,79	9326,42
21	19	9326,42	167,88	1653,79	7840,51
22	20	7840,51	141,13	1653,79	6327,85
23	21	6327,85	113,9	1653,79	4787,97
24	22	4787,97	86,18	1653,79	3220,37
25	23	3220,37	57,97	1653,79	1624,54
26	24	1624,54	29,24	1653,79	0

Planilha 55 - Análise das sessões de trabalho – Entrada desconsiderada

Por fim, mais duas resoluções podem ser destacadas. Na primeira, o grupo sugeriu que a parcela correspondente a 24 pagamentos e uma dívida de R\$ 25.600 seria simplesmente obtida calculando $\frac{25.600}{24}$ (Planilha 56). Mais uma vez, foi sugerido ao grupo que construísse tal movimentação e analisasse a mesma, para então perceber que a incidência de juros obrigaria o valor da parcela a ser superior àquele suposto.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	32000	0	6400	25600
3	1	25600	460,8	1066,67	24994,13
4	2	24994,13	449,89	1066,67	24377,36
5	3	24377,36	438,79	1066,67	23749,49
6	4	23749,49	427,49	1066,67	23110,31
7	5	23110,31	415,99	1066,67	22459,63
8	6	22459,63	404,27	1066,67	21797,24
9	7	21797,24	392,35	1066,67	21122,92
10	8	21122,92	380,21	1066,67	20436,47
11	9	20436,47	367,86	1066,67	19737,66
12	10	19737,66	355,28	1066,67	19026,27
13	11	19026,27	342,47	1066,67	18302,07
14	12	18302,07	329,44	1066,67	17564,84
15	13	17564,84	316,17	1066,67	16814,34
16	14	16814,34	302,66	1066,67	16050,34
17	15	16050,34	288,91	1066,67	15272,58
18	16	15272,58	274,91	1066,67	14480,81
19	17	14480,81	260,65	1066,67	13674,8
20	18	13674,8	246,15	1066,67	12854,28
21	19	12854,28	231,38	1066,67	12018,99
22	20	12018,99	216,34	1066,67	11168,67
23	21	11168,67	201,04	1066,67	10303,04
24	22	10303,04	185,45	1066,67	9421,83
25	23	9421,83	169,59	1066,67	8524,75
26	24	8524,75	153,45	1066,67	7611,53

Planilha 56 - Análise das sessões de trabalho – Juros ignorados

Na segunda, um grupo se propôs a acumular R\$ 32.000 após 24 depósitos, usando a lógica de programação estudada anteriormente (Planilha 57). A estratégia para que percebessem o equívoco foi a mesma utilizada na maioria dos casos: foi solicitado ao grupo, então, que construísse a planilha com o valor da parcela obtido. Como o saldo ao final dos 24 pagamentos era muito distante de zero, o valor da parcela necessariamente estaria errado (Planilha 58).

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1077,79	1077,79
4	2	1077,79	19,4	1077,79	2174,97
5	3	2174,97	39,15	1077,79	3291,91
6	4	3291,91	59,25	1077,79	4428,95
7	5	4428,95	79,72	1077,79	5586,46
8	6	5586,46	100,56	1077,79	6764,8
9	7	6764,8	121,77	1077,79	7964,35
10	8	7964,35	143,36	1077,79	9185,5
11	9	9185,5	165,34	1077,79	10428,63
12	10	10428,63	187,72	1077,79	11694,13
13	11	11694,13	210,49	1077,79	12982,41
14	12	12982,41	233,68	1077,79	14293,88
15	13	14293,88	257,29	1077,79	15628,96
16	14	15628,96	281,32	1077,79	16988,06
17	15	16988,06	305,79	1077,79	18371,64
18	16	18371,64	330,69	1077,79	19780,11
19	17	19780,11	356,04	1077,79	21213,94
20	18	21213,94	381,85	1077,79	22673,58
21	19	22673,58	408,12	1077,79	24159,49
22	20	24159,49	434,87	1077,79	25672,15
23	21	25672,15	462,1	1077,79	27212,03
24	22	27212,03	489,82	1077,79	28779,63
25	23	28779,63	518,03	1077,79	30375,46
26	24	30375,46	546,76	1077,79	32000

Planilha 57 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	0	0	0	0
3	1	32000	576	1077,79	31498,21
4	2	31498,21	566,97	1077,79	30987,39
5	3	30987,39	557,77	1077,79	30467,38
6	4	30467,38	548,41	1077,79	29938,01
7	5	29938,01	538,88	1077,79	29399,1
8	6	29399,1	529,18	1077,79	28850,5
9	7	28850,5	519,31	1077,79	28292,02
10	8	28292,02	509,26	1077,79	27723,49
11	9	27723,49	499,02	1077,79	27144,73
12	10	27144,73	488,61	1077,79	26555,55
13	11	26555,55	478	1077,79	25955,76
14	12	25955,76	467,2	1077,79	25345,18
15	13	25345,18	456,21	1077,79	24723,6
16	14	24723,6	445,02	1077,79	24090,84
17	15	24090,84	433,64	1077,79	23446,69
18	16	23446,69	422,04	1077,79	22790,95
19	17	22790,95	410,24	1077,79	22123,4
20	18	22123,4	398,22	1077,79	21443,83
21	19	21443,83	385,99	1077,79	20752,03
22	20	20752,03	373,54	1077,79	20047,78
23	21	20047,78	360,86	1077,79	19330,86
24	22	19330,86	347,96	1077,79	18601,02
25	23	18601,02	334,82	1077,79	17858,06
26	24	17858,06	321,44	1077,79	17101,71

Planilha 58 - Análise das sessões de trabalho – Verificação da solução

Outro dos exercícios propostos, com o seguinte enunciado: “Uma pessoa pretende passar 24 meses na Europa fazendo um curso de pós-graduação. Ela estima que precisará ter uma renda mensal de R\$ 4.500, começando com sua chegada à Europa. Para atingir seu objetivo, ela precisará aplicar um valor X, à taxa de 1,6% ao mês, 60 meses antes do 1º saque de R\$ 4.500. Qual o valor de X?”.

Aqui, o problema mais significativo ocorrido foi o fato de alguns grupos ignorarem que o valor depositado renderia juros durante 60 meses, antes do primeiro saque (Planilha 59). Dessa forma, o valor necessário se torna significativamente maior. No entanto, a programação efetuada está correta.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo 1	Juros	Parcela	Saldo 2
2	0	0	0	89098,61	89098,61
3	1	89098,61	1425,58	-4500	86024,18
4	2	86024,18	1376,39	-4500	82900,57
5	3	82900,57	1326,41	-4500	79726,98
6	4	79726,98	1275,63	-4500	76502,61
7	5	76502,61	1224,04	-4500	73226,65
8	6	73226,65	1171,63	-4500	69898,28
9	7	69898,28	1118,37	-4500	66516,65
10	8	66516,65	1064,27	-4500	63080,92
11	9	63080,92	1009,29	-4500	59590,21
12	10	59590,21	953,44	-4500	56043,66
13	11	56043,66	896,7	-4500	52440,35
14	12	52440,35	839,05	-4500	48779,4
15	13	48779,4	780,47	-4500	45059,87
16	14	45059,87	720,96	-4500	41280,83
17	15	41280,83	660,49	-4500	37441,32
18	16	37441,32	599,06	-4500	33540,38
19	17	33540,38	536,65	-4500	29577,03
20	18	29577,03	473,23	-4500	25550,26
21	19	25550,26	408,8	-4500	21459,07
22	20	21459,07	343,35	-4500	17302,41
23	21	17302,41	276,84	-4500	13079,25
24	22	13079,25	209,27	-4500	8788,52
25	23	8788,52	140,62	-4500	4429,13
26	24	4429,13	70,87	-4500	0

Planilha 59 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

Outro exercício trabalhado: “Um microcomputador é vendido à vista por R\$ 3.000 ou a prazo em 3 prestações mensais iguais, considerando-se a primeira prestação como entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros do financiamento for de 2,6% ao mês?”.

Aqui, o principal problema foi a inserção da entrada na programação. Diferente do exercício anterior, a entrada não tinha um valor definido. Assim, seria

necessário incorporá-la na programação, e não somente subtraí-la (o que poderia ser feito, antes, inclusive sem programar). Alguns grupos simplesmente ignoraram a existência da entrada, e construíram a planilha com 3 prestações, sendo a primeira um mês após a compra (Planilha 60).

	A	B	C	D	E
1	M	V1	J	P	V2
2	0	3000	0	0	3000
3	1	3000	78	1052,44	2025,56
4	2	2025,56	52,66	1052,44	1025,77
5	3	1025,77	26,67	1052,44	0

Planilha 60 - Análise das sessões de trabalho – Entrada desconsiderada

Outro equívoco, cometido por pelo menos dois grupos, foi considerar a existência da entrada, mas não inseri-la na programação (Planilha 61). Ou seja, a célula D2, correspondente à parcela na data zero, está preenchida, mas esse valor não está sendo descontado de B2 para que seja calculada a dívida ao final da movimentação. Um dos grupos imediatamente percebeu que o valor obtido estava incorreto pelo fato de este valor da parcela corresponder a mais da metade do valor à vista. Um dos alunos afirmou ser *“estranho o pagamento ser mais da metade da dívida”*. Tal fato seria possível considerando uma taxa de juros muito grande (no caso, aproximadamente 61,8% ao mês).

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	3000	0	1558,75	3000
3	1	3000	78	1558,75	1519,25
4	2	1519,25	39,5	1558,75	0

Planilha 61 - Análise das sessões de trabalho – Entrada fora da programação

Outro erro foi ignorar a afirmação de que uma das parcelas contaria como entrada. Assim, um dos grupos construiu a programação descontando da dívida inicial a entrada e mais três pagamentos (Planilha 62). Destaca-se que, apesar do erro de interpretação, a programação apresentada estava correta.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	3000	0	779,12	2220,88
3	1	2220,88	57,74	779,12	1499,51
4	2	1499,51	38,99	779,12	759,37
5	3	759,37	19,74	779,12	0

Planilha 62 - Análise das sessões de trabalho – Interpretação equivocada do enunciado

Por fim, um erro comum: um dos grupos supôs que um produto que custaria à vista R\$ 3.000, se fosse pago em três parcelas iguais, o valor de cada parcela seria R\$ 1.000 (Planilha 63). Mais uma vez, foi solicitado ao grupo que elaborasse a planilha correspondente a tal movimentação, e só assim eles concluíram que a incidência de juros eleva o valor a ser pago mensalmente.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo 1	Juros	Pagamento	Saldo 2
2	0	3000	0	1000	2000
3	1	2000	52	1000	1052
4	2	1052	27,35	1000	79,35

Planilha 63 - Análise das sessões de trabalho – Juros ignorados

Nesse exercício foi possível perceber o quanto os termos correspondentes, bem como a lógica da programação e do método utilizado estavam devidamente assimilados pelos alunos. Durante a elaboração da planilha que resolve satisfatoriamente o problema (Planilha 64), alguns diálogos foram captados, sempre entre os membros dos grupos. Após programar as primeiras linhas, e imediatamente antes de estender a programação para as demais células, um dos alunos informa o outro que *“são 3 meses, mas eu puxo só até o mês 2”*. Aqui, percebe-se que a noção de mês, na verdade, está associada ao período de cada movimentação no valor da dívida, e não simplesmente um período de 30 dias (para o mês comercial). Quando o aluno menciona que são 3 meses, está querendo dizer que a movimentação financeira se dá em 3 etapas: o momento da compra e mais dois pagamentos separados por um mês. Tal fato é realçado quando ele afirma a necessidade de *“puxar até o mês 2”*, já que os pagamentos se estenderão por mais dois meses após a compra. Outro aluno de outro grupo, após montar a estrutura da programação corretamente, aponta para a célula E4 e afirma que *“tem que dar zero aqui então”*. Tal célula corresponde ao final do mês do último pagamento, onde de fato a dívida deve ser zerada. Ainda, um aluno discutiu com seu colega durante a

programação. Em dúvida do que fazer, questiona ao colega: “E na parcela?”. Imediatamente seu colega responde: “Põe qualquer valor”, fazendo menção ao fato de que mais importante do que “acertar” os valores, em um primeiro momento, é programar corretamente. Com uma programação correta, é possível variar os valores manualmente até o objetivo ser atingido, ou simplesmente aplicar a ferramenta “Atingir Meta”.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	3000	0	1025,77	1974,23
3	1	1974,23	51,33	1025,77	999,78
4	2	999,78	25,99	1025,77	0

Planilha 64 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

A seguir, foi proposto o seguinte exercício: “Uma pessoa recebeu um financiamento de R\$ 50.000 para a compra de uma casa, sendo adotado o sistema Price à taxa de 1,5% ao mês, para pagamento em 180 meses. Quanto deve no 64º mês?”.

Duas resoluções merecem destaque. É preciso observar que, para descobrir a dívida restante no 64º mês, é preciso conhecer o valor mensal pago. Para isso, um dos grupos (que ainda não tinha cometido tal equívoco) simplesmente dividiu R\$ 50.000 pelos 180 pagamentos, obtendo como valor da parcela aproximadamente R\$ 277,78 (Planilha 65). O grupo convenceu-se de que tal abordagem não seria bem sucedida quando colocaram em prática sua idéia, e viram que o saldo devedor não era zerado após esses 180 pagamentos. Pelo contrário, a dívida inclusive aumentaria nesse período, visto que o valor pago mensalmente seria inferior aos juros de cada período.

Outro grupo interpretou o enunciado de modo diferente. Em vez de simplesmente construir a planilha correspondente, zerando a dívida após 180 pagamentos, e, a partir daí, simplesmente observar o valor devido no mês em questão, o grupo entendeu que a dívida precisaria ser paga, integralmente, em 64 prestações (Planilha 66). A seu favor, conta que a programação foi efetuada corretamente, apesar da interpretação equivocada.

D3 f(x) Σ = =B2/180					
	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	50.000,00	0,00	0,00	50.000,00
3	1	50.000,00	750,00	277,78	50.472,22
4	2	50.472,22	757,08	277,78	50.951,53
5	3	50.951,53	764,27	277,78	51.438,02
6	4	51.438,02	771,57	277,78	51.931,82
7	5	51.931,82	778,98	277,78	52.433,01
8	6	52.433,01	786,50	277,78	52.941,73
171	169	402.535,35	6.038,03	277,78	408.295,60
172	170	408.295,60	6.124,43	277,78	414.142,26
173	171	414.142,26	6.212,13	277,78	420.076,61
174	172	420.076,61	6.301,15	277,78	426.099,99
175	173	426.099,99	6.391,50	277,78	432.213,71
176	174	432.213,71	6.483,21	277,78	438.419,14
177	175	438.419,14	6.576,29	277,78	444.717,64
178	176	444.717,64	6.670,76	277,78	451.110,63
179	177	451.110,63	6.766,66	277,78	457.599,51
180	178	457.599,51	6.863,99	277,78	464.185,73
181	179	464.185,73	6.962,79	277,78	470.870,74
182	180	470.870,74	7.063,06	277,78	477.656,02

Planilha 65 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

	A	B	C	D	E
1	M	V1	J	P	V2
2	0	50.000,00	0,00	0,00	50.000,00
3	1	50.000,00	750,00	1.220,77	49.529,23
4	2	49.529,23	742,94	1.220,77	49.051,40
5	3	49.051,40	735,77	1.220,77	48.566,41
6	4	48.566,41	728,50	1.220,77	48.074,14
7	5	48.074,14	721,11	1.220,77	47.574,48
8	6	47.574,48	713,62	1.220,77	47.067,33
58	56	10.206,24	153,09	1.220,77	9.138,57
59	57	9.138,57	137,08	1.220,77	8.054,88
60	58	8.054,88	120,82	1.220,77	6.954,94
61	59	6.954,94	104,32	1.220,77	5.838,50
62	60	5.838,50	87,58	1.220,77	4.705,31
63	61	4.705,31	70,58	1.220,77	3.555,12
64	62	3.555,12	53,33	1.220,77	2.387,68
65	63	2.387,68	35,82	1.220,77	1.202,73
66	64	1.202,73	18,04	1.220,77	0,00

Planilha 66 - Análise das sessões de trabalho – Interpretação equivocada do enunciado

A seguir, um exercício com a mesma lógica do anterior: “Uma pessoa comprou um carro, financiando R\$ 60.000 para o pagamento em 24 prestações iguais e um juro de 3% ao mês. Após pagar 12 prestações, resolveu liquidar a dívida. Pergunta-se: quanto ela pagou para liquidar a dívida?”.

Como a programação que resolveria o problema é idêntica à anterior, os problemas que surgiram foram os mesmos, porém em turmas diferentes. Destacam-se aqui duas resoluções equivocadas, cujos comentários são os mesmos daqueles já feitos. Um grupo entendeu que liquidar a dívida após 12 pagamentos equivaleria a liquidar a dívida em 12 pagamentos (Planilha 67), o que está equivocado. No primeiro caso, é preciso calcular a parcela que sendo paga 24 vezes zera o saldo devedor; no segundo, a parcela é calculada pressupondo 12 pagamentos.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PGTO	SALDO 2
2	0	60000	0	0	60000
3	1	60000	1800	6027,73	55772,27
4	2	55772,27	1673,17	6027,73	51417,72
5	3	51417,72	1542,53	6027,73	46932,52
6	4	46932,52	1407,98	6027,73	42312,78
7	5	42312,78	1269,38	6027,73	37554,43
8	6	37554,43	1126,63	6027,73	32653,34
9	7	32653,34	979,6	6027,73	27605,22
10	8	27605,22	828,16	6027,73	22405,65
11	9	22405,65	672,17	6027,73	17050,09
12	10	17050,09	511,5	6027,73	11533,87
13	11	11533,87	346,02	6027,73	5852,16
14	12	5852,16	175,56	6027,73	0

Planilha 67 - Análise das sessões de trabalho – Interpretação equivocada do enunciado

Outro grupo admitiu como parcela correta a divisão do valor à vista pelo número de pagamentos (Planilha 68). A estratégia utilizada para confrontá-los foi a habitual. É importante ressaltar que a afirmação de que a repetição dos equívocos indicaria uma não compreensão é precipitada, visto que os grupos que cometeram esses erros eram diferentes. Ainda, e mais determinante, alguns grupos não têm por hábito seguir a ordem proposta dos exercícios, e definem sua própria ordem resolvendo, em um primeiro momento, os exercícios que mais teriam chamado sua atenção.

D3		f(x) Σ = =60000/24			
	A	B	C	D	E
1	MES	Saldo	Juros	Parcela	Saldo
2	0	60000	0	0	60000
3	1	60000	1800	2500	59300
4	2	59300	1779	2500	58579
5	3	58579	1757,37	2500	57836,37
6	4	57836,37	1735,09	2500	57071,46
7	5	57071,46	1712,14	2500	56283,6
8	6	56283,6	1688,51	2500	55472,11
9	7	55472,11	1664,16	2500	54636,28
10	8	54636,28	1639,09	2500	53775,36
11	9	53775,36	1613,26	2500	52888,63
12	10	52888,63	1586,66	2500	51975,28
13	11	51975,28	1559,26	2500	51034,54
14	12	51034,54	1531,04	2500	50065,58
15	13	50065,58	1501,97	2500	49067,55
16	14	49067,55	1472,03	2500	48039,57
17	15	48039,57	1441,19	2500	46980,76
18	16	46980,76	1409,42	2500	45890,18
19	17	45890,18	1376,71	2500	44766,89
20	18	44766,89	1343,01	2500	43609,9
21	19	43609,9	1308,3	2500	42418,19
22	20	42418,19	1272,55	2500	41190,74
23	21	41190,74	1235,72	2500	39926,46
24	22	39926,46	1197,79	2500	38624,25
25	23	38624,25	1158,73	2500	37282,98
26	24	37282,98	1118,49	2500	35901,47

Planilha 68 - Análise das sessões de trabalho – Juros ignorados

Evidências que indicam a apropriação da programação por parte dos estudantes surgiam ao longo de todos os encontros. A mais significativa foi dada por um grupo que decidiu construir planilhas modelos para os exercícios (Planilha 69). É claro que essa estrutura muitas vezes precisava ser modificada, dada as particularidades de cada exercício, mas o fato de eles se proporem – e conseguirem – generalizar indica uma compreensão não do método, não da resolução dos exercícios, mas sim da *movimentação financeira* estudada. Ou seja, o caráter recursivo de cada movimentação estava assimilado. Em termos de desenvolvimento cognitivo, constata-se que o nível de *proceito* foi atingido.

E2					
f(x) Σ = =B2+C2-D2					
	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PGTO	SALDO 2
2	0				0
3	1	0			0
4	2	0		0	0
5	3	0		0	0
6	4	0		0	0
7	5	0		0	0
8	6	0		0	0
9	7	0		0	0
10	8	0		0	0
11	9	0		0	0
12	10	0		0	0

Planilha 69 - Análise das sessões de trabalho – Estrutura de resolução

Mais duas evidências merecem destaque na resolução do seguinte exercício: “Um aparelho de som é vendido por R\$ 3.000 à vista, ou com uma entrada e mais três parcelas mensais de R\$ 800 cada uma. Se a loja trabalha com uma taxa de juros de 3,5% ao mês, qual o valor da entrada?”.

Um grupo, ao elaborar a programação, esqueceu de descontar a entrada da dívida inicial: ao programar a célula E2 a definiram simplesmente como sendo igual a B2 (Planilha 70). As demais células foram preenchidas corretamente. Como o exercício pedia para calcular o valor da entrada, as alunas do grupo começaram a mudar o valor da célula D2, espaço correspondente justamente à entrada. No entanto, o valor da dívida ao final dos três pagamentos, na célula E5, continuava inalterado. Imediatamente associaram a não variação da dívida quando variada a entrada com o fato de terem esquecido algo na programação. Ao revisar as primeiras células (já que as demais foram estendidas delas), encontraram o erro, o corrigiram e resolveram satisfatoriamente o problema (Planilha 71). Essa passagem ilustra uma apropriação da programação: as alunas logo constataram que ela não estava funcionando, e associaram o não funcionamento com um problema na programação – a essa altura do trabalho, esse tipo de equívoco só ocorria devido à simples descuidos.

E2					
f(x) Σ = =B2					
	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	3000	0	1000	3000
3	1	3000	105	800	2305
4	2	2305	80,68	800	1585,68
5	3	1585,68	55,5	800	841,17

Planilha 70 - Análise das sessões de trabalho – Entrada fora da programação

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	3000	0	758,69	2241,31
3	1	2241,31	78,45	800	1519,76
4	2	1519,76	53,19	800	772,95
5	3	772,95	27,05	800	0

Planilha 71 - Análise das sessões de trabalho – Problema corrigido

Em outro grupo foi registrado o seguinte diálogo: um dos membros, após ler o enunciado e montar a base da programação, aponta para a célula correspondente à entrada e afirma, convicto: “*Vamos chutar*”, já que o valor da entrada era exatamente o que estava em questão; sua colega, no entanto, não se mostrou tão segura, e perguntou: “*Não tem que programar?*”, fazendo alusão ao fato de que a maioria das células ainda não tinha sido preenchida; seu colega imediatamente retrucou: “*Primeiro chuta, depois programa*”. Sua colega concordou, o que leva a crer que o valor inicial da entrada, para eles, serviria apenas como *referência* para a programação. Ou seja, o importante não são os valores em si: uma programação correta é o que basta para aplicar a recursão também com correção. Ilustra também a transição do nível de *processo* para o de *proceito*, baseado na capacidade de generalização e abstração.

Um exercício em especial causou bastante dificuldade, com o seguinte enunciado: “Uma pessoa pretende vender seu terreno por R\$ 50.000, à vista. Entretanto, em face das dificuldades de venda à vista, está disposto a fazer o seguinte plano de pagamento: entrada de R\$ 10.000; 3 meses após a entrada, mais R\$ 10.000; duas parcelas, vencíveis seis meses e um ano depois da entrada, sendo a segunda delas 50% superior à primeira. Admitindo-se uma taxa de juros de 4% ao mês, calcule o valor da penúltima parcela”.

A maioria dos grupos que não conseguiu resolvê-lo, em um primeiro momento, culpou o enunciado confuso e mais longo do que o habitual. Foram duas as principais dificuldades encontradas.

Alguns grupos ignoraram as variações no prazo. O exercício pede que um pagamento seja feito como entrada, e os demais não têm periodicidade fixa. A solução encontrada por tais grupos, incorreta, foi ignorar tal variação e fazer os pagamentos consecutivos (Planilha 72). No entanto, a programação foi executada corretamente: incorreta foi a leitura do enunciado. Destaca-se, em um desses

grupos, a programação utilizada para garantir que a última parcela seja 50% maior do que a penúltima (também na Planilha 72). A solução encontrada foi definir D5 como sendo igual a $1,5 \cdot D4$.

D5					
f(x) Σ = =1,5*D4					
	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	50000	0	10000	40000
3	1	40000	1600	10000	31600
4	2	31600	1264	13456,13	19407,87
5	3	19407,87	776,31	20184,19	0

Planilha 72 - Análise das sessões de trabalho – Interpretação equivocada do enunciado

A maioria dos demais grupos esboçou corretamente a periodicidade das parcelas, mas apresentou dificuldades em inserir corretamente o valor de cada uma das duas últimas parcelas (na Planilha 73, uma resolução adequada para o problema). Fundamentalmente, a variação da última parcela, a partir da penúltima, foi onde os grupos se complicaram. Afinal, para resolver simplesmente modificando os valores das células D8 e D14 era preciso calcular sempre um novo valor para D14 a partir de cada valor para D8. E, se não programassem a célula D8 como $D8 = 1,5 \cdot D14$ (ou $D8 = D14 + D14/2$, como fez um grupo), o recurso “Atingir Meta” não poderia ser usado.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	50000	0	10000	40000
3	1	40000	1600	0	41600
4	2	41600	1664	0	43264
5	3	43264	1730,56	10000	34994,56
6	4	34994,56	1399,78	0	36394,34
7	5	36394,34	1455,77	0	37850,12
8	6	37850,12	1514	18011,73	21352,39
9	7	21352,39	854,1	0	22206,49
10	8	22206,49	888,26	0	23094,75
11	9	23094,75	923,79	0	24018,54
12	10	24018,54	960,74	0	24979,28
13	11	24979,28	999,17	0	25978,45
14	12	25978,45	1039,14	27017,59	0

Planilha 73 - Análise das sessões de trabalho – Problema resolvido

Ainda no mesmo exercício, um grupo resolveu acabar com o problema da periodicidade diferente ao assumir que uma taxa mensal de 4% ao mês

corresponderia a uma taxa trimestral de 12%, o que é incorreto (Planilha 74). Para que percebessem o equívoco, lhes foi solicitado que escolhessem um valor qualquer e o capitalizassem de duas maneiras: um aumento de 12% e três aumentos de 4%. O valor escolhido foi 100, e os valores obtidos foram $100 \cdot 1,12 = 112$ e $100 \cdot 1,04 \cdot 1,04 \cdot 1,04 = 112,486$. Assim, se convenceram de que sua estratégia não era adequada para resolver o exercício.

	A	B	C	D	E
1	M	V1	J	P	V2
2	0	50000	0	10000	40000
3	1	40000	4800	10000	34800
4	2	34800	4176	16329,58	22646,42
5	3	22646,42	905,86	0	23552,28
6	4	23552,28	942,09	24494,37	0

Planilha 74 - Análise das sessões de trabalho – Mudança de periodicidade para a taxa de juros

Os próximos dois exercícios aqui discutidos reafirmam a posição de que os equívocos, a partir de certo ponto do trabalho, se restringiam a interpretações equivocadas do enunciado, ou simplesmente distração, e não por causa de eventuais dificuldades com o método proposto.

Um deles com o seguinte enunciado: “Um conjunto de sofás é vendido à vista por R\$ 6.000 ou a prazo em 4 prestações mensais e iguais, vencendo a primeira 3 meses após a compra. Qual o valor de cada prestação, se a taxa de juros do financiamento for de 5,8% ao mês?”.

Não é difícil imaginar onde alguns grupos tiveram dificuldade: a informação “vencendo a primeira 3 meses após a compra” não foi utilizada na hora de efetuar a programação (Planilha 75). No entanto, a programação apresentada não tem nenhum erro, e sua correção seria muito simples: bastaria capitalizar a dívida por mais dois meses, antes de efetuar o primeiro pagamento (Planilha 76).

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PGTO	SALDO 2
2	0	6000	0	0	6000
3	1	6000	348	1723,63	4624,37
4	2	4624,37	268,21	1723,63	3168,96
5	3	3168,96	183,8	1723,63	1629,14
6	4	1629,14	94,49	1723,63	0

Planilha 75 - Análise das sessões de trabalho – Problemas com a terminologia

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PGTO	SALDO 2
2	0	6000	0	0	6000
3	1	6000	348	0	6348
4	2	6348	368,18	0	6716,18
5	3	6716,18	389,54	1929,36	5176,36
6	4	5176,36	300,23	1929,36	3547,22
7	5	3547,22	205,74	1929,36	1823,6
8	6	1823,6	105,77	1929,36	0

Planilha 76 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

O enunciado do outro exercício: “Uma determinada mercadoria é vendida em 36 prestações mensais de R\$ 300, sem entrada, mais 12 trimestrais de R\$ 900 cada uma, também sem entrada. Qual é o seu preço à vista, se a taxa do financiamento for de 2,5% ao mês?”.

Aqui, o equívoco não se deveu à distração, mas sim a uma interpretação equivocada do enunciado. Alguns grupos entenderam que as 12 prestações trimestrais seriam pagas *após* as prestações mensais (Planilha 77). Ressalta-se que, se esse fosse o caso, a solução apresentada por todos os grupos que entenderam dessa maneira estaria correta.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	PARCELA	VALOR 2
2	0	9900,59	0	0	9900,59
3	1	9900,59	247,51	300	9848,1
4	2	9848,1	246,2	300	9794,31
5	3	9794,31	244,86	300	9739,17
35	33	7373,41	184,34	300	7257,75
36	34	7257,75	181,44	300	7139,19
37	35	7139,19	178,48	300	7017,67
38	36	7017,67	175,44	300	6893,11
39	37	6893,11	172,33	0	7065,44
40	38	7065,44	176,64	0	7242,08
41	39	7242,08	181,05	900	6523,13
42	40	6523,13	163,08	0	6686,21
43	41	6686,21	167,16	0	6853,36
44	42	6853,36	171,33	900	6124,69
45	43	6124,69	153,12	0	6277,81
46	44	6277,81	156,95	0	6434,76
47	45	6434,76	160,87	900	5695,63
68	66	2450,54	61,26	900	1611,81
69	67	1611,81	40,3	0	1652,1
70	68	1652,1	41,3	0	1693,4
71	69	1693,4	42,34	900	835,74
72	70	835,74	20,89	0	856,63
73	71	856,63	21,42	0	878,05
74	72	878,05	21,96	900	0

Planilha 77 - Análise das sessões de trabalho – Interpretação equivocada do enunciado

O último tipo de exercício discutido com os estudantes objetivava a comparação entre diferentes planos de pagamento de um bem específico, para que a escolha por um deles seja a mais vantajosa possível. Um dos exercícios discutidos: “Um microcomputador é encontrado à venda em duas condições de pagamento: em 3 prestações mensais de R\$ 1.024 cada uma, sem entrada, ou em 4 prestações mensais de R\$ 778,00 cada uma, sem entrada. Qual a melhor alternativa de pagamento para um comprador que aplica seu dinheiro à taxa de 1% ao mês?”.

Para a resolução desse tipo de exercício, a solução discutida coletivamente pelo professor com a turma foi presumir que o consumidor possuía aplicada certa quantia suficiente para dar conta de todas as opções de pagamento, e analisar o saldo ao final de cada uma das movimentações. O equívoco mais comum aqui foi, apesar de todas as células terem sido programadas corretamente, analisar cada saldo em *datas diferentes* (Planilha 78). Nesse exercício específico, a escolha pelo plano de pagamento em três vezes não seria modificada. No entanto, só é possível comparar diretamente valores na mesma data, pois a variação no período pode fazer diferença.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Valor 1	Juros	Parcela	Valor 2
2	0	5000	0	0	5000
3	1	5000	50	1024	4026
4	2	4026	40,26	1024	3042,26
5	3	3042,26	30,42	1024	2048,68
6					
7	Mês	Valor 1	Juros	Parcela	Valor 2
8	0	5000	0	0	5000
9	1	5000	50	778	4272
10	2	4272	42,72	778	3536,72
11	3	3536,72	35,37	778	2794,09
12	4	2794,09	27,94	778	2044,03

Planilha 78 - Análise das sessões de trabalho – Prazos diferentes

Para o mesmo exercício, destaca-se a resolução de um dos grupos, que difere radicalmente da resolução discutida com o professor. Portanto, é mais uma evidência de que a compreensão do método de resolução ocorreu de modo satisfatório, aliada a um entendimento claro das movimentações financeiras estudadas. Sob o aspecto dos níveis de desenvolvimento cognitivo de David Tall, é mais uma evidência de ocorrência do nível de proceito. Em vez de analisar o saldo restante ao consumidor, após efetuar todos os pagamentos, consideraram o

problema sob a ótica da loja em questão, e calcularam o preço à vista correspondente a cada um dos planos de pagamento (Planilha 79). Dessa forma, o que tivesse menor preço à vista seria mais vantajoso.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Valor	Juros	Parcela	Valor Fin
2	0	3011,57	0	0	3011,57
3	1	3011,57	30,12	1024	2017,68
4	2	2017,68	20,18	1024	1013,86
5	3	1013,86	10,14	1024	0
6					
7	Mês	Valor	Juros	Parcela	Valor Fin
8	0	3035,73	0	0	3035,73
9	1	3035,73	30,36	778	2288,09
10	2	2288,09	22,88	778	1532,97
11	3	1532,97	15,33	778	770,3
12	4	770,3	7,7	778	0

Planilha 79 - Análise das sessões de trabalho – Solução apresentada por um dos grupos

07) CONCLUSÕES

No primeiro capítulo, foi escrito que o principal objetivo era a elaboração de um material para estudar Matemática Financeira no Ensino Médio. Esse material encontra-se logo a seguir, como apêndice. No entanto, três exigências foram feitas: esse material precisaria ser (1) amplo, (2) consistente e (3) adequado. Pode-se afirmar, sem dúvida, que os três requisitos foram cumpridos.

O primeiro momento, antes mesmo de se pensar em uma dissertação, foi a elaboração do esboço do material. “Esboço” é um termo adequado, pois o número de alterações durante esse período foi bastante grande. Como descrito na Introdução, a primeira tentativa de trabalho foi via fórmulas e calculadoras científicas. Só depois de um ano surgiu a idéia de trabalhar com planilhas eletrônicas. E, a partir do momento em que o livro-texto inicial foi deixado de lado e a iniciativa de escrever um novo material ganhou força, o passo seguinte foi estudar Matemática Financeira, especialmente em livros de Ensino Superior. Dessa forma, muitos dos conceitos, movimentações financeiras e problemas estudados que estão presentes no material aqui apresentado são habitualmente trabalhados ao longo de alguns cursos de graduação, tais como Ciências Contábeis e Administração.

Ou seja, o material definitivamente é bastante **amplo**. A análise de alguns livros didáticos só reforça essa convicção, visto que a maioria dos livros estudados sequer aborda problemas que envolvam seqüências de depósitos, e poucos enfatizam a *lógica* inerente a um pagamento parcelado. No material aqui apresentado, por outro lado, são estudados problemas que envolvem depósitos em diferentes situações, com destaque ao problema de planejamento de uma previdência individual. Ainda, são estudados problemas de pagamentos de dívidas considerando muitos fatores: com entrada, sem entrada, com carência, com pagamentos diferentes, em prazos diferentes, dentre outros casos. Ou seja, o alcance do material excede aquele dos livros didáticos analisados, e aborda temas habitualmente estudados em cursos de graduação, mas que são pertinentes à maioria das pessoas.

O que diferencia basicamente o material aqui proposto dos livros didáticos analisados é a facilidade com que se trabalha recursivamente via planilhas eletrônicas. Trabalhar recursivamente, em Matemática Financeira, é vantajoso:

ênfatisa a movimentação financeira e evidencia-se a variação à medida que os períodos de tempo vão se sucedendo, não se limitando a informar somente um *resultado final*. Outra vantagem é que a matemática envolvida é bastante simples. Para ilustrar, consideremos uma dívida D , que será reajustada mensalmente por uma taxa i e abatida por n prestações iguais a P , sem entrada. De modo recursivo, a dívida em certo período j ($j \leq n$) seria $D_j = D_{j-1} + D_{j-1} \cdot i - P$. Ou seja, a dívida anterior mais os juros do período e o abatimento da parcela. Com uma planilha, pode-se estudar a variação da dívida, até $D_n = 0$. Por outro lado, o raciocínio encontrado nos livros (dentre os poucos que propõem tal discussão) se sustenta na fórmula

$$P = \frac{D \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

uma progressão geométrica, o que torna a discussão matematicamente inconsistente e comprova a necessidade de se produzirem textos melhores.

Já o trabalho via recursão depende unicamente do conceito de porcentagem e do conhecimento da essência de cada movimentação financeira. Ou seja, toda a matemática necessária é estudada, destacada, explicitada, permite ao aluno compreensão do que está sendo feito e pode ter a lógica alterada caso necessário. Certamente o material aqui proposto é **consistente**.

Após a aplicação do material, o passo seguinte foi a análise dos dados obtidos, tendo como fundamentação didática os níveis de sofisticação propostos por David Tall ao longo do desenvolvimento cognitivo. Na análise, as diversas planilhas produzidas pelos alunos foram confrontadas com os registros feitos ao longo das sessões de trabalho. Como os alunos foram orientados a salvar diferentes versões da mesma planilha, mudando o nome do arquivo a cada alteração significativa, o conjunto de dados obtidos foi bastante grande. No entanto, tal sistemática possibilitou que fosse feita uma análise da evolução dos grupos e da conseqüente apropriação dos conceitos por parte dos alunos, especialmente nas situações em que se possuía registro de diálogos entre os alunos e com o professor.

Nas primeiras sessões de trabalho, a maior dificuldade foi se apropriar da linguagem específica do software que permitiu o uso de planilhas eletrônicas. A apropriação do método, em especial no que diz respeito à implantação da recursividade, ocorreu em paralelo a isso. A seguir, a maioria dos problemas exigia dos grupos que adaptassem a idéia discutida coletivamente com o professor. Foram

esses exercícios, aliados aos dados registrados, que possibilitam afirmar que o material proposto é **adequado** para se trabalhar com Matemática Financeira no Ensino Médio. Afinal, é possível observar a evolução cognitiva dos alunos partindo de *procedimentos*, passando por *processos* e finalmente chegando, boa parte deles, aos *proceitos*, conforme definições de David Tall e correspondência de tais conceitos para o contexto dessa dissertação. No capítulo anterior são citados diversos exemplos de planilhas, diálogos e respostas dadas pelos alunos que evidenciam apropriação dos conceitos estudados, assimilação da linguagem de programação e da implementação da recursividade, e, principalmente, de *adaptação* do método proposto para solucionar problemas *diferentes*.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Curso de Matemática: volume único**. São Paulo: Moderna, 2003.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: Borba, Marcelo de Carvalho (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DAL ZOT, Wili. **Matemática Financeira**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações, volume 1**. São Paulo: Ática, 2007.

GIOVANNI, José Ruy, BONJORNIO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem, versão Progressões, Volume 1**. São Paulo: FTD, 2000.

GUELLI, Oscar. **Matemática – Série Brasil**. São Paulo: Ática, 2003.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. **Matemática Financeira**. São Paulo: Editora Saraiva, 2006.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENZAIN, David. **Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 11 - Matemática Comercial, Financeira e Descritiva**. Rio de Janeiro: Editora Atual, 2004.

KAPUT, James. Technology and Mathematics Education. In: GROUWS, Douglas (Org.). **A Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Nova Iorque: MacMillan, 1992.

KAPUT, James; HEGEDUS, Stephen; LESH, Richard. Technology becoming Infrastructural in Mathematics Education. In: KAPUT, James; HEGEDUS, Stephen;

LESH, Richard. **Foundations for the Future in Mathematics Education**. Londres: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2007.

LAPPONI, Juan Carlos. **Matemática Financeira usando Excel: como medir criação de valor**. São Paulo: Laponi Treinamento e Editora, 2002.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Coleção do Professor de Matemática - Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

PONTE, João Pedro da. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema. Rio Claro: n. 25, p. 105-132. 2006.

SILVA, Jorge Daniel; FERNANDES, Valter dos Santos; MABELINI, Orlando Donisete. **Matemática para o Ensino Médio**. São Paulo: IBEP, 2005.

TALL, David. **Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities & Realities**. 1998. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>>. Acesso em: 25/02/08.

TALL, David. **Technology and Cognitive Growth in Mathematics: A discussion paper for the Conference on Mathematics and New Technologies**, Thessaloniki, Grécia. 1999. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>>. Acesso em: 25/02/08.

WHITE, Michael. **Rivalidades produtivas: disputas e brigas que impulsionaram a ciência e a tecnologia**. Rio de Janeiro: Record, 2003.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente Paz. **Matemática: de olho no mundo do trabalho**. São Paulo: Scipione, 2004.

ZAMPIROLLO, Maria José Couto de V; SCORDAMAGLIO, Maria Terezinha; CÂNDIDO, Suzana Laino. **Matemática: Projeto Escola e Cidadania para todos, Volume 1**. São Paulo: Editora do Brasil, 2004.

CAPITALIZAÇÃO DE VALORES

Imagine a seguinte situação: uma pessoa (física ou jurídica) A empresta um determinado valor para outra pessoa B. No entanto, o empréstimo apresenta algumas desvantagens para A:

- A não poderá fazer uso desse valor durante o período do empréstimo;
- por causa da inflação, há perda de poder aquisitivo do dinheiro.

A partir daí, surge o conceito de **juro**, que pode ser entendido tanto como um custo para o empréstimo (para quem solicita) quanto como uma remuneração pelo uso do capital (para quem empresta). Normalmente, a **taxa de juros** numa certa unidade de tempo é expressa como uma porcentagem do capital em questão.

Assim, digamos que A tenha emprestado R\$ 1.000 para B, e ambos concordaram em uma taxa mensal de 2%. Se B pagar A um mês depois, o valor do pagamento deverá ser os mesmos R\$ 1.000 adicionados de R\$ 20, valor que corresponde a 2% de 1.000 (isto é, $0,02 \cdot 1000$). Ou seja, A e B concordaram que R\$ 1.000 na data do empréstimo *equivaleria* a R\$ 1.020 um mês depois.

Atente para o seguinte fato: apesar de 1.020 ser maior do que 1.000, os valores estão sendo referidos a épocas diferentes. Só é possível afirmar que R\$ 1.020 vale mais do que R\$ 1.000 quando ambos são comparados na mesma data.

No entanto, se B decidisse postergar o pagamento do empréstimo por mais um mês, sua dívida com A, já reajustada, é de R\$ 1.020. Ou seja, os 2% de juros deverão ser calculados em cima desse valor, e não mais sobre o valor inicial da dívida. O valor dos juros cobrados por A, para esse mês, seria de R\$ 20,40. Assim, a dívida de B, agora, é de R\$ 1.040,40. Mais uma vez, A e B concordaram, ao definir a taxa de juros de 2% ao mês, que, no caso, R\$ 1.000 na data do empréstimo equivaleria a R\$ 1.040,40 dois meses depois.

Iremos, a partir da construção de uma planilha eletrônica, ilustrar a evolução da dívida de B com A ao final dos primeiros cinco meses e, ao mesmo tempo, aprender como programar uma planilha eletrônica.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	1.000,00	=0,02*B2	

Os valores da coluna C correspondem aos juros pagos pelo empréstimo. Repare que na célula C2 não foi escrito o número 20, que seria o valor correspondente a ela. Ao definirmos $C2 = 0,02 * B2$, estamos programando a planilha de modo que ela calcule 2% da dívida inicial no período, independente de seu valor. Aplicaremos rotinas semelhantes às células das colunas A, B e D.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	1.000,00	20,00	=B2+C2

A coluna D corresponde ao valor da dívida ao final do período. Definindo $D2 = B2 + C2$, estamos garantindo que sempre serão adicionados os juros ao valor inicial da dívida.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	1.000,00	20,00	1.020,00
3	=A2+1			

Como a variação da dívida é mensal, já que a taxa de juros é cobrada com esse prazo, a coluna A tem seu valor aumentado em uma unidade a cada linha. Para garantir que a planilha incorpore essa variação, define-se $A3 = A2 + 1$.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	1.000,00	20,00	1.020,00
3	2	=D2		

A coluna B corresponde aos valores da dívida ao início de cada período. Como o valor da dívida é reajustado ao final de cada período, exige-se que o valor inicial da dívida em um dado período seja exatamente o mesmo que o valor final do período anterior. Desse modo, definimos $B3 = D2$. Ainda, repetimos as programações realizadas nas células C2 e D2 para as células C3 e D3, respectivamente.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	1.000,00	20,00	1.020,00
3	=A2 + 1	=D2	= 0,02 * B3	= B3 + C3

Observe que as células de cada coluna estão definidas a partir de uma programação. Com isso, podemos usar os recursos da planilha eletrônica e estender essa programação até o período desejado.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	1.000,00	20,00	1.020,00
3	2	1.020,00	20,40	1.040,40
4				
5				

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	1.000,00	20,00	1.020,00
3	2	1.020,00	20,40	1.040,40
4				
5				
6				
7				

Ao selecionar todas as células *programadas* da linha 3, irá surgir, no canto inferior direito, um pequeno quadrado. *Clique e segure* o botão esquerdo do mouse, *arrastando* o cursor para baixo. Ao soltar o botão do mouse, a programação será repetida para todas as células do espaço destacado, e a planilha abaixo ilustra a evolução da dívida de B com A ao longo dos meses, destacando também o valor pago pelos juros em cada mês.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	1.000,00	20,00	1.020,00
3	2	1.020,00	20,40	1.040,40
4	3	1.040,40	20,81	1.061,21
5	4	1.061,21	21,22	1.082,43
6	5	1.082,43	21,65	1.104,08

—//—

A variação do saldo em um fundo de investimentos segue um raciocínio idêntico, desconsiderando eventuais tarifas propostas pelo banco ou impostos governamentais.

Imagine a seguinte situação: uma pessoa deseja obter, após um ano com o dinheiro aplicado a uma taxa mensal de 1%, a quantia de R\$ 1.000. Quanto deverá ser depositado inicialmente nesse fundo?

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	?		
3	2			
4	3			
5	4			
6	5			
7	6			
8	7			
9	8			
10	9			
11	10			
12	11			
13	12			1.000,00

Para estruturar a planilha, surge um problema: o valor inicial é justamente o valor que deve ser calculado. Assim, para facilitar a visualização da variação do saldo e a programação correta, iremos supor um valor de R\$ 800 para o saldo inicial. Esse valor é *aleatório* e serve somente como *referência* para programar as células. A seguir ele (provavelmente) será alterado.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	800,00	8,00	808,00
3	=A2 + 1	=D2	= 0,01 * B3	= B3 + C3

O saldo é reajustado mensalmente segundo uma taxa de 1%. Dessa maneira, a programação é exatamente a mesma que foi utilizada na situação anterior. Assim, a planilha está pronta para ser estendida até o 12º mês, que é a época desejada.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	800,00	8,00	808,00
3	2	808,00	8,08	816,08
4	3	816,08	8,16	824,24
5	4	824,24	8,24	832,48
6	5	832,48	8,32	840,81
7	6	840,81	8,41	849,22
8	7	849,22	8,49	857,71
9	8	857,71	8,58	866,29
10	9	866,29	8,66	874,95
11	10	874,95	8,75	883,70
12	11	883,70	8,84	892,53
13	12	892,53	8,93	901,46

É possível constatar que o saldo inicial de R\$ 800 é insuficiente para produzir um montante de R\$ 1.000 após 12 meses, reajustados em 1% mensalmente. No entanto, a planilha está construída de modo a calcular o valor da célula D13 (onde deseja-se obter 1.000) **unicamente a partir** do valor da célula B2. É possível, então, substituir **somente** o valor de B2 até o valor de D13 ser igual ao valor desejado.

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	900,00	9,00	909,00
3	2	909,00	9,09	918,09
4	3	918,09	9,18	927,27
5	4	927,27	9,27	936,54
6	5	936,54	9,37	945,91
7	6	945,91	9,46	955,37
8	7	955,37	9,55	964,92
9	8	964,92	9,65	974,57
10	9	974,57	9,75	984,32
11	10	984,32	9,84	994,16
12	11	994,16	9,94	1.004,10
13	12	1.004,10	10,04	1.014,14

	A	B	C	D
1	MÊS	VALOR 1	JUROS	VALOR 2
2	1	887,45	8,87	896,32
3	2	896,32	8,96	905,29
4	3	905,29	9,05	914,34
5	4	914,34	9,14	923,48
6	5	923,48	9,23	932,72
7	6	932,72	9,33	942,05
8	7	942,05	9,42	951,47
9	8	951,47	9,51	960,98
10	9	960,98	9,61	970,59
11	10	970,59	9,71	980,30
12	11	980,30	9,80	990,10
13	12	990,10	9,90	1.000,00

Assim, um valor de R\$ 887,45 *equivale* a R\$ 1.000 doze meses depois, segundo uma taxa mensal de 1%.

Outra maneira de resolver o problema, no entanto, é mais eficiente. Sabe-se que o montante acumulado é proporcional ao capital investido, mantidos a taxa de juros e o prazo constantes. Dessa forma, *sabendo que R\$ 800 se tornaram R\$ 901,46*, pode-se calcular a quantia necessária para obtermos R\$ 1000:

$$\frac{800}{901,46} = \frac{x}{1000} \Rightarrow 901,46x = 800.000 \Rightarrow x = 887,45$$

RESOLUÇÃO ALGÉBRICA

Conforme discutido, juros compostos são aqueles onde os juros são aplicados com relação ao montante do período anterior. Para que seja possível trabalhar algebricamente com esse conceito, é preciso entender como se acumula aumentos percentuais.

Para cada capitalização que determinada quantia sofra, ela deve ser multiplicada pelo fator de aumento associado à taxa de juros. Por exemplo, uma taxa de juros de 2% terá fator de aumento 1,02, que corresponde a 102% da quantia: 100% do que tínhamos, mais o aumento de 2%.

De modo geral, uma taxa de juros i , na forma decimal, tem fator de aumento $1 + i$. Não é difícil entender a razão para isso: após uma quantia Q ser capitalizada de acordo com essa taxa, o montante obtido será $Q + Qi = Q(1 + i)$.

Assim, se uma quantia Q é capitalizada n vezes de acordo com uma taxa i , essa quantia deve ser multiplicada n vezes pelo fator de aumento $1 + i$. Ou seja, o montante obtido será $M = Q \cdot \underbrace{(1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdots (1+i) \cdot (1+i)}_{n \text{ vezes}} \Rightarrow M = Q \cdot (1+i)^n$.

Para ilustrar o uso da fórmula obtida, resolveremos os dois exemplos discutidos recursivamente.

Qual o montante que se obtém de R\$ 1.000 após 5 meses, considerando uma taxa mensal de 2%?

A quantia R\$ 1.000 será capitalizada 5 vezes com um fator de aumento igual a 1,02. Assim, $M = 1000 \cdot (1,02)^5 = 1000 \cdot 1,10408 = 1104,08$.

Uma pessoa deseja obter, após um ano com o dinheiro aplicado a uma taxa mensal de 1%, a quantia de R\$ 1.000. Quanto deverá ser depositado inicialmente nesse fundo?

Aqui, uma quantia desconhecida deverá ser capitalizada 12 vezes com um fator de aumento igual a 1,01, resultando em R\$ 1000. Assim, $1000 = Q \cdot (1,01)^{12} \Rightarrow 1000 = Q \cdot 1,126825$
 $Q = \frac{1000}{1,126825} = 887,44$

EXERCÍCIOS

01) Qual o montante de uma aplicação de R\$ 50.000, pelo prazo de 6 meses, à taxa de 2% ao mês?

02) Um capital de R\$ 7.000 foi aplicado durante um ano e meio, à taxa de 2,5% ao mês. Calcule os juros auferidos no período.

03) Uma pessoa aplica hoje R\$ 4.000 e aplicará R\$ 12.000 daqui a 3 meses num fundo que rende juros compostos à taxa de 2,6% ao mês. Qual seu montante daqui a 6 meses?

04) Afonso pode comprar um terreno por R\$ 20.000. Ele sabe que o terreno valerá R\$ 30.000 daqui a 5 anos. Se ele tiver a alternativa de aplicar o dinheiro a juros compostos, à taxa de 9% ao ano, qual investimento é mais vantajoso?

05) José Luís aplicou R\$ 12.000 por 10 meses num fundo que rende juros compostos à taxa de 1,4% ao mês. Quanto ele ganhou de juros ao longo do 10º mês?

06) Qual o capital que, aplicado a juros compostos, durante 9 anos à taxa de 10% ao ano produz um montante de R\$ 175.000?

07) Um capital de R\$ 3.000 foi aplicado a juros compostos, durante 10 meses, gerando um montante de R\$ 3.500. Qual a taxa mensal de juros?

08) Durante quanto tempo um capital de R\$ 5.000 deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 1,8% ao mês, para gerar um montante de R\$ 5.767?

09) Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado, à taxa de 2,2% ao mês, para que duplique de valor?

10) Uma empresa vende um componente eletrônico por R\$ 200 a unidade, sendo o pagamento feito 2 meses após a compra. Para pagamento à vista, o preço é de R\$ 192. Qual a taxa mensal cobrada?

11) Gisele aplicou R\$ 6.000, sendo uma parte no banco A, à taxa de 2% ao mês, e outra no banco B, à taxa de 1,5% ao mês. O prazo das duas aplicações foi de 6 meses. Calcule quanto foi aplicado em cada banco, sabendo que os montantes resultantes foram iguais.

12) Em outubro, novembro e dezembro um fundo de investimentos rendeu 2,1%, 1,7% e 1,9%, respectivamente. Qual foi o montante, no final de dezembro, de uma aplicação de R\$ 12.000 feita no início de outubro?

13) Em 3 meses sucessivos um fundo de ações rendeu 4%, -2% e -6%. Qual o montante obtido, ao final dos 3 meses, de uma aplicação inicial de \$ 14.000?

GABARITO

01	R\$ 56.308,12	02	R\$ 3.917,61
03	R\$ 17.963,51	04	Aplicação
05	R\$ 190,39	06	R\$ 74.217,08
07	1,55% a.m.	08	8 meses
09	32 meses	10	2,06% a.m.
11	R\$ 2.955,78 e R\$ 3.044,22		
12	R\$ 12.697,03	13	R\$ 13.412,67

SEQÜÊNCIA DE DEPÓSITOS

Vimos que a variação de um capital ao longo do tempo pode ser ilustrada em uma planilha eletrônica. No entanto, casos em que somente uma injeção de capital é feita são minoria. Ao se planejar atingir um dado montante ao final de certo período, normalmente são feitos depósitos ao longo dos meses.

A principal diferença reside no fato de que o montante acumulado não é aumentado somente pelo acréscimo dos juros, mas também pelo depósito de novas quantias que, no período seguinte, também irão gerar juros ao saldo.

Assim, imagine a seguinte situação: uma pessoa decide depositar, a partir de janeiro, R\$ 200 por mês em seu fundo de investimentos. Sabendo que esse fundo habitualmente paga 1% de juros ao mês, qual será o montante acumulado por essa pessoa ao final dos 12 depósitos feitos ao longo do ano?

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEP	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	200,00	=D2

No primeiro mês, o saldo obtido é oriundo unicamente do depósito feito, sendo que não há pagamento de juros.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEP	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	200,00	200,00
3				=D2	

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEP	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	200,00	200,00
3	=A2+1	=E2	=0,01*B3	=D2	

Os depósitos serão sempre iguais ao depósito inicial de R\$ 200. Dessa forma, definimos $D3 = D2$. A programação das colunas A, B e C segue o padrão utilizado nas planilhas anteriores.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEP	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	200,00	200,00
3	2	200,00	2,00	200,00	=B3+C3+D3

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEP	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	200,00	200,00
3	=A2+1	=E2	=0,01*B3	=D2	=B3+C3+D3

O saldo ao final do período é composto pelo saldo anterior, pelos juros acrescidos e pelo novo depósito efetuado. Com todas as colunas programadas, a planilha pode ser estendida até o período desejado. No caso, 12 depósitos.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEP	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	200,00	200,00
3	2	200,00	2,00	200,00	402,00
4	3	402,00	4,02	200,00	606,02
5	4	606,02	6,06	200,00	812,08
6	5	812,08	8,12	200,00	1.020,20
7	6	1.020,20	10,20	200,00	1.230,40
8	7	1.230,40	12,30	200,00	1.442,71
9	8	1.442,71	14,43	200,00	1.657,13
10	9	1.657,13	16,57	200,00	1.873,71
11	10	1.873,71	18,74	200,00	2.092,44
12	11	2.092,44	20,92	200,00	2.313,37
13	12	2.313,37	23,13	200,00	2.536,50

Dessa forma, o montante obtido é de R\$ 2.536,50. Observe que esse valor é superior a R\$ 2.400, que corresponde ao valor total depositado na conta. Ainda, observe como o ganho mensal via juros é cada vez maior, devido ao aumento do saldo ocorrer também pelo depósito externo durante cada período.

—//—

Uma aplicação interessante envolvendo uma seqüência de depósitos é a possibilidade de organizar um plano de previdência, ou simplesmente uma nova fonte de renda após determinado tempo.

Para isso, será acumulado um saldo via sucessivos depósitos durante certo período. Finalizados os depósitos, serão realizados sucessivos saques. É possível planejar o valor de cada saque e o número de saques desejados. Constataremos que o número de saques, dependendo da quantia acumulada via depósitos e do valor sacado, pode ser grande, e, com isso, se prolongar por muito tempo.

Imagine, então, a seguinte situação. Uma pessoa deposita mensalmente R\$ 2.000, durante três anos, em um fundo que habitualmente capitaliza o saldo mensalmente sob uma taxa de 0,9%. A planilha a seguir, construída de mesma forma que a anterior, ilustra a variação do saldo ao longo dos 36 depósitos e a quantia acumulada ao final do 36º depósito.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	DEP	SALDO 2
2	1	0,00	0,00	2.000,00	2.000,00
3	2	2.000,00	18,00	2.000,00	4.018,00
4	3	4.018,00	36,16	2.000,00	6.054,16
5	4	6.054,16	54,49	2.000,00	8.108,65
6	5	8.108,65	72,98	2.000,00	10.181,63
7	6	10.181,63	91,63	2.000,00	12.273,26
8	7	12.273,26	110,46	2.000,00	14.383,72
9	8	14.383,72	129,45	2.000,00	16.513,17
10	9	16.513,17	148,62	2.000,00	18.661,79
11	10	18.661,79	167,96	2.000,00	20.829,75
12	11	20.829,75	187,47	2.000,00	23.017,22
13	12	23.017,22	207,15	2.000,00	25.224,37
14	13	25.224,37	227,02	2.000,00	27.451,39
15	14	27.451,39	247,06	2.000,00	29.698,45
16	15	29.698,45	267,29	2.000,00	31.965,74
17	16	31.965,74	287,69	2.000,00	34.253,43
18	17	34.253,43	308,28	2.000,00	36.561,71
19	18	36.561,71	329,06	2.000,00	38.890,77
20	19	38.890,77	350,02	2.000,00	41.240,79
21	20	41.240,79	371,17	2.000,00	43.611,95
22	21	43.611,95	392,51	2.000,00	46.004,46
23	22	46.004,46	414,04	2.000,00	48.418,50
24	23	48.418,50	435,77	2.000,00	50.854,27
25	24	50.854,27	457,69	2.000,00	53.311,95
26	25	53.311,95	479,81	2.000,00	55.791,76
27	26	55.791,76	502,13	2.000,00	58.293,89
28	27	58.293,89	524,64	2.000,00	60.818,53
29	28	60.818,53	547,37	2.000,00	63.365,90
30	29	63.365,90	570,29	2.000,00	65.936,19
31	30	65.936,19	593,43	2.000,00	68.529,62
32	31	68.529,62	616,77	2.000,00	71.146,39
33	32	71.146,39	640,32	2.000,00	73.786,70
34	33	73.786,70	664,08	2.000,00	76.450,78
35	34	76.450,78	688,06	2.000,00	79.138,84
36	35	79.138,84	712,25	2.000,00	81.851,09
37	36	81.851,09	736,66	2.000,00	84.587,75

A 37ª linha informa que, ao final do 36º mês, o saldo acumulado é de R\$ 84.587,75, e o ganho com juros, durante o 36º mês, foi de R\$ 736,66.

A partir do 37º mês, não será feito mais nenhum depósito. Dessa forma, o único acréscimo ao saldo será proveniente dos juros pagos mensalmente pelo fundo. No entanto, a pessoa em questão decide sacar mensalmente um determinado valor durante 3 anos. Assim, qual o valor *máximo* que o saldo acumulado permite que seja sacado, sem que haja necessidade de mais nenhuma injeção de capital por parte da pessoa?

	A	B	C	D	E
34	33	73.786,70	664,08	2.000,00	76.450,78
35	34	76.450,78	688,06	2.000,00	79.138,84
36	35	79.138,84	712,25	2.000,00	81.851,09
37	36	81.851,09	736,66	2.000,00	84.587,75
38	1	=E37	=0,009*B38		=B38+C38+D38

Para a linha seguinte, as colunas B, C e E não têm sua programação alterada, seguindo o padrão habitual. Na célula A38 foi inserido o valor "1" para melhor organização: na linha 38 foi realizado o primeiro saque.

A coluna D precisa ser alterada também, visto que não serão feitos mais depósitos. Para que o software entenda que a partir da 38ª linha serão feitos saques, basta inserir um valor *negativo* na célula D38, e, como os saques a seguir serão de mesmo valor, programar D39 = D38. No caso, analisaremos a variação do saldo ao longo de 36 saques de R\$ 2.500.

	A	B	C	D	E
36	35	79.138,84	712,25	2.000,00	81.851,09
37	36	81.851,09	736,66	2.000,00	84.587,75
38	1	84.587,75	761,29	-2.500,00	82.849,04
39	=A38 + 1	=E38	=0,009*B39	=D38	=B39+C39+D39

	A	B	C	D	E
37	36	81.851,09	736,66	2.000,00	84.587,75
38	1	84.587,75	761,29	-2.500,00	82.849,04
39	2	82.849,04	745,64	-2.500,00	81.094,68
40	3	81.094,68	729,85	-2.500,00	79.324,53
41	4	79.324,53	713,92	-2.500,00	77.538,45
42	5	77.538,45	697,85	-2.500,00	75.736,30
43	6	75.736,30	681,63	-2.500,00	73.917,93
44	7	73.917,93	665,26	-2.500,00	72.083,19
45	8	72.083,19	648,75	-2.500,00	70.231,94
46	9	70.231,94	632,09	-2.500,00	68.364,02
47	10	68.364,02	615,28	-2.500,00	66.479,30
48	11	66.479,30	598,31	-2.500,00	64.577,61
49	12	64.577,61	581,20	-2.500,00	62.658,81
50	13	62.658,81	563,93	-2.500,00	60.722,74
51	14	60.722,74	546,50	-2.500,00	58.769,25
52	15	58.769,25	528,92	-2.500,00	56.798,17
53	16	56.798,17	511,18	-2.500,00	54.809,35
54	17	54.809,35	493,28	-2.500,00	52.802,64
55	18	52.802,64	475,22	-2.500,00	50.777,86
56	19	50.777,86	457,00	-2.500,00	48.734,86
57	20	48.734,86	438,61	-2.500,00	46.673,48
58	21	46.673,48	420,06	-2.500,00	44.593,54
59	22	44.593,54	401,34	-2.500,00	42.494,88
60	23	42.494,88	382,45	-2.500,00	40.377,33
61	24	40.377,33	363,40	-2.500,00	38.240,73
62	25	38.240,73	344,17	-2.500,00	36.084,89
63	26	36.084,89	324,76	-2.500,00	33.909,66
64	27	33.909,66	305,19	-2.500,00	31.714,85
65	28	31.714,85	285,43	-2.500,00	29.500,28
66	29	29.500,28	265,50	-2.500,00	27.265,78
67	30	27.265,78	245,39	-2.500,00	25.011,17
68	31	25.011,17	225,10	-2.500,00	22.736,27
69	32	22.736,27	204,63	-2.500,00	20.440,90
70	33	20.440,90	183,97	-2.500,00	18.124,87
71	34	18.124,87	163,12	-2.500,00	15.787,99
72	35	15.787,99	142,09	-2.500,00	13.430,09
73	36	13.430,09	120,87	-2.500,00	11.050,96

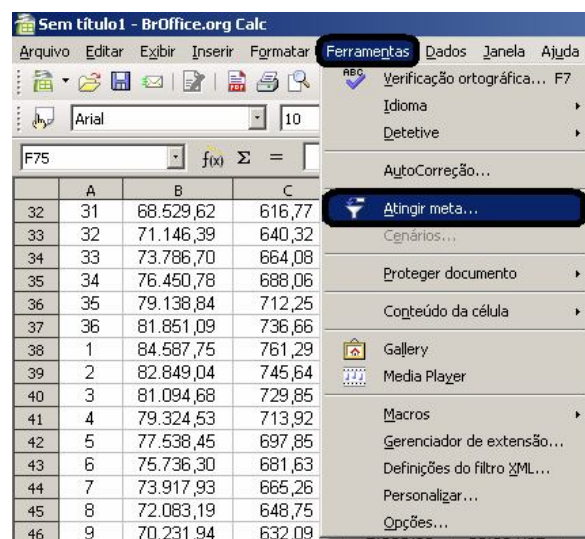
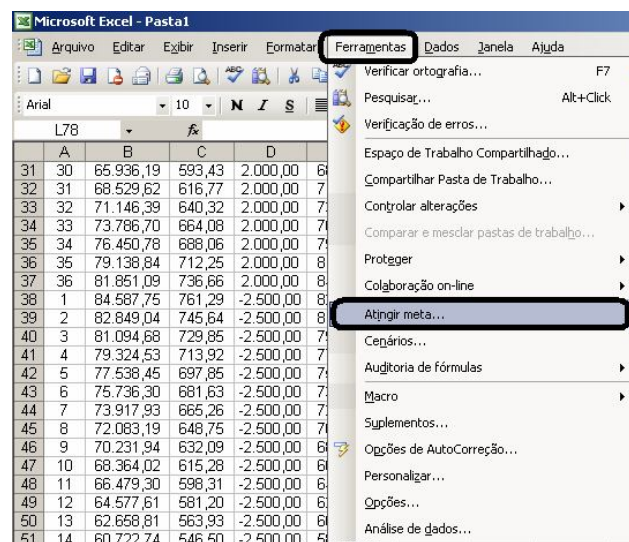
A linha 73 nos informa que, após 36 depósitos de R\$ 2.000, seguidos de 36 saques de R\$ 2.500, capitalizados mensalmente com um taxa de 0,9%,

ainda restam R\$ 11.050,96. Ou seja, seria possível sacar mais do que R\$ 2.500.

Para chegar até o valor máximo, bastaria variar o valor da célula D38 até que o valor da célula E73 seja zero, ou muito próximo disso. É possível fazer tal variação manualmente, como vínhamos fazendo. No entanto, a partir de agora utilizaremos um recurso disponível em tais softwares que faz tal variação pelo usuário.

O breve tutorial a seguir se aplica a dois softwares distintos: Microsoft Office Excel (a partir da versão 2003) e BrOffice.org Calc (a partir da versão 2.2.0). As diferenças entre os softwares, quando existirem, serão destacadas. Ambos os softwares podem ser utilizados sem perda de qualidade de um em relação ao outro. No entanto, o BrOffice.org Calc é um software gratuito, e pode ser obtido em <http://www.broffice.org/download>.

Em ambos os softwares, o recurso "Atingir Meta" está no menu "Ferramentas".



Microsoft Excel - Pasta1

	A	B	C	D	E
37	36	81.851,09	736,66	2.000,00	84.587,75
38	1	84.587,75	761,29	-2.500,00	82.849,04
39	2	82.849,04	745,64	-2.500,00	81.094,68
40	3	81.094,68	729,85	-2.500,00	79.324,53
41	4	79.324,53	713,92	-2.500,00	77.538,45
42	5	77.538,45	697,85	-2.500,00	75.736,30
43	6	75.736,30	681,63	-2.500,00	73.917,93
44	7	73.917,93	665,26	-2.500,00	72.083,19
45	8	72.083,19	648,75	-2.500,00	70.231,94
46	9	70.231,94	632,09	-2.500,00	68.364,02
47	10	68.364,02	615,28	-2.500,00	66.478,84
48	11	66.478,84	598,31	-2.500,00	64.570,33
49	12	64.570,33	581,19	-2.500,00	62.638,48
50	13	62.638,48	563,92	-2.500,00	60.683,29
51	14	60.683,29	546,50	-2.500,00	58.704,68
52	15	58.704,68	528,93	-2.500,00	56.702,65
53	16	56.702,65	511,21	-2.500,00	54.677,20
54	17	54.677,20	493,34	-2.500,00	52.628,40
55	18	52.628,40	475,22	-2.500,00	50.556,25
56	19	50.556,25	456,85	-2.500,00	48.460,46
57	20	48.460,46	438,23	-2.500,00	46.341,02
58	21	46.341,02	419,36	-2.500,00	44.198,02
59	22	44.198,02	400,24	-2.500,00	42.031,46
60	23	42.031,46	380,87	-2.500,00	39.841,26
61	24	39.841,26	361,25	-2.500,00	37.627,41
62	25	37.627,41	341,38	-2.500,00	35.390,01
63	26	35.390,01	321,26	-2.500,00	33.129,05
64	27	33.129,05	300,89	-2.500,00	30.844,54
65	28	30.844,54	280,27	-2.500,00	28.526,54
66	29	28.526,54	259,40	-2.500,00	26.175,04
67	30	26.175,04	238,28	-2.500,00	23.790,04
68	31	23.790,04	216,91	-2.500,00	21.371,54
69	32	21.371,54	195,29	-2.500,00	18.919,54
70	33	18.919,54	173,42	-2.500,00	16.434,04
71	34	16.434,04	151,30	-2.500,00	13.915,04
72	35	13.915,04	128,93	-2.500,00	11.362,54
73	36	11.362,54	106,31	-2.500,00	8.776,54

Atingir meta

Configurações padrão

Célula de fórmula: E73

Valor de destino: 0

Célula variável: D38

Sem título1 - BrOffice.org Calc

	A	B	C	D	E	F
37	36	81.851,09	736,66	2.000,00	84.587,75	
38	1	84.587,75	761,29	-2.500,00	82.849,04	
39	2	82.849,04	745,64	-2.500,00	81.094,68	
40	3	81.094,68	729,85	-2.500,00	79.324,53	
41	4	79.324,53	713,92	-2.500,00	77.538,45	
42	5	77.538,45	697,85	-2.500,00	75.736,30	
43	6	75.736,30	681,63	-2.500,00	73.917,93	
44	7	73.917,93	665,26	-2.500,00	72.083,19	
45	8	72.083,19	648,75	-2.500,00	70.231,94	
46	9	70.231,94	632,09	-2.500,00	68.364,02	
47	10	68.364,02	615,28	-2.500,00	66.478,84	
48	11	66.478,84	598,31	-2.500,00	64.570,33	
49	12	64.570,33	581,19	-2.500,00	62.638,48	
50	13	62.638,48	563,92	-2.500,00	60.683,29	
51	14	60.683,29	546,50	-2.500,00	58.704,68	
52	15	58.704,68	528,93	-2.500,00	56.702,65	
53	16	56.702,65	511,21	-2.500,00	54.677,20	
54	17	54.677,20	493,34	-2.500,00	52.628,40	
55	18	52.628,40	475,22	-2.500,00	50.556,25	
56	19	50.556,25	456,85	-2.500,00	48.460,46	
57	20	48.460,46	438,23	-2.500,00	46.341,02	
58	21	46.341,02	419,36	-2.500,00	44.198,02	
59	22	44.198,02	400,24	-2.500,00	42.031,46	
60	23	42.031,46	380,87	-2.500,00	39.841,26	
61	24	39.841,26	361,25	-2.500,00	37.627,41	
62	25	37.627,41	341,38	-2.500,00	35.390,01	
63	26	35.390,01	321,26	-2.500,00	33.129,05	
64	27	33.129,05	300,89	-2.500,00	30.844,54	
65	28	30.844,54	280,27	-2.500,00	28.526,54	
66	29	28.526,54	259,40	-2.500,00	26.175,04	
67	30	26.175,04	238,28	-2.500,00	23.790,04	
68	31	23.790,04	216,91	-2.500,00	21.371,54	
69	32	21.371,54	195,29	-2.500,00	18.919,54	
70	33	18.919,54	173,42	-2.500,00	16.434,04	
71	34	16.434,04	151,30	-2.500,00	13.915,04	
72	35	13.915,04	128,93	-2.500,00	11.362,54	
73	36	11.362,54	106,31	-2.500,00	8.776,54	

Atingir Meta

Configurações padrão

Célula de fórmula: E73

Valor de destino: 0

Célula variável: D38

No Calc, o processo é semelhante.

- O campo “Célula de fórmula” corresponde ao “Definir célula” do Excel.
- O campo “Valor de destino” corresponde ao “Para valor” do Excel.
- O campo “Célula variável” corresponde ao “Alternando célula” do Excel.

	A	B	C	D	E
70	33	10.801,05	97,21	-2.761,29	8.136,97
71	34	8.136,97	73,23	-2.761,29	5.448,91
72	35	5.448,91	49,04	-2.761,29	2.736,66
73	36	2.736,66	24,63	-2.761,29	0,00

Ambos os softwares fornecem R\$ 2.761,29 como o valor para o saque máximo.

É preciso destacar que o valor depositado e os prazos utilizados normalmente são menor e maiores, respectivamente. Utilizou-se R\$ 2.000 e 6 anos (contando depósitos e saques) somente para ilustrar o raciocínio em questão.

No Excel, após clicar em “Atingir Meta” aparecerá uma janela como a mostrada acima, com 3 campos:

- No campo “Definir célula:” será informada a célula que será analisada para determinar se a meta foi atingida ou não. No exemplo, o valor máximo de saque será descoberto quando o saldo, ao final do 36º saque (na linha 73), seja zero. Por isso, aqui é preciso digitar E73, que corresponde à célula do saldo ao final do processo.
- No campo “Para valor:” será informado o valor desejado para a célula definida acima. No caso, zero.
- No campo “Alternando célula:” será informada a célula que, quando alterada, influencia no resultado da célula definida anteriormente. Aqui, o valor do primeiro saque altera as demais células: por isso, digitar D38.

EXERCÍCIOS

01) Uma pessoa deposita mensalmente R\$ 700 num fundo que rende juros à taxa de 1,3% ao mês. São feitos 25 depósitos.

a) Qual será seu montante no instante após o último depósito?

b) Qual será seu montante 3 meses após ter feito o último depósito?

02) Para ampliar as instalações de sua loja de eletrodomésticos, o Sr. Martinez estima que precisará de R\$ 80.000 daqui a 18 meses. Quanto deverá depositar mensalmente, num total de 18 parcelas, à taxa de juros de 1,5% ao mês, para que no instante do último depósito consiga o montante pretendido?

03) Uma transportadora pretende comprar um caminhão dentro de 24 meses e estima que seu preço nessa data será R\$ 90.000. Para atingir seu objetivo, ela resolve fazer 24 depósitos mensais de x reais cada um num fundo que rende 1,5% ao mês, de modo que no instante do último depósito o saldo dessas aplicações seja R\$ 90.000.

a) Qual o valor de x ?

b) No dia em que foi feito o 18º depósito, surgiu uma emergência e a empresa teve que sacar todo o saldo das aplicações. Qual era o valor desse saldo?

04) (FGV) O salário líquido do Sr. Ernesto é R\$ 3.000 por mês. Todo mês ele poupa 10% do seu salário líquido e aplica essa poupança num fundo que rende juros à taxa de 2% ao mês.

a) Qual seu saldo no fundo, no dia em que fez o segundo depósito?

b) Quantos depósitos deverá fazer para ter um saldo de R\$ 7.289 no dia do seu último depósito?

05) Num país sem inflação, uma pessoa efetua 180 depósitos mensais de \$ 800 cada um, num fundo que rende 0,5% ao mês.

a) Qual seu montante no instante após o último depósito?

b) Se 1 mês após o último depósito ela resolve sacar desse fundo uma quantia x por mês, durante 200 meses, qual o valor máximo de x ?

06) Uma pessoa pretende ter uma renda mensal de R\$ 2.500, durante 48 meses, começando daqui a um mês. Quanto deverá aplicar hoje, num fundo que rende 1,4% ao mês, para atingir seu objetivo?

07) Uma pessoa pretende passar 24 meses na Europa fazendo um curso de pós-graduação. Ela estima que precisará ter uma renda mensal de R\$ 4.500, começando com sua chegada à Europa. Para atingir seu objetivo, ela precisará aplicar um valor X , à taxa de 1,6% ao mês, 60 meses antes do 1º saque de R\$ 4.500. Qual o valor de X ?

08) Num país sem inflação, o sr. Olavo recebeu \$ 100.000 de prêmio em uma loteria.

a) Se ele aplicar esse valor num fundo que rende juros compostos à taxa de 0,5% ao mês e sacar \$1.000 por mês (começando um mês após o depósito), durante quantos meses aproximadamente ele poderá efetuar os saques até esgotar seu saldo?

b) E se ele sacasse \$ 2.000 por mês?

09) Um casal pretende custear os estudos universitários de seu filho, estimados em R\$ 1.800,00 por mês, durante 60 meses. Para isso, eles resolvem depositar uma certa quantia mensalmente em um fundo com taxa de rendimento de 1,2% ao mês, num total de 48 depósitos. Quanto o casal deve depositar por mês, se o primeiro saque de R\$ 1.800,00 será feito no mês seguinte ao último depósito?

10) Um condomínio prevê despesas extras de R\$ 120.000 e R\$ 160.000 no final de agosto e setembro, respectivamente. Quanto deverá arrecadar e aplicar, num fundo que rende 1,85% ao mês, em maio, junho e julho (valores iguais) para fazer frente a essas despesas?

11) Um executivo, prevendo sua aposentadoria, resolve fazer depósitos mensais iguais durante 15 anos, visando retiradas mensais de 1500 dólares durante 20 anos, a partir do mês seguinte ao último depósito. Se a taxa obtida for de 1% ao mês, quanto ele deveria depositar mensalmente?

12) Quantos depósitos mensais e iguais a R\$ 300 devem ser feitos para se obter um montante de R\$ 45.000, com uma taxa de juros de 1% ao mês?

13) O dono de uma pequena empresa está analisando a compra de uma máquina para reduzir o custo de mão de obra e o desperdício de material. O preço da máquina é R\$ 25.000, à vista, e a economia mensal que ela proporciona é de R\$ 1.950.

a) Se o investimento precisa ser pago em um prazo de um ano e o dono investe o dinheiro da empresa com uma taxa de juros de 1,4% ao mês, ele deve comprar a máquina ou não?

b) Em quanto tempo o investimento se paga?

14) Um projeto exige um investimento inicial de R\$ 70.000, que proporcionarão benefícios futuros de R\$ 10.000 por ano, durante 10 anos. Analisar se esse projeto deve ser aceito, supondo as seguintes taxas de atratividade:

a) 6% ao ano

b) 9% ao ano

c) Qual a taxa mínima de atratividade que viabilize o projeto?

GABARITO

01a	R\$ 20.522,65	01b	R\$ 21.333,49
02	R\$ 3.904,46	03a	R\$ 3.143,17
03b	R\$ 64.401,57	04a	R\$ 606
04b	20 depósitos	05a	R\$ 232.654,97
05b	R\$ 1.842,95	06	R\$ 86.951,46
07	R\$ 34.925,46	08a	139 meses
08b	57 meses	09	R\$ 1.190,55
10	R\$ 89.029,68	11	272,69 dólares
12	93 depósitos	13a	Não
13b	15 meses	14a	Sim
14b	Não	14c	7,07%

PAGAMENTO DE DÍVIDAS

Existem mais de uma maneira de se efetuar o pagamento de uma dívida. Ela pode ser toda liquidada em um pagamento à vista ou certo tempo depois, ou pode ser liquidada com mais de um pagamento, em parcelas. Essas parcelas podem ser todas iguais, ou não. Iremos, aqui, estudar algumas das mais utilizadas formas de pagar uma dívida. A evolução da dívida ao longo dos meses será ilustrada por uma planilha.

A idéia central para essas operações financeiras reside no fato de a dívida, a cada período, ser reajustada de acordo com uma taxa de juros previamente acertada e amortizada pelo pagamento de uma parcela. Ao longo do período combinado para pagamento, o valor da dívida fica cada vez menor, até que, ao serem pagas todas as parcelas, a dívida é zerada.

Parcelas iguais

É um dos sistemas mais utilizados, também denominado sistema Price, em referência ao matemático inglês Richard Price, ou sistema Francês. Consiste, basicamente, em amortizar uma dívida por meio do pagamento de parcelas iguais.

Vamos exemplificar com uma situação. Uma TV está sendo vendida, à vista, por R\$ 519. No entanto, a loja aceita que o pagamento seja efetuado em 18 parcelas iguais, sem entrada. Para isso, cobra uma taxa mensal de juros de 2,76%. Qual seria o valor da parcela?

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	519,00	0,00	0,00	=B2

Assim, a dívida inicial é de R\$ 519, equivalente ao preço à vista. No primeiro mês, não há cobrança de juros nem pagamento de entrada. Ainda, a data "zero" representa o momento onde a compra é feita. O consumidor, nesse caso, sai da loja com uma dívida de R\$ 519. Para fins de programação, E2 = B2.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	519,00	0,00	0,00	519,00
3	=A2+1	=E2	=0,0276*B3		

A estruturação das colunas A, B e C segue a mesma.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	519,00	0,00	0,00	519,00
3	1	519,00	14,32		=B3+C3-D3

Os valores da coluna D representam as parcelas a serem pagas. Como esse valor é desconhecido, pode não ser preenchido, por enquanto. Ele será calculado com o recurso “Atingir Meta”. No entanto, a coluna D precisa ser inserida na programação: a dívida ao final do período (coluna E) é calculada a partir do acréscimo dos juros do mês e é parcialmente abatida com o pagamento da parcela. Para incorporar tal dinâmica na programação, define-se $E3 = B3 + C3 - D3$.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	0,00	0,00	0,00	519,00
3	1	519,00	14,32		533,32
4	2	533,32	14,72	=D3	

Os valores da coluna D são sempre os mesmos, já que a compra será realizada em 18 parcelas *iguais*. Na programação, $D4 = D3$. Para a célula E4 é repetido o procedimento anterior.

Repare que a dívida ao final do primeiro mês é maior que a dívida inicial. Tal distorção ocorre pois o valor da parcela, por enquanto, é zero. Não é necessário se preocupar com isso agora.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	0,00	0,00	0,00	519,00
3	1	519,00	14,32		533,32
4	=A3+1	=E3	=0,0276*B4	=D3	=B4+C4-D4

Dessa maneira, todas as colunas já estão devidamente programadas. Com isso, a planilha pode ser estendida até o mês 18 (na linha 20), data do último pagamento.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	519,00	0,00	0,00	519,00
3	1	519,00	14,32		533,32
4	2	533,32	14,72	0,00	548,04
5	3	548,04	15,13	0,00	563,17
6	4	563,17	15,54	0,00	578,71

...

16	14	739,40	20,41	0,00	759,81
17	15	759,81	20,97	0,00	780,78
18	16	780,78	21,55	0,00	802,33
19	17	802,33	22,14	0,00	824,47
20	18	824,47	22,76	0,00	847,23

A figura anterior mostra parte da planilha com os 18 pagamentos. Para calcular o valor da parcela, utilizaremos o recurso “Atingir Meta”, tendo como base, aqui, o BrOffice Calc.

	A	B	C	D	E	F
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA	
2	0	519,00	0,00	0,00	519,00	
3	1	519,00	14,32		533,32	
4	2	533,32	14,72	0,00	548,04	
5	3	548,04	15,13	0,00	563,17	

Atingir Meta	
Configurações padrão	
Célula de fórmula	E20
Valor de destino	0
Célula variável	D3
OK	Cancelar
Ajuda	

14	12	700,22	19,33	0,00	719,54
15	13	719,54	19,86	0,00	739,40
16	14	739,40	20,41	0,00	759,81
17	15	759,81	20,97	0,00	780,78
18	16	780,78	21,55	0,00	802,33
19	17	802,33	22,14	0,00	824,47
20	18	824,47	22,76	0,00	847,23

Para isso, basta perceber que o objetivo do pagamento parcelado é, após os 18 pagamentos, abater a dívida em sua íntegra. Ou seja, o valor da célula E20 *deve ser zero*. Com isso, a “célula de fórmula” é E20 e o “valor de destino” é 0. A “célula variável” nesse caso é D3, que corresponde à primeira parcela paga.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	519,00	0,00	0,00	519,00
3	1	519,00	14,32	36,97	496,35
4	2	496,35	13,70	36,97	473,08
5	3	473,08	13,06	36,97	449,16
6	4	449,16	12,40	36,97	424,58
7	5	424,58	11,72	36,97	399,32
8	6	399,32	11,02	36,97	373,37
9	7	373,37	10,31	36,97	346,70
10	8	346,70	9,57	36,97	319,30
11	9	319,30	8,81	36,97	291,14
12	10	291,14	8,04	36,97	262,20
13	11	262,20	7,24	36,97	232,46
14	12	232,46	6,42	36,97	201,90
15	13	201,90	5,57	36,97	170,50
16	14	170,50	4,71	36,97	138,23
17	15	138,23	3,82	36,97	105,07
18	16	105,07	2,90	36,97	71,00
19	17	71,00	1,96	36,97	35,98
20	18	35,98	0,99	36,97	0,00

Ao final das 18 parcelas, a dívida está liquidada. O software informa que 18 prestações de R\$ 36,97, sem entrada e com uma taxa mensal de juros de 2,76%, corresponderiam a um pagamento de R\$ 519 à vista.

Amortizações constantes

A idéia central desse sistema de amortização reside no fato de a dívida ser diminuída da mesma quantia ao longo dos pagamentos. Ou seja, as parcelas são variáveis, já que os juros vão ficando menores à medida que os pagamentos são feitos.

No Sistema de Amortizações Constantes (SAC), a evolução da dívida é diferente. Nesse sistema, o raciocínio central é semelhante ao que seria utilizado se não existisse incidência de juros: bastaria dividir o valor à vista pelo número de parcelas previstas. Após calculado tal valor, basta adicionar os juros do período para se chegar ao valor final da parcela.

Voltemos então ao problema da TV, analisando a evolução da dívida segundo o SAC.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	519,00	0,00	0,00	519,00
3	1	519,00	14,32	=E\$2/18+C3	

Se não existisse cobrança de juros, o valor de cada parcela seria igual a $\frac{519}{18}$, que é o valor à vista (R\$ 519) dividido pelo número de parcelas (18). Após obter tal valor, serão adicionados os juros do período, obtendo-se o valor da parcela em um mês específico. Para inserir tal dinâmica na programação, define-se $D3 = E\$2/18 + C3$. O símbolo \$ (entre a coluna E e a linha 2) é importante na programação para garantir que sempre será pago uma fração da dívida inicial, expressa *sempre* em E2.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	0,00	0,00	0,00	519,00
3	=A2+1	=E2	=0,0276*B3	=E\$2/18+C3	=B3+C3-D3

A programação da coluna E segue o mesmo padrão anterior, sendo igual à soma da dívida inicial com os juros, subtraída da parcela paga.

Agora, todas as colunas estão devidamente programadas e a planilha pode ser estendida até a data do 18º pagamento.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA	JUROS	PARCELA	DÍVIDA
2	0	519,00	0,00	0,00	519,00
3	1	519,00	14,32	43,16	490,17
4	2	490,17	13,53	42,36	461,33
5	3	461,33	12,73	41,57	432,50
6	4	432,50	11,94	40,77	403,67
7	5	403,67	11,14	39,97	374,83
8	6	374,83	10,35	39,18	346,00
9	7	346,00	9,55	38,38	317,17
10	8	317,17	8,75	37,59	288,33
11	9	288,33	7,96	36,79	259,50
12	10	259,50	7,16	36,00	230,67
13	11	230,67	6,37	35,20	201,83
14	12	201,83	5,57	34,40	173,00
15	13	173,00	4,77	33,61	144,17
16	14	144,17	3,98	32,81	115,33
17	15	115,33	3,18	32,02	86,50
18	16	86,50	2,39	31,22	57,67
19	17	57,67	1,59	30,42	28,83
20	18	28,83	0,80	29,63	0,00

Observe que as parcelas aqui, *por definição*, não são constantes. No entanto, a dívida também está sendo liquidada em 18 pagamentos mensais, com um reajuste também mensal de 2,76%.

—//—

O conhecimento de princípios básicos de Matemática Financeira permite que se decida entre diferentes opções de pagamento, analisando o que seria mais vantajoso para determinada pessoa, em determinada situação.

Para ilustrar, imagine o seguinte: uma mercadoria está sendo vendida por R\$ 1.150 à vista. O vendedor oferece outras duas opções: 4 parcelas de R\$ 300, com entrada, ou 2 parcelas de R\$ 600, sem entrada. Considerando que um dado consumidor tem a quantia disponível para pagar à vista em um fundo de investimentos que renda 1,5% ao mês, qual seria opção mais vantajosa para esse cliente?

Para responder tal questão, é preciso, em primeiro lugar, saber se o cliente possui dinheiro em caixa para efetuar o pagamento à vista. Caso contrário, pagar à vista não seria uma opção. Aqui, iremos supor que sim. Ainda, é preciso considerar o seguinte: o pagamento à vista seria concretizado no momento da compra; as quatro parcelas seriam pagas após três meses (a primeira é considerada como entrada); e, por fim, as duas parcelas seriam pagas em dois meses. É preciso que o saldo do cliente, após efetuado o pagamento em cada opção, seja analisado *na mesma data*. Assim, iremos analisar o saldo resultante após 3 meses, *para cada opção*.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00			

Suponhamos que o cliente tenha, na data em que faz a compra, um saldo de R\$ 1.500. Tal saldo é suficiente para efetuar o pagamento à vista.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	=0,015 * B2	1.150,00	=B2 + C2 - D2

Dessa forma, é possível aplicar a programação usual para a seqüência. Observe que a parcela de R\$ 1.150 está sendo *descontada* do saldo disponível na data zero pois o pagamento é feito à vista. Ainda, há acréscimo de juros pois já existia R\$ 1.500 de saldo nessa data. As parcelas seguintes serão todas iguais a zero.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	22,50	1.150,00	372,50
3	=A2+1	=E2	=0,015 * B3	0,00	=B3 + C3 - D3

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	22,50	1.150,00	372,50
3	1	372,50	5,59	0,00	378,09
4	2	378,09	5,67	0,00	383,76
5	3	383,76	5,76	0,00	389,52

Estendemos a programação até o 3º mês pois é, de acordo com o problema, a data mais distante a ser considerada (4 vezes com entrada). Dessa maneira, concluímos que um consumidor com um saldo inicial de R\$ 1.500, aplicados de acordo com uma taxa mensal de 1,5%, ao efetuar o pagamento à vista possuirá um saldo de R\$ 389,52 após 3 meses.

Vamos fazer a mesma análise para a situação de 4 parcelas de R\$ 300, com entrada. A programação segue o padrão habitual. Como existe entrada, já existe um pagamento de R\$ 300 logo na data inicial. Esse pagamento se estenderá nos próximos três meses.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	=0,015 * B2	300,00	=B2 + C2 - D2

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	22,50	300,00	1.222,50
3	=A2+1	=E2	=0,015 * B3	=D3	=B3 + C3 - D3

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	22,50	300,00	1.222,50
3	1	1.222,50	18,34	300,00	940,84
4	2	940,84	14,11	300,00	654,95
5	3	654,95	9,82	300,00	364,77

Após a movimentação, o saldo do cliente é de R\$ 364,77.

Por fim, será construída a planilha corresponde ao pagamento em 2 vezes de R\$ 600, sem entrada.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	=0,015 * B2	0,00	=B2 + C2 - D2

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	22,50	0,00	1.522,50
3	=A2+1	=E2	=0,015 * B3	600,00	=B3 + C3 - D3

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	22,50	0,00	1.522,50
3	1	1.522,50	22,84	600,00	945,34
4	=A3+1	=E3	=0,015 * B4	=D3	=B4 + C4 - D4

	A	B	C	D	E
1	MÊS	SALDO 1	JUROS	PARCELA	SALDO 2
2	0	1.500,00	22,50	0,00	1.522,50
3	1	1.522,50	22,84	600,00	945,34
4	2	945,34	14,18	600,00	359,52
5	3	359,52	5,39	0,00	364,91

O cliente, após a movimentação, possuiria em saldo o valor de R\$ 364,91.

De posse de tais dados, conclui-se que a opção mais vantajosa no caso é o pagamento à vista, seguido pela opção em 2 vezes sem entrada.

—//—

Outra possibilidade de resolução consiste no cálculo do preço à vista correspondente a cada situação. O plano com o menor preço à vista será o mais vantajoso. No caso, a mercadoria está sendo vendida por R\$ 1.150 à vista. As outras duas opções são 4 parcelas de R\$ 300, com entrada, ou 2 parcelas de R\$ 600, sem entrada. Considerando a taxa mensal de 1,5%, podemos calcular o preço à vista *equivalente* aos dois planos de pagamento.

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PARCELA	DÍVIDA 2
2	0	1.173,66	0,00	300,00	873,66
3	1	873,66	13,10	300,00	586,77
4	2	586,77	8,80	300,00	295,57
5	3	295,57	4,43	300,00	0,00

	A	B	C	D	E
1	MÊS	DÍVIDA 1	JUROS	PARCELA	DÍVIDA 2
2	0	1.173,53	0,00	0,00	1.173,53
3	1	1.173,53	17,60	600,00	591,13
4	2	591,13	8,87	600,00	0,00

Ou seja, a opção mais vantajosa seria à vista, por R\$ 1.150. Em seguida, viria a opção em duas vezes, que teria preço à vista igual a R\$ 1.173,53. Por fim, o mais desvantajoso seria o plano em quatro vezes, que teria preço à vista igual a R\$ 1.173,66.

EXERCÍCIOS

01) Na venda de uma geladeira, uma loja anuncia o pagamento em 6 prestações mensais de R\$ 1.250 cada uma, sem entrada. Qual o preço à vista, se a loja cobra no financiamento juros à taxa de 3,2% ao mês?

02) Um automóvel 0 km é vendido à vista por R\$ 32.000 ou a prazo com 20% de entrada mais 24 prestações mensais iguais. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros do financiamento for de 1,8% ao mês?

03) Um microcomputador é vendido à vista por R\$ 3.000 ou a prazo em 3 prestações mensais iguais, considerando-se a primeira prestação como entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros do financiamento for de 2,6% ao mês?

04) Uma pessoa recebeu um financiamento de R\$ 50.000 para a compra de uma casa, sendo adotado o sistema Price à taxa de 1,5% ao mês, para pagamento em 180 meses. Quanto deve no 64º mês?

05) Uma pessoa comprou um carro, financiando R\$ 60.000 para o pagamento em 24 prestações iguais e um juro de 3% ao mês. Após pagar 12 prestações, resolveu liquidar a dívida. Pergunta-se:

- Quanto pagou na 12ª prestação?
- Quanto ela pagou para liquidar a dívida?

06) Um aparelho de TV em cores é vendido por R\$ 1.500 ou por 20% de entrada, mais duas parcelas mensais e iguais. Sabendo-se que a taxa de juros vale 6% ao mês, qual o valor de cada parcela de modo que as duas formas de pagamento sejam equivalentes?

07) Um aparelho de som é vendido por R\$ 3.000 à vista, ou com uma entrada e mais três parcelas mensais de R\$ 800 cada uma. Se a loja trabalha com uma taxa de juros de 3,5% ao mês, qual o valor da entrada?

08) Um conjunto de sofás é vendido à vista por R\$ 1.500, ou a prazo em três prestações mensais sem entrada, sendo a segunda igual ao dobro da primeira e a terceira o triplo da primeira. Obtenha o valor da segunda prestação, sabendo-se que a loja opera a uma taxa de 5% ao mês.

09) Uma pessoa pretende vender seu terreno por R\$ 50.000, à vista. Entretanto, em face das dificuldades de venda à vista, está disposto a fazer o seguinte plano de pagamento:

- entrada de R\$ 10.000;
- 3 meses após a entrada, mais R\$ 10.000;
- duas parcelas, vencíveis seis meses e um ano depois da entrada, sendo a segunda delas 50% superior à primeira.

Admitindo-se uma taxa de juros de 4% ao mês, calcule o valor da penúltima parcela.

10) Um equipamento é vendido à vista por R\$ 1.300.000 ou então tal quantia pode ser financiada com R\$ 300.000 de entrada, mais três prestações mensais de R\$ 400.000 cada uma. Qual a taxa de juros desse financiamento?

11) Um conjunto de sofás é vendido à vista por R\$ 6.000 ou a prazo em 4 prestações mensais e iguais, vencendo a primeira 3 meses após a compra. Qual o valor de cada prestação, se a taxa de juros do financiamento for de 5,8% ao mês?

12) Um dormitório é vendido por R\$ 5.000 à vista. A prazo, a loja exige uma entrada de R\$ 1.500 e o restante em 6 prestações, sendo dado ao cliente 2 meses de carência. Determine o valor das prestações, considerando uma taxa de juros de 4,85% ao mês.

13) Uma determinada mercadoria é vendida em 36 prestações mensais de R\$ 300, sem entrada, mais 12 trimestrais de R\$ 900 cada uma, também sem entrada. Qual é o seu preço à vista, se a taxa do financiamento for de 2,5% ao mês?

14) Uma determinada loja, desejando aumentar suas vendas, anuncia a venda de videogames de acordo com o seguinte plano:

- 3 vezes de R\$ 200, no 3º, 4º e 5º meses após a compra;

- 3 vezes de R\$ 500, no 8º, 9º e 10º meses após a compra.

Sendo de 3% ao mês a taxa de juros cobrada pela loja, calcule o valor à vista.

15) Um empréstimo de R\$ 250.000 deve ser devolvido pelo SAC em 50 prestações mensais, sendo 2% ao mês a taxa de juros cobrada. Pede-se o valor da 37ª prestação.

16) Um empréstimo de R\$ 40.000 deve ser devolvido pelo SAC com 40 prestações mensais. Sabendo-se que a taxa de juros é de 2% ao mês, obtenha a parcela correspondente ao 35º mês.

17) Um microcomputador é encontrado à venda em duas condições de pagamento:

- em 3 prestações mensais de R\$ 1.024 cada uma, sem entrada;

- em 4 prestações mensais de R\$ 778,00 cada uma, sem entrada.

Qual a melhor alternativa de pagamento para um comprador que aplica seu dinheiro à taxa de 1% ao mês?

18) Uma determinada mercadoria apresenta as seguintes condições de pagamento:

a) à vista por R\$ 1.500.

b) 6 parcelas mensais e iguais, vencendo a 1ª 30 dias após a compra, no valor de R\$ 301,22.

c) 4 parcelas iguais a R\$ 485,50, vencendo a primeira 3 meses após a compra e as demais de 30 em 30 dias.

d) um pagamento único de R\$ 1.850 daqui a 3 meses.

Nessas condições, determine a melhor condição de pagamento, considerando que a taxa de aplicação média do mercado é de 7,5% ao mês.

19) Determinado produto é vendido numa loja por R\$ 1.100 à vista, ou 4 prestações mensais de R\$ 360. Qual a taxa mensal de juros que o consumidor deve obter em seu investimento de modo que as opções sejam equivalentes após 4 meses?

GABARITO

01	R\$ 6.726,83	02	R\$ 1.323,03
03	R\$ 1.025,77	04	R\$ 44.136,11
05a	R\$ 3.542,84	05b	R\$ 35.265,49
06	R\$ 654,52	07	R\$ 758,69
08	R\$ 559,92	09	R\$ 18.011,73
10	9,701%	11	R\$ 1.929,36
12	R\$ 719,54	13	R\$ 13.959,99
14	R\$ 1.683,21	15	R\$ 6.400
16	R\$ 1.120	17	3 vezes
18	Opção c	19	11,72%