UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CAROLINE BORSOI

GEOGEBRA 3D NO ENSINO MÉDIO: UMA POSSIBILIDADE PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL

PORTO ALEGRE
2016

CAROLINE BORSOI

GEOGEBRA 3D NO ENSINO MÉDIO: UMA POSSIBILIDADE PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Alice Gravina

PORTO ALEGRE

2016

CAROLINE BORSOI

GEOGEBRA 3D NO ENSINO MÉDIO: UMA POSSIBILIDADE PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Alice Gravina

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Rogério Ricardo Steffenon – UNISINOS

____

Profª. Drª. Luisa Rodriguez Doering – IME/UFRGS

____

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso – IME/UFRGS

PORTO ALEGRE, junho de 2016.

AGRADECIMENTOS

No decorrer de nossa vida nos deparamos com situações nas quais é fundamental poder contar com o apoio de algumas pessoas. Ao final desta dissertação de Mestrado, presto, através de poucas palavras, os mais sinceros agradecimentos a estas pessoas:

Ao meu namorado Luciano Sommacal pelo seu permanente incentivo, por acreditar incondicionalmente no meu potencial, pelo amor e paciência em toda minha caminhada e, em especial, no decorrer das disciplinas e da escrita da dissertação.

À Profª. Dra. Maria Alice Gravina, orientadora desta dissertação, por ter acreditado na minha proposta de pesquisa, pela sabedoria, compreensão, paciência e pelas importantes contribuições para meu crescimento pessoal e principalmente como pesquisadora/professora.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, pela oportunidade de aprendizado, crescimento e realização profissional.

A todos os professores que participaram da minha formação, pelos inúmeros aprendizados e saberes que contribuíram para meu desenvolvimento profissional.

Aos meus familiares pelo carinho, compreensão e valorização de meus potenciais.

A todos meus colegas de mestrado pelo companheirismo e pelas trocas de experiências que enriqueceram minha prática docente.

Aos amigos e amigas que estiveram presentes, me aconselhando e incentivando com carinho e dedicação durante esta trajetória.

A minha amiga e colega Janete, pelas inúmeras horas de estudo no decorrer das disciplinas, pelo incentivo, amizade e parceria durante a realização do mestrado.

Aos diretores, funcionários e pais do Colégio Estadual Farroupilha pela cordialidade e receptividade com que acolheram esta proposta. E em especial, aos alunos, pelo empenho e pela prestação das valiosas informações que serviram de instrumento de estudo para esta dissertação.

A todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para a realização deste trabalho. Meus mais sinceros agradecimentos.

RESUMO

No ensino da Geometria Espacial é notável a dificuldade de nossos alunos em atividades que necessitam a mobilização de habilidades espaciais e nas quais é exigida a compreensão da representação bidimensional de objetos tridimensionais. Este estudo apresenta uma sequência didática que explora conceitos da Geometria Espacial através da utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra. A proposta tem como objetivo provocar o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, nisso tirando-se proveito dos recursos de representação que se tem no software, especialmente aquele que diz respeito a interação dinâmica entre as representações do objeto tridimensional e diferentes planos de corte. São dez atividades, em crescente nível de dificuldade e envolvendo diferentes conceitos da Geometria Espacial. A análise da produção dos alunos é feita a luz das teorias de Van Hiele, Duval e Gutiérrez. A metodologia de pesquisa é inspirada na Engenharia Didática e foi possível sinalizar, a partir do confronto entre análises *a priori* e *a posteriori*, o progresso dos alunos quanto ao desenvolvimento de habilidades para visualização espacial.

Palavras-chave: Geometria Espacial. Representação. Visualização. GeoGebra 3D. Pensamento Geométrico Espacial.

ABSTRACT

In teaching the Spatial Geometry is remarkable the students difficulty in activities that require spatial skills and the understand of the two-dimensional representation of three-dimensional objects. This study presents a didactic sequence that explores concepts of Spatial Geometry using the software GeoGebra. The aim is to provoke the development of spatial geometric thinking, taking advantage of dynamic representations available in the software, especially the one concerning the interaction between the representations of three-dimensional object and intersecting planes. Ten activities in increasing level of difficulty and involving different concepts of spatial geometry were applied in the experiment. The analysis of the students' production is based on Van Hiele, Duval and Gutiérrez theories and the research methodology takes as reference the Didactic Engineering. From confrontation between the *priori* and *posteriori* analysis, it was possible to observe the progress of students and especially the development of skills related to spatial visualization.

Keywords: Spatial Geometry. Representation. Visualization. GeoGebra 3D. Spatial Geometric Thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma proposta didática para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio. A proposta foi implementada em uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de Farroupilha/RS, no ano de 2015. Nesta proposta foi utilizado o software de geometria dinâmica GeoGebra, principalmente no que diz respeito a sua janela de visualização 3D, como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades espaciais indispensáveis na construção do conhecimento geométrico.

Nós professores, sabemos que o ensino da Geometria Espacial é responsável por desenvolver conceitos geométricos fundamentais para o desenvolvimento cognitivo. E este tópico da matemática escolar tornou-se a questão a ser investigada, pois, observando nossos alunos, é perceptível a dificuldade que estes têm para realizar atividades que necessitam a mobilização de habilidades espaciais, que exigem a construção/compreensão de representações de objetos geométricos no espaço, e também, de sua representação no plano bidimensional.

Em nossa vivência pedagógica podemos observar que dentre as principais dificuldades está aquela de visualização de objetos geométricos, principalmente os espaciais. Nossos alunos, mesmo já estando no Ensino Médio, possuem limitações na compreensão da representação bidimensional relacionada a um objeto tridimensional.

Segundo os PCN´s[1], a Geometria Espacial tem a finalidade de desenvolver a percepção do espaço e de dar significado aos conceitos geométricos. Contudo, nossos alunos estão habituados a lidar apenas com figuras planas estáticas. Dizem os PCN´s:

> Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de um desenho, buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que tem do objeto. [...] A dificuldade dos alunos é a de encontrar articulações entre as propriedades que ele conhece e a maneira de organizar o conjunto do desenho, pois ele deverá escolher entre sacrificar ou transformar algumas delas[...]. (BRASIL, 1998, p. 125-126)

Podemos relacionar estas dificuldades ao fato da Geometria Espacial ser trabalhada nas escolas com ênfase em fórmulas de áreas e volumes, sem possibilidades de experimentação e manipulação de objetos geométricos e sem que se permita ao aluno mobilizar habilidades de análise e interpretação.

[1] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) são a referência básica para a elaboração das matrizes de referência, elaboradas pelo Governo Federal em 1998.

Nossos alunos parecem viver um conflito ao se confrontarem com as representações planas existentes nos livros didáticos voltados ao ensino de geometria. O aluno deve ser capaz de relacionar o objeto tridimensional representado nos livros às suas mais diversas representações, dando sentido aos conceitos.

A capacidade de desenvolver argumentos em Geometria tem sido também um desafio no ensino de Matemática. Entender uma situação em Geometria Espacial e pensar dedutivamente são competências que deveriam ser desenvolvidas na educação básica. Contudo, é difícil desenvolver tais competências, principalmente quando não se oferece ao aluno situações provocativas de ensino-aprendizagem.

Por outro lado, é praticamente impossível negar ou omitir a forma como as novas tecnologias da informação e da comunicação (TIC´s) vêm transformando a sociedade, as relações e a própria forma de pensar e agir do ser humano. Principalmente nas últimas décadas, percebe-se um avanço no uso destas novas tecnologias no panorama educacional, não apenas por este novo perfil de sociedade, altamente tecnológica, mas principalmente pelo seu valioso potencial na construção do conhecimento. A tecnologia, quando utilizada de forma correta, traz uma nova configuração para a sala de aula, transformando-a em um espaço de construção de conceitos e de exploração de argumentos e hipóteses.

Uma ferramenta significativa, dentre a diversidade de recursos disponíveis, é o software de geometria dinâmica GeoGebra. Ele permite uma nova forma de se pensar o processo de aprender, pois possibilita uma relação mais próxima entre o aluno e o objeto de estudo; ele favorece a autonomia do aluno e coloca-o como um ativo aprendiz. Tal recurso pode tornar-se um forte aliado na superação de dificuldades que se apresentam nos processos de ensino e aprendizagem - objetos que antes eram tratados com auxílio apenas de um desenho estático, podem agora ser manipulados na tela do computador, e isto ajuda na compreensão de suas propriedades:

> Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. [...] O aluno age sobre os objetos matemáticos num contexto abstrato, mas tem como suporte a representação na tela do computador. (GRAVINA&SANTAROSA, 1998, p. 14)

Nosso estudo pretende discutir os processos de aprendizagem no contexto da Geometria Espacial no Ensino Médio e, também, investigar o potencial do uso do GeoGebra 3D no desenvolvimento de habilidades espaciais. Assim, a questão de pesquisa deste estudo é: **de que forma o software de geometria dinâmica GeoGebra pode contribuir no desenvolvimento**

da habilidade de visualização espacial e na melhor compreensão de conceitos relativos à Geometria Espacial?

O software de geometria dinâmica escolhido permite construir objetos espaciais, explorar as construções, verificar e testar propriedades. Suas ferramentas e recursos permitem, por exemplo, criar pontos, retas, planos, prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas, etc. Estes objetos podem ser utilizados para realizar construções dinâmicas, das mais simples às mais complexas, e, fazendo-se a manipulação de elementos dos objetos, pode-se analisá-los sob vários pontos de vista.

Esta dissertação é composta de cinco capítulos, incluindo a introdução. Trataremos sobre o embasamento teórico do estudo no 2º capítulo; a metodologia utilizada e a sequência didática concebida (*análises a priori*) são apresentadas no 3º capítulo; discutiremos e analisaremos os resultados obtidos (*análises a posteriori e validação*) no 4º capítulo; e, no 5º capítulo, apresentamos nossas reflexões finais.

Além disso, após as referências bibliográficas, temos cinco Apêndices (A, B, C, D e E) nos quais detalhamos, respectivamente: as principais ferramentas do GeoGebra; as Fichas de Trabalho que compõem essa sequência didática; o questionário que também foi utilizado como instrumento de pesquisa e do qual foram coletadas manifestações dos alunos que subsidiaram as análises *a posteriori*; os procedimentos de construção de cada atividade e, por fim, o modelo da ficha de consentimento informado preenchida pelos responsáveis dos alunos envolvidos neste estudo.

O produto didático desta dissertação, além da sequência didática e dos procedimentos de construção feitos no GeoGebra, inclui a disponibilização de um GeoGebraBook <http://www.geogebra.org/b/SVYH6Rc7> para livro uso de professores e alunos da Educação Básica. O GeoGebraBook é um livro digital criado com a utilização do software e que permite incluir textos, vídeos, applets ou outros recursos digitais. No caso deste estudo, o livro traz a sequência didática que foi proposta no experimento feito com os alunos.

2 DISCUSSÃO TEÓRICA

O estudo da Geometria tem extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio espacial e é responsável por desenvolver habilidades básicas para a leitura do mundo. (FAINGUELERNT, 1999). Já no estudo da Geometria Espacial, em específico, o aluno é convidado a ampliar sua capacidade de abstração e surge mais fortemente a necessidade de mobilizar as habilidades de visualização espacial, pois nem tudo que compõe um objeto está visível em primeiro plano.

Segundo Hershkowitz (1994 apud Fainguelernt, 1999), o ensino da Geometria envolve a exploração e descrição do espaço, devendo proporcionar atividades que desenvolvam a sua visualização, percepção e representação, permitindo ao aluno passar do espaço real para o espaço teórico. Ou seja, a Geometria cumpre um papel fundamental, pois mobiliza estruturas mentais que possibilitam ao aluno passar de dados concretos e experimentais para processos mais rigorosos de abstração e generalização. (FAINGUELERNT, 1995).

Além disso, ao estudar Geometria, tem-se um campo riquíssimo para motivar o aluno a pensar de forma argumentativa,

> Não se pode negar que a geometria oferece um maior número de situações nas quais o aluno pode exercitar sua criatividade ao interagir com as propriedades dos objetos, ao manipular e construir figuras, ao observar suas características, compará-las, associá-las de diferentes modos, ao conceber maneiras de representá-la. (PAVANELLO, 1993, p.14).

Também, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), o ensino da Geometria deve priorizar o desenvolvimento da leitura e da interpretação do espaço. Destacam ainda que

> [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas, podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (PCNEM, 1999, p.44)

Mas, apesar da Geometria Espacial estar muito ligada ao mundo do aluno, o que temos observado é uma disposição do professor em centrar sua prática na valorização da aplicação de fórmulas e não no estudo dos elementos e propriedades dos objetos tridimensionais. Desta forma, os alunos passam a associar a Geometria a estas fórmulas, e, na maioria das vezes, não conseguem relacionar conceitos, identificar elementos ou interpretar/construir representações de um sólido.

Neste capítulo, subdividido em duas seções, tratamos de aprofundar a discussão teórica quanto aos processos de ensino e aprendizagem em Geometria Espacial. A primeira seção traz um breve apanhado do panorama do ensino da Geometria Espacial na Educação Básica e discute estudos realizados dentro dessa linha de pesquisa.

A segunda seção do capítulo trata das possibilidades de aprendizagem no ambiente de geometria dinâmica GeoGebra 5.0 3D, escolhido para este estudo. Para tanto, relacionam-se as possibilidades de utilização do software com aspectos destacados nos estudos sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, feitos por Van Hiele (apud Crowley, 1994), Gutiérrez (1992 - 1998) e Duval (2003 - 2012).

Cabe ressaltar que, apesar de alguns estudos de Gutiérrez terem sido publicados na década de 1990, este é um dos poucos autores que se preocupou em analisar os processos de ensino e aprendizagem em Geometria Espacial. Além disso, este autor dá importante destaque aos processos de visualização e representação, analisando inclusive como sucede o desenvolvimento do pensamento geométrico e das habilidades de visualização em três dimensões.

2.1 SOBRE O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Apesar da reconhecida importância da Geometria, pode-se dizer que seu ensino foi sendo omitido e muitas vezes suprimido dos currículos escolares ao longo da história. Tal característica pode ser percebida ao analisarmos pesquisas que abordam a problemática do ensino da Geometria, principalmente até os anos 90 (Pavanello (1989 – 1993); Lorenzato (1995) e Fainguelernt (1999)).

Pavanello (1989) aponta que é difícil precisar quando se começou a desenvolver conhecimentos em Geometria, o que se pode assinalar é que ela se desenvolveu de acordo com as necessidades da sociedade (agricultura, astronomia, conhecimentos de guerra, etc.). No Brasil, por muito tempo o Ensino de Geometria esteve voltado a uma abordagem essencialmente axiomática baseada no estudo da Geometria Euclidiana Clássica. Como traz Valente (1999), desde 1648, quando o ensino da Geometria foi exigido pela necessidade de preparo militar, até 1930, quando acontece a Reforma Francisco Campos, o ensino da Geometria esteve voltado ao formalismo clássico, baseado no modelo euclidiano.

Na década de 1960, a partir do Movimento da Matemática Moderna, começam-se a sinalizar mudanças significativas no ensino de Geometria. A partir deste movimento, destaca-se o estudo da matemática através da linguagem da teoria dos conjuntos, e, de certa forma, abrese mão do ensino da Geometria no Brasil, pois se dá maior destaque ao estudo da Álgebra nas práticas educativas escolares.

Ou seja, pode-se dizer que a Geometria, quando trabalhada, passa a ser ensinada de forma algebrizada, adquirindo caráter abstrato, baseado no rigor e simbolismos matemáticos, próprios da teoria de conjuntos. O professor, assim como nas décadas anteriores, continua sendo o centro do processo de ensino, apresentando conteúdos e formalismos que deveriam ser reproduzidos pelos alunos.

A partir da década de 1980, percebem-se mudanças nas preocupações dos professores de Matemática em relação ao ensino de Geometria. Nesta década, passa a existir o Movimento da Educação Matemática e, além disso, tem-se dois fatos importantes: a fundação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em 1988 e, mais tarde, a elaboração e publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1998. Evidencia-se a busca de um ensino significativo relacionado ao contexto do aluno e percebe-se maior preocupação com os processos de ensino e aprendizagem.

Especialmente na última década, o quadro de aparente abandono da Geometria vem se modificando. Observando os livros didáticos, inclusive, percebemos que os mesmos já apresentam modificações, sendo que os conteúdos de Geometria já não são apresentados ao final do livro (como antigamente) e sim diluídos entre os demais conteúdos matemáticos. Pais (2006) analisou, em um de seus estudos, 24 livros didáticos, sendo 12 do atual 8º ano e os outros 12 do atual 9º ano do Ensino Fundamental, publicados no Brasil, entre 1997 e 2002, com o propósito de avaliar as principais tendências no ensino da Geometria a partir do estudo dos encaminhamentos propostos nessas obras. Como resultado deste trabalho, o autor sinaliza a valorização do enfoque experimental e o uso de situações problemas cotidianos como características significativamente presentes nos livros analisados quanto ao ensino de Geometria.

Outro estudo que sinaliza o resgate do estudo da Geometria nos currículos é a pesquisa de Andrade e Nacarato (2004). Nela, os autores analisam os anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) no período de 1987 a 2001, procurando caracterizar os estudos existentes na linha de pesquisa que trata do ensino da Geometria. Ao todo, foram analisados 363 trabalhos que foram categorizados de acordo com o assunto abordado. Deste total, verificou-se que 71% dos trabalhos correspondiam às categorias Geometria Experimental (48%) e Geometria em Ambientes Computacionais (23%). Nestas análises se entende que a Geometria Experimental trata da compreensão do papel desempenhado pelos materiais e instrumentos nos processos de aprendizagem em Geometria.

Assim, percebe-se a intenção de que o ensino de Geometria privilegie a manipulação de materiais concretos/softwares e a aplicação de conhecimentos nas resoluções de situações-problemas. Ou seja, observamos uma tendência em relacionar o ensino de Geometria a formação de um aluno capaz de construir seu conhecimento e de relacionar os saberes construídos, inclusive com as demais áreas de conhecimento.

Além disso, nas últimas décadas várias pesquisas em Educação Matemática sinalizam para a importância de se estimular o desenvolvimento da habilidade de visualizar objetos do mundo real. Kaleff (2003) afirma que a habilidade da visualização é tão ou mais importante do que a de calcular numericamente e a de simbolizar algebricamente e que os educadores vêm tomando consciência desta importância para a formação global do aluno. Pesquisas como as de Kaleff (2003) e Montenegro (2004), indicam também algumas das dificuldades relacionadas ao estudo da Geometria. Dentre elas, podemos destacar as atividades de representação, visualização e compreensão de propriedades, bem como a incapacidade de relacionar situações geométricas com situações reais:

> Como resultado da deficiência do estudo de geometria, as formas tridimensionais e a relação da geometria com o mundo físico deixam de ser conhecidas. Consequentemente perde-se a noção de que o mundo real é que dá origem aos conceitos básicos da geometria e não ao contrário como se poderia supor. (MONTENEGRO, 2004, p. 10)

Temos observado que alunos que ingressam no Ensino Médio apresentam dificuldades geométricas básicas quanto a conceitos elementares da Geometria Plana. Montenegro (2004), preocupado com a habilidade de visualização tridimensional em alunos que ingressam na universidade, analisou o conhecimento geométrico dos mesmos por meio de atividades envolvendo diversos conteúdos em diferentes sistemas de representação – ainda percebeu uma grande deficiência.

Carvalho e Ferreira (2015) realizaram um levantamento de pesquisas brasileiras sobre visualização e pensamento geométrico junto as bibliotecas virtuais dos programas de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática ou Educação Matemática reconhecidos pela CAPES[2]. A pesquisa foi realizada em 2015 utilizando sete conjuntos de palavras-chave: geometria espacial; visualização espacial; visualização geométrica; raciocínio espacial; raciocínio visual, percepção espacial e pensamento geométrico.

---

[2] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) é uma autarquia e agência pública de pesquisa do Brasil vinculada ao Ministério da Educação que atua na expansão e consolidação da pós-graduação *stricto sensu* (mestrado e doutorado) em todos os estados do país.

Ao todo foram localizadas 29 pesquisas, todas dissertações de Mestrado (acadêmicos e profissionais). Dentre as dissertações analisadas destacamos algumas e descrevemos brevemente o contexto relacionado a cada estudo e as contribuições de cada trabalho. Iniciamos tratando de duas dissertações de autores que fizeram parte do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS.

Becker (2009), baseando-se nas ideias de Van Hiele, Gutiérrez e Piaget, elaborou uma sequência didática direcionada ao desenvolvimento da visualização geométrica e da representação bidimensional de objetos tridimensionais, dando destaque a atividade denominada “Caixa de Becker”, que consiste na interação com sólidos através do tato - desenvolvida pelo próprio pesquisador. Para tanto, analisou a produção de alunos do 3° ano do Ensino Médio em atividades de representação de objetos 3D. Pode-se destacar como resultados do estudo, a percepção do desenvolvimento da capacidade de representar os sólidos, além da melhor compreensão de objetos e de suas representações.

Ritter (2011), a luz das teorias de Van Hiele, Gutiérrez e Duval, analisou o processo de visualização no ensino de Geometria Espacial através de uma sequência didática envolvendo atividades construídas no software Calques 3D. A proposta teve como objetivo o desenvolvimento de habilidades para visualizar objetos 3D a partir de suas representações no plano. As conclusões obtidas indicam o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial e contribuições positivas do software nesse processo.

Cozzolino (2008), em seu estudo, promoveu articulações de diferentes pontos de vista sobre um objeto tridimensional, bem como de suas representações, a fim de melhorar a capacidade de visualização e oportunizar aos alunos explorar as representações em perspectiva de objetos tridimensionais através do Cabri 3D. Os resultados obtidos sinalizam diferenças significativas entre atividades promovidas com papel e lápis (estáticas) e no ambiente de geometria dinâmica, sendo que as tecnologias colaboraram para que os alunos mobilizassem seus conhecimentos sobre o objeto e suas variadas representações.

Outro estudo, que da mesma forma que o supracitado, buscou investigar as contribuições do uso de tecnologias no ensino da Geometria Espacial é o de Marin (2013). O autor trabalhou com 29 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola particular de Santa Maria (RS), quanto a visualização de secções planas no cubo. Para tanto, o autor elaborou dez atividades onde os alunos trabalharam primeiramente com lápis e papel, e logo após usando o software Cabri 3D, a fim de comparar resultados. Mais uma vez, se evidenciam vantagens do uso do software na visualização das secções obtidas.

Silva (2010) analisou em seu estudo as dificuldades manifestadas por alunos do Ensino Médio de uma escola pública ao lidar com os conteúdos da Geometria Espacial. A partir das análises, via metodologia qualitativa, a autora destaca que as dificuldades dos alunos se relacionam principalmente com a capacidade de abstração de conceitos e com a formação escolar que eles possuem (não privilegiando o ensino de Geometria). Assim, ainda segundo a autora, se percebe um ensino de Geometria que não promove a investigação e a construção do pensamento geométrico.

Vieira (2010), também baseada em Van Hiele e nos seus níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, estudou as contribuições do GeoGebra e materiais concretos na compreensão das áreas de objetos em 2D e 3D. A autora aponta em suas considerações que as atividades promoveram o aprendizado bem como a ampliação da capacidade argumentativa e dedutiva, o desenvolvimento da linguagem e o avanço nos níveis de pensamento geométrico.

Carvalho (2010) mostra em seu estudo a preocupação com as dificuldades de alunos em interpretar e elaborar desenhos que representam sólidos geométricos. Propôs, em sua pesquisa, identificar as contribuições que uma sequência de atividades com material concreto e recursos informáticos pode dar para a codificação e a decodificação de desenhos de objetos tridimensionais. Para tal, elaborou e aplicou um conjunto de atividades, envolvendo materiais manipuláveis e tecnologias. A autora conclui que as atividades contribuíram para a formação de imagens mentais, fundamentais para os processos de codificação e de decodificação de desenhos bidimensionais de figuras tridimensionais.

Ainda quanto ao levantamento realizado por Carvalho e Ferreira (2015), constata-se que das 29 pesquisas analisadas, 16 estudos estiveram direcionados ao uso softwares educacionais, principalmente de geometria dinâmica, ou seja, atualmente este é um assunto recorrente nas pesquisas em Educação Matemática.

Sena e Dorneles (2013) também procuraram mapear teses e verificar quais linhas de pesquisa estão produzindo conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria no Brasil. Para tanto, as autoras analisaram 101 resumos contidos no banco de dados da CAPES, no período de 1991-2011. Os resultados também evidenciam uma tendência das produções em concentrar-se nas linhas de tecnologias digitais.

Em comum, nestes estudos, percebe-se a inquietação de professores com os processos de ensino e aprendizagem em Geometria e a busca de recursos que favoreçam este processo. O presente trabalho vem a contribuir nesta análise do ensino da Geometria Espacial e na investigação de tecnologias que possibilitem o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Desta forma, tratamos na próxima seção das potencialidades do GeoGebra 3D e suas possíveis contribuições no processo de desenvolvimento de habilidades e do pensamento geométrico.

2.2 O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL E O GEOGEBRA 3D

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), a construção do pensamento geométrico e o desenvolvimento da habilidade de pensar geometricamente está intimamente relacionado a capacidade do aluno de perceber, interpretar, compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Afirmam ainda que

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. (BRASIL, 1998, p. 127).

De acordo com Fainguelernt (1999), a visualização mobiliza o pensamento espacial e o raciocínio geométrico. Do mesmo modo, a Geometria exige que o aluno acione a intuição, a percepção e a representação para interpretar o mundo e compreender a matemática. Ou seja, a visualização envolve processos mentais e cognitivos essenciais para a construção do conhecimento matemático. (FAINGUELERNT, 1999).

Diretamente ligada a habilidade de visualização, está a capacidade de criar e interpretar representações, bem como o reconhecimento das diversas representações de um objeto geométrico, já que são estas que permitem comunicar uma ideia matemática.

Acreditando no uso de tecnologias, pretende-se, nesta seção, explorar de que forma pode ser desenvolvido o raciocínio geométrico – através dos processos de visualização e representação – quando se faz uso de um software de geometria dinâmica.

2.2.1 As possibilidades do GeoGebra 3D

Conforme já mencionado, o cenário da Educação Matemática vem sinalizando, nas últimas décadas, um crescente interesse pelos processos de ensino e aprendizagem em Geometria na Educação Básica. Este interesse pode estar relacionado a disponibilidade de novos softwares de geometria dinâmica que, aliados aos materiais manipuláveis, oferecem ambientes de aprendizagem mais interessantes, nos quais os alunos podem testar e experimentar.

Ambientes de geometria dinâmica permitem ao aluno maior autonomia para fazer construções e exercer a tomada de decisão na escolha de ferramentas que possibilitam os resultados desejados. Trata-se da experimentação, exploração e análise das propriedades que constituem um objeto geométrico, que estimulam a visualização de novas relações entre conceitos e favorecem a formulação de conjecturas.

Segundo Gravina (2015), esta manipulação de figuras dinâmicas, oferecida pelo GeoGebra, introduz um novo tratamento para o registro desenho, expressão do componente figural, pois o conjunto de “desenhos em movimento” substitui o desenho particular e estático presente em livros didáticos, descaracterizando peculiaridades não relevantes e que provocam a formação de imagens mentais inadequadas. Esta mesma reflexão pode ser aplicada a manipulação de objetos 3D dinâmicos; na Janela de Visualização 3D, pode-se rotacionar a construção realizada e assim obter visualizações sob todos pontos de vista do objeto, gerando sequenciais “sólidos em movimento” que enriquecem a imagem mental.

Para Duval (2011), mesmo que os softwares não ofereçam novos tipos de registro em comparação com aqueles produzidos com lápis e papel, eles estabelecem outro modo de produção. Por exemplo, com softwares de geometria dinâmica, as representações figurais podem ser manipuladas como se fossem objetos reais e isto ajuda na exploração heurística de situações matemáticas.

Segundo Fischbein (1993 apud Gravina, 2015), os objetos geométricos se constituem de duas componentes essenciais: a conceitual e a figural e a correlação entre estas duas é indispensável. A componente conceitual representa as propriedades que caracterizam um tipo de objeto através de linguagem natural escrita, simbólica ou falada, com maior ou menor grau de formalismo. Já a componente figural é a imagem ou representação mental associada ao conceito (visualização), expressa através de um desenho, ou seja, é de natureza visual. Segundo Gravina (2015), a adequada simbiose entre estas duas componentes determina a noção correta sobre o objeto geométrico, o que não é trivial.

Pode-se dizer que o desequilíbrio entre as duas componentes, causado pela dificuldade em manipular componentes figurais e conceituais, provocam interpretações equivocadas ou inconsistentes por parte do aluno. Por exemplo, quando tratamos da altura de um prisma, há uma predisposição do aluno em identificá-la como sendo um segmento interior ao prisma, unindo os centros de suas bases, o que não acontece em prismas oblíquos. Isso indica que o aluno ainda não consegue relacionar a componente conceitual (propriedades do objeto/conceito) e a componente figural (representação visual).

Ainda segundo Gravina (2001), existem princípios e características que definem a Geometria Dinâmica e que possibilitam que ela contribua nos processos de aprendizagem. O princípio fundamental dos softwares de geometria dinâmica é a atualização simultânea dos objetos quando a figura é movimentada. Ou seja, o aluno tem a possibilidade de movimentar e "arrastar" as construções geométricas, mantendo as propriedades originais do objeto matemático preservadas, o que permite ao aluno observar/analisar as propriedades que se mantêm invariantes e a existência de padrões.

Além disso, no que diz respeito a exploração de diferentes registros de representação, condição necessária para aprendizagem em matemática para Duval (2003), vale realçar que

> Os ambientes de geometria dinâmica ampliam as possibilidades do sistema de representação, pois se tem no dinamismo das representações veiculadas na tela computador, associado à possibilidade de manipulação direta, um recurso que propicia a fluidez dos processos mentais, de forma incomparável àquela que se consegue com o texto e desenho estático, quer impresso ou feito com giz no quadro negro. (GRAVINA, 2010, p.4)

Assim, o uso de softwares permite uma mobilidade de explorações acerca de figuras e objetos tridimensionais, bem como de suas respectivas representações. Também, ao interagir com o software, além de perceber os conceitos matemáticos envolvidos, o aluno terá a oportunidade de realizar construções que se tornariam impossíveis de serem executadas com lápis e papel de forma tão precisa, rápida e dinâmica.

Dentro do universo dos softwares de Geometria Dinâmica, alguns permitem a exploração, construção e visualização de objetos tridimensionais (3D). É o caso do software GeoGebra 5.0, com sua janela de visualização 3D. Desenvolvido por Markus Hohenwarter nos anos de 2000 e 2001, o GeoGebra é um software já significativamente conhecido e empregado em Educação Matemática. Contudo, é apenas na versão 5.0 que inclui funcionalidades 3D. Talvez a particularidade mais importante desta versão é que ela possibilita a conexão de diferentes representações de objetos geométricos tridimensionais, como por exemplo, a sua exibição geométrica plana (planificação ou planos de corte), espacial e a sua descrição algébrica.

Estes ambientes permitem que o aluno observe um sólido sob variados pontos de vista, diferentemente daquilo que se tem nos livros escolares. O aluno pode interagir com o objeto matemático e assim formar imagens mentais mais ricas e significativas. Ao manipular um objeto 3D via software, determinada representação aparece como uma das posições possíveis que o objeto pode assumir, e isto dá significado e movimento às imagens mentais que são criadas pelo aluno. Segundo Gravina (2012),

> temos na tecnologia digital a ampliação das possibilidades para "experimentos de pensamento", quando as comparamos com aquelas que se consegue com o suporte dado pelo texto e desenho estático. Esta tecnologia disponibiliza, cada vez mais, ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos. (GRAVINA et al., 2012, p.13)

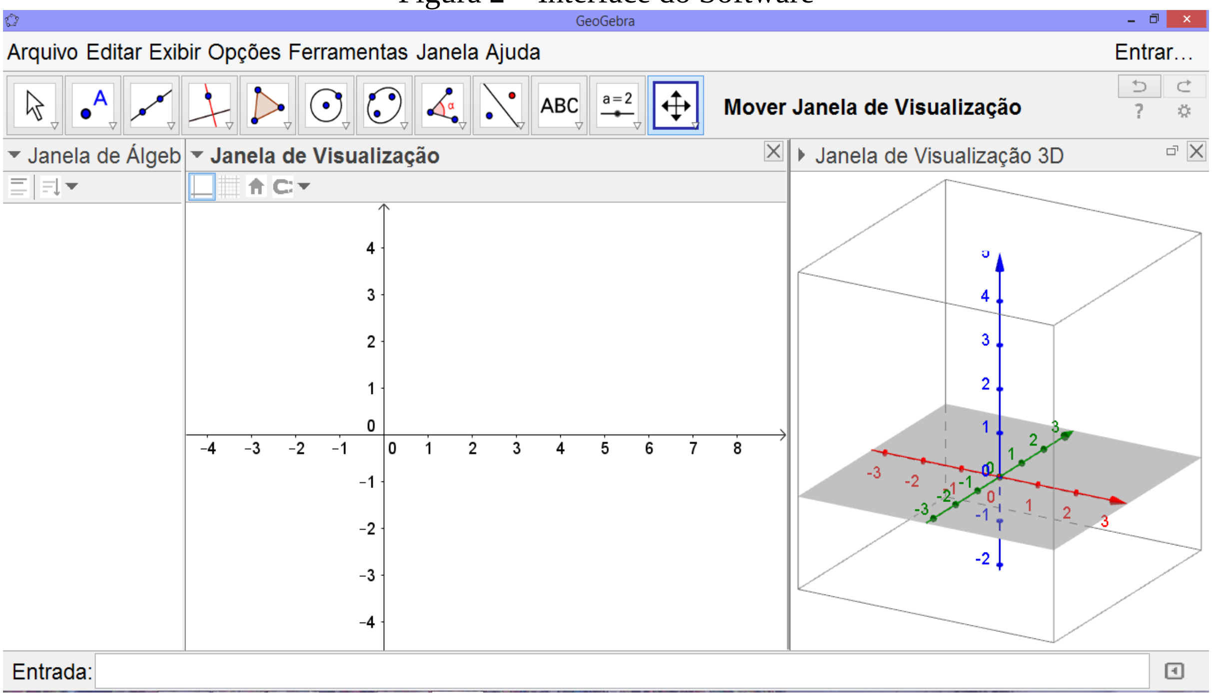
Segundo Gutiérrez (1996), quando o aluno faz uso de recursos manipuláveis, como sólidos geométricos, por exemplo, as movimentações do objeto com as mãos são tão rápidas e inconscientes, que dificilmente fazem com que o aluno reflita sobre tais ações. Já no software, o aluno é obrigado a elaborar estratégias e a antecipar o resultado de um determinado movimento e isto é um ganho do ponto de vista cognitivo.

A interface do GeoGebra 3D é constituída de duas janelas principais. A primeira janela, em 2D, é similar as versões anteriores do software, na qual aparecem os campos "Entrada", "Janela de álgebra" e "Janela de Visualização". A outra janela representa o ambiente tridimensional e traz uma nova gama de ferramentas adequadas às construções no plano XYZ, ilustradas na Figura 1. Quando exibimos as duas janelas, 2D e 3D, existem elementos que se relacionam por meio do plano XOY, comum às duas janelas, conforme exibe a Figura 2.

Figura 1 – Barra de Ferramentas do Menu 3D

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 2 – Interface do Software

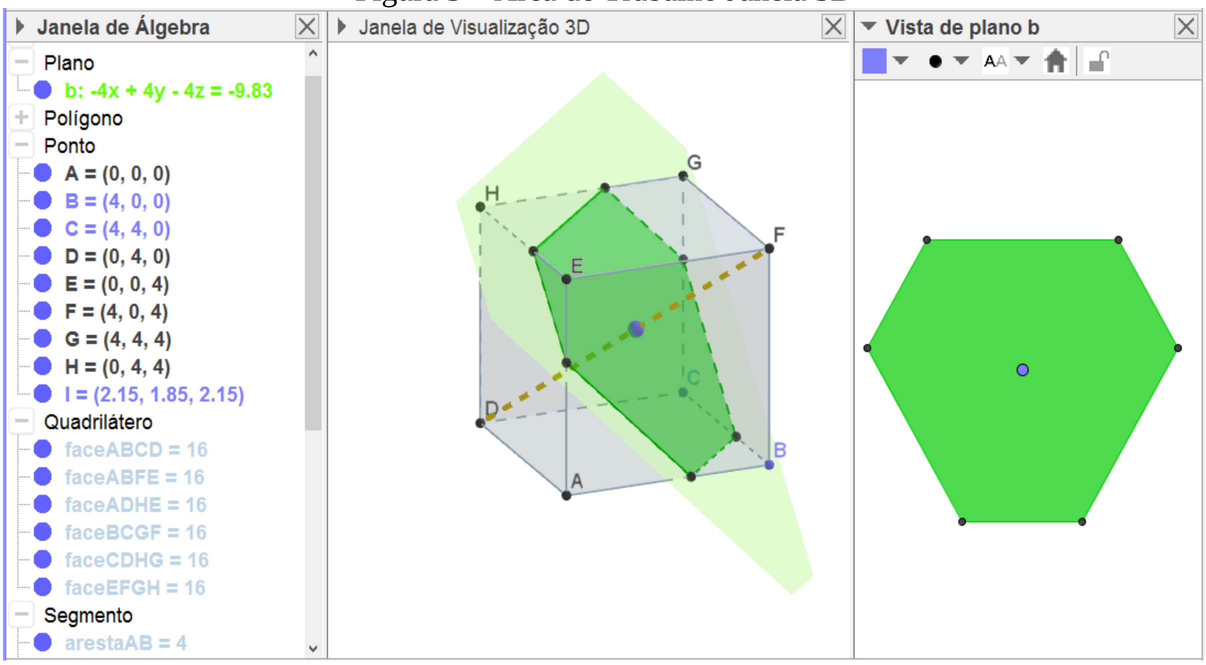


Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 3, temos a área de trabalho 3D do software, na qual podemos observar a representação figural (desenho) de um cubo com vértices nos pontos A, B, C, D, E, F, G, e H, formado pelos segmentos (arestas) AB, AD, AE, BC, BF, CD, CG, DH, EF, EH, FG e GH, e com seis faces definidas pelos elementos já citados. Todos estes elementos ou unidades figurais, a serem retomados na seção 2.2.3, podem ser observados na Janela de Álgebra, à esquerda.

Este cubo é intersectado por um plano "c", que também tem sua descrição algébrica na Janela de Álgebra; sua representação figural, ao centro; e, a representação bidimensional da secção dada por este plano de corte, obtida através da ferramenta "Criar vista 2D", ao lado direito. Como vemos, a diversidade de representações é muito rica e o diálogo entre as mesmas é simultâneo.

Figura 3 – Área de Trabalho Janela 3D

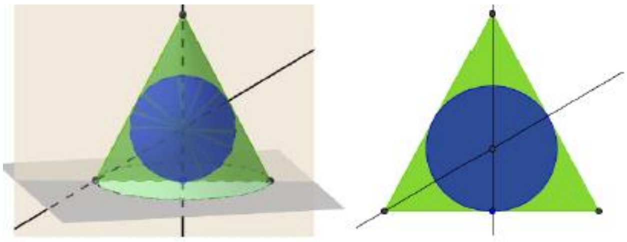


Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, esse exemplo mostra que o software permite explorar e visualizar uma infinidade de situações espaciais, que são fonte de dificuldades quando tratadas em um suporte estático como o livro impresso. Por exemplo, através de rotações espaciais, pode-se explorar situações virtuais que acionam habilidades de visualização muito similares àquelas decorrentes da manipulação de objetos 3D no espaço real.

Além disso, neste ambiente dinâmico, tem-se a estabilidade das construções geométricas oportunizando o diálogo entre as componentes conceitual e figural da figura dinâmica, como ilustra a Figura 4.

Figura 4 – Estabilidade da figura dinâmica



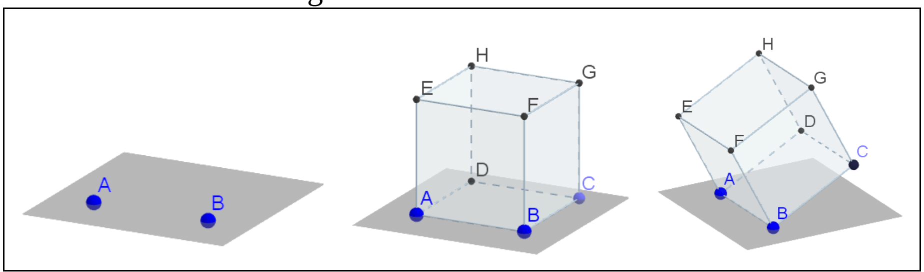
Fonte: Elaborada pela autora.

Acima, temos a construção de uma esfera inscrita em um cone reto. Ao aplicarmos movimento nos pontos que definem o círculo base do cone ou a altura do cone, o cone muda de tamanho, mas a esfera permanecerá inscrita, pois a construção da esfera baseia-se nas bissetrizes do triângulo correspondente a secção meridional deste cone. Ou seja, teremos uma coleção de imagens em movimento que permitem ao aluno perceber essa regularidade e investigá-la.

Além disso, outra característica que define a Geometria Dinâmica é que as construções feitas via software são feitas por meio das propriedades que as definem. Por exemplo, construir um retângulo, exige que o aluno conheça as propriedades de perpendicularismo entre seus lados e que mobilize esse conhecimento na escolha das ferramentas e na sua construção.

Na versão 3D, em especial, temos algumas ferramentas que permitem gerar sólidos de forma instantânea, funcionando como uma "caixa-preta" que guarda as propriedades do objeto tridimensional, sendo capaz de gerá-lo com a seleção de poucos elementos. Para gerar um cubo, por exemplo, basta selecionar dois de seus vértices, como ilustra a Figura 5. Estes dois vértices (A e B) permitem mover o cubo neste plano e aumentar/diminuir o comprimento da aresta. Um terceiro vértice (C), criado pelo software no mesmo plano dos dois vértices iniciais, possibilita a movimentação do cubo em torno da aresta definida por A e B.

Figura 5 – Ferramenta Cubo

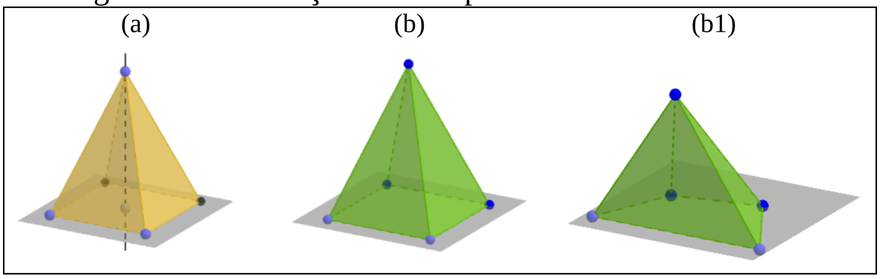


Fonte: Elaborada pela autora.

Em outros casos, diferentemente do caso anterior, os procedimentos de construção não são automatizados e devem ser levadas em consideração particularidades dos objetos 3D. Por exemplo, para gerar uma pirâmide reta de base quadrada, será necessário mobilizar alguns conhecimentos acerca do sólido, para que a construção corresponda ao desejado. Primeiramente, se esperamos que a base seja quadrada, será necessário construir esta base a partir das propriedades de um quadrado de forma que a figura não se deforme quando movimentada. Em seguida, se pretendemos que a pirâmide seja reta, será indispensável estabelecer as condições para que esta propriedade seja atendida, ou seja, o vértice desta pirâmide deverá ser construído sobre a reta perpendicular ao plano da base passando pelo centro da base quadrada. Basta então selecionar a ferramenta “Pirâmide”, a base e o vértice oposto a base, nesta ordem.

Analisando a Figura 6, visualmente podemos apontar que (a) e (b) atendem aos critérios esperados para a construção. Mas, se observamos os critérios utilizados, temos que (b) pode facilmente deformar-se, pois não foi construída com base nas propriedades do sólido desejado. Assim, pela movimentação de alguns dos elementos de (b), temos a perda de propriedades da figura esperada, originando (b1).

Figura 6 – Construções via Propriedades no GeoGebra 3D



Fonte: Elaborada pela autora.

Por trás dessas construções, segundo Gravina (2015), está uma característica interessante dos softwares dinâmicos: a representação semiótica que informa a relação funcional entre objetos geométricos. Essa relação funcional descortina-se por trás do dinamismo das figuras, dando indícios da relação existente entre componentes.

Na Figura 6 temos pontos (vértices) indicados em azul e outros em preto. Os pontos azuis indicam a possibilidade de movimento, já os pretos são fixos. Em (a), temos apenas dois pontos azuis na base quadrada, estes sugerem que o quadrado foi construído com base nestes dois vértices. Assim, somente estes dois pontos permitem manipular o quadrado, de tal forma que os pontos pretos acompanhem essa movimentação, sem permitir a deformação da base. O vértice oposto a base também é móvel, mas seu movimento é restrito a reta perpendicular. Já em (b) nenhum ponto tem restrição de movimento, permitindo as deformações do objeto geométrico.

Esta relação funcional entre objetos carrega em si potencial para provocar a descoberta de teoremas, conduz o aluno a perceber a necessidade de uma demonstração e a compreender propriedades necessárias para argumentar determinada situação.

Ainda, segundo Gravina (1996), os softwares podem encaminhar dois tipos de situação: a construção de situações - quando se tem o objetivo de que o aluno perceba os conceitos envolvidos nesta construção; ou a exploração de situações já elaboradas - quando se objetiva a exploração de invariantes ou características da situação. Ambos encaminhamentos serão utilizados na proposta didática aqui detalhada.

No que segue, apresentam-se as ideias defendidas pelos teóricos que fundamentam nosso estudo; vamos tratar de relacionar tais ideias com as potencialidades do software GeoGebra 3D.

2.2.2 A Visualização e o GeoGebra 3D

Quando tratamos da construção do pensamento geométrico, para alunos não portadores de deficiências visuais, parece ser um consenso na literatura existente que ela tem base na visualização do espaço e de suas formas. Segundo a Teoria de Van Hiele descrita por Crowley (1994), enquanto aprendem Geometria, os alunos progridem de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, sendo o primeiro dos níveis o da visualização. Este modelo nos ajuda a entender o amadurecimento dos alunos quanto ao conhecimento em geometria.

O modelo criado pelo casal Van Hiele é organizado em cinco níveis de compreensão: a visualização, a análise, a dedução informal, a dedução formal e, por fim, o rigor. No nível da *Visualização*, os alunos são capazes de identificar e comparar figuras geométricas observando sua aparência. As figuras são compreendidas como globais, e não como figuras que têm componentes e propriedades. Já no nível da *Análise*, além de identificar e comparar, os alunos conseguem perceber as propriedades que constituem a figura geométrica e as figuras são reconhecidas também por suas propriedades.

No nível da *Dedução informal*, os alunos já conseguem estabelecer relações entre propriedades de figuras e entre figuras distintas. Enquanto no nível da *Dedução formal*, conseguem compreender o conceito de dedução, sendo capazes de realizar demonstrações com maior formalismo.

Por fim, o quinto e último nível corresponde ao *Rigor*. Nesse nível, espera-se que os alunos sejam capazes de compreender e trabalhar com axiomas e demonstrar teoremas. Ou seja, atinge-se um nível mais abstrato, capaz de lidar inclusive com geometrias não-euclidianas.

A partir de uma experiência na qual os alunos manipularam sólidos e fizeram comparações, Gutiérrez (1992) identificou características correspondentes aos níveis de desenvolvimento dos alunos quanto ao pensamento geométrico espacial, tomando como ponto de partida o modelo de Van Hiele. O autor destaca quatro níveis:

- *Nível 1 (Reconhecimento):* A comparação de sólidos baseia-se na percepção global das formas dos sólidos ou de alguns de seus elementos (faces, arestas, vértices) sem prestar atenção às propriedades tais como ângulos, comprimentos, paralelismo, etc. Quando alguma destas propriedades aparece nas respostas dos alunos tem apenas aspecto visual. Os alunos não conseguem visualizar aquilo que não é visto de imediato; na busca de respostas, movimentam os sólidos, mas sem que haja algum critério, indicando ainda falta de coordenação entre os processos de enxergar e visualizar.

- *Nível 2 (Análise):* A comparação de sólidos baseia-se na percepção global dos sólidos e de seus elementos principais, agora a partir da observação de características particulares tais como tamanhos de ângulos, comprimentos de arestas, paralelismo, etc. A observação é a principal base para as explicações dos alunos. Os alunos movimentam os sólidos, mas agora indicando intencionalidade nas suas escolhas.

- *Nível 3 (Dedução Informal):* A comparação de sólidos baseia-se inicialmente na análise matemática dos sólidos e dos seus elementos, sem que seja aplicado movimento. As respostas dos alunos incluem justificativas informais com base em algumas propriedades matemáticas dos sólidos. Estas propriedades podem ser observadas nas representações dos sólidos ou conhecidas a partir de sua estrutura matemática. A escolha de movimentos aplicados aos sólidos obedece uma estratégia, baseada em propriedades matemáticas e relações entre elementos geométricos; os alunos indicam a antecipação do efeito a ser obtido com o movimento, ou seja, eles visualizam o efeito resultante.

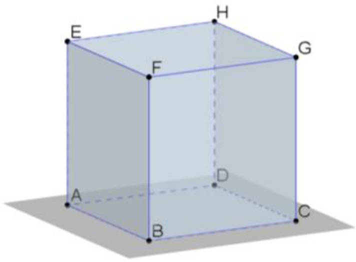
- *Nível 4 (Dedução Formal):* Neste nível os alunos analisam os sólidos, sem maior necessidade de manipulação. O raciocínio dos alunos é baseado na estrutura matemática dos sólidos ou seus elementos, incluindo propriedades não vistas, mas formalmente deduzidas a partir de definições ou outras propriedades. Os alunos deste nível têm uma capacidade elevada de visualização. Neste nível os alunos fazem um econômico e acurado uso de movimentos dos sólidos.

Vê-se que o progresso nos diferentes níveis acontece na medida em que o aluno avança na capacidade de abstração dos conceitos geométricos. Situações desenvolvidas via GeoGebra

3D, favorecem a exploração de situações nestes diferentes níveis de desenvolvimento. Uma mesma situação pode ser interpretada, compreendida e analisada de diferentes formas por um aluno, dependendo da sua maturidade quanto ao conhecimento geométrico.

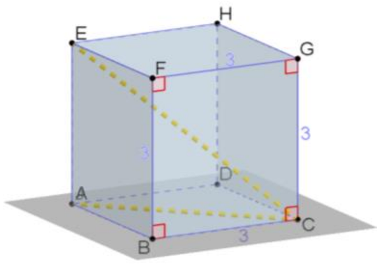
Considerando-se, por exemplo, um cubo construído via GeoGebra 3D, pode-se elencar diferentes tratamentos de suas propriedades, que se relacionam com os níveis de desenvolvimento geométrico em que se encontra o aluno, conforme o detalhamento feito na Figura 7.

Figura 7 – Níveis de Compreensão em Geometria Espacial



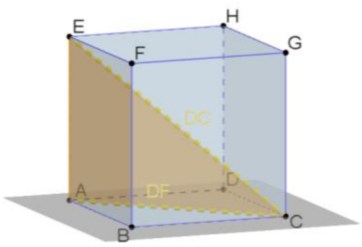
Nível 1: Reconhecimento

Identificar elementos globais como vértices, arestas e faces.



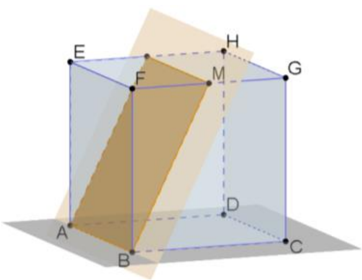
Nível 2: Análise

Reconhecer as faces quadradas (arestas congruentes e ângulos retos). Identificar diagonais da face e do cubo.



Nível 3: Dedução Informal

Elaborar argumentos e raciocínios para calcular a medida da diagonal do cubo, dado o valor da aresta; ou seja, são argumentos que dependem de algumas propriedades do objeto.



Nível 4: Dedução Formal

Demonstrar/provar, por exemplo, porque a secção dada por A, B e o ponto médio de FG é um retângulo, utilizando argumentos com maior rigor matemático.

Fonte: Elaborada pela autora.

Gutiérrez (1996) traz em sua obra a valorização do raciocínio visual. Ele salienta que devemos desenvolver e dar absoluta importância às atividades matemáticas visuais. (DREYFUS, 1991 apud Gutiérrez, 1996). Também, em seus estudos, o autor expressa uma constante preocupação com as dificuldades na visualização e compreensão de representações de objetos espaciais.

Em todos os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico a representação tem papel crucial. Conforme Gutiérrez (1996), ela é um importante instrumento para expressar conhecimentos e ideias geométricas. A representação, seja ela verbal ou gráfica, ajuda a criar ou transformar imagens mentais e produzir o raciocínio visual.

Ainda quanto as representações de um objeto matemático, nossa prática em sala de aula tem mostrado a dificuldade de compreensão de representações bidimensionais de objetos tridimensionais. Gutiérrez (1996) ressalta que toda representação plana implica a perda de alguma informação, cabendo a pessoa que recebe a representação recuperar o máximo de informações perdidas. Além disso, salienta que nenhuma representação plana de objetos espaciais é perfeita, sendo assim necessário que se trabalhe com as mais variadas representações a fim de que o aluno perceba as regras de representação correspondentes a cada tipo de registro.

O que se percebe em nossas escolas é que os livros didáticos trazem representações essencialmente planas. Assim, para que o aluno compreenda a Geometria Espacial, exige-se do aluno que interprete a figura plana criando um modelo de objeto tridimensional, e que a partir deste modelo, muitas vezes existente apenas como imagem mental, o modelo torne-se o objeto geométrico de estudo. Gutiérrez (1998) salienta que no ensino da Geometria Espacial,

> [...] o processo de compreensão do conceito subjacente a uma representação plana é complicado porque consiste em duas etapas: 1) interpretação da figura plana para torná-la um objeto tridimensional; 2) interpretação do objeto tridimensional (que muitas vezes só existe nas mentes dos alunos) para torná-lo o conceito geométrico a ser estudado. Portanto, sempre que trabalhamos com objetos espaciais e nos vemos obrigados a representá-los, levantamos um problema que tem a ver com a capacidade de visualização espacial dos alunos e sua habilidade para desenhar representações planas de objetos tridimensionais ou interpretar corretamente as representações feitas por outras pessoas. (GUTIÉRREZ, 1998, p.194-195, tradução da autora)

Contudo, a percepção das características, aparentemente ocultas nas representações planas, vem do desenvolvimento da percepção espacial e das habilidades visuais que o indivíduo possui. Para tanto, é essencial que os sujeitos envolvidos no processo de desenvolvimento de habilidades espaciais possam experimentar as variadas representações de objetos 3D. Ou seja, segundo Gutiérrez (1996, apud Becker, 2009), torna-se fundamental desenvolver habilidades que lhes permitam criar, mover, transformar e analisar imagens mentais dos objetos 3D geradas a partir das informações trazidas por uma representação plana, e, este tipo de atividade torna-se natural ao trabalhar situações via um software como o GeoGebra.

Para Gutiérrez (1998), a capacidade de visualização é o elemento chave deste problema. Zimmermann e Cunningham (1991) definem visualização como sendo um processo de formação de imagens, seja mentalmente, com papel e lápis ou com o auxílio das tecnologias, e também o processo de utilização dessas imagens de forma a descobrir e compreender propriedades geométricas. Dizem os autores que “Em matemática, a visualização não é um fim em si, mas um meio para um fim, que é a compreensão” (ZIMMERMMAN & CUNNINGHAM, 2001, p.3).

Para Gutiérrez (1996), a visualização pode ser caracterizada como uma atividade de raciocínio que utiliza elementos visuais ou espaciais, sejam eles mentais ou físicos, com o propósito de resolver problemas ou provar propriedades. Este autor destaca diferentes aspectos que se fazem presentes quando a visualização entra em jogo. Vamos ilustrar de que modo o GeoGebra pode contribuir no desenvolvimento de habilidades que estão relacionadas com estes aspectos:

- *imagens mentais*: entendida como qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade por meio de elementos visuais ou espaciais. Entendemos que o GeoGebra 3D favorece a elaboração de imagens mentais significativas e muito mais próximas da imagem real, quando comparada as representações planas com as quais nos deparamos em livros didáticos. Isto se deve a variedade de pontos de vista proporcionada via software pela ferramenta “Girar Janela de Visualização 3D”, além da já mencionada coleção de “desenhos em movimento” que enriquecem a imagem mental relativa ao objeto geométrico.

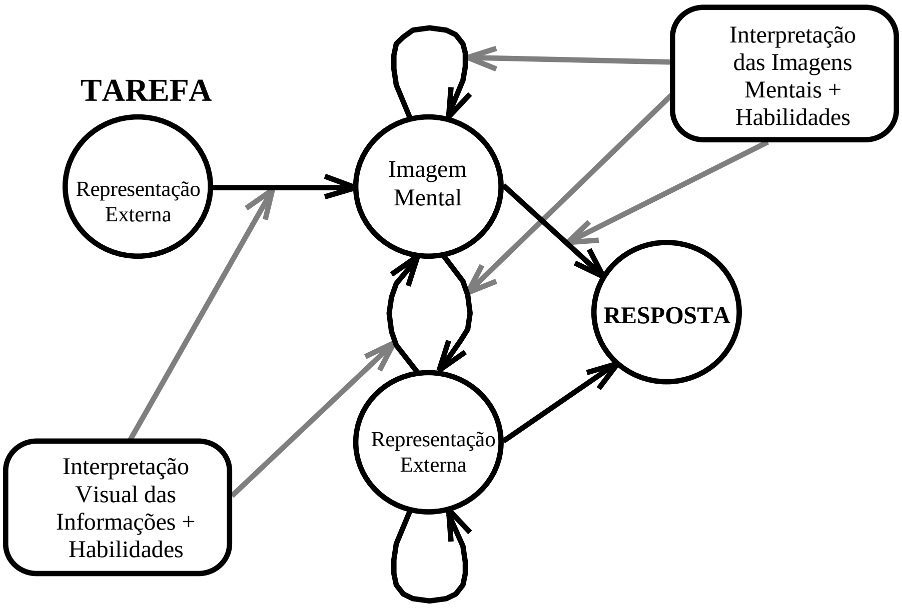
- *representações externas*: são quaisquer tipos de representação gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo fotos, desenhos, diagramas, etc., que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e desenvolver o raciocínio visual. No que diz respeito ao GeoGebra 3D, podemos dizer que nele tem-se representações externas com simultaneidade de registros de representação.

- *processos de visualização:* é a ação física ou mental que envolve imagens mentais. Compreende a "interpretação visual das informações" para criar imagens mentais e "interpretação de imagens mentais" para gerar informações. Entendemos que estas duas ações estão presentes nos encaminhamentos feitos na parte experimental de nosso estudo. O primeiro encaminhamento refere-se as situações em que o aluno interpreta e analisa situações prontas (interpretação das informações → imagens mentais), enriquecendo as imagens mentais que já possui. O segundo diz respeito a situações em que o aluno, a partir de um enunciado, deve construir a situação via software; isto exige que a partir do registro discursivo o aluno crie uma imagem mental, para então avançar na construção solicitada (interpretação de imagens mentais → informações). Esta é uma atividade que exige raciocínios mais elaborados.

- *habilidades de visualização*: habilidades específicas que devem ser desenvolvidas para a resolução de problemas geométricos, tais como: percepção da figura, rotação mental, percepção de posição e relação espacial e comparação visual. Os menus do GeoGebra 3D provocam estas habilidades, através do olhar para o sólido sob vários pontos de vista e da utilização de ferramentas de transformações geométricas (rotação, translação e reflexão) no espaço.

A Figura 8 apresenta o diagrama que representa o processo de visualização quando se resolve determinada tarefa.

Figura 8 – A visualização na resolução de uma tarefa matemática



Fonte: Tradução de Gutiérrez (1996).

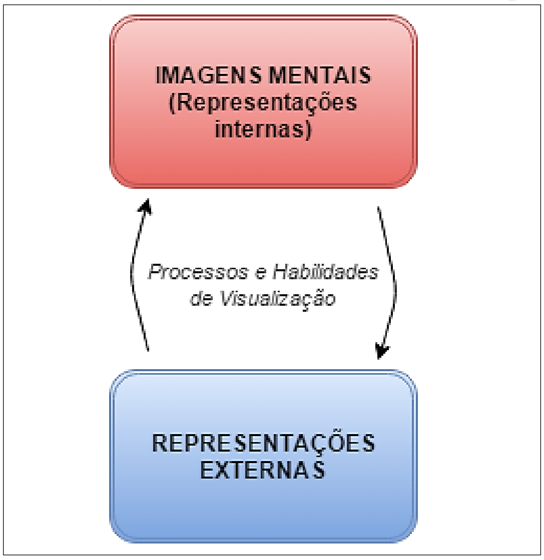
O diagrama também ajuda a entender o processo de visualização quando se faz uso do GeoGebra 3D: o aluno recebe uma determinada tarefa (Ficha de Trabalho) que é interpretada, por ele, usando uma representação dinâmica externa do objeto geométrico (um objeto 3D na tela do GeoGebra), apropriada para gerar uma imagem mental. A partir dessa primeira imagem mental, o aluno inicia um processo de raciocínio visual ativando os conhecimentos e habilidades que já possui, podendo direcionar-se diretamente a resposta da tarefa ou, se houver a necessidade, gerando outras imagens mentais e representações externas antes de chegar a resposta.

Se o processo de visualização está voltado para a “interpretação visual das informações" e a criação de imagens mentais, o aluno recorre a representação externa recebida para, a partir das habilidades que já possui, elaborar/aprimorar suas imagens mentais. Se o processo está voltado para a "interpretação de imagens mentais" que vão gerar informações, o aluno partindo da representação externa, discursiva por exemplo, deve gerar inicialmente uma imagem mental, para então avançar na construção do objeto 3D e então ou direcionar-se a resolução da tarefa, ou reformular suas imagens mentais.

Em suma, podemos dizer que Gutiérrez preocupa-se, em sua teoria, com a construção das imagens mentais de objetos tridimensionais. Esta construção, segundo o autor, está relacionada ao uso e compreensão da diversidade de representações de um objeto matemático.

Assim, pode-se dizer que, para Gutiérrez, a construção do pensamento espacial se desenvolve conforme o diagrama ilustrado na Figura 9. Diferentemente do diagrama anterior, que apresenta o processo de visualização ativado em uma determinada tarefa, abaixo, se esquematiza as ideias de Gutiérrez quanto ao desenvolvimento do pensamento geométrico, baseado na interação entre imagens mentais e representações.

Figura 9 – Construção do Pensamento Geométrico para Gutiérrez



Fonte: Elaborado pela autora.

Salientamos, novamente, que apesar de muitos de seus estudos terem sido desenvolvidos na década de 90, Gutiérrez traz à tona uma temática que ainda é atual no ensino da Geometria Espacial.

2.2.3 As Representações Semióticas e o GeoGebra 3D

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval tem sido uma das principais referências de pesquisa quando tratamos das representações matemáticas e sua relação com a aprendizagem de conceitos matemáticos.

A matemática trabalha com conceitos abstratos, com objetos que não são diretamente acessíveis, daí a necessidade de mobilizar representações para sua apreensão. (DUVAL, 2011). Assim, “[...] Não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação.”. (DAMM, 2010, p. 169). Ou seja, a comunicação de ideias é feita através de registros de representação tais como gráficos, diagramas, esquemas, figuras geométricas, escrita de números, escritas algébricas, etc. Contudo, Duval ressalta que o papel destas representações vai além da comunicação de ideias, destacando-as como essenciais para o funcionamento cognitivo do aluno:

> [...] consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer, para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. (DUVAL, 1993, tradução MORETTI, 2012, p.269)

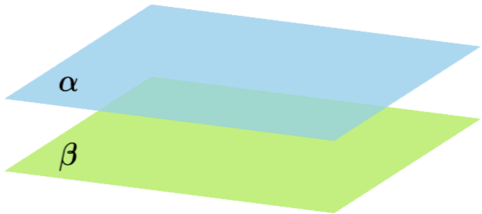
O autor também aponta que há uma grande variedade de representações em matemática e que estas podem ser agrupadas em quatro grupos de registros: a língua natural; as escritas numéricas, algébricas ou formais; as representações gráficas e as figuras geométricas. Também, indica que a compreensão da atividade matemática exige a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação. Nos diz ele: “É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o “enclausuramento” de cada registro”. (DUVAL, 2003, p. 22). Ou seja, a compreensão matemática implica no trânsito de diversos registros e na coordenação de registros de representação que se referem a um mesmo objeto matemático.

Uma forma geométrica, por exemplo, pode ser representada por sua definição formal expressa em linguagem simbólica, ou escrita ou por meio de desenhos. Cada uma destas representações corresponde a um tipo de registro de representação. Mas é importante destacar que nenhuma delas constitui plenamente o objeto matemático.

Pode-se dizer que a mobilização cognitiva exigida pela Geometria exige a interação de representações. Especialmente na Geometria Espacial, trabalha-se com três registros de representação: o registro na linguagem natural, o registro figural e o registro simbólico (numérico ou algébrico), ilustrados na Figura 10.

Figura 10 – Registros de representação em Geometria Espacial

PLANOS DISTINTOS PARALELOS: Dois planos distintos são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto em comum. → Registro em Língua Natural



→ Registro Figural

$\alpha \mathbin{//} \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$ → Registro Simbólico

Fonte: Elaborada pela autora.

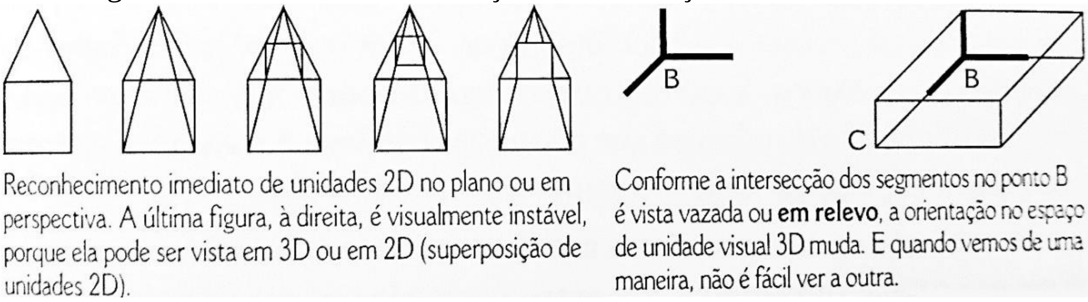
Além disso, conforme Duval (apud Almouloud, 2003) na aprendizagem da Geometria tem-se a presença de três tipos de habilidades: a visualização, a construção e o raciocínio. Com a visualização o aluno examina o espaço; com a construção (usando régua, compasso, softwares) ele elabora suas imagens mentais; com o raciocínio, ele estende o conhecimento à prova e à demonstração das situações. Podemos dizer que além de favorecer a percepção da diversidade de registros, o software GeoGebra 3D proporciona ao aluno desenvolver tais habilidades.

Dentre a variedade de registros de representação disponíveis, em Geometria, dá-se especial importância ao registro figural. Conforme Duval, as figuras geométricas diferem-se de outros tipos de representação pelo fato de que “existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas e as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer uma exclua a possibilidade de reconhecer outras”. (DUVAL, 2011, p.86). Por unidades figurais, características a cada dimensão, entendem-se: os pontos (elementos 0D); as retas e curvas (elementos 1D); polígonos e círculos (elementos 2D); ou ainda os cubos, pirâmides, cilindros, etc. (elementos 3D); salientando que toda passagem de dimensão implica um salto cognitivo considerável.

É na sua obra de 2011 que Duval avança no detalhamento do registro figural. Para ele as figuras constituem um sistema semiótico próprio. As situações geométricas espaciais exigem um olhar específico, pois, muitas vezes, é preciso ver além do que se impõe à primeira vista. Ou seja, muitas vezes é necessário desconstruir dimensionalmente os objetos geométricos que reconhecemos à primeira vista em outras formas não vistas de imediato, conforme ilustra a

Figura 11. Na primeira coleção de imagens (à esquerda), de imediato, o aluno pode interpretar a representação como sendo em 2D (superposição de figuras planas) ou como sendo uma representação em perspectiva de objeto 3D. O mesmo acontece na representação da caixa, onde o vértice B pode ser visto como a intersecção de três retas (2D) ou em perspectiva.

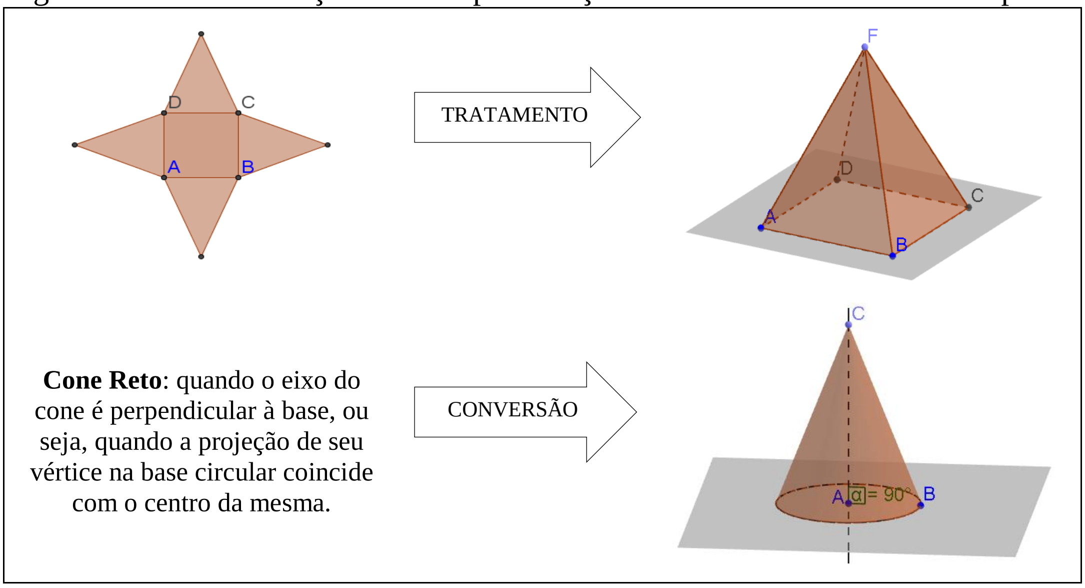
Figura 11 – Mobilidade ou Fixação da focalização dimensional do olhar



Fonte: Duval (2011, p.93).

Outro aspecto importante que é tratado na teoria dos registros de representação de Duval (2009) é a questão das transformações de registros. Dois são os tipos de transformações - os tratamentos e as conversões - e a Figura 12 traz exemplos ilustrativos no contexto da Geometria Espacial. Primeiramente traz-se o exemplo de um tratamento, na qual o registro planificação é transformado em registro objeto tridimensional, contudo sem sair do sistema de representação figura/desenho. E abaixo tem-se um exemplo de conversão: transposição do registro língua escrita para o registro figural, aqui temos dois registros diferentes, um externo ao outro.

Figura 12 – Transformações entre representações semióticas na Geometria Espacial



Fonte: Elaborada pela autora.

O tratamento acontece quando a transformação permanece em um mesmo sistema de representação (relacionar um sólido a sua planificação, como no exemplo), ou seja, as representações são transformadas dentro das regras de um mesmo sistema de representação ampliando o conhecimento acerca do objeto. No caso da Geometria e, em particular, no caso da Geometria Espacial, o tratamento no registro figural é uma transformação de fundamental importância, e os softwares de geometria dinâmica favorecem a versatilidade em tais tratamentos. Quanto ao uso de softwares no ensino e aprendizagem de Geometria, Duval (2011) diz que:

> [...] as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. Ver uma figura geométrica no monitor ou vê-la no papel exige que nosso olhar faça a mesma desconstrução dimensional [...], no entanto eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração de tratamentos[...]. (DUVAL, 2011, p. 137).

Ainda segundo o autor, o trabalho com softwares de geometria dinâmica, tais como o GeoGebra 3D, favorece a exploração da variedade de tratamentos de forma mais rápida e precisa, quando comparada ao tradicional lápis e papel. A manipulação dos objetos 3D com o recurso “arrastar” proporciona, de forma imediata, inúmeras reconfigurações do objeto. Duval valoriza tal recurso da geometria dinâmica:

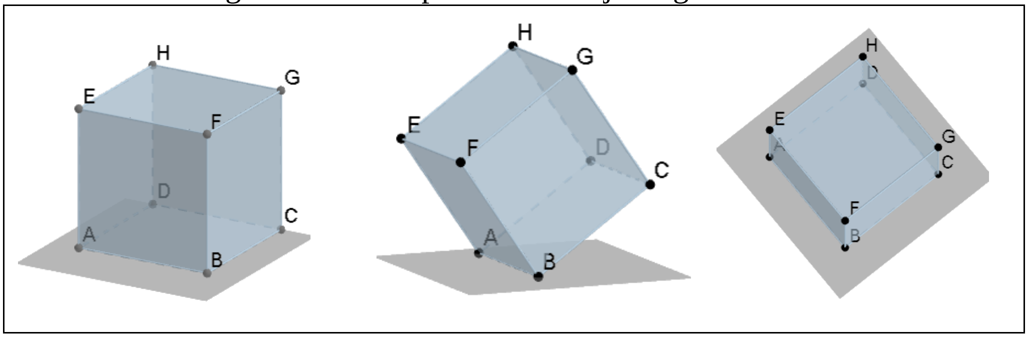
> [...] a novidade fenomenológica mais espetacular se deve ao fato de que as representações semióticas não discursivas tornam-se manipuláveis como objetos reais. Podemos deslocá-las, fazê-las rodar, ou estendê-las a partir de um ponto. Este aspecto “dinâmico” é apenas uma consequência da potência ilimitada do tratamento. (DUVAL, 2011, p. 137).

No que segue vamos elencar alguns tratamentos do registro figural que podem ser feitos via o GeoGebra 3D e vamos tomar o cubo como objeto 3D inicial.

1º Tratamento: Manipular/Girar objetos geométricos

Pode ser observado na imediata manipulação de objetos via ferramentas do GeoGebra 3D. As ferramentas  “Mover”,  “Girar Janela de Visualização 3D” e  “Mover Janela de Visualização” permitem ao aluno modificar instantaneamente a posição de objetos geométricos 2D e 3D, o ponto de vista de observação do objeto (inclusive de forma contínua), bem como manipular o objeto, aumentando/diminuindo comprimentos “arrastando” vértices, por exemplo.

Figura 13 – Manipular/Girar objetos geométricos



Fonte: Elaborada pela autora.

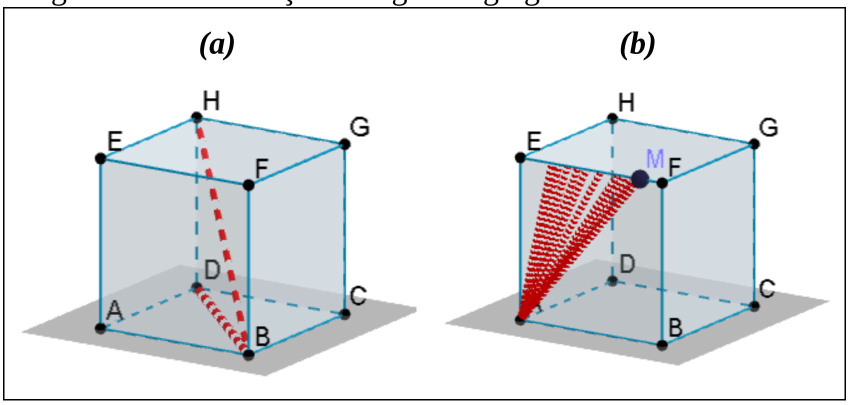
2º Tratamento: Construção de novos elementos geométricos

Referem-se aos tratamentos que correspondem a inclusão de novos elementos geométricos na figura/objeto original. Podem ser elementos fixos ou móveis. Exemplos:

(a) Estáticos: Inserir diagonais, colorir arestas, determinar pontos médios, construir retas que fazem uso de elementos do cubo, etc.

(b) Com Movimento: Inserir segmento AM sendo M móvel. (Vemos na Figura 14(b), através da ferramenta "Habilitar rastro", algumas possíveis posições do segmento dependendo do movimento de M).

Figura 14 – Construção de figuras agregando novos elementos

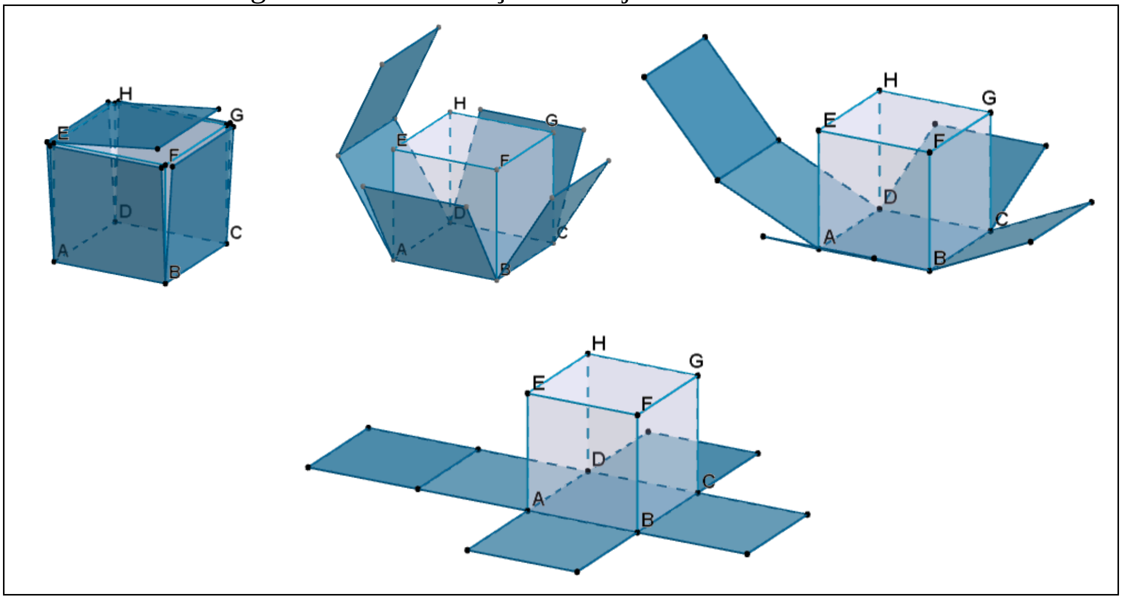


Fonte: Elaborada pela autora.

3º Tratamento: Planificação de Objetos Tridimensionais

Os sólidos geométricos são formados pela união de figuras planas que podem ser identificadas e visualizadas, mais facilmente, através da sua planificação. Dependendo do objeto 3D, a tarefa de planificá-lo pode tornar-se exaustiva. O GeoGebra 3D, através da ferramenta  “Planificação” permite planificar poliedros de forma rápida, inclusive podendo animar a movimentação que transforma a representação 2D em 3D e vice-versa.

Figura 15 – Planificação de Objetos Tridimensionais

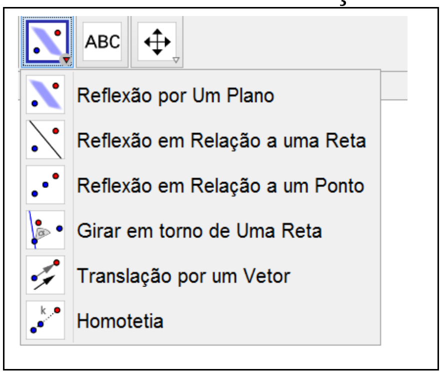


Fonte: Elaborada pela autora.

4º Tratamento: Transformações geométricas no espaço

As transformações geométricas produzem diferentes tipos de tratamentos no registro figural. A Figura 16 ilustra o menu de transformações no espaço, disponibilizado no GeoGebra 3D.

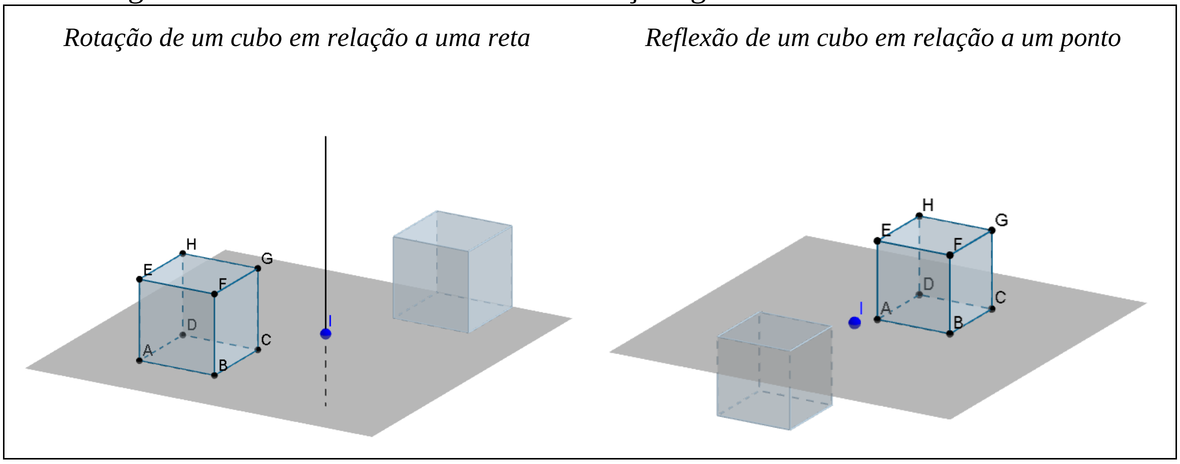
Figura 16 – Menu de Transformações no Espaço



Fonte: Elaborada pela autora.

Já na Figura 17 estão ilustrados dois possíveis tratamentos de transformação – a rotação do cubo em torno de eixo perpendicular ao plano que contém uma das faces e a reflexão do cubo em relação a um ponto no espaço.

Figura 17 – Possibilidades de transformações geométricas via GeoGebra 3D

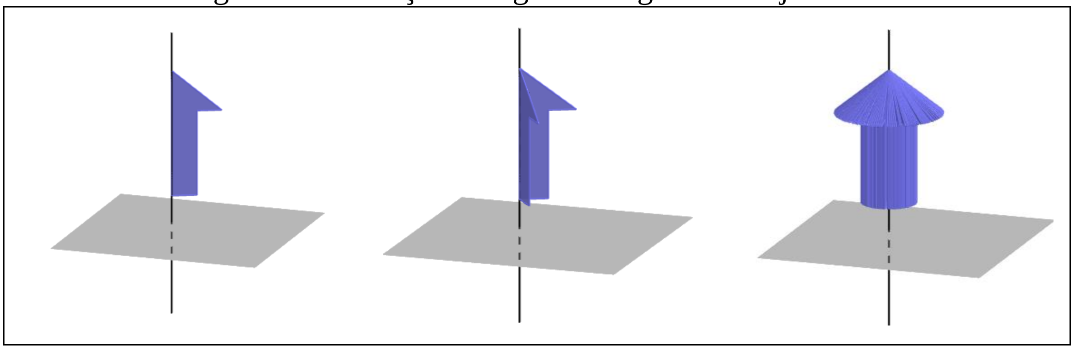


Fonte: Elaborada pela autora.

5º Tratamento: Rotação de figuras planas no espaço

Neste tratamento vamos obter sólidos de revolução: aplica-se à forma poligonal fechada uma rotação de 360 graus em torno de eixo contido no plano determinado pela forma poligonal. Com o recurso "*Habilitar Rastro*" do GeoGebra 3D, a forma gira deixando sua marca e isto produz uma superfície de revolução. A Figura 18 ilustra este tratamento.

Figura 18 – Rotação de figuras 2D gerando objetos 3D



Fonte: Elaborada pela autora.

Já quando se trata da conversão, segundo Duval (2003) existe a passagem de um registro de representação para outro, conservando o mesmo objeto matemático. Elencamos abaixo duas das conversões que são bastante utilizadas em Geometria.

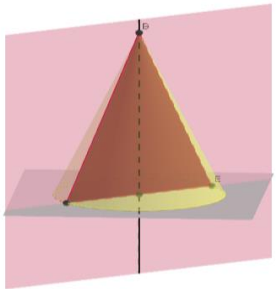
1ª Conversão: Língua Natural → Objeto 3D

A conversão se realiza da linguagem discursiva (enunciado do problema ou definição do objeto geométrico) à representação figural no GeoGebra 3D, ou vice-versa.

Cabe salientar, que Duval (2003) enfatiza que a passagem da língua natural para outra representação, seja qual for o registro, requer um conjunto de operações, por vezes complexas. Além disso, aponta que mesmo que a passagem de um registro para outro pareça natural, na verdade é um grande desafio cognitivo, uma vez que na conversão, os conteúdos das representações não são os mesmos, apesar de representarem o mesmo objeto.

Figura 19 – Conversão Língua Natural → Objeto 3D

A secção meridiana de um cone reto é a intersecção dele com um plano que contém o seu eixo. ⟶



Registro Língua Natural ***Registro Figural***

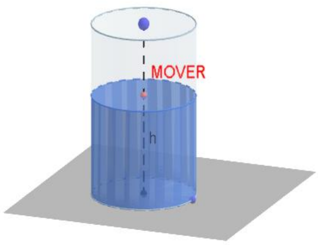
Fonte: Elaborada pela autora.

2ª Conversão: Objeto 3D → Registro algébrico → Gráfico cartesiano

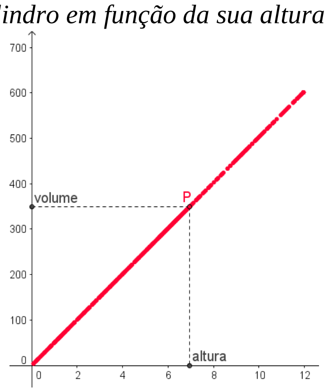
No exemplo, ilustrado na Figura 20, temos o registro figural dinâmico de um cilindro azul com altura variável. O primeiro passo da conversão é do registro figural para o registro algébrico, de forma a obter-se a função que expressa o volume do cilindro em função da altura (sendo que a base tem área constante). O segundo passo da conversão é do registro algébrico para o registro gráfico, que resulta então na reta que é o gráfico da função e que informa a variação do volume do cilindro azul.

Figura 20 – Conversão Objeto 3D → Registro algébrico → Gráfico cartesiano

Dado um cilindro de raio 4, que tipo de função esboça o volume deste cilindro em função da sua altura?



→ $A_B . h$ →



Registro Figural ***Registro Algébrico*** ***Registro Gráfico***

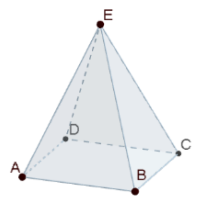
Fonte: Elaborada pela autora.

Os diferentes tratamentos e conversões utilizados em Geometria dependem de processos cognitivos que Duval (2003) nomeia de apreensões e estas podem ser classificadas como sequencial, perceptiva, operatória e discursiva.

A apreensão sequencial diz respeito à *construção* de uma figura geométrica. Ou seja, ela é exigida em atividades de construções geométricas ou na *reprodução de figura*. Um exemplo de tal situação está na Figura 21.

Figura 21 – Atividade de apreensão sequencial

Construa uma pirâmide reta de base quadrangular na janela 3D do GeoGebra.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para realizar esta construção, é necessário elencar uma estratégia do tipo "passo a passo":

- Construir a base quadrada;

- Determinar o ponto médio M do quadrado da base;

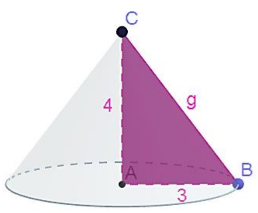
- Construir a reta perpendicular ao plano da base, passando por M;

- Criar o vértice da pirâmide sobre a reta perpendicular;

- Construir o sólido utilizando a ferramenta Pirâmide, selecionando nesta ordem, base quadrada e o vértice oposto a base.

Já a apreensão perceptiva diz respeito à *interpretação* das formas de uma figura geométrica que permite identificar ou reconhecer elementos geométricos em um dado objeto geométrico. Tomando-se, por exemplo, a situação ilustrada na Figura 22, é a apreensão perceptiva que vai dar conta da identificação do triângulo retângulo que é resultante da intersecção do cone com um de seus planos meridianos.

Figura 22 – Atividade de apreensão perceptiva



Fonte: Elaborada pela autora.

Já na apreensão discursiva, acontece a *explicitação* de outras propriedades matemáticas da figura, além das que são caracterizadas por uma legenda ou enunciado, e a *articulação* entre desenho e os elementos discursivos. É bastante exigida em atividades de demonstração, por exemplo. Na Figura 23, temos um exemplo de atividade via GeoGebra 3D que privilegia a apreensão discursiva.

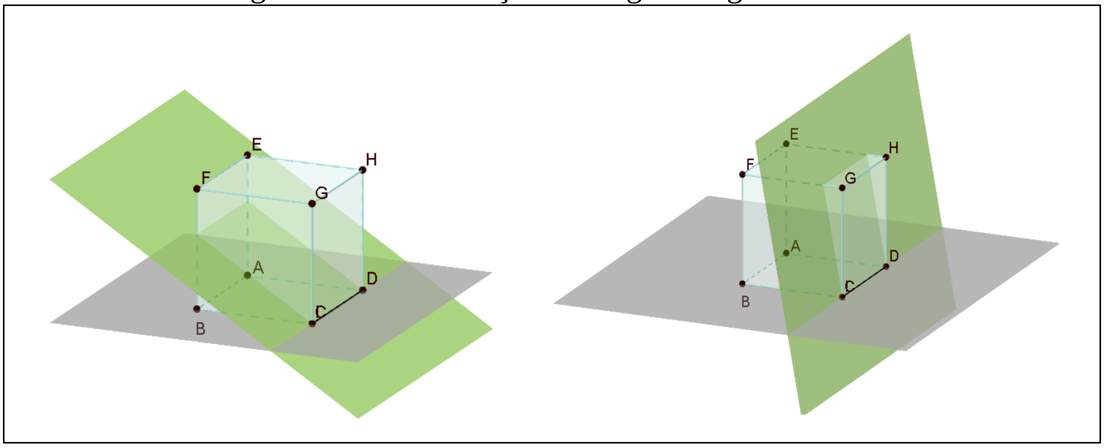
Figura 23 – Atividade de apreensão discursiva

Considere no cubo um plano de corte que gira em torno da reta determinada pelos pontos D e C (aresta DC). Descreva as secções formadas pela intersecção entre plano e cubo.

Fonte: Elaborada pela autora.

Por fim, a apreensão operatória diz respeito às modificações possíveis de um registro figural inicial e sua *reorganização.* No problema apresentado na Figura 23 o plano é móvel e com isso temos modificações na forma da secção transversal que é resultante da intersecção do plano com o cubo, conforme ilustra a Figura 24. A apreensão operatória está ligada a capacidade de reorganizar as secções formadas de acordo com a movimentação do plano de corte e de reestruturar a percepção desta figura, estabelecendo relações e percebendo propriedades.

Figura 24 – Modificações do registro figural inicial



Fonte: Elaborada pela autora.

Duval, em sua obra, assim como Gutiérrez, também dá destaque ao desenvolvimento da visualização no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico. De acordo com Duval (2003-2012), pode-se dizer que a visualização e a representação são dois constituintes essenciais e intrínsecos à formação do pensamento geométrico e à fundamentação do pensar e aprender matemática. Além disso, ele destaca que o modo de pensar, visualizar e comunicar matemática está diretamente ligada a utilização de representações.

Para Duval (2009) a visualização é uma atividade cognitiva essencialmente semiótica, pois se caracteriza com uma atividade de representação e não apenas de percepção do objeto. Salienta ainda que há uma diferenciação entre visão e visualização. Enquanto a visão proporciona acesso imediato ao objeto de estudo, a visualização fundamenta-se na produção de uma representação semiótica, já que envolve a organização de relações entre as unidades figurais que compõem o objeto.

Neste capítulo tivemos a intenção de discutir o desenvolvimento do pensamento geométrico à luz das teorias de Gutiérrez e Duval. O que se percebe é que as duas teorias se interseccionam, na medida em que colocam a visualização e a representação no centro deste processo. Em consonância com estas teorias que tratamos de explicitar o potencial do GeoGebra 3D no desenvolvimento de habilidades que participam dos raciocínios geométricos espaciais. E é, sobretudo, o diálogo entre representações e imagens mentais que tratamos de evidenciar neste capítulo teórico - um dos pilares da proposta de ensino que vamos detalhar no próximo capítulo.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA E CONCEPÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Conforme já mencionado, a escolha do tema desta sequência didática baseou-se em minha atividade docente e, principalmente, nas dificuldades observadas durante a realização de trabalho com Geometria Espacial no Ensino Médio. Minha vivência permite observar que dentre as dificuldades enfrentadas pelos alunos, destaca-se aquela que diz respeito à visualização de objetos geométricos e à interpretação de representações bidimensionais de objetos tridimensionais.

Deste modo, esta sequência didática foi elaborada com a preocupação de desenvolver habilidades espaciais e permitir ao aluno explorar diferentes representações de um objeto geométrico 3D. Acreditando no potencial da tecnologia, a questão norteadora deste estudo é: **de que forma o software de geometria dinâmica GeoGebra pode contribuir no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial e na melhor compreensão de conceitos relativos à Geometria Espacial?**

Este capítulo traz a metodologia utilizada neste estudo e o detalhamento da sequência didática concebida para o experimento, acompanhada de análises *a priori*.

3.1 A ENGENHARIA DIDÁTICA

A construção da sequência didática toma como referência a Engenharia Didática. Esta é uma metodologia de pesquisa que tem como objetivo investigar situações de aprendizagem. Segundo Artigue (1996), é uma metodologia que se diferencia por atuar como "[...] um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino. ". Assim, a Engenharia Didática compreende quatro fases: a 1ª fase, das análises preliminares; a 2ª fase, da concepção e da *análise a priori;* a 3ª fase, da experimentação; e a 4ª e última fase, da *análise a posteriori* e validação.

Na 1ª fase trata-se do quadro teórico/didático e de conhecimentos específicos que dizem respeito ao tema de pesquisa; neste trabalho, tratamos disso no Capítulo 2. Nesta análise preliminar consideramos aspectos teóricos, dificuldades e obstáculos que se apresentam na aprendizagem da Geometria Espacial.

Na segunda fase (*concepção e análises a priori*), além da apresentação da proposta de ensino, são detalhadas as expectativas do professor quanto a aprendizagem dos alunos; procura-se prever comportamentos frente às situações propostas e é enunciada a hipótese a ser validada. Esta fase da metodologia será detalhada neste capítulo.

Na 3ª fase tem-se a experimentação. Nela deve-se caracterizar o ambiente de pesquisa, os sujeitos envolvidos e o desenrolar da experiência. Por fim, na 4ª e última fase da metodologia, o pesquisador procede com uma análise do processo de aprendizagem dos alunos – as análises *a posteriori* - e faz o confronto entre análises *a priori* e análises *a posteriori*, visando a validação das suas hipóteses. Estes aspectos serão tratados no Capítulo 4.

3.2 A CONCEPÇÃO DA PROPOSTA E *ANÁLISES A PRIORI*

Inicialmente, é necessário esclarecer que as atividades aqui propostas serão aplicadas de forma concomitante ao estudo dos conceitos da Geometria Espacial. Assim, os conceitos e nomenclaturas específicas do conteúdo serão construídos no decorrer da proposta.

A sequência didática é composta de 5 encontros, programados para 10 horas–aula. As atividades envolvem diferentes competências quanto ao conhecimento em Geometria Espacial; procura-se sempre desenvolver os conceitos através do dinamismo e do potencial de visualização espacial que se tem no software GeoGebra 5.0.

Para cada encontro está prevista uma Ficha de Trabalho, com orientações básicas para a realização das atividades no Laboratório de Informática. Ao final de cada encontro serão coletadas estas Fichas de Trabalho, bem como os arquivos das construções realizadas pelos alunos.

Abaixo, no Quadro 1, se encontra o planejamento das atividades previstas para cada encontro.

Quadro 1 – Planejamento das Atividades

(continua)

	Duração	**Atividades**	**Objetivos**
Encontro 1	1 h/aula	1	- Reconhecer as posições relativas entre retas e entre retas e planos. - Identificar arestas, vértices e faces contidos em um plano. - Reconhecer intersecções entre faces. - Aplicar conceitos da Geometria de posição. - Familiarizar-se com as ferramentas do software GeoGebra 3D;
Encontro 2	2 h/aula	2 e 3	- Compreender o conceito de secção. - Visualizar e identificar secções planas no cubo, dados 3 pontos do plano de corte. - Desenvolver a habilidade de visualização das secções formadas por um plano de corte móvel.
Encontro 3	2 h/aula	4 e 5	- Visualizar sólidos de revolução gerados por figuras planas girando em torno de um dos seus lados. - Compreender o conceito de rotação no plano e no espaço.

(conclusão)

Encontro 4	2 h/aula	6,7 e 8	- Explorar e compreender o conceito de inscrição de sólidos.
Encontro 5	3 h/aula	9 e 10	- Explorar o conceito de área e volume de forma dinâmica e investigativa. - Compreender as variáveis dependentes e independentes nas funções de área e volume de objetos espaciais.

Fonte: Elaborado pela autora.

No desenrolar da sequência didática os alunos vão trabalhar em duplas, de modo a favorecer a troca de ideias e o levantamento de conjecturas. O papel da professora/pesquisadora, autora deste estudo, será de mediadora; isto significa que a professora fará questionamentos, mas concederá ao aluno um papel ativo no seu processo de aprendizagem.

Tendo como fundamentação a Teoria das Representações Semióticas de Duval, procurou-se propor atividades envolvendo: construções geométricas, com conversão do registro discursivo ao figural e formulação de registros escritos; e, o entendimento de enunciados além de resolução de problemas, nas quais há necessidade de tratamentos e conversões. Também foram contempladas nas atividades situações para o desenvolvimento de imagens mentais através da mobilização de habilidades visuais e representações externas, condição essencial para o desenvolvimento do pensamento geométrico segundo Gutiérrez (1996).

No que segue, traz-se a análise *a priori* de cada encontro, bem como as intervenções previstas para o professor. Lembramos que é nesta etapa da metodologia da Engenharia Didática que se expõe as expectativas do professor quanto ao processo de ensino e aprendizagem.

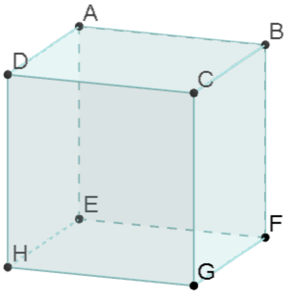
O material se organiza da seguinte forma: inicialmente apresentamos a atividade prevista para o encontro, tal qual será apresentada aos alunos, e também a *análise a priori;* em seguida, trazemos informações sobre a intervenção do professor. Também é importante esclarecer que nas atividades tem-se sempre, no final, alguns “Exercícios” que são típicos nos livros escolares e nas questões de vestibular. A parte inicial da atividade é provocativa quanto ao desenvolvimento de habilidades para visualização espacial; já os exercícios servem, sobretudo, para obtenção de indicadores de desenvoltura do pensamento geométrico espacial. Sempre que na atividade é feita referência ao uso de arquivo do GeoGebra tem-se, junto com a Ficha de Trabalho, uma imagem da tela do GeoGebra, correspondente à atividade.

3.2.1 Encontro 1

Figura 25 – Ficha de Trabalho 1 (1 h/a)

EXPLORANDO O CUBO

ATIVIDADE 1:



Construa um cubo na janela 3D do GeoGebra e nomeie os vértices do cubo de acordo com a figura acima. Rotacione o sólido e, utilizando as movimentações necessárias, siga as orientações abaixo:

a) *Pinte de verde as arestas paralelas à aresta CD.*
b) *Que faces contém o vértice B? Pinte-as de azul.*
c) *Construa em laranja uma reta perpendicular à face ADHE passando pelo centro desta face.*
d) *Marque em vermelho, se houver, a intersecção entre BCGF e CDHG.*
e) *Construa em amarelo uma reta paralela ao plano EFGH e que não contém nenhuma aresta do cubo.*

Fonte: Elaborada pela autora.

- Análise *a priori*

A atividade 1 tem como finalidade a aplicação de conceitos da Geometria de posição, tais como: posições relativas entre planos, posições relativas entre retas e também, entre retas e planos. Para esta atividade, os alunos são exigidos a utilizar conceitos de paralelismo e perpendicularismo entre os componentes do cubo. Ainda, devem compreender quais componentes do cubo estão contidas em um determinado plano e se existem intersecções entre faces do sólido. Ou seja, é uma atividade que exige a mobilização de habilidades de visualização acerca da representação do cubo.

O cubo foi escolhido pois é um objeto tridimensional básico e com características facilmente perceptíveis, com as quais os alunos tem maior familiaridade, além de explorar posições relativas de fácil visualização. Esta atividade tem características mais estáticas, (próprias da apreensão sequencial) com relação às outras atividades da sequência, pois consiste em um momento de familiarização com as ferramentas e com a linguagem do GeoGebra 3D.

- Intervenção da professora

Para esta atividade a professora deve intervir no sentido de esclarecer os conceitos fundamentais da geometria de posição. Assim, através de exploração de situações via GeoGebra, serão discutidos os conceitos de posições relativas (paralelismo, concorrência e perpendicularismo) entre retas, entre planos, e entre retas e planos.

Também é preciso garantir que o aluno conheça as características básicas de cada ferramenta disponível no GeoGebra 3D. É preciso que a professora faça uma apresentação dos principais recursos, pois esta familiarização dá autonomia ao aluno na realização das atividades e na mobilização de ferramentas que estejam de acordo com suas estratégias de resolução.

Assim sendo, serão apresentadas as ferramentas disponíveis nas janelas 2D e 3D, essenciais para as atividades propostas. Nesta atividade, damos destaque especial à ferramenta "*Girar Janela de Visualização 3D*", pois ela proporciona diferentes pontos de vista dos objetos geométricos envolvidos.

Ainda nesse momento inicial, a professora precisa acordar com os alunos que as figuras construídas no software devem ter seus princípios geométricos preservados. Por exemplo, ao construir um retângulo, deve ser garantido que os lados sejam paralelos dois a dois e que todos os ângulos sejam retos. Pode-se explorar inicialmente a construção de polígonos regulares, retângulos e triângulos retângulos, figuras que compõem a sequência didática em atividades posteriores.

3.2.2 Encontro 2

Figura 26 – Ficha de Trabalho 2 (2 h/a)

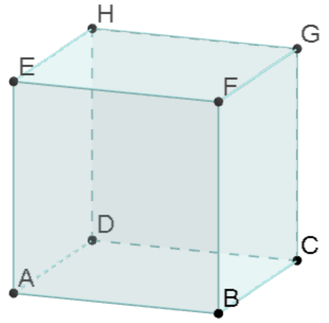
CORTANDO O CUBO

ATIVIDADE 2:

"Secção é a figura plana resultante da intersecção entre um plano e o cubo. "

Que secção é obtida quando cortamos um cubo pelo plano dado pelos pontos indicados:

a) pontos médios dos segmentos AD, EH e FG.
b) vértices D, F e H.
c) vértice D e pelos pontos médios dos segmentos EF e FG.
d) pontos médios dos segmentos EF, FG e BF.
e) pontos médios dos segmentos AE, FG e BF.
f) pontos médios de EH, GH e AB.
g) pontos médios das arestas AE e CG e pelo vértice B.

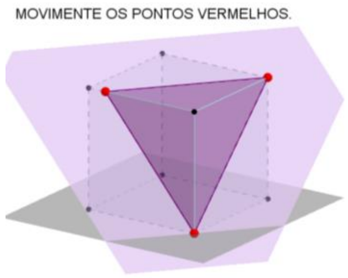


h) Construa um ponto I na aresta EF; construa o plano determinado pelos pontos A, D e I. Construa a intersecção deste plano com o cubo, observe e descreva a secção formada, movimentando o ponto I. (Obs.: o recurso "Vista 2D" do plano de corte ajuda na visualização da secção)

Exercício:

Calcule a área da secção dada pelo plano criado no exercício (h), quando I é o ponto médio da aresta EF. Considere que o segmento EF mede 2cm.

ATIVIDADE 3: Abra o arquivo <u>secção cubo 1.ggb:</u>



Na animação, três pontos determinam um plano que intersecta o cubo. Movimente os pontos e analise os tipos de secção que podemos obter. Desenhe abaixo todas as secções possíveis e nomeie-as, descrevendo as características de cada situação (quando cada uma acontece).

Exercício:

Descreva as propriedades da secção de maior área e calcule essa área se o cubo tem aresta 1cm?

Fonte: Elaborada pela autora.

- Análise *a priori*

A determinação de secções planas de um cubo baseia-se em axiomas e propriedades da Geometria Euclidiana Espacial. Alguns dos axiomas são: dois pontos determinam uma reta; três pontos não colineares determinam um plano. Algumas das propriedades são: uma reta com dois pontos comuns em um plano está contida nesse plano; um plano secante a dois planos paralelos entre si, intersecta-os segundo retas paralelas.

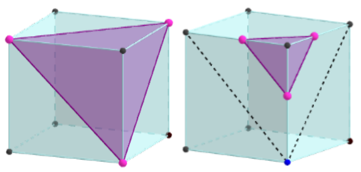
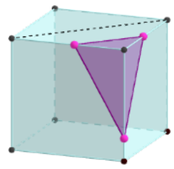
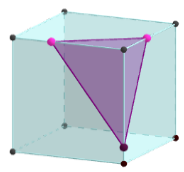
Na Ficha de Trabalho 2, o aluno precisa mobilizar a habilidade de visualizar objetos tridimensionais e de identificar as secções geradas a partir de planos de corte. O cubo é um poliedro simples que permite explorar uma diversidade de seções transversais. Mas mesmo nesta situação simples, a construção de imagens mentais correspondentes a figuras planas produzidas pela secção exige uma forte mobilização da habilidade de visualização espacial.

Para analisar este tipo de problema, envolvendo as secções de um cubo, o aluno precisa compreender as relações estabelecidas entre as figuras e suas representações, bem como entender a perda de informação que se tem nas representações planas dos objetos 3D. Apostamos que o software contribui para diminuir as dificuldades que se apresentam na visualização destas secções, pois a manipulação dinâmica junto com movimentos de rotação espacial, oferece diferentes pontos de vista para o objeto 3D.

Tanto na Atividade 2 quanto na Atividade 3, que utilizam da apreensão sequencial (passo a passo a ser executado) e perceptiva (via percepção e interpretação das secções), são tratadas as intersecções geradas a partir de planos de corte. Em específico, nas Atividade 2(h) e 3 (Apêndice B), estas intersecções são geradas pela movimentação de um plano de corte móvel e aqui tem-se exigências características da apreensão operatória, pois é necessário que o aluno reorganize a figura inicial de acordo com as mudanças de posição deste plano.

Diferentes são as figuras planas resultantes da intersecção de um plano com o cubo. Se o plano intersecciona exatamente três faces do cubo, teremos secções triangulares, conforme ilustra a Figura 27.

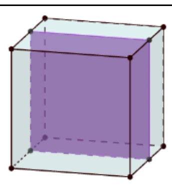
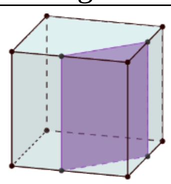
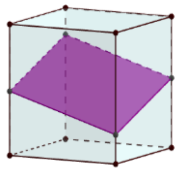
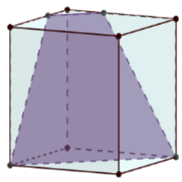
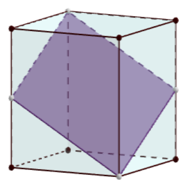
Figura 27 – Secções triangulares dado plano de corte que intersecta três faces do cubo

		
TRIÂNGULO EQUILÁTERO: *Plano perpendicular à diagonal do cubo. O plano de corte é paralelo a duas diagonais faciais do cubo, concorrentes no mesmo vértice.*	***TRIÂNGULO ISÓSCELES****: O plano de corte é paralelo a uma diagonal facial.*	***TRIÂNGULO ESCALENO****: O plano não é paralelo a nenhuma diagonal facial.*

Fonte: Elaborada pela autora.

Se o plano de corte intersecciona quatro faces do cubo, teremos secções que são do tipo quadrilátero, conforme ilustra a Figura 28.

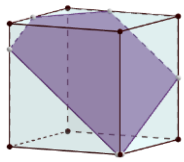
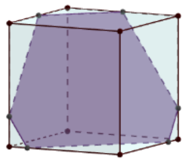
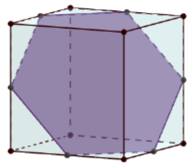
Figura 28 – Secções em forma de quadriláteros

				
QUADRADO: *O plano é paralelo a uma face do cubo.*	***RETÂNGULO:*** *O plano de corte intersecta quatro faces e é paralelo a uma aresta do cubo.*	***PARALELOGRAMO:*** *O plano de corte intersecta quatro faces, paralelas duas a duas.*	***TRAPÉZIO:*** *O plano de corte intersecta (apenas) duas faces paralelas do cubo.*	***LOSANGO:*** *O plano de corte contém uma diagonal espacial.*

Fonte: Elaborada pela autora.

E ainda temos os casos em que o plano intersecta cinco ou seis arestas do cubo, gerando pentágonos e hexágonos, como ilustra a Figura 29.

Figura 29 – Secções pentagonais e hexagonais

		
PENTÁGONO *O plano de corte intersecta cinco faces sendo duas faces paralelas (pelo menos).*	***HEXÁGONO*** *O plano de corte intersecta seis faces do cubo sendo duas faces paralelas (pelo menos).*	***HEXÁGONO REGULAR*** *O plano de corte passa nos pontos médios das arestas do cubo.*

Fonte: Elaborada pela autora.

A atividade explora uma diversidade de secções, algumas de fácil visualização, outras nem tanto. Através da manipulação de pontos e planos, espera-se que o aluno visualize as secções, de forma mais clara e dinâmica. Esta atividade exige uma constante conversão entre representações discursivas e figurais, bem como tratamentos do registro figural (inclusão de elementos e manipulação do cubo).

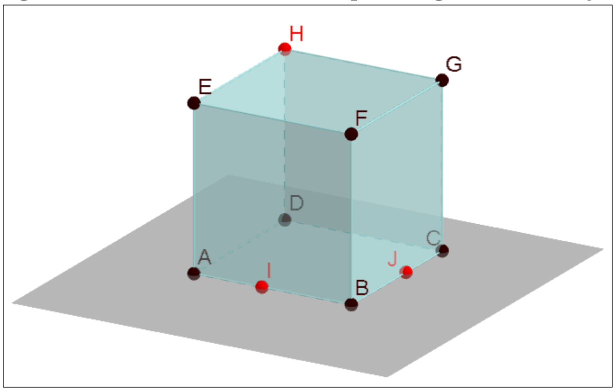
Além disso, as atividades propostas atuam nos dois encaminhamentos descritos por Gravina (2001) ao agir em um ambiente de Geometria Dinâmica - a construção de situações e a exploração de situações.

- Intervenção da professora

A Ficha de Trabalho proposta para a Atividade 2 indica uma abordagem inicial sobre o conceito de secção gerada através de plano de corte. Além disso, alguns axiomas e propriedades da Geometria devem estar claros para o aluno, conforme já mencionado.

Também, é preciso considerar que os alunos não estão acostumados a trabalhar com o conceito de secção. Assim, talvez seja necessário esclarecer como o plano de corte, dado por três pontos contidos nas arestas do cubo, gera uma secção plana, como ilustra a Figura 30.

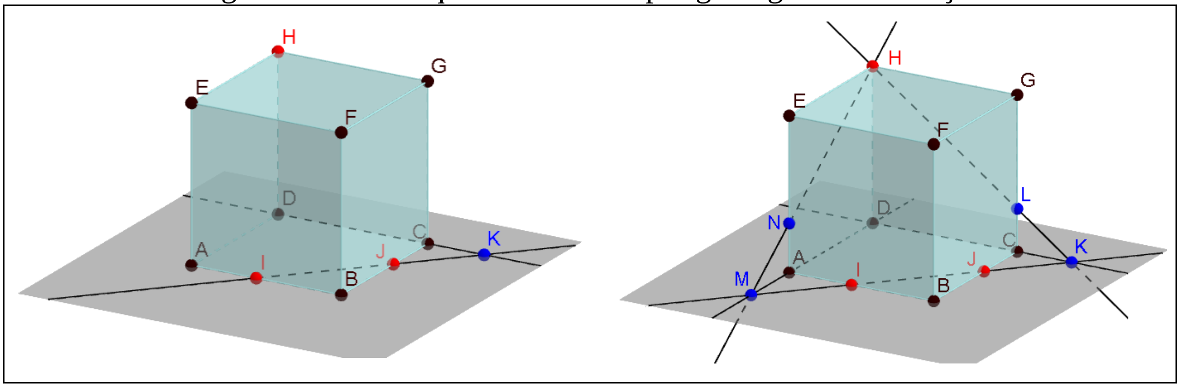
Figura 30 – Pontos H, I e J que originam a secção



Fonte: Elaborada pela autora.

A reta que passa por IJ está contida no plano da base ABCD. Como a reta IJ não é paralela ao plano CDGH temos a sua intersecção com a reta DC em K, como ilustra a figura abaixo. Já a reta HK é concorrente em CG no ponto L. De maneira análoga, demarcaremos as linhas que determinam o ponto N.

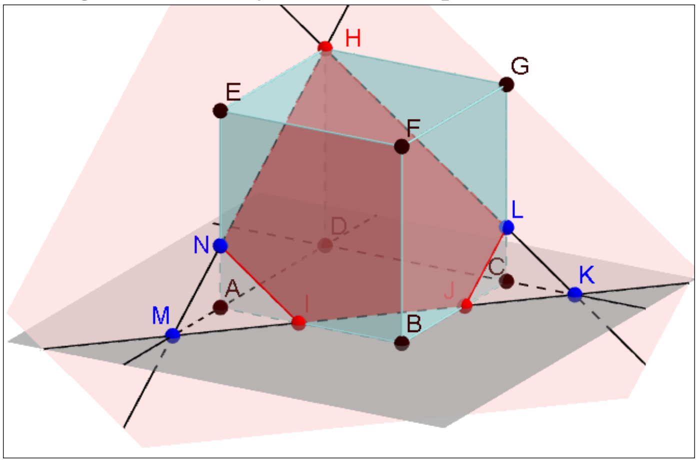
Figura 31 – Retas que delimitam o polígono gerado na secção



Fonte: Elaborada pela autora.

Teremos assim a intersecção HLJIN que gera uma secção pentagonal, como ilustrado na Figura 32. O raciocínio utilizado para a determinação desta secção pode não ser trivial para o aluno, ainda mais quando o conceito é pouco trabalhado dentro da Geometria Espacial.

Figura 32 – Secção formada a partir de H, I e J



Fonte: Elaborada pela autora.

Também é necessário que a professora analise em conjunto com os alunos as possíveis secções formadas, retomando inclusive os cálculos de áreas das figuras planas geradas neste processo.

3.2.3 Encontro 3

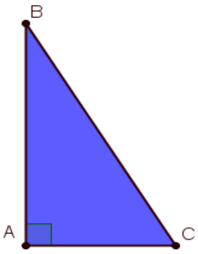
Figura 33 – Ficha de Trabalho 3 (2 h/a)

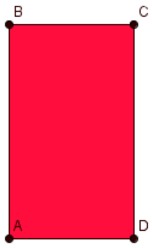
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

*“**Sólidos de revolução** são gerados pela rotação de uma forma plana, chamada forma geratriz, ao redor de um eixo. São formados pelo conjunto de posições sucessivas que a forma geratriz ocupa no espaço.”*

ATIVIDADE 4:

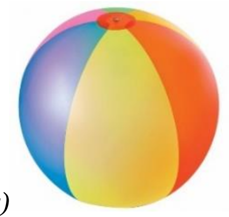
Que sólido é gerado pela rotação das figuras abaixo ao redor de um dos eixos coordenados? (Construa cada situação no plano XOZ ou XOY do GeoGebra 3D e movimente-a em torno do eixo sob o qual foi construída).

a) 

b) 

ATIVIDADE 5:

5.1 A partir de figuras planas crie os sólidos de revolução abaixo:

c) 

d) 

e) 

5.2 Para cada sólido identifique a figura geratriz e qual o eixo de rotação escolhido.

Exercício:

f) Usando revolução de figuras planas no espaço, construa um cilindro e um cone inscrito.

g) Sabendo que o retângulo que origina o cilindro tem dimensões 3 e 4 cm., calcule a geratriz e a área lateral do cone inscrito.

Fonte: Elaborada pela autora.

- Análise *a priori*

Em geral, os sólidos de revolução são pouco explorados no Ensino Médio e assim o aluno desconhece o significado do termo. Os livros didáticos de Ensino Médio exploram de modo superficial este assunto; é um conceito que aparece brevemente na definição de corpos redondos (cone, cilindro e esfera). Para que os alunos compreendam a ideia do que é um sólido de revolução, inicialmente será feita uma atividade de descoberta com a exploração do movimento de rotação no plano e no espaço.

Um sólido de revolução é obtido pela rotação de uma região plana em torno de uma reta que está no mesmo plano da região. Acreditamos que o dinamismo do software pode favorecer o entendimento deste tipo de sólido; os alunos podem manipular a região plana geradora e eixo de revolução, e também mudar de ponto de vista para observar o sólido. Tem-se nesta atividade a necessidade de conversões de registro figura para registro discursivo; também, tem-se a necessidade de tratamentos do registro figura que fazem uso de transformações geométricas. Além disso, prioriza-se os dois aspectos presentes no processo de visualização, descritos por Gutiérrez (1992) – a "interpretação visual das informações" para criar imagens mentais e "interpretação de imagens mentais" para gerar informações.

- Intervenção da professora

Nesta atividade a professora deve mediar as construções via software, orientando o aluno no sentido de analisar como as janelas 2D e 3D se relacionam. Além disso, a professora precisa tratar do conceito de rotação (transformação no espaço e no plano) e explicar como se utiliza a correspondente ferramenta do GeoGebra 3D. Ainda será necessário explorar o uso da ferramenta “Controle Deslizante”, que possibilita animar o ângulo de rotação da figura plana em torno do eixo escolhido.

Também é necessário explorar a área de um setor circular, pois o exercício final exige que se calcule a área lateral de um cone inscrito em um cilindro; também devem ser tratados os elementos básicos do cone e do cilindro, tais como raio da base, altura e geratriz.

3.2.4 Encontro 4

Figura 34 – Ficha de Trabalho 4 (2h/a)

<u>SÓLIDOS INSCRITOS</u>

ATIVIDADE 6: ESFERA INSCRITA NO CILINDRO

- Construa um círculo na janela 2D;

- Na janela 3D, construa uma reta perpendicular ao plano da base passando pelo centro do círculo.

- Utilize esse círculo e esta reta como base para criar um cilindro reto;

- Em seguida, construa uma esfera inscrita neste cilindro.

***Exercício**: Se a base do cilindro tem raio 2cm:*

1) *Qual será o raio da esfera?*
2) *Qual será a altura do cilindro?*
3) *Qualquer cilindro pode ser circunscrito a uma esfera? Por quê?*

ATIVIDADE 7: CILINDRO E ESFERA COM PLANO DE CORTE MÓVEL

- Em seguida, construa um plano móvel paralelo à base do cilindro, conforme ilustra a figura abaixo.

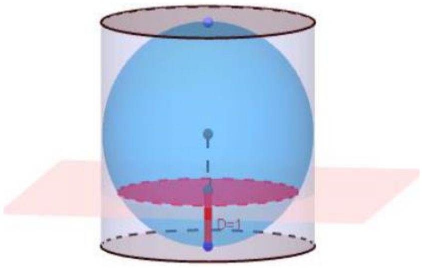
- Interseccione o plano com a esfera e pinte o círculo de intersecção de vermelho.

- Movimente o plano e analise a variação da área do círculo de intersecção. Descreva esta variação com suas palavras.

***Exercício**: Ainda considerando que o cilindro tem raio 2cm:*

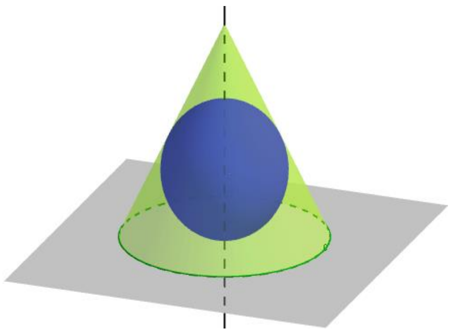
4) Qual será a área do círculo máximo?

5) Qual a área do círculo quando a distância entre a base do cilindro e o plano de corte é 1?



Dica: Construa o triângulo retângulo que tem hipotenusa igual ao raio da esfera.

ATIVIDADE 8: ESFERA INSCRITA NO CONE



1. Construa um círculo na janela 2D;

2. Da mesma forma que no exercício anterior, utilize esse círculo como base para criar um cone reto.

3. Construa um plano meridiano deste cone, interseccione este plano com o cone e exiba sua vista 2d.

4. Para inscrever uma esfera no cone, é interessante usar a Vista 2D do plano meridiano. Construa no plano meridiano um círculo inscrito no triângulo. Dica: Para construir o centro do círculo utilize a ferramenta Bissetriz de um ângulo.

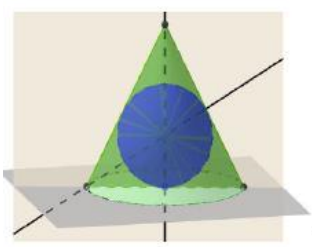
5. Tendo o centro do círculo, construa a esfera inscrita neste cone reto.

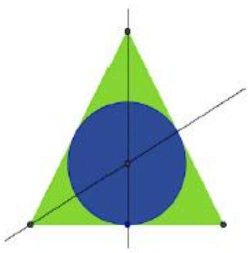
6. Movimente a sua construção de forma a "enxergar" dois círculos concêntricos e desenhe essa situação, identificando qual o ponto de vista utilizado.

7. Como fazer para que a distância entre estes dois círculos diminua? Movimente o raio e a altura e descreva o procedimento usado.

Exercício:

a) Dado um cone de revolução gerado por um triângulo retângulo de catetos 6 e 8cm, calcule o raio da esfera inscrita neste cone. (Sugestão: o arquivo construído pode auxiliar na solução)





b) Se os raios do cone e da esfera têm, respectivamente, 2 e 1cm, qual será a altura do cone?

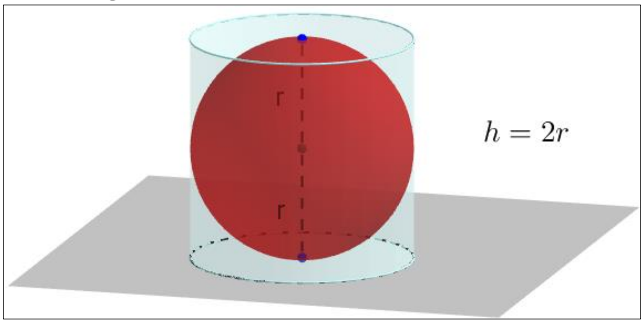
Fonte: Elaborada pela autora.

- Análise *a priori*

Com frequência nos deparamos com exercícios de vestibulares ou mesmo do livro didático que envolvem a inscrição de sólidos. Contudo, as características e propriedades geométricas presentes nestas construções são geralmente pouco exploradas na escola. O que se propõe nesta atividade é a construção de uma esfera inscrita em dois sólidos geométricos. Esta construção permite simulações e análises das propriedades dos sólidos inscritos através do uso de ferramentas do software. Novamente apostamos que os recursos do software podem facilitar a compreensão das situações espaciais, no que diz respeito à visualização e à percepção de propriedades.

No caso da esfera inscrita no cilindro, objetivo da Atividade 6, é preciso considerar que ela tangencia as duas bases circulares do cilindro e também a sua superfície lateral. Assim, as medidas do raio e da altura do cilindro são iguais, respectivamente, a *r* e *2r*, ou seja, o cilindro deve ser do tipo equilátero.

Figura 35 – Esfera inscrita no cilindro



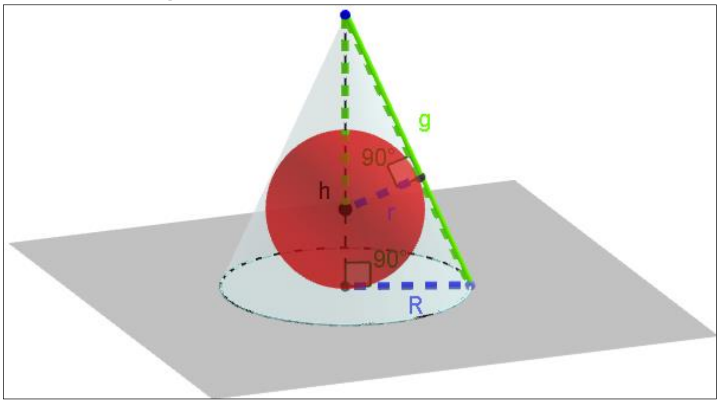
Fonte: Elaborada pela autora.

Na Atividade 7, complementar a atividade anterior, propõe-se analisar a variação da área de intersecção formada entre um plano móvel paralelo a base do cilindro e a esfera. Acreditamos que a manipulação via software favorecerá a visualização desta situação, permitindo ao aluno considerá-la sob diferentes pontos de vista.

Já no caso da esfera inscrita em um cone, proposta da Atividade 8, é importante observar que a esfera tangencia a base do cone no seu centro e é tangente às geratrizes do cone na sua superfície lateral. Considerando-se uma esfera de raio *r* inscrita em um cone de raio *R* e altura *h*, e sendo *g* a medida da geratriz do cone, podemos, por meio de uma semelhança de triângulos, estabelecer a igualdade de razões descrita em (1).

$$\frac{r}{R} = \frac{h-r}{g} \qquad (1)$$

Figura 36 – Esfera inscrita no cone



Fonte: Elaborada pela autora.

Nossos alunos estão pouco acostumados a pensar este tipo de situação e a analisar as características geométricas envolvidas quando se inscreve um sólido em outro. As Atividades 6 e 7, mais simples, tem o objetivo de familiarizar o aluno com a ideia de inscrição de sólidos geométricos. Elas também preparam o aluno para a Atividade 8, que envolve conceitos geométricos mais elaborados tais como a semelhança de triângulos.

Novamente temos para este encontro exigências quanto as quatro apreensões descritas por Duval (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória). A apreensão sequencial é exigida quando o aluno executa o "passo a passo" para que a construção seja realizada; a apreensão perceptiva, no momento em que ele interpreta e analisa a situação geométrica; a apreensão discursiva, quando relaciona o registro discursivo e figural; e a operatória, quando provoca modificações na construção inicial reorganizando a percepção inicial do objeto geométrico e identificando propriedades.

Além disso, a atividade exige tratamentos diferenciados do registro figural, tais como o uso do plano de corte 2D.

- Intervenção da professora

Para esta atividade a professora deve familiarizar o aluno com o conceito de inscrição e circunscrição de sólidos geométricos. Este é um assunto pouco discutido na escola, principalmente quando se trata das propriedades geométricas características a cada tipo de inscrição. Para tanto, a professora deve mediar a discussão das singularidades envolvidas, provocando o aluno a perceber quais são as principais particularidades matemáticas em cada situação.

Faz-se necessário retomar os critérios de semelhança de triângulos e os elementos básicos no estudo da esfera, do cilindro e do cone. Além disso, a professora deve explorar novamente a interação entre as janelas 2D e 3D disponibilizada no GeoGebra e discutir sobre as estratégias para “fixar” o raio da esfera de modo que ela permaneça inscrita, independente de modificações/movimentações.

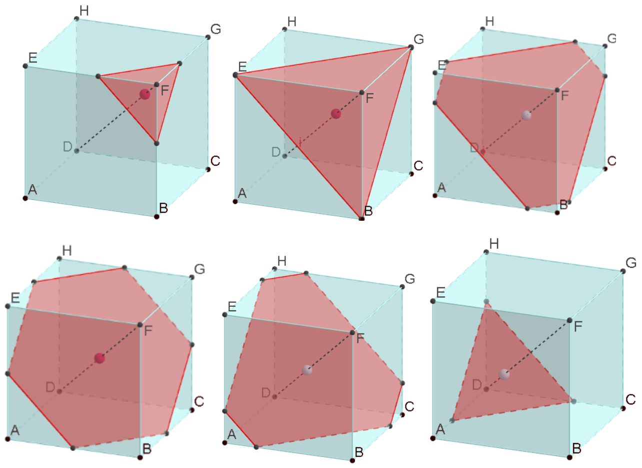
3.2.5 *Encontro 5*

Figura 37 – Ficha de Trabalho 5 (3h/a)

<u>ÁREAS, VOLUMES E FUNÇÕES</u>

ATIVIDADE 9

a) Construa um plano de corte com movimento que produza a seguinte sequência de secções no cubo. (Obs.: no início e no final do movimento a secção é um triângulo equilátero)



b) Como você realizou esta construção? Descreva os passos utilizados.

c) Como são as formas das secções formadas? Descreva-as.

d) Em algum momento a secção não é um polígono regular? Quando? Ilustre essa situação e descreva em que momento isto acontece.

e) Como é a variação da área da secção, conforme a secção se afasta do vértice F do cubo?

f) Exiba a vista 2D do plano de corte e determine qual a secção de maior área e quando isto acontece.

g) Construa o gráfico que representa a variação da área das secções. Após, analise se a sua resposta para o item f corresponde ao encontrado.

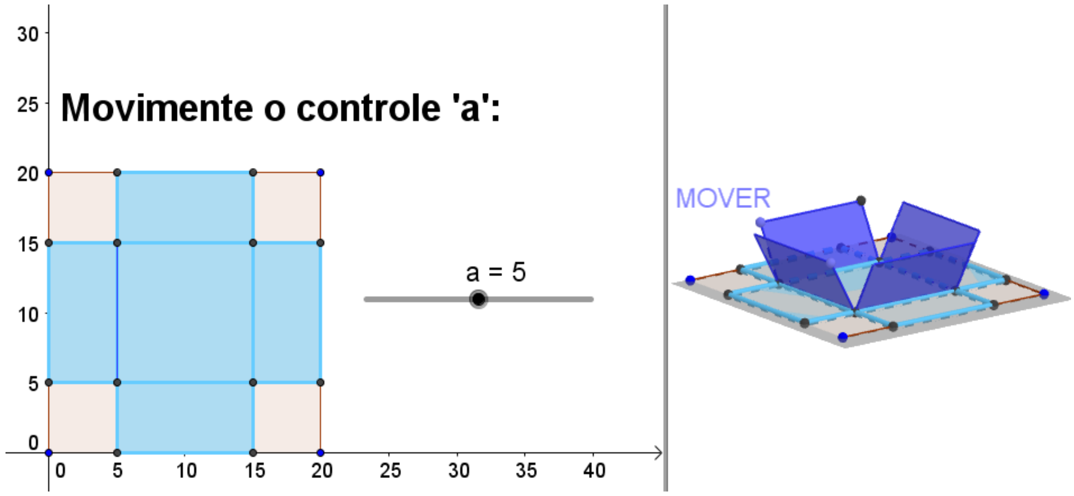
Exercício:

Sabendo que o a aresta do cubo mede 1cm:

- *h) Calcule a área da secção que corresponde ao maior triângulo equilátero formado.*
- *i) Calcule a área da secção quando ela é o hexágono regular formado por pontos médios das arestas.*

ATIVIDADE 10

Abra o arquivo <u>CAIXA DE VOLUME MÁXIMO.ggb</u>:



a) Modifique o tamanho do corte através do seletor "a". Observe que o valor da medida do corte é o mesmo valor de "a". O que ocorre com as dimensões da base e da altura da caixa quando muda o valor de "a"?

b) Como se comporta o volume da caixa conforme muda o tamanho do corte?

b.1) Se o corte for grande, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?

b.2) Se o corte for pequeno, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?

c) Utilizando o mesmo procedimento usado na Parte 1, faça o gráfico que representa o volume da caixa em função da medida "a" de corte. Compare o gráfico obtido com a resposta dada no item b). As informações dos itens b) estão de acordo com o gráfico?

d) Você consegue determinar qual o tamanho do corte "a" quando a caixa tem volume máximo? Se sim, qual?

Exercício:

e) Se a=7 qual o volume da caixa?

f) Escreva uma sentença matemática que expresse o volume da caixa construída em função do tamanho "a" do corte efetuado.

g) Se o volume da caixa é 576cm³ qual o tamanho do corte "a"?

Fonte: Elaborada pela autora.

- Análise *a priori*

Em geral, os conceitos matemáticos podem ser abordados na educação básica de diferentes formas. Existem abordagens que se baseiam em fórmulas e cálculos, que pouco contemplam a compreensão do significado de determinado conceito. Se observarmos a abordagem do conceito de área e volume em alguns livros didáticos do ensino médio, perceberemos que o foco está na apresentação de fórmulas para o cálculo de áreas e volumes de sólidos e na proposta de uma série de exercícios que exigem uma simples aplicação destas fórmulas. As propriedades geométricas são apresentadas como “fatos dados”. Não se percebe a intenção de explorar as relações que existem entre os objetos geométricos e de buscar argumentos que expliquem o porquê dessas relações.

As atividades aqui propostas pretendem explorar os conceitos de volume e área de forma mais investigativa, buscando a compreensão da relação de dependência que existe entre os componentes de um sólido, sua área e seu volume.

Na Atividade 9 é retomado o conceito de secção via plano de corte. É oferecida aos alunos uma sequência de secções geradas por um único plano de corte móvel e fica o desafio para as duplas de reproduzir esta situação a fim de gerar as secções apresentadas. Deste modo, cabe ao aluno “interpretar as imagens para gerar informações”, conforme Gutiérrez (1996), de modo a conseguir uma imagem mental adequada a reprodução da situação desejada.

Nesta situação a secção é dada pelo plano perpendicular a diagonal do cubo e pode assumir formas bastante diversas, conforme já tratado. Além disso, o aluno deve ser capaz de analisar as áreas das secções obtidas e representar a função correspondente a área destas secções com relação a posição do ponto mover sobre a diagonal do cubo.

Já na Atividade 10, o raciocínio é similar ao utilizado na etapa anterior. O aluno precisa identificar quais são as variáveis independente e dependente para estabelecer o volume de uma caixa em forma de paralelepípedo em função do corte da aba desta caixa. Além disso, deve esboçar sua função e analisar qualitativamente os resultados obtidos, percebendo máximos e mínimos da função.

Temos assim um problema de volume máximo que depende da medida “a” da aba da caixa (sendo que “a” varia entre 0 e 10). O aluno precisa observar que a medida em que “a” varia, o volume também varia, isto é, o volume da caixa depende da variável “a” que, neste problema, representa o tamanho do corte e que, consequentemente, determinará a altura da caixa a ser “montada”. Ou seja, precisa perceber que o volume é uma função de “a”.

Neste caso, a expressão algébrica que fornece o volume da caixa, para cada valor particular de ”a”, é dada por: V(x) = (área da base) x (altura) = (lado)x(lado)x(altura)= $(20-2x).(20-2x).x = (20-2x)^2x$.

Normalmente o que observamos nas práticas escolares ao trabalhar este tipo de situação é o encaminhamento de uma análise numérica. Por exemplo, é comum determinar valores de ”a”, fazendo uma tabela ou lista mostrando o valor do volume para estes vários valores.

Tabela 1 – Tabela de volumes para determinados valores de “a”

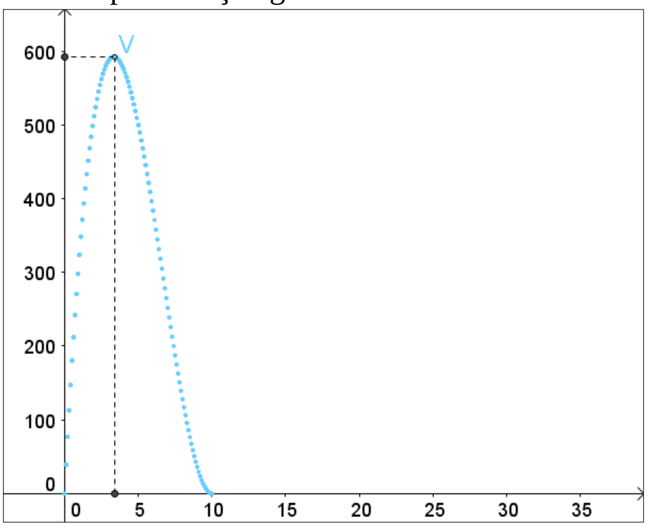
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V (*x*)	0	324	512	588	576	500	384	252	128	36	0

Fonte: Elaborada pela autora.

No entanto, este não é o objetivo da atividade, sendo que tabelas muito grandes se tornam trabalhosas e, até mesmo, difíceis de analisar, podendo inclusive induzir o aluno a uma análise equivocada da situação. Além disso, este tipo de encaminhamento restringe o poder de análise do aluno frente a este tipo de situação.

Deste modo, pode-se dizer que a análise gráfica, mesmo que aproximada, se torna muito mais rica, e é esta que pretendemos analisar com maior rigor nesta atividade. Nela se explicita visualmente a relação existente entre as duas variáveis envolvidas no problema: V (volume da caixa) e “a” (tamanho do corte).

Figura 38 – Representação gráfica do volume máximo da caixa



Fonte: Elaborada pela autora.

Temos, nesta situação, a exigência de processos cognitivos de apreensão perceptiva, discursiva e operatória e ocorre o trânsito entre os dois encaminhamentos descritos por

Gutiérrez, "interpretação visual das informações" para criar imagens mentais e "interpretação de imagens mentais" para gerar informações.

Tanto na Atividade 9 quanto na Atividade 10, o aluno precisa compreender que existe uma relação de dependência entre variáveis da construção geométrica. Assim, precisa identificá-la para que seja possível estabelecer a função que modela cada situação. Cabe ao professor orientar o processo de construção dos gráficos que representam estas funções, aspecto até agora não explorado, levantando questionamentos que orientem o aluno a pensar a relação de dependência envolvida. Ou seja, há necessidade de se mobilizar uma transformação de conversão figura → gráfico.

- Intervenção da professora

Para este encontro a professora precisa retomar o conceito de área e volume e seu significado. Além disso, cabe neste momento, discutir as características das variáveis dependentes e independentes de uma função, retomando conceitos do estudo de função tratados geralmente no 1º ano do Ensino Médio.

Neste encontro a professora media as discussões acerca dos problemas apresentados motivando o aluno a pensar as características geométricas envolvidas em cada situação, dentre elas, a ideia intuitiva de volume máximo e mínimo e as consequências visuais destes extremos na construção geométrica.

Na atividade 10, em especial, o aluno não é exigido a construir a tarefa, mas é convidado a interagir com a atividade analisando-a de forma mais investigativa e dinâmica. Ou seja, precisa mobilizar competências da apreensão perceptiva (interpretando os diferentes registros de representação), discursiva (produzindo registros escritos a partir da análise) e principalmente operatória (reorganizando a figura a partir das movimentações).

4 A IMPLEMENTAÇÃO E A VALIDAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo pretende-se relatar e analisar a aplicação da sequência didática, bem como apresentar as *análises a posteriori* das atividades desenvolvidas. Traz-se observações quanto as produções realizadas pelos alunos no que diz respeito às dificuldades, atitudes e motivação frente às atividades propostas e, na medida do possível, busca-se uma fundamentação nas considerações teóricas feitas no Capítulo 2, que tem como referência trabalhos de Duval (2003 - 2012), Gutiérrez (1992 - 1998) e Van Hiele (apud Crowley, 1994).

Como já apontado anteriormente, para o professor que trabalha com Geometria Espacial, são claras as dificuldades dos alunos para raciocínios que exigem tratamentos em registros figurais de objetos tridimensionais. É com tal informação que foi elaborada a sequência didática que faz uso do software GeoGebra 3D, detalhada no Capítulo 3; tem-se nela a intenção de provocação de habilidades e competências que podem dar conta de raciocínios geométricos espaciais.

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos e é através do confronto entre análises *a priori* e *a posteriori* que tratamos de validar a sequência didática implementada. A partir desta discussão, também são feitas reflexões sobre as situações de aprendizagem observadas, com o propósito de trazer eventuais reformulações de atividades, visando melhorias do produto didático a ser disponibilizado como uma das contribuições desta dissertação.

4.1 O AMBIENTE DE PESQUISA E SUJEITOS ENVOLVIDOS

A sequência didática foi realizada em uma turma de 3º Ano de Ensino Médio, do turno tarde, de uma escola da rede pública estadual de Farroupilha, RS. Leciono Matemática nesta escola desde 2011. A turma escolhida para esta prática é composta por 24 alunos, 23 com frequência efetiva e 1 aluna gestante amparada legalmente, todos com idades entre 16 e 18 anos. É importante comentar que ao início do ano letivo de 2015, a turma tinha 31 alunos matriculados, tendo, portanto, 6 transferências de turno e 1 desistência no primeiro semestre, característica comum ao turno da tarde desta escola.

As aulas de Matemática desta turma aconteceram nas terças-feiras (17h20min às 18h10min - último período) e quartas-feiras (14h às 16h40min, segundo ao quarto período). Devo salientar que as aulas do último período rendem pouco, pois alguns alunos precisam sair antes devido a questões de transporte. Como o Ensino Médio Politécnico exigiu uma maior carga-horária dos alunos, o turno de aula é composto de 6 períodos e muitos alunos não conseguem transporte após as 17h30min.. Além disso, a troca de horários, devido ao grande número de professores, é muito comum.

A escola atende atualmente o Ensino Médio e EJA. É uma das maiores do Município e por sua localização atende alunos do centro da cidade, de diferentes bairros e oriundos de todo o interior do município. Assim, pode-se dizer que há uma grande heterogeneidade nesta comunidade escolar.

Novamente, lembramos que a professora/pesquisadora é a própria autora deste estudo.

4.2 OS ENCONTROS E AS ANÁLISES *A POSTERIORI*

Como já mencionado na concepção da proposta, durante as atividades realizadas no Laboratório de Informática, a turma realizou as atividades sempre em duplas, a fim de favorecer a troca de ideias e a elaboração de hipóteses quanto às situações em estudo. As duplas são identificadas pelas iniciais de seus nomes; dois alunos preferiram trabalhar de forma individual e uma dupla recebeu, no decorrer do trabalho, mais um participante que não havia estado nas atividades iniciais, gerando um trio. Ao todo, participaram deste estudo 23 alunos, o que corresponde a 12 Fichas de Trabalho, para cada atividade da sequência didática, conforme detalhamento feito no Quadro 2.

Quadro 2 – Identificação dos participantes do estudo

1	DUPLA LL
2	DUPLA NA
3	TRIO CKM
4	DUPLA AJ
5	DUPLA JN
6	DUPLA AT
7	DUPLA CM
8	DUPLA TW
9	DUPLA NA
10	DUPLA GL
11	ALUNA L
12	ALUNO D

Fonte: Elaborado pela autora.

A disposição dos computadores na sala de informática é em forma de "U" e o laboratório é equipado com projetor multimídia, equipamento que foi utilizado nos momentos de discussões coletivas. Cabe ressaltar que, apesar do GeoGebra 5.0 ser um software livre disponível para todos sistemas operacionais, não foi possível utilizá-lo no Linux 3.0 e Linux Ubuntu (sistemas operacionais disponíveis nos equipamentos da rede estadual do RS) devido a alguma incompatibilidade que não conseguimos identificar entre o software GeoGebra 5.0 3D e o sistema. Para tanto, fez-se necessário formatar e consertar algumas máquinas fora de operação na escola, instalando o sistema operacional Windows.

No início de cada atividade os alunos receberam a correspondente Ficha de Trabalho; também receberam orientações sobre como deveriam proceder para salvar os arquivos do GeoGebra com as construções realizadas, mesmo que ainda não estivessem concluídas. Ao final de cada atividade, a professora/pesquisadora salvou a produção dos alunos em um pen drive, anexando as fotos e vídeos correspondentes àquela atividade. Além dos arquivos, também foram entregues as Fichas de Trabalho. Antes da implementação da proposta teve-se o cuidado de ter-se a autorização dos pais e/ou responsáveis para que os alunos participassem do trabalho de pesquisa e a respectiva Ficha de Consentimento encontra-se no Apêndice E.

Procurou-se proporcionar, sempre que possível, o tempo necessário para que os alunos iniciassem uma nova atividade apenas após o término da atividade anterior. Em todas as etapas da sequência didática, a professora/pesquisadora teve papel de fazer a mediação aluno *x* software e aluno *x* conceito matemático; foram esclarecidas as dúvidas quanto ao uso do software, quanto aos procedimentos necessários, quanto ao conhecimento matemático em questão; os alunos foram questionados e provocados tanto a pensar geometricamente quanto a escolher recursos do software que ajudassem na resolução da atividade proposta.

Na *análise a posteriori* serão analisados os arquivos construídos pelos alunos, as atividades escritas, as filmagens e fotografias feitas durante a realização das atividades. Além disso, ao final da sequência didática foi aplicado um questionário (Apêndice C) com a finalidade de também diagnosticar interesses, progressos e dificuldades dos alunos, no decorrer das atividades propostas. Os comentários de alunos, citados nas análises *a posteriori*, foram obtidos através deste instrumento e de declarações extraídas das filmagens.

Iniciaremos relatando uma atividade que teve como objetivo a familiarização dos alunos com o software GeoGebra 5.0 e suas ferramentas – foi uma preparação para a realização da sequência didática. Os alunos exploraram ferramentas de forma livre, testaram os recursos do software e se familiarizaram com a linguagem e com a lógica do GeoGebra, nas versões 2D e 3D.

O material distribuído continha um resumo das ferramentas básicas das janelas 2D e 3D (ver Apêndice A) e propôs uma sequência de atividades simples de serem realizadas usando as duas janelas.

Na Janela 2D, propôs-se a criação de pontos, pontos médios, retas em diferentes posições relativas, segmentos, polígonos e polígonos regulares. Também foram feitos questionamentos quanto a construção de retângulo que se mantivesse com suas propriedades quando manipulado nos seus vértices. A maioria dos alunos criou os vértices sem utilizar critérios geométricos, assim, ao movimentá-los a figura deixava de ser um retângulo, e ao serem questionados sobre como resolver esta situação, poucos perceberam que poderiam ser usadas retas paralelas e perpendiculares, mesmo já tendo utilizado estas ferramentas nos itens anteriores da atividade. Como mais adiante seria necessário criar figuras que mantivessem suas propriedades ao serem movimentadas na janela geométrica, este foi um momento em que a professora precisou construir a figura junto com os alunos, discutindo sempre o porquê de utilizar determinadas ferramentas.

Na segunda parte, os alunos deveriam explorar a barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D, que possui recursos diferenciados para fazer construções no espaço. As tarefas consistiam em construir pontos, retas, planos e sólidos geométricos (cubo, prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas) sem que fossem indicadas as ferramentas e passos a serem utilizados. Assim, o objetivo era permitir que os alunos pudessem analisar o funcionamento de cada ferramenta.

A maioria dos alunos conseguiu construir os sólidos, fazendo poucos questionamentos. Algumas características que apareceram durante a atividade, “incomodaram” os alunos - por exemplo, quando ao criar os prismas se deparavam com sólidos oblíquos e não retos. Alguns indicavam que o sólido construído não estava correto por apresentar esta característica, momento em que se pode discutir a existência destes dois tipos de prisma e suas peculiaridades.

Tal fato pode estar relacionado às imagens mentais que nossos alunos possuem de objetos 3D, habitualmente correspondentes às representações estáticas encontradas nos livros didáticos, e que restringem a visualização e a formação de imagens mentais. Conforme (Gutiérrez, 1996), as representações mentais e representações externas, isto é, não mentais, tais como as presentes nos livros e materiais didáticos, devem interagir para que se obtenha o entendimento correto do objeto geométrico. Esta interação ficou mais natural ao utilizar o GeoGebra 3D; os alunos exploraram representações diversas de um mesmo objeto, em um ambiente que comporta tais manipulações.

Outro ponto que necessitou discussão diz respeito à construção do cone e cilindro retos. Aqui foi necessário um auxílio maior por parte da professora/pesquisadora no sentido de fazê-los entender a condição que garantisse a construção de sólidos retos, a saber, a utilização de reta auxiliar perpendicular a base do sólido, passando pelo seu centro.

As demais construções foram feitas de forma intuitiva e com maior facilidade, sendo que poucas duplas ao final da atividade mostravam dificuldade em compreender o uso de algumas ferramentas. No que segue, avançamos nas *análises a posteriori* dos encontros e das atividades realizadas pelos alunos.

4.2.1 Análise a posteriori do Encontro 1

Após a sensibilização inicial, partimos para o trabalho com a primeira Ficha de Trabalho, que teve como objetivo explorar conceitos da Geometria de Posição. Os alunos tiveram como primeira atividade a construção de um cubo e a exploração de conceitos como posições relativas de retas e intersecção entre elementos do cubo. Nesta atividade, os alunos ainda estavam se familiarizando com o GeoGebra e, assim sendo, mostraram dificuldades para construir o que estava sendo proposto. Conseguiam mostrar e expressar oralmente o que deveriam realizar, mas ficavam confusos ao selecionar as ferramentas necessárias no GeoGebra.

Alguns procedimentos tiveram que ser retomados: como retirar rótulos dos elementos que compõem o objeto 3D e que poluem a tela de visualização; como selecionar/colorir apenas um elemento (aresta, face ou vértice) do cubo sem colorir o objeto inteiro. Outro caso recorrente de dificuldade foi o de como selecionar componentes particulares do cubo de forma que o software "compreenda" o que se quer; aqui, muitas vezes, foi preciso recorrer à janela algébrica, pois na janela de visualização 3D os componentes geométricos ficam sobrepostos e o software não "interpreta corretamente" a seleção desejada.

Ainda foi possível observar dificuldades quanto ao uso de algumas das ferramentas. Por exemplo, ao construir uma reta perpendicular a face ADEH passando pelo centro desta face, um dos alunos questionou "*Prof. Como eu digo para o programa? Perpendicular à quê? "*. Contudo após alguns questionamentos feitos pela professora/pesquisadora e a partir das informações dadas na própria ferramenta, os alunos foram ganhando desenvoltura no uso do GeoGebra.

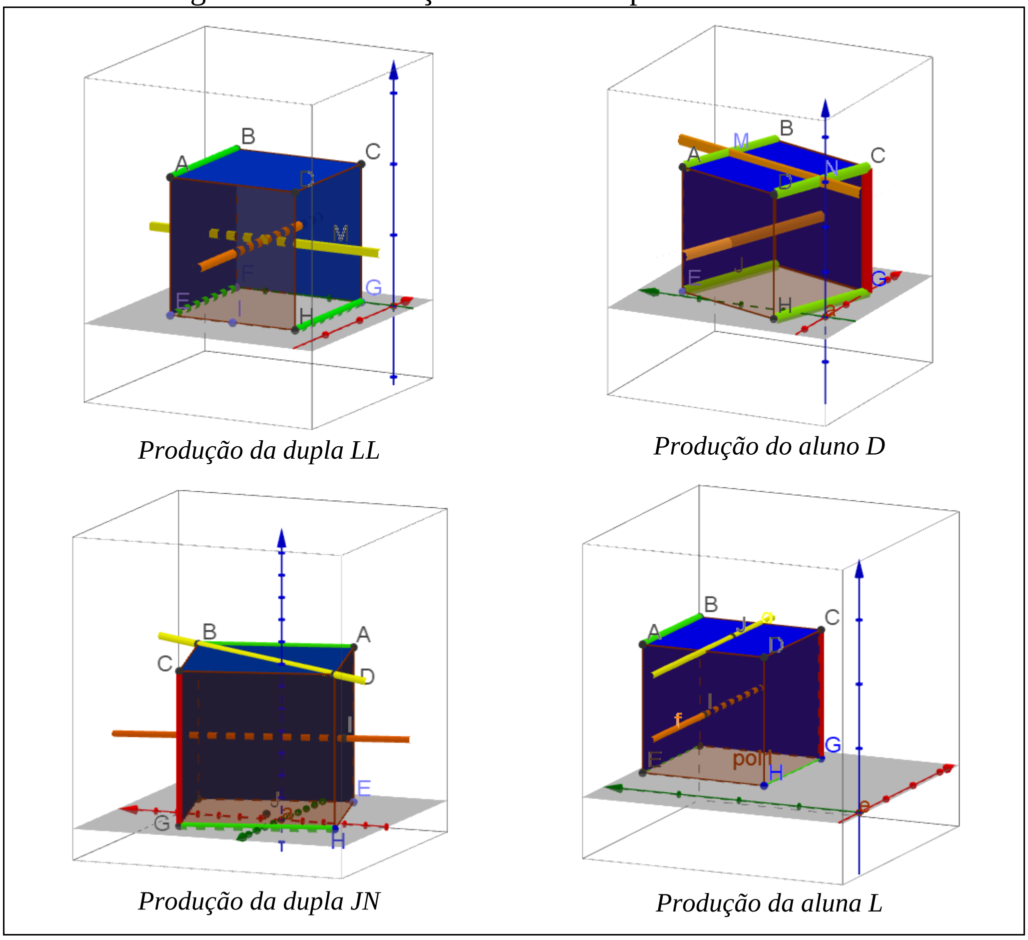
Muitos foram os diálogos entre os alunos e entre professora e alunos, e eles se caracterizaram como um ponto positivo da atividade, como um significativo momento de troca de ideias e hipóteses. Uma transcrição de um dos diálogos ilustra nossa observação:

> *"- Profe como eu acho o centro da face?*
> *- Pensa nas ferramentas que já usamos, qual delas tem a característica de encontrar o centro?*
> *- Ponto Médio?*

- Faz sentido.... Agora pensa em como usar a ferramenta...
- Entre os dois pontos de cima não funciona...
- Pensa melhor... você quer o centro da face e não o centro da aresta....
- Ah!.... entre os (pontos) *da diagonal!*
- Ótimo!"

Apresentamos abaixo, na Figura 39, algumas construções dos alunos. Observa-se, por exemplo, que os alunos escolheram pontos diferentes do plano XY para gerar o cubo. Além disso, verifica-se uma diversidade de raciocínios quanto às soluções obtidas em alguns itens da atividade. Se analisarmos o item 1(e) "*Construa em amarelo uma reta paralela ao plano EFGH e que não contém nenhuma aresta do cubo*", observa-se que todos os alunos criaram retas paralelas ao plano da base e não contendo nenhuma aresta do cubo, conforme solicitado, mas o fizeram de formas diferenciadas. A dupla LL criou a reta passando pelo centro de uma das faces, os alunos D e L criaram a reta na base superior do cubo passando pelo ponto médio de duas arestas e a dupla JN também optou por criá-la na base superior, mas, passando por dois vértices extremos da diagonal desta face.

Figura 39 – Construções dos alunos para a Atividade 1



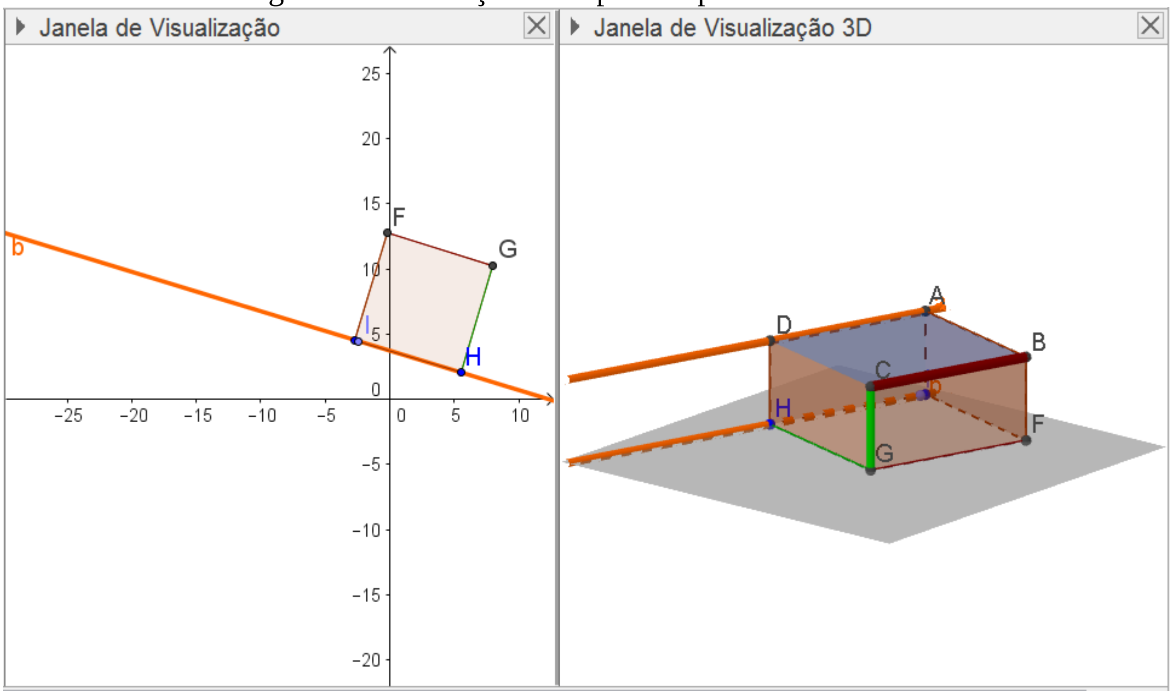
Produção da dupla LL *Produção do aluno D*
Produção da dupla JN *Produção da aluna L*

Fonte: Produção dos alunos

Dentre as dificuldades observadas na construção do cubo, podemos observar primeiramente o pouco conhecimento dos alunos quanto às características de determinados sólidos geométricos. Mesmo tratando-se do cubo, um dos objetos tridimensionais mais elementares, alguns alunos mostraram não compreender que a condição essencial para construir um cubo é que as faces sejam quadradas, ou seja, que todas as arestas tenham a mesma medida. A Figura 40 ilustra esta dificuldade.

No panorama de ensino em Geometria, pode-se dizer que muitos de nossos alunos, mesmo no Ensino Médio, estão ainda nos níveis iniciais propostos por Van Hiele e Gutiérrez. Por exemplo, suas imagens mentais trabalham ainda com as aparências e não com as propriedades geométricas.

Figura 40 – Produção da dupla NA para a Atividade 1

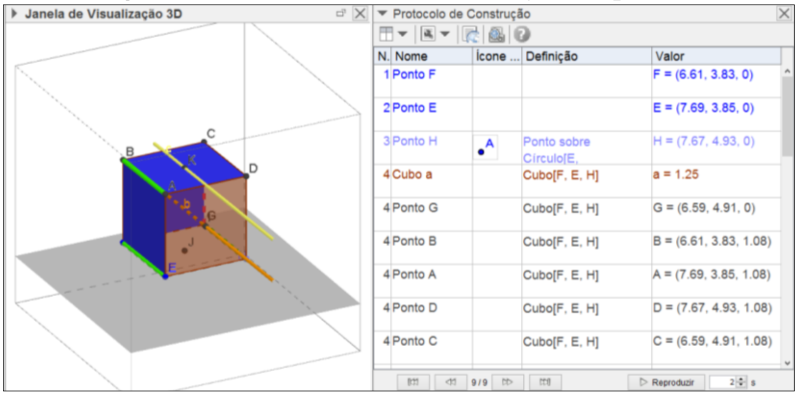


Fonte: Produção da dupla NA.

Nota-se na Janela 2D que a base foi construída quadrada, mas, ao gerar o sólido, utilizaram a ferramenta prisma e a altura utilizada não produziu um cubo e sim, um paralelepípedo.

Um outro recurso interessante do GeoGebra é a exibição do Protocolo de Construção, ilustrado na Figura 41. Nele é possível observar o “passo a passo” da construção executada e que nos possibilita analisar mais detalhadamente os percursos particulares de cada aluno. No caso da dupla GL, o caminho escolhido foi: criar dois pontos da base quadrada (E e F) e criar o cubo com vértices em E e F através da ferramenta “Cubo”.

Figura 41 – Protocolo de Construção Dupla GL



Fonte: Produção da dupla GL.

Mesmo com as dificuldades encontradas na primeira atividade, somente duas duplas não conseguiram finalizá-la. As razões: uma das duplas indicou bastante dificuldade no uso do software; outra dupla encontrou problemas técnicos e foi preciso trocar de computador duas vezes, pois o software travava na versão 3D. Esta dificuldade técnica também se apresentou em outra dupla, mas mesmo com o imprevisto, ela conseguiu finalizar a atividade.

Síntese dos resultados: Pode-se dizer que foram encontrados problemas de natureza técnica, de adaptação com o software e também de visualização e aplicação dos conceitos envolvidos. Apesar de algumas duplas não terem concluído as atividades, pode-se observar uma mudança de postura dos alunos frente a atividade proposta. Muitos alunos que, em aulas "tradicionais", aparentavam desinteresse nos exercícios mostraram-se motivados na construção via software e encorajados a argumentar e expor suas ideias quanto a atividade. Além disso, a atividade oportunizou iniciar o aluno em atividades de tratamento do registro figural via software (agregando elementos e manipulando o sólido e as unidades figurais que o constituem).

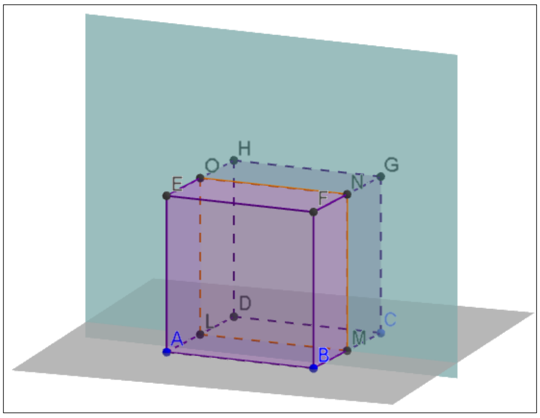
4.2.2 Análise a posteriori do Encontro 2

Neste encontro, os alunos receberam uma Ficha de Trabalho com duas atividades. Em ambas, o aluno era convidado a mobilizar a habilidade de visualização na identificação de secções geradas a partir de planos de corte. Ou seja, fez-se necessário utilizar as apreensões sequencial (construção), perspectiva (interpretação) e discursiva (relação discurso x figura) (Duval, 2003), além de mobilizar transformações de tratamento e conversões entre registros discursivos e figurais.

Primeiramente, foi necessário discutir o conceito de secção de um sólido e aqui foi utilizado material concreto.

A seguir, com o apoio do projetor multimídia, construímos coletivamente o cubo a fim de que todas duplas nomeassem igualmente os vértices, retirassem rótulos desnecessários e colorissem o sólido, de forma a facilitar a visualização das secções. Também, construímos coletivamente a secção solicitada na Atividade 1(a), dada pelo plano determinado pelos pontos médios de três arestas paralelas do cubo, conforme ilustra a Figura 42.

Figura 42 – Secção quadrada



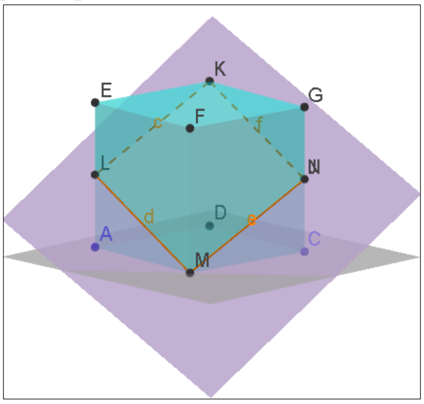
Fonte: Produção da dupla JN.

No decorrer das atividades, pode-se observar maior autonomia das duplas em suas construções. Ainda questionavam muito, mais quanto as dificuldades em visualizar as construções do que em relação ao programa e suas ferramentas. Muitos já giravam os sólidos de forma a colocá-los sob diferentes pontos de vista e, de uma forma geral, conseguiam apresentar respostas em forma oral e cada vez mais claras.

Nisso nota-se uma grande contribuição advinda da fluidez de tratamentos possíveis no software (Duval, 2011). O dinamismo do GeoGebra 3D permite realizar diversos tratamentos no registro figural e isto contribui para a constituição de imagens mentais mais próximas das reais.

Uma das dificuldades observadas foi quanto à nomenclatura das figuras planas correspondentes as diferentes secções. A dupla AT, por exemplo, ao se deparar com uma secção pentagonal a classificou como um "*diamante*". Uma outra situação: a secção dada na Figura 43 correspondentes a um losango, é classificada por alguns alunos como sendo um quadrado; ou seja, não identificaram que a figura plana encontrada não atende a condição de existência de quatro ângulos retos.

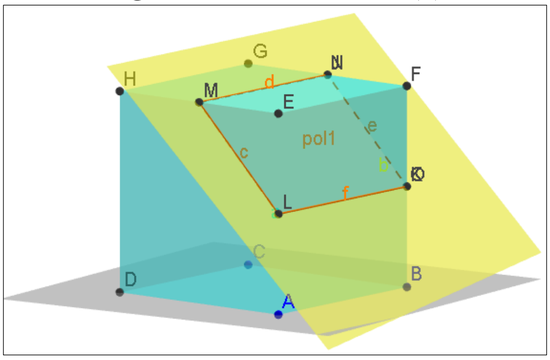
Figura 43 – Secção dada pelos pontos médios das arestas AE e CG e pelo vértice B.



Fonte: Produção do aluno D.

Algumas duplas também mostraram certa dificuldade na compreensão do conceito de secção, confundindo a figura plana formada pela intersecção entre cubo e plano com os sólidos gerados pelo plano de corte. Por exemplo, ao questionar um aluno sobre a secção que se formava em sua construção, representada na Figura 44, o aluno D indicou tratar-se de um triângulo, mostrando indícios de confusão provocada pela visualização do prisma triangular gerado pelo plano de corte.

Figura 44 – Atividade 2(e)



Fonte: Produção do aluno D.

Duval (2011) aponta este como um conflito comum quando se trata de situações geométricas, nas quais se faz necessário neutralizar a organização perceptiva da figura que faz predominar determinadas unidades figurais a respeito de outras. Por exemplo, um aluno pode interpretar que dois segmentos que se sobrepõe na representação plana de um objeto tridimensional, possuem uma intersecção, quando na verdade há um “espaço” entre eles.

Nesta atividade, o plano divide o cubo em dois sólidos, um prisma triangular e um outro sólido correspondente ao restante do cubo. Ao mesmo tempo, o prisma triangular, pode ser desconstruído dimensionalmente em unidades figurais 2D: dois triângulos e três retângulos, e estes, podem ainda ser desconstruídos em unidades 1D através dos segmentos de reta. Estas possíveis desconstruções dimensionais, permitem ao aluno diferentes organizações perceptivas da estrutura geométrica apresentada, o que pode justificar o conflito exposto pelo aluno.

Ao final da primeira atividade, sugeriu-se aos alunos que retomassem suas construções e utilizassem a ferramenta "Criar Vista 2D" a fim de verificar se haviam visualizado de forma correta as secções geradas. O recurso foi utilizado com facilidade. Assim, a complementaridade entre representações 3D/2D, permitiu explorar de forma mais clara as secções obtidas, sendo este um ponto positivo citado pelos alunos no questionário final, *"com o computador é mais fácil de ver do que quando se imagina..."*.

No item (h) da Atividade 2 as construções deixaram de ser estáticas e ganharam movimento e maior dinamismo. Um fato observado nessa construção foi que quase todas duplas criaram inicialmente o ponto I como ponto médio da aresta EF e ao criar a secção dada pelo ponto I e os vértices A e D, questionavam o porquê o ponto I não se movimentava. Este é um conflito possivelmente relacionado a uma apreensão perceptiva equivocada da situação geométrica descrita no enunciado. Quando perguntados sobre como haviam criado o ponto I e sobre como então este ponto deveria se comportar, davam-se conta de que a ferramenta escolhida havia sido "Ponto Médio" e, portanto, este ponto seria fixo: "*Ah...então deve ser um ponto qualquer! "* (Dupla LL).

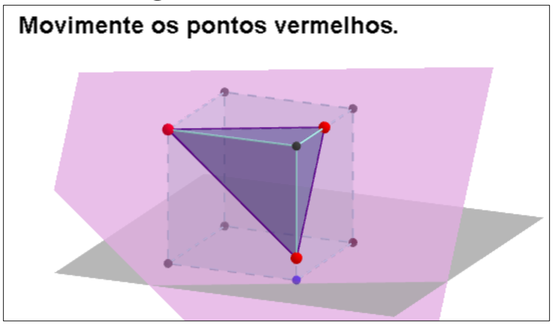
Neste sentido, Duval (2012) aponta que os alunos, geralmente, se concentram na apreensão perceptiva da figura. Assim, cria-se um conflito entre a interpretação, dada pelos elementos que se destacam no registro figural, e a interpretação dada pelas hipóteses descritas no enunciado, que nem sempre são evidentes na figura.

Ainda sobre a Atividade 2(h), no exercício final poucos alunos deram-se conta, de forma autônoma, que precisariam do Teorema de Pitágoras na resolução. Assim a professora precisou conduzir seus questionamentos de forma que eles percebessem a existência de um triângulo retângulo que permitiria resolver a questão.

Também identificamos a dificuldade dos alunos para descrever, por escrito, o que observavam nas construções com movimento. Muitos conseguiam falar ou indicar na tela do software, mas na hora de escrever não sabiam como expressar o que enxergavam. Duval (2011) aponta que sempre que tratamos do registro discursivo existem dificuldades que lhe são próprias, salientando que a prática oral sempre tende a esconder a complexidade das operações discursivas. A fala espontânea, utilizada normalmente, é diferente da produção escrita que exige que realizemos uma operação controlada dos recursos discursivos próprios ao raciocínio matemático.

Esta dificuldade ficou ainda mais clara na Atividade 3, na qual a construção já estava pronta e cabia ao aluno interpretar e descrever o que observava, como vemos abaixo.

Figura 45 – Atividade 3

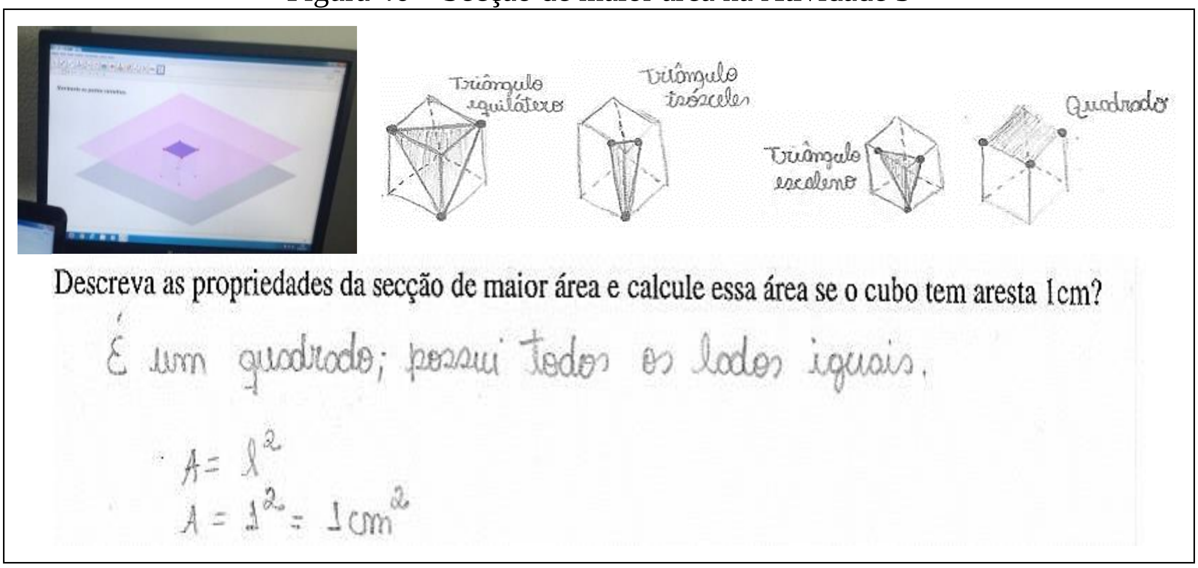


Fonte: Elaborada pela autora.

Ao descrever as intersecções formadas, é interessante observar que enquanto a maioria dos grupos apontou as secções como sendo todas triangulares, dois grupos indicaram uma secção quadrada, conforme ilustra a Figura 46. Assim, a secção de maior área, solicitada no exercício final, foi dada pela área de um quadrado de lado 1 e não pelo triângulo equilátero gerado por três vértices do cubo, conforme esperado.

Entendemos que neste caso o enunciado da atividade não foi redigido com o devido cuidado, permitindo ao aluno direcionar-se a esta possível secção como solução do problema. Neste sentido, destacamos que o enunciado precisa ser mais especifico, como por exemplo: "Movimente os pontos e analise os diferentes *triângulos* determinados pelos vértices em destaque", conduzindo o aluno a análise deste tipo de secção apenas.

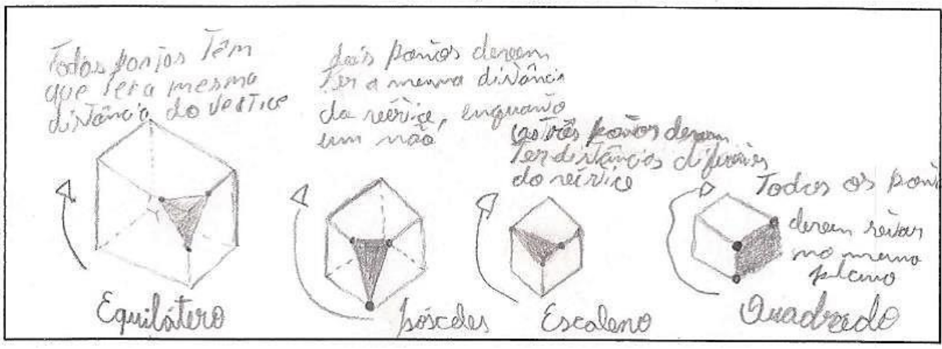
Figura 46 – Secção de maior área na Atividade 3



Fonte: Produção da aluna L.

Uma das duplas mostrou maior desenvoltura ao argumentar as condições em que cada tipo de secção surgia. Para tanto, relacionaram cada secção com a posição dos três pontos móveis quanto a um mesmo vértice do cubo. Observamos as descrições desta dupla na Figura 47.

Figura 47 – Representação e descrição das secções da Atividade 3



Fonte: Produção da dupla AJ.

Podemos dizer que as dificuldades técnicas foram menores e isto facilitou o andamento da aula; apenas um computador apresentou defeito na Janela de Visualização 3D. Todas as duplas conseguiram terminar a atividade em tempo, pois já se mostravam mais autônomas em suas construções, necessitando de menos ajuda. Uma aluna (K) que faltou à aula no Encontro 1 trabalhou com outra dupla (CM) pois não conhecia o software.

Outras dificuldades dizem respeito as resoluções dos exercícios propostos ao final de cada atividade. Alguns alunos ainda mostram dificuldades para interpretar o enunciado e para manipular algebricamente as questões, apresentando resultados equivocados mesmo com o apoio da figura dinâmica.

Síntese dos resultados: Nas Atividades 2 e 3, os alunos indicaram maior autonomia para usar o GeoGebra 3D e já não tiveram tantas dúvidas durante as construções. As descrições apresentadas neste encontro mostram que os alunos possuem deficiências básicas quando se trata do conhecimento geométrico, sendo que muitos mostraram não lembrar ou desconhecer até mesmo a nomenclatura de formas geométricas simples e as propriedades que as definem. Além disso, mostram dificuldades em expressar por escrito o que conseguem relatar oralmente usando a tela do software, ou seja, apresentaram dificuldades na conversão linguagem oral/materna → linguagem escrita/matemática.

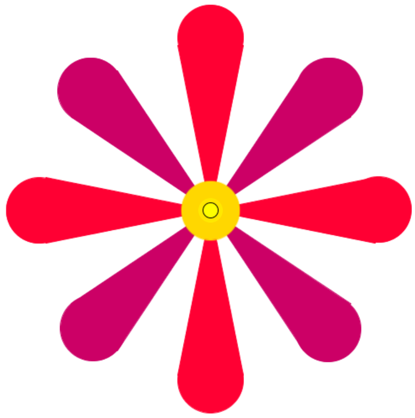
Nesta atividade, ampliaram-se os tratamentos do registro figural, atribuindo movimento e dinamismo às construções. Percebemos que o uso do software facilitou muito o processo de visualização de secções bem como a compreensão do conceito de secção. Além disso, priorizaram-se os dois encaminhamentos, descritos por Gravina (1996) no capítulo 2, para atividades com softwares dinâmicos e estes exigiram dos alunos diferentes competências de análise.

4.2.3 Análise a posteriori do Encontro 3

No Encontro 3, os alunos trabalharam com uma Ficha de Trabalho envolvendo a transformação de rotação de figuras planas no espaço, para gerar sólidos de revolução. A atividade esteve direcionada à exploração de tratamentos do registro figural (transformações geométricas), à mobilização de habilidades espaciais e ao desenvolvimento de imagens mentais.

Inicialmente, fez-se necessária uma discussão quanto ao conceito de rotação. Esta exploração foi feita usando-se a imagem ilustrada na Figura 48.

Figura 48 – Flor.



Fonte: Elaborada pela Autora.

Neste momento a professora/pesquisadora mediou a discussão, fazendo alguns questionamentos:

- *Qual é o tipo de movimentação das pétalas?*
- *Qual o ponto referência para a movimentação das pétalas que compõem a flor?*

Foi fácil para os alunos visualizarem que as pétalas foram rotacionadas em torno do ponto amarelo (centro da flor), dando origem a esta composição. Primeiramente, o termo utilizado pelos alunos foi "*girar*". Ao serem questionados sobre como se chama o movimento de "girar em torno de um ponto", o aluno D colocou "*se chama rotação*".

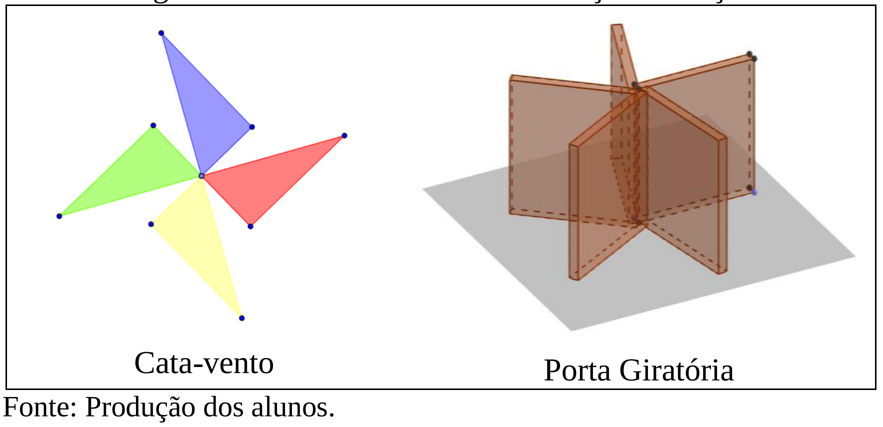
Em seguida, discutimos quais ferramentas do GeoGebra possibilitam rotacionar figuras e objetos 3D. Após a exploração dos menus do software, debatemos como deveria ser feita a utilização da ferramenta “Rotação em Torno de um Ponto” através de uma construção coletiva na Janela 2D - rotação de um pentágono em torno de um de seus vértices e, também, em torno de um ponto externo ao polígono.

Encerrando a exploração inicial, foi solicitado aos alunos que reproduzissem duas construções geométricas: um cata-vento (plano XOY) e uma porta-giratória (plano XYZ). A atividade teve a finalidade de oportunizar aos alunos um momento de exploração do recurso no GeoGebra e compreensão do conceito de rotação no plano e no espaço - condição essencial para a posterior construção de sólidos de revolução.

Neste momento fez-se necessária uma discussão sobre as diferenças entre a rotação no plano e no espaço. Esta diz respeito, essencialmente, ao referencial de rotação: enquanto no plano a referência é um ponto, no espaço é uma reta. As construções dos alunos indicaram que esta peculiaridade foi intuitivamente percebida, sendo que alguns já haviam realizado as duas construções antes mesmo desta diferenciação.

Abaixo, na Figura 49, temos duas construções geométricas produzidas pelos alunos. Na construção do cata-vento os raciocínios de construção foram, em geral, similares - construir o triângulo retângulo e rotacioná-lo no plano em intervalos de 90º. Cabe salientar, que algumas duplas ficaram em dúvida quanto ao ângulo de rotação a ser utilizado. Ao serem questionados sobre quantas vezes desejavam rotacionar a figura original em torno no ponto de referência e sobre quantos graus possuía uma volta completa desta figura, davam-se conta de dividir os 360º em quatro rotações de 90º. Algumas duplas optaram por rotacionar a figura original somando 90º a cada posição (1ª rotação: 90º, 2ª rotação: 180º e assim sucessivamente), outras rotacionaram cada hélice transformada em mais 90º.

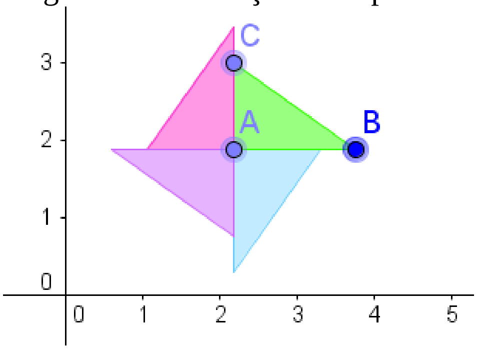
Figura 49 – Atividade de sensibilização: Rotação



Fonte: Produção dos alunos.

É interessante observarmos a construção de uma das duplas, ilustrada abaixo. Nela a dupla decide rotacionar o triângulo em torno do vértice A, onde está localizado o ângulo reto. Observando o resultado da rotação, questionaram o porquê da sua construção não corresponder ao esperado. Ao serem questionadas sobre o vértice escolhido como ponto de referência para a rotação, tiveram dificuldades em compreender o porquê do encaixe "exato" das quatro peças transformadas. Esta dificuldade pode estar relacionada a uma apreensão perceptiva equivocada, na qual as alunas não percebem as características necessárias para uma reprodução adequada do cata-vento.

Figura 50 – Produção da dupla CK



Fonte: Acervo da autora.

Já na construção da porta giratória, os raciocínios foram mais variados. Algumas duplas decidiram criar a base de um dos cinco prismas que compõem a porta e rotacionaram a base na janela 2D em torno de um de seus vértices. Por fim, criaram os prismas "portas" na janela 3D, utilizando a ferramenta "Extrusão para Prisma ou Cilindro". Outros criaram a primeira porta, um prisma de base retangular, e rotacionaram este sólido em torno do eixo Z.

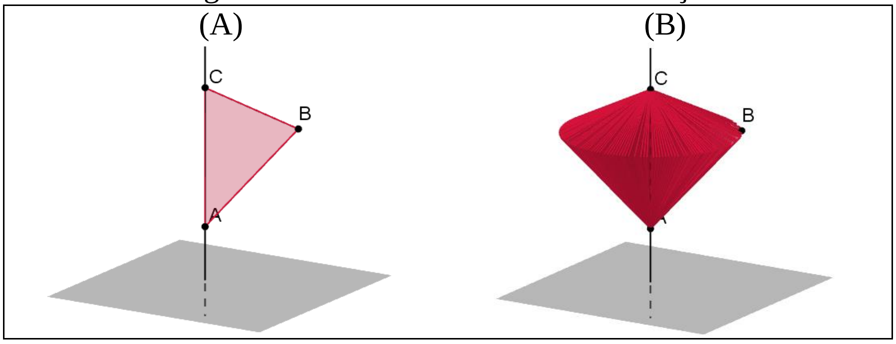
Vê-se nessa atividade uma riqueza de percursos particulares, uma vez que os procedimentos de construção escolhidos se baseiam na imagem mental construída pelo aluno ao interpretar a representação externa recebida na Ficha de Trabalho. Dependendo de como este aluno elabora esta imagem - a partir de suas habilidades de visualização - os procedimentos de construção são diferenciados. Ou seja, há uma mobilização cognitiva que contempla os dois aspectos da visualização descritos por Gutiérrez (1996), "interpretação visual das informações" para criar imagens mentais (interpretação da representação plana recebida) e "interpretação de imagens mentais" para gerar informações (devolução da situação ao software GeoGebra 3D).

Os ângulos de rotação para a porta giratória foram calculados sem maior dificuldade; uma das duplas se equivocou construindo seis portas ao invés de cinco. Tanto na construção do triângulo retângulo que origina o cata-vento, quanto na construção no retângulo base dos prismas que constituem a porta giratória, a maioria das duplas preocupou-se em construir polígonos considerando as suas propriedades geométricas.

Concluída a atividade inicial, iniciamos uma discussão sobre sólidos de revolução. Primeiro, tratamos sobre o conceito de revolução e sobre como certos sólidos podem ser construídos a partir da rotação de figuras planas no espaço. Depois, discutimos a possibilidade de rotacionar figuras planas em torno dos eixos já existentes ou ainda de outros que poderiam ser criados. Também, discutimos a criação do seletor que permite visualizar todas as posições da figura rotacionada em torno de um determinado eixo.

Coletivamente produzimos o sólido da Figura 51, correspondente a revolução de um triângulo qualquer em torno de um de seus lados (A), obtendo um sólido semelhante a um pião (B).

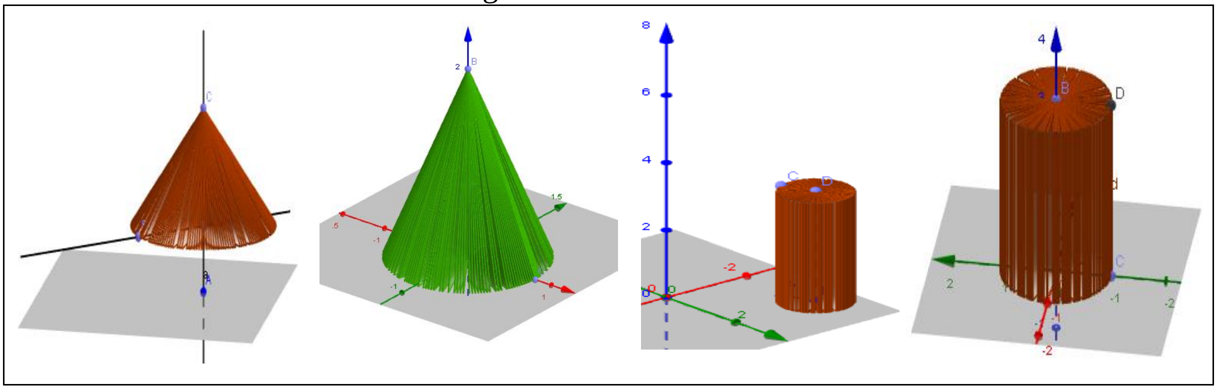
Figura 51 – Atividade inicial de revolução



Fonte: Elaborada pela autora.

Em seguida, os alunos realizaram a Atividade 4, na qual deveriam identificar os sólidos gerados pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos e de um retângulo em torno de um de seus lados, conforme ilustra a Figura 52. Todas duplas conseguiram identificar os sólidos formados: um cone e um cilindro, respectivamente.

Figura 52 – Atividade 4



Fonte: Produção dos alunos.

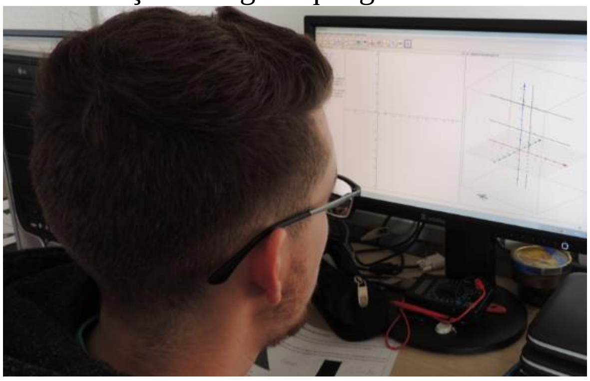
Os alunos mostraram-se independentes nessas construções, indicando dúvidas apenas para construir as figuras que seriam rotacionadas de forma a manter suas propriedades, já que pretendiam realizar essas construções diretamente na janela 3D. Tendo a figura, a rotacionavam em torno do eixo Z (percurso da maioria dos alunos). Quando questionados sobre o motivo de não utilizarem o plano XY como base dessas construções, apontaram que as figuras “deitadas” não ficariam “corretas”. Novamente, salienta-se um desconforto provocado pelo confronto entre a imagem mental que possuem do objeto a partir de uma representação externa e o objeto real, dado por outras variadas representações.

Percebemos também na Figura 52, que alguns alunos mantiveram o eixo de rotação como sendo o eixo Z; outros criaram seus próprios eixos de rotação em pontos distintos do espaço.

Conforme já mencionado, as construções via software fizeram com que os alunos pensassem de forma diferenciada quando comparada a atividade cognitiva mobilizada em atividades tradicionais do livro didático, por exemplo. Os cuidados de construção exigidos, de modo a conservar propriedades geométricas das figuras, constituem uma vantagem na utilização do software. Os procedimentos de construções demandam conhecimento geométrico e critério na escolha das ferramentas disponibilizadas pelo GeoGebra, de forma que estas atendam ao desejado.

Estes cuidados são característicos da apreensão sequencial descrita por Duval (2003). Conforme mencionado no Capítulo 2, para realizar determinada tarefa, como reproduzir uma figura com determinadas propriedades, o aluno necessita primeiramente elencar uma espécie de “passo a passo”, que exige a mobilização de conceitos geométricos.

Figura 53 – Construção da figura que gera o cilindro de revolução



Fonte: Acervo da autora.

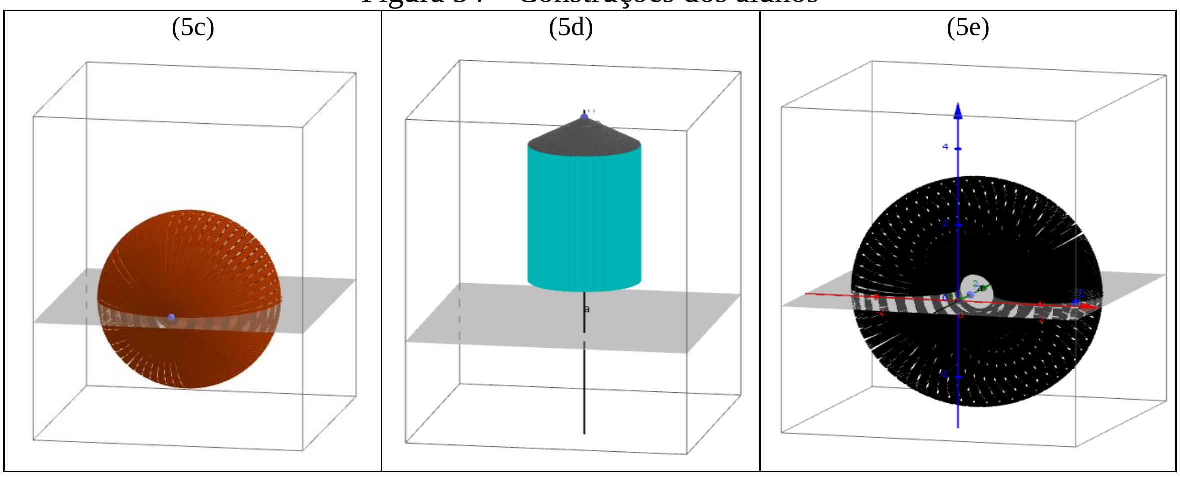
No caso ilustrado na Figura 53, por exemplo, podemos observar o percurso adotado pelo aluno D na construção do retângulo que dá origem ao cilindro de revolução. O aluno necessitou mobilizar os conhecimentos e propriedades da figura a fim de selecionar as ferramentas que permitissem sua construção. Neste caso, utilizou as ferramentas “Retas paralelas”, “Retas perpendiculares” e “Polígono” para gerar o retângulo. Ou seja, a construção desta representação está relacionada a escolha de unidades figurais e da combinação das mesmas, mostrando que o GeoGebra 3D auxilia também na desconstrução dimensional do objeto (componentes 0D, 1D e 2D compõe o objeto 3D). Reiterando o que nos traz Duval (2011), quando afirma que para construir uma figura via software, os próprios menus utilizados impõem que o sujeito antecipe uma desconstrução dimensional da figura em unidades figurais.

Em seguida, na Atividade 5, os alunos receberam figuras correspondentes a três sólidos de revolução: bola, silo de grãos e boia. A partir destas representações externas, deveriam reproduzir os sólidos no GeoGebra 3D, conforme ilustra a Figura 54, indicando qual figura plana havia sido rotacionada e em torno de qual eixo foi feita a rotação.

Na construção da bola (5c), a maioria das duplas optou por criar um “meio círculo” para ser rotacionado. Para tanto, fez-se necessário discutir que ferramentas possibilitariam essa construção, diferenciando arco e setor circular. Uma dificuldade encontrada no software diz respeito ao não reconhecimento de setores circulares na Janela 3D. Sendo assim, a maioria das duplas contornou esta dificuldade construindo o setor circular no plano XOY e rotacionando-o ou em torno do eixo OX ou em torno de OY.

Já para a reprodução do silo (5d), a maioria das duplas optou por construir um retângulo e um triângulo retângulo como figuras de base para revolução; nenhuma das duplas utilizou o trapézio retângulo. Também pode se destacar que apenas uma das duplas utilizou o plano XOY para construir a figura plana. Algumas duplas ainda criaram um controle deslizante para cada figura: um para o retângulo e outro para o triângulo.

Figura 54 – Construções dos alunos



Fonte: Produção dos alunos.

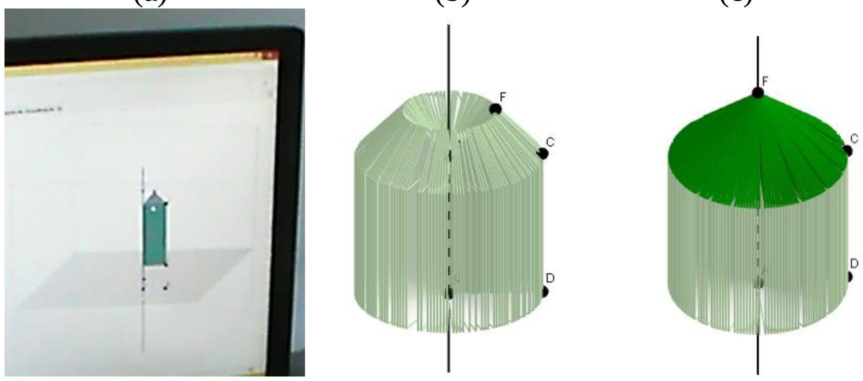
Ainda sobre a Atividade 5, no que se refere a construção do sólido (5d), duas duplas mostraram compreender as figuras planas que compõem o sólido, mas não conseguiram criar uma imagem mental compatível com o sólido esperado, como ilustra a Figura 55. Isso pode ser atribuído à característica mais elaborada desta tarefa.

O aluno recebe uma figura na Ficha de Trabalho, a partir desta deve acionar suas habilidades visuais de forma a construir uma imagem mental (tridimensional) daquele objeto; depois ele precisa expressar essa imagem em uma outra representação externa via software. Esta última representação externa, produzida pelo aluno, dá indícios importantes sobre o desenvolvimento de suas habilidades espaciais.

Assim vê-se o aluno exigido em uma situação que prioriza novamente os dois aspectos da visualização descritos em Gutiérrez (1996). Como vemos na Figura 55(a), os alunos perceberam a estrutura formada por um triângulo e um retângulo, mas só se deram conta de que a representação não correspondia ao correto após rotacionarem as figuras em torno do eixo OZ (b). Ou seja, o software possibilitou aos alunos retomarem sua hipótese inicial, aprimorando a imagem mental do objeto geométrico. Finalmente, os alunos conseguiram definir a figura plana, obtendo o sólido (c).

Figura 55 – Construção do sólido (5d)

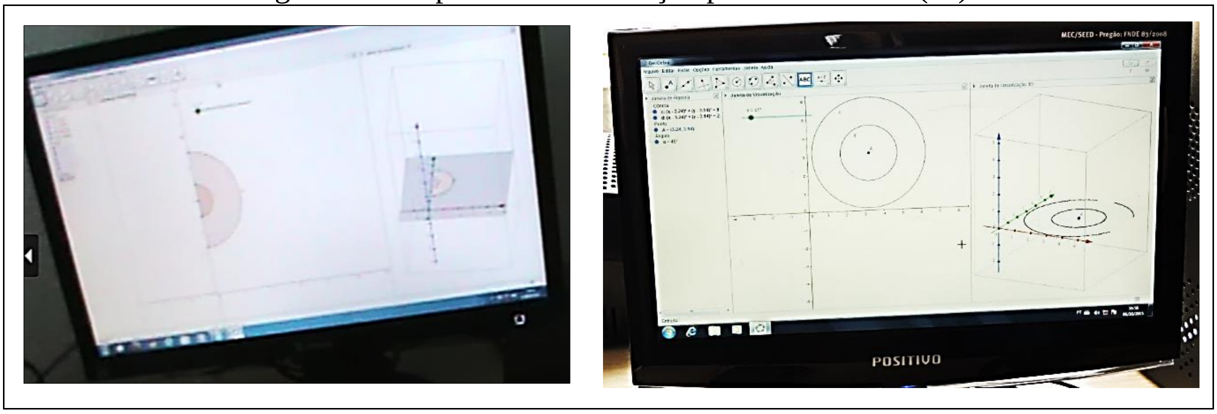
(a) (b) (c)



Fonte: Filmagem da produção da dupla CM.

A construção na qual os alunos apresentaram maiores dificuldades foi a reprodução da boia. Estas corresponderam à dificuldade de visualizar a figura plana que origina o sólido e também de identificar a posição do eixo de rotação, uma vez que ele não intersecta nenhum elemento da figura a ser rotacionada. Algumas duplas fizeram diversas tentativas até conseguirem reproduzir o sólido, mostrando muita dificuldade em mobilizar a habilidade de visualização espacial na busca de uma representação correta, conforme ilustra a Figura 56.

Figura 56 – Hipóteses de resolução para a atividade (5e)



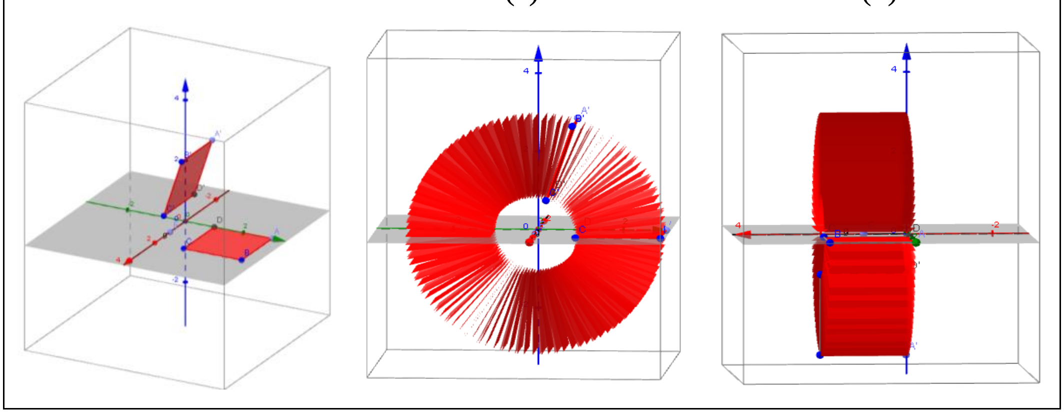
Fonte: Filmagem da produção da dupla GL e CK, respectivamente.

Gutiérrez (1996) faz em sua obra um detalhamento das principais habilidades visuais mobilizadas por um indivíduo em Geometria Espacial. Dentre elas, podemos indicar aqui que, dependendo da complexidade do objeto tridimensional, os alunos mostraram dificuldades em mobilizar a habilidade de rotação mental, não sendo capazes de produzir imagens mentais dinâmicas e de visualizar esta configuração em movimento.

Outra situação de dificuldade similar é ilustrada abaixo, na Figura 57. Ao construir a representação da boia no GeoGebra, a dupla AT optou por rotacionar um quadrado em torno do eixo OX e não um círculo conforme esperado. É interessante observarmos que em determinados pontos de vista o sólido gerado é "aparentemente" correto: quando vista de lado, a construção parece atender ao solicitado, conforme ilustra a Figura 57(a); quando vista de frente, o mesmo não acontece, como vemos em (b). Assim, pode-se dizer que, a partir da apreensão perceptiva, a dupla visualizou corretamente a situação a ser gerada e o eixo de rotação, mas não identificou corretamente a figura plana que gera o sólido através da revolução.

Figura 57 – Revolução de um quadrado em torno do eixo x

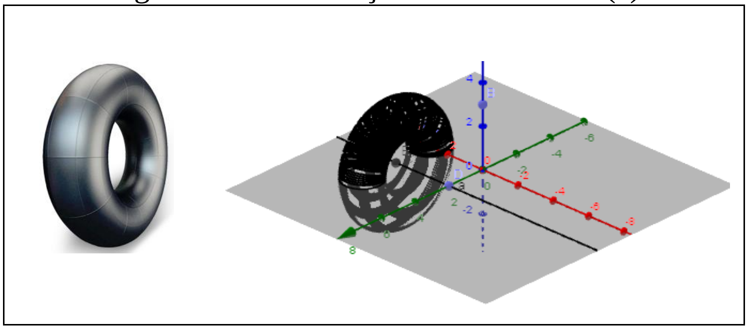
(a) (b)



Fonte: Produção da dupla AT.

Algumas duplas já utilizaram argumentos mais elaborados ao caracterizar o eixo de revolução. Por exemplo, ao detalhar a construção (5e), ainda sobre a reprodução da boia, descreveram "*um círculo girando em torno de uma reta perpendicular ao eixo y...*" (Dupla CM), o que se confirma se observarmos a construção desta dupla, conforme Figura 58.

Figura 58 – Construção da Atividade 5(e)



Fonte: Produção da dupla CM.

O exercício final solicitava que, utilizando a revolução, os alunos construíssem um cone inscrito em um cilindro. Além disso, os alunos deveriam determinar a geratriz e a área lateral deste cone, dadas as medidas do retângulo gerador do cilindro, como vemos na figura abaixo. À exceção dos alunos que cometeram manipulações algébricas equivocadas, a maioria das duplas conseguiu resolver o que era proposto, como ilustra a Figura 59. Pode-se perceber que muitos recorreram à construção no software, feita no item 5(f), para discutir e justificar procedimentos utilizados na resolução, reafirmando a necessidade de uma representação para visualizar as situações propostas.

Figura 59 – Resolução do exercício (g) da Atividade 3

g) Sabendo que o retângulo que origina o cilindro tem dimensões 3 e 4 cm., calcule a geratriz e a área lateral do cone inscrito.

$2\pi . r . g$

$2\pi . 3 . 5$ $= 30\pi$

$2\pi . 15$

$g^2 = 3^2 + 4^2$ $g = \sqrt{25}$

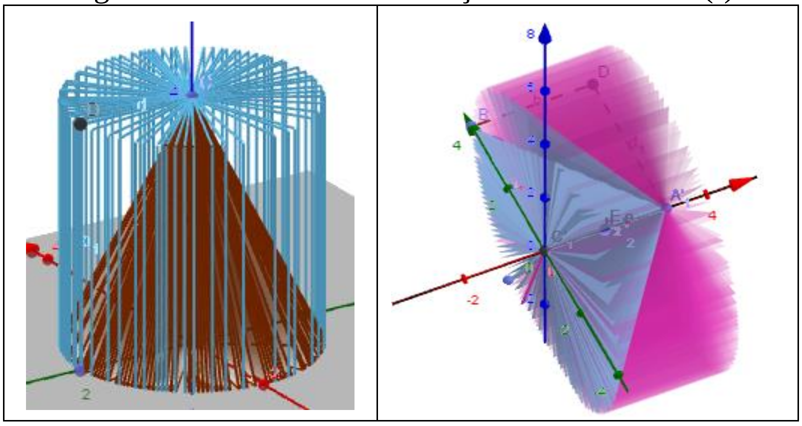
$g^2 = 9 + 16$ $g = 5$

$g^2 = 25$

Fonte: Ficha de Trabalho da dupla NA.

Como no exercício não foi feita exigência quanto ao eixo de rotação, a maioria dos alunos fez a rotação da figura em torno do cateto maior, mas ainda existiram casos em que a rotação foi feita em torno do cateto menor, como podemos observar na Figura 60. Assim, houve divergências nas respostas correspondentes a área lateral do cone.

Figura 60 – Diferentes construções da atividade 5(f)



Fonte: Produção das duplas CM e AT.

Destaca-se ainda, na Atividade 5(f), a dificuldade inicial de compreender o conceito de sólido inscrito, termo que pareceu inédito para todos alunos. Maiores discussões com os alunos quanto aos critérios de inscrição, foram deixadas para a atividade seguinte, na qual se prioriza o trabalho com sólidos inscritos.

Neste encontro ainda tivemos dificuldades técnicas com "pane" em dois computadores ao longo da execução das atividades. Estes aspectos precisam ser melhor gerenciados pelos responsáveis técnicos, de forma a ter-se os laboratórios de informática funcionando sem maiores percalços, e, de forma a não prejudicar o andamento do trabalho previsto pelo professor.

Síntese dos resultados: Quanto às atividades realizadas no Encontro 3, pode-se destacar uma grande motivação dos alunos em realizá-las. O conceito de rotação pareceu bastante intuitivo aos alunos; eles o compreenderam com facilidade. Também, percebemos novamente uma dificuldade quanto a habilidade de visualização espacial, principalmente no que diz respeito a identificação dos eixos de rotação quando estes não intersectam a figura que dá origem ao sólido. Neste aspecto, o software auxiliou na formulação e/ou aprimoramento das imagens mentais dos alunos.

Cabe salientar, que o uso do software permitiu uma exploração dinâmica da situação, oportunizando tratamentos do registro figural que se tornariam impossíveis de serem realizados com lápis e papel, conforme aponta Duval (2011, p.137). Ou seja, ao trabalharmos o registro figural de forma dinâmica, os tratamentos foram de rápida execução, possibilitando uma fluidez natural das variações da figura, o que nesta atividade ficou bastante evidente.

Os alunos também se mostraram mais independentes nas construções. Esta foi a atividade que mais motivou a turma e que no questionário final foi classificada por quase 50%

da turma como a mais interessante. Ao justificarem esta preferência apontaram o movimento/dinamismo das construções como uma grande facilitador na visualização da construção dos sólidos de revolução: *"víamos o objeto se formar...visualizávamos melhor...".*

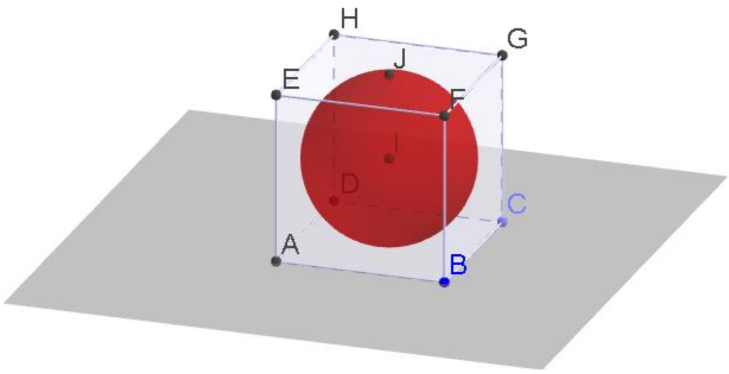
4.2.4 Análise a posteriori do Encontro 4

O Encontro 4 tratou sobre a inscrição de sólidos. Esta Ficha de Trabalho teve a finalidade de favorecer a percepção das características necessárias para a inscrição de um objeto tridimensional em outro, características estas que se mostraram de difícil compreensão na atividade anterior.

Antes de qualquer discussão sobre o conceito e sobre a tarefa, se propôs aos alunos que tentassem resolver alguns exercícios envolvendo inscrição de sólidos, para que se pudesse, de certa forma, comparar as estratégias utilizadas antes e depois da atividade no software. Estes exercícios são os mesmos apresentados ao final de cada atividade, na coleção de atividades que compõem o Encontro 4.

Também retomamos o conceito de inscrição de sólidos a partir de uma situação construída no projetor multimídia e debatida coletivamente. Esta discussão esteve voltada para a situação ilustrada na Figura 61: a inscrição de uma esfera em um cubo.

Figura 61 – Esfera inscrita no Cubo



Fonte: Elaborada pela autora.

Durante a construção foram levantados questionamentos tais como:

- *O que precisamos para construir esta esfera?*
- *Como encontrar o centro desta esfera? Qual deve ser o raio desta esfera?*
- *Quais características devemos considerar para garantir que a esfera esteja inscrita no cubo?*
- *Movimentando os vértices do cubo, a esfera se mantém inscrita? Por quê?*

Em seguida, os alunos receberam a Ficha de Trabalho que solicitava a construção de duas situações: inscrever uma esfera em um cilindro e inscrever uma esfera em um cone (construção bem mais complexa que a primeira).

Na atividade 6, relativa a inscrição de esfera em cilindro, apesar das recomendações iniciais, poucas duplas preocuparam-se em criar uma esfera que permanecesse inscrita independentemente da movimentação de elementos do cilindro. Ressalta-se aqui que, inicialmente, os alunos não fizeram construções atendendo ao princípio da geometria dinâmica, nas quais, a saber, mediante movimento (manipulação do raio e da altura, por exemplo) a construção deve manter-se perfeita. Ou seja, as construções privilegiaram apenas a impressão visual e não estiveram voltadas aos princípios geométricos da situação. Deste modo, os alunos resolveram a situação rapidamente e não pensaram nas relações geométricas envolvidas. Neste momento, discutimos os procedimentos adotados, retomando a importância da preservação de propriedades. A seguir, os alunos repensaram suas construções e deram-se conta de relacionar o raio da esfera ao raio e à altura do cilindro.

Quando questionados sobre a relação existente entre os raios da esfera *(r)* e do cilindro *(R)*, todas as duplas perceberam que as duas medidas deveriam ser iguais para que a inscrição fosse possível. Já ao analisarem a altura do cilindro, a grande maioria dos alunos indicou que se $R = 2$cm, então $h = 4$cm.

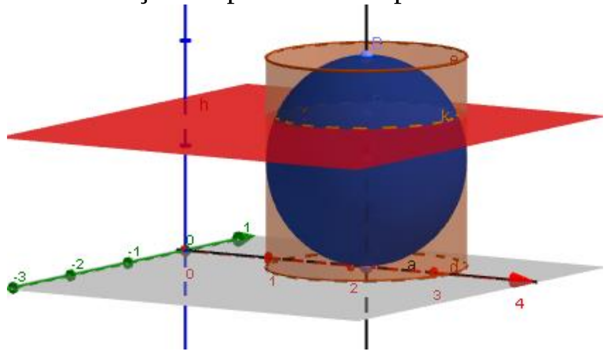
A fim de provocar a capacidade de visualização e questionar os alunos quanto às suas imagens mentais, eles deveriam também investigar se todo cilindro pode ser circunscrito a uma esfera. Aqui, o aluno deveria estender o raciocínio inicial, percebendo que neste caso se inicia a construção pela esfera e depois se faz o "encaixe" externo do cilindro. A partir dessa provocação, muitos apontaram que isto somente seria possível quando $R = r$. Contudo, não indicaram a necessidade de que o sólido atendesse, também, a condição $h = 2r$ (mesmo respondendo corretamente à questão anterior sobre a altura do cilindro). Algumas das duplas identificaram a condição e a colocaram como essencial para que a construção fosse possível "*Apenas se o diâmetro da base do cilindro for igual a altura do cilindro, para que a esfera chegue às extremidades*" ou ainda "*não, pois a altura do cilindro precisa ser de 2 vezes o R do cilindro, o cilindro tem de ser equilátero...*".

É interessante destacarmos a colocação de uma das duplas: "*se o cilindro for bem estreito e comprido, será impossível inscrever a esfera...".* O comentário indica que os alunos conseguiram criar uma imagem mental coerente com a situação dada e que serve como contraexemplo para a afirmação de que todo cilindro pode circunscrever uma esfera. Contudo, não conseguiram justificar o porquê.

Já na Atividade 7, os alunos eram convidados a interagir com a construção “esfera inscrita no cilindro”, exercitando a habilidade de visualização através de tratamentos executados na construção inicial. A partir do cilindro, deveriam criar um plano móvel paralelo a base do cilindro e observar as variações da área do círculo de intersecção entre a esfera e o plano. A construção provocou algumas dúvidas quanto a forma de gerar um plano que tivesse movimento. Alguns alunos, de forma independente, perceberam a necessidade de criar um ponto sobre o eixo vertical central do cilindro (utilizado na construção inicial) e posteriormente criaram o plano paralelo a base passando por este ponto.

A Figura 62, abaixo, traz uma das construções obtidas pelos alunos.

Figura 62 – Construção de plano móvel paralelo a base do cilindro



Fonte: Produção da dupla NA.

Com a construção concluída, deveriam analisar e descrever a variação da área do círculo de intersecção. Novamente se percebeu uma dificuldade dos alunos em expressarem por escrito o que falavam e indicavam na tela do computador. Contudo, já mostraram uma maior desenvoltura para argumentar e tirar conclusões.

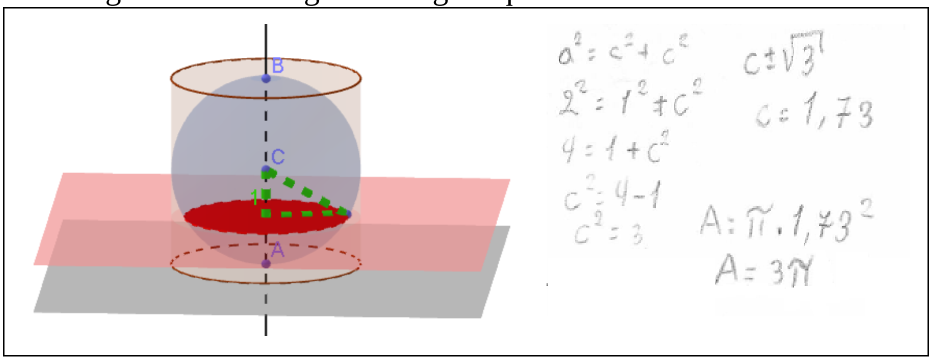
A maioria das duplas conseguiu descrever corretamente o comportamento da área do círculo, dependendo da movimentação do plano: “*quanto mais distante o plano se encontra do meio da esfera, menor é a área do círculo de intersecção*”; “*quando o plano está no meio da esfera, ele fica com a intersecção igual ao cilindro* (base). *Mas no momento em que ele sobe ou desce, a área da intersecção diminui em relação ao cilindro*”.

Deve-se salientar que esta atividade privilegia todas as apreensões cognitivas a partir das construções e da diversidade dos tratamentos dinâmicos executados. Os alunos mobilizaram a apreensão sequencial ao construir a situação – primeiro criaram um círculo no plano XOY, depois o eixo vertical, o cilindro reto e, por fim, a esfera. Mobilizaram a apreensão perceptiva ao interpretar as construções – definindo raio, altura e decidindo que características devem ser observadas para garantir a inscrição da esfera; a discursiva ao relacionar enunciado e figura; e a operatória ao modificar a construção original, incluindo elementos, reorganizando a percepção da figura e argumentando a respeito.

Finalizando as Atividade 6 e 7, os alunos deveriam resolver novamente os exercícios proposto no início deste encontro, só que agora com o suporte da construção dinâmica. Algumas duplas só conseguiram visualizar corretamente a intersecção de maior área depois de utilizar o GeoGebra e comentaram isso na Ficha de Trabalho.

Já quanto ao item: "*Qual a área do círculo quando a distância entre a base do cilindro e o plano de corte é 1? "*, pode-se dizer que sem o apoio da construção dinâmica, nenhuma dupla havia se dado conta de utilizar o triângulo retângulo ilustrado abaixo, que tem hipotenusa igual ao raio da esfera, como caminho para a resolução. Após a exploração via software esta característica foi percebida por várias duplas, o que permitiu a resolução correta da questão.

Figura 63 – Triângulo retângulo que soluciona o Exercício 5

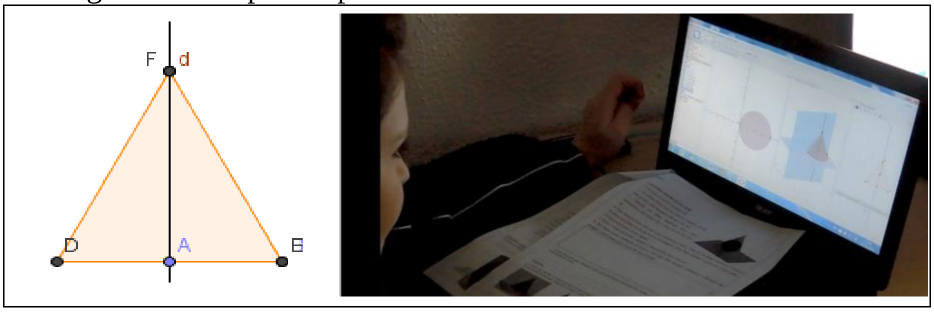


Fonte: Produção da dupla CM.

Na Atividade 8, que trata da inscrição da esfera no cone, fizeram-se necessários esclarecimentos quanto ao conceito de plano meridiano - não explorado até o momento - e a retomada da ferramenta "Criar Vista 2D", já utilizada na Atividade 2. A criação do cone seguiu procedimentos similares a atividade anterior: criar o círculo da base, criar o eixo vertical e gerar o sólido. Tendo definidas as características de um plano meridiano, os alunos o construíram facilmente, sendo que a maioria utilizou o vértice do cone, o centro do círculo da base e um ponto sobre este círculo para gerá-lo.

Muitas dúvidas surgiram sobre como construir um círculo inscrito no triângulo correspondente à vista 2D do plano meridiano. Além do triângulo, a reta $\overline{AF}$, utilizada para criar o cone, também era representada na vista 2D criada pelos alunos, uma vez que estava contida no plano meridiano. A primeira hipótese de várias duplas foi a de determinar o ponto médio entre A e F, onde A e F são o centro do círculo da base e o vértice do cone, respectivamente, conforme ilustra a Figura 64.

Figura 64 – Hipótese para encontrar o centro do círculo inscrito

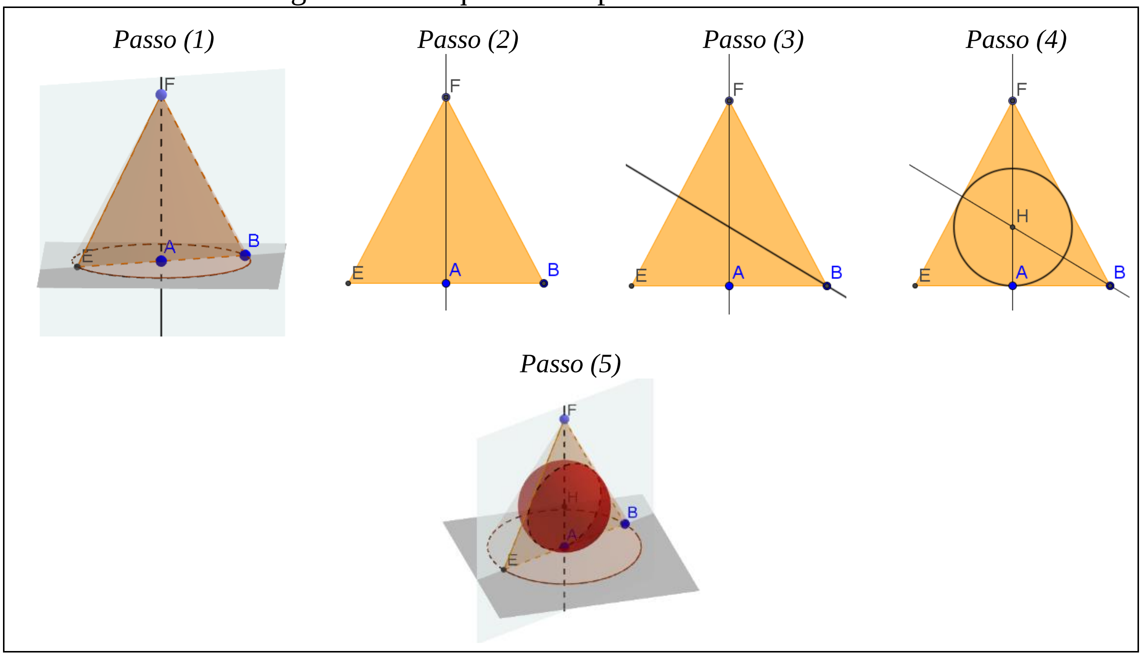


Fonte: Produção da aluna L.

Após testarem esta conjectura, a descartaram. Então, foi preciso retomar o conceito de bissetriz.

Mesmo tendo sido definida a bissetriz, os alunos não conseguiam compreender a utilidade da ferramenta. Como o cone é reto, a reta criada como eixo do cone já correspondia a uma das bissetrizes do triângulo, como vemos na Figura 65(1e2). Após serem informados de que poderiam usar a ferramenta quantas vezes necessário, criaram a bissetriz para mais um vértice, como ilustra o passo (3). Após terem duas bissetrizes, algumas duplas já conseguiam apontar o centro da circunferência, outras acharam necessário definir a última bissetriz. Em seguida, como percebemos no passo (4), definiram o círculo inscrito ao triângulo utilizando o ponto de intersecção das bissetrizes (H) como centro da circunferência, e o centro do círculo da base do cone (A) como um de seus pontos. Tendo o círculo, criaram a esfera de forma trivial. Novamente vê-se exigências da apreensão sequencial.

Figura 65 – Sequência de passos da Atividade 8



Fonte: Elaborada pela autora.

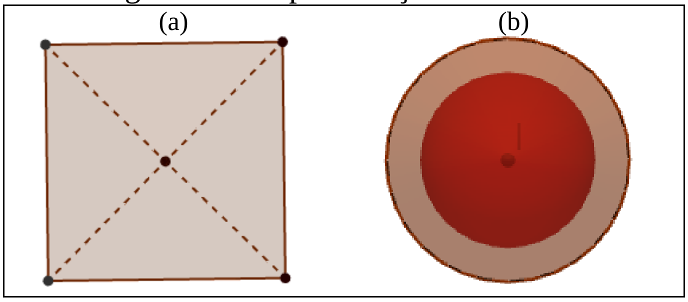
Concluída a construção da "esfera inscrita no cone", os alunos foram solicitados a identificar sob qual ponto de vista tem-se uma situação na qual se "enxergam" dois círculos concêntricos. Após relembrarmos o significado deste termo, foi fácil para os alunos definir o ponto de vista utilizado: "*é possível ter essa visão olhando o cone de cima ou de baixo, pois vemos o círculo maior (base do cone) e o círculo menor (esfera) dentro dele*". Alguns identificaram apenas um dos dois casos. Aqui, novamente mobilizam-se habilidades da apreensão perceptiva.

Outro questionamento dizia respeito ao procedimento a ser adotado para que a distância entre estes dois círculos diminuísse. Para tanto, poderiam manipular raio e altura do cone. Como no enunciado da atividade não era especificada a ferramenta a ser utilizada para criar o círculo base do cone, algumas duplas utilizaram o recurso "Círculo dados centro e raio", o que não permitia a mobilidade do raio diretamente na construção geométrica. Isto restringiu o dinamismo da atividade, mas por outro lado foi positivo, já que ressaltou a relação funcional (Gravina, 2015) entre os elementos construídos, fazendo com que os alunos se questionassem sobre o porquê algumas duplas conseguiam movimentar o raio do cone e outras não.

Contudo, entendemos que para a melhor exploração da atividade, o enunciado deveria ter sido mais específico neste caso, direcionando o aluno à ferramenta "Círculo dados centro e um de seus pontos". Mesmo assim, a grande maioria dos alunos conseguiu destacar o aumento da altura do cone como responsável pela diminuição desta distância - "*quanto mais alto o cone, maior fica o círculo da esfera, diminuindo a distância...*", "*a altura do cone precisa aumentar...*" disseram os alunos.

Gutiérrez (1996) assinala a importância do uso de softwares no ensino e na aprendizagem da Geometria - os alunos podem ser convidados a explorar poliedros e sólidos em infinitas posições, como aconteceu neste Encontro 4. Assim, eles "irão melhorar significativamente a sua capacidade de criar imagens mentais dinâmicas". (GUTIÉRREZ, 1996, p. 11). Por exemplo, um aluno que só tenha observado representações em livros didáticos, dificilmente irá reorganizar o desenho da figura 66(a) como uma possível representação de uma pirâmide ou de um octaedro e tão pouco identificará a figura 66(b) como uma das representações de uma esfera inscrita em um cone, construção tratada na última atividade aqui discutida. Segundo Gutiérrez (1996), ao manipular estes sólidos no GeoGebra, a posição espacial aparece como parte de um contínuo de imagens e o objeto que está na tela do computador torna-se um conjunto de imagens mentais. Ou seja, é enorme a diversidade de imagens mentais que são desenvolvidas através do uso de um software de geometria dinâmica.

Figura 66 – Representações de sólidos

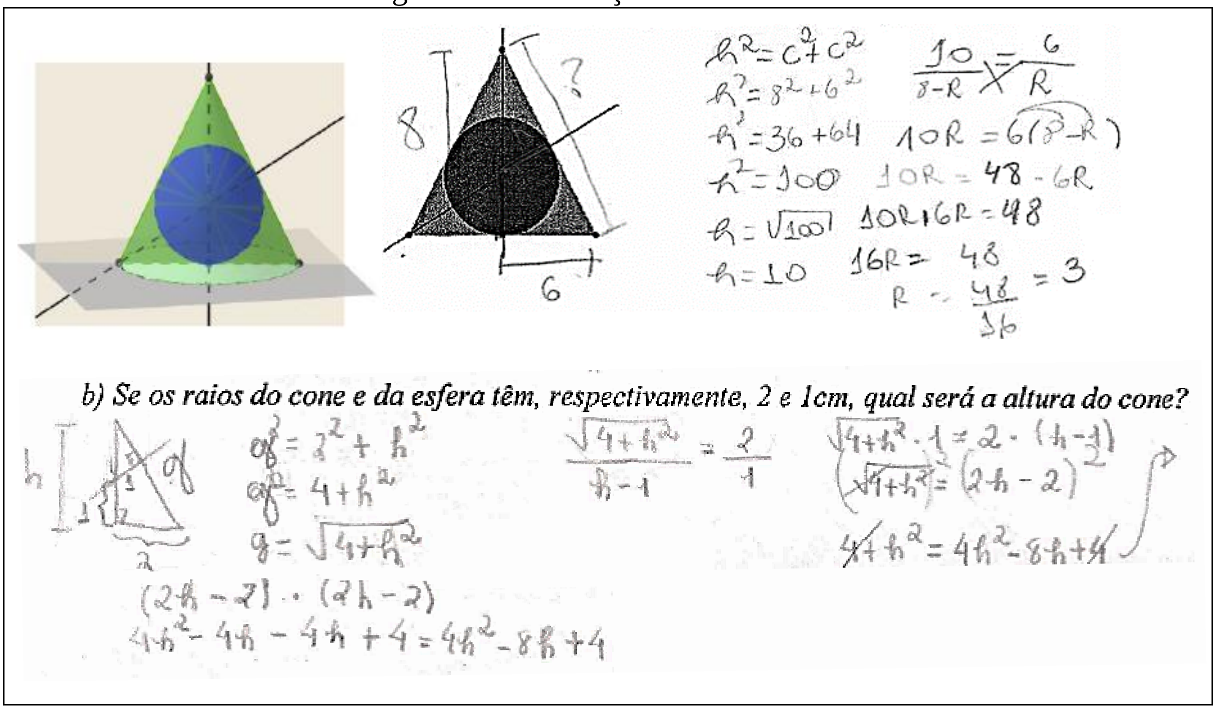


Fonte: (a) Gutiérrez (1996) e (b) Autora.

Assim como na atividade anterior, ao final da Atividade 8 os alunos deveriam resolver os exercícios que haviam sido propostos no início do encontro. Após retomarmos alguns aspectos relativos à semelhança de triângulos, a maioria das duplas conseguiu encontrar o raio da esfera inscrita no cone. Da mesma forma que na atividade anterior, observou-se o uso da situação criada no software como suporte para o debate de ideias nas duplas. Sem o suporte do arquivo GeoGebra, no início deste encontro, nenhuma dupla havia solucionado o exercício.

Mesmo tendo a construção dinâmica, nenhuma dupla conseguiu resolver o último exercício: encontrar a altura do cone dados os raios do cone e da esfera. Duas duplas mostraram compreender a situação, chegando a utilizar o Teorema de Pitágoras e montar a semelhança de triângulos corretamente, mas pararam no meio do exercício por acreditar que este não era o caminho correto, como ilustra a Figura 67.

Figura 67 – Resolução da Atividade 8



Fonte: Ficha de Trabalho aluna L.

Síntese dos resultados: Devo salientar que antes de iniciar o encontro 4, estava muito insegura com a complexidade envolvida em algumas partes das construções e pelas exigências para a resolução dos exercícios, mas no decorrer da execução os alunos mostraram conseguir elaborar raciocínios mais complexos que ao início desta sequência didática, conseguindo concluir a maioria das atividades propostas.

Nas atividades realizadas no Encontro 4, pode-se destacar um amadurecimento das conclusões por escrito acerca das construções no software. Apesar da complexidade maior desta atividade, os alunos surpreenderam quanto aos argumentos e o amadurecimento em suas construções. Mesmo quase finalizando a sequência, ainda tivemos dificuldades técnicas, com alguns computadores travando ao longo do encontro, sendo que alguns arquivos se perderam em função desse problema.

A inscrição de sólidos, apesar de muito cobrada em vestibulares, é uma característica muito pouco discutida nas aulas de Geometria Espacial. Pode-se dizer que, observando as análises e percursos dos alunos envolvidos, o GeoGebra oportuniza uma discussão muito mais significativa do ponto de vista da exploração das representações de um objeto 3D e da percepção de relações entre estas. O aluno se relacionou com o objeto tridimensional de forma investigativa e os recursos do software permitiram a este atuar sobre o objeto geométrico na busca de soluções para a situação. Vê-se assim um percurso muito mais enriquecedor no nosso ponto de vista.

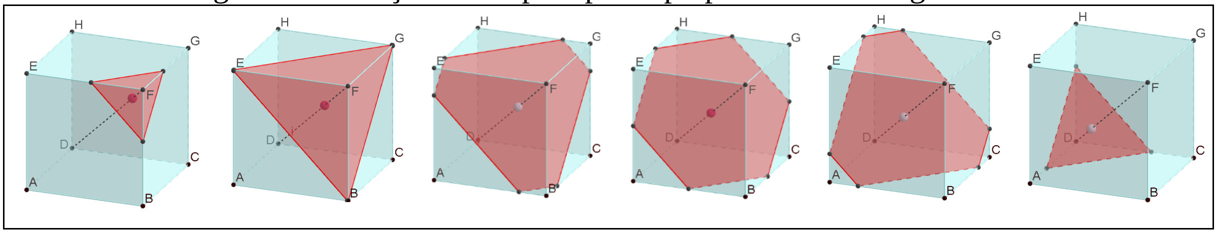
4.2.5 Análise a posteriori do Encontro 5

No Encontro 5, a Ficha de Trabalho teve a finalidade de explorar situações problemas dinâmicas envolvendo funções no contexto geométrico. Nelas, os alunos trabalharam com os conceitos de volume e área de forma mais exploratória e investigativa, visando a compreensão da relação de dependência entre certos elementos dos sólidos com sua área ou volume.

A Atividade 9, tratava sobre as secções determinadas por um plano de corte móvel perpendicular à diagonal de um cubo, ilustrada na Figura 68. Aqui os alunos precisaram retomar o conceito de secção e interpretar a sequência de imagens produzidas no software. Vê-se novamente a exigência de executar os dois aspectos do processo de visualização descritos por Gutiérrez (1996) – a interpretação das informações para gerar imagens mentais e interpretação de imagens mentais para gerar informações.

Além disso, eles precisavam representar graficamente a função correspondente a variação da área destas secções (dependente da posição do ponto móvel sobre a diagonal do cubo). Aqui, ocorreu outro tipo de conversão de registros de representação, até o momento não explorado: a conversão do registro figural para registro gráfico, e depois do registro gráfico para o registro algébrico.

Figura 68 – Secções dada pelo plano perpendicular a diagonal DF



Fonte: Elaborada pela autora.

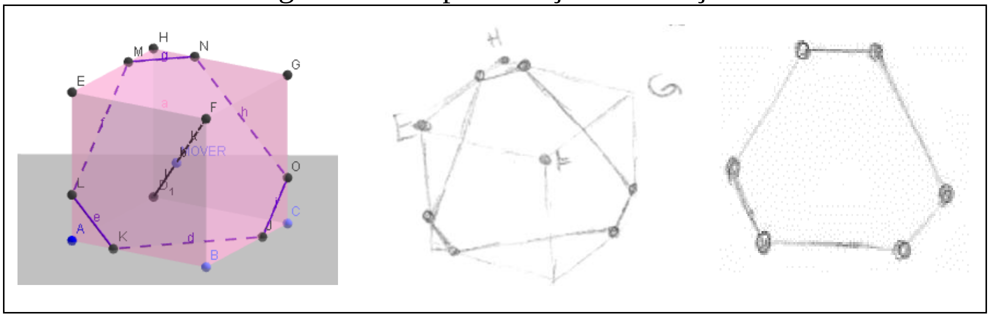
Mesmo após termos realizado as Atividade 2 e 3 no Encontro 2, envolvendo o conceito de secção, a construção desta situação não foi fácil para a maioria dos alunos. Inicialmente, eles tiveram tempo para interpretar e criar hipóteses de construção para a situação geométrica. Apesar de conseguirem caracterizar a movimentação do ponto móvel: "*ele se movimenta entre o vértice D e F...*" (Aluna L), todas as duplas mostraram dificuldades em executá-la no GeoGebra. Fez-se necessária uma discussão coletiva, usando-se um projetor multimídia. Nesta conversa, tratamos de discutir os procedimentos para a criação do plano de corte que gera esta sequência de secções.

Tendo a situação modelada no GeoGebra, os alunos responderam a alguns questionamentos, por meio da análise e interpretação da situação construída, ou seja, através da apreensão perceptiva e operatória principalmente. No primeiro deles, os alunos deveriam descrever os procedimentos utilizados na construção desta situação geométrica. A maioria das duplas conseguiu detalhar a construção feita: "*após criar o cubo, tracei uma diagonal entre E e F e pus um ponto móvel neste segmento, fiz um plano perpendicular ao ponto e ao segmento e interseccionei o plano com o cubo*", definiu a aluna L.

O segundo questionamento diz respeito à caracterização das secções formadas pelo plano de corte. Alguns apenas identificaram as secções como "*triângulos e hexágonos*", outros detalharam as características destas secções definindo inclusive quando cada uma acontece com relação a posição do ponto móvel: "*Triângulo: quando o ponto móvel se encontra mais próximo aos pontos D ou F; Hexágono: quando mais próximo ao meio do segmento, formando um hexágono regular quando está exatamente na metade*" (Aluna L). Os argumentos utilizados indicam um amadurecimento no que se refere ao nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, descrito por Van Hiele (apud Crowley, 1994) e Gutiérrez (1996).

Ainda analisando as características das secções formadas, os alunos identificaram se em algum momento a secção não é regular, descrevendo e ilustrando em que momento esta situação acontece. Todas as duplas conseguiram visualizar esta secção, alguns ilustraram a secção interna ao objeto tridimensional, outros optaram por representar apenas a secção plana, como mostra a Figura 69. A dupla LL apontou que a secção irregular ocorre "*no momento em que a secção não é um triângulo ou que o hexágono está fora dos pontos médios das arestas*".

Figura 69 – Representações da secção



Fonte: Produções dos alunos.

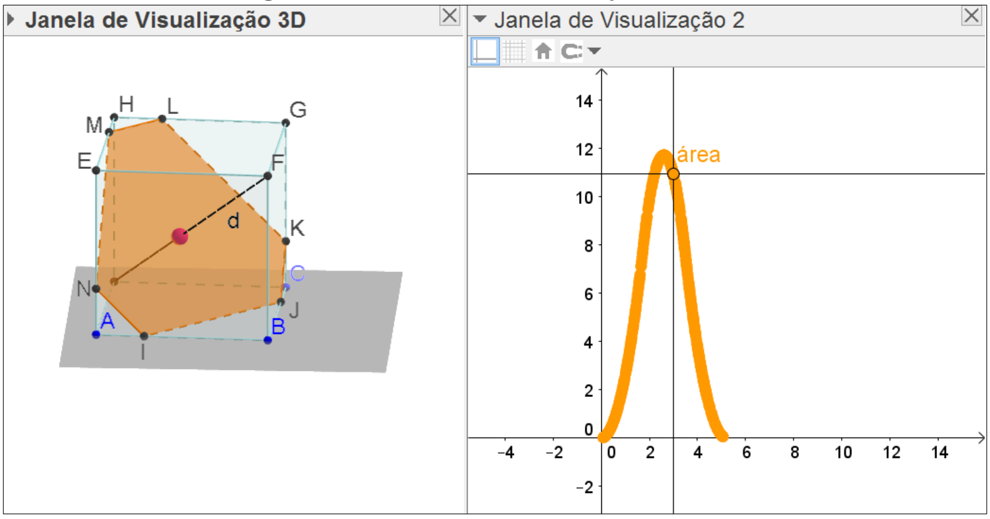
Quanto a variação da área das secções, de forma intuitiva, a maioria dos alunos apontou: "*a área aumenta até chegar a metade da diagonal, depois diminui".* Um grupo indicou que quanto mais longe de F, menor seria a área. Ainda, na maioria dos casos, apontaram que a secção de maior área correspondia ao hexágono formado pelos pontos médios das arestas AB, AE, EH, HG, CG e BC ou ainda, se referindo a esta mesma secção, que seria o hexágono formado quando o ponto mover está no ponto médio da diagonal DF. Um grupo apontou que a maior área formada seria o triângulo BEG, outros ainda apontaram que qualquer um dos hexágonos (regulares ou irregulares) teriam a maior área e que estas seriam todas equivalentes.

Por fim, deveriam construir o gráfico da variação da área do polígono, para então confrontar as informações com as respostas dadas nos itens anteriores.

Foi fácil para os alunos identificarem as variáveis do problema - polígonos variando conforme variava o ponto na diagonal do cubo. Também conseguiram apontar que o valor da área dependia da posição do ponto "Mover" sobre a diagonal EF. Porém, não mostraram desenvoltura para expressar essa relação no software de modo a gerar o gráfico. Após discutirmos coletivamente, um dos alunos disse "*x é a distância do ponto móvel até o F, onde começa...".* Com auxílio da professora/pesquisadora, foi construído um segmento de F até o ponto Mover da diagonal e o comprimento deste segmento foi escolhido como a variável independente ´d´. Da mesma forma, foi definida a variável dependente correspondente a área da secção. A área desta secção é definida na Janela de Álgebra como “pol1”, e assim foi obtida a notação para o ponto do gráfico da função, a saber o par ordenado (d, pol1).

Inserindo este ponto no campo Entrada e habilitando o seu rastro, obtivemos o gráfico que corresponde a área das secções, conforme ilustra a Figura 70.

Figura 70 – Gráfico de Variação da Área



Fonte: Produção do aluno D.

Foi notável a facilidade de interpretação do gráfico, ficando simples para os alunos identificar a secção de maior área e analisar a variação das áreas, comparando-as com suas respostas anteriores. A dupla LL que anteriormente havia apontado que a maior área formada seria o triângulo BEG, facilmente percebeu o equívoco, identificando o hexágono regular como sendo o polígono de maior área. O mesmo aconteceu para os que haviam apontado que qualquer um dos hexágonos teria a maior área “*a maior área, na verdade, é quando o ponto se encontra no ponto médio do segmento DF (forma um hexágono regular)* ” (dupla AT).

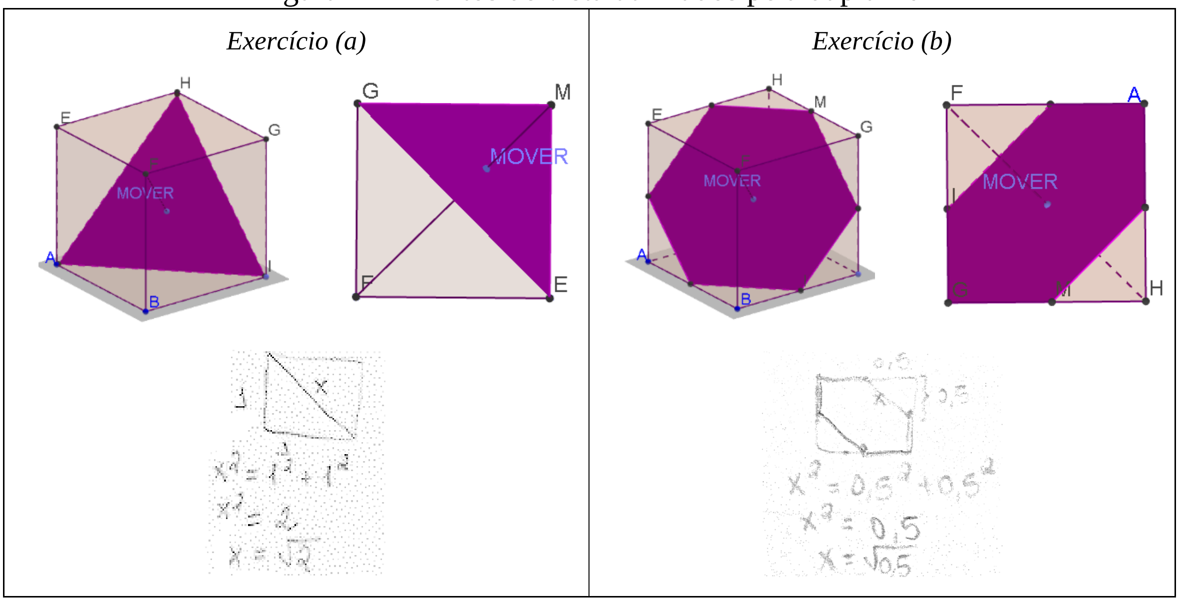
As dificuldades dos alunos nesta atividade disseram respeito, essencialmente, ao uso do GeoGebra, pois para quem nunca construiu um gráfico no software, o procedimento não é óbvio. Devemos ressaltar ainda, que nesta atividade o objetivo não foi trabalhar com a lei da função, mas sim a conversão de registro figural para registro gráfico.

Vê-se que esta tornou-se uma atividade que privilegiou um diálogo constante entre as representações simultâneas de um objeto no GeoGebra 3D. Houve uma exploração concomitante, entre figuras na Janela 2D (plano de corte), objetos na janela 3D e o gráfico gerado a partir da interpretação da situação dada. Assim, acredita-se que se tem significativos ganhos cognitivos com o uso do GeoGebra, não somente pela sua interface, onde as representações dinâmicas surgem, mas pela mobilização de conhecimentos exigida ao utilizar seus comandos, como se vê, por exemplo, na criação do gráfico cartesiano.

Ao final desta atividade, os alunos deveriam realizar dois exercícios como os que estamos acostumados a encontrar em livros didáticos. No primeiro, dado um cubo com 1cm de aresta, deviam calcular a área do maior triângulo equilátero formado na construção geométrica trabalhada na Atividade 9. No segundo, calcularam a área da secção quando ela é o hexágono regular formado por pontos médios das arestas do cubo. Deste modo, poderiam utilizar a construção realizada para visualizar os exercícios de forma dinâmica.

A maioria das duplas conseguiu resolver os dois exercícios e em sua maioria utilizaram o GeoGebra como suporte para rotacionar e observar as construções sob diferentes pontos de vista. Observando os raciocínios utilizados e as discussões entre as duplas percebeu-se uma complementaridade entre a resolução dos exercícios e o software, sendo que os argumentos para a sua resolução, na maioria das vezes, eram discutidos na tela do programa, como exemplifica a Figura 71. Nesta Figura podemos observar os pontos de vista utilizados pelos alunos na resolução dos exercícios e que permitem, a partir da apreensão perceptiva, definir o triângulo retângulo que dá as respectivas soluções. Assim, pode-se dizer que os tratamentos via software deram suporte para a formulação de imagens mentais que auxiliaram na resolução das situações dadas.

Figura 71 – Pontos de vista utilizados pela dupla AJ

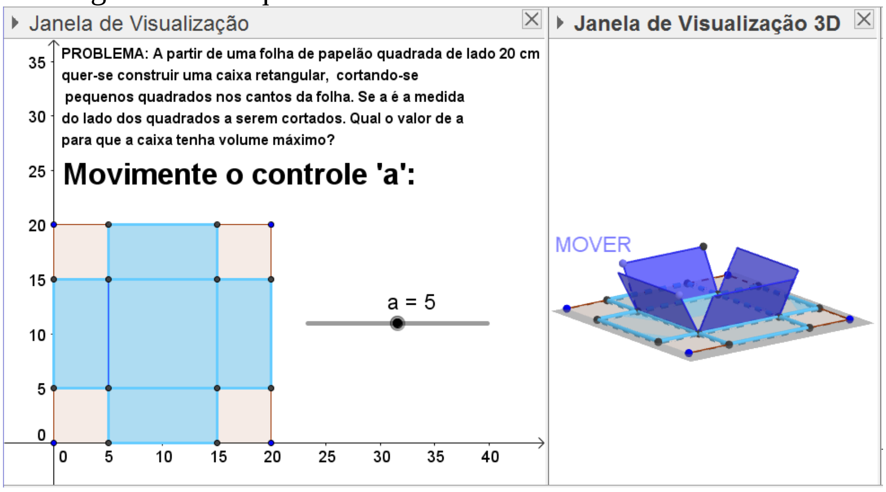


Fonte: Produção da dupla AJ.

Já na Atividade 10, o raciocínio foi similar. Os alunos novamente precisaram compreender quais seriam as variáveis independente e dependente, na construção do gráfico que relaciona o corte “a” na folha de papelão com o volume da caixa planificada. Os alunos precisaram perceber que a medida em que “a” variava, o volume também variava, isto é, o volume da caixa dependia da variável “a” que, neste problema, representava o tamanho do corte.

Conforme já mencionado, nesta atividade os alunos exploraram um arquivo GeoGebra construído pela professora/pesquisadora. Assim, inicialmente tinham acesso a representação figural plana e 3D, como ilustra a figura abaixo.

Figura 72 – Arquivo GeoGebra: Caixa de Volume Máximo



Fonte: Elaborada pela autora.

Quando questionados sobre o que ocorria com as dimensões da base e da altura quando se alterava o valor de “a”, praticamente todos alunos apontaram que “*conforme aumenta o valor de corte, a base diminui e a altura aumenta*”. Os alunos também se manifestaram com ideias equivocadas. Por exemplo, disseram que o volume seria sempre o mesmo, pois uma medida seria “compensada” na outra – vemos erros similares em outras situações da matemática escolar, tais como quando os alunos apontam que o produto a.b tem resultado constante se a aumenta e b diminui - uma ideia equivocada, mas que os alunos usam.

Outro exemplo de erro: a maioria das duplas apontou que se a variável “a” aumenta, o volume diminui, *“quanto maior o corte, menor o volume e quanto menor o corte, maior o volume”*. Salientamos que as respostas para estes questionamentos iniciais foram dadas com base na observação, manipulação e na análise intuitiva do volume da caixa a partir do arquivo GeoGebra. Mais adiante, com a construção do gráfico os alunos perceberam os equívocos cometidos.

Uma outra manifestação equivocada foi quanto à caixa de volume máximo. Ao explicarem o comportamento do volume conforme se altera o valor de “a”, duas duplas apontaram que o volume máximo é quando a=5 e também afirmaram que o volume diminui tanto para valores maiores quanto menores do que a=5: *"o volume máximo é a=5 e a partir disso, se diminuirmos ou aumentarmos o valor de "a", o volume diminui*". Os alunos podem ter sido influenciados pela situação anterior, na qual a maior área da secção acontecia quando o ponto móvel estava no ponto médio da diagonal do cubo, ou seja, na metade da diagonal. Assim, podem ter deduzido que o maior volume da caixa correspondia ao momento em que a aba atingia a metade do seu valor total, ou seja, a=5. Outra suposição: os alunos também podem ter indicado a medida de a=5, pois as dimensões da caixa seriam todas exatas 10x10x5cm e isto facilitariam o cálculo do volume.

Nesta situação o ponto de máximo do volume não é evidente para o aluno, sendo que para determiná-lo com precisão, necessita-se da lei da função e do cálculo da sua derivada – conceito que não é tratado no Ensino Médio. Lembramos também que, até este momento, os alunos não tinham o suporte do gráfico, decidindo sobre os questionamentos apenas com base nos tratamentos do registro figural.

O próximo questionamento foi quanto ao formato da caixa, dependendo do tamanho do corte, e também, quanto ao volume. Abaixo, no Quadro 3, temos o universo de respostas obtidas para este questionamento.

Quadro 3 – Registro de Respostas (b1) e (b2)

	FORMATO DA CAIXA	**VOLUME DA CAIXA**
CORTE GRANDE	- base pequena e altura grande;	- volume pequeno;
	- "comprida";	- volume pequeno;
	- altura maior que a base;	- volume inalterado;
	- estreita e alta;	- volume pequeno;
	- base pequena;	- volume pequeno;
	- pequena;	- volume pequeno;
CORTE PEQUENO	- base grande e altura pequena;	- volume pequeno;
	- "baixinha";	- volume grande;
	- base maior que a altura;	- volume inalterado;
	- larga e baixa;	- volume grande;
	- base grande;	- volume grande;
	- grande;	- volume grande;

Fonte: Produções de alunos.

Conforme o Quadro 3, vemos que, com diferentes palavras, a maioria das duplas disse que se o corte "a" é grande, a base será pequena e a altura da caixa será grande. Também, conseguem identificar que o volume resultante é pequeno se comparado ao maior volume obtido dependendo de "a", porque a caixa é bem "*fininha*": *"estreita e alta"* ou *"comprida"* como apontaram os alunos.

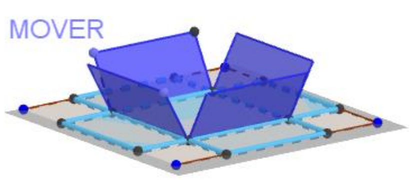
Os alunos também conseguiram identificar que se o corte "a" for pequeno a base será grande e a altura será pequena. Equivocadamente, disseram que o volume da caixa será grande. Observamos que se a base vai aumentando, chegando no limite em que não se tem mais uma planificação e isto ocorre quando a=0, a caixa vai ficando muito achatada e o seu volume vai tendendo a zero. Mas isto não foi observado pelos alunos. Destacamos novamente que, ao construir o gráfico, os alunos deram-se conta de seus equívocos quanto as ideias que expressaram nesta exploração inicial.

No momento de construir o gráfico do volume da caixa em função do corte "a", os alunos identificaram sem maior dificuldade a relação de dependência entre volume e tamanho do corte. Contudo, assim como na atividade anterior, a dificuldade esteve em definir esta função no software. Em geral, conseguiam indicar a variável independente "a", mas não tinham a mesma facilidade para identificar a variável dependente.

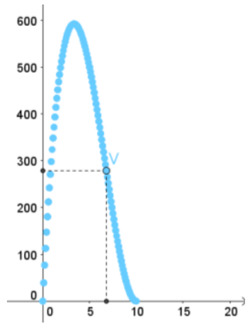
Nesta atividade exige-se do aluno a conversão de registro: objeto 3D → lei da função e o software produz, de forma imediata, a conversão lei da função → gráfico, como ilustra a Figura 73.

Figura 73 – Conversões de Registro Atividade 10

Considere uma folha de papel quadrada de lado igual a 20 cm. Como se deve cortar os cantos desta folha de modo a formar uma caixa sem tampa que contenha o maior volume de água possível, quando completamente cheia?



$\longrightarrow$ $(20-2a)^2 a$ $\longrightarrow$



Registro Figural ***Registro Algébrico*** ***Registro Gráfico***

Fonte: Elaborada pela autora.

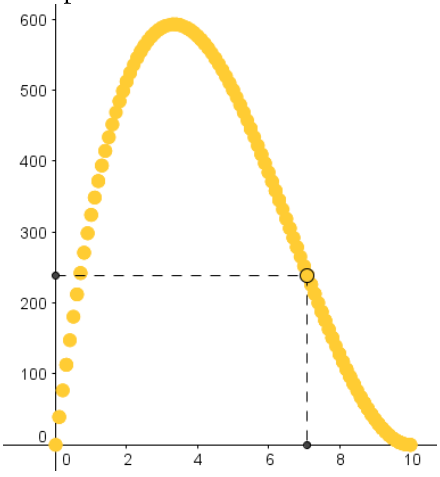
Os alunos classificaram esta atividade como a mais complexa e disseram que *"tinha um pensamento diferente..."* e *"tínhamos que pensar mais..."*. Para Duval (2003), em geral, os alunos tendem a apresentar dificuldades em conversões que necessitam da "tradução" do registro discursivo para o registro algébrico. Em atividades deste tipo, os alunos muitas vezes não chegam à resolução por não saberem como relacionar os dados do enunciado para em seguida representá-los na forma de um registro algébrico, como uma função por exemplo.

Muitas vezes, enquanto professores de Matemática, imaginamos que determinadas conexões são simples para os alunos quando na verdade podem não ser. No caso da conversão reitera-se o que Duval (2009) considera a este respeito: a passagem de um sistema de representação para outro pode ser comum na atividade matemática, porém, não é tão evidente e espontâneo para a maioria dos alunos. A conversão de registros conserva o objeto, variando as formas de visualizá-lo enquanto conceito. Assim, a conversão sugere uma mudança de interpretação, já que o conteúdo da representação final (gráfico) provoca uma interpretação distinta da representação inicial (objeto 3D). Ou seja, a conversão requer a percepção quanto à diferença entre a forma e o conteúdo da representação. Sem essa percepção, a atividade de conversão torna-se inviável.

Geralmente, o volume de um paralelepípedo é conhecido desde as séries finais do ensino fundamental, já que este é um dos sólidos mais elementares. Porém, muitos alunos ou não lembravam ou desconheciam que o volume é dado pelo produto entre a largura, o comprimento e a altura do sólido.

A área do retângulo da base da caixa estava informada na Janela de Álgebra do GeoGebra, como “pol6”. Isto facilitou a tarefa de definir a variável dependente da função, a saber “pol6*a” sendo que “a” representa o tamanho do corte e por consequência a altura da caixa. Bastou então definir o par ordenado (a, pol6*a), para ter-se um ponto” genérico do gráfico que representa uma aproximação do volume da caixa em função do corte “a”, e isto está ilustrado na Figura 74.

Figura 74 – Gráfico que representa o volume da caixa em função do corte “a”



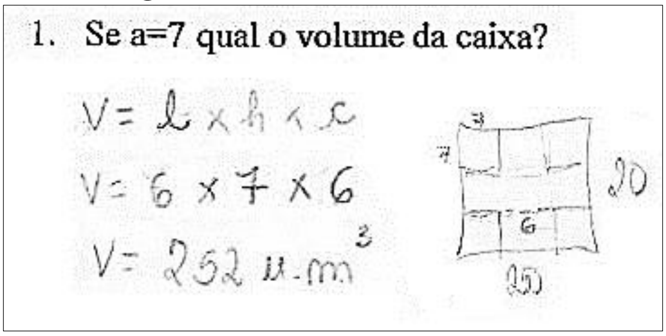
Fonte: Produção do aluno D.

Outra vez, foi observado que os alunos têm facilidade em interpretar qualitativamente os resultados fornecidos pelo gráfico, dando-se conta dos erros cometidos nas questões anteriores. Todas duplas conseguiram identificar um valor aproximado de "a" para se obter o volume máximo da caixa, utilizando retas perpendiculares aos eixos ordenados e passando pelo ponto máximo da função. Nas respostas obtidas as duplas estimaram valores entre a=3,3 e a=3,5, alguns ainda utilizaram o recurso de zoom do GeoGebra para chegar ao valor mais aproximado possível.

Ao serem questionados sobre qual seria o volume da caixa se o corte "a" da aba medisse 7cm., alguns ainda mostraram dificuldades de compreensão da estrutura da caixa e da relação existente entre a representação 2D e 3D, fornecida no arquivo GeoGebra. Por exemplo, alguns não conseguiram perceber que o corte "a" correspondia, na vista 3D, a altura da caixa formada, mesmo podendo movimentar a construção que transforma a representação da caixa aberta (bidimensional) na caixa 3D.

A maioria dos alunos resolveu a questão sem maiores dificuldades. Contudo, mesmo com o suporte do arquivo GeoGebra, no qual tinha a caixa variando e ao lado o registro gráfico da variação do volume, muitos alunos ainda sentiram necessidade de recorrer a uma representação figural própria desenhada na Ficha de Trabalho e que funciona como um registro intermediário para se chegar a conversão registro discursivo → função, conforme ilustra a Figura 75.

Figura 75 – Raciocínio da aluna L

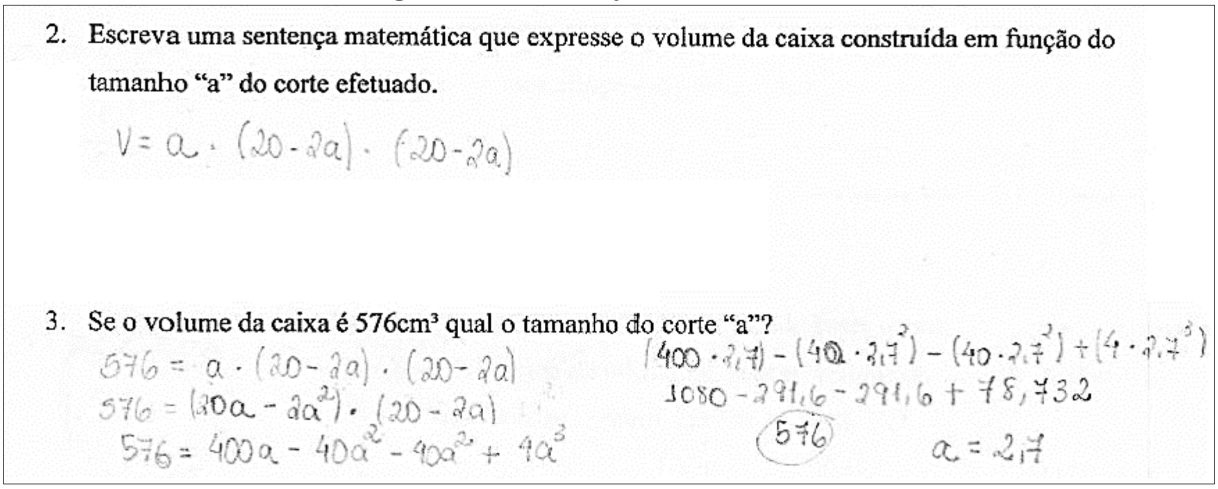


Fonte: Produção da aluna L.

Já para o item 2, sobre a expressão que define o volume da caixa, para qualquer valor de "a", foi sugerido que os alunos utilizassem o mesmo raciocínio anterior só que definindo o valor do corte como "a" (valor genérico) e não como um valor numérico. Pode-se observar na Figura 76, que a maioria dos alunos conseguiu definir esta função como sendo V= a. (20-2a).

(20-2a), outros ainda reduziram a expressão utilizando as propriedades de potências de mesma base, obtendo V= a.(20-2a)².

Figura 76 – Resolução dos itens 2 e 3



2. Escreva uma sentença matemática que expresse o volume da caixa construída em função do tamanho "a" do corte efetuado.

V = a . (20 - 2a) . (20 - 2a)

3. Se o volume da caixa é 576cm³ qual o tamanho do corte "a"?

576 = a . (20 - 2a) . (20 - 2a)
576 = (20a - 2a²) . (20 - 2a)
576 = 400a - 40a² - 40a² + 4a³

(400 . 2,7) - (40 . 2,7²) - (40 . 2,7²) + (4 . 2,7³)
1080 - 291,6 - 291,6 + 78,732
576
a = 2,7

Fonte: Produção da aluna L.

E por fim, pela falta de tempo, apenas quatro duplas conseguiram chegar ao item 3. Elas utilizaram o item 2 como caminho para encontrar o valor de "a". O gráfico mostra que existem dois valores de "a" que respondem à pergunta. Eles podem ser calculados usando-se o procedimento clássico de determinação de possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros (se o número racional p/q, com p e q inteiros e primos entre si é uma raiz da equação polinomial com coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$ então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n, e daí são testadas as possibilidades). Uma das raízes é a=4 e a partir disso ficaria fácil calcular o segundo valor, pois recai-se em cálculo de raiz de equação de grau dois.

Contudo, ao resolver o produto a. (20-2a) ² e obter uma equação de grau 3, duas das duplas desistiram da questão. As outras duas duplas utilizaram cálculos por estimativa atribuindo valores para a variável "a" até se aproximarem ao máximo do valor esperado, conforme ilustra a Figura 76. O resultado obtido por estas duplas foi de a=2,7, sendo que nenhuma das duas duplas recorreu a análise gráfica para a resolução da questão, nem percebeu a existência de dois valores possíveis.

Entendemos que análises a partir de valores em uma tabela, como os feitos pelas duas duplas nesta última situação, restringem o processo de análise da situação. Através do GeoGebra, no entanto, a análise gráfica se tornaria muito mais rica do ponto de vista cognitivo, evidenciando visualmente a relação existente entre as duas variáveis. Contudo, este aspecto não foi explorado pela falta de tempo.

Síntese dos resultados: As atividades do Encontro 5 procuraram abordar o uso do GeoGebra como um potencializador de explorações de problemas que normalmente se apresentam de forma estática, nos livros didáticos e exercícios cobrados em vestibulares. Os enunciados tornaram as atividades dinâmicas e provocaram o aluno a pensar a situação sob diferentes pontos de vista e de diferentes formas. Também, procurou tratar do conceito de função no contexto geométrico, analisando a área e o volume de sólidos de forma dinâmica, distanciando estes conceitos da simples e mecânica aplicação de fórmulas.

Também, ao analisar o problema de volume máximo da caixa, o aluno pôde explorar a representação bidimensional (planificação), a representação 3D (caixa tridimensional) e ainda gerar o gráfico da função expressa naquela situação. Desta forma, acredita-se que a leitura feita desta situação é muito mais ampla, e ao mesmo tempo, mobiliza uma série de competências e habilidades em sua resolução de forma incomparável aquelas que o aluno utilizaria ao resolver um exercício do tipo estático no caderno.

No geral, ao final desta sequência didática, pode-se dizer que o poder de análise proporcionado ao aluno pela interação com as situações via software enriquece as situações, fazendo com que o aluno mobilize diferentes competências e concentre-se no estabelecimento de relações entre os elementos visualizados na tela do software.

Também, quanto às possibilidades de transformação de registro, Duval (2003) afirma que no atual sistema de ensino a aprendizagem do aluno tem sido avaliada muitas vezes, apenas por registros isolados e compartimentados, ou seja, quando se trabalha dentro de um único sistema de representação. Acreditamos que esta proposta ajudou a desenvolver a capacidade de compreender um objeto matemático por meio de diferentes registros de representação e pensamos que, quando isso acontece, pode-se dizer que se está no caminho da construção do conhecimento geométrico.

Ao iniciar esta sequência didática, os alunos apresentaram dificuldades para se adaptar ao uso do software GeoGebra 3D. Desde a linguagem utilizada pelo software até a falta de compreensão das exigências de cada construção, variadas foram as dificuldades expostas pelos alunos.

No decorrer das atividades, os alunos manifestaram mudanças tanto no que diz respeito à sua postura frente aos desafios propostos, quanto ao desenvolvimento do pensamento geométrico espacial. Além de se mostrarem mais autônomos, eles também mostraram estar muito mais motivados para explorar e analisar cada atividade nova que lhes era apresentada. Na *análise a posteriori* das atitudes e resoluções apresentadas pelos alunos, foi possível constatar que as construções realizadas no GeoGebra 3D auxiliaram no desenvolvimento das habilidades de visualização de objetos tridimensionais e também auxiliaram na compreensão e elaboração de estratégias e argumentos para solucionar problemas que envolvem objetos 3D.

Retomando ainda as principais ideias dos teóricos que referenciam este estudo, Gutiérrez (1992 - 1998) e Duval (2003 - 2012), podemos dizer que o uso do software GeoGebra contribuiu no desenvolvimento de diversas habilidades espaciais e na melhor compreensão de conceitos relativos à Geometria Espacial. Esta afirmação fundamenta-se na observação do amadurecimento dos argumentos e conhecimentos dos alunos no decorrer da proposta; na percepção e exploração de diferentes registros de representação dos objetos geométricos; na utilização de transformações de registros de representação de forma dinâmica (tanto tratamentos, quanto conversões); na atuação do aluno em atividades que privilegiaram tanto a interpretação de informações para gerar imagens mentais, quanto o aspecto inverso; e principalmente, nas interações via software, que permitiram ao aluno um constante diálogo entre representações externas e imagens mentais.

Quanto as análises *a priori* e *a posteriori*, estas últimas baseadas no desempenho dos alunos, ponderamos que a proposta didática pode ser validada. Observando as hipóteses iniciais quanto ao uso do GeoGebra 3D, descritas no capítulo 3, vemos que elas se legitimaram – o uso deste software, ao contemplar aos alunos a exploração de situações geométricas de forma dinâmica e investigativa contribuiu para a formação de imagens mentais e para o desenvolvimento de habilidades que dizem respeito ao raciocínio geométrico espacial.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Posso dizer que ao final desta proposta considero-me muito satisfeita quanto aos progressos observados nas aprendizagens dos alunos. A partir das suas produções, foi possível observar indicadores de desenvolvimento na visualização de objetos tridimensionais durante a sequência didática. Além disso, os alunos mostraram constantes progressos no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, estabelecendo relações entre objetos geométricos e percebendo propriedades importantes dos objetos 3D.

Acredito que essa melhora nas habilidades de visualização espacial está intimamente relacionada ao uso do software GeoGebra. A abordagem tradicional da Geometria Espacial, que em alguns casos, vêm se restringindo ao estudo de área e volumes, está distante de convencer o aluno de que a Geometria se relaciona com o mundo que o cerca e de promover o desenvolvimento de habilidades e do pensamento geométrico. Entendemos que o trabalho com a Geometria deve ser mais investigativo, instigando o aluno a explorar e analisar situações geométricas.

Desde que comecei a atuar no ensino médio e, em especial, no ensino da Geometria Espacial, venho me questionando sobre o significado que ela assume para nossos alunos. Percebendo as inúmeras dificuldades que nossos alunos possuem ao transitar pela Geometria, sempre procurei novos recursos e metodologias que auxiliassem os alunos em seu desenvolvimento cognitivo: construção de maquetes, montagem de sólidos, atividades de modelagem, etc.

Baseada nesta inquietação pessoal e buscando inspiração nos conhecimentos adquiridos no decorrer do Mestrado em Ensino de Matemática, vi no uso da tecnologia e em especial, nos softwares de Geometria Dinâmica, uma possibilidade de potencializar o estudo da Geometria Espacial, tornando-o sim mais significativo e interessante aos olhos do aluno. Assim, buscou-se, através do GeoGebra 3D, desenvolver habilidades espaciais e diminuir dificuldades observadas de forma recorrente junto aos alunos: a visualização e interpretação de representações de objetos tridimensionais.

Nesta dissertação, acima de tudo, se pretendeu descortinar as múltiplas possibilidades/oportunidades que a tecnologia nos oferece na busca de processos de ensino e aprendizagem realmente significativos em Geometria. O uso do GeoGebra 3D permitiu a exploração de representações muito próximas dos objetos reais e de uma rica variedade de representações de um mesmo objeto. Assim, a partir de seu uso, verificou-se a possibilidade de superar dificuldades quanto ao processo de representação mental destes objetos, essencial para a formalização dos conceitos em Geometria.

Existem ainda alguns outros aspectos aos quais não posso deixar de me referir. Dentre eles está o fato de os alunos mostrarem maior motivação na utilização de novos recursos, além de apontarem que o uso do GeoGebra facilitou a resolução das atividades, principalmente quanto às habilidades de visualização *"Podemos manipular as formas em 3D, o que facilita na hora de visualizar...".* Inclusive, analisando o desempenho geral dos alunos e confrontando experiências anteriores na sala de aula convencional com as obtidas no laboratório de informática, percebe-se que houve uma mudança de atitude frente as situações propostas, nas quais os alunos atuaram com mais autonomia, interesse e com maior desenvoltura para argumentar matematicamente.

Também se percebe ao longo de toda proposta, e conforme já apontado no decorrer das atividades, a atuação dos alunos em atividades que mobilizaram todas as apreensões descritas por Duval (2003). Nas atividades se exigiu dos alunos a capacidade de construir situações (sequencial), a capacidade de interpretar figuras e elementos (perceptiva), a habilidade de articular dados discursivos e figurais (discursiva) e a competência de reorganização dada pelas modificações nas construções (operatória). Esta última recebe importância especial, pois atividades dinâmicas foram propostas, demandando que o aluno analisasse as diversas reorganizações devido ao movimento e dinamismo próprios de cada construção.

Diretamente ligada ao dinamismo e ao movimento possibilitados via GeoGebra 3D, está a variedade de registros de representação e a fluidez dos tratamentos figurais utilizados. Pode-se dizer que ao interagir com o software de geometria dinâmica, os tratamentos e as conversões do registro figural se processaram de forma diferenciada, pois as possibilidades de interação e manipulação permitiram a construção de relações mais significativas entre representações de um objeto e as imagens mentais dos alunos.

Também, durante a atividade, percebeu-se a utilização constante das representações via software para a visualização e compreensão das situações. Assim, ficou claro que a visualização é indispensável para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Mas, também, não ficam dúvidas da sua ligação com as representações do objeto 3D, com os modos de olhar este objeto.

Tais características vêm a reafirmar que a imagem mental que o aluno cria a partir de determinada situação problema, através dos processos de visualização, perpassa necessariamente pelo uso de representações. Desta forma, a visualização e a representação tornam-se dois processos indissociáveis em Geometria e na construção do conhecimento geométrico. Entendemos que assim, o GeoGebra, potencializador do diálogo entre representações e imagens mentais, contribuiu no avanço do raciocínio em Geometria Espacial.

Assim como neste estudo, são muitas as tentativas de promovermos um ensino significativo em Geometria. Como vimos, a própria história do ensino da Geometria sinaliza para a constante busca de recursos e métodos que favoreçam seu aprendizado. São muitos os trabalhos desenvolvidos nesse sentido e entendemos que estes precisam estar ao alcance dos professores que atuam nas salas de aula. Para tanto, conforme já mencionado, como produto final dessa experiência didática, trazemos no Apêndice A orientações iniciais quanto ao uso do GeoGebra, no Apêndice B a sequência didática proposta, e, no Apêndice D, um passo a passo das construções geométricas propostas neste estudo. Além disso, disponibilizamos um GeoGebraBook com a sequência didática proposta e que está disponível on-line através do endereço <http://www.geogebra.org/rb/SVYH6Rc7> para livre uso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos*. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003. p.125-147.

ANDRADE, José Antônio Araújo, NACARATO, Adair Mendes. *Atuais Tendências Didático-Pedagógicas no Ensino de Geometria: um olhar sobre os anais dos ENEM's*. Educação Matemática em Revista – SBEM, ano 11, n. 17, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/06/CC20104840889.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2016.

ARTIGUE, Michele. *Engenharia didática*. In: BRUN, Jean. Didática das matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193-217.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília:MEC/SEF, 1998.

______. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

______. *Orientações curriculares para o ensino médio:* Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília:MEC/SEF, 2006. 135 p. vol. 2.

BECKER, Marcelo. *Uma alternativa para o ensino de geometria*: visualização geométrica e representações de sólidos no plano. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática (IM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2009. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17161/000712216.pdf?seque>. Acesso em: 05 de novembro de 2015.

CARVALHO, Marlene Lima de Oliveira. *Representações planas de corpos geométricos tridimensionais*: uma proposta de ensino voltada para a codificação e decodificação de desenhos. 244 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto (MG), 2010.

CARVALHO, Hudney Alves Faria de; FERREIRA, Ana Cristina. *Visualização espacial e pensamento geométrico:* um panorama da produção brasileira em programas de pós-graduação nos últimos anos. In: VII Encontro Mineiro de Educação Matemática, 2015, Juiz de Fora. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/VISUALIZA%C3%87%C3%83O-ESPACIAL-E-PENSAMENTO-GEOM%C3%89TRICO-UM-PANORAMA-DA-PRODU%C3%87%C3%83O-BRASILEIRA-EM-PROGRAMAS-DE-P%C3%93S-GRADUA%C3%87AO-NOS-%C3%9ALTIMOS-ANOS.pdf>. Acesso em: 13 de novembro de 2015.

COZZOLINO, Adriana Maria. *O ensino da perspectiva usando o Cabri 3D*: uma experiência com alunos do ensino médio. 192 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo (SP), 2008. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=128639>. Acesso em: 13 de janeiro de 2015.

CROWLEY, Mary L. *O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.* In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (Org.). Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

DAMM, Regina Flemming. *Registros de Representação*. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (et. al). Educação Matemática: uma introdução. 3ª edição, São Paulo: EDUC, 2008, p. 167-188.

DUVAL, Raymund. *Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica. 1ª ed. São Paulo: Papirus, 2003, p. 11-33.

______. *Semiósis e pensamento humano:* registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Roâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. *Ver e Ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo de pensar* os registros de representação semiótica. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

______. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. p. 37- 64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 15 de dezembro de 2015.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. *O ensino de geometria no 1º e 2º graus.* Educação Matemática em Revista, Florianópolis, n. 4, p. 45-51, 1995.

______. *Educação Matemática:* Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Ed. Artmed, 1999.

GRAVINA, Maria Alice. *Geometria dinâmica:* uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: Simpósio Brasileiro de Belo Horizonte: SBIE, 1996. p. 1-13.

______. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo*. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

______. *O Software GeoGebra no ensino da Matemática*. In: III Semana de Matemática, 2010, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro. Anais eletrônicos. Disponível em: <http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/outraspub/article/view/368 >. Acesso em: 15 de janeiro 2015.

______. *O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria*: uma experiência ilustrativa. Revista Eletrônica VIDYA. v. 35, n.2, p. 237-253, jul./dez. 2015 - Santa Maria. Disponível em: <http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/605>. Acesso em: 09 de setembro de 2015.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. *A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.* IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf>. Acesso em: 10 de agosto de 2015.

GRAVINA, Maria Alice[et al.]. *Matemática, mídias digitais e didática:* tripé para formação de professores de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GUTIÉRREZ, Angel. *Procesos y habilidades en visualización espacial*. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría, p. 44-59, 1992. Disponível em: <http://www.uv.es/angel.Gutiérrez/marcotex.html>. Acesso em 17 de julho de 2015.

______. *Children's ability for using different plane representations of space figures*. IN: Batturo, A.R. (ed.), New directions in geometry education (Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.: Brisbane, Australia), p. 33-42, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/angel.Gutiérrez/marcotex.html>. Acesso em 12 de julho de 2015.

______. *Visualization in 3-dimensional geometry:* In search of aframework. Proceedings of the 20th PME Conference 1, p. 3-19, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/angel.Gutiérrez/marcotex.html>. Acesso em 17 de julho de 2015.

______. *Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial*. Revista EMA 3.3, p. 193-220, 1998. Disponível em: <http://www.uv.es/angel.Gutiérrez/marcotex.html>. Acesso em 08 de julho de 2015.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. *Vendo e entendendo poliedros*. 2. ed. Niterói-RJ: EdUFF: Editora da Universidade Federal Fluminense, 2003.

LORENZATO, Sérgio. *Porque não ensinar Geometria?* Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4, 1995.

MARIN, Guilherme Baggio. *O Software Cabri 3D como ferramenta de auxílio ao ensino e visualização de seções planas no cubo para alunos do ensino médio*. 179 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática), Centro Universitário Franciscano, Santa Maria (RS), 2013.

MONTENEGRO, Gildo Aparecido. *Inteligência visual e 3D:* Compreendendo Conceitos Básicos de Geometria Espacial. São Paulo: Edgard Blucher, 2004.

NEHRING, Catia Maria; MÜLLER, Cheila Cristina. *O Ensino da Geometria Espacial no Período da República:* 1889 a 1930. In: IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006, Caxias do Sul. IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Caxias do Sul: UCS, 2006. v. 01. p. 01-07.

PAIS, Luiz Carlos. *Estratégias de ensino de geometria em livros didáticos de matemática em nível de 5ª.a 8ª série do ensino fundamental*. In: 29ª Reunião Anual da Anped, 2006, Caxambu. Rio de Janeiro: Anped, 2006. v. 01. p. 1-15. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/29ra/trabalhos/trabalho/GT19-2019--Int.pdf>. Acesso em: 10 setembro de 2015.

PAVANELLO, Maria Regina. *O abandono do ensino de Geometria:* Uma visão histórica. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia do Ensino) Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas/SP. 201 p. 1989.

______. *O abandono da geometria no Brasil:* Causas e Consequências. Zetetiké, Campinas, n.1, p. 7-17, mar. 1993.

RITTER, Andrea Maria. *A visualização no ensino de geometria espacial*: possibilidades com o *software* calques 3D. 142f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática (IM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/32385/000786641.pdf?sequence=1>. Acesso em: 1 de agosto de 2015.

SANTOS, Cristiane de Oliveira. *A Importância da Visualização no Ensino da Geometria Plana e Espacial*. Monografia 49f. (Licenciatura em Matemática) – Unidade Universitária de Jussara, Universidade Estadual de Goiás (UEG), Goiás (GO), 2009. Disponível em: <http://www.cdn.ueg.br/arquivos/jussara/conteudoN/1209/Cristiane_PDF.pdf>. Acesso em: 2 de agosto de 2015.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. *Ensino De Geometria:* Rumos da Pesquisa (1991-2011). Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 08, p. 138, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138>. Acesso em: 3 de agosto de 2015.

SILVA, Benedita Aparecida de Toledo. *Um estudo sobre a geometria espacial*: conhecimentos e dificuldades expressos por alunos do ensino médio. 161 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo (SP), 2010.

VALENTE, Wagner Rodrigues. *Uma história da Matemática escolar no Brasil (1730-1930*). São Paulo: FAPESP, 1999.

VIEIRA, Carmem Rosilene. *Reinventando a geometria no ensino médio*: uma abordagem envolvendo materiais concretos, *softwares* de geometria dinâmica e a teoria de Van Hiele. 151 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto (MG), 2010.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. (Eds.) *Editors´ Introduction: What is Mathematical Visualization?* Visualization in Teaching and Learning Mathematics (p 1-7). Washington: MAA, 1991.

APÊNDICE A

PRIMEIRAS INSTRUÇÕES PARA O USO DO GEOGEBRA 3D 5.0

1. Iniciar o GeoGebra 5.0, o qual pode ser baixado e instalado gratuitamente.

Figura 1: Ícone do GeoGebra

2. Na área de trabalho há duas janelas: a janela algébrica e a geométrica 2D (janela de visualização).

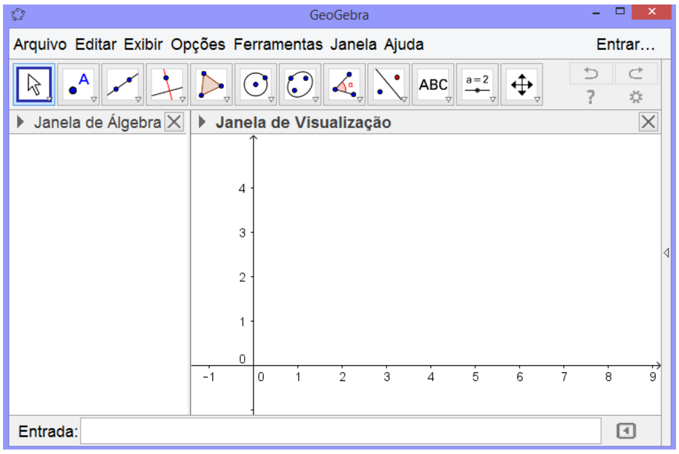


Figura 2: Tela inicial do GeoGebra

3. Na parte superior da tela do software existem duas barras: BARRA DE MENUS com as principais funções e a BARRA DE FERRAMENTAS com diversos comandos.

Figura 3: Barra de menus e de ferramentas da janela 2D

4. Já na parte inferior da tela, existe uma barra de comandos (Entrada).

Figura 4: Barra de comandos (Entrada:)

5. Clicando com o botão esquerdo do mouse sobre o ícone **EXIBIR** aparecerá a opção Janela de Visualização 3*D*, que também pode ser obtida pressionando as teclas *Ctrl+Shift+3*.

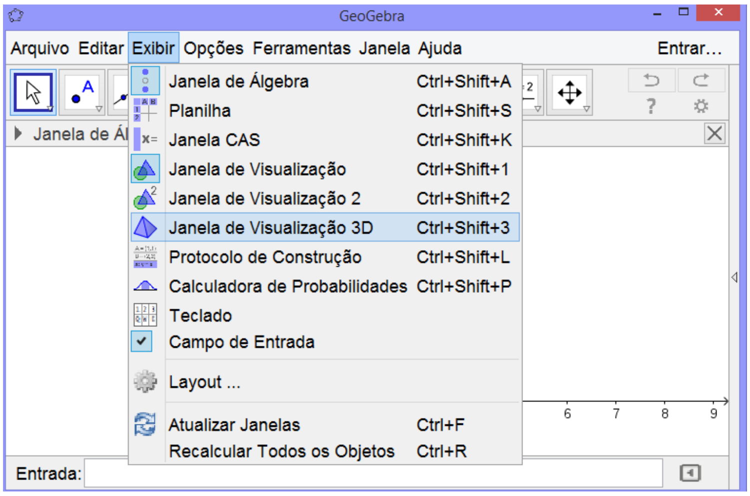


Figura 5: Opções do ícone exibir

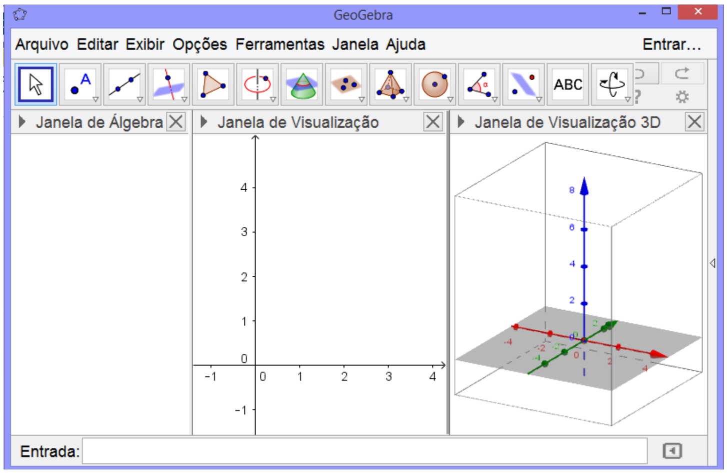


Figura 6: Tela do GeoGebra com 3 janelas de visualização

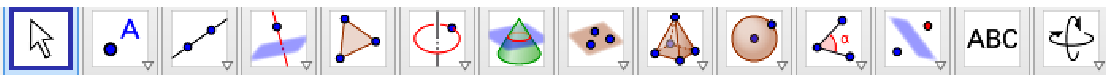
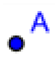


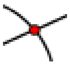
Figure 7: Barra de menus e de ferramentas 3D

DESCRIÇÃO DE FUNCIONAMENTO DAS PRINCIPAIS FERRAMENTAS DA JANELA 3D

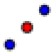


Ponto: *clicamos primeiro no ícone e depois na janela geométrica. Quando movimentado, as coordenadas do ponto aparecem na janela algébrica, se ela estiver ativada. Já na janela 3D, selecionando esta ferramenta, o ponto só será marcado sobre o plano xy ou sobre o eixo z. Para que o ponto seja marcado fora do plano xy ou fora do eixo z, é necessário criar um ponto sobre o eixo xy, dar um clique com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto para alterar o seu deslocamento.*

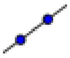
Ponto em Objeto*: clicando nesta ferramenta, o ponto será marcado sobre um objeto, seja ele um plano, um poliedro ou um corpo redondo.*



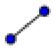
Intersecção de dois objetos: *selecionando-se dois objetos, os pontos de intersecção serão marcados. A outra opção é clicar na intersecção dos objetos, mas neste caso somente este ponto será marcado.*



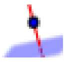
Ponto médio ou centro: *Para utilizar esta ferramenta, clicamos em: dois pontos para encontrar o ponto médio; ou em um segmento para encontrar seu ponto médio.*



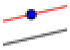
Reta definida por dois pontos: *tendo dois pontos, clicamos neste botão e nos pontos dados para construir a reta.*



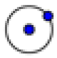
Segmento definido por dois pontos: *selecionamos dois pontos que determinam as extremidades do segmento, na janela algébrica temos a sua medida.*



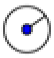
Reta perpendicular a um plano: *selecionamos um ponto e, em seguida, um plano. Dessa forma, constrói-se uma reta perpendicular ao plano, passando pelo ponto marcado.*



Reta paralela: *análogo a anterior.*

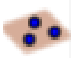


Círculo definido pelo centro e um de seus pontos: *Marcando-se um ponto A e outro B, marca-se o círculo com centro em A, passando por B.*

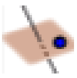


Círculo dados centro e raio: *Marca-se o centro A e digita-se a medida desejada para o raio, em uma janela que aparece automaticamente.*

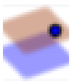
Intersecção de duas superfícies: *após selecionar essa ferramenta, basta clicar em um plano e em faces de poliedros ou em um plano e um corpo redondo. Dessa forma, será marcada a curva de intersecção entre tais superfícies.*



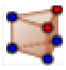
Plano passando por três pontos: *marcando-se três pontos, determina-se um plano contendo-os.*



Plano Perpendicular*: Clicando-se em um ponto e, em seguida, em uma reta, constrói-se um plano perpendicular à reta, passando pelo ponto.*

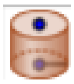


Plano Paralelo*: clicando-se em um plano e em um ponto fora dele, constrói-se um plano paralelo ao plano considerado, passando pelo referido ponto.*

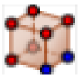


Prisma*: para construir o prisma, primeiro é necessário definir o polígono da base e a altura. Clica-se no polígono da base e, em seguida, no ponto que define a altura.*

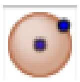
Cone: *selecione esta ferramenta e marque dois pontos quaisquer. O primeiro definirá o centro do círculo da base e o segundo definirá o vértice do cone. A seguir, uma janela se abrirá solicitando o valor do raio.*



Cilindro*: selecione esta ferramenta e marque dois pontos quaisquer. O primeiro definirá o centro dos círculos das bases e o segundo definirá a altura do cilindro. A seguir, uma janela se abrirá solicitando o valor do raio.*



Cubo: *selecione esta ferramenta e marque dois pontos quaisquer.*



Esfera dados Centro e um de seus Pontos*: selecione esta ferramenta e clique em um ponto qualquer. Em seguida, arraste o mouse até um outro ponto desejado.*

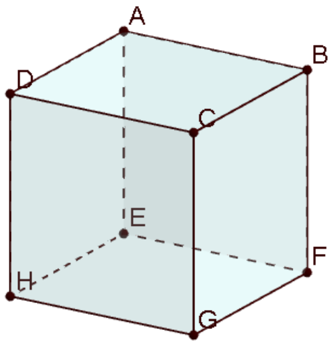
Girar Janela de Visualização 3D – *Esta ferramenta permite girar toda a janela de visualização 3D. Para tanto, é preciso manter pressionado o botão esquerdo do mouse e arrastar o cursor pela tela.*

APÊNDICE B

FICHA DE TRABALHO 1

EXPLORANDO O CUBO

ATIVIDADE 1:



Construa um cubo na janela 3D do GeoGebra e nomeie os vértices do cubo de acordo com a figura acima. Rotacione o sólido e, utilizando as movimentações necessárias, siga as orientações abaixo:

a) Pinte de verde as arestas paralelas à aresta CD.
b) Que faces contém o vértice B? Pinte-as de azul.
c) Construa em laranja uma reta perpendicular a face ADEH passando pelo centro desta face.
d) Marque em vermelho, se houver, a intersecção entre BCFG e CDGH.
e) Construa em amarelo uma reta paralela ao plano EFGH e que não contém nenhuma aresta do cubo.

Salve esta atividade na Área de Trabalho (Desktop) identificando o número da atividade e o nome dos componentes da dupla, por exemplo, ATIVIDADE1_MARIAEJOAO.ggb.

FICHA DE TRABALHO 2

<u>CORTANDO O CUBO</u>

ATIVIDADE 2:

"Secção é a figura plana resultante da intersecção entre um plano e o cubo."

Que secção é obtida quando cortamos um cubo pelo plano dado pelos pontos indicados? Construa cada situação no GeoGebra 3D, movimente a construção e identifique a região plana obtida.

Obs.: Salve cada item desta atividade na Área de Trabalho (Desktop) identificando o número da atividade, a letra da atividade e o nome dos componentes da dupla, por exemplo, ATIVIDADE2a_MARIAEJOAO.ggb.

a) pontos médios dos segmentos AD, EH e FG.

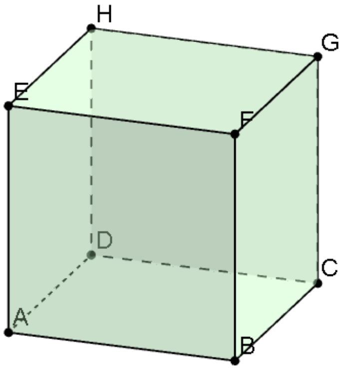
____

b) vértices D, F e H.

____

c) vértice D e pelos pontos médios dos segmentos EF e FG.

____



d) pontos médios dos segmentos EF, FG e BF.

____

e) pontos médios dos segmentos AE, FG e BF.

____

f) pontos médios de EH, GH e AB.

____

g) pontos médios das arestas AE e CG e pelo vértice B.

____

h) Construa um ponto I na aresta EF; construa o plano determinado pelos pontos A, D e I. Construa a intersecção deste plano com o cubo, observe e descreva a secção formada, movimentando o ponto I. *(Obs.: o recurso "Vista 2D" do plano de corte ajuda na visualização da secção)*

____

____

____

Exercício: Calcule a área da secção dada pelo plano criado no exercício h, quando I é o ponto médio da aresta EF. Considere que o segmento EF mede 2cm.

ATIVIDADE 3:

Abra o arquivo *<u>secção cubo 1. ggb:</u>*

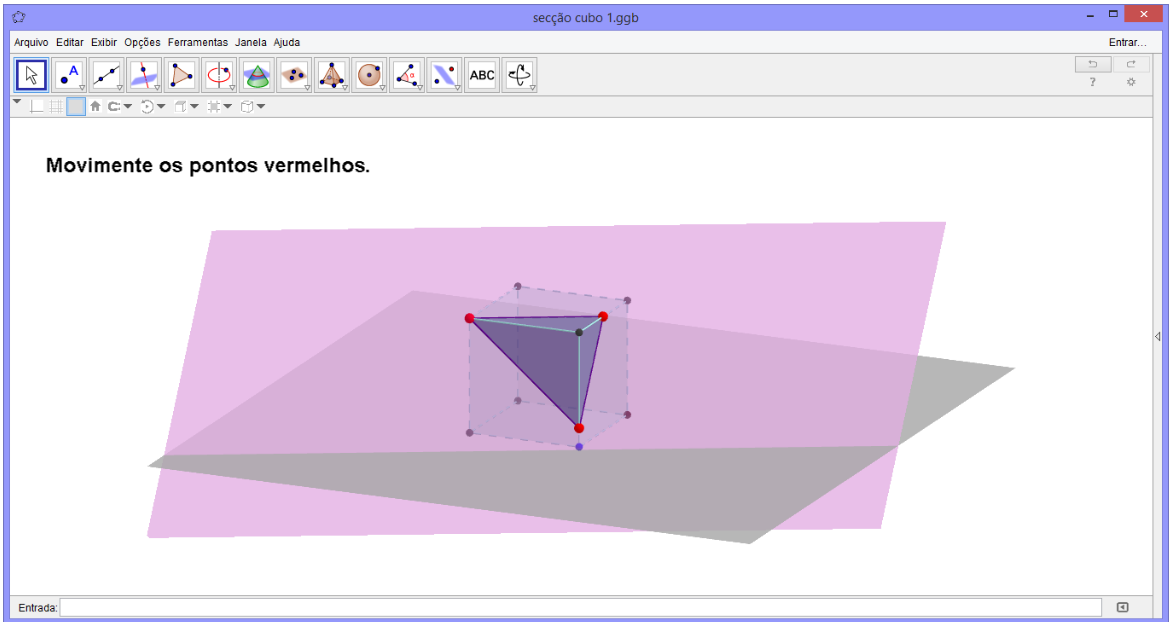
Na animação, três pontos determinam um plano que intersecta o cubo. Movimente os pontos e analise os tipos de secção triangular que podemos obter. Desenhe abaixo todas as secções triangulares possíveis e nomeie-as, descrevendo as características de cada situação (quando cada uma acontece).

Exercício:

Descreva as propriedades da secção de maior área e calcule essa área se o cubo tem aresta 1cm?

Arquivo GeoGebra

<u>secção cubo 1. ggb</u>



FICHA DE TRABALHO 3

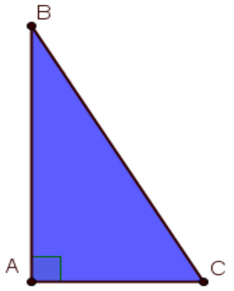
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

*“**Sólidos de revolução** são gerados pela rotação de uma forma plana, chamada forma geratriz, ao redor de um eixo. São formados pelo conjunto de posições sucessivas que a forma geratriz ocupa no espaço.”*

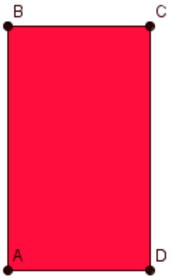
ATIVIDADE 4:

Que sólido é gerado pela rotação das figuras abaixo ao redor de um dos eixos coordenados? *(Construa cada situação no plano XOZ ou XOY do GeoGebra 3D e movimente-a em torno do eixo sob o qual foi construída*).

a)



b)



ATIVIDADE 5:

5.1 A partir de figuras planas crie os sólidos de revolução abaixo no GeoGebra 3D:

c)

d)

e)

5.2 Para cada sólido identifique a figura geratriz e qual o eixo de rotação escolhido.

___

___

___

Exercício:

f) Usando revolução de figuras planas no espaço, construa um cilindro e um cone inscrito.

g) Sabendo que o retângulo que origina o cilindro tem dimensões 3 e 4 cm., calcule a geratriz e a área lateral do cone inscrito.

Salve cada item desta atividade na Área de Trabalho (Desktop) identificando o número da atividade, o item e o nome dos componentes da dupla, por exemplo, ATIVIDADE5c_MARIAEJOAO.ggb.

FICHA DE TRABALHO 4

SÓLIDOS INSCRITOS

ATIVIDADE 6: ESFERA INSCRITA NO CILINDRO

- Construa um círculo na janela 2D utilizando a ferramenta "Círculo dados centro e um de seus pontos";
- Na janela 3D, construa uma reta perpendicular ao plano da base passando pelo centro do círculo.
- Utilize esse círculo e esta reta como base para criar um cilindro reto;
- Em seguida, construa uma esfera inscrita neste cilindro.

Exercício: Se a base do cilindro tem raio 2cm:

1) Qual será o raio da esfera?____
2) Qual será a altura do cilindro? ____
3) Qualquer cilindro pode ser circunscrito a uma esfera? Por quê?

____

____

ATIVIDADE 7: CILINDRO E ESFERA COM PLANO DE CORTE MÓVEL

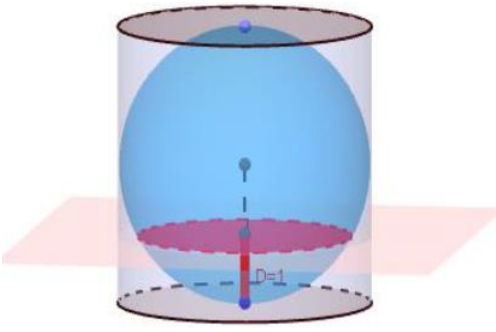
- Em seguida, construa um plano móvel paralelo à base do cilindro, conforme ilustra a figura abaixo.
- Interseccione o plano com a esfera e pinte o círculo de intersecção de vermelho.
- Movimente o plano e analise a variação da área do círculo de intersecção. Descreva esta variação com suas palavras.____

____

____

Exercício: Ainda considerando que o cilindro tem raio 2cm:

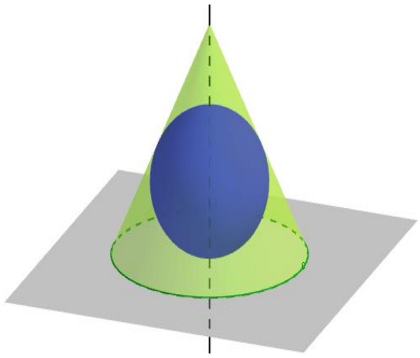
4) Qual será a área do círculo máximo? ____



5) Qual a área do círculo quando a distância entre a base do cilindro e o plano de corte é 1?

Dica: Construa o triângulo retângulo que tem hipotenusa igual ao raio da esfera.

ATIVIDADE 8: ESFERA INSCRITA NO CONE



1. Construa um círculo na janela 2D utilizando a ferramenta "Círculo dados centro e um de seus pontos";
2. Da mesma forma que no exercício anterior, utilize esse círculo como base para criar um cone reto.
3. Construa um plano meridiano do cone, interseccione este plano com o cone e exiba sua vista 2D.
4. Para inscrever uma esfera no cone é interessante usar a Vista 2D do plano meridiano. Construa no plano meridiano um círculo inscrito no triângulo. Dica: Para construir o centro do círculo utilize a ferramenta "*Bissetriz de um ângulo*".
5. Tendo o centro do círculo, construa a esfera inscrita neste cone reto.
6. Movimento a sua construção de forma a "enxergar" dois círculos concêntricos e desenhe essa situação, identificando qual o ponto de vista utilizado.

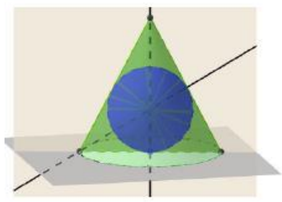
7. Como fazer para que a distância entre estes dois círculos diminua? Movimente o raio e a altura e descreva o procedimento usado.

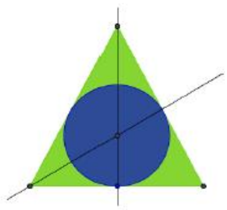
____

____

Exercício:

a) Dado um cone de revolução gerado por um triângulo retângulo de catetos 6 e 8cm, calcule o raio da esfera inscrita neste cone. (Sugestão: o arquivo construído pode auxiliar na solução)





b) Se os raios do cone e da esfera têm, respectivamente, 2 e 1cm, qual será a altura do cone?

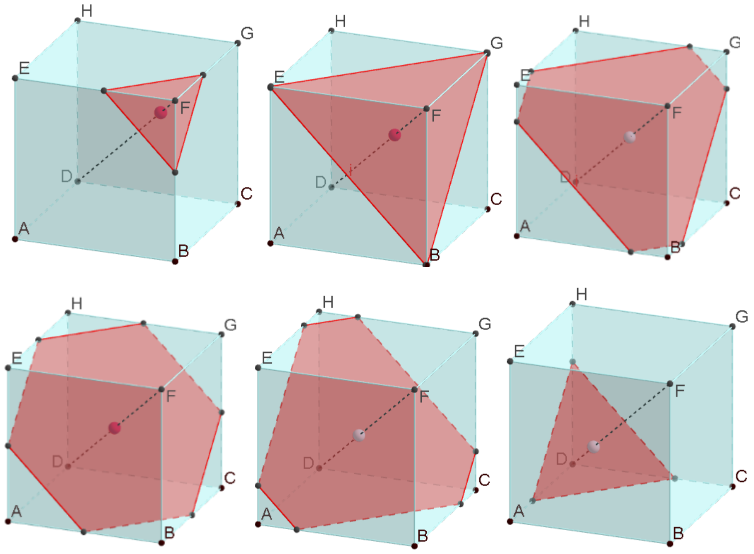
Obs.: Salve cada atividade desta Ficha de Trabalho na Área de Trabalho(Desktop) identificando o número da atividade e o nome dos componentes da dupla. (Ex.:ATIVIDADE6_MARIAEJOAO.ggb)

FICHA DE TRABALHO 5

<u>ÁREAS, VOLUMES E FUNÇÕES</u>

ATIVIDADE 9

Construa um plano de corte com movimento que produza a seguinte sequência de secções no cubo. *(Obs.: no início e no final do movimento a secção é um triângulo equilátero)*



a) Como você realizou esta construção? Descreva os passos utilizados.

____

____

b) Como são as formas das secções formadas? Descreva-as.

____

____

c) Em algum momento a secção não é um polígono regular? Quando? Ilustre essa situação e descreva em que momento isto acontece.

____

____

____

____

d) Como é a variação da área da secção, conforme a secção se afasta do vértice F do cubo?

____

____

____

e) Exiba a vista 2D do plano de corte e determine qual a secção de maior área e quando isto acontece?

____

____

____

____

f) Construa o gráfico que representa a variação da área das secções. Após, analise se a sua resposta para o item *d* e *e* corresponde ao encontrado.

____

____

____

____

Exercício:

Sabendo que o a aresta do cubo mede 1cm:

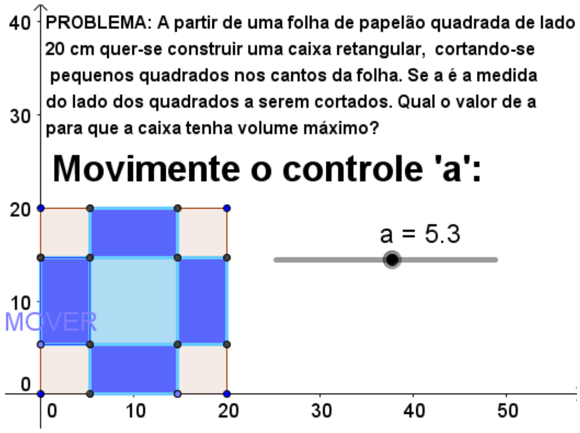
g) Calcule a área da secção que corresponde ao maior triângulo equilátero formado.

h) Calcule a área da secção quando ela é o hexágono regular formado por pontos médios das arestas.
.

Obs.: Salve cada atividade desta Ficha de Trabalho na Área de Trabalho(Desktop) identificando o número da atividade e o nome dos componentes da dupla. (Ex.:ATIVIDADE9_MARIAEJOAO.ggb)

ATIVIDADE 10:

Abra o arquivo *CAIXA DE VOLUME MÁXIMO.ggb*:



a) Modifique o tamanho do corte através do seletor "a". Observe que o valor da medida do corte é o mesmo valor de "a". O que ocorre com as dimensões da base e da altura da caixa quando muda o valor de "a"?

____

____

b) Como se comporta o volume da caixa conforme muda o tamanho do corte?

b.1) Se o corte for grande, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?

____

____

b.2) Se o corte for pequeno, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?

____

____

c) Utilizando o mesmo procedimento usado na Atividade 9, faça o gráfico que representa o volume da caixa em função da medida "a" de corte. Compare o gráfico obtido com a resposta dada no item b). As informações dos itens b) estão de acordo com o gráfico?

____

____

d) Você consegue determinar qual o tamanho do corte “a” quando a caixa tem volume máximo? Se sim, qual?

____

____

____

____

Exercício:

1) Se a = 7 qual o volume da caixa?

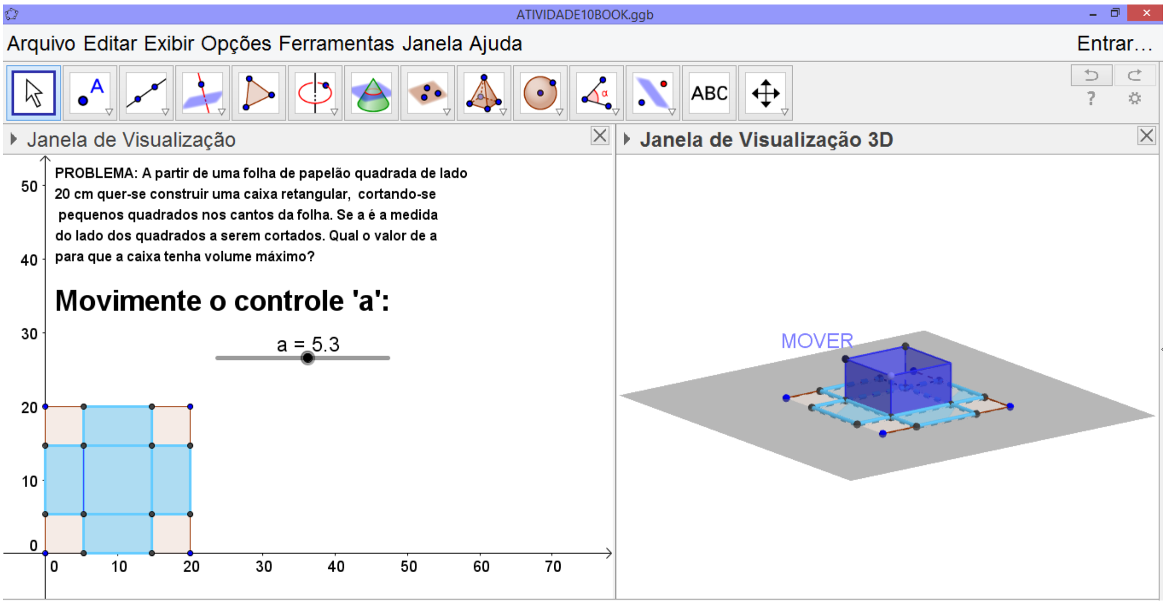
2) Escreva uma sentença matemática que expresse o volume da caixa construída em função do tamanho “a” do corte efetuado.

3) Se o volume da caixa é 576cm³ qual o tamanho do corte “a”?

Obs.: Salve cada item desta atividade na Área de Trabalho (Desktop) identificando o número da atividade e o nome dos componentes da dupla, por exemplo, ATIVIDADE10_MARIAEJOAO.ggb.

Arquivo GeoGebra

CAIXA DE VOLUME MÁXIMO.ggb



APÊNDICE C

QUESTIONÁRIO	
1. Teve dificuldades em utilizar o GeoGebra? Se sim, explique quais e o porquê.	*"Mais ou menos, por não ter utilizado antes. "* *"Em algumas atividades pois o software travava. "* *"Um pouco, para localizar ferramentas (ex.: ponto, intersecção, etc.). "* *"Não, as ferramentas são fáceis...no começo foi complicado entender, mas foi ficando fácil..."* *"Não, as atividades foram bem elaboradas e o próprio software continha explicações das ferramentas. "*
2. De que Ficha de Trabalho mais gostou? Por quê?	*1ª: 4,7%* *"Era fácil"* *2ª: 14,3%* *"Porque com o computador dá pra ver melhor do que quando se imagina. "* *"Ficava melhor com o programa. "* *3ª: 47, 7%* *"Víamos o objeto se formar...visualizávamos melhor"* *"Divertido e engenhoso ver os objetos serem criados através de formas..."* *"Pois nela formas em 2D passavam a ser 3D com o movimento de rotação, criando objetos. "* *"Achei legal figuras se formando a partir de formas geométricas. "* *"Porque podíamos criar sólidos a partir de formas geométricas, o que nem imaginávamos ser possível"* *4ª: 23,8%* *"Pelo desafio que sugeria..."* *"Tivemos que pensar bastante..."* *"A mais complexa..."* *5ª: 9,5%* *"Mais interativa. "*
3. De que Ficha de Trabalho menos gostou? Por quê?	*1ª: 4,7%* *"Muito simples. "* *2ª:0%* *3ª: 14,3%* *"Muito demorada. "* *4ª: 19 %* *"Não entendi os exercícios. "* *"Mais complexa e tomou muito tempo. "* *5ª: 47,7%* *"Tinha que pensar muito. " ,"Não entendi os exercícios. "* *"Muito extensa e trabalhosa..."* *"Tinha um pensamento diferente e a caixa já estava pronta, podíamos ter feito. "* *Gostaram de todas: 14,3%*

4. Acredita que aulas desse tipo facilitam sua aprendizagem? Por quê?	*95,3% SIM* *"Sim...a imagem feita entra mais fácil na nossa mente..."* *"Sim é mais descontraída e menos entediante..."* *"Sim, temos a percepção das formas e o que se forma a partir daquilo..."* *"Podemos manipular as formas em 3D, o que facilita na hora de visualizar."* *"Pouco, no começo estava bom, mas ficou cansativo..."* *"Sim...aprendemos mais"* *"Sim, aulas mais dinâmicas e principalmente, fazer e praticar no computador chama muito a atenção, creio que foi a ou uma das melhores atividades deste ano..."* *"Sim pois aprendemos em uma das ferramentas que mais utilizamos em nosso cotidiano, o computador..."* *"É diferente e mais prática..."* *"Sim, principalmente ao iniciar os conteúdos pois podemos imaginar mentalmente de forma mais fácil os sólidos..."* *"Ajudam a imaginar as figuras e isso nos ajuda nas questões onde não tem desenho..."* *4,7% NÃO*
5. Qual das Fichas de Trabalho você achou mais fácil? Por quê?	*76,3% - Ficha 1* *"Simples... envolveu conceitos básicos"* *14,3% - Ficha 3* *"Simples e divertida..."* *4,7% - Ficha 4* *"Foi bem explicado..."* *4,7% Todas*
6. Qual das Fichas de Trabalho você achou mais difícil? Por quê?	*4,7% - Ficha 1* *9,5% - Ficha 3* *"A parte da boia...não conseguíamos ver"* *23,8 % - Ficha 4* *"Muito complexa...tanto na prática quanto nos cálculos..."* *52,5% - Ficha 5* *"Muito difícil..."* *"Mais trabalhosa e exige maior compreensão..."* *Nenhuma – 9,5%*
7. Em relação ao uso do GeoGebra no projeto desenvolvido, este:	*(71,5%) Ajudou muito a aprender Geometria Espacial.* *(19%) Ajudou pouco no aprendizado da Geometria Espacial* *(9,5%) Não ajudou, nem atrapalhou.* *(-) Dificultou o aprendizado da Geometria Espacial.*

8. Em relação ao trabalho com a Geometria Espacial através do Software GeoGebra, você considera que:	*(38,1%) Motivou muito no aprendizado* *(61,9%) Motivou um pouco no aprendizado* *(-) Não fez diferença em comparação às aulas tradicionais.* *(-) Não motivou o aprendizado*
9. Sugestões.	*" Continuar com atividades práticas no GeoGebra. "* *"Mais tempo. "* *"Tutoriais para iniciantes..."* *"Explorar outros sólidos..."*
10. Cite um ponto positivo e um negativo do uso do Software GeoGebra nas aulas de Geometria Espacial.	POSITIVOS: *"Ajuda a aprender..."* *"Fácil e divertido..."* *"Aula diferente e prática..."* *"Ajuda a visualizar..."* NEGATIVOS: *"Travava..." "Cansativo...""Hardware ruim no computador..."* *"Complicado entender como usar"*
11. Acredita que o software contribuiu na visualização de sólidos geométricos em 3D?	*(90,5%)Auxiliou muito.* *(9,5%)Auxiliou pouco.* *(-) Não influenciou.* *(-) Não auxiliou.*

APÊNDICE D

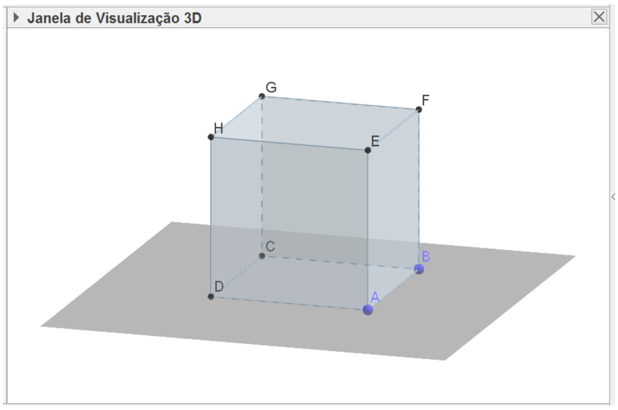
CONSTRUÇÕES DAS ATIVIDADES NO GEOGEBRA 3D
PASSO A PASSO

ATIVIDADE 1: EXPLORANDO O CUBO

1. Através do menu de comandos “Exibir” habilite a Janela de Visualização 3D ou utilize o atalho *Ctrl + Shift + 3*. Para esta construção a Janela de Visualização 2D é dispensável, podendo ser ocultada através do atalho *Ctrl + Shift + 1*. Ao clicar com o botão direito do mouse na Janela 3D e selecionar a opção “Janela de Visualização” pode-se desmarcar a opção “Habilitar Clipping”.

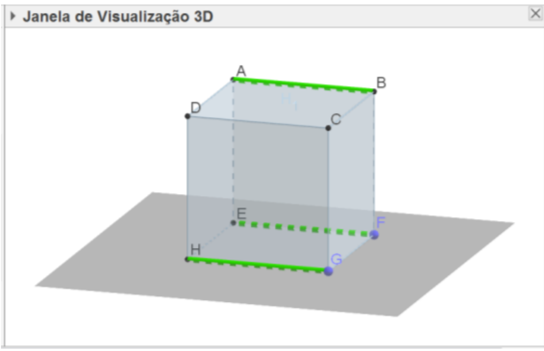
2. Na ferramenta “Pirâmide”  selecione a opção “Cubo” .

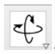
3. Na janela 3D, selecione dois pontos quaisquer no plano XOY. Estes pontos serão dois dos vértices da base do cubo. *Obs.: Clicando-se com o botão direito do mouse sobre a Janela 3D pode-se ocultar o plano e o eixo, o que pode facilitar a visualização de objetos em algumas construções. Neste caso, optamos por ocultar os eixos XYZ, tornando a construção mais limpa. Ainda, clicando sobre o cubo, pode-se mudar cor e transparência através da opção “Propriedades”. Sugerimos que, no cubo base, se utilizem cores claras e transparência alta, para melhor visualização de seus elementos.*

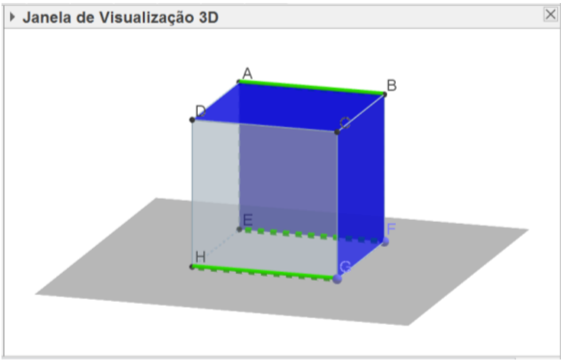


4. Para renomear os vértices conforme o desenho na Ficha de Trabalho, basta clicar como o botão direito do mouse sobre os vértices e selecionar a opção “Renomear”.
5. A seguir, traz-se os procedimentos indicados na Ficha de Trabalho 1.

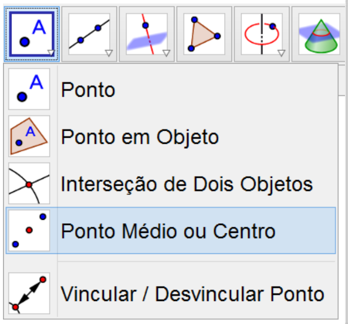
6. Para colorir as arestas paralelas à aresta CD de verde, selecionamos com o mouse os segmentos correspondentes e clicamos sobre os menus “Propriedades ”→”Cor”. Caso seja necessário podemos utilizar o menu “Estilo” modificando o traçado ou a espessura do segmento.

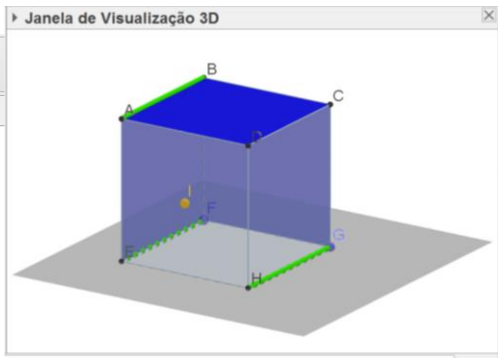


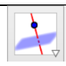
7. Para colorir as faces que contém o vértice B de azul, selecionamos as faces na janela 3D ou na Janela de Álgebra, e repetimos o procedimento feito no item anterior, modificando as propriedades das faces desejadas. Pode-se rotacionar o objeto sempre que necessário, através da ferramenta “Girar Janela de Visualização 3D” .

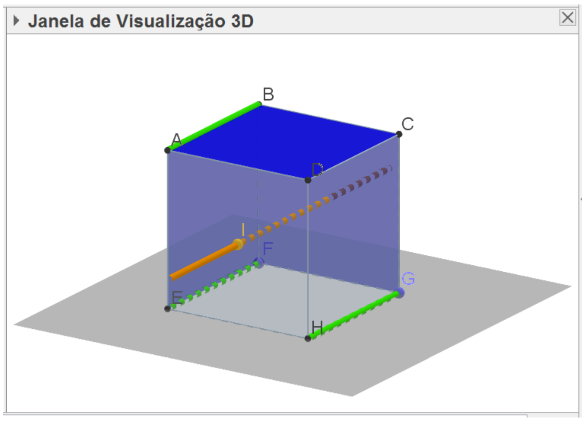


8. Para construir um reta laranja perpendicular à face ADEH passando pelo centro desta face, primeiramente, precisamos definir o centro da face utilizando a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” e selecionar dois vértices não adjacentes desta face (A e H, por exemplo).



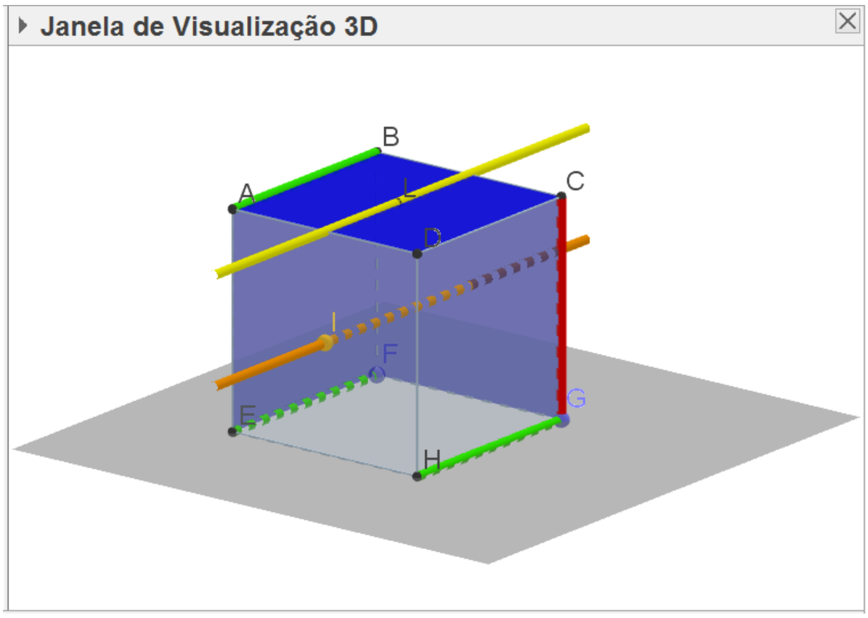


9. No menu escolhe-se a ferramenta “Reta Perpendicular”  e seleciona-se o ponto criado no passo 8, centro da face, e o plano da face ADEH, nesta ordem. Basta então modificar cor e espessura.



10. Para demarcar a intersecção entre as faces BCFG e CDGH, basta, a partir da interpretação pessoal, colorir o segmento de vermelho alterando estas características no menu “Propriedades”.

11. De modo análogo ao passo 9, cria-se a reta paralela ao plano EFGH e que não contém nenhuma aresta do cubo. Existem várias formas de atender ao solicitado, uma delas é criar o centro da face ABCD e fazer passar por ele uma reta paralela ao plano da base usando a ferramenta “Reta Paralela”. 

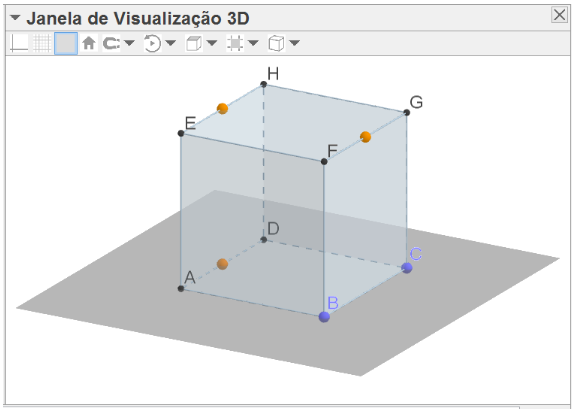


ATIVIDADE 2: CORTANDO O CUBO

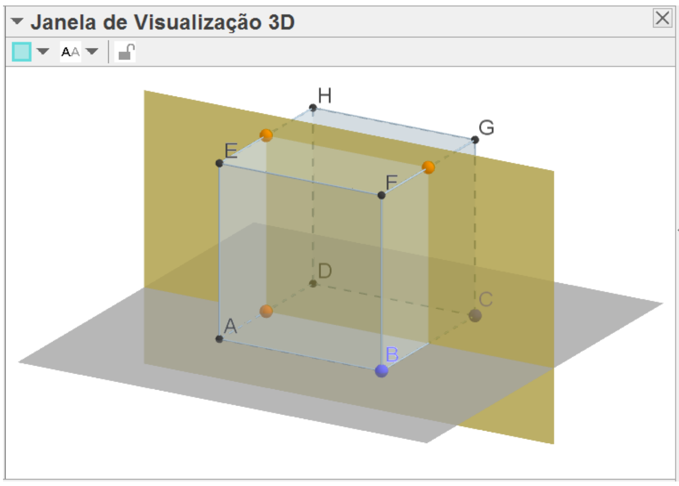
1. Habilitar a janela 3D e construir um cubo de forma análoga a Atividade 1.

2. Caso necessário, renomear os vértices conforme a figura da Ficha de Trabalho 2, clicando com o botão direito do mouse sobre os vértices e selecionando a opção “Renomear”.

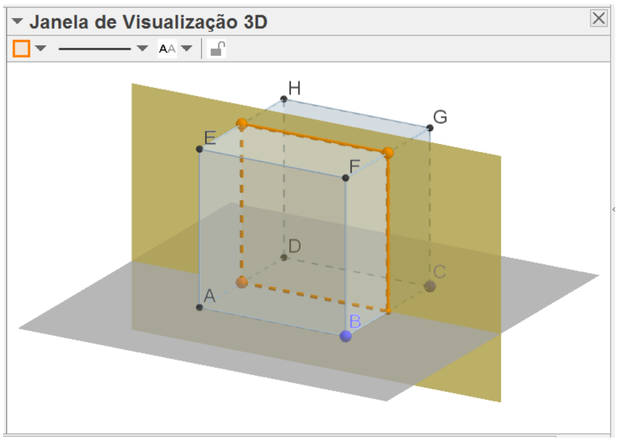
3. Conforme indicado na Atividade 2, inicia-se pela marcação dos três pontos que geram os planos de corte em cada item. No item (a) são demarcados os pontos médios dos segmentos AD, EH e FG. Para isso, utiliza-se a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”, selecionando os vértices extremos de cada segmento.



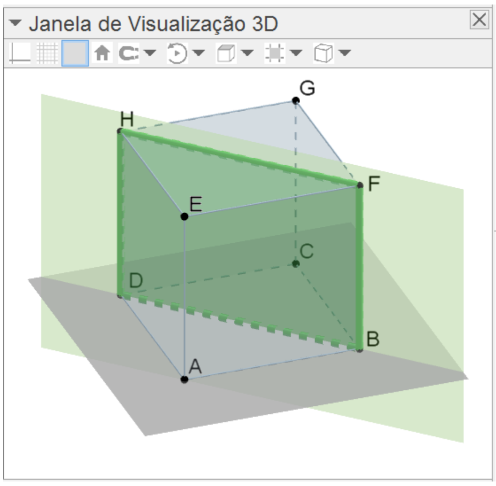
4. Em seguida, determinamos o plano através da ferramenta “Plano por três pontos” . Para tanto, basta selecionar a ferramenta e os três pontos em qualquer ordem.

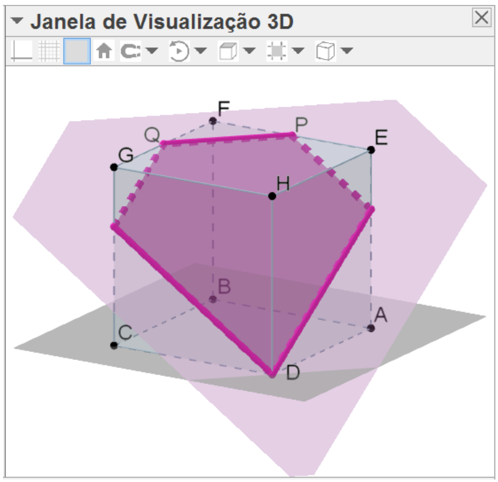


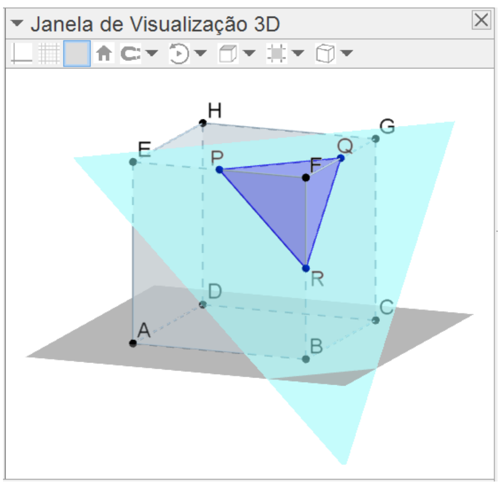
5. Para favorecer a visualização, pode-se demarcar a intersecção entre plano e cubo com a ferramenta  “Intersecção de duas superfícies”. Para facilitar o uso da ferramenta, seleciona-se o cubo e o plano na Janela de Álgebra.

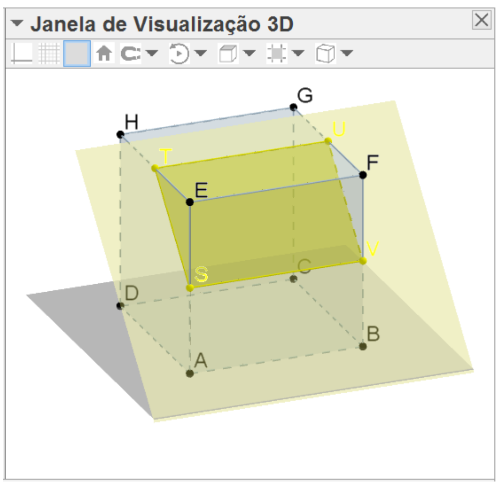


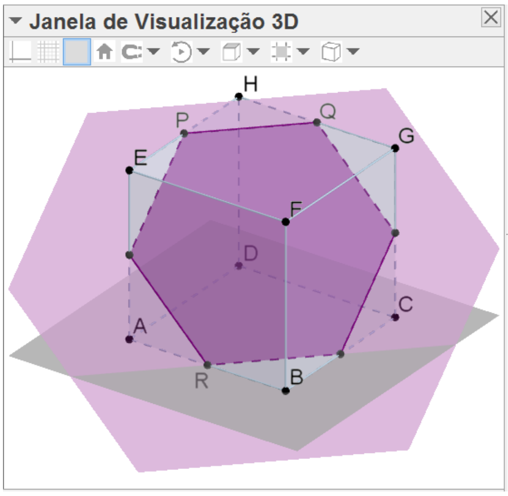
6. Procedemos da mesma forma para as construções dos itens (b) ao (g), ilustrados abaixo.

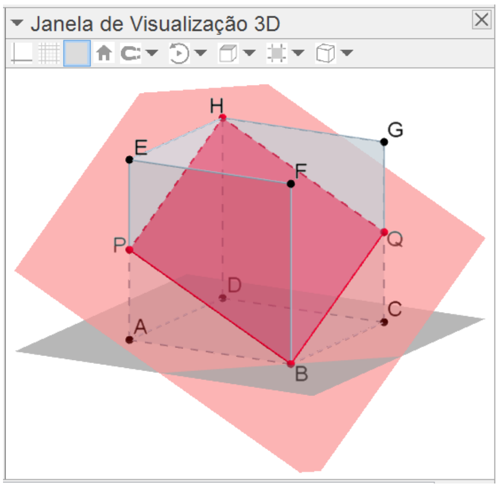
(b)


(c)


(d)


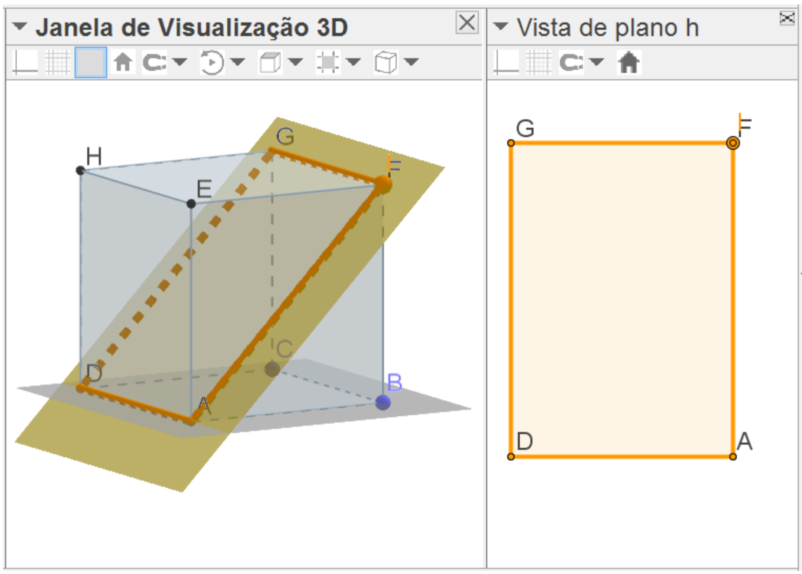
(e)


(f) 

(g) 

7. Já no item 2(h), um dos pontos é móvel sobre a aresta EF. Para construí-lo basta inserir um ponto nesta aresta usando a ferramenta "Ponto" •A. Nomeie este ponto de I. O restante da construção é similar aos itens anteriores: gera-se o plano dado por A, D e I e marca-se a intersecção entre cubo e plano.

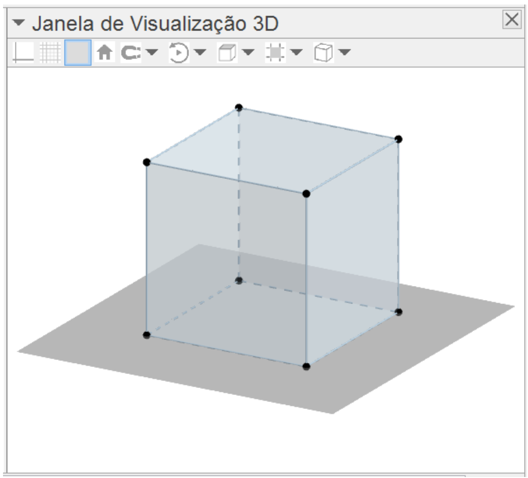
8. Ao final das construções, pode-se sugerir o uso do comando "Criar vista 2D" clicando sobre o plano de corte com o botão direito. Esse comando faz surgir na tela a vista 2D deste plano, oferecendo outra representação das secções geradas.



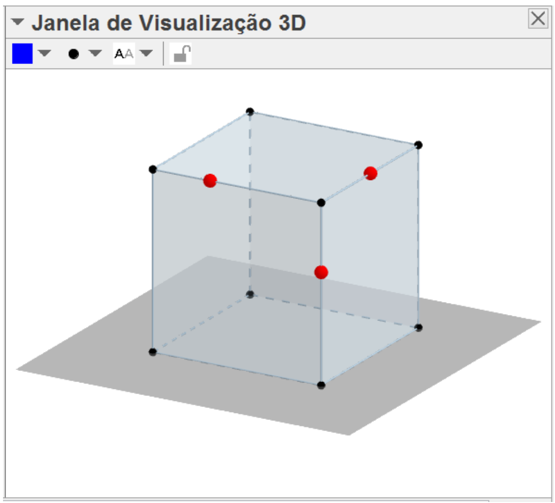
ATIVIDADE 3: CORTANDO O CUBO (parte 2)

1. Habilitar a janela 3D e construir um cubo.

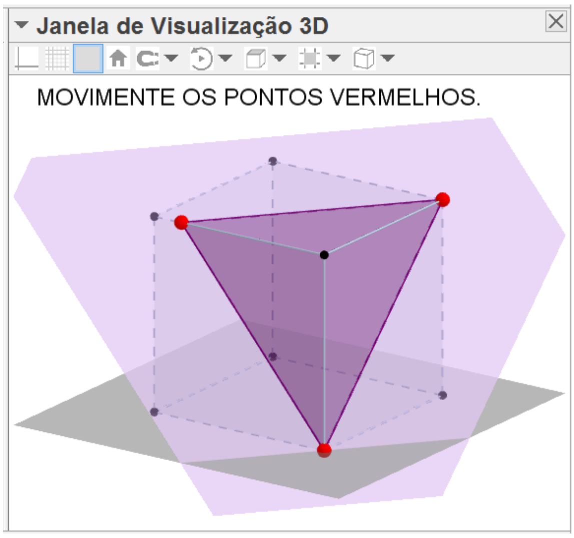
2. Pode-se ocultar os rótulos de todos elementos do cubo que, neste caso, não são necessários. Faz-se isso clicando sobre o elemento com o botão direito do mouse e selecionando o menu "Exibir rótulo".



3. Depois, criam-se três pontos sobre três arestas concorrentes a um mesmo vértice e estes são coloridos de vermelho.



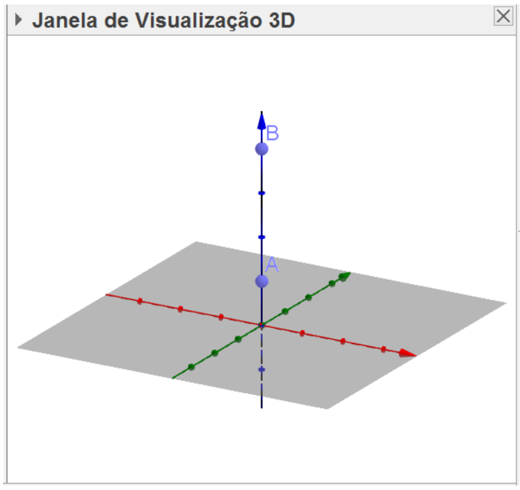
4. Em seguida, gera-se o plano dado pelos três pontos vermelhos, assim como na atividade anterior. Cria-se a intersecção entre cubo e plano e pode-se colorir esta intersecção de forma a facilitar a visualização das diferentes secções geradas. Com a ferramenta "Texto" ABC, podem ser incluídas as instruções necessárias no arquivo. Por fim, ocultam-se as Janelas de Álgebra e 2D.

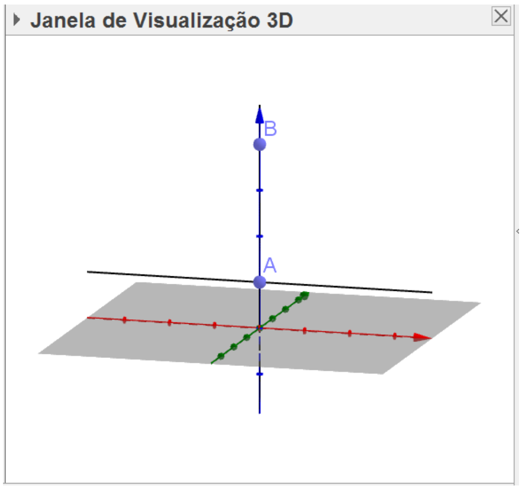


ATIVIDADE 4 e 5: SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

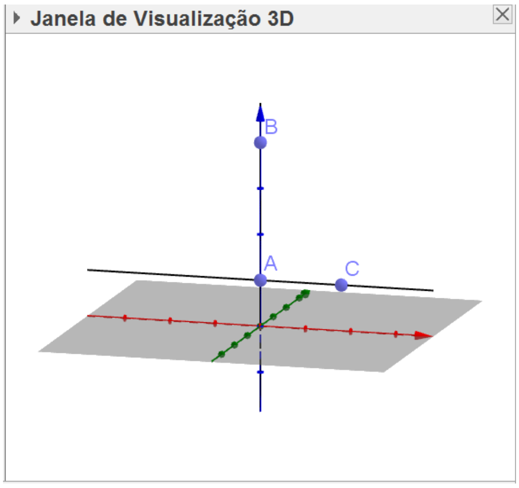
1. Na janela 3D, em torno de algum dos eixos coordenados ou de algum eixo criado no espaço, vamos construir as figuras geratrizes dos sólidos de revolução. Neste caso, escolhemos o eixo XOZ.

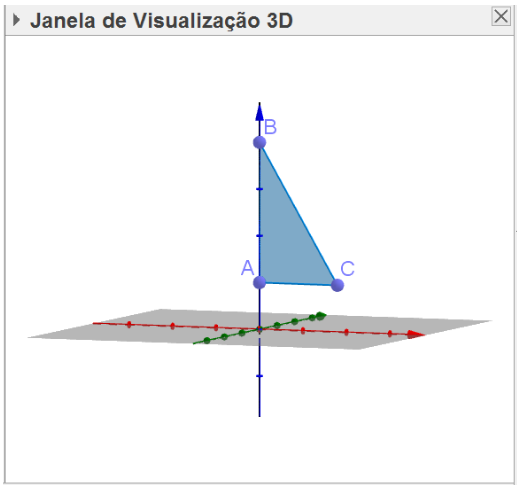
2. Para ilustrar este passo-a-passo escolhemos o triângulo retângulo, figura geratriz do cone. Começamos criando as retas suporte para criação do triângulo. Sobre o eixo Z, criamos dois pontos livres A e B usando a ferramenta "Ponto" •A. Com a ferramenta "Reta Perpendicular" criamos uma reta perpendicular ao eixo Z passando por A.

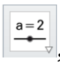


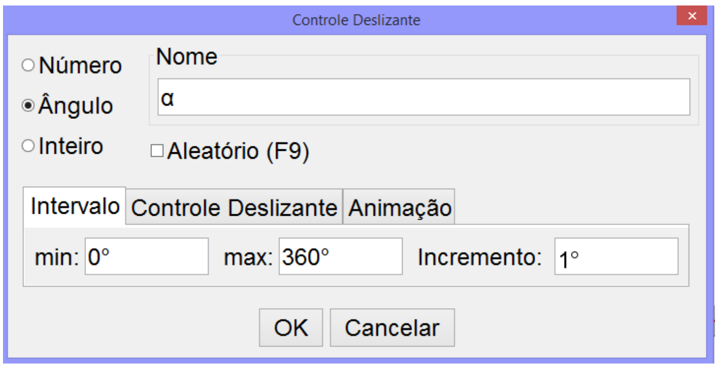


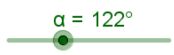
3. A seguir, criamos um ponto sobre a reta criada no passo 2 e geramos o polígono dados por estes três pontos usando a ferramenta "Polígono" . Feito isso, podemos ocultar a reta auxiliar.





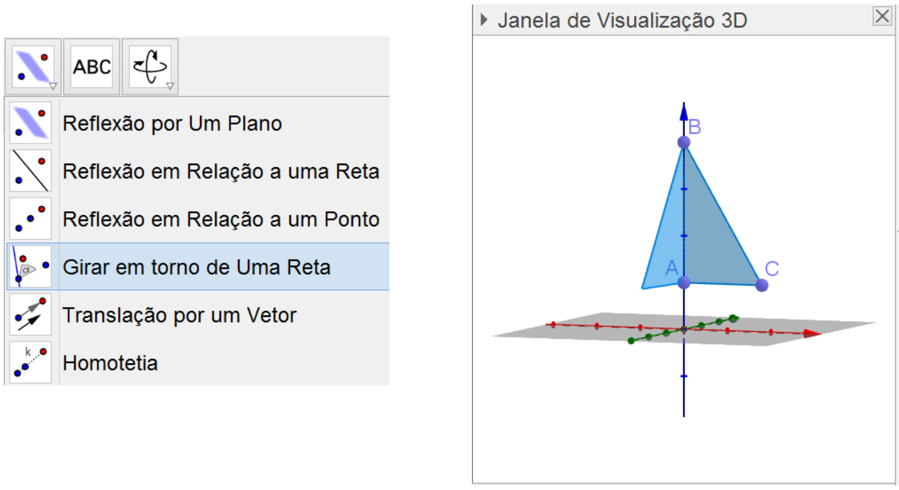
4. Agora, criaremos o seletor que definirá o ângulo de rotação da figura geratriz. Para tanto, criaremos um seletor utilizando a ferramenta "Controle Deslizante". Basta clicar no ícone , e depois em algum ponto da Janela de Visualização 2D. Surgirá uma janela e esta deve ser preenchida conforme ilustrado abaixo. Clicando em OK teremos o controle móvel.



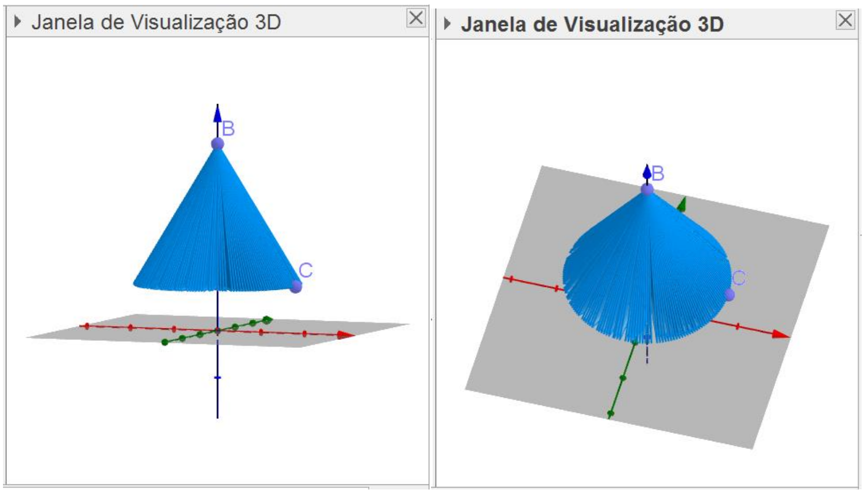


5. O próximo passo diz respeito a transformação geométrica de Rotação. No menu de ferramentas da Janela de Visualização 3D, selecionamos a ferramenta "Girar em torno de uma reta". Em seguida, selecionamos a figura geratriz (triângulo retângulo) e a reta que servirá como eixo de rotação, nesta ordem. Aparecerá uma janela solicitando o ângulo de rotação, nela digitamos o nome dado ao controle deslizante, neste caso α (estabelece-se assim a relação entre o controle e a rotação da figura). Na

janela 3D aparecerá a figura geratriz transformada de acordo com o ângulo selecionado no controle deslizante.



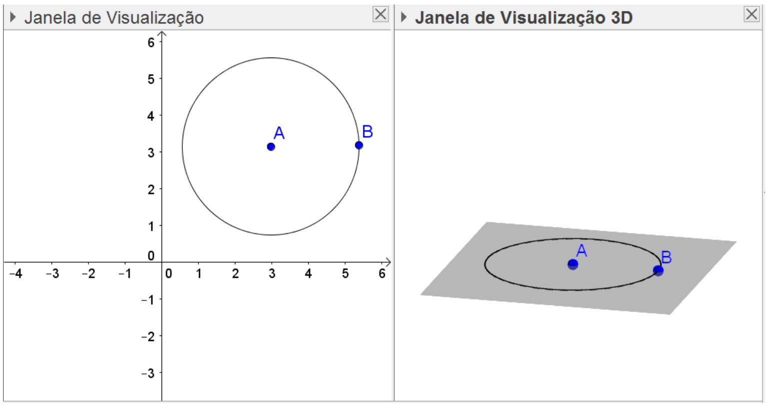
6. Basta agora clicar com o botão direito do mouse sobre a figura transformada e selecionar a opção “Habilitar Rastro”. Movimentando o seletor, teremos o registro de todas as posições ocupadas pela figura geratriz com relação ao ângulo de rotação em torno do eixo Z.



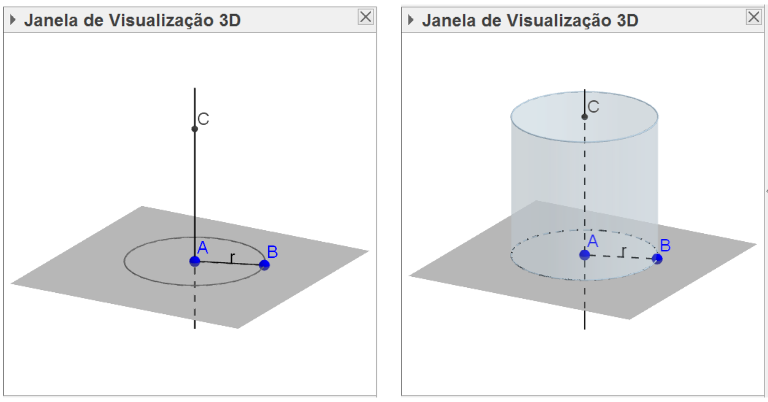
7. Desta mesma forma procede-se na Atividade 5, na qual temos diferenças apenas quanto a criação da figura geratriz.

ATIVIDADE 6: ESFERA INSCRITA NO CILINDRO

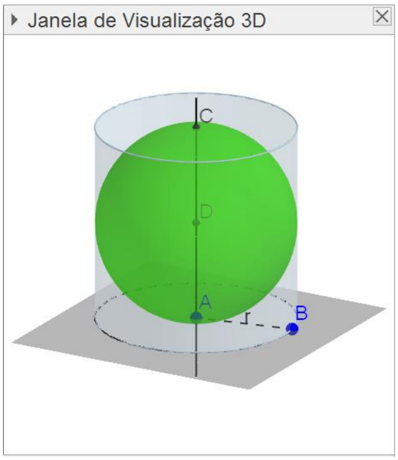
1. De acordo com as orientações contidas na Ficha de Trabalho 4, iniciamos pela construção da base do cilindro ne reto na janela 2D. Assim, através da ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” , geramos um círculo no plano XOY definindo dois pontos quaisquer A e B contidos nesse plano.



2. Em seguida, criamos uma reta perpendicular ao plano da base passando pelo centro A do círculo utilizando a ferramenta . Criaremos em seguida o segmento AB, utilizando a ferramenta “Segmento” , e o renomearemos como *“r”*. O comprimento *“r”* será fundamental para criarmos o ponto C (centro da base superior do cilindro). No campo “Entrada” definimos o ponto C: *(x(A), y(A), 2*r)*. Como vemos, o ponto C deve ser construído com algum cuidado, pois deve garantir a inscrição da esfera, ou seja, o cilindro deve atender a condição $h = 2r$. Por fim, utilizando a ferramenta “Cilindro” , selecionamos os pontos A e C (centro das bases do cilindro) e na janela que solicita o raio, indicamos o comprimento do segmento *“r”*.

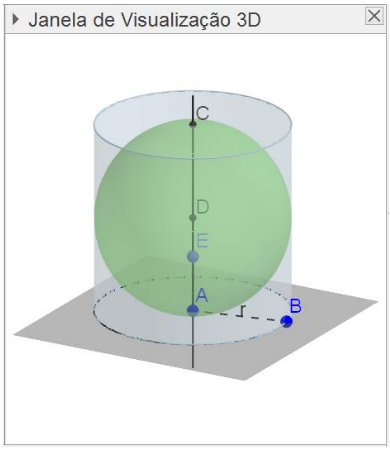


3. Para a inscrição da esfera neste cilindro, determinamos o Centro da esfera inscrita através da ferramenta "Ponto Médio" , selecionando os pontos A e C. Nomeie este ponto como "D". Basta agora criar a esfera com Centro D e raio *"r"* (igual ao do cilindro) utilizando a ferramenta "Esfera dados Centro e Raio" .

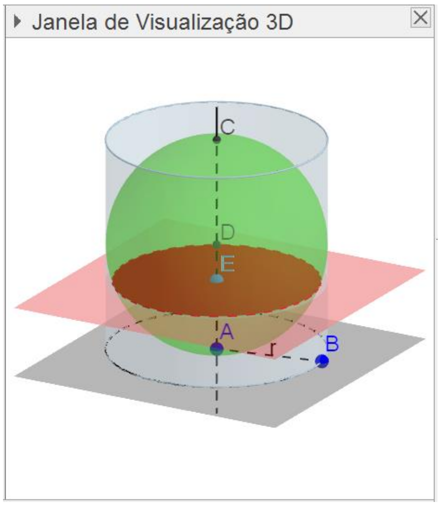


ATIVIDADE 7: CILINDRO E ESFERA COM PLANO DE CORTE MÓVEL

1. Dando continuidade à construção acima, vamos construir um plano móvel paralelo a base do cilindro. Para tanto, vamos inserir um ponto livre E sobre o eixo gerador do cilindro através da ferramenta "Ponto" . Este ponto será responsável pela movimentação do plano.



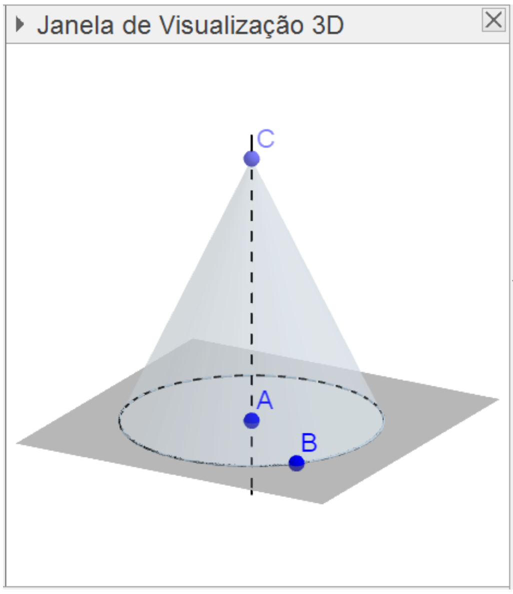
2. Em seguida, construiremos um plano paralelo ao plano da base passando pelo ponto E. Para isso, usaremos a ferramenta "Plano Paralelo" , selecionando o ponto E e o plano da base, nesta ordem. A seguir, demarca-se a intersecção formada entre plano e esfera usando a ferramenta "Intersecção de duas superfícies".



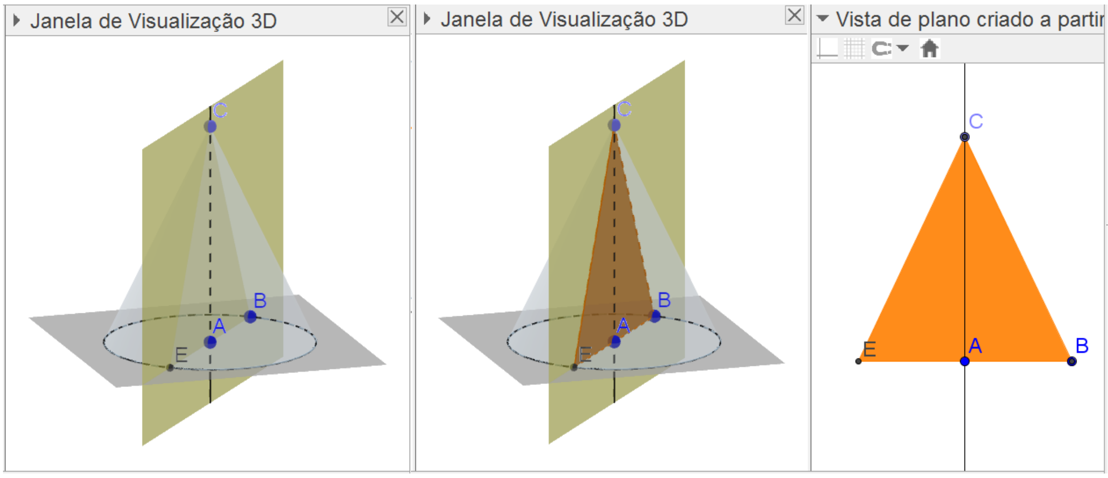
3. Podemos colorir o plano móvel e a intersecção e, por fim, basta movimentar o ponto E.

ATIVIDADE 8: ESFERA INSCRITA NO CONE

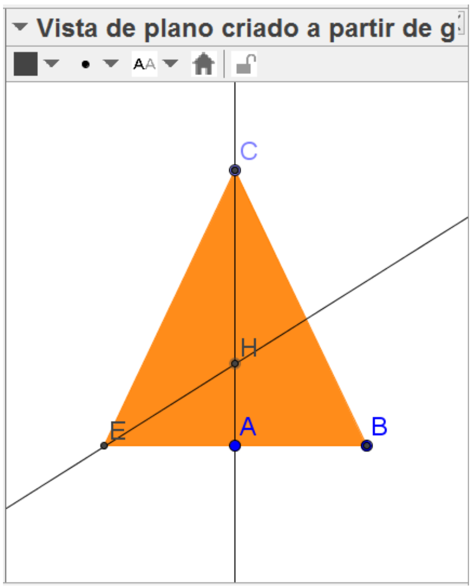
1. O início desta construção é análogo ao da Atividade 6: iniciamos pela construção da base do cone reto na janela 2D através da ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”. Em seguida, é construído um eixo perpendicular ao plano da base passando pelo centro deste círculo (usando a ferramenta “Reta Perpendicular” na Janela 3D). Basta então criar um ponto C qualquer sobre este eixo, e por fim, usando a ferramenta “Cone”, selecionar os pontos A e C, definindo o raio como sendo o comprimento *“AB”*.



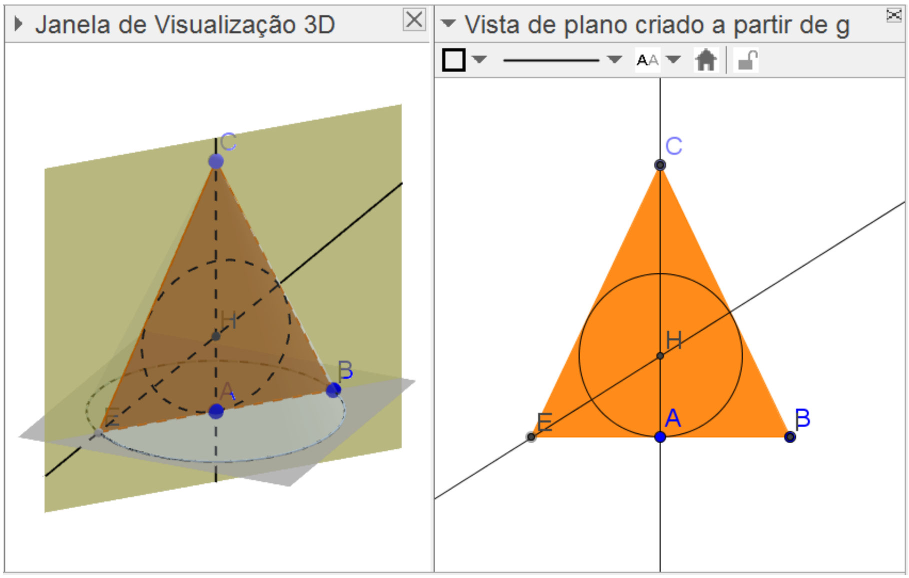
2. Para facilitar a inscrição da esfera, geraremos o plano meridiano deste cone, utilizando a ferramenta “Plano por três pontos” e os pontos A, B e C. Identificaremos também a intersecção fazendo uso da ferramenta  “Intersecção de duas superfícies” e exibiremos a vista 2D deste plano, clicando com o botão direito do mouse sobre o plano e selecionando a opção “Criar Vista 2D”.



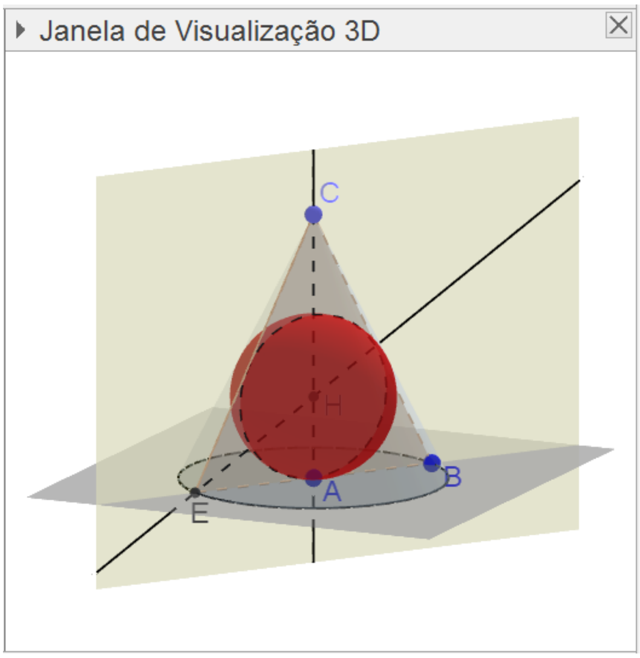
3. A seguir, na vista 2D, aplicamos a ferramenta “Bissetriz” em um dos vértices (E ou B). Utilizando a ferramenta  “Intersecção de dois objetos”, marcamos a intersecção entre a bissetriz dada pelo eixo gerador do cone e a bissetriz criada, chamando o ponto de intersecção de H.



4. Criaremos agora a circunferência de Centro H e que tem A como um de seus pontos, utilizando a ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”.

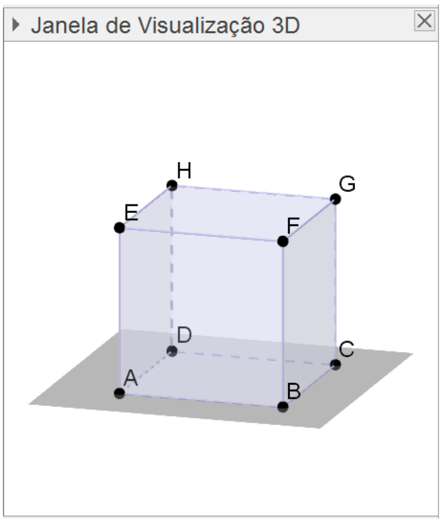


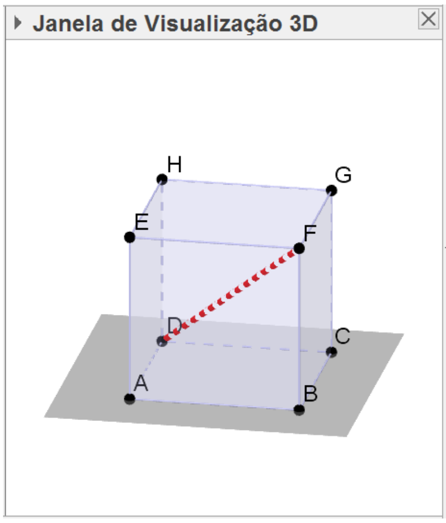
5. Por fim, basta criar a esfera com mesmo centro e raio do círculo inscrito. Utilizando a ferramenta “Esfera dados Centro e um de seus pontos”, selecionamos os pontos H e A, nesta ordem.



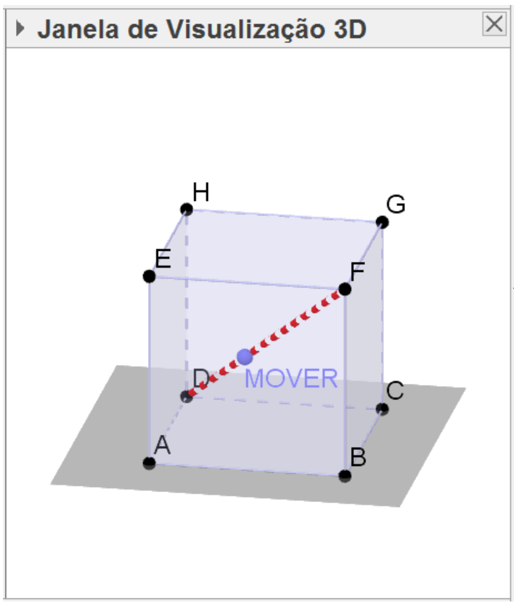
ATIVIDADE 9: ÁREA DA SECÇÃO DADA PELO PLANO PERPENDICULAR A DIAGONAL DO CUBO

1. Assim como nas atividades anteriores, criaremos um cubo na Janela 3D. Depois criamos uma das diagonais espaciais deste cubo com a ferramenta “Segmento”. No caso ilustrado construímos a diagonal DF. *Obs.: Lembramos que sempre é possível modificar, cor, espessura, transparência, etc. através do menu “Propriedades” ao clicar sobre o objeto com o botão direito do mouse.*

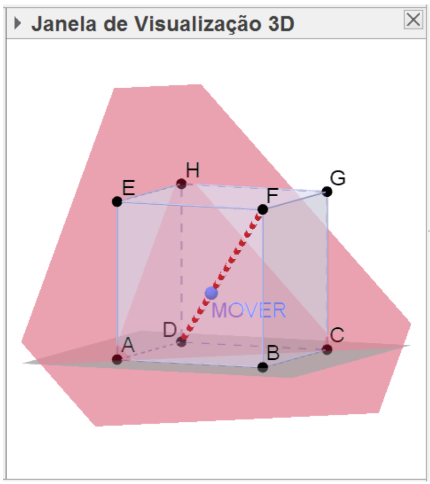


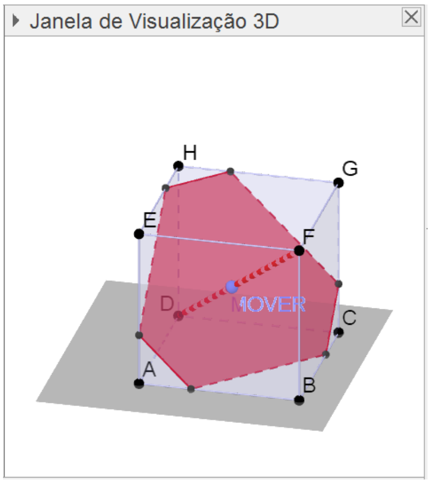


2. A seguir, criamos um ponto livre sobre a diagonal DF utilizando a ferramenta “Ponto” e renomeamos este ponto como “MOVER”.

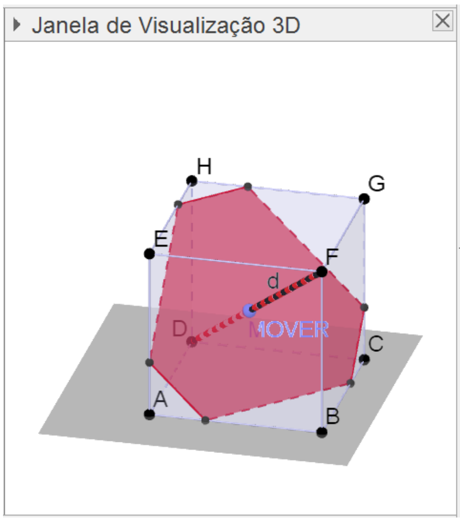


3. Utilizando a ferramenta “Plano perpendicular”  criaremos um plano perpendicular à diagonal DF passando pelo ponto “MOVER”. Para facilitar a visualização das secções dadas por este plano, identificaremos a intersecção entre plano e cubo com a ferramenta  “Intersecção de duas superfícies”. A seguir, pode-se ocultar o plano que gera as secções, clicando com o botão direito do mouse sobre o plano e selecionando a opção “Exibir objeto”.



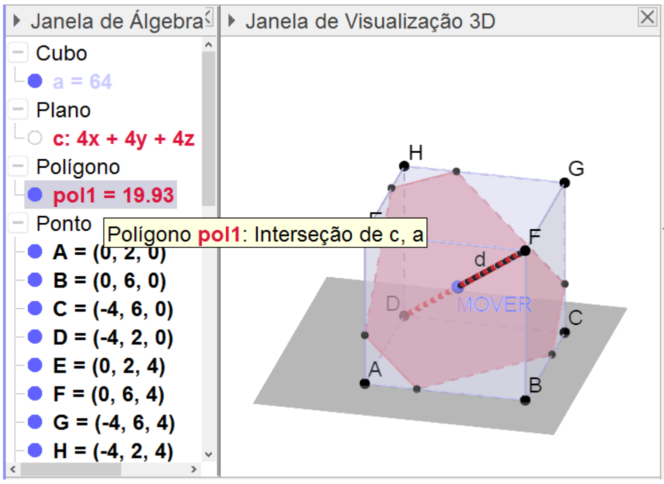


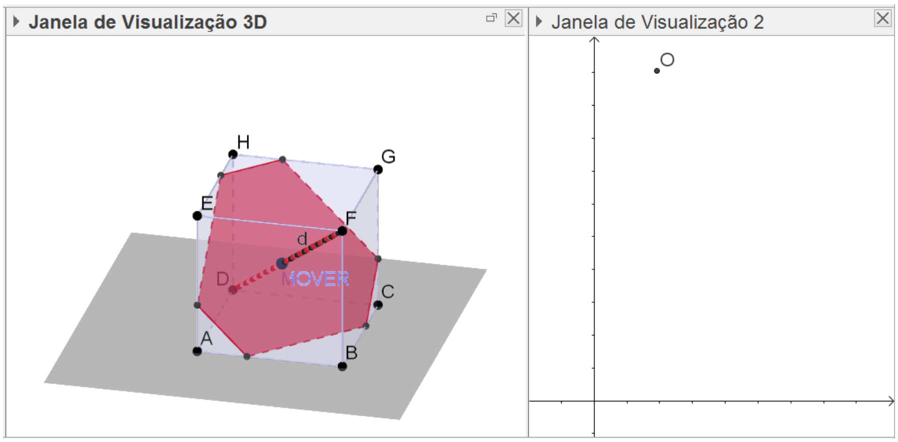
4. A fim de determinar a variável independente, criaremos um segmento  entre os pontos F e MOVER e o chamaremos de *“d”*.



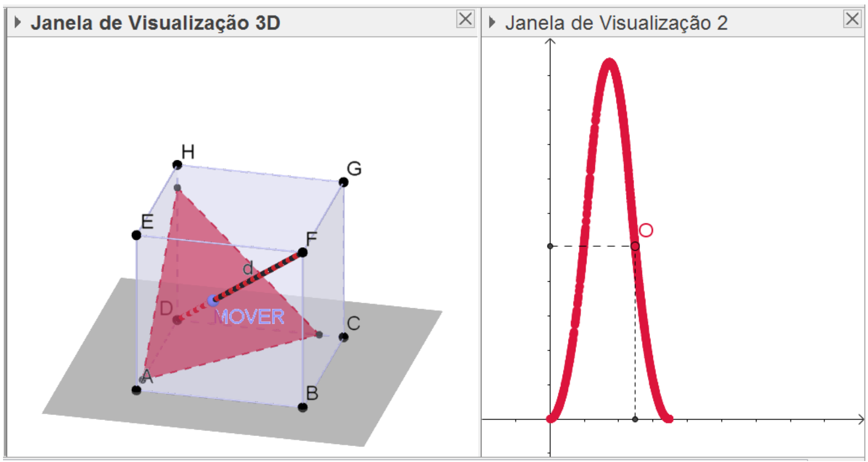
5. Para gerar o gráfico precisamos habilitar a Janela de Visualização 2. Faremos isso através do menu Exibir ou do atalho *Ctrl + Shift + 2*.

6. Nesta Janela, utilizando o campo Entrada, vamos criar o ponto genérico que esboça a função correspondente a área da secção: *(d, pol1)*. *Obs.: Na janela de álgebra 'pol1' corresponde a área da secção dada pela intersecção entre plano de corte e cubo.*



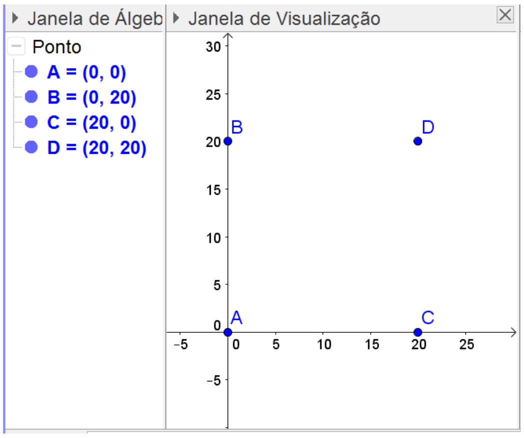


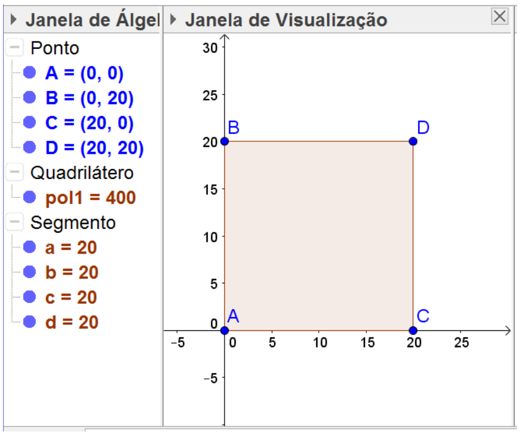
7. Por fim, basta utilizar a opção "Habilitar Rastro" para demarcar as contínuas posições do ponto O, dependendo da movimentação do ponto "MOVER". Utilizando retas perpendiculares pode-se ainda definir as projeções deste ponto.

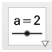


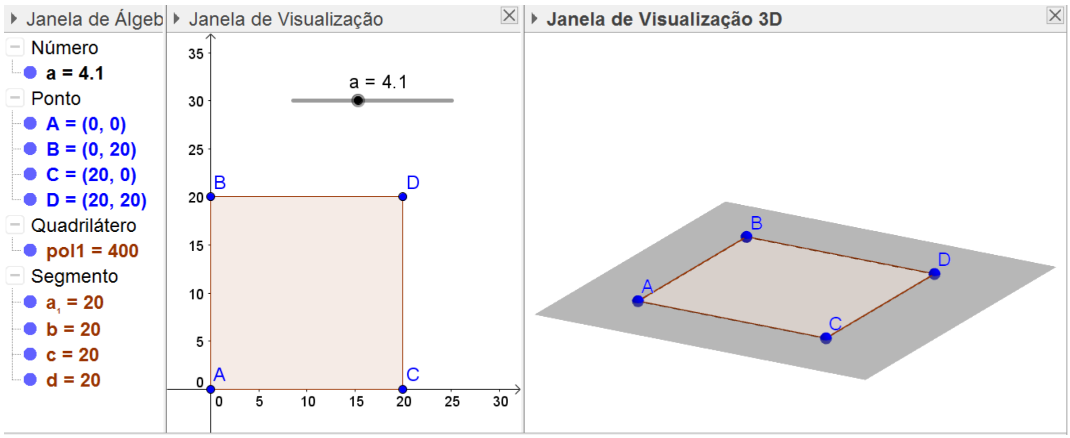
ATIVIDADE 10: CAIXA DE VOLUME MÁXIMO

1. Criar os pontos A(0,0), B(0,20), C(20,0) e D(20,20) na janela de visualização 2D. Em seguida, criar o quadrado ABCD através da ferramenta "Polígono" .

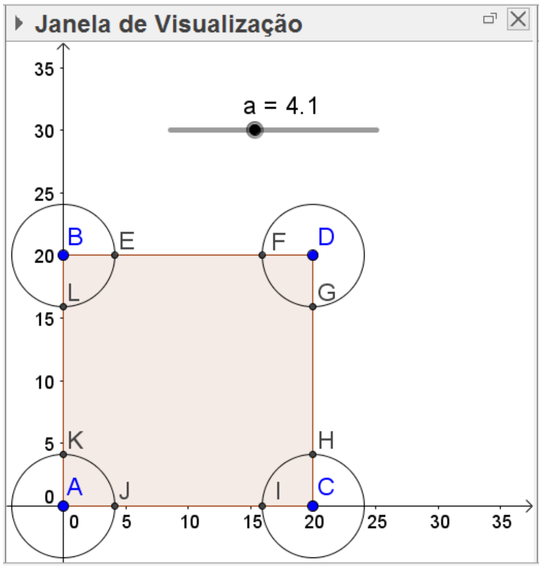




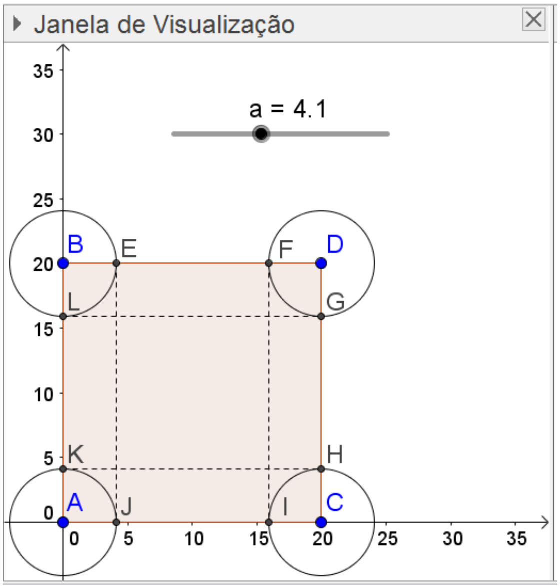
2. Criar o seletor "a" variando de 0 a 10 com a ferramenta "Controle Deslizante" 



3. Vamos gerar agora as "abas" da caixa. Para tanto, criaremos 4 círculos, cada um com centro em um dos vértices do quadrado ABCD e raio *"a"*, através da ferramenta "Círculo dado Centro e Raio" . Marcaremos também as intersecções das circunferências com os lados do quadrado ABCD utilizando a ferramenta "Intersecção entre dois objetos" .

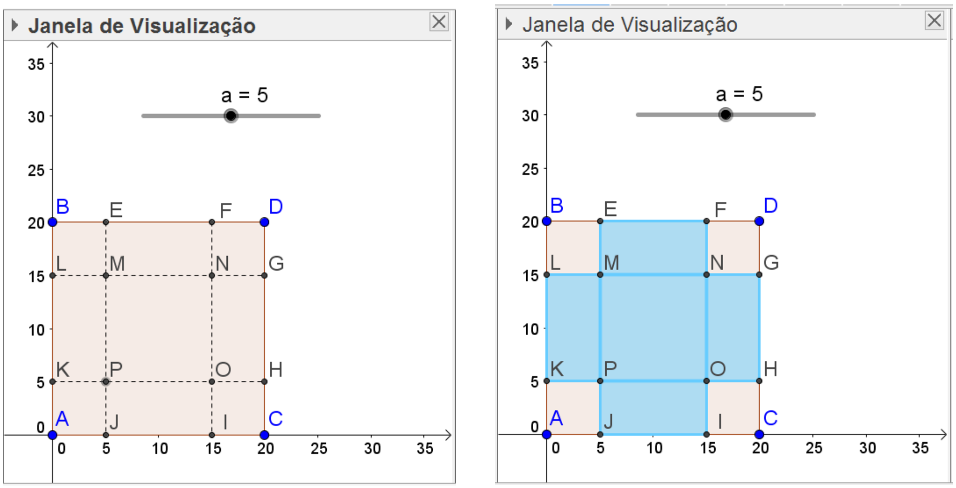


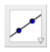
4. Agora traçaremos os segmentos de reta EJ, FI, LG, KH através da ferramenta "Segmento" .

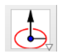


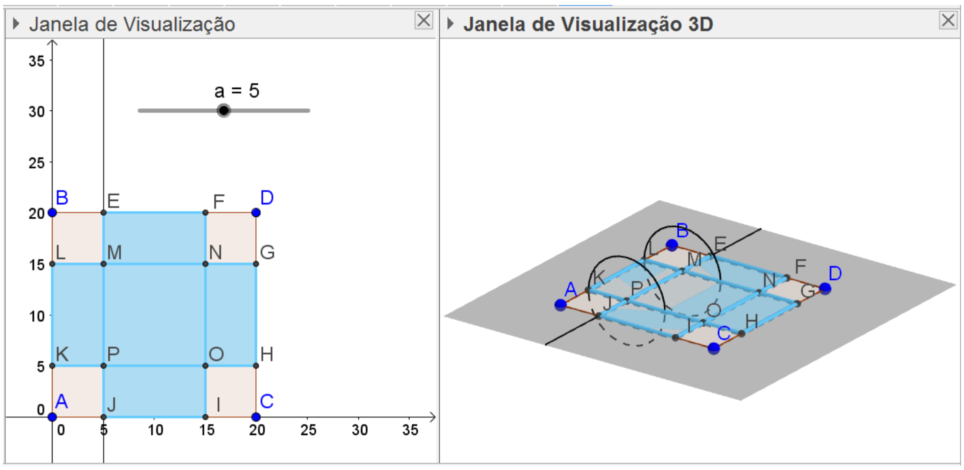
5. Em seguida, podemos ocultar as circunferências de centro nos vértices do quadrado.

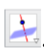
6. Demarcar as intersecções formadas entre os segmentos de reta construídos no passo 4 utilizando a "Intersecção entre dois objetos". Criamos, em seguida, os polígonos KLMP, EFNM, GHON, IJPO e MNOP, alterando cor e transparência nas "Propriedades" dos polígonos.

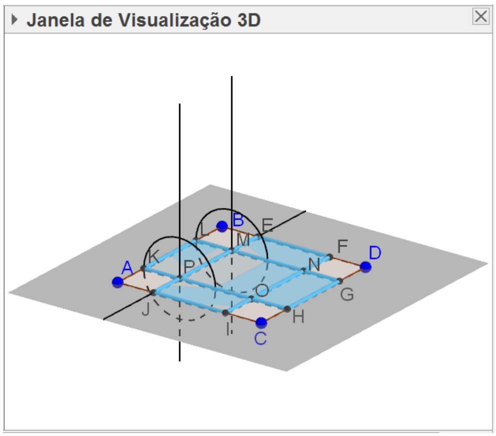


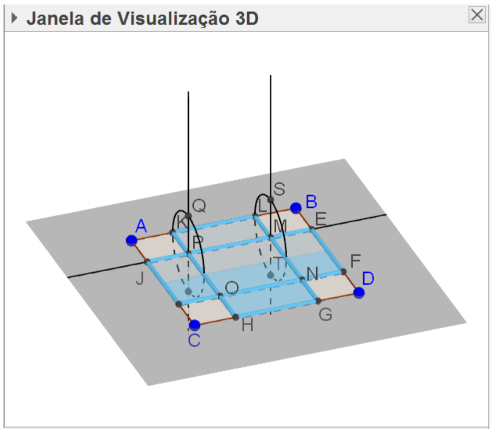
7. Na Janela de Visualização 3D oculte os eixos XYZ. Agora, vamos criar a estrutura que movimentará as abas da caixa. Precisaremos construir uma reta auxiliar *r* passando pelos pontos M e P usando a ferramenta “Reta” .

8. Utilizando a ferramenta “Círculo (Centro - Raio + Direção)”  selecionamos como centro o ponto M, como direção a reta auxiliar *r* (construída no passo anterior) e como raio *“a”*. Depois, repetimos o processo, selecionando como centro do círculo o ponto P.

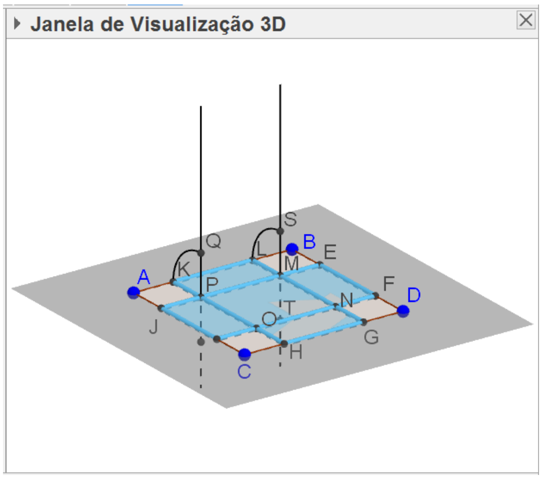


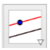
9. A fim de criar um arco de movimentação sobre este círculo criaremos duas retas auxiliares passando por P e M e perpendiculares ao plano z=0 através da ferramenta “Reta perpendicular” . Vamos demarcar também a intersecção das duas circunferências com as retas auxiliares criadas na etapa anterior utilizando a “Intersecção entre dois objetos”.

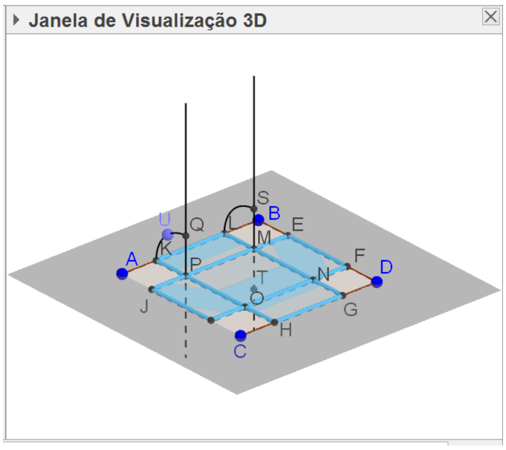


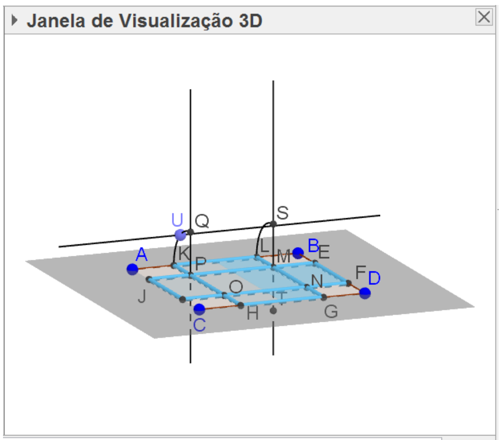


10. Através da ferramenta “Arco Circular”  criaremos dois arcos, um sobre cada uma das circunferências. O primeiro terá centro M e extremidades L e S. O segundo terá centro P e extremidade K e Q. A seguir, podemos ocultar os círculos, preservando apenas os arcos criados.

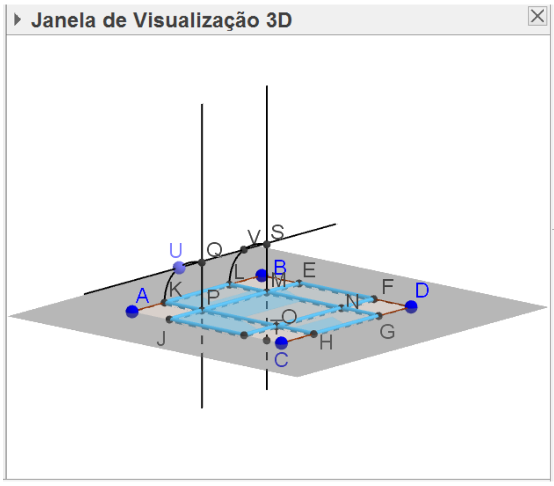


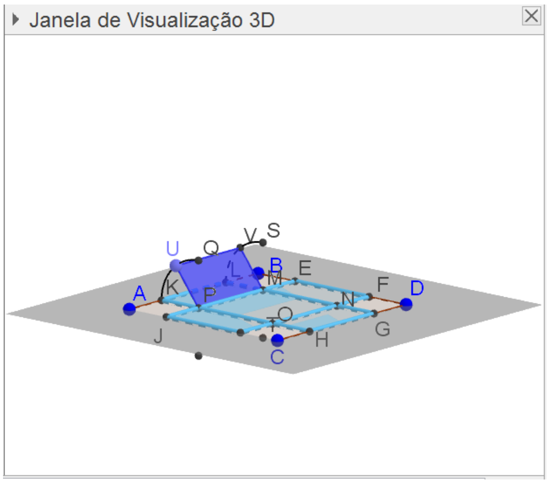
11. Criaremos agora um ponto U sobre um dos arcos construídos como ilustra a imagem a seguir. Utilizando o recurso “Retas Paralelas”  construiremos uma reta *s* paralela ao segmento MP passando por U.



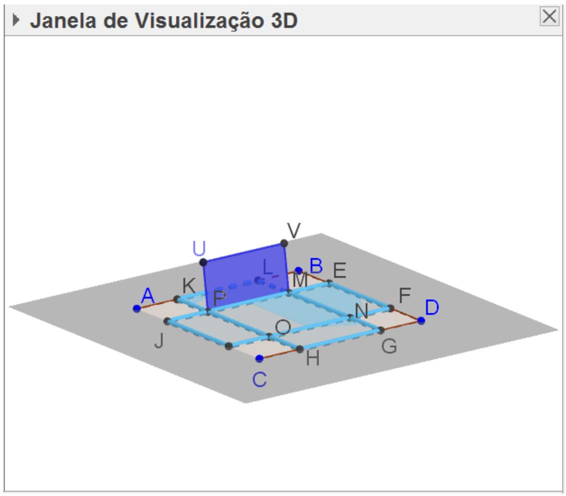


12. Marcamos a intersecção da reta *s* com o outro arco circular. Em seguida, ocultamos as retas auxiliares e criamos o polígono MPUV.

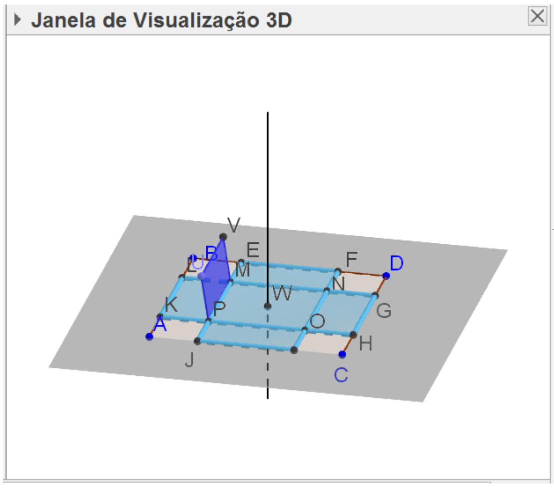




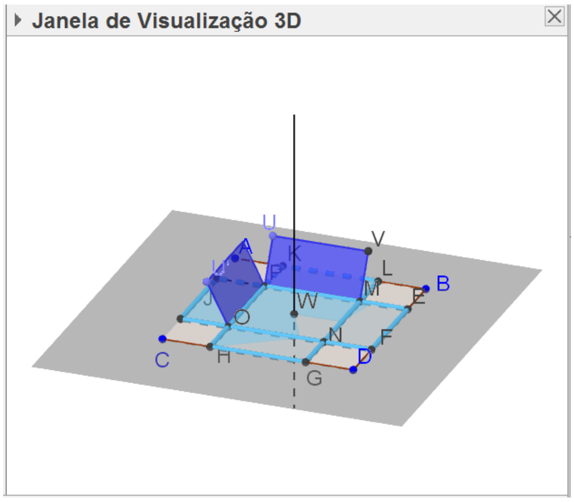
13. Por fim, pode-se ocultar rótulos desnecessários, os arcos e os pontos de intersecção. Temos assim uma das abas prontas e com a sua movimentação definida em um arco de 90º.



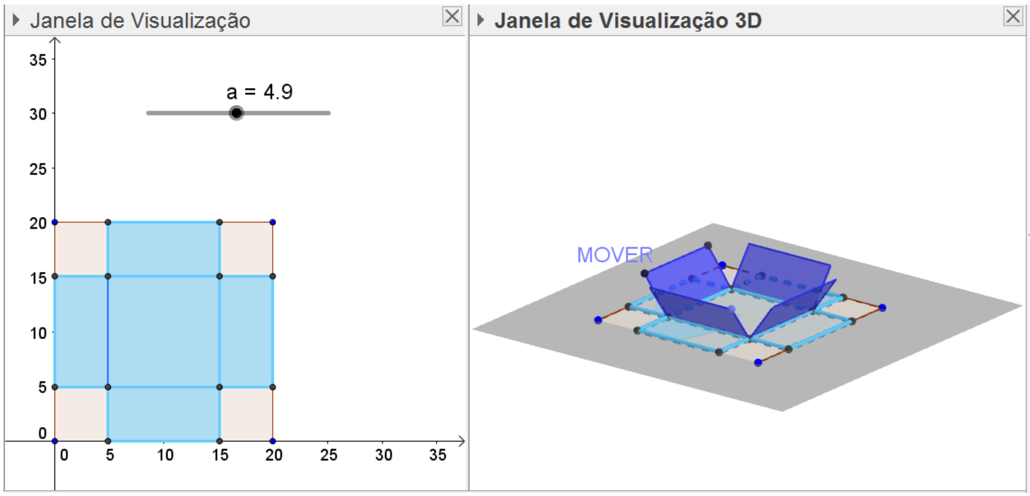
14. Para gerar as outras 3 abas, trabalharemos com rotações no plano tridimensional. Para tanto precisamos de uma reta que funcionará como eixo de rotação. Essa reta deverá passar pelo centro da base da caixa. Podemos fazer a construção selecionando o "Ponto médio ou Centro" entre os vértices B e C do quadrado. A seguir, criamos uma reta perpendicular ao plano z=0 e que passa por este ponto utilizando a ferramenta "Reta Perpendicular".



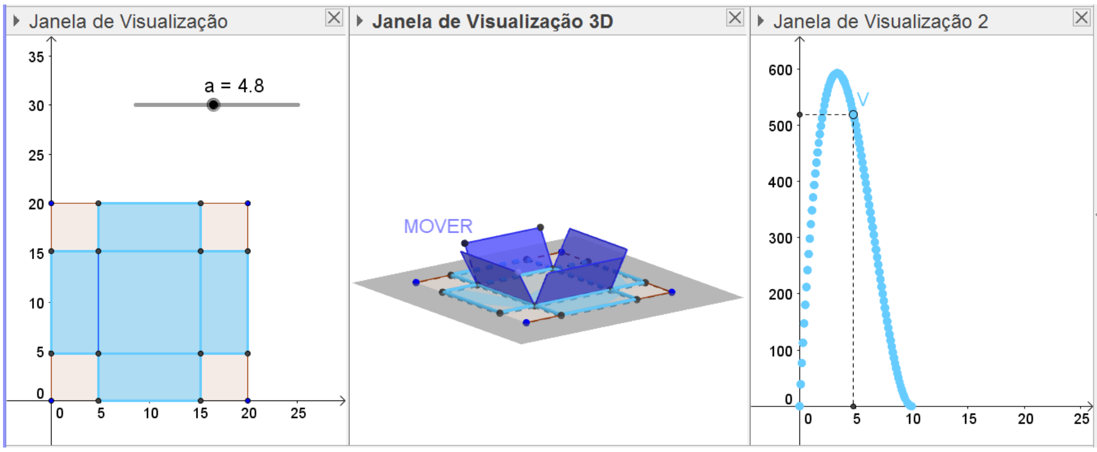
15. Rotacionamos então o polígono ‘aba’ em torno desta reta/eixo. Utilizando a ferramenta “Girar em torno de uma reta”  selecionamos o polígono, o eixo de rotação e solicitamos uma rotação de 90º no sentido anti-horário.



16. Procedemos da mesma forma, para gerar as outras duas abas. Renomeamos o ponto U como “MOVER” e escondemos os rótulos dos demais pontos.



17. A seguir, exiba a Janela de Visualização 2. Criamos nesta janela o ponto genérico que esboça o volume dependendo do corte *"a"*: (a,pol6*a) e selecionamos a opção "Habilitar Rastro" para o ponto criado. *Obs.: 'pol6' é o nome dado pelo software ao polígono da base da caixa. Podemos ainda alterar a escala entre os eixos para 1:20 a fim de facilitar a visualização gráfica.*



APÊNDICE E

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ______________________________, portador do R.G. ____________________, responsável pelo (a) aluno (a) __________________________, da turma 311, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o (a) aluno (a) participe da pesquisa intitulada **GEOGEBRA 3D NO ENSINO MÉDIO: uma possibilidade para a aprendizagem da Geometria Espacial**, desenvolvida pela pesquisadora **Caroline Borsoi**. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela **Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (051) 3308.6212 ou e-mail: mat-ppgensimat@ufrgs.br/ gravina@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

1. *Analisar o contexto do ensino da Geometria Espacial no Ensino Médio.*
2. *Analisar o potencial didático dos recursos do software Geogebra 3D.*
3. *Planejar e construir sequência didática e material de ensino utilizando o Geogebra 3D.*
4. *Implementar e validar a sequência didática e o material utilizado, através de análise dos resultados.*

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), sendo o aluno (a) identificado (a) apenas pela inicial de seu nome.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio de questionário escrito e registros diários das atividades realizadas através de observações por escrito e fichas de trabalho, bem como da participação em aula, em que ele (ela) será observado (a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e vídeos, obtidas durante a participação do (a) aluno (a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc., sem identificação. A colaboração do (a) aluno (a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o (a) pesquisador (a) responsável no Colégio Estadual Farroupilha (Thomas Edson, 91, Centro – Farroupilha/RS), pelo telefone (54) 3261 2681 ou pelo e-mail: caroll_borsoi@yahoo.com.br.

Fui ainda informado (a) de que o (a) aluno (a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, setembro de 2015.

Assinatura do Responsável: ______________________________

Assinatura do (a) pesquisador (a): ______________________________

Assinatura do Orientador da pesquisa: ______________________________