

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO PARA MEDIÇÃO ÓPTICA DE VIBRAÇÃO EM  
PÊNDULOS DUPLOS

por

Lucas Benvenuto Benvegnu

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Junho de 2016.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO PARA MEDIÇÃO ÓPTICA DE VIBRAÇÃO EM  
PÊNULOS DUPLOS

por

Lucas Benvenuti Benvegnu

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Prof. Dr. Letícia Fleck Fadel Miguel

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre, Junho de 2016.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente, pelas condições de aprender e me desenvolver ao longo dessa trajetória.

Aos meus familiares, que estiveram sempre presentes ao longo do curso, e principalmente aos meus pais, que me deram toda estrutura, uma boa educação, apoio em todas as etapas da minha vida e são hoje minha maior inspiração.

Ao meu orientador, Prof. Herbert Martins Gomes, pelas ideias e paciência, e que esteve sempre disponível e disposto a colaborar no desenvolvimento deste trabalho, com ensinamentos e instruções, guiando de forma exemplar todas as etapas.

Aos amigos, muitos dos quais hoje moram distante, e que nunca deixaram de manter contato e fazer parte da minha vida, e aos que ainda vivem próximos a mim, por todos os momentos compartilhados em todos esses anos.

Ao GMAP da UFRGS por disponibilizar um ambiente onde pudesse se desenvolver as etapas experimentais do trabalho, bem como os equipamentos necessários.

Aos professores da Engenharia Mecânica por todo o conhecimento transmitido ao longo dos anos.

BENVEGNI, L. B. **Desenvolvimento de um algoritmo para medição óptica de vibração em pêndulos duplos. Monografia.** 2016. 15f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

## RESUMO

Sistemas ópticos têm sido cada vez mais utilizados para medições de grandezas mecânicas, onde é requerida a característica da discrição do sistema de medição. Neste contexto, acelerômetros e extensômetros elétricos para a medição de frequência de oscilação em componentes têm sido muito utilizados, entretanto seu uso se restringe à medida que os componentes analisados sejam pequenos ou de difícil acesso à instrumentação, além de interferirem diretamente na massa do sistema e, conseqüentemente, como este irá oscilar. Este trabalho consiste em utilizar um sistema de medição de grandezas relacionadas ao movimento do pêndulo duplo, sendo proposto a construção e projeto de um sistema óptico simples de avaliação de deslocamentos cujas amplitudes são da ordem das medidas, com sistemas tradicionais a laser. A solução das equações do movimento dos pêndulos pode tornar-se não trivial, no caso de pêndulos duplos com considerações de não linearidade, sendo possível por solução numérica. Comparações entre resultados experimentais com o sistema óptico e teóricos em pêndulos caóticos são feitas como forma de validação do sistema e do equacionamento proposto. Observou-se que o sistema numérico desenvolvido descreve bem os diferentes tipos de padrões oscilatórios possíveis em um pêndulo duplo, inclusive com a inclusão de amortecimento, e que para situações de vibração periódica e quase-periódica as previsões para as medições experimentais com o sistema óptico desenvolvido são muito boas. No caso do comportamento de vibração caótica, incertezas presentes nos parâmetros do sistema levam a comportamentos um pouco diferentes para os medidos com o sistema óptico.

**PALAVRAS-CHAVE:** medições ópticas, pêndulo duplo, vibrações mecânicas, sistemas caóticos.

**BENVEGNO, L. B. Development of an algorithm for optical measuring vibration in double pendulums. Monografia.** 2016. 15f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

#### ABSTRACT

Optical measurement systems have increasingly been used in mechanical measurements where a suitable description of the system is required. In this sense, accelerometers and electric strain gauges have been used for vibration measurement in components, however its usage are restricted to components with considerable size and easy access for instrumentation. In addition, they may interfere directly in the mass or stiffness of the system and consequently change measurements. This work consists in designing and building of a measurement system associated with the movement of a double pendulum, based on optical acquisitions in amplitudes that are in the magnitude of those in traditional laser systems. However, depending on system parameters this solution becomes non-trivial, especially in case of double pendulums with considerations of non-linearity, being only possible by numerical integration. Comparisons with theoretical and experimental results in chaotic pendulums are performed as a way to validate the developed system and proposed equations. It was noted that the developed numerical code describes the various possible types of oscillatory patterns in a double pendulum, including the damping behavior. For periodic and quasi-periodic vibration situations the system forecasts the experimental measurements (performed by the developed optical system) quite well. In the case of chaotic vibration behavior, uncertainties in the system parameters lead to slightly different behavior obtained by measured optical system.

**KEYWORDS:** optical measurements, double pendulum, mechanical vibrations, chaotic systems.

ÍNDICE	Pág.
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
ABSTRACT .....	v
LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Motivação e objetivos.....	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	1
2.1 Sistemas caóticos .....	1
2.2 Sistema de medição óptica por marcadores.....	2
3 REFERENCIAL TEÓRICO .....	3
3.1 Equacionamento do movimento dinâmico do pêndulo duplo .....	3
3.2 Inclusão da dissipação de energia .....	5
4 MEDIÇÕES EXPERIMENTAIS.....	6
4.1 Descrição do protótipo de pêndulo duplo .....	6
4.2 Descrição do programa em Matlab.....	6
4.3 Estimação da constante de amortecimento viscoso .....	7
4.4 Resultados obtidos para constante de amortecimento .....	8
4.5 Resultados obtidos para frequências fundamentais amortecidas para comportamento periódico e quase-periódico.....	8
4.6 Comportamento Caótico.....	11
5 CONCLUSÕES .....	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	15
APÊNDICE.....	16

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Esquema do pêndulo duplo. ....	3
Figura 4.1 – (a) Protótipo do pêndulo duplo e (b) Montagem experimental.....	6
Figura 4.2 – Comportamento de sistema em vibração livre subamortecido. ....	7
Figura 4.3 –Gráficos das FFT da posição angular das massas nas simulações numéricas para o caso de pêndulo com comportamento periódico ( $\theta_1 = -31^0$ e $\theta_2 = -38.6^0$ e velocidades iniciais nulas e amortecimento medido).....	9
Figura 4.4 – Ângulos dos pêndulos obtidos experimentalmente e numericamente para condições iniciais de $\theta_1 = -31^0$ e $\theta_2 = -38.6^0$ e velocidades iniciais nulas.....	9
Figura 4.5 – Simulações para ângulos iniciais $\theta_1 = -32^0$ e $\theta_2 = -35^0$ e velocidades iniciais nulas. ....	10
Figura 4.6 – Simulações para ângulos iniciais $\theta_1 = -31^0$ e $\theta_2 = -38^0$ e velocidades iniciais nulas. ....	10
Figura 4.7 – Simulações para ângulos iniciais $\theta_1 = -34^0$ e $\theta_2 = -79^0$ e velocidades iniciais nulas. ....	11
Figura 4.8 – Medições e simulações da coordenada $y$ das duas massas para ângulos iniciais $\theta_1 = -62^0$ e $\theta_2 = -214^0$ . ....	11
Figura 4.9 - Medições e simulações da coordenada $x$ das duas massas para ângulos iniciais $\theta_1 = -62^0$ e $\theta_2 = -214^0$ .....	12
Figura 4.10 – Medições e Simulações da posição espacial das duas massas para ângulos iniciais $\theta_1 = -62^0$ e $\theta_2 = -214^0$ .....	12
Figura 4.11 – Medições e simulações para a coordenada $y$ para ângulos iniciais $\theta_1 = -66^0$ e $\theta_2 = -216^0$ (pêndulo caótico). ....	13
Figura 4.12 – Medições e simulações para a coordenada $x$ para ângulos iniciais $\theta_1 = -66^0$ e $\theta_2 = -216^0$ (pêndulo caótico).....	13
Figura 4.13 - Simulações para ângulos iniciais $\theta_1 = -66^0$ e $\theta_2 = -216^0$ .....	13
Figura A.1. –Gráfico de órbitas ou espaço-fase mostrando claramente os dois atratores para cada uma das massas dos pêndulos, característico de sistemas periódicos ( $\theta_1 = -31^0$ e $\theta_2 = -38.6^0$ e velocidades iniciais nulas e amortecimento medido).....	16
Figura A.2 - Quadro (Frame) para $t=0,85$ s do sistema óptico mostrando o posicionamento e reconhecimento dos marcadores ( $\theta_1 = -31^0$ e $\theta_2 = -38.6^0$ , velocidades iniciais nulas).....	16

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Valores obtidos da constante de amortecimento do pêndulo duplo para o marcador 1, neste estudo. ....	8
Tabela 4.2 – Valores obtidos da constante de amortecimento do pêndulo duplo para o marcador 2, neste estudo. ....	8
Tabela 4.3 – Valores de frequências fundamentais amortecidas obtidas experimentalmente e numericamente.....	9



## 1 INTRODUÇÃO

Muitos sistemas na natureza assim como no cotidiano possuem comportamentos que não podem ser preditos com precisão, ou seja, conhecendo-se as condições iniciais, saber como esse sistema irá se desenvolver ao longo do tempo. Muitos destes comportamentos têm sua origem na aleatoriedade inerente a fenômenos físicos cotidianos, incertezas presentes no dia-a-dia além de limitações presentes nos modelos matemáticos que expliquem estes fenômenos. Na meteorologia, na tribologia, eletrônica e muitos outros ramos da ciência estes comportamentos são muitas vezes indesejados e, portanto, pesquisados para o seu melhor entendimento. Especificamente um dos comportamentos aleatórios com propriedades bem específicas é o comportamento caótico.

O uso de pêndulos na engenharia mecânica remonta primeiras aplicações em relógios mecânicos, máquinas a vapor como controladores de pressão, funcionando como osciladores. Atualmente seu uso é bastante difundido sendo utilizado como amortecedores de vibração em prédios sujeitos a terremotos, sistemas de transporte Segway (pêndulo invertido), sistemas de equilíbrio em navios e sistemas de navegação em aeronaves a sistemas de bombeamento de petróleo em terra.

Para medições em sistemas oscilatórios, existem dispositivos como acelerômetros e extensômetros elétricos, porém há uma necessidade de se utilizar equipamentos que não interfiram na medição. No caso de um mecanismo leve como o pêndulo duplo, a massa adicional devido à utilização deste tipo de equipamento pode interferir em como o sistema oscila, fato esse que ainda tem motivado o desenvolvimento de novos sistemas medidores.

No presente trabalho avalia-se o uso de um sistema de medição óptico para aplicação em análise de pêndulos duplos. Serão apresentados os conceitos básicos, revisão do que já existe e aplicações práticas do sistema desenvolvido.

### 1.1 Motivação e objetivos

O estudo de sistemas ópticos para medições de vibrações mecânicas é um tema de bastante interesse havendo inúmeros trabalhos e equipamentos comerciais que o fazem, apresentando como maior vantagem a discricção obtida com o sistema pois não possui contato com o objeto a ser medido. Entretanto, certas condições são necessárias para que estes sistemas se tornem vantajosos em relação aos tradicionais: peças pequenas, vibrações com baixa frequência, condições de iluminação, etc. Atualmente os sistemas de captura de movimento são caros e escassos no mercado Brasileiro. Este trabalho tem como objetivo estender trabalhos anteriores em medições ópticas, aplicada no rastreamento de marcadores, contribuindo com o entendimento da dinâmica de pêndulos duplos em movimento, para os diferentes tipos de comportamento que esse sistema possa apresentar. Ressalta-se a maior dificuldade de previsão do movimento de um pêndulo duplo caótico, o que justifica a necessidade de um sistema de medição para descrição deste tipo de sistema. Este trabalho, portanto, fará as medições com sistema óptico e comparações com modelos numéricos existentes e desenvolvidos ao longo do trabalho, para efeito de validação do sistema de medição.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Sistemas caóticos

Uma definição para sistemas mecânicos é a de que "num sistema dinâmico, caos é uma solução de estado estável de um sistema, mas não uma solução de equilíbrio, ou uma solução periódica ou quase-periódica" (Yao e Freeman, 1990). De fato, pode-se supor que estas definições convergem para algo entre o comportamento totalmente previsível e periódico e algo completamente aleatório e imprevisível. Assim, por exemplo no caso de sistemas dinâmicos, quando estes são altamente sensíveis a condições iniciais, eles podem apresentar comportamentos completamente divergentes, mesmo quando as condições iniciais são levemente diferentes. Em outras palavras, apesar dos parâmetros que definem o problema

serem completamente mensuráveis e determinísticos, o seu comportamento futuro torna-se não previsível em certas condições. O teste para diferenciar um sistema caótico de um sistema determinístico é o fato do sistema determinístico sempre evoluir da mesma maneira, para uma dada condição inicial, fato não possível com sistemas caóticos.

O comportamento de pêndulos duplos tem sido extensivamente estudado, principalmente devido sua possível natureza caótica em certas condições. Esse tipo de sistema físico começou a receber atenção na década 60, com as primeiras publicações a respeito de estudos realizados por Edward Lorenz. Seu trabalho buscava a previsibilidade atmosférica, e observou-se que a partir de um determinado período, as diferentes previsões de tempo com estados iniciais praticamente iguais divergiam significativamente. Essa sensibilidade às condições iniciais veio a ser posteriormente denominada efeito borboleta. Diversos sistemas físicos como o pêndulo duplo apresentam tal característica, e ainda tem chamado bastante a atenção de pesquisadores. A análise do caos em um pêndulo não-linear experimental já foi relatada em alguns estudos (de Paula *et al.*, 2006).

Levien e Tan, 1993, inspirados pela observação de diversos fenômenos que apresentavam respostas distintas para condições iniciais sensivelmente pouco diferentes (teoria do caos), realizaram um estudo sobre o pêndulo duplo caótico, buscando descrever o movimento de algo que parecia ser imprevisível.

O modelamento do pêndulo triplo amortecido foi feito por Eyre e Holzgrafe, 2008, através da extensão da solução do pêndulo duplo amortecido, ambos sistemas caóticos, utilizando métodos energéticos para encontrar um conjunto de equações diferenciais que descrevem o movimento do pêndulo, e solucionando por integração através do software Matlab, 2012.

Akerlof, 2012 apresenta um elaborado sistema para medir e avaliar propriedades de pêndulos duplos com ajuda de câmeras com flash, telas fosforescentes, medidores de nível, e solenoides, para que a medição do ângulo inicial assim como a soltura dos braços dos pêndulos seja feita de forma automática. Boas correlações para os primeiros 2 s a 3 s de simulação e medição experimental são reportados, entretanto mudanças substanciais são verificadas a partir de então.

Davidson, 2011, apresenta também um interessante estudo das soluções numéricas do problema do pêndulo duplo com validações experimentais feitas em sistema de pêndulo onde os ângulos são medidos com *encoders*. Gráficos de órbitas (ângulos *versus* derivada do ângulo) são apresentados, mostrando o comportamento periódico em certas condições com a presença dos atratores e o comportamento caótico, onde não há a presença destes atratores.

## 2.2 Sistema de medição óptica por marcadores

O uso de sistemas de medições ópticos é recorrente em diversas áreas devido principalmente à sua discricção. Normalmente as imagens são capturadas com câmeras de vídeo digitais para posteriormente serem processadas por um software comercial, que deve ser programado de forma a reconhecer certo objeto e monitorar seu movimento ao longo do tempo.

O quanto de informação pode ser adquirida, e sua precisão, são limitadas pelo número de *frames*, ou quadros, que a câmera consegue registrar por segundo, sua resolução, dada em pixels, bem como a metodologia de pós processamento da imagem.

Neste tipo de sistema, o rastreamento dos pontos de interesse pode ser realizado com ou sem o uso de marcadores (Queiroz, 2011). Sundaresan e Chellappa, 2005, descrevem um sistema de captura de movimento sem marcadores. Já em sistemas com uso de marcadores, esses podem ser ativos ou passivos (apenas refletem a luz). Marcadores ativos apresentam vantagens na obtenção de resultados diretos, com alto contraste dos marcadores em relação ao fundo, porém há limitações quanto a aplicação deste tipo de sistema devido às restrições mecânicas e a necessidade de um ambiente controlado. Sistemas baseados no reconhecimento de marcadores reflexivos são considerados o melhor padrão para a reconstrução da cinemática, devido a sua elevada precisão e estabilidade (Ceseracciu, *et al.*, 2014), evitando as limitações existentes em sistemas ativos.

Há diversos trabalhos desenvolvidos ou em desenvolvimento na área acadêmica, relacionados com a captura de movimento que descrevem os algoritmos de rastreamento empregados. No seu trabalho de conclusão, Goularte, 2014, descreve um sistema de medições ópticas para avaliação de parâmetros na caminhada humana. Ele indica que quanto ao número de perspectivas, pode-se rastrear o movimento humano com uma única câmera de vídeo, usando uma perspectiva (*single-camera*), ou então com múltiplas câmeras, adequadas para rastreamento de pontos que se movem nas três dimensões do espaço.

Este sistema é a base para o desenvolvimento deste trabalho e lá há uma descrição de como avaliar e analisar a incerteza presente nestes sistemas baseando-se na avaliação das distorções presentes nas câmeras utilizadas (por meio de um modelo de distorção circular para a câmera, aplicativo *cameraCalibrator*) assim como no número de pixels utilizado para as filmagens. Os dados obtidos pelo sistema de medição são processados por um algoritmo em Matlab, que isola os marcadores do resto do ambiente, os reconhecendo pela cor e realizando o rastreamento ponto a ponto.

Ukoba *et al.*, 2011, revisa diversos métodos de rastreamento, buscando encontrar a melhor solução para rastreamento de um objeto em movimento, no caso um pêndulo duplo. Em seu artigo é descrito a dificuldade inerente à medição de um sistema que pode mudar seu padrão de movimento, como acontece em pêndulos duplos oscilando com relativamente alta energia.

Para a captura de imagem e reconhecimento de marcadores, (Goularte, 2014) descreve um modelo matemático conhecido como "*pinhole camera*". Este modelo serve de base para o entendimento de como é feita a formação de imagens em dispositivos e como é possível corrigir defeitos gerados na sua captação. As imagens devem ser processadas posteriormente em algoritmos da plataforma Matlab, 2012, que permitiriam identificar múltiplos objetos, através do uso de filtros (RGB, grayscale, etc.). Para realizar o rastreamento de objetos por vídeo é preciso identificar os objetos de interesse quadro a quadro, e isolá-los dos demais objetos da cena. A maioria dos trabalhos são feitos para propósitos específicos e são compostos apenas por um software combinado a um hardware de propósito geral (Queiroz, 2011). Normalmente esses marcadores são distinguidos pela cor.

### 3 REFERENCIAL TEÓRICO

#### 3.1 Equacionamento do movimento dinâmico do pêndulo duplo

Primeiramente deve ser modelado o comportamento dinâmico do pêndulo duplo, chegando em um sistema de equações diferenciais que determinam todos os seus estados a partir das variáveis envolvidas, servindo de base para comparar ação entre o movimento teórico do pêndulo e como ele realmente se desenvolve ao longo do tempo. A partir daí, deve ser obtida uma solução numérica para este sistema de forma que simulações já possam ser feitas no software Matlab, 2012. O equacionamento teórico para pêndulo duplo sem amortecimento está descrito em McCrummen, 2009 e é representado a seguir.

Na figura abaixo é apresentado um esquema de um pêndulo duplo com duas massas  $m_1$  e  $m_2$  e hastes (supostas de massa desprezível)  $l_1$  e  $l_2$ . O equacionamento para o movimento do pêndulo se inicia pelas equações de posição nos eixos cartesianos  $x$  e  $y$  de cada uma das massas:

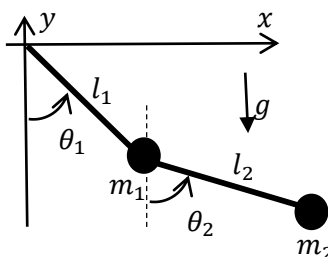


Figura 3.1 – Esquema do pêndulo duplo.  
(Fonte: Autor)

$$x_1 = l_1 \sin(\theta_1), \quad y_1 = -l_1 \cos(\theta_1), \quad (3.1)$$

$$x_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), \quad y_2 = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) \quad (3.2)$$

Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são medidos em relação a vertical e o eixo  $y$  é assumido positivo para cima. Partindo das equações de energia cinética  $E_c$  e potencial  $E_p$  para as massas, tem-se:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (3.3)$$

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (3.4)$$

Lembrando que, no caso de movimento circular,  $v = r\omega$ , onde  $r=l$  e  $\omega = \dot{\theta}$ , as equações anteriores para a posição das massas ficam:

$$v_1 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2, \quad v_2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2, \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1), \quad \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \quad (3.6)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1), \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \quad (3.7)$$

Assim, chega-se a:

$$v_1^2 = (l_1 \dot{\theta}_1)^2 \quad e \quad v_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (3.8)$$

E a equação da energia cinética, fica

$$E_c = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [(l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \quad (3.9)$$

E a correspondente equação para energia potencial fica:

$$E_p = -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)) \quad (3.10)$$

A diferença entre a energia cinética e a energia potencial vem dada pela equação de Lagrange:

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [(l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \quad (3.11)$$

Pelo teorema da mínima Energia potencial total, para se ter um mínimo do Lagrangeano a condição de estacionariedade vem dada por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \quad (3.13)$$

De forma que tem-se a seguinte equação para a primeira variável  $\theta_1$ :

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) l_1 g \sin(\theta_1) = 0 \quad (3.14)$$

Para a segunda variável  $\theta_2$  tem-se:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g \sin(\theta_2) = 0 \quad (3.15)$$

As duas equações anteriores representam um sistema de duas equações diferenciais de 2ª. ordem. Para resolução numérica por integração (quadratura), será rebaixada a ordem do sistema de equações para equações diferenciais de 1ª. ordem. Chamando  $\rho_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}$  e  $\rho_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}$ , chega-se a:

$$\rho_1 = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (3.16)$$

$$\rho_2 = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \quad (3.17)$$

Sabendo-se  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$ , os valores de  $\rho_1$  e  $\rho_2$  ficam definidos. Estas duas equações podem ser resolvidas para  $\dot{\theta}_1$  e para  $\dot{\theta}_2$ , ficando as mesmas em função de  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

Desta forma, agora para se obter as quatro condições iniciais do problema ( $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ ), pode-se montar a equação Hamiltoniana  $\mathcal{H} = \theta_1 \rho_1 + \theta_2 \rho_2 - L$ , que resulta:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (m_1 + m_2)gl_1 \cos(\theta_1) - m_2 gl_2 \cos(\theta_1) \quad (3.18)$$

Substituindo nesta equação os valores de  $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$ , chega-se a:

$$\mathcal{H} = \frac{m_2 l_2^2 \rho_2^2 + (m_1 + m_2)l_1^2 \rho_1^2 - 2m_2 l_1 l_2 \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2m_2 l_1^2 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} - (m_1 + m_2)l_1 g \cos(\theta_1) - m_2 l_2 g \cos(\theta_2) \quad (3.19)$$

A qual contém as quatro condições iniciais e pode ser separada em quatro equações diferenciais de 1ª. ordem. Desta forma, lembrando que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_1} = \frac{d\theta_1}{dt} = \dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_2} = \frac{d\theta_2}{dt} = \dot{\theta}_2 \quad (3.20)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_1} = \frac{d\rho_1}{dt} = \dot{\rho}_1, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_2} = \frac{d\rho_2}{dt} = \dot{\rho}_2 \quad (3.21)$$

Fazendo-se as derivadas indicadas anteriormente, chega-se ao conjunto de 4 equações diferenciais de 1ª. ordem que facilmente podem ser integradas, por exemplo, com Runge-Kutta (neste trabalho se utiliza a sub-rotina ode45.m do Matlab, 2012):

$$\dot{\theta}_1 = \frac{l_2 \rho_1 - l_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]}, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{l_1 (m_1 + m_2) \rho_2 - l_2 m_2 \rho_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_2^2 l_1 m_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (3.22)$$

$$\dot{\rho}_1 = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1) - \frac{\rho_1 \rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} + \frac{l_2^2 m_2 \rho_1^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) \rho_2^2 - l_1 l_2 m_2 \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \sin[2(\theta_1 - \theta_2)] \quad (3.23)$$

$$\dot{\rho}_2 = -m_2 gl_2 \sin(\theta_2) + \frac{\rho_1 \rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} - \frac{l_2^2 m_2 \rho_1^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) \rho_2^2 - l_1 l_2 m_2 \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \sin[2(\theta_1 - \theta_2)] \quad (3.24)$$

### 3.2 Inclusão da dissipação de energia

Para a inclusão da dissipação de energia nas juntas do pêndulo, deve-se agregar à equação 3.11 a energia referente aos termos dissipativos, e resolver para  $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$  seguindo o mesmo procedimento da seção 3.1. Diversos trabalhos na área dedicam-se ao estudo de como é dissipada a energia em um rolamento como o que foi usado na montagem do protótipo descrito na próxima seção. Firmo, 2007 descreve um pêndulo duplo com as ligações entre as partes feitas com o uso de rolamentos, com amortecimento viscoso e devido atrito de Coulomb. Sabe-se que há uma parcela de energia dissipada devido atrito de rolamento nas esferas, diretamente proporcional à carga exercida, e que aqui neste trabalho assume-se ser muito baixa, pois o peso do pêndulo é pequeno para o tipo de rolamento utilizado. Despreza-se também a energia dissipada por outras fontes, tais como atrito com ar. Assumindo uma parcela dissipativa do tipo viscosa nos rolamentos utilizados no protótipo, e supondo a parcela de atrito de rolamento entre as partes mecânicas do sistema suficientemente pequenas, a energia dissipativa, controlada por parâmetros de “amortecimento” à velocidade de rotação  $c_1$  e  $c_2$  (Nms/rad), torna-se:

$$E_d = \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad (3.25)$$

A ideia desse tipo de consideração, onde assumiu-se apenas a parte viscosa do amortecimento, é estimar o atrito através da análise do movimento real de um protótipo, e usar o valor estimado na simulação teórica em Matlab, 2012, verificando o erro gerado pelas considerações citadas. Ao final, as equações diferenciais de 2ª. ordem receberão termos referentes a estas dissipações, de forma que se transformarão em:

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)l_1 g \sin(\theta_1) - c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + c_2 \dot{\theta}_1 - c_1 \dot{\theta}_1 = 0 \quad (3.26)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g \sin(\theta_2) + c_2 \dot{\theta}_2 - c_2 \dot{\theta}_1 = 0 \quad (3.27)$$

Este sistema pode ser resolvido então pelo mesmo procedimento descrito anteriormente por integração de um conjunto de 4 equações diferenciais de 1ª. ordem.

## 4 MEDIÇÕES EXPERIMENTAIS

### 4.1 Descrição do protótipo de pêndulo duplo

Para validação do modelo teórico que descreve o movimento de duas massas concentradas em um pêndulo duplo, construiu-se um protótipo de pêndulo através de duas régua ligadas por um parafuso, duas porcas e um rolamento. No ponto de fixação do protótipo no painel foi também adicionado um rolamento, a fim de facilitar o movimento do protótipo e adequá-lo ao modelo proposto na seção 3, com dissipação de energia somente nos rolamentos. Na extremidade da régua menor, concentrou-se a carga através da colocação de outro parafuso com duas porcas associadas, conforme figura abaixo.

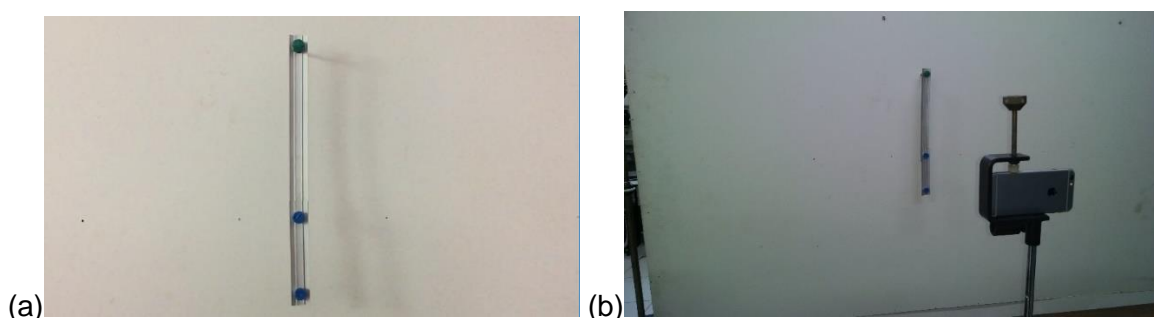


Figura 4.1 – (a) Protótipo do pêndulo duplo e (b) Montagem experimental.  
(Fonte: Autor)

A fim de se reduzir o máximo possível o atrito entre as partes, os rolamentos foram devidamente lubrificados. Observa-se também na figura a presença de três marcadores: Dois azuis, colocados nas extremidades das massas concentradas, para rastreamento da posição desses pontos ao longo do tempo por parte do programa em Matlab, (2012), além de um marcador verde, colocado no eixo fixo onde o sistema irá oscilar, que servirá como referencial inercial para a obtenção dos ângulos instantâneos dos pêndulos. Todos os marcadores são circulares com 0,02 m de diâmetro. As massas concentradas foram medidas com balança de precisão, com calibração INMETRO, e indicaram  $m_1=0,03$  kg e  $m_2=0,0191$  kg. Os comprimentos medidos para cada um dos pêndulos, com uso de paquímetro com resolução 0,02mm, indicam  $l_1=0,270$  m e  $l_2=0,127$  m. As filmagens foram feitas num aparelho Iphone 6 com resolução de HDTV de 720 (1280 x 720 pixels) e taxa de aquisição de 120 frames/s, valores adequados para um processamento dentro de um tempo razoável e incerteza dentro de limites compatíveis com as incertezas utilizadas pelos outros instrumentos de medição.

### 4.2 Descrição do programa em Matlab

Para rastreamento dos marcadores posicionados nos pontos em estudo no pêndulo, desenvolveu-se um algoritmo em Matlab, 2012, capaz de reconhecê-los através de sua cor, e plotar em dois gráficos a posição X e Y e o ângulo  $\theta$  de cada marcador em relação ao tempo. O marcador verde foi posicionado no único ponto imóvel do sistema, ou seja, seu eixo, objetivando o reconhecimento do referencial por parte do programa ainda na etapa de calibração e que servirá para definir o referencial inercial e medir ângulos dos dois pêndulos assim como distorções de lentes. Posteriormente, inicia-se o rastreamento dos marcadores azuis, onde se grava o vídeo com o pêndulo em movimento. A sequência de imagens é tratada com filtros em nível de cinza (*grayscale*) que é subtraída da imagem sem a cor do marcador e posteriormente aplicando um filtro preto e branco para obter o marcador em branco apenas, e todo o resto da imagem em preto. O principal objetivo desse tipo de transformação é gerar uma imagem mais adequada para processamento e rastreamento do marcador do que a imagem inicial, reduzindo

ruído e distorções e isolando os pontos de interesse do restante do ambiente. Ressalta-se que apesar da utilização de filtros buscando um melhor processamento, não existem técnicas capazes de eliminar todos os problemas que podem ser gerados em uma imagem digital como a perda de qualidade por insuficiência de Pixels ou mesmo *aliasing* por insuficiência de taxa de amostragem da imagem. Portanto estes dois itens, qualidade e taxa de amostragem devem ser definidos, *a priori*, de forma a atender aos requisitos da medição.

### 4.3 Estimação da constante de amortecimento viscoso

Para estimação da constante de amortecimento no sistema, parte-se do modelo de amortecimento proporcional, onde pressupõe-se que a natureza do amortecimento é viscosa. A dissipação de energia se opõe ao movimento e é proporcional à velocidade de rotação relativa ( $\dot{\theta}_1$  e  $(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$ ). Ressalta-se que há diversos métodos de determinação da constante de amortecimento, e a escolha depende principalmente da faixa de amortecimento e da frequência de vibração. Os métodos mais utilizados na prática, para estimação da constante de amortecimento viscoso, são o do decremento logarítmico e o da largura de banda de meia potência (Meirovitch, 1986). O processo de estimação neste trabalho é baseado no método do decremento logarítmico, que consiste em estimar a constante de amortecimento através da razão entre duas ou mais, amplitudes sucessivas. O decremento logarítmico está relacionado com a redução do movimento com o passar do tempo, pois parte da energia é dissipada por atrito e/ou pela parcela viscosa, transferida para outras partes do sistema ou absorvida pelo próprio elemento. Após uma excitação inicial em um sistema oscilatório com amortecimento viscoso, este apresenta, para a sua amplitude de movimento, um comportamento similar ao representado na Figura 4.2.

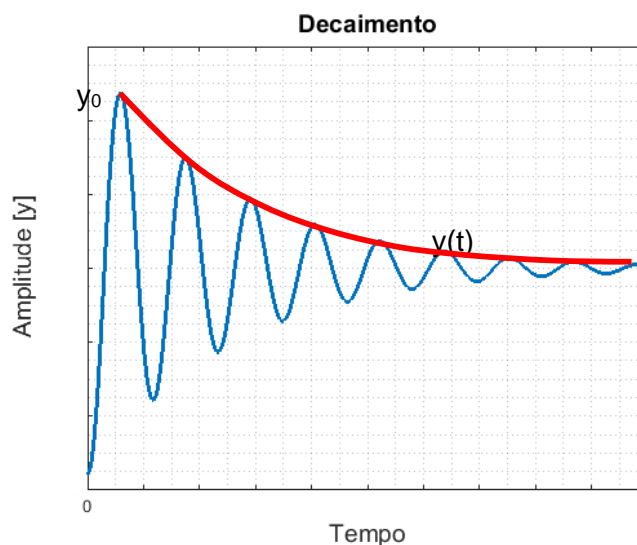


Figura 4.2 – Comportamento de sistema em vibração livre subamortecido.  
(Fonte: Autor)

Este tipo de sistema oscilatório amortecido, pode ser descrito por uma função senoidal onde as amplitudes sucessivas decaem exponencialmente, conforme equação

$$y(t) = y_0 e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\omega_d \cdot t) \quad (4.1)$$

onde  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$  é a frequência natural amortecida do sistema e  $\zeta$  é a chamada razão de amortecimento do sistema  $\zeta = c/c_{cr} = c/(2\sqrt{km})$ .

Sendo a resposta no tempo  $t = t_n$  denotada por  $y$ , e a resposta no tempo  $t = t_n + \frac{2\pi n}{\omega_d}$  denotada por  $y_n$ , temos que:

$$\frac{y}{y_n} = \exp\left(\zeta \frac{\omega_0}{\omega_d} 2\pi n\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Supondo que  $y$  corresponde a um ponto no pico de decaimento da função, com magnitude igual a  $A$ , e que  $y_n$ , corresponde ao pico no decaimento,  $n$  ciclos mais tarde, com magnitude  $A_n$ , temos que:

$$\frac{A}{A_n} = \exp\left(\zeta \frac{\omega_0}{\omega_d} 2\pi n\right) = \exp\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} 2\pi n\right) \quad (4.3)$$

Assim sendo, o decremento logarítmico,  $\delta$  é obtido por (Rao, 2008):

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{A}{A_n}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.4)$$

E em termos da razão de amortecimento  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2}} \quad (4.5)$$

Portanto, avaliando-se experimentalmente  $\delta$ , pode-se avaliar a razão de amortecimento  $\zeta$ , e posteriormente, avaliar o amortecimento do sistema  $c$ .

#### 4.4 Resultados obtidos para constante de amortecimento

A seguir, na Tabela 4.1 e Tabela 4.2, indicam-se os valores obtidos de constantes de amortecimento nos experimentos realizados no laboratório do GMAp para o pêndulo duplo protótipo apresentado anteriormente para 3 medições. Observa-se certa dispersão.

Tabela 4.1 – Valores obtidos da constante de amortecimento do pêndulo duplo para o marcador 1, neste estudo.

Experimento Marcador 1	$\omega_d$ [rad/s]	$\delta$ [adm]	$\zeta$ [adm]	$c_1$ [Nms/rad]
1	5,4660	2,20E-02	3,51E-03	<b>1,15E-03</b>
2	5,4761	2,18E-02	3,47E-03	<b>1,14E-03</b>
3	5,4793	3,10E-02	4,94E-03	<b>1,62E-03</b>

Tabela 4.2 – Valores obtidos da constante de amortecimento do pêndulo duplo para o marcador 2, neste estudo.

Experimento Marcador 2	$\omega_d$ [rad/s]	$\delta$ [adm]	$\zeta$ [adm]	$c_2$ [Nms/rad]
1	5,4865	2,28E-02	3,63E-03	<b>7,61E-04</b>
2	5,4969	1,12E-02	1,78E-03	<b>3,74E-04</b>
3	5,3548	1,35E-01	2,14E-02	<b>4,38E-03</b>

#### 4.5 Resultados obtidos para frequências fundamentais amortecidas para comportamento periódico e quase-periódico.

Na tabela 4.3 a seguir são indicadas as frequências fundamentais amortecidas obtidas numericamente e experimentalmente com o sistema óptico de medição proposto. As frequências fundamentais amortecidas numéricas são obtidas através da transformada de Fourier do sinal de deslocamento angular ao longo do tempo, calculadas através da função `fft.m` do Matlab, e plotadas em gráficos tal como representado na figura 4.3.



Tabela 4.3 – Valores de frequências fundamentais amortecidas obtidas experimentalmente e numericamente.

Experimento	Experimental	Numérico	Diferença Percentual [%]	Experimental	Numérico	Diferença Percentual [%]
	$f_1$ [Hz]	$f_1$ [Hz]		$f_2$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	
1	0,87007	0,86	-1,170	0,873235	0,86	-1,539
2	0,871586	0,86	-1,347	0,874891	0,86	-1,731
3	0,872093	0,86	-1,406	0,852273	0,86	0,899

As frequências fundamentais amortecidas numéricas foram obtidas através da transformada de Fourier do sinal de deslocamento angular ao longo do tempo. A figura 4.3 ilustra um exemplo de gráfico da transformada da posição angular das massas, gerado nas simulações teóricas.

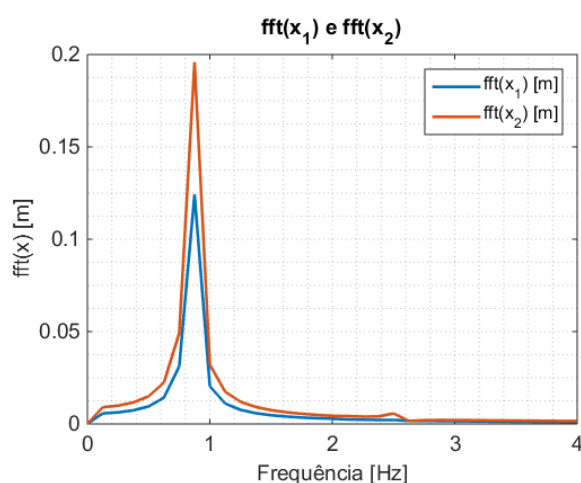


Figura 4.3 – Gráficos das FFT da posição angular das massas nas simulações numéricas para o caso de pêndulo com comportamento periódico ( $\theta_1 = -31^\circ$  e  $\theta_2 = -38,6^\circ$  e velocidades iniciais nulas e amortecimento medido).

Utilizou-se os amortecimentos calculados na seção 4.4 e aplicou-se na solução teórica em Matlab, 2012. O resultado fornecido e plotado em gráfico comparando amplitudes de oscilação em X, Y e  $\theta$ , todos em função do tempo, mostra que o sistema teórico previsto ficou muito amortecido em relação ao experimental, ou seja, as constantes de amortecimento viscoso  $c_1$  e  $c_2$  são muito elevadas. A figura 4.3 ilustra o decaimento em  $\theta$  na simulação teórica com ângulos iniciais de  $\theta_1 = -31^\circ$  e  $\theta_2 = -38,6^\circ$  e velocidades iniciais nulas, considerando  $c_1 = 1,14E-03$  Nms/rad e  $c_2 = 3,74E-04$  Nms/rad, referentes ao experimento 2.

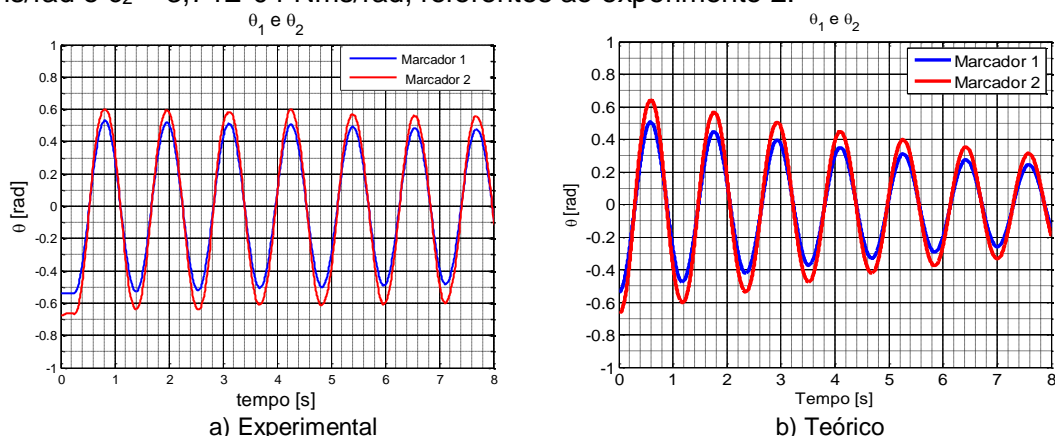


Figura 4.4 – Ângulos dos pêndulos obtidos experimentalmente e numericamente para condições iniciais de  $\theta_1 = -31^\circ$  e  $\theta_2 = -38,6^\circ$  e velocidades iniciais nulas.

Supõe-se que esse amortecimento elevado decorre do fato de se ter desprezado os atritos de rolamento e de Coulomb, considerando um modelo viscoso, onde as amplitudes decaem exponencialmente. Na prática, é muito difícil prever como a energia vai ser dissipada no rolamento com modelos teóricos, devido ao fato das parcelas dos diferentes tipos de atrito variarem conforme se mudam as cargas no sistema, a velocidade de rotação no mecanismo e a lubrificação nas junções. Percebe-se que utilizando o método do decaimento logarítmico, trabalha-se somente na região onde o decaimento é exponencial, o que fornece uma queda muito elevada nas amplitudes sucessivas em curto intervalo de tempo, como é o caso do protótipo, onde foi analisado períodos de 9 a 10 segundos de movimento. Firmo, 2007, utilizou os valores de  $c_1$  e  $c_2$  para os rolamentos usados em seu trabalho como sendo de  $1,5 \times 10^{-4}$  Nms/rad. Os dados foram fornecidos pelo próprio fabricante como uma estimativa. Outros trabalhos já realizados na área apontam para coeficientes de amortecimento viscoso da mesma ordem de grandeza, de  $10^{-5}$ , para rolamentos em operação. Para validação do modelo, utilizou-se então o valor fornecido pelo próprio fabricante de  $1,5 \times 10^{-5}$  Nms/rad nos dois rolamentos utilizados, e realizou-se o teste no algoritmo em Matlab, 2012, para solução do sistema de equações da seção 3.

Os resultados obtidos nas simulações teórica e experimental de 3 experimentos realizados com comportamento periódico estão ilustrados nas figuras 4.5, 4.6 e 4.7. O primeiro gráfico de cada figura representa o resultado do experimento prático, enquanto o segundo gráfico representa a simulação teórica, onde considerou-se coeficiente de atrito viscoso igual a  $1,5 \times 10^{-5}$  Nms/rad nos dois rolamentos os ângulos iniciais obtidos com o sistema óptico no próprio experimento.

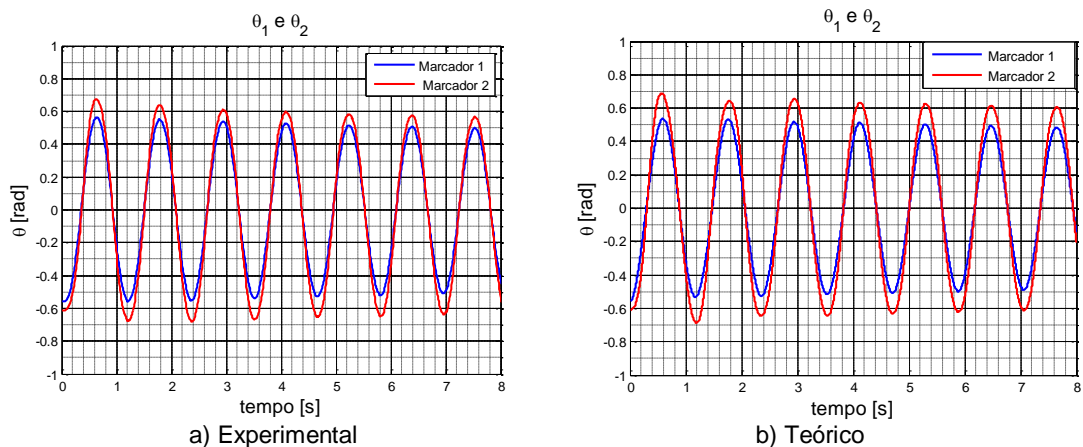


Figura 4.5 – Simulações para ângulos iniciais  $\theta_1 = -32^\circ$  e  $\theta_2 = -35^\circ$  e velocidades iniciais nulas.

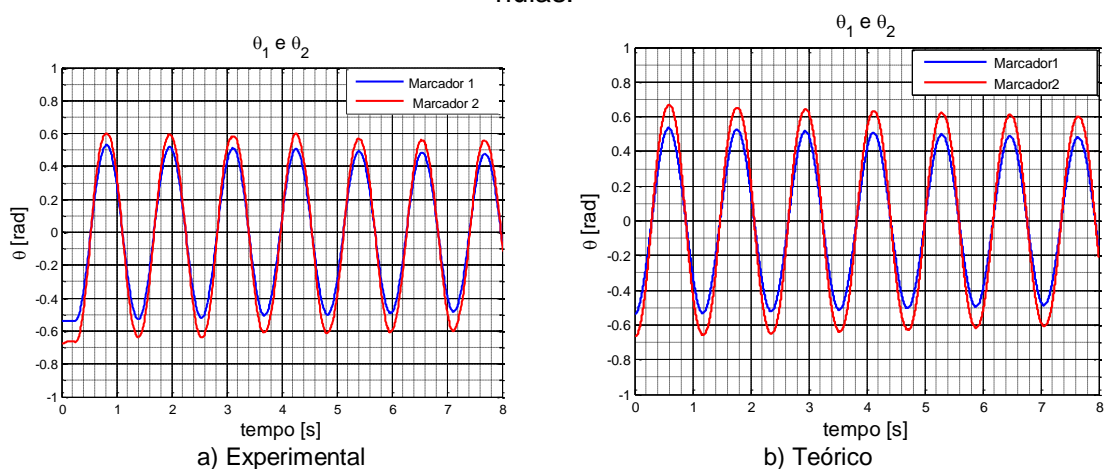


Figura 4.6 – Simulações para ângulos iniciais  $\theta_1 = -31^\circ$  e  $\theta_2 = -38,6^\circ$  e velocidades iniciais nulas.

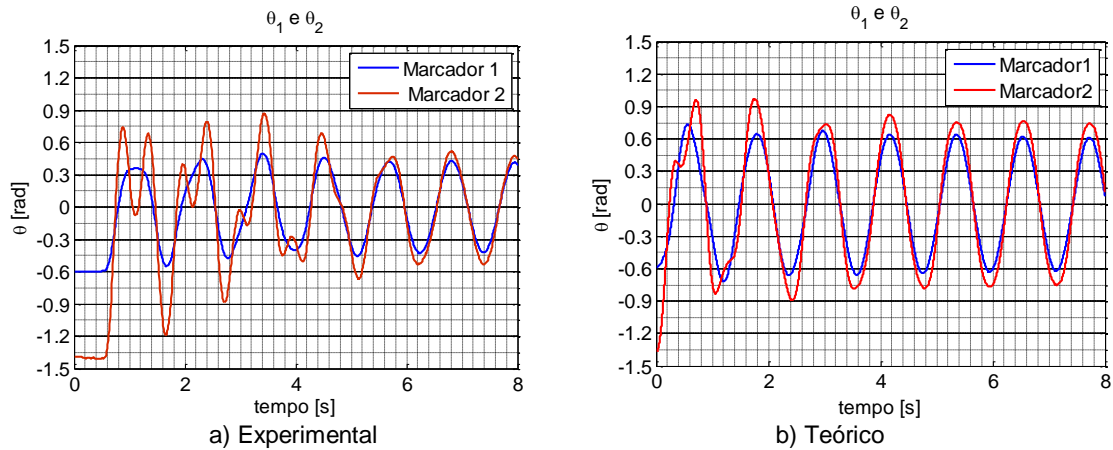


Figura 4.7 – Simulações para ângulos iniciais  $\theta_1 = -34^\circ$  e  $\theta_2 = -79^\circ$  e velocidades iniciais nulas.

Observa-se um comportamento muito similar nos dois primeiros casos, com um padrão oscilatório dos marcadores 1 e 2 praticamente igual no experimento e na simulação teórica, havendo uma variação pequena de amplitude de um ciclo para o outro, como esperado. Já o terceiro caso apresenta um padrão aleatório nos 4 primeiros ciclos na prática, o que não se vê no teórico. Isso se deve ao fato de se ter um maior ângulo inicial para a massa 2, o que começa a colocar o sistema mais próximo da condição de movimento caótico, onde o seu comportamento é de difícil previsão, pois é altamente sensível às condições iniciais do problema. Após um período de tempo de aproximadamente 4 segundos, a energia dissipada pelo sistema foi suficiente para que o sistema deixe de oscilar aleatoriamente e volte a apresentar um comportamento periódico, de acordo com o que se prevê na simulação teórica.

#### 4.6 Comportamento Caótico

Foram realizados 2 experimentos aumentando o ângulo inicial dos marcadores, e seus resultados ilustrados nas Figuras 4.8 e 4.9 para as coordenadas  $x$  e  $y$  das massas  $m_1$  e  $m_2$ . Observa-se que uma vez que o marcador inferior gira tanto no sentido horário como no anti-horário, é difícil definir um sistema de coordenadas que ilustre o ângulo dos marcadores sem que haja algum tipo de confusão. Para efeito de comparação, foram então traçadas as trajetórias dos marcadores diretamente, bem como suas posições em  $x$  e  $y$  ao longo do tempo. O primeiro gráfico de cada figura representa o resultado do experimento prático, enquanto o segundo gráfico representa a simulação teórica, considerando o valor do ângulo inicial de cada marcador obtido diretamente da simulação prática.

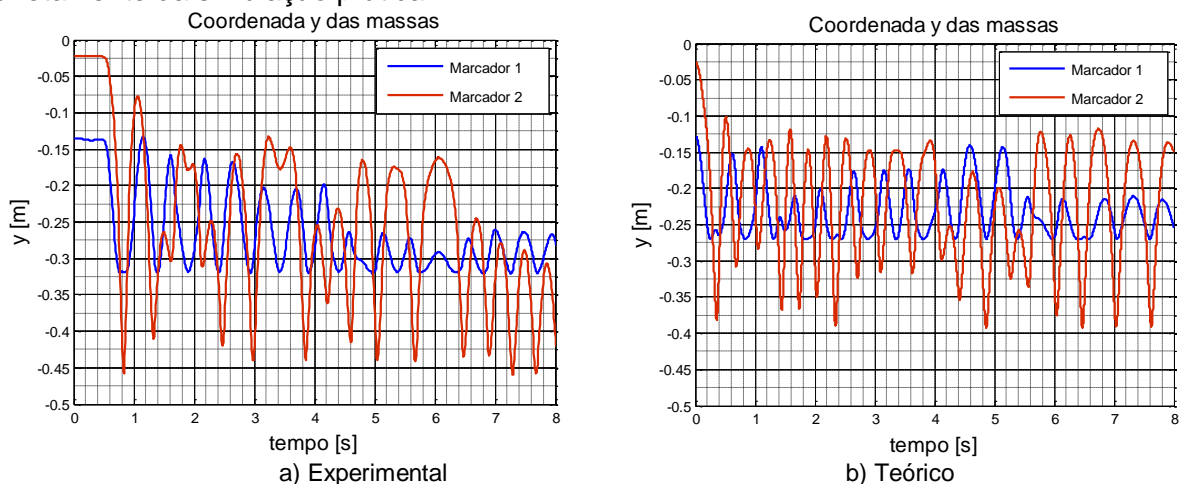


Figura 4.8 – Medições e simulações da coordenada  $y$  das duas massas para ângulos iniciais  $\theta_1 = -62^\circ$  e  $\theta_2 = -214^\circ$ .

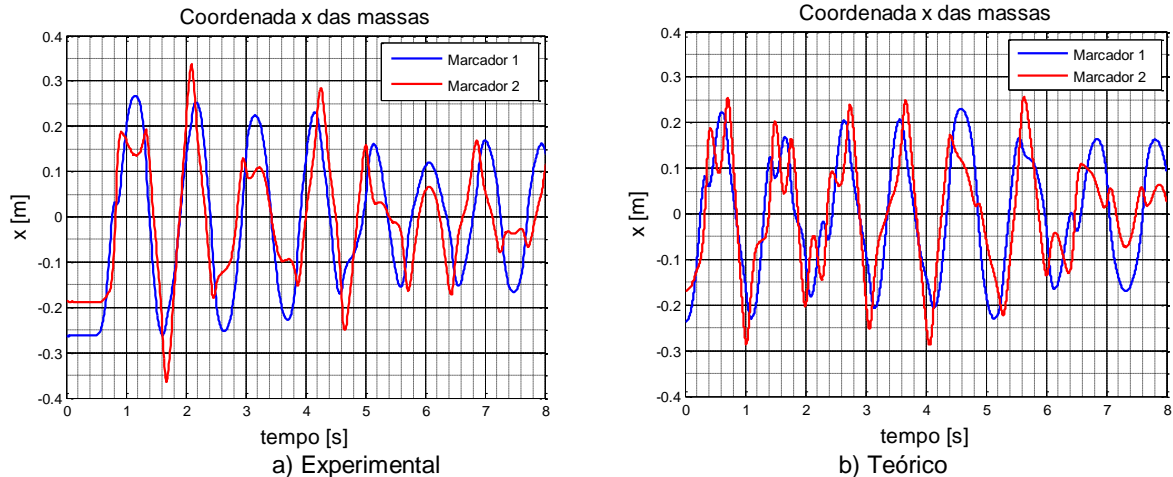


Figura 4.9 - Medições e simulações da coordenada  $x$  das duas massas para ângulos iniciais  $\theta_1 = -62^\circ$  e  $\theta_2 = -214^\circ$

A figura 4.10 ilustra uma comparação entre as medições e as simulações para o caso do pêndulo duplo com ângulos iniciais de partida de  $\theta_1 = -62^\circ$  e  $\theta_2 = -214^\circ$ . Claramente percebe-se o comportamento caótico para o pêndulo 2, a qual dá várias voltas em torno de seu eixo de giro enquanto que o pêndulo 1 permanece com um comportamento periódico. As trajetórias são diferentes, apesar de utilizarem-se os mesmos dados iniciais e parâmetros para as simulações.

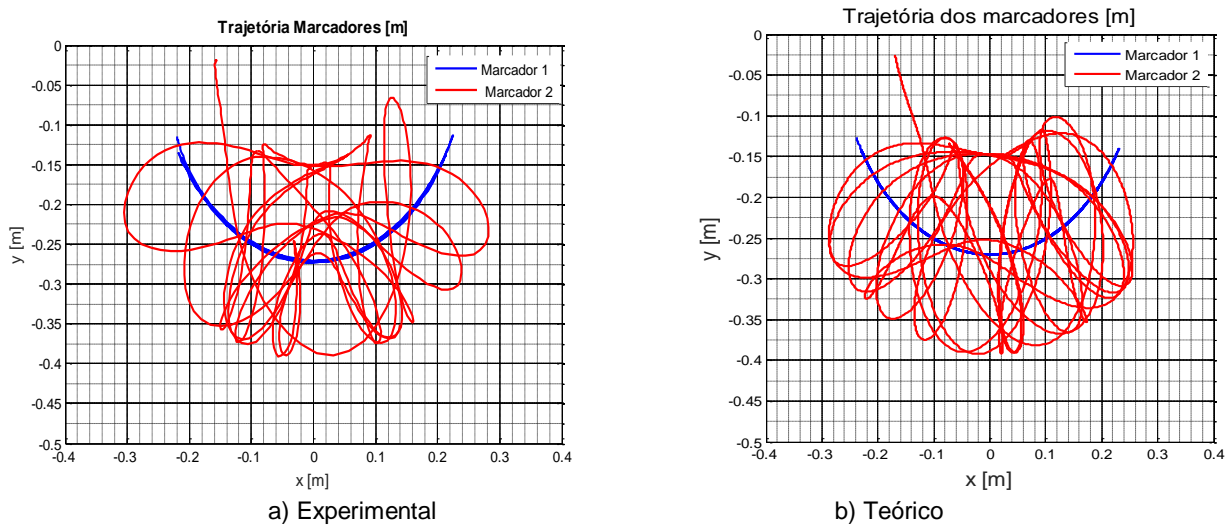
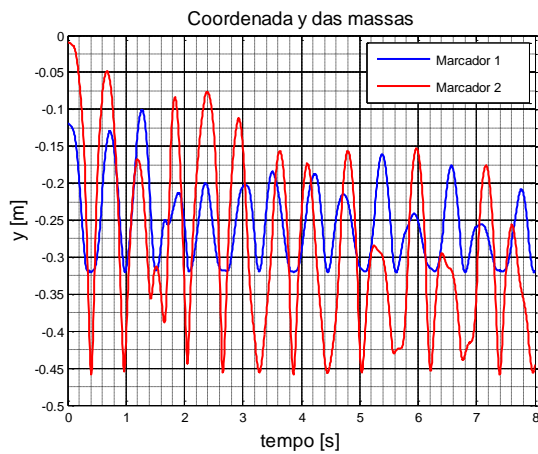


Figura 4.10 – Medições e Simulações da posição espacial das duas massas para ângulos iniciais  $\theta_1 = -62^\circ$  e  $\theta_2 = -214^\circ$

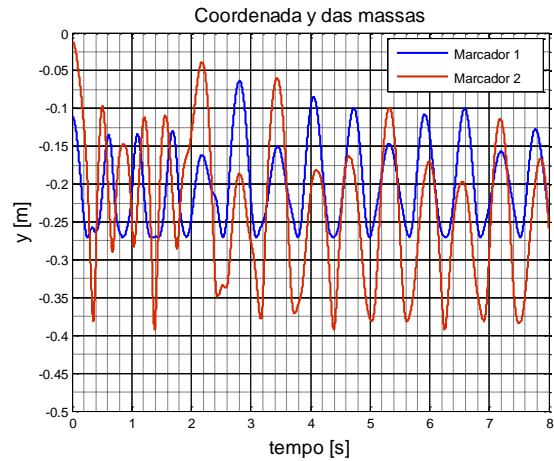
Em geral, percebe-se um padrão similar de oscilação para o marcador 1 e nem tanto para o marcador 2, aos mesmos valores de coordenadas ( $x$  e  $y$ ) esperadas com a simulação numérica: apesar da tentativa de manter as mesmas condições iniciais, mesmos parâmetros do protótipo experimental usado no teórico e soltando as partes do pêndulo dos mesmos ângulos e com velocidades iniciais nulas.

Um segundo experimento foi realizado também na condição de movimento caótico correspondendo a ângulos iniciais de partida de  $\theta_1 = -66^\circ$  e  $\theta_2 = -216^\circ$ . A Figura 4.11 e a Figura 4.12 ilustram as coordenadas  $y$  e  $x$  de posição para as massas 1 e 2 na condição de movimento caótico. A Figura 4.13 ilustra um comparativo entre a trajetória teórica e prática partindo das mesmas condições iniciais. O primeiro gráfico de cada figura representa o resultado do experimento prático, enquanto o segundo gráfico representa a simulação teórica, considerando o valor do ângulo inicial de cada marcador obtido diretamente da simulação prática.



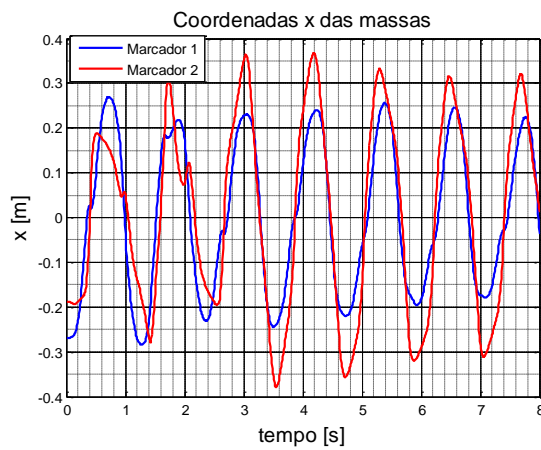


a) Experimental

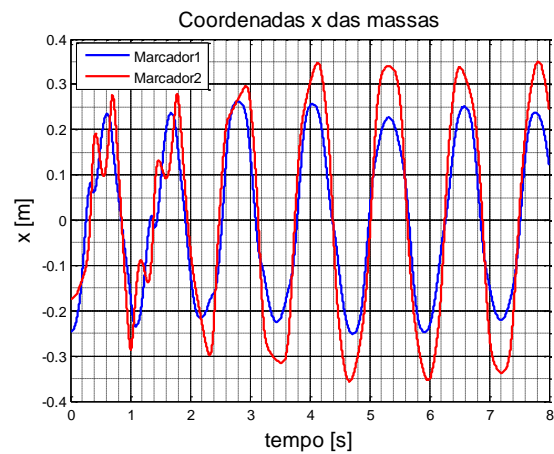


b) Teórico

Figura 4.11 – Medições e simulações para a coordenada y para ângulos iniciais  $\theta_1 = -66^\circ$  e  $\theta_2 = -216^\circ$  (pêndulo caótico).

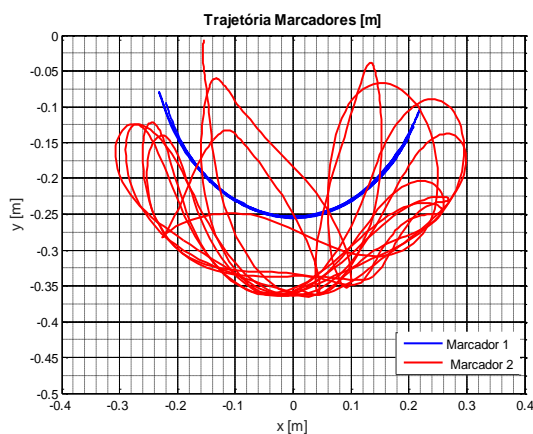


a) Experimental

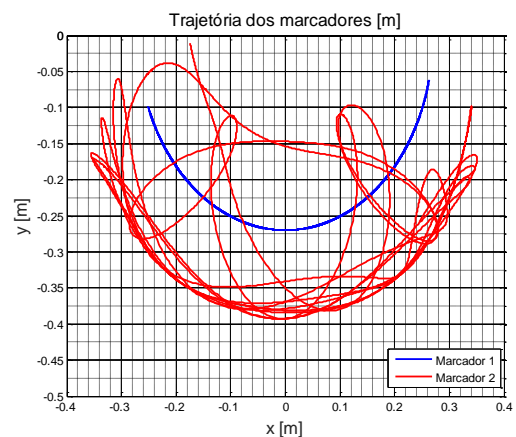


b) Teórico

Figura 4.12 – Medições e simulações para a coordenada x para ângulos iniciais  $\theta_1 = -66^\circ$  e  $\theta_2 = -216^\circ$  (pêndulo caótico).



a) Experimental



b) Teórico

Figura 4.13 - Simulações para ângulos iniciais  $\theta_1 = -66^\circ$  e  $\theta_2 = -216^\circ$

Observa-se que apesar da simulação teórica considerar o mesmo ângulo inicial dos marcadores, bem como suas massas e distância entre marcadores, os comportamentos das trajetórias resultantes, no caso caótico, diferem entre os modelos experimental e teórico obtidos.

Ressalta-se aqui que nas simulações do pêndulo solto com pequenos ângulos iniciais, a diferença entre os comportamentos foi praticamente nula, ou seja, apesar de terem sido desprezados fatores como atrito de Coulomb, atrito de rolamento, inércia das barras, entre outras possíveis variáveis que poderiam interferir no sistema, o resultado quando o pêndulo está oscilando em um estado de baixa energia apresenta um erro pequeno em relação ao que ocorre na prática com ele oscilando com alta energia. Porém, ao soltar os marcadores a partir de ângulos maiores, o sistema torna-se caótico e desenvolve um movimento completamente diferente do previsto na formulação teórica. Percebe-se também que, não só entre as simulações teórica e experimental, mas também entre os dois experimentos, apesar das condições iniciais serem parecidas, o padrão de oscilação do pêndulo também é muito diferente. Esta diferença entre comportamentos se deve à natureza caótica de um pêndulo duplo, ou seja, o sistema fica muito sensível às condições iniciais quando funcionando em um estado alto de energia. Torna-se muito complicado prever o comportamento de um sistema caótico à medida que cada variável desprezada provoca um efeito imprevisível na resposta.

Vale ressaltar que após certo número de ciclos, o comportamento de movimento dos pêndulos que estão na condição de caótica, volta a ser periódico e, novamente, o seu movimento passa a ser previsível. Portanto, na condição de movimento caótico, com a existência de certo amortecimento, apenas os primeiros ciclos são de difícil previsão, voltando a apresentar comportamento periódico após a dissipação da energia excedente.

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho propôs o projeto e construção de um sistema óptico automático para medições de deslocamentos e grandezas relacionadas ao movimento do pêndulo duplo. Particularmente foi construído um pêndulo duplo para testar as capacidades do sistema e incertezas relacionadas ao seu comportamento. O princípio do pêndulo é empregado em diversos ramos da engenharia e dispositivos sendo, portanto, o objeto da pesquisa de seu comportamento dinâmico. Foi proposto um modelo numérico para a predição do comportamento dinâmico do sistema que prevê a presença de amortecimento viscoso entre as juntas das hastes que unem as massas assim como da rótula de apoio do conjunto. O pêndulo duplo construído, dependendo de suas características e condições iniciais, pode apresentar distintos comportamentos oscilatórios (periódico, quase-periódico ou caótico) os quais são também objeto de estudo das medições experimentais efetuadas com o sistema óptico. Desenvolveram-se as equações diferenciais de movimento para pêndulos duplos a partir das equações de energia (cinética e potencial) e do Hamiltoniano para posterior solução através de rotinas de integração presentes no Matlab (ode45.m). O sistema de duas equações diferenciais de 2ª. ordem resultante é não-linear (há a presença do produto de variáveis incógnitas assim como funções trigonométricas destas variáveis), sendo de difícil solução analítica e mesmo com solução numérica trabalhosa. Assim, o sistema de 2 equações diferenciais de 2ª. ordem foi rebaixado a um sistema de 4 equações diferenciais de 1ª. ordem para posterior integração e utilização com a rotina no Matlab, 2012. Toda a formulação desenvolvida nesse trabalho foi então estendida para a consideração de amortecimento do tipo viscoso nos dois pontos de giro do pêndulo e toda a formulação readequada para esta nova condição.

Observou-se na comparação entre as simulações teórica e experimental uma diferença não desprezível entre o amortecimento real e o esperado considerando apenas o amortecimento viscoso, o que demonstrou a importância da parcela dissipativa referente a atrito de Coulomb. Através das simulações em Matlab, 2012, considerando o valor da constante de amortecimento fornecida pelo próprio fabricante do rolamento, foi então observada uma boa correspondência entre o movimento real do pêndulo duplo e o previsto no modelo teórico quando o pêndulo oscilava periodicamente. Porém, os resultados para o protótipo ao partir ângulos maiores geraram valores um pouco diferentes do que se previu no modelo teórico. A natureza caótica de um pêndulo duplo implica em um sistema altamente sensível às condições iniciais, o que explica o fato de pequenas diferenças nas parcelas de energia dissipada, desprezadas sem muito prejuízo quando solta-se um pêndulo de um estado inicial de baixa energia, gerarem

comportamentos tão distintos, o que torna esse tipo de sistema difícil de ser previsto através de um modelo teórico viável de se modelar e com baixo custo computacional. A importância de um sistema de medição adequado fica evidente quando se deseja analisar um sistema com natureza caótica como o pêndulo estudado, uma vez que muitas vezes necessita-se prever condições de operação de um mecanismo com maior precisão, o que é extremamente difícil de se obter em modelos teóricos, devido à necessidade de se conhecer com mais precisão as condições iniciais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Akerlof, C. W., “**The chaotic motion of a double pendulum**”, Lecture Notes. Department of Physics, University of Michigan, 2012.

Ceseracciu, E., Sawacha, Z., e Cobelli, C., 2014, “**Comparison of Markerless and Marker-Based Motion Capture Technologies through Simultaneous Data Collection during Gait: Proof of Concept**”, PLoS ONE, Vol.9, pp. e87640.

Davidson, G. D. “**The damped pendulum: bifurcation analysis of experimental data**”. The division of Mathematics and Natural Sciences, Reed College, Monography, 2011.

Eyre N., Holzgrafe J. “**Modeling of a Damped Triple Pendulum**. Franklin W. Olin College of Engineering, ENGR 2340: Dynamics, Internal Report, 2008.

Firmo, D. L. (2007). “**Construção e Caracterização Dinâmica de um Pêndulo Duplo Caótico**.” Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais. (Dissertação de Mestrado, PPGEE).

Goularte, B. F. “**Desenvolvimento de um sistema de medições ópticas para medição de parâmetros biodinâmicos da caminhada humana**”. 19f, Monografia (Trabalho de Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

Levien, R. B., Tan, S. M., “**Double pendulum: An experiment in chaos**” Princeton University, Princeton, New Jersey. University of Auckland, New Zealand. 1993.

MATLAB, Release 2012, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States. 2012.

McCrummen, J., “**The double pendulum**”, Lecture notes on differential equations. Flathead Valley University, 2009.

Meirovitch, L. “**Elements of Vibration Analysis**”, 2a. Ed. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.1986.

Paula, A. S., Savi, M. A., Pereira-Pinto, F. H. I. “**Chaos and transient chaos in an experimental nonlinear pendulum**”. Journal of Sound and Vibration, 2006.

Queiroz, D. P., “**Avaliação de método de rastreamento de marcadores para um sistema óptico de captura de movimento**”. Dissertação (Pós-Graduação em Ciência da Computação), UFMG.

Sundaresan, A., Chellappa, R. (2005). “**Markerless motion capture using multiple cameras**.” In CVIIE '05: Proceedings of the Computer Vision for Interactive and Intelligent Environment, pp.15-26, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. <http://dx.doi.org/10.1109/CVIIE.2005.13>.

Ukoba O.K., Olunlade B.A. e Shelby W. “**Model-Based Object Tracking of Moving Object: Double Pendulum**” University of Maryland, Department of Mathematics, College Park, MD. 2011.

Yao, Y., Freeman W.J. “**Model of biological pattern recognition with spatially chaotic dynamics**” University of California, Berkeley 1990.

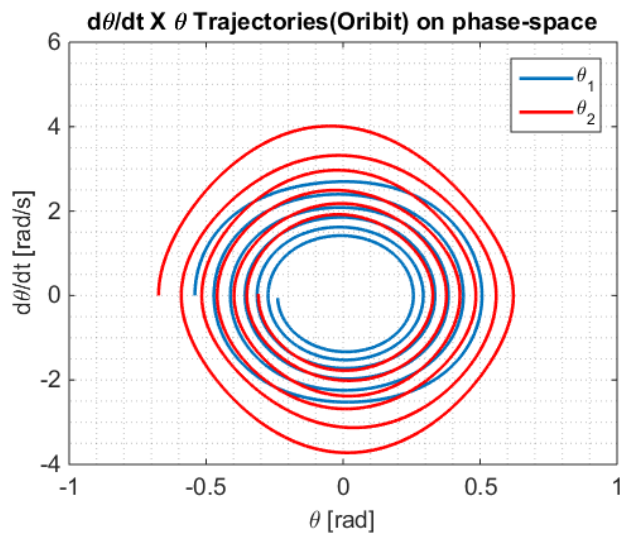


Figura A.1. –Gráfico de órbitas ou espaço-fase mostrando claramente os dois atratores para cada uma das massas dos pêndulos, característico de sistemas periódicos ( $\theta_1 = -31^\circ$  e  $\theta_2 = -38,6^\circ$  e velocidades iniciais nulas e amortecimento medido).



Figura A.2 - Quadro (Frame) para  $t=0,85$  s do sistema óptico mostrando o posicionamento e reconhecimento dos marcadores ( $\theta_1 = -31^\circ$  e  $\theta_2 = -38,6^\circ$ , velocidades iniciais nulas).